ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Автор: А. М. Захаров, М.В. Крылова

ЛОГАРИФМ И ЕГО СВОЙСТВА.
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Учебно-методическое пособие для учащихся средних образовательных школ, студентов специального профессионального
образования и высших учебных заведений

Саратов
2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Работа представляет собой материалы для электронного образовательного курса «Логарифм и его свойства. Логарифмические уравнения и неравенства». Практическое значение данного пособия заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели. Курс содержит полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы согласно учебному плану в рамках образовательной программы, и обеспечивает все виды работы в соответствии с программой дисциплины, включая практикум, средства для контроля качества усвоения материала, методические рекомендации для обучающегося по изучению данной темы.

Основные **цели** создания электронного образовательного курса:

- повышение качества обучения при реализации образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;

- оптимизация деятельности педагогического состава, работающего с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;

- создание электронной информационно-образовательной среды, позволяющей осуществлять индивидуальный подход в образовательном процессе.

Задачи создания электронного образовательного курса:

- соответствие единым требованиям к структуре, отдельным элементам ЭОК и технологиям обучения по нему в системе дистанционного образования Ipsilon;

- обеспечение образовательного процесса учебно-методическими и контрольно-измерительными материалами по теме, реализуемой в системе дистанционного образования Ipsilon;

- постоянное совершенствование и обновление комплекса учебно-методических материалов по данной теме.

Логарифмы были придуманы для ускорения и упрощения вычислений. Идея логарифма, т. е. идея выражать числа в виде степени одного и того же основания, принадлежит Михаилу Штифелю. Но во времена Штифеля математика была не столь развита и идея логарифма не нашла своего развития. Логарифмы были изобретены позже одновременно и независимо друг от друга шотландским учёным Джоном Непером(1550-1617) и швейцарцем ИобстомБюрги(1552-1632). Первые таблицы логарифмов на русском языке были изданы в1703г. при участии замечательного педагога XVIIIв. Л. Ф. Магницкого [2]. В развитии теории логарифмов большое значение имели работы петербургского академика Леонарда Эйлера. Он первым стал рассматривать логарифмирование как действие, обратное возведению в степень, он ввёл в употребление термины «основание логарифма» и «мантисса». Бригс составил таблицы логарифмов с основанием 10. Поэтому десятичные логарифмы иногда называют бригсовыми. Десятичные таблицы более удобны для практического употребления, теория их проще, чем у логарифмов Непера [3].

Само понятие логарифма несложное. Главное то, что необходима хорошая практика, которая даёт определённый навык. Разумеется, знание формул обязательно. Если навык в преобразовании элементарных логарифмов не сформирован, то при решении заданий можно легко допустить ошибку. Возникла **проблема**, которая заключается в отсутствии дистанционных материалов контроля при изучении логарифмов. Поэтому,

актуальность исследования определяется потребностью в создании дистанционных форм обучения, а именно тестовых заданий, обеспечивающих текущий контроль при решении логарифмов.

Исходя из проблемы и цели исследования, определены следующие его **задачи**:

– рассмотреть основные методы решения;

– разработать электронный образовательный курс.

Пособие состоит из двух глав, в каждой из которых содержится учебно-методические материалы по соответствующим темам и образцы решений тестовых задач. В качестве контрольно-измерительных материалов необходимо использовать сборник тестов «Логарифм и его свойства. Логарифмические уравнения и неравенства», размещенный в электронной библиотеке СГУ.

1 Логарифм и его свойства

1.1 Определение и основные элементарные свойства логарифмов

Логарифмом числа $x > 0$ по основанию $a > 0$, $a \neq 1$ называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число x.

Логарифм числа x по основанию a обозначается: $\log_a x$, произносится: «логарифм x по основанию a». Из определения следует, что нахождение $b = \log_a x$ равносильно решению уравнения $a^b = x$. Например, $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$.

Из определения логарифма следует два важных факта:

1. Аргумент и основание всегда должны быть больше нуля. Это следует из определения степени с рациональным показателем, к которому сводится определение логарифма.

2. Основание должно быть отличным от единицы, поскольку единица в любой степени все равно остается единицей. Из-за этого вопрос «в какую степень надо возвести единицу, чтобы получить двойку» лишен смысла. Нет такой степени.

Такие ограничения называются областью допустимых значений (ОДЗ). Получается, что ОДЗ логарифма выглядит так:

$$\log_a x = b \rightarrow x > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Заметим, что никаких ограничений на число b (значение логарифма) не накладывается. Например, логарифм вполне может быть отрицательным: $\log_2 0{,}5 = -1$, т.к. $0{,}5 = 2^{-1}$.

Теперь рассмотрим общую схему вычисления логарифмов. Она состоит из трех шагов:

1. Представить основание a и аргумент x в виде степени с минимально возможным основанием, большим единицы. Также лучше избавиться от десятичных дробей.

2. Решить относительно переменной b уравнение: $x = a^b$.

3. Полученное число b будет ответом.

Если логарифм окажется иррациональным, это будет видно уже на первом шаге. Требование, чтобы основание было больше единицы, весьма актуально: это снижает вероятность ошибки и значительно упрощает выкладки. Аналогично с десятичными дробями: если сразу перевести их в обыкновенные, то ошибок будет меньше.

Некоторые логарифмы встречаются настолько часто, что имеют специальное название и обозначение.

Десятичный логарифм от аргумента x – это логарифм по основанию 10, т.е. степень, в которую надо возвести число 10, чтобы получить число x. Обозначение: $\lg x$. Впрочем, если вам непривычно такое обозначение, его всегда можно переписать: $\lg x = \log_{10} x$.

Например, $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$; $\lg 1000 = 3$ – и т. д.

Натуральный логарифм от аргумента x – это логарифм по основанию e, т.е. степень, в которую надо возвести число e, чтобы получить число x. Обозначение: $\ln x$.

Таким образом, $\ln e = 1$; $\ln e^2 = 2$; $\ln e^{16} = 16$ – и т. д.

Равенство $a^{\log_a b} = b$ является другой формой определения логарифма. Его называют основным логарифмическим тождеством.

Например, $8^{2log_8 3} = (8^{log_8 3})^2 = 3^2 = 9$.

Логарифмы обладают рядом характерных свойств, которые мы разберем подробнее, а именно: дадим их формулировки, запишем свойства логарифмов в виде формул, покажем примеры их применения, а также приведем доказательства некоторых свойств логарифмов.

1. Свойство логарифма единицы: $\log_a 1 = 0$ для любого $a > 0$, $a \neq 1$. Его формулировка такова: логарифм единицы равен нулю. Доказательство не вызывает сложностей: так как $a^0 = 1$ для любого a, удовлетворяющего

указанным выше условиям $a > 0$, $a \neq 1$, то доказываемое равенство $\log_a 1 = 0$ сразу следует из определения логарифма.

2. Логарифм числа, равного основанию: $\log_a a = 1$ при $a > 0$, $a \neq 1$. Его формулировка такова: логарифм числа, равного основанию, равен единице. Действительно, так как $a^1 = a$ для любого a, то по определению логарифма $\log_a a = 1$.

3. Свойство логарифма степени основания: $\log_a a^p = p$, где $a > 0$, $a \neq 1$ и p – любое действительное число. Данное свойство формулируют так: логарифм степени числа, равного основанию логарифма, равен показателю степени. Это свойство напрямую следует из определения логарифма. Заметим, что оно позволяет сразу указать значение логарифма, если есть возможность представить число под знаком логарифма в виде степени основания [5].

Например: $\log_7 7^9 = 9$, $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5})^{6,4} = 6{,}4$;

4. Логарифм произведения двух положительных чисел: $\log_a(x \cdot y) = = \log_a x + \log_a y$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ и свойство логарифма произведения n положительных чисел: $\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + + \cdots + \log_a x_n$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, …, $x_n > 0$.

Логарифм произведения двух положительных чисел x и y равен произведению логарифмов этих чисел. Докажем это свойство. В силу свойств степени $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$, а так как по основному логарифмическому тождеству $a^{\log_a x} = x$ и $a^{\log_a y} = y$, то $a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y$. Таким образом, $a^{\log_a x + \log_a y} = x \cdot y$, откуда по определению логарифма вытекает доказываемое равенство.

Свойство логарифма произведения можно обобщить на произведение конечного числа n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как $\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n$. Данное равенство доказывается методом математической индукции.

5. Свойство логарифма частного: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$. Логарифм частного двух положительных чисел x и y равен разности логарифмов этих чисел. Справедливость этой формулы доказывается, как и формула логарифма произведения: так как $a^{\log_a x - \log_a y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = \frac{x}{y}$, то по определению логарифма $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - -\log_a y$.

6. Логарифм степени числа: $\log_a b^p = p \cdot \log_a |b|$, где $a > 0$, $a \neq 1$, b и p такие числа, что степень b^p имеет смысл и $b^p > 0$.

Следствие: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, n – натуральное число, большее единицы, $b > 0$.

Формулировка: логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм модуля основания этой степени.

Сначала докажем это свойство для положительных b. Основное логарифмическое тождество позволяет нам представить число b как $a^{\log_a b}$, тогда $b^p = (a^{\log_a b})^p$, а полученное выражение в силу свойство степени равно $a^{p \cdot \log_a b}$. Так мы приходим к равенству $b^p = a^{\mathrm{p} \cdot \log_a b}$, из которого по определению логарифма заключаем, что $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$.

Осталось доказать это свойство для отрицательных b. Заметим, что выражение $\log_a b^p$ при отрицательных b имеет смысл лишь при четных показателях степени p (так как значение степени b^p должно быть больше нуля, в противном случае логарифм не будет иметь смысла), а в этом случае $b^p = |b|^p$. Тогда $b^p = |b|^p = (a^{\log_a |b|})^p = a^{\mathrm{p} \cdot \log_a |b|}$, откуда $\log_a b^p = p \cdot \log_a |b|$.

Например: $\log_3 4^{\frac{5}{9}} = \frac{5}{9} \cdot \log_3 |4| = \frac{5}{9} \log_3 2$;

Из предыдущего свойства вытекает свойство логарифма из корня: логарифм корня $n-$ой степени равен произведению дроби $\frac{1}{n}$ на логарифм подкоренного выражения, то есть, $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, n –

натуральное число, большее единицы, $b > 0$. Доказательство базируется на равенстве $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$, которое справедливо для любых положительных b, и свойстве логарифма степени: $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$.

Примеры: $\log_{0,5} \sqrt[3]{7} = \log_{0,5} 7^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_{0,5} 7$.

7. Формула перехода к новому основанию логарифма: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Следствие 1: $log_a b = \frac{1}{log_b a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Следствие 2: $\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \cdot \log_a b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, p и q – действительные числа, $q \neq 0$, в частности, при $b = a$ имеем $\log_{a^q} a^p = \frac{p}{q}$.

Теперь докажем формулу перехода к новому основанию логарифма вида $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. Для этого достаточно доказать справедливость равенства $\log_c b = = \log_a b \cdot \log_c a$. Основное логарифмическое тождество позволяет нам число b представить как $a^{\log_a b}$, тогда $\log_c b = \log_c a^{\log_a b}$. Осталось воспользоваться свойством логарифма степени: $\log_c a^{\log_a b} = \log_a b \cdot \log_c a$. Так доказано равенство $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$, а значит, доказана и формула перехода к новому основанию логарифма $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Пример применения: $\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$;

Формула перехода к новому основанию позволяет переходить к работе с логарифмами, имеющими «удобное» основание. Например, с ее помощью можно перейти к натуральным или десятичным логарифмам, чтобы можно было вычислить значение логарифма по таблице логарифмов. Формула перехода к новому основанию логарифма также позволяет в некоторых случаях находить значение данного логарифма, когда известны значения некоторых логарифмов с другими основаниями.

Часто используется частный случай формулы перехода к новому основанию логарифма при $c = b$ вида $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. Отсюда видно, что $\log_a b$ и $\log_b a$ – взаимно обратные числа. Например,$\log_{\sqrt{3}} 5 = \frac{1}{\log_5 \sqrt{3}}$.

Также часто используется формула $\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \cdot \log_a b$, которая удобна при нахождении значений логарифмов.

8. Свойство сравнения логарифмов с одинаковыми основаниями: для любых положительных чисел b_1 и b_2 , $b_1 < b_2$ при $0 < a < 1$ справедливо неравенство$\log_a b_1 > \log_a b_2$, а при $a > 1$ – неравенство$\log_a b_1 < \log_a b_2$.

Докажем, что для любых положительных чисел b_1 и b_2 , $b_1 < b_2$ при $0 < a < 1$справедливо неравенство $\log_a b_1 > \log_a b_2$, а при $a > 1$ – неравенство $\log_a b_1 < \log_a b_2$. Докажем первую часть этого утверждения методом от противного, вторая часть доказывается абсолютно аналогично. Предположим, что при $b_1 < b_2$ и при $0 < a < 1$ выполняется неравенство $\log_a b_1 \leq \log_a b_2$.Так как $0 < a < 1$,топо свойству степеней с одинаковыми основаниями должно быть справедливо неравенство $a^{\log_a b_1} \geq a^{\log_a b_2}$, откуда в силу основного логарифмического тождества следует, что $b_1 \geq b_2$. Так мы получили противоречие условию $b_1 < b_2$.

9. Свойство сравнения логарифмов с равными числами под знаком логарифма и разными основаниями:

– если $a_1 > 1$, $a_2 > 1$ и $a_1 < a_2$, то при $0 < b < 1$ выполняется $\log_{a_1} b < \log_{a_2} b$, а при $b > 1$ справедливо $\log_{a_1} b > \log_{a_2} b$;
– если $0 < a_1 < 1$, $a_2 > 1$ (при этом $a_1 < a_2$), то при $0 < b < 1$ выполняется $\log_{a_1} b > \log_{a_2} b$, а при $b > 1$ справедливо $\log_{a_1} b < \log_{a_2} b$;
– если $0 < a_1 < 1$, $0 < a_2 < 1$ и $a_1 < a_2$, то при $0 < b < 1$ выполняется $\log_{a_1} b < \log_{a_2} b$, а при $b > 1$ справедливо $\log_{a_1} b > \log_{a_2} b$.

Наконец, осталось доказать последнее из перечисленных свойств логарифмов. Ограничимся доказательством его первой части, то есть, докажем, что если $a_1 > 1$, $a_2 > 1$ и $a_1 < a_2$, то при $0 < b < 1$ выполняется $\log_{a_1} b < < log_{a_2} b$, а при $b > 1$ справедливо $\log_{a_1} b > \log_{a_2} b$. Остальные утверждения этого свойства логарифмов доказываются по аналогичному принципу.

Воспользуемся методом от противного. Предположим, что при $a_1 > 1$, $a_2 > 1$, $a_1 < a_2$ и при$0 < b < 1$выполняется$\log_{a_1} b \geq \log_{a_2} b$, а при

$b > 1$ справедливо $\log_{a_1} b \leq \log_{a_2} b$. По свойствам логарифмов эти неравенства можно переписать как $\frac{1}{\log_b a_1} \geq \frac{1}{\log_b a_2}$ и

$\frac{1}{\log_b a_1} \leq \frac{1}{\log_b a_2}$ соответственно, а из них следует, что $\log_b a_1 \leq \log_b a_2$ и $\log_b a_1 \geq \log_b a_2$ соответственно. Тогда по свойствам степеней с одинаковыми основаниями должны выполняться равенства $b^{\log_b a_1} \geq$ $\geq b^{\log_b a_2}$ и $b^{\log_b a_1} \geq b^{\log_b a_2}$, то есть, $a_1 \geq a_2$. Так мы пришли к противоречию условию $a_1 < a_2$. На этом доказательство завершено [5].

1.2 Способы вычисления логарифмов

Вычисление логарифмов по определению

В простейших случаях возможно достаточно быстро и легко выполнить нахождение логарифма по определению. Его суть состоит в представлении числа b в виде a^c, откуда по определению логарифма число cявляется значением логарифма.

Итак, вычисление логарифма по определению сводится к нахождению такого числа c, что $a^c = b$, а само число c есть искомое значение логарифма [4].

Пример 1. Вычислите логарифм$\log_4 4^{-8}$.

Решение.

Из определения логарифма следует, что $\log_4 4^{-8} = -8$. Действительно, число под знаком логарифма равно основанию 4 в -8 степени. Ответ:$\log_4 4^{-8} = -8$.

Если же число b под знаком логарифма не задано как степень основания логарифма, то нужно попробовать представить числоbв виде a^c. Часто такое представление бывает достаточно очевидно, особенно когда число под знаком логарифма равно основанию в степени 1, или 2, или 3 и т. д.

Пример 2. Вычислите логарифм $\log_6 216$.

Решение. Представим аргумент логарифма в виде степени $216 = 6^3$. Следовательно, $\log_6 216 = \log_6 6^3 = 3$.

Если под знаком логарифма находится достаточно большое натуральное число, то его можно разложить на простые множители. Это часто помогает представить такое число в виде некоторой степени основания логарифма, а значит, вычислить этот логарифм по определению.

Пример 3. Найдите значение логарифма$\log_{15} 50625$.

Решение.

Разложим на простые множители число 50625, получим $50625 = 3^4 \cdot 5^4$, следовательно, $\log_{15} 50625 = \log_{15}(3^4 \cdot 5^4) = \log_{15}(3 \cdot 5)^4 = \log_{15} 15^4 = 4$.

В заключение этого пункта отметим, что мы не ставили целью рассмотреть все способы представления числа под знаком логарифма в виде некоторой степени основания. Наша цель заключалась в том, чтобы дать самые часто используемые варианты действий, приводящие к результату при вычислении логарифмов по определению.

Вычисление логарифмов с использованием свойств логарифмов

Мощным инструментом вычисления логарифмов является использование свойств логарифмов. Некоторые свойства логарифмов позволяют сразу указать значение логарифмов. К таким свойствам относятся свойство логарифма единицы и свойство логарифма числа, равного основанию: $\log_1 1 = = \log_a a^0 = 0$ и $\log_a a = \log_a a^1 = 1$. То есть, когда под знаком логарифма находится число 1 или число a, равное основанию логарифма, то в этих случаях логарифмы равны 0 и 1 соответственно [4].

Пример 4. Вычислите логарифм $\log_{2,8} 1$.

Решение.

Так как $2{,}8^0 = 1$, то из определения логарифма следует $\log_{2,8} 1 = = \log_{2,8} 2{,}8^0 = 0$.

На практике, когда число под знаком логарифма и основание логарифма легко представляются в виде степени некоторого числа, очень удобно использовать формулу $\log_{a^q} a^p = \frac{p}{q}$, которая соответствует одному из свойств логарифмов. Рассмотрим примеры нахождения логарифмов, в которых используется данная формула.

Пример 5. Вычислите логарифм $\log_{\sqrt[15]{81}} 27\sqrt[5]{9}$.

Решение. Запишем число под знаком логарифма и основание логарифма в виде степени числа 3, получим: $27\sqrt[5]{9} = 3^3 \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{3\frac{2}{5}} = 3^{\frac{17}{5}}$, $\sqrt[15]{81} = 3^{\frac{4}{15}}$ и воспользуемся формулой $\log_{a^q} a^p = \frac{p}{q}$. Таким образом, $\log_{\sqrt[15]{81}} 27\sqrt[5]{9} =$

$$= \log_{3^{\frac{4}{15}}} 3^{\frac{17}{5}} = \frac{\frac{17}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{17}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{17 \cdot 3}{4} = \frac{51}{4} = 12\frac{3}{4}.$$

Рассмотрим подробно пример на вычисление логарифма, в котором используются свойства логарифмов:

Нахождение логарифмов через другие известные логарифмы

Информация этого пункта продолжает тему использования свойств логарифмов при их вычислении. Но здесь основное отличие состоит в том, что свойства логарифмов используются для того, чтобы выразить исходный логарифм через другой логарифм, значение которого известно. Приведем пример для пояснения. Допустим, мы знаем, что $\log_3 2 \approx 1{,}584963$, тогда мы можем найти, например, $\log_2 6$, выполнив небольшое преобразование с помощью свойств логарифма: $\log_2 6 = \log_2(2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 \approx 1 +$ $+1{,}584963 = 2.584963$.

В приведенном примере нам было достаточно использовать свойство логарифма произведения. Однако намного чаще приходится применять более широкий арсенал свойств логарифмов, чтобы вычислить исходный логарифм через заданные [2].

Пример 6. Вычислите $\log_{a^2b^3}\left(\sqrt{a^{11}} \cdot b^{-3}\right)$при условии, что $\log_{\sqrt{a}} b^3 = 1$.

Решение.

Преобразуем выражение $\log_{\sqrt{a}} b^3 = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b^3 = 3 \cdot 2\log_a b = 6\log_a b$. Так как $\log_{\sqrt{a}} b^3 = 1$, то $6\log_a b = 1$ или $\log_b a = 6$.

Используя формулу перехода к новому основанию логарифма, свойство логарифма произведения и свойство логарифма степени основания, получим:

$\log_{a^2b^3}\left(\sqrt{a^{11}} \cdot b^{-3}\right) = \frac{\log_b\left(\sqrt{a^{11}} \cdot b^{-3}\right)}{\log_b(a^2b^3)} = \frac{\log_b \sqrt{a^{11}} + \log_b b^{-3}}{\log_b a^2 + \log_b b^3} = \frac{\log_b a^{\frac{11}{2}} - 3}{2\log_b a + 3} =$ $\frac{\frac{11}{2}\log_b a - 3}{2\log_b a + 3} = \frac{11\log_b a - 6}{4\log_b a + 6}$.

Так как $\log_b a = 6$, то $\frac{11\log_b a - 6}{4\log_b a + 6} = \frac{11 \cdot 6 - 6}{4 \cdot 6 + 6} = \frac{66 - 6}{24 + 6} = \frac{60}{30} = 2$.

Отдельно стоит сказать о значении формулы перехода к новому основанию логарифма вида $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$.Она позволяет от логарифмов с любыми основаниями переходить к логарифмам с конкретным основанием, значения которых известны или есть возможность их найти. Обычно от исходного логарифма по формуле перехода переходят к логарифмам по одному из оснований 2, e или 10, так как по этим основаниям существуют таблицы логарифмов, позволяющие с определенной степенью точности вычислять их значения.

1.3 Логарифмическая функция

Логарифмическая функция – это функция вида $y = \log_a x$ при $a > 1$ или $0 < a < 1$. Объясним происхождение этих ограничений на величину a.

Допустим, $a = 1$. Тогда, например, число $\log_1 2$ не существует (т. к. 1 ни в какой степени не равно 2). Точно так же не существует $\log_1 b$для любого $b \neq 1$. А вот $\log_1 1$ может равняться чему угодно (ведь 1 в любой степени равно 1). По эти причинам объект $\log_1 x$ не представляет никакого интереса.

Похожая ситуация возникает и в случае $a = 0$.

При $a < 0$ снова вмешивается отмеченная выше некорректность операции возведения отрицательного числа в дробную степень. Так, например, число $\log_{-4} 2$ не существует. Поэтому логарифмы по отрицательным основаниям также не интересны.

Вот почему мы ограничиваемся случаями $a > 1$ и $0 < a < 1$. При таких a возникает «хорошая» логарифмическая функция с интересными и полезными свойствами [5].

График функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ выглядит следующим образом (рисунок 3):

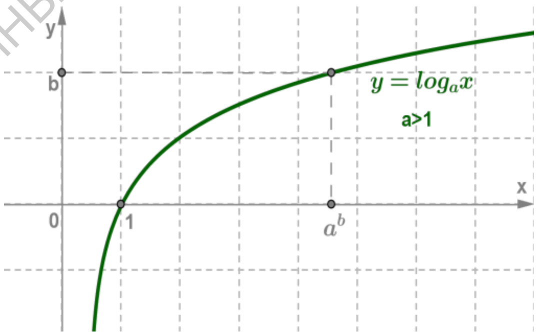


Рисунок 3– График функции $y = \log_a x$ при $a > 1$

График функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ выглядит следующим образом (рисунок 4):

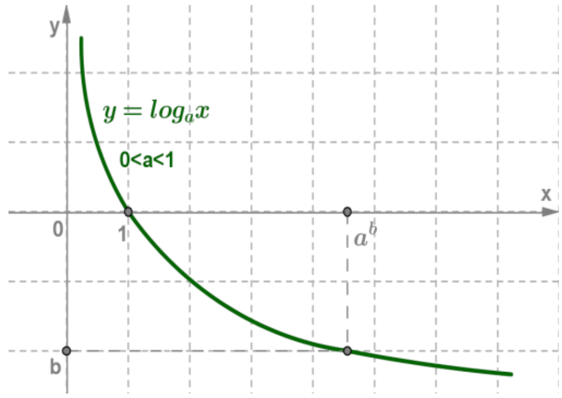


Рисунок 4– График функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$

Сформулируем основные свойства логарифмической функции:

1. Область определения функции $y = \log_a x$ есть множество $(0; +\infty)$. Таким образом, логарифм можно вычислить только от положительного числа.

2. Область значений функции $y = \log_a x$ есть множество $(-\infty; +\infty)$. Таким образом, логарифм может принимать любые значения.

3. Функция $y = \log_a x$ монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$.

4. Ось y служит вертикальной асимптотой графика [1].

1.4 Контрольные вопросы по теме «Логарифм и его свойства»

1. Сформулируйте определение логарифма.

2. Какая операция называется логарифмированием?

3. Сформулируйте алгоритм вычисления логарифмов.

4. Какой логарифм называется натуральным?

5. Какой логарифм называется десятичным?

6. Запишите основное логарифмическое тождество.

7. Сформулируйте свойство логарифма единицы, выполните соответствующую запись, приведите примеры.

8. Сформулируйте свойство логарифма числа, равного основанию.

9. Сформулируйте свойство логарифма степени основания, выполните соответствующую запись, приведите примеры.

10. Сформулируйте свойство логарифма произведения, выполните соответствующую запись, приведите примеры.

11. Докажите свойство логарифма произведения.

12. Сформулируйте свойство логарифма частного, выполните соответствующую запись, приведите примеры.

13. Сформулируйте свойство логарифма степени числа, выполните соответствующую запись, приведите примеры.

14. Докажите свойство логарифма степени числа.

15. Сформулируйте свойство логарифма «переход к новому основанию», выполните соответствующую запись, приведите примеры.

16. Докажите формулу перехода к новому основанию логарифма.

17. Сформулируйте свойство сравнения логарифмов с одинаковыми основаниями, выполните соответствующую запись.

18. Сформулируйте свойство сравнения логарифмов с равными числами под знаком логарифма и разными основаниями, выполните соответствующую запись.

19. Способы вычисления логарифмов.

20. Логарифмическая функция, ее свойства и графики.

1.5 Примеры тестовых заданий

Приведем примеры тестовых заданий с подробным решением варианта из каждого уровня сложности:

Тестовые задания I уровня сложности (Вариант №1)

1. Записать число в виде логарифма с основаниемa:число 2 при $a = 4$.

Решение. $\log_a b = \log_4 4^2 = \log_4 16$.

Ответ: $\log_4 16$

2. Вычислить $\log_4 16$.

Решение. $\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$.

Ответ: 2

3.Вычислить $\log_{\frac{1}{3}} 81$.

Решение.$\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = -4\log_3 3 = -4$.

Ответ: -4

4. Вычислить $\log_7 1$.

Решение.$\log_7 1 = 0$.

Ответ: 0

5.Вычислить $5^{\log_5 6}$.

Решение.$5^{\log_5 6} = 6$.

Ответ: 6

6. Вычислить 10^{lg7}.

Решение.$10^{lg7} = 10^{\log_{10} 7} = 7$.

Ответ: 7

7. Вычислить $\log_{12} 16 + \log_{12} 9$ [20].

Решение.$\log_{12} 16 + \log_{12} 9 = \log_{12}(16 \cdot 9) = \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2$.

Ответ: 2

8. Вычислить $\log_{11} 363 - \log_{11} 3$.

Решение. $\log_{11} 363 - \log_{11} 3 = \log_{11} \frac{363}{3} = \log_{11} 121 = \log_{11} 11^2 = 2$.

Ответ:2

9. Чему равенxв логарифме $\log_5 x = -1$?

Решение.В логарифме $\log_5 x = -1$, $x = \frac{1}{5}$, т.к. $\log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$.

Ответ: $\frac{1}{5}$

10. Вычислить $\log_9 27$.

Решение.$\log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$

Тестовые задания II уровня сложности (Вариант №1)

1. Вычислить $\log_6 5 \cdot \log_5 8 + \log_6 27$.

Решение.$\log_6 5 \cdot \log_5 8 + \log_6 27 = \frac{1}{\log_5 6} \cdot \log_5 8 + \log_6 27 = \frac{\log_5 8}{\log_5 6} +$
$+\log_6 27 = = \log_6 8 + \log_6 27 = \log_6(8 \cdot 27) = \log_6 216 = \log_6 6^3 = 3$.

Ответ: 3

2. Вычислить $0{,}8^{\log_{0,8} 2} + 0{,}36$.

Решение.$0{,}8^{\log_{0,8} 2} + 0{,}36 = 2 + 0{,}36 = 2{,}36$.

Ответ:2,36

3. Вычислить $4\frac{\log_7 2}{\log_7 80} + \log_{80} 5$ [21].

Решение.$4\frac{\log_7 2}{\log_7 80} + \log_{80} 5 = 4\log_{80} 2 + \log_{80} 5 = \log_{80} 2^4 + \log_{80} 5 =$
$= \log_{80} 16 + +\log_{80} 5 = \log_{80}(16 \cdot 5) = \log_{80} 80 = 1$.

Ответ: 1

4. Вычислить $3 + \log_{30} 3 + \log_{30} 10$.

Решение.$3 + \log_{30} 3 + \log_{30} 10 = 3 + \log_{30}(3 \cdot 10) = 3 + \log_{30} 30 =$
$3 + +1 = 4$.

Ответ: 4

5. Вычислить $\log_3 13{,}5 - \log_{\frac{1}{9}} 4$.

Решение.$\log_3 13{,}5 - \log_{\frac{1}{9}} 4 = \log_3 13{,}5 - \log_{3^{-2}} 4 = \log_3 13{,}5 +$
$\frac{1}{2}\log_3 4 = = \log_3 13{,}5 + \log_3 4^{\frac{1}{2}} = \log_3 13{,}5 + \log_3 \sqrt{4} = \log_3 13{,}5 + \log_3 2 =$
$\log_3(13{,}5 \cdot 2) == \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$.

Ответ:3

6. Вычислить $\log_2 \frac{m}{4n}$, если $\log_2 m = 3$; $\log_2 n = 7$.

Решение.$\log_2 \frac{m}{4n} = \log_2 m - \log_2 4n = \log_2 m - (\log_2 4 + \log_2 n) = 3 -$
$-(\log_2 2^2 + 7) = 3 - (2 + 7) = 3 - 9 = -6$.

Ответ:-6

7. Вычислить $\frac{1}{3}\log_5(\sqrt{b})^4$, если $\log_5 b = -3$.

Решение.$\frac{1}{3}\log_5(\sqrt{b})^4 = \frac{1}{3}\log_5\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^4 = \frac{1}{3}\log_5 b^2 = \frac{1}{3} \cdot 2\log_5 b = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot$
$(-3) == -2$.

Ответ:-2

8. Вычислить $\frac{3}{14}\log_7 d^2$, если $\log_7 d = -7$.

Решение.$\frac{3}{14}\log_7 d^2 = \frac{3}{14} \cdot 2\log_7 d = \frac{3}{7} \cdot (-7) = -3$.

Ответ:-3

9. Вычислить $\log_4 6 \cdot \log_{\sqrt{6}} 16$.

Решение.$\log_4 6 \cdot \log_{\sqrt{6}} 16 = \frac{1}{\log_6 4} \cdot \log_{6^{\frac{1}{2}}} 4^2 = \frac{1}{\log_6 4} \cdot 2 \cdot 2\log_6 4 = 4$.

Ответ:4

10. Вычислить $14^{\left(\frac{1}{3}\log_6 8 - \log_6 \frac{1}{3}\right)}$.

Решение.$14^{\left(\frac{1}{3}\log_6 8 - \log_6 \frac{1}{3}\right)} = 14^{\log_6 8^{\frac{1}{3}} - \log_6 \frac{1}{3}} = 14^{\log_6\left(\sqrt[3]{8} : \frac{1}{3}\right)} = 14^{\log_6(2 \cdot 3)} =$
$14^{\log_6 6} = 14$.

Ответ: 14

Тестовые задания III уровня сложности (Вариант №1)

1. Вычислить $\log_9 81 - \log_3 27 + \log_{\frac{1}{3}} 3$.

Решение. $\log_9 81 - \log_3 27 + \log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{3^2} 3^4 - \log_3 3^3 + \log_{3^{-1}} 3 =$
$\frac{4}{2}\log_3 3 - -3\log_3 3 - \log_3 3 = 2 - 3 - 1 = -2$.

Ответ:-2

2. Найти значение выражения $\frac{\log_2 36}{\log_2 6} + \log_3 1 - \log_2 8$.

Решение. $\frac{\log_2 36}{\log_2 6} + \log_3 1 - \log_2 8 = \log_6 36 + 0 - \log_2 2^3 = \log_6 6^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

Ответ:-1

3. Вычислить $32^{\log_{0,5} \sqrt[5]{7}}$ [23].

Решение. $32^{\log_{0,5} \sqrt[5]{7}} = 32^{\log_{\frac{1}{2}} 7^{\frac{1}{5}}} = (2^5)^{\log_{2^{-1}} 7^{\frac{1}{5}}} = \left(\left(2^{\log_2 7}\right)^{-\frac{1}{5}}\right)^5 = 7^{-1} = = \frac{1}{7}$.

Ответ:$\frac{1}{7}$

4. Упростить выражение $\log_{\sqrt{3}} 63 - \log_3 49 + \log_{\frac{1}{3}} 3$.

Решение. $\log_{\sqrt{3}} 63 - \log_3 49 + \log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 63 - \log_3 49 + \log_{3^{-1}} 3 = 2\log_3 63 - - \log_3 49 - \log_3 3 = \log_3 63^2 - \log_3 49 - 1 = \log_3 \frac{63^2}{49} - 1 = \log_3 81 - -1 = \log_3 3^4 - 1 = 4 - 1 = 3.$

Ответ:3

5. Найти значение выражения $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9} + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$.

Решение. $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9} + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = \frac{\log_5 \frac{36}{12}}{\log_5 9} + \log_{2^{-1}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\log_5 3}{\log_5 9} - \frac{1}{2}\log_2 2 = = \log_9 3 - \frac{1}{2} = = \log_{3^2} 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_3 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$

Ответ:0

6. Вычислить$\left(\log_{0,75} 2\right)(\log_2 9 - 4) - \log_3 \frac{1}{27} + \log_{\frac{1}{3}} 27$ [24].

Решение. $\left(\log_{0,75} 2\right)(\log_2 9 - 4) - \log_3 \frac{1}{27} + \log_{\frac{1}{3}} 27 = \left(\log_{\frac{3}{4}} 2\right)(\log_2 9 - -\log_2 2^4) - \log_3 3^{-3} + \log_{3^{-1}} 3^3 = 3 - 1 = 2.$

Ответ:2

7. Найти значение выражения$\lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + \lg\frac{3}{4} + \cdots + \lg\frac{99}{100}$.

Решение. $\lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + \lg\frac{3}{4} + \cdots + \lg\frac{99}{100} = \lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot \ldots \cdot\frac{99}{100}\right) = \lg\frac{1}{100} = \lg 10^{-2} = -2.$

Ответ: -2

8. Вычислить $4 \cdot \log_4 2 \cdot \log_2 4 + 2$.

Решение. $4 \cdot \log_4 2 \cdot \log_2 4 + 2 = 4 \cdot \frac{1}{\log_2 4} \cdot \log_2 4 + 2 = 4 + 2 = 6$.

Ответ: 6

9. Вычислить значение выражения $\log_{\sqrt{2}}\left(4\cos\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

Решение. $\log_{\sqrt{2}}\left(4\cos\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(4\cos\frac{\pi}{8} \cdot \sin\frac{\pi}{8}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(2\sin\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{2} = 1$.

Ответ: 1

10. Вычислить значение выражения $\log_{256}\sin\frac{5\pi}{8} + \log_{256}\sin\frac{6\pi}{8} + \log_{256}\sin\frac{7\pi}{8}$.

Решение. $\log_{256}\sin\frac{5\pi}{8} + \log_{256}\sin\frac{6\pi}{8} + \log_{256}\sin\frac{7\pi}{8} = \log_{256}\left(\cos\frac{\pi}{8} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{8}\right) = = \log_{256}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \log_{256}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \log_{256}\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$.

2 Решение логарифмических уравнений и неравенств

2.1 Методы решения логарифмических уравнений

Рассмотрим методы решения логарифмических уравнений:

По определению логарифма

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$.[1]

1) Решить уравнение

$$\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right) = 0$$

Решение. По определению логарифма:

$$81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}} = 10^0 \leftrightarrow 3^4 \cdot 3^{\frac{x^2-8x}{3}} = 1 \leftrightarrow 3^{4+\frac{x^2-8x}{3}} = 3^0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 4 + \frac{x^2-8x}{3} = 0 \leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

Ответ:$\{2; 6\}$.

Метод потенцирования

Суть метода в следующем: с помощью формул уравнение привести к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Это уравнение при $а > 0$; $а \neq 1$ равносильно системе:$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$,

2)Решить уравнение

$$\lg(2^x + x - 5) = x(1 - \lg 5).$$

Решение. ОДЗ уравнения определяется неравенством$2^x + x - 5 > 0$.

Правую часть уравнения преобразуем так,

$$x(1 - \lg 5) = x(\lg 10 - \lg 5) = x \lg 2 = \lg 2^x$$

тогда получим

$$\lg(2^x + x - 5) = \log 2^x \leftrightarrow 2^x + x - 5 = 2^x \leftrightarrow x - 5 = 0 \leftrightarrow x = 5$$

Ответ:$\{5\}$.

Метод подстановки

Обычно замену (подстановку) производят после нескольких преобразований данного уравнения. Поясним суть этого метода на примере.

3) Решить уравнение

$$(\log_3(9x))^2 - 6\log_3 x - 7 = 0$$

Решение. ОДЗ $x > 0$.

Преобразуем левую часть уравнения, пользуясь свойствами логарифмов.

$$(\log_3 9 + \log_3 x)^2 - 6\log_3 x - 7 = 0$$

Сделаем замену переменной $log_3 x = t$. Уравнение примет вид:

$$(2+t)^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 3. \end{array}\right.$$

Итак, исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = -1, \\ \log_3 x = 3. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}, \\ x = 27. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}; 27\right\}$

Метод приведения к одному основанию

Обычно условие примера подсказывает, к какому основанию следует перейти. Как правило, метод приведения к одному основанию «работает» с методом подстановки.

4) Решить уравнение

$$20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 - 3\log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0.$$

Решение. ОДЗ уравнения определяется системой

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{4} \\ x \neq \frac{1}{16} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Переходим к логарифмам по основанию 2.

$$20\frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 4x} + 7\frac{\log_2 x^3}{\log_2 16x} - 3\frac{\log_2 x^2}{\log_2\frac{x}{2}} = 0,$$

$$\leftrightarrow 20\frac{\frac{1}{2}\log_2 x}{\log_2 4+\log_2 x}+7\frac{3\log_2 x}{\log_2 16+\log_2 x}-3\frac{2\log_2 x}{\log_2 x-\log_2 2}=0,$$

$\log_2 4 = 2;\ \log_2 16 = 4$, то обозначим $\log_2 x = y$ тогда

$$\frac{10y}{2+y}+\frac{21y}{4+y}-\frac{6y}{y-1}=0,$$

$$y\left(\frac{10}{y+2}+\frac{21}{4+y}-\frac{6}{y-1}\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{c} y=0, \\ \frac{10}{y+2}+\frac{21}{4+y}-\frac{6}{y-1}=0. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} y=0, \\ 5y^2+3y-26=0. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=2, \\ y=-2{,}6. \end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left\{\begin{array}{l} \log_2 x=0, \\ \log_2 x=2, \\ \log_2 x=-2{,}6. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1, \\ x=4, \\ x=2^{\frac{13}{5}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{1; 4; 2^{\frac{13}{5}}\right\}$.

Метод логарифмирования

Уравнения вида $f_1(x)^{f_2(x)} = f_3(x)$. Обычно решают методом логарифмирования. Поясним этот метод на примере.

5) Решить уравнение

$$x^6 5^{\log_{\frac{1}{x}} 5} = 11^{-\log_{5\sqrt[5]{11}} 5}$$

Решение. ОДЗ уравнения определяется системой $\left\{\begin{array}{l} x>0, \\ x\neq 1. \end{array}\right.$

Проведем некоторые упрощения,

$$5^{\log_{\frac{1}{x}} 5} = 5^{\log_{\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}} 5^{-1}} = 5^{\log_x 5^{-1}} = 5^{-\log_x 5},$$

$$11^{-\log_{5\sqrt[5]{11}} 5} = 11^{-\log_{11} 5^5} = 5^{-5}.$$

Поэтому уравнение примет вид:

$$x^6 5^{-\log_x 5} = 5^{-5}.$$

Прологарифмируем обе части по основанию x

$$\log_x(x^6 5^{-\log_x 5}) = \log_x 5^{-5} \Leftrightarrow 6\log_x x + (-\log_x 5)\log_x 5 = -5\log_x 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6 - (\log_x 5)^2 + 5\log_x 5 = 0.$$

Обозначим $\log_x 5 = y$, тогда

$$y^2 - 5y - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 6, \\ y = -1. \end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \log_x 5 = 6, \\ \log_x 5 = -1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^6 = 5, \\ x^{-1} = 5. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[6]{5}, \\ x = \frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{5}; \sqrt[6]{5}\right\}$.

Функционально-графический метод

Суть этого метода состоит в использовании свойств показательной функции.

Если невозможно решить уравнение, используя свойства, тогда используют графические иллюстрации функций, заданных в нем. Рисуем функции в одной системе координат и ищем точки пересечения. Координата xэтих точек и будет решением уравнения[2].

6) Решить уравнение$\log_7 x = x - 1$.

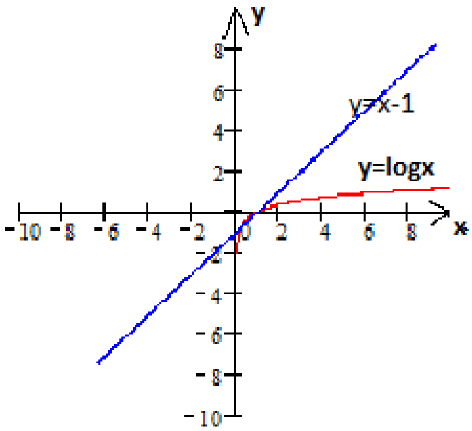


Рисунок 1 – Графики функций

Решение. Это уравнение целесообразнее решать графически. В одной системе координат рисуем графики функций $y = \log_7 x$ и $y = x - 1$. Смотрим, пересекаются ли данные графики. В данном случае они пересекаются в одной единственной точке $(1;\ 0)$. Решением данного уравнения (Рисунок 1) будет $x = 1$.

2.2 Методы решения логарифмических неравенств

Рассмотрим основные методы решения логарифмических неравенств:

По определению логарифма

Простейшие логарифмические неравенства имеют следующий вид $\log_a f(x) < b$ ($\log_a f(x) < b$). Для их решения используют основное логарифмическое тождество ($b = \log_a b^a$) и получают:

$\log_a f(x) > \log_a a^b$ ($\log_a f(x) < \log_a a^b$).

Теперь делаем выводы:

Если $a > 1$, то $f(x) > a^b$, решаем это неравенство.

Если $0 < a < 1$, то $f(x) > a^b$, решаем это неравенство.

Аналогично поступаем при решении неравенства $\log_a f(x) < b$.

При выписывании ответа не забываем, что $a > 0$, $a \neq 1$и $f(x) > 0$.

1)Решить неравенство: $\log_{2,5} x < 2$.

Решение: Данное неравенство решим по второму способу

$$2{,}5 > 1 \ \rightarrow 0 < x < 2{,}5^2, \qquad \text{т. е. } 0 < x < 6{,}25 \text{ или } 0 < x < \frac{25}{4}$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{25}{4}\right)$.

2) Решить неравенство: $\log_4(x-2) < 2$.

Решение: Данное неравенство решим по первому способу:

$$\log_4(x-2) < 2 \leftrightarrow \log_4(x-2) < \log_4 16$$

$4 > 1 \rightarrow 0 < x - 2 < 16$, т.е. $2 < x < 18$

Ответ: $x \in (2; 18)$.

Метод потенцирования

Суть метода в следующем: с помощью формул неравенство привести к виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Решение неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ основано на том, что функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$) является убывающей при $0 < a <$

1 и возрастающей при $a > 1$.Таким образом, справедливы следующие утверждения:

$$1)\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) > 0, \ \text{при } a > 1. \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$2)\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0, \ \text{при } 0 < a < 1. \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Решение нестрогих неравенств отличается от решения соответствующих строгих неравенств включением во множество всех решений множества корней соответствующих уравнений.

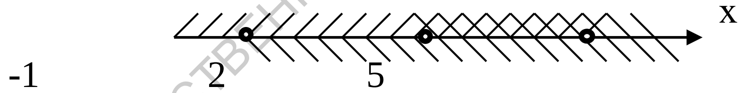
1) Решить неравенство:$\log_{0,3}(2x-4) > \log_{0,3}(x+1)$.

Решение: Так как $0 < 0{,}3 < 1$, то решаем неравенство по второй системе:

$$\log_{0,3}(2x-4) > \log_{0,3}(x+1) \leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 < x+1 \\ 2x-4 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > 2 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow 2 <$$

$x < 5$.

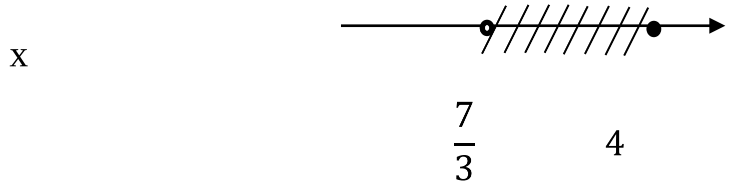
Ответ:$x \in (2; 5)$.



2)Решить неравенство: $\lg(3x-7) \leq \lg(x+1)$.

Решение: Так как lg – логарифм по основанию 10 и $10 > 1$,то данное неравенство решаем по аналогии первой системы, только знак первого неравенства системы меняем на противоположный.

$$\lg(3x-7) \leq \lg(x+1) \leftrightarrow \begin{cases} 3x-7 \leq x+1 \\ 3x-7 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > \frac{7}{3} \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow x \in (\frac{7}{3}; 4]$$



Ответ: $x \in (\frac{7}{3}; 4]$.

3) Решить неравенство: $\log_2(x^2+1) > 0$.

Решение:

Для наглядности решения построим график функции $\log_2 t$.

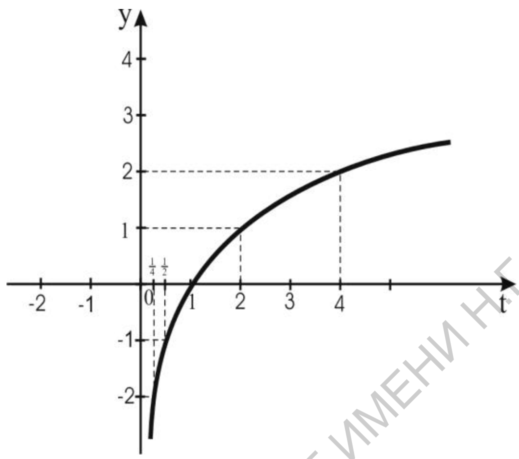


Рисунок 2 – График функции

Из Рисунка 2 видно, что функция принимает положительные значения при $t > 1$.

Далее, учитывая область определения функции $y = \log_2 t$, получим:

$$\begin{cases} x^2+1>0 \\ x^2+1>1 \end{cases} \leftrightarrow x^2 > 0 \to x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

При решении логарифмических неравенств, содержащих несколько различных функций под знаком логарифмов, рекомендуется сначала найти область определения исходного выражения, и лишь затем совершать преобразования, в ходе которых область определения может сужаться или расширяться.

4) Решить неравенство: $(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1 \le 0$.

Решение: Ключевым моментом в решении данного неравенства является поиск его области определения.

$$\begin{cases} x^2-4x+3\geq 0 \\ x>0 \\ 8x-2x^2-6\geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1; x\geq 3 \\ x>0 \\ 1\leq x\leq 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Выяснили, что область определения неравенства состоит только из двух точек.

Осталось подстановкой выяснить, какие из этих точек удовлетворяют неравенству.

При $x=1$ логарифмическое неравенство принимает вид:

$\log_5\frac{1}{5}+1=0\leq 0$ – истинно.

При$x=3$ логарифмическое неравенство принимает вид:

$\log_5\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\leq 0 \leftrightarrow \log_5\frac{3}{5}\leq -\frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{3}{5}\leq 5^{-\frac{1}{3}} \leftrightarrow \frac{3}{5}\leq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ – ложно.

Ответ: $x=1$.

Метод подстановки

Ищем в неравенстве некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым, упрощая вид неравенства. В некоторых случаях, очевидно, что удобно обозначить.

Решить неравенство:$\log_{0,5}{}^2 x+\log_{0,5} x-2\leq 0$.

Решение: Сразу отметим, что $x>0$.

Заменяем $\log_{0,5} x=t$. Тогда имеем $t^2+t-2\leq 0, (t+2)(t-1)\leq 0$, т.е. $\begin{cases} t\geq -2 \\ t\leq 1 \end{cases}$

Так как $\log_{0,5} x=t$ и $0<0,5<1$, то имеем:

$$\begin{cases} \log_{0,5} x\geq -2 \\ \log_{0,5} x\leq 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,5} x\geq \log_{0,5} 0,5^{-2} \\ \log_{0,5} x\leq \log_{0,5} 0,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\leq 4 \\ x\geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

С учетом ОДЗ ($x>0$), получаем $[\frac{1}{2};4]$.

Ответ: $x\in[\frac{1}{2};4]$.

Обычно замену (подстановку) производят после некоторых преобразований данного неравенства.

Метод приведения к одному основанию

Обычно условие примера подсказывает, к какому основанию следует перейти. Как правило, метод приведения к одному основанию «работает» с методом подстановки.

Решить неравенство: $\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \end{cases} \to x>0$

Все слагаемые приведем к одному основанию:

$\log_9 9^{\frac{1}{2}} + \log_9 x - \log_9 25x^2 > -\log_9(x+3)^2 \to \log_9 3 + \log_9 x - \log_9 25x^2 + \log_9(x+3)^2 > 0$.

Воспользуемся свойствами логарифма и получим:

$\log_9 \frac{3x(x+3)^2}{25x^2} > \log_9 1$, т.к. $9>1$, то $\frac{3x(x+3)^2}{25x^2} > 1$

$\frac{3x^2-7x+27}{25x} > 0$, $3x^2-7x+27=0 \to D<0$, числитель дроби всегда >0, значит и знаменатель должен быть >0.

Ответ: $x \in (0;+\infty)$.

2) Решить неравенство: $0{,}4^{\log_2{}^2 x+1} < 6{,}25^{2-\log_2 x^3}$.

Решение:

Приведем обе части неравенства к одному основанию

$(\frac{2}{5})^{\log_2{}^2 x+1} < (\frac{2}{5})^{2\log_2 x^3-4}$.

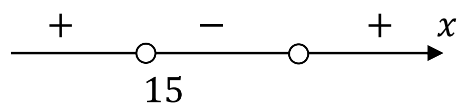
Так как основание степени $0<\frac{2}{5}<1$, то имеем:

$\log_2{}^2 x + 1 > 2\log_2 x^3 - 4$.

Функция $f(x)=\log_2 x$ определена при $x>0$

Заменяем $\log_2 x = t$.

Тогда имеем: $t^2-6t+5>0 \to (t-5)(t-1)>0$.



$t \in (-\infty;1) \cup (1;5)$

Данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x < 1 \\ \log_2 x > 5\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x < \log_2 2 \\ \log_2 x > \log_2 32\end{array}\right.$$

Так как основание логарифма больше 1, то:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0 \\ x < 2\end{cases} \\ \begin{cases}x > 0 \\ x > 32\end{cases}\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}0 < x < 2 \\ x > 32\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (0; 2) \cup (32; +\infty)$.

Метод логарифмирования

При решении неравенств вида $f(x)^{\varphi(x)} > g(x)^{h(x)}$ обычно следуют следующей схеме:

Находят ОДЗ неравенства, исходя из того, что на ОДЗ функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и положительны.

Логарифмируют неравенство, т.е. заменяют неравенство равносильным ему на ОДЗ при $a > 0, a \neq 1$ неравенством $\varphi(x) \log_a f(x) > h(x) \log_a g(x)$.

Решают полученное неравенство. Его решения и будут решениями исходного неравенства.

2.3 Примеры тестовых заданий

Приведем примеры тестовых заданий, по одному тестовому варианту с подробным решением из каждого уровня сложности:

Тестовые задания I уровня сложности (Вариант №1)

1.$\log_2(4-\mathrm{x})=7 \leftrightarrow 4-\mathrm{x}=2^7 \leftrightarrow 4-\mathrm{x}=128 \rightarrow \mathrm{x}=-124$

Ответ: $\mathrm{x}=-124$.

2. $\log_5(5-\mathrm{x})=2 \leftrightarrow 5-\mathrm{x}=5^2 \leftrightarrow 5-\mathrm{x}=25 \rightarrow \mathrm{x}=-20$

Ответ: $\mathrm{x}=-20$.

3. $\log_6(3-\mathrm{x})=2 \leftrightarrow 3-\mathrm{x}=6^2 \leftrightarrow 3-\mathrm{x}=36 \rightarrow \mathrm{x}=-33$

Ответ: $\mathrm{x}=-33$.

4.$\log_5(4+\mathrm{x})=2 \leftrightarrow 4+\mathrm{x}=5^2 \leftrightarrow 4+\mathrm{x}=25 \rightarrow \mathrm{x}=21$

Ответ: $\mathrm{x}=21$.

5.$\log_3(4-\mathrm{x})=2 \leftrightarrow 4-\mathrm{x}=3^2 \leftrightarrow 4-\mathrm{x}=9 \rightarrow \mathrm{x}=-5$

Ответ: $\mathrm{x}=-5$.

6.$\log_{11}(3x-1)>1$. ОДЗ: $3x-1>0 \rightarrow x>\frac{1}{3}$

$$\log_{11}(3x-1)>\log_{11}11$$

Так как основание логарифма больше 1, то знак неравенства сохраняем:

$$3x-1>11 \rightarrow x>4$$

Ответ: $x \in (4;+\infty)$.

7.$\log_{\frac{1}{3}}(7x-1)>0$. ОДЗ: $\{7x-1>0 \rightarrow x>\frac{1}{7} \rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(7x-1)>\log_{\frac{1}{3}}1$

Так как основание логарифма меньше 1, то знак неравенства меняем:

$$7x-1<1 \rightarrow 7x<2 \rightarrow x<\frac{2}{7}$$

Пересекаем решение и ОДЗ, имеем: $x \in \left(\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right)$.

8. $\log_2 x \le 2 \leftrightarrow \log_2 x \le \log_2 4 \rightarrow x \le 4$

Ответ: $x \in (-\infty;4]$.

9. $\log_2 x \ge 2 \leftrightarrow \log_2 x \ge \log_2 4 \rightarrow x \ge 4 \rightarrow x \in [4;+\infty)$

Ответ: $x \in [4; +\infty)$.

10. $\log_3 x > 1 \leftrightarrow \log_3 x > \log_3 3 \rightarrow x > 3 \rightarrow x \in (3; +\infty)$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$ [15-18].

Тестовые задания II уровня сложности (Вариант №1)

1. Решить уравнение $\log_2(x^2 + 5x + 2) = 3$

Используем метод - решение логарифмических уравнений непосредственно по определению.

Найдем область допустимых значений (ОДЗ) заданного уравнения. Для этого решим неравенство:

$$x^2 + 5x + 2 > 0$$

Раскладываем левую часть на множители, для этого находим корни квадратного уравнения:

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$$

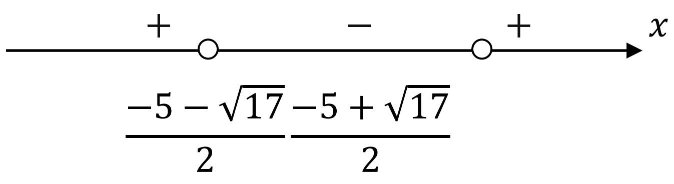
$$\sqrt{D} = \sqrt{17}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Тогда неравенство перепишется в виде:

$$\left(x + \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)\left(x + \frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right) > 0$$

Отметим полученные корни на числовой прямой и определим знаки в полученных интервалах.



Учитывая знак неравенства, определим ОДЗ:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(-\frac{5 - \sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$$

ОДЗ нашли, теперь приступим к поиску корней исходного логарифмического уравнения:

$$\log_2(x^2 + 5x + 2) = 3$$

Перепишем уравнение, используя определение логарифма:

$$\log_2(x^2 + 5x + 2) = 3$$

$$x^2 + 5x + 2 = 2^3$$

$$x^2 + 5x + 2 = 8$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Решим полученное квадратное уравнение.

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \{-6; 1\}$$

Убеждаемся, что полученные корни принадлежат ОДЗ.

$$x_1 = -6, x_2 = 1$$

Ответ: $x_1 = -6, x_2 = 1$.

2. Решить уравнение $\lg(3x - 11) + \lg(x - 27) = 3$

Найдем ОДЗ по определению логарифма. ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x - 11 > 0 \\ x - 27 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{11}{3} \\ x > 27 \end{cases} \leftrightarrow \ x > 27$$

Таким образом, $x \in (27; +\infty)$

Перепишем исходное уравнение, используя свойства суммы логарифмов и логарифма степени. Получим следующее уравнение:

$$\lg[(3x - 11) \cdot (x - 27)] = \lg 10^3$$

Приравняем подлогарифмические выражения:

$$(3x - 11)(x - 27) = 10^3$$

$$3x^2 - 11x - 81x + 297 = 1000$$

или после упрощения:

$$3x^2 - 92x - 703 = 0$$

Найдем корни полученного квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = (-92)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-703) = 8464 + 8436 = 16900$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{16900} = 130$$

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{92 \pm 130}{2 \cdot 3} = \frac{92 \pm 130}{6} = \left\{37; -6\frac{1}{3}\right\}$$

Учитывая ОДЗ, корнем исходного логарифмического уравнения будет только $x = 37$.

Ответ: $x = 37$.

3. Решить уравнение $\lg(3 - x) - \lg(x + 2) = 2\lg 2$

Найдем ОДЗ по определению логарифма. ОДЗ:

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -2 \end{cases} \leftrightarrow x \in (-2; 3)$$

Перепишем уравнение, используя свойство разности логарифмов для левой части равенства, и внесем коэффициент в правой части как степень в подлогарифмическую функцию:

$$\lg(3 - x) - \lg(x + 2) = 2\lg 2$$

$$\lg\left(\frac{3-x}{x+2}\right) = \lg 2^2 \text{ или } \lg\left(\frac{3-x}{x+2}\right) = \lg 4$$

Приравняем подлогарифмические выражения:

$$\frac{3 - x}{x + 2} = 4$$

$$\frac{3 - x}{x + 2} - 4 = 0$$

$$\frac{3 - x - 4(x + 2)}{x + 2} = 0$$

$$\frac{3 - x - 4x - 8}{x + 2} = 0$$

$$\frac{-5 - 5x}{x + 2} = 0$$

$$\frac{-5(x + 1)}{x + 2} = 0$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен 0. Так как согласно ОДЗ выражение $x + 2$ в нуль не обращается, то найдем значения, при которых числитель равен 0:

$$x + 1 = 0 \leftrightarrow x = -1$$

Полученное значение принадлежит ОДЗ.

Ответ: $x = -1$.

4. $\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24)$

ОДЗ уравнения есть множество $x \in (0;+\infty)$ которое определяется из системы неравенств (условия существования логарифмов уравнения):

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ x + 24 > 0 \end{cases}$$

Используя свойство логарифма произведения положительных сомножителей и определения логарифма, получим

$$\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3 24 \leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+3) = \log_3(x+24) \\ x > 0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(x+3) = x + 24 \\ x > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 24 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 4 \\ x > 0 \end{cases} \leftrightarrow x = 4$$

Ответ: $x = 4$.

5. $\log_4(x^2 - 4x + 1) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2}$

Используя свойство логарифма частного двух положительных чисел, получим следствие исходного уравнения

$$\log_4 \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{2}$$

откуда, используя определение логарифма, получим

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = 4^{-\frac{1}{2}}$$

Или

$$x^2 - 4x + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5)$$

откуда получаем уравнение

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

с решениями $x_1 = -1$ и $x = 3$. После проверки остается лишь $x = -1$

Ответ: $x = -1$.

6. Решить неравенство $\log_2(x^2 + 4x + 3) > 3$

По определению логарифма, область допустимых значений:

$$x^2 + 4x + 3 > 0$$

Решение данного неравенства найдем с помощью метода интервалов, для этого левую часть разложим на множители.

Решим квадратное уравнение $x^2 + 4x + 3 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$$

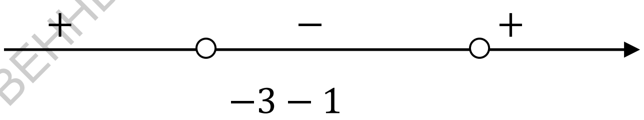
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \{-3; -1\}$$

Можете проверить решение и ответ в нашем сервисе – решение квадратных уравнений.

Таким образом, получили корни $x_1 = -3, x_2 = -1$. Значит, левую часть неравенства можно представить в виде:

$$1 \cdot \big(x - (-3)\big)\big(x - (-1)\big) > 0 \leftrightarrow (x + 3)(x + 1) > 0$$

Отметим нули каждого множителя (а это будут значения $x_1 = -3, x_2 = -1$) на числовой прямой и определим знаки неравенства в полученных интервалах:



Учитывая знак неравенства, определим ОДЗ:

$$x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$$

ОДЗ определили, теперь приступим к решению исходного логарифмического неравенства:

$$\log_2(x^2 + 4x + 3) > 3$$

Представим правую часть неравенства как логарифм по основанию 2:

$$\log_2(x^2 + 4x + 3) > \log_2 2^3$$

Перейдем от неравенства относительно логарифмов к неравенству для подлогарифмических функций: так как основание логарифма больше единицы (2 > 1), то знак неравенства не изменится:

$$x^2 + 4x + 3 > 2^3$$

$$x^2 + 4x + 3 > 8$$

$$x^2 + 4x - 5 > 0$$

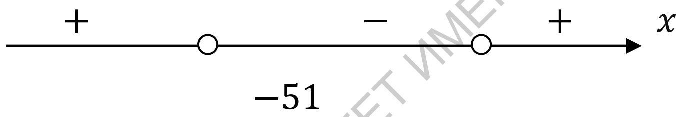
Приравняем к нулю левую часть неравенства и решим полученное квадратное уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{36} = 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm 6}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \{-5; 1\}$$

Таким образом, получили корни $x_1 = -5, x_2 = 1$. Отметим точки на числовой оси и определим знаки неравенства в полученных интервалах.



Учитывая, что нас интересуют все значения x, при которых данное неравенство принимает положительные значения, то получаем следующие интервалы: $x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$. Это ответ, так как данные интервалы полностью принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.

7. Решить неравенство $\log_{0,5}(2x - 4) < \log_{0,5}(x + 1)$

Находим ОДЗ по определению логарифма. ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x > 4 \\ x > -1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > -1 \end{cases} x \in (2; +\infty)$$

Перейдем в неравенства от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, при этом, так как основание логарифма меньше единицы (0,5 < 1), знак неравенства поменяем на противоположный:

$$2x - 4 > x + 1$$

$$2x - x > 1 + 4$$

$$x > 5$$

С учетом ОДЗ, окончательно имеем, что $x \in (5; +\infty)$.

Ответ: $x \in (5; +\infty)$.

8. Решить неравенство $x^2 \log_{16} x \geq \log_{16} x^5 + x \log_2 x$

Перенесём все члены в левую часть и умножим на 4:

$$x^2 \log_2 x - 4x \log_2 x - 5 \log_2 x \geq 0$$

$$(x^2 - 4x - 5) \log_2 x \geq 0$$

$$(x - 5)(x + 1) \log_2 x \geq 0$$

Заметим, что $x > 0$, поэтому $x + 1 > 0$. Получаем: $(x - 5) \log_2 x \geq 0$

Решение неравенства: $0 < x \leq 1$ или $x \geq 5$

Ответ: (0;1] ∪ [5;+∞).

9. Решить неравенство $x^2 \log_{25} x \geq \log_{25} x^{\cdot 3} + x \log_5 x$

Перенесём все члены в правую часть и умножим на 2:

$$x^2 \log_5 x - 3 \log_5 x - 2x \log_5 x \geq 0$$

$$(x^2 - 2x - 3) \log_5 x \geq 0$$

$$(x - 3)(x + 1) \log_5 x \geq 0$$

Заметим, что $x > 0$, поэтому $x + 1 > 0$. Получаем $(x - 3) \log_5 x \geq 0$.

Решение неравенства: $0 < x \leq 1$ или$x \geq 3$

Ответ: $(0; 1] \cup [3; +\infty)$.

10. Решить неравенство ${\log_2}^2 x + 6 > 5 \log_2 x$

Решение неравенства ищем при условии $x > 0$. Последовательно получаем:

$$ {\log_2}^2 x - 5 \log_2 x + 6 > 0$$

$$\begin{bmatrix} \log_2 x > 3 \\ \log_2 x < 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x > 8 \\ 0 < x < 4 \end{bmatrix}$$

Ответ:$(0; 4) \cup (8; +\infty)$ [6-8, 11].

Тестовые задания III уровня сложности (Вариант 3)

1. Решить уравнение ${\log_3}^2 x - 4 \log_3 x = 0$

Используем метод – решение логарифмических уравнений заменой.

ОДЗ: $x > 0$

Введем замену $\log_3 x = y$, чтобы записать исходное уравнение в виде стандартного квадратного уравнения. Тогда уравнение примет вид:

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$(y-2)^2 = 0$$

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2$$

Вернемся к y: $\log_3 x = 2$. Тогда по определению логарифма получаем, что

$$x = 3^2 \to x = 9 \ \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: $x = 9$.

2. Решить уравнение $\log_2 x + \log_x 16 = 5$

Используем метод – решение логарифмических уравнений, переходя к одному основанию.

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

К логарифму по основанию x (второе слагаемое) вначале применим свойство логарифма степени, а затем по формуле замены основания логарифма приведем его к основанию 2:

$$\log_2 x + \log_x 2^4 - 5 = 0$$

$$\log_2 x + 4\log_x 2 - 5 = 0$$

$$\log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} - 5 = 0$$

$$\frac{\log_2{}^2 x \ + 4 - 5\log_2 x}{\log_2 x} = 0$$

Так как$\log_2 x \neq 0$, то

$$\log_2{}^2 x + 4 - 5\log_2 x = 0$$

$$\log_2{}^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0$$

Введем замену $\log_2 x = y$, тогда уравнение примет вид:

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

Найдем корни полученного квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \{4{,}1\}$$

Вернемся к x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 4 \\ \log_2 x = 1 \end{array}\right.$$

А тогда, используя определения логарифма, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2^4 \\ x = 2^1 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 16 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Оба значения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x_1 = 16,\ x_2 = 2$.

3. Решить уравнение $\log_{3-x}(x - 2{,}5) = 0$

Используем метод – решение логарифмических уравнений по определению логарифма, когда основание логарифма - выражение с переменной.

Учитывая определение логарифма, запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 3 - x \neq 1 \\ x - 2{,}5 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \neq 2 \\ x > 2{,}5 \end{cases} \leftrightarrow 2{,}5 < x < 3$$

Используя определение логарифма, преобразуем исходное уравнение к виду:

$$x - 2{,}5 = (3 - x)^0$$

$$x - 2{,}5 = 1$$

$$x = 3{,}5$$

Полученный корень не принадлежит области допустимых значений, поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ: Уравнение не имеет решений.

4. Решить уравнение $x^{\lg x - 1} = 100$

Используем метод – решение логарифмических уравнений логарифмированием.

ОДЗ: $x > 0$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10:

$$\lg x^{\lg x - 1} = \lg 100$$

$$(\lg x - 1) \lg x = \lg 10^2$$

$$\lg^2 x - \lg x = 2$$

$$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$$

Введем замену$\lg x = y$, тогда уравнение примет вид:

$$y^2 - y - 2 = 0$$

Решим полученное квадратное уравнение.

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \{2, -1\}$$

Вернемся к x:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 2 \\ \lg x = -1 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100 \\ x = 0{,}1 \end{array}\right.$$

Оба значения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x_1 = 100,\ x_2 = 0{,}1$.

5. Решить уравнение $\log_5(5 + 3x) = \log_5 3 \log_3(2x + 10)$

Преобразуем $\log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5}$. Получим, что $\log_5(5 + 3x) = \frac{\log_3(2x+10)}{\log_3 5}$

$$\log_5(5 + 3x) = \log_5(2x + 10) \leftrightarrow 5 + 3x = 2x + 10 \leftrightarrow 3x - 2x = 10 - 5$$

Ответ: $x = 5$.

6. Решить неравенство $\log_3 x + \log_x 9 > 2$

По определению логарифма, находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

Используя свойство логарифма и формулы замены основания, приведем второй логарифм к основанию 3

$$\log_3 x + \log_x 3^2 > 2$$

$$\log_3 x + 2 \log_x 3 > 2$$

$$\log_3 x + \frac{2}{\log_3 x} > 2$$

Введем замену $\log_3 x = y$:

$$y + \frac{2}{y} > 2, y \neq 0$$

Перенесем 2 в левую часть и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{y^2 + 2 - 2y}{y} > 0$$

Данное неравенство равносильно следующему:

$$y(y^2 - 2y + 2) > 0$$

Для решения полученного неравенства применим метод интервалов, для этого трехчлен $y^2 - 2y + 2$ разложим на множители. Приравняем его к нулю и решим полученное квадратное уравнение $y^2 - 2y + 2 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$

Дискриминант меньше нуля, и старший коэффициент $a = 1 > 0$, следовательно, при любом значении y выражение $y^2 - 2y + 2 > 0$. А тогда произведение $y(y^2 - 2y + 2)$ положительно, когда и $y > 0$. Перейдем к x, для этого делаем обратную замену:

$$\log_3 x > 0 \to x > 3^0 \to x > 1$$

Пересекая с ОДЗ, окончательно имеем промежуток: $x \in (1; +\infty)$.

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

7. Решить неравенство $\frac{1}{3 - \lg x} < 1 - \frac{1}{2 \lg x}$

Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3 - \lg x \neq 0 \\ 2 \lg x \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \lg x \neq 3 \\ \lg x \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 10^3 \\ x \neq 10^0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1000 \\ x \neq 1 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$x \in (0; 1) \cup (1; 1000) \cup (1000; +\infty)$$

Введем замену $\lg x = y$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{1}{3 - y} < 1 - \frac{1}{2y}, y \neq 0, y \neq 3$$

Перенесем все влево и сведем к общему знаменателю:

$$\frac{1}{3-y} - 1 + \frac{1}{2y} < 0$$

$$\frac{2y - 2y(3-y) + 3 - y}{2y(3-y)} < 0$$

$$\frac{2y - 6y + 2y^2 + 3 - y}{2y(3-y)} < 0$$

$$\frac{2y^2 - 5y + 3}{2y(3-y)} < 0$$

Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$y(3-y)(2y^2 - 5y + 3) < 0$$

Разложим на множители выражение $2y^2 - 5y + 3$, для этого приравняем его к нулю и найдем корни полученного квадратного уравнения $2y^2 - 5y + 3 = 0$:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \left\{\frac{3}{2}, 1\right\}$$

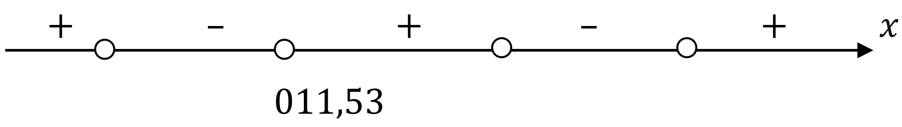
Тогда неравенство примет вид:

$$2y(3-y)(y-1{,}5)(y-1) < 0$$

или

$$2y(y-3)(y-1{,}5)(y-1) > 0$$

Отметим нули каждого сомножителя (а именно точки $y = 0$, $y = 1{,}5$, $y = 3$ и $y = 1$) на числовой прямой и определим знаки в полученных интервалах.



Так как решаемое неравенство со знаком « $>$», то рассматриваем те интервалы, где у нас стоит знак «+»:

$$y \in (-\infty; 0) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup (3; +\infty)$$

Делаем обратную замену и возвращаемся к первоначальной переменной x:

$$\lg x \in (-\infty; 0) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup (3; +\infty)$$

или перепишем полученное объединение промежутков в виде следующей совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{c} \lg x < 0 \\ 1 < \lg x < \dfrac{3}{2} \\ \lg x > 3 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x < 1 \\ \begin{cases} \lg x > 1 \\ \lg x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \\ x > 1000 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x < 1 \\ \begin{cases} x > 10 \\ x < \sqrt{1000} \end{cases} \\ x > 1000 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; 1) \\ x \in (10; 10\sqrt{10}) \\ x \in (1000; +\infty) \end{array}\right.$$

Таким образом, $x \in (-\infty; 1) \cup (10; 10\sqrt{10}) \cup (1000; +\infty)$.

Пересекая с ОДЗ, окончательно имеем: $x \in (0; 1) \cup (10; 10\sqrt{10}) \cup (1000; +\infty)$.

Ответ: $x \in (0; 1) \cup \left(10; 10\sqrt{10}\right) \cup (1000; +\infty)$

8. Решить неравенство$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$

Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x \neq 1 \\ 2x > 0 \\ 4x > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \to x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

Используя формулы замены основания, приведем все логарифмы в рассматриваемом неравенстве к логарифмам по основанию 2

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} \cdot \log_2 4x > 1$$

$$\frac{\log_2 4x}{\log_2 2x \cdot \log_2 x} - 1 > 0$$

Распишем полученные логарифмы, используя свойство суммы логарифмов:

$$\frac{\log_2 4 + \log_2 x}{(\log_2 2 + \log_2 x) \cdot \log_2 x} - 1 > 0$$

или

$$\frac{2+\log_2 x}{(1+\log_2 x)\cdot \log_2 x}-1>0$$

Введем замену $\log_2 x = y$:

$$\frac{2+y}{(1+y)\cdot y}-1>0, y\neq 0, y\neq -1$$

сводим к общему знаменателю:

$$\frac{2+y-(1+y)\cdot y}{(1+y)\cdot y}>0$$

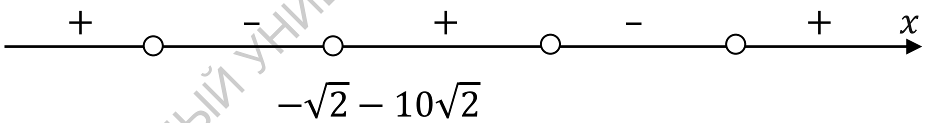
$$\frac{2+y-y-y^2}{(1+y)\cdot y}>0$$

$$\frac{2-y^2}{(1+y)\cdot y}>0$$

Данное неравенство эквивалентно следующему:

$$y(y+1)(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})<0$$

Отметим нули сомножителей на координатной прямой и определим знаки в полученных интервалах:



Нас интересуют те интервалы, которым соответствует знак «−»:

$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}<y<-1 \\ 0<y<\sqrt{2} \end{array}\right. \to y\in(-\sqrt{2};-1)\cup(0;\sqrt{2})$$

Вернемся к x:

$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}<\log_2 x<-1 \\ 0<\log_2 x<\sqrt{2} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x>-\sqrt{2} \\ \log_2 x<-1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x>0 \\ \log_2 x<\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2^{-\sqrt{2}} \\ x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ x<2^{\sqrt{2}} \end{cases} \end{array}\right.$$

То есть

$$x\in\left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}};\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;2^{\sqrt{2}}\right)$$

С учетом ОДЗ, окончательно имеем:

$$x \in \left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}};\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}};\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$.

9. Решить неравенство $\log_{3-x}(x-2{,}5) > 0$

По определению логарифма, ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2{,}5 > 0 \\ 3-x \neq 1 \\ 3-x > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > 2{,}5 \\ x \neq 2 \\ x < 3 \end{cases} \rightarrow x \in (2{,}5; 3)$$

Так как основание логарифма может принадлежать как промежутку $(0; 1)$, так и промежутку $(1; +\infty)$, то рассмотрим два случая:

$$I. 0 < 3-x < 1 \rightarrow -3 < -x < -2 \rightarrow 2 < x < 3 \rightarrow x \in (2; 3)$$

Тогда в этом случае заданное неравенство перепишется в виде (так как основание логарифма принадлежит промежутку $(0; 1)$, то знак неравенства меняем на противоположный):

$$x-2{,}5 < (3-x)^0 \rightarrow x-2{,}5 < 1 \rightarrow x < 3{,}5 \rightarrow x \in (-\infty; 3{,}5)$$

Пересекая полученное решение с промежутком, на котором мы рассматривали неравенство, получаем, что в этом случае $x \in (2; 3)$.

$$II. 3-x > 1 \rightarrow x < 2 \rightarrow x \in (-\infty; 2)$$

Тогда неравенство перепишем в виде (в этом случае знак неравенства не меняется):

$$x-2{,}5 > (3-x)^0 \rightarrow x-2{,}5 > 1 \rightarrow x > 3{,}5 \rightarrow x \in (3{,}5; +\infty)$$

Пересекая с рассматриваемым промежутком для этого случая, делаем вывод, что $x \in \emptyset$.

Объединяя решения для случаев I и II, получаем:

$$x \in (2; 3)$$

Пересекая результат с ОДЗ, окончательно имеем, что решением заданного неравенства является промежуток

$$x \in (2{,}5; 3)$$

Ответ: $x \in (2{,}5; 3)$.

10. Решить неравенство $x^{\lg x - 1} \leq 100$

ОДЗ: $x > 0$

Логарифмируем левую и правую часть неравенства:

$$\lg x^{\lg x - 1} \le \lg 100$$

По свойству логарифма степени получаем:

$$(\lg x - 1)\lg x \le 2$$

$$\lg^2 x - \lg x \le 2$$

$$\lg^2 x - \lg x - 2 \le 0$$

Ведем замену $\lg x = y$. Тогда наше неравенство принимает вид:

$$y^2 - y - 2 \le 0$$

Решаем данное неравенство методом интервалов. Для этого левую часть надо разложить на множители. Приравняем ее к нулю и решаем полученное уравнение$y^2 - y - 2 = 0$:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

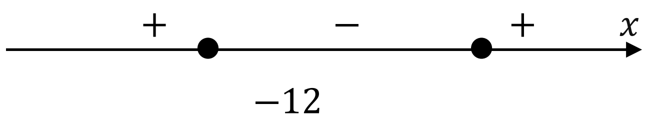
$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \{2, -1\}$$

Неравенство примет вид:

$$(y + 1)(y - 2) \le 0$$

Отметим точки $y_1 = -1$ и $y_2 = 2$ на числовой оси и определим знаки неравенства в полученных интервалах:



Решением будет отрезок $-1 \le y \le 2$. Перейдем обратно к x:

$$-1 \le \lg x \le 2$$

или

$$\begin{cases} \lg x \ge -1 \\ \lg x \le 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{10} \\ x \le 100 \end{cases} \to x \in \left[\frac{1}{10}; 100\right]$$

В пересечении с ОДЗ получаем этот же промежуток $x \in \left[\frac{1}{10}; 100\right]$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{10}; 100\right]$ [15-18, 20].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Смирнова, И. М. Профильная модель обучения математике/ Математика в школе. 1997. №1. С. 32-35.

2 Ященко, И. В. ЕГЭ, универсальные материалы для подготовки учащихся. Математика. / [А. Л. Семенов и др.]. М.: Интеллект-центр, 2011.

3 Ященко, И. В. ЕГЭ. Математика. Типовые экзаменационные материалы. / [А. Л. Семенов и др.]. М.: Национальное образование, 2011.

4 Федорова, Н. Е. Изучение алгебры и начал анализа 10-11. / [М. В. Ткачева]. 14-е изд., стер. М.: Просвещение, 2004г.

5 Алимов, Ш. А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева и др.]. 3-е изд. М. : Просвещение, 2016. 463 с. : ил.