

Д.Э. Постнов, А.Н. Павлов, С.В. Астахов

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

*Учебное пособие
для студентов физического факультета*

САРАТОВ

2008

УДК [621.391:519.2](075.8)
ББК 32.811 я73

Постнов Д.Э., Павлов А.Н., Астахов С.В.

Методы нелинейной динамики: Учеб. пособие для студ. физ. фак. /
Д.Э. Постнов, А.Н. Павлов, С.В. Астахов. - Саратов, 2008. - 120 с.: ил.

Учебное пособие содержит описания 8 лабораторных работ, выполняемых студентами физического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского в рамках практикума «Методы нелинейной динамики». По каждой лабораторной работе пособие включает описание необходимых теоретических сведений, общее представление об используемом алгоритме и перечень практических заданий.

Для студентов, обучающихся по физическим специальностям, а также для аспирантов и научных работников, специализирующихся в области теории нелинейных колебаний.

Рецензент:

В.С. Анищенко, Заслуженный деятель науки РФ, д.ф.-м.н., профессор

УДК [621.391:519.2](075.8)
ББК 32.811 я73

Работа издана в авторской редакции

© Постнов Д.Э., Павлов А.Н., Астахов С.В., 2008

Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для студентов физического факультета, выполняющих лабораторные работы в рамках компьютерного практикума “Методы нелинейной динамики”. Оно содержит описания 9 работ практикума, материал каждой из которых включает постановку задачи, теорию метода, общее представление об алгоритме вычислений и практическую часть. В приложении приводится список математических моделей, используемых при выполнении заданий лабораторных работ.

Пособие охватывает широкий круг методов нелинейной теории колебаний, позволяющих изучать сложную динамику автоколебательных систем в терминах фазового пространства и количественно характеризовать особенности различных режимов колебаний. Первые две работы посвящены визуализации решений динамических систем с непрерывным временем (построение фазовых портретов и сечений Пуанкаре). Следующие две работы представляют собой введение в бифуркационный анализ, являющийся важнейшим инструментом нелинейной динамики. Рассматривается анализ на устойчивость состояний равновесия и предельных циклов, изучается каскад бифуркаций удвоения периода, представляющий собой один из сценариев перехода к хаосу. Последние четыре работы посвящены проблеме диагностики режима динамического хаоса с помощью показателей Ляпунова и фрактальной размерности, корреляционному анализу хаотических режимов колебаний и исследованию структуры точечных процессов.

1 Визуализация фазовых траекторий динамических систем с непрерывным временем

1.1 Постановка задачи

В рамках теории нелинейных колебаний исследование режимов функционирования динамических систем сводится к изучению поведения траекторий в пространстве состояний (которое называют *фазовым пространством*).

Определение

Под *динамической системой* (ДС) понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени.

Определение

Пространство, координатами точки в котором являются переменные x_1, x_2, \dots, x_N , определяющие состояние системы в произвольный момент времени, называется *фазовым пространством* динамической системы. Изменению состояния во времени соответствует движение изображающей точки вдоль некоторой линии (*фазовой траектории*).

Рассмотрим динамическую систему, математическая модель которой имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{x}, \vec{\mu}), \quad \vec{x} \in R^N, \quad \vec{\mu} \in R^K, \quad (1.1)$$

где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$ – набор безразмерных переменных, описывающих состояние системы, $\vec{F} = (F_1, \dots, F_N)$ – некоторые функции (для существования автоколебательных режимов хотя бы одна из них должна быть нелинейной), N – число переменных/уравнений, $\vec{\mu}$ – набор параметров, определяющих динамику системы.

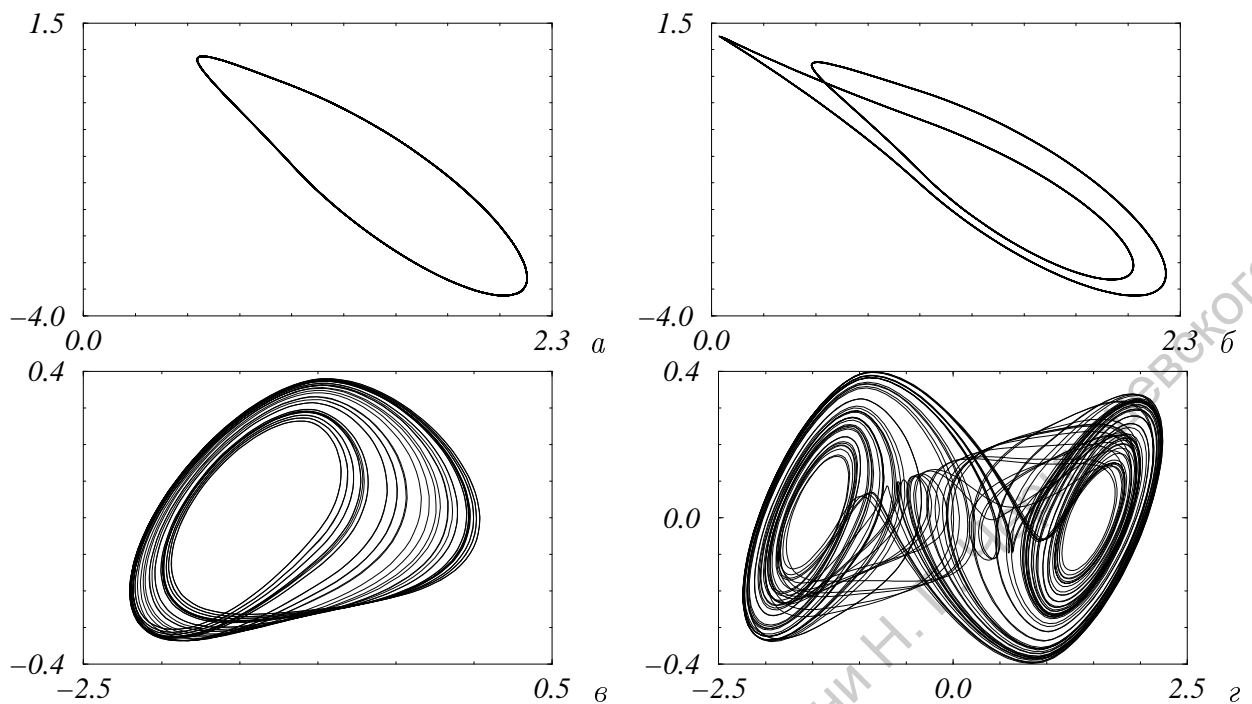


Рис. 1.1: Двумерные проекции периодической (а, б) и хаотической (в, г) динамики 3-мерной динамической системы (на примере цепи Чуа).

Математические модели, содержащие 3 и более обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), способны демонстрировать хаотические режимы колебаний, которые на первый взгляд имеют вид случайных процессов. Переход в фазовое пространство позволяет получать наглядную информацию об особенностях сложной динамики соответствующих систем, и прежде всего, о геометрии предельных множеств фазовых траекторий, которые соответствуют установившемуся режимам (см. рис. 1.1).

За исключением отдельных частных случаев, для нелинейных систем вида (1.1) невозможно найти аналитическое решение; его можно получить только численно (на компьютере). В рамках данной лабораторной работы мы обсудим различные вопросы теории численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для простоты изложения сопоставление алгоритмов будет проводиться для простейшего обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.2)$$

поскольку решение системы n уравнений фактически сводится к многократному обращению к процедуре численного интегрирования для каждого уравнения в отдельности – располагая алгоритмом решения уравнения (1.2), всегда можно легко перейти к многомерному случаю.

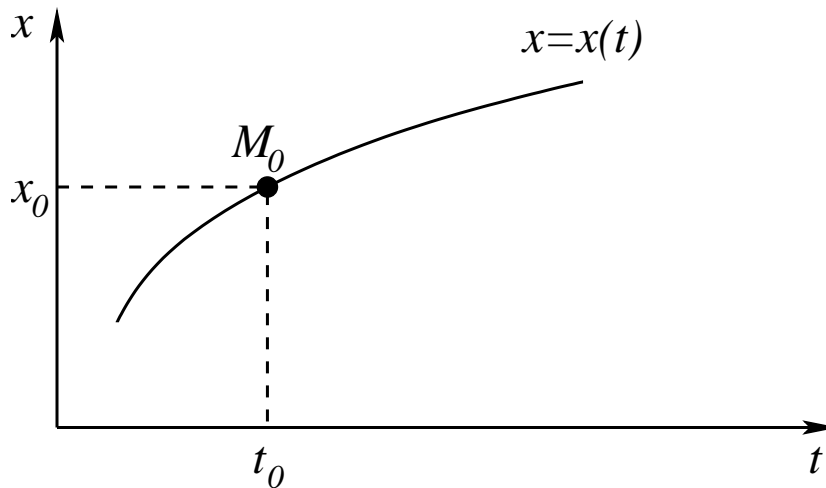


Рис. 1.2: Геометрическая интерпретация численного решения ОДУ: требуется найти интегральную кривую, проходящую через точку M_0 (задача Коши).

1.2 Теоретические сведения: Методы численного интегрирования

Задача численного интегрирования уравнения (1.2) состоит в нахождении его частного решения в виде функции $x(t)$, удовлетворяющей начальному условию

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.3)$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую $x = x(t)$, проходящую через заданную точку $M_0(t_0, x_0)$ при выполнении равенства (1.3) – рис. 1.2.

Метод интегрирования путем разложения функции в ряд Тейлора

Метод интегрирования путем разложения функции в ряд Тейлора является одним из старейших способов решения ОДУ. Проиллюстрируем основную идею данного метода, записав ряд Тейлора для функции $x(t)$ в окрестности точки $t = t_n$. Иными словами, предположим, что известно решение уравнения (1.2) в некоторой заданной точке, и требуется получить следующую точку на интегральной кривой. В окрестности $t = t_n$ справедливо следующее выражение:

$$x(t) = x_n + x'_n(t - t_n) + \frac{x''_n}{2}(t - t_n)^2 + \frac{x'''_n}{6}(t - t_n)^3 + \dots, \quad (1.4)$$

где $x_n = x(t_n)$, x'_n – первая производная функции $x(t)$ в точке $t = t_n$, x''_n – вторая производная и т.д. Предположим, что интервал по времени между

точками интегральной кривой (шаг интегрирования) выбран равным h :

$$t_{n+1} - t_n = h.$$

В этом случае для следующей точки приближенное решение можно получить подстановкой $t_{n+1} = t_n + h$ в уравнение (1.4):

$$x_{n+1} = x_n + hx'_n + \frac{h^2}{2}x''_n + \frac{h^3}{6}x'''_n + \dots \quad (1.5)$$

Точность интегрирования зависит от числа членов данного ряда, для повышения точности требуется вычислять производные высокого порядка функции $x(t)$. Согласно формуле (1.2),

$$x'_n = f(t_n, x_n),$$

поэтому для второй производной можно записать выражение

$$x''_n = \frac{\partial}{\partial t}f(t, x) + f(t, x)\frac{\partial}{\partial x}f(t, x). \quad (1.6)$$

Обозначив

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_t, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f_x,$$

перепишем уравнение (1.6) в виде

$$x''_n = f_t + f \cdot f_x.$$

Если ограничиться только двумя производными при разложении функции в ряд Тейлора, то приближенное решение можно получить, воспользовавшись формулой

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot \left(f + \frac{h}{2}[f_t + f \cdot f_x] \right).$$

Следует отметить, что данный метод очень неудобен с вычислительной точки зрения, поэтому он редко используется на практике. Неудобен он из-за необходимости вычисления производных высоких порядков. Даже для x'''_n получается довольно сложное выражение

$$x'''_n = f_{tt} + 2ff_{tx} + f^2f_{xx} + f_t f_x + f f_x^2,$$

а последующие производные выглядят еще сложнее. Ценность метода состоит в том, что он дает наглядное представление о величине погрешности численного интегрирования, которая не превышает первый отброшенный член ряда Тейлора. Например, если ограничиться второй производной в выражении (1.5), то ошибка будет пропорциональна h^3 .

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений на практике предпочитают использовать класс методов Рунге-Кутты, которые не требуют вычисления производных функции $f(t, x)$ в процессе нахождения искомого решения, а требуют только вычислять саму функцию.

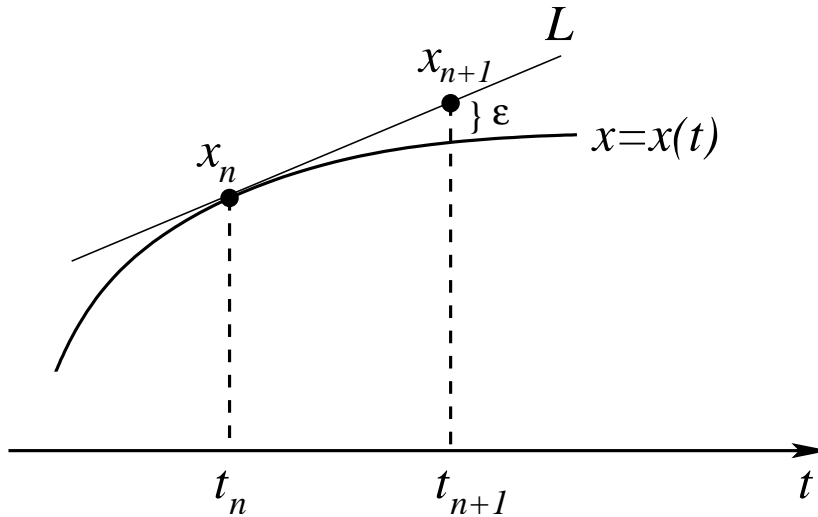


Рис. 1.3: Геометрическое представление метода Эйлера.

Метод Эйлера

Наиболее простым методом численного решения ОДУ является метод Эйлера. Он относится к классу методов Рунге-Кутты 1-го порядка.

Предположим, что процесс численного интегрирования уравнения (1.2) доведен до точки (t_n, x_n) , и требуется получить следующую точку на интегральной кривой $x(t)$. В точке (t_n, x_n) можно провести прямую линию с тангенсом угла наклона

$$x'_n = f(t_n, x_n).$$

На рисунке 1.3 изображена функция $x = x(t)$ – точное, но неизвестное решение уравнения (1.2) и прямая L – касательная в точке (t_n, x_n) . Искомую точку решения (t_{n+1}, x_{n+1}) в рамках метода Эйлера предлагается выбирать на касательной L . Если шаг по времени $h = t_{n+1} - t_n$ мал, то будет мала и погрешность ϵ .

Формулу интегрирования по методу Эйлера можно записать следующим образом

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n). \quad (1.7)$$

Решая уравнение методом Эйлера, мы поступаем следующим образом. В начальный момент времени задана только одна точка (t_0, x_0) , через которую проходит решение (начальное условие). Значение функции $f(t_0, x_0)$ позволяет определить тангенс угла наклона касательной в этой точке. Выбрав шаг h , мы смещаемся на некоторое малое расстояние вдоль касательной, попадая в точку (t_1, x_1) . В ней снова определяется касательная, и этот процесс многократно повторяется. В результате будет получена последовательность коротких отрезков прямой линии, которые, как мы надеемся, являются достаточно хорошим приближением к искомому решению $x(t)$.

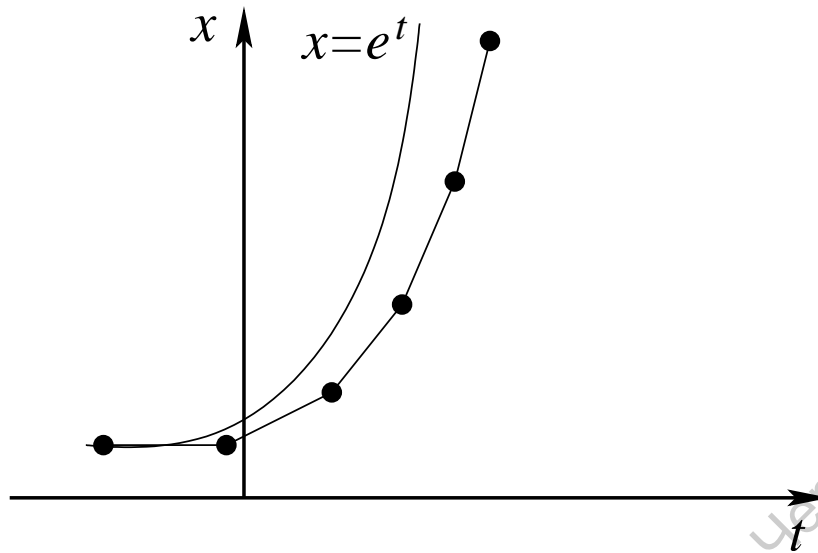


Рис. 1.4: Накопление ошибки при интегрировании методом Эйлера. В каждый последующий момент времени t_n (черные кружочки) решение, полученное методом Эйлера (нижняя кривая) все сильнее отклоняется от истинного решения (верхняя кривая). Об этом свидетельствует увеличение расстояния между приведенными зависимостями по оси ординат.

Естественно, такой метод имеет недостатки, связанные с попыткой приблизиться к интегральной кривой отрезками прямых линий. Это может приводить к накоплению ошибки и существенному отклонению последовательности отрезков от точного решения – рис. 1.4.

Применение метода Эйлера означает, что при разложении функции в ряд Тейлора учитывается только первая производная. Погрешность (ошибка ограничения) в этом случае пропорциональна h^2 . В силу этого даже при выборе малого шага интегрирования будет возникать ситуация, подобная изображенной на рис. 1.4. Данная проблема называется проблемой устойчивости метода интегрирования, и ей уделяется большое внимание при анализе любого метода численного решения ОДУ, особенно в том случае, когда функция $f(t, x)$ содержит большие нелинейности (высокие степени t и x).

В рамках метода Эйлера для вычисления значения x_{n+1} используется наклон касательной только в одной точке (t_n, x_n) . Данный метод можно усовершенствовать для уточнения решения ОДУ.

Исправленный метод Эйлера

Будем применять обычный метод Эйлера для точки (t_n, x_n) , это позволит определить следующую точку (t_{n+1}, x_{n+1}) . Согласно формуле (1.7), $x_{n+1} = x_n + h \cdot x'_n$. Кроме того, $t_{n+1} = t_n + h$. В рамках исправленного метода Эйлера находится средний тангенс угла наклона для двух точек (t_n, x_n) и (t_{n+1}, x_{n+1}) . Тангенс угла наклона в первой точке равен $f(t_n, x_n)$, а во второй $f(t_{n+1}, x_{n+1}) = f(t_n + h, x_n + h \cdot x'_n)$. Усреднение двух тангенсов

определяет функцию

$$\Phi(t_n, x_n, h) = \frac{1}{2} \left[f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + h \cdot x'_n) \right].$$

Искомую точку (t_{n+1}, x_{n+1}) выберем на прямой Φ , записав формулу

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot \Phi(t_n, x_n, h).$$

Это и есть исправленный метод Эйлера, в рамках которого вначале находится первое приближение с помощью обычного метода Эйлера, а затем проводится корректировка касательной с учетом тангенсов углов наклона в двух точках. Скорректировав наклон линии (второе приближение), на ней выбирается искомая точка. Точность исправленного метода Эйлера выше чем обычного, ошибка ограничения пропорциональна h^3 .

Модифицированный метод Эйлера

В исправленном методе Эйлера усреднялись наклоны касательных, но можно поступить иначе. Вернемся к рисунку 1.3, который был рассмотрен в рамках обычного метода Эйлера. В том случае через точку (t_n, x_n) проводилась прямая L с тангенсом угла наклона $x'_{n+1} = f(t_n, x_n)$. Но теперь выберем точку P , лежащую на прямой L и соответствующую середине отрезка $[t_n, t_{n+1}]$ – рис. 1.5. Эта точка имеет координаты

$$\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} \cdot x'_n \right).$$

Абсцисса соответствует половине шага интегрирования, а ордината вычисляется обычным методом Эйлера. Тангенс угла наклона касательной в точке P равен

$$\Phi(t_n, x_n, h) = f \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} \cdot x'_n \right).$$

Прямая с таким тангенсом угла наклона обозначена на рис. 1.5 как L_1 . Проведем через точку (t_n, x_n) прямую L_2 , параллельную L_1 , и выберем в качестве искомой точки на интегральной кривой точку, лежащую на прямой L_2 и соответствующую значению $t_{n+1} = t_n + h$. Формула модифицированного метода Эйлера имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot \Phi(t_n, x_n, h).$$

Отличие от предыдущего способа состоит в другом варианте вычисления функции Φ . Также как и в рамках исправленного метода Эйлера, точка на интегральной кривой определяется в ходе двух последовательных приближений.

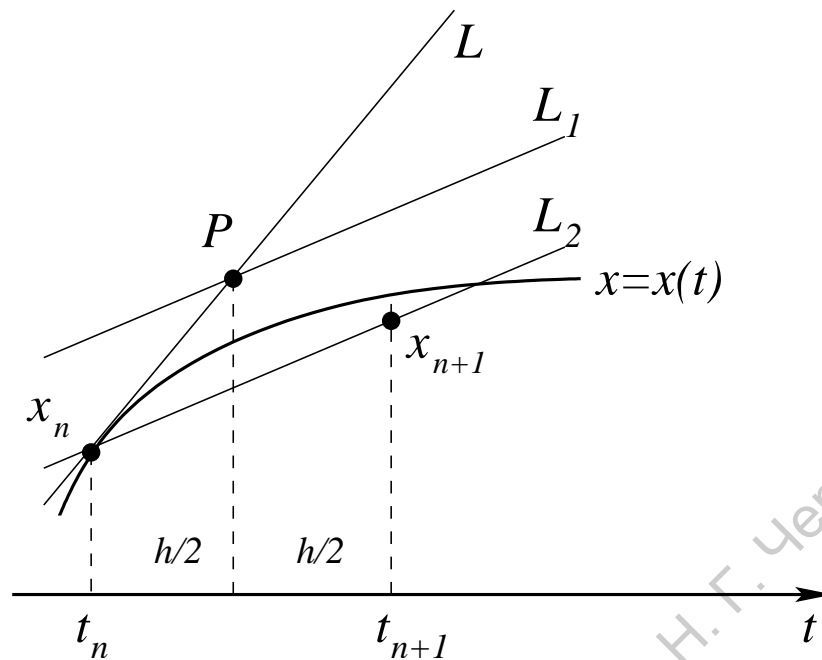


Рис. 1.5: Геометрическое представление модифицированного метода Эйлера.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Исправленный и модифицированный методы Эйлера относятся к классу методов Рунге-Кутты второго порядка. Существуют общие формулы для семейства методов Рунге-Кутты, на которых мы не будем останавливаться. Вместо этого рассмотрим алгоритм, получивший наибольшую популярность. Это метод Рунге-Кутты 4-го порядка, который обычно называют просто методом Рунге-Кутты без указания на порядок. Данный классический метод задается следующей формулой:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{hk_1}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{hk_2}{2}\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3). \end{aligned}$$

Ошибка ограничения составляет величину порядка h^5 , то есть при интегрировании ОДУ методом (1.8) достигается точность h^4 . Отметим, что для метода Рунге-Кутты функцию необходимо вычислять 4 раза (поиск точки интегральной кривой проводится с помощью четырех последовательных приближений).

Известны модификации алгоритмов численного решения ОДУ. Если мы будем, например, решать уравнение, содержащее функцию вида e^x , то при малых значениях переменной x ошибка будет меньше чем при больших. Поэтому при решении дифференциальных уравнений бывает полезно варьировать шаг интегрирования с тем, чтобы на каждом элементарном отрезке достигалась примерно одинаковая точность.

Контроль погрешности можно провести следующим образом – применить метод Рунге-Кутты, и по известной точке (t_n, x_n) получить последующие. Найдем точку (t_{n+2}, x_{n+2}) двумя способами:

- дважды воспользовавшись формулой (1.8), последовательно вычислив (t_{n+1}, x_{n+1}) и (t_{n+2}, x_{n+2}) ;
- проинтегрировав уравнение с шагом $2h$.

Путем сравнения результатов можно определить погрешность интегрирования. Если эта погрешность велика, необходимо отказаться от части проведенных вычислений и уменьшить шаг. Такая ситуация встречается в случаях, когда резко меняется характер решения. Отметим, что если изначально задать очень маленький шаг, то это обеспечит малую погрешность, но приведет к существенным затратам времени вычислений. Варьирование величины h позволяет найти компромисс между допустимой погрешностью и длительностью компьютерного счета.

Обобщение на многомерный случай

Мы рассмотрели различные варианты численного решения ОДУ вида (1.2). Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1.1) подразумевает многократное применение записанных формул для каждого уравнения в отдельности. В пакетах прикладных программ процедура интегрирования реализуется в виде отдельной подпрограммы, и к ней идет обращение в цикле по переменной, задающей номер уравнения системы, которое необходимо проинтегрировать.

Наиболее простой вариант формул интегрирования системы ОДУ реализуется для обычного метода Эйлера. Предположим, что требуется найти решение системы двух ОДУ 1-го порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) \end{aligned} \quad (1.9)$$

при заданных начальных условиях (t_0, x_0, y_0) . Искомые точки на инте-

графальной кривой определяются по формулам

$$\begin{aligned}t_{n+1} &= t_n + h, \\x_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n, y_n), \\y_{n+1} &= y_n + hg(t_n, x_n, y_n).\end{aligned}$$

Значения (t_i, x_i, y_i) выводятся в файл (или на экран) для визуального исследования динамики модели (1.9). В целях устранения переходных процессов вывод на экран (или в файл) осуществляется после достижения заданного исследователем времени установления t_u , то есть при $t > t_u$.

По аналогии можно записать формулы для большего числа уравнений системы (1.1), а также для другого метода численного интегрирования.

1.3 Численный алгоритм

Описанные выше методы численного интегрирования ОДУ на практике обычно применяются в виде отдельной подпрограммы (функции), реализующей получение решения на интервале в один шаг (см. рис. 1.6). Как правило, уравнения правых частей заданы в виде отдельной подпрограммы (функции), а текущие значения переменных и управляющих параметров хранятся в соответствующих массивах. Значения фазовых переменных обновляются на каждом шаге вычислений, и для дальнейшего использования на каждом шаге их нужно сохранять в файле либо массиве.

Отметим, что ничто не мешает менять и значения управляющих параметров через один или несколько шагов интегрирования. Реализация такого приема совместно с обновлением графического вывода позволяет создавать компьютерный аналог некоторого устройства, управляемого в реальном масштабе времени.

1.4 Практическая часть

Целью выполнения практического задания является наблюдение различий во временной реализации решения для модели линейного осциллятора с затуханием (модель **lin_osc** в папке моделей ANONS).

Перед выполнением задания следует ознакомиться с “Руководством пользователя” по программному комплексу ANONS.

Методика выполнения задания

Программный комплекс ANONS имеет три встроенных метода интегрирования: Эйлера, Рунге-Кутта 4 порядка с постоянным шагом и Рунге-Кутта 4 порядка с автоматической коррекцией шага. Переключение между

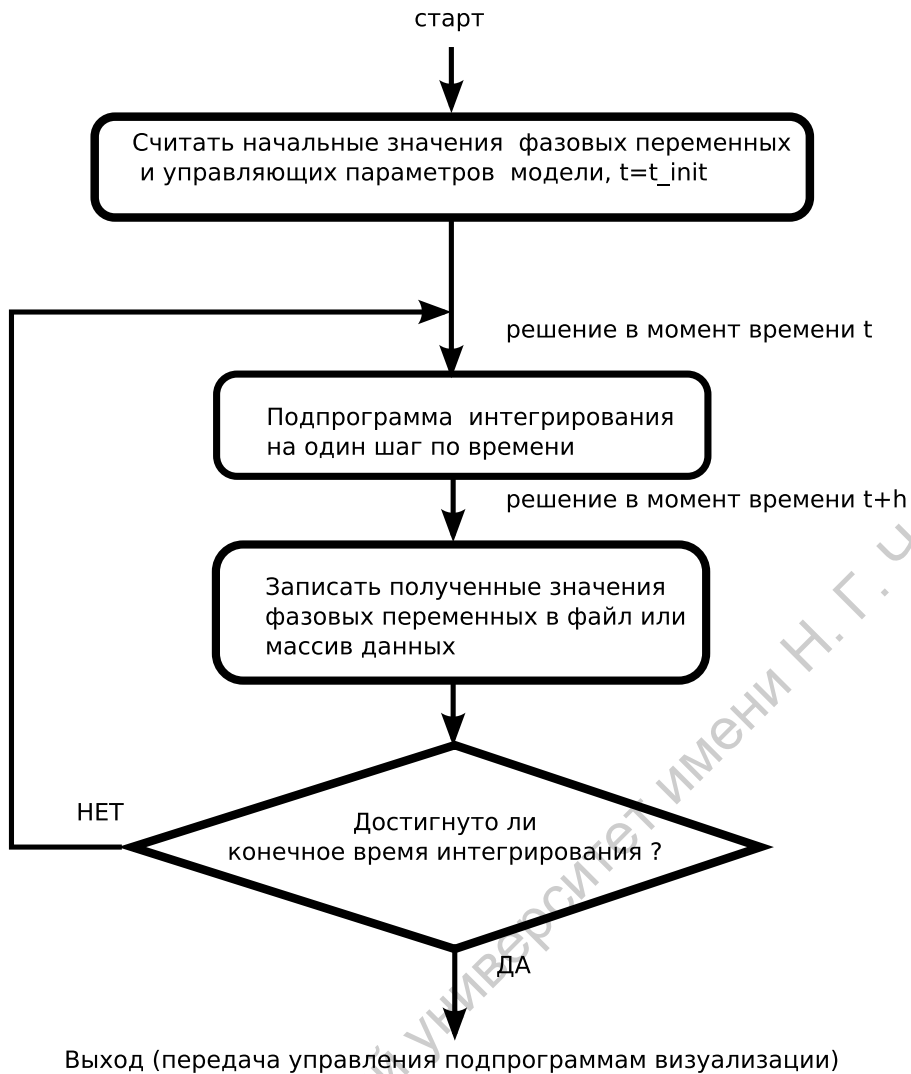


Рис. 1.6: Пример алгоритма получения временной реализации при численном интегрировании системы ОДУ.

методами производится выбором соответствующей кнопки в окне управления. Параметры численной схемы (такие как шаг интегрирования) также задаются в том же окне.

Поскольку комплекс не предназначен для “плохого” интегрирования уравнений модели, увидеть ошибки метода при неадекватном выборе параметров численной схемы можно лишь, специально экспортируя результаты расчета во внешнюю графическую программу *xmgrace*. Для этого следует воспользоваться строкой меню “Export time course to xmgrace” в меню “Processes”.

ВАЖНО: требуемый шаг интегрирования следует задавать именно в окне управления, а не в диалоговом окне процесса.

Выведенный на экран график нужно сохранить в виде файла данных, при этом рекомендуется дать ему название, содержащее текущее значение изменяемого параметра. Для сопоставления полученных результатов несколько записанных файлов данных следует построить на одном графиче-

ке для дальнейшего вывода в файл Postscript или на печать.

Упражнение 1

Запустите программный комплекс ANONS с моделью `lin_osc` из каталога `models`. Получите временную реализацию по обоим переменным для набора параметров по умолчанию. Измените в большую и меньшую сторону время интегрирования и охарактеризуйте изменения в наблюдаемых временных реализациях. Передвигая курсор мыши в пределах окна вывода временных реализаций, измерьте убывание амплитуды колебаний со временем и оцените добротность такой колебательной системы.

Упражнение 2

Пользуясь соответствующими органами управления, отмените вывод окон временных реализаций и откройте окно фазового портрета. Повторите получение решения. Пользуясь средней клавишей мыши, постройте набор фазовых траекторий, стартующих с различных начальных условий. Повторите это, установив значение управляющего параметра $\omega = -1.0$. Объясните характер изменений структуры фазового портрета.

Упражнение 3

Установите управляющие параметры модели $\varepsilon = 1.0$, $\alpha = 0.1$, $\omega = 1$ и начальные условия $X = Xdot = 1.0$. Установите шаг интегрирования $h = 0.01$ и время наблюдения $T_{obs} = 10.0$. Используя попеременно все три метода интегрирования, сопоставьте полученные временные реализации при нескольких увеличивающихся значениях шага интегрирования h . Оцените, при какой его величине различия становятся существенными.

Контрольные вопросы

- 1) Как оценить погрешность численного интегрирования метода, основанного на разложении функции в ряд Тейлора?
- 2) В чем состоят недостатки метода Эйлера?
- 3) Сопоставьте обычный и модифицированный методы Эйлера по точности вычислений.
- 4) Как осуществляется контроль погрешности при численном интегрировании ОДУ?
- 5) Что означает порядок метода Рунге-Кутты?
- 6) Как обобщить численное интегрирование простейшего ОДУ 1-го порядка на многомерный случай?

2 Построение сечения Пуанкаре

2.1 Постановка задачи

Визуальный анализ хаотической динамики в фазовом пространстве размерности $N \geq 3$ является не очень наглядным: мы наблюдаем проекцию на плоскость сложного движения изображающей точки, и в этом случае может быть проблематичным исследование геометрических особенностей предельного множества. Существует более удобный метод анализа сложной геометрии колебательных режимов – введение секущей Пуанкаре. Данный прием удобен, в частности, тем, что позволяет понизить на 1 размерность фазового пространства, и для 3-х мерных ДС перейти к анализу динамики на плоскости. При необходимости, специальный способ введения секущей дает возможность устранять периодическую составляющую колебательного процесса, что бывает полезно при анализе режимов динамики неавтономных систем.

Определение

Под *секущей Пуанкаре* понимается плоскость (или поверхность) в фазовом пространстве, выбранная таким образом, чтобы все траектории, принадлежащие аттрактору, пересекали ее трансверсально (под ненулевым углом).

Процедура построения сечения Пуанкаре отличается для автономных и неавтономных систем. Рассмотрим эти случаи по-отдельности.

Случай неавтономной системы

Выберем в качестве примера математическую модель генератора Ван дер Поля с внешним периодическим воздействием

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = A \sin \omega t, \quad (2.1)$$

которая путем замены переменной $dx/dt = y$ преобразуется в систему 2-х ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon(1 - x^2)y - \omega_0^2 x + A \sin \omega t.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь параметр ω_0 определяет собственную частоту автоколебаний в системе, параметр нелинейности ε управляет интенсивностью диссипации/подкачки энергии, параметры A и ω задают амплитуду и частоту внешнего воздействия. Такую n -мерную неавтономную систему можно представить в виде $(n + 1)$ -мерной автономной системы в “цилиндрическом” пространстве состояний. Для модели (2.2) такое преобразование записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon(1 - x^2)y - \omega_0^2 x + A \sin z, \\ \frac{dz}{dt} &= \omega.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Решение данной системы уравнений соответствует движению изображающей точки в 3-х мерном фазовом пространстве по “цилиндру”, ось которого ассоциируется с переменной z , неограниченно возрастающей с увеличением времени – рис. 2.1.

В качестве секущей в этом случае выбирают плоскость постоянной фазы внешнего воздействия $z \bmod 2\pi = \text{const}$, что соответствует выбору точек фазовой траектории ровно через период T внешней силы. По такому принципу работает стробоскоп, поэтому рассмотренная процедура построения сечения называется методом *стробоскопического сечения*. На рис. 2.2 проиллюстрирован пример стробоскопического сечения для квазипериодического режима динамики модели (2.1).

Случай автономной системы

Рассмотрим 3-х мерную автономную систему с предельным циклом C и введем секущую плоскость P – рис. 2.3. При движении по предельному циклу пересечение секущей в одном направлении будет происходить в точке x^* в течение каждого периода колебаний. Таким образом, для периодических режимов колебаний (с простой формой предельного цикла – рис. 2.3) в сечении Пуанкаре будет наблюдаться только одна точка.

Для режимов колебаний, отличных от однотоктного цикла, в сечении Пуанкаре будет наблюдаться набор точек x_1, x_2, \dots , которые соответствуют последовательным пересечениям секущей – рис. 2.4.

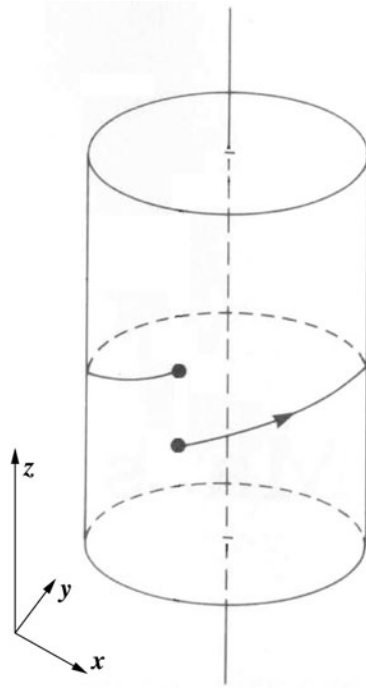


Рис. 2.1: Качественное представление динамики системы (2.3) и процедуры построения стробоскопического сечения. Черными кружочками показаны 2 значения переменной z , выбранные через период внешнего воздействия.

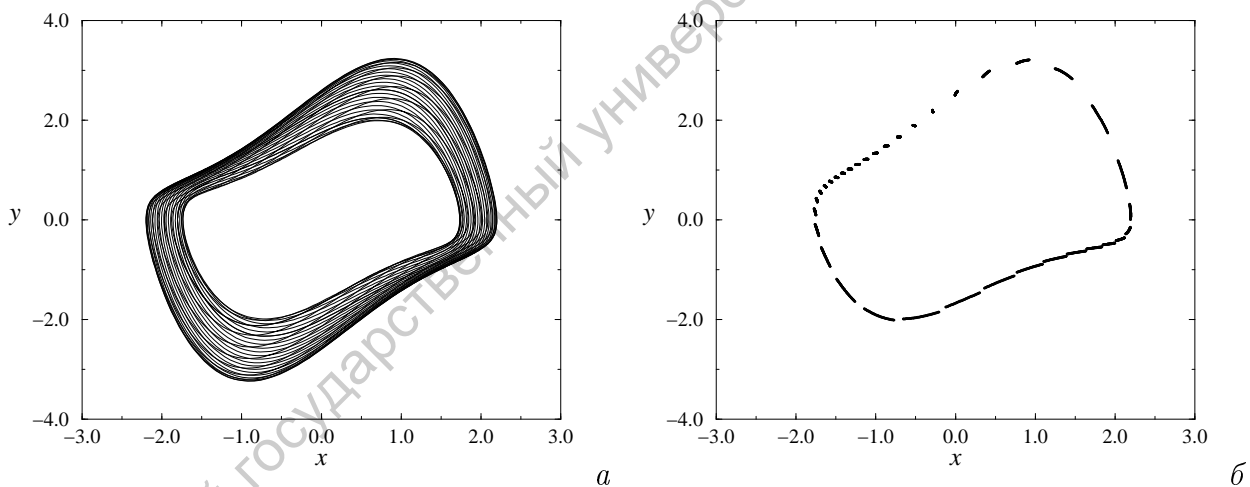


Рис. 2.2: Проекция фазового портрета квазипериодических колебаний модели (2.1) и соответствующее ему стробоскопическое сечение.

Обобщая, справедливо утверждение: замкнутые траектории образуют конечные последовательности точек в секущей (одна точка – для предельного цикла с периодом T_0 , две – для цикла удвоенного периода $2T_0$ и т.д.), неперiodическим колебательным режимам соответствуют бесконечные последовательности точек.

Если зафиксировать одну из координат пересечений секущей: x_1, x_2, \dots , можно построить *отображение Пуанкаре*, которое также называют *отображением последования* (зависимость x_{n+1} от x_n). На рис. 2.5 изображены

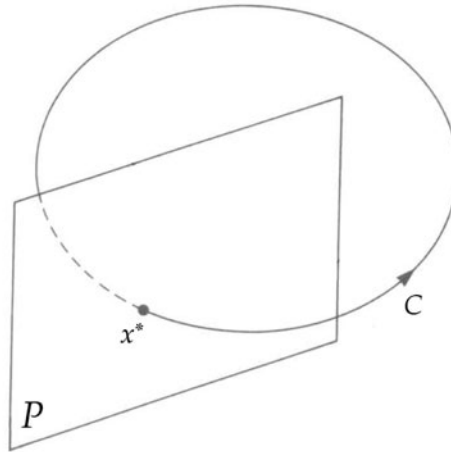


Рис. 2.3: Сечение Пуанкаре для автономной системы с однократным предельным циклом.

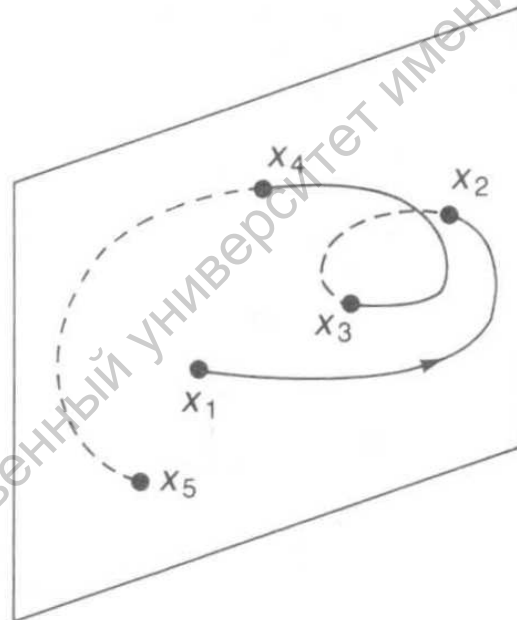


Рис. 2.4: Характерный пример последовательности точек в секущей Пуанкаре для автономной системы со сложным режимом динамики.

отображения последования для некоторых режимов динамики модели генератора Чуа.

Сечение Пуанкаре позволяет анализировать тонкую структуру сложной геометрии хаотических предельных множеств. На рис. 2.6 представлен вид секущей для странного аттрактора в модели осциллятора Дуффинга:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} - \alpha x(\beta - x^2) = A \cos \omega t.$$

При более детальном рассмотрении отдельных фрагментов наблюдается

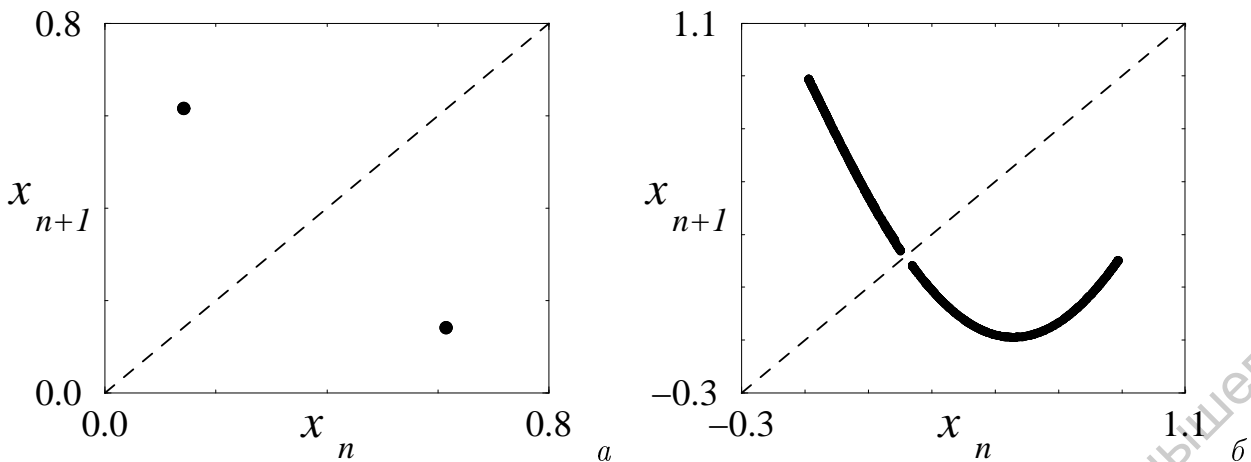


Рис. 2.5: Отображения последования для периодических колебаний (с периодом $2T_0$) и хаотического аттрактора генератора Чуа, соответственно. Приведенные отображения соответствуют динамике, изображенной на рис. 1.1б,в.

самоподобная (фрактальная) структура, характерная для хаотических предельных множеств.

Построение сечения Пуанкаре особенно наглядно для 3-х мерных динамических систем с непрерывным временем; в этом случае осуществляется переход на фазовую плоскость, позволяющий изучать различные детали хаотического режима колебаний. Для многомерных динамических систем метод сечения Пуанкаре менее нагляден, тем не менее он также оказывается полезным при решении конкретных задач. Например, при вычислении размерности хаотического предельного множества более точные результаты получаются, если вычислить размерность множества в сечении Пуанкаре, а затем оценить размерность аттрактора, увеличив полученный результат на 1.

2.2 Теория метода

При составлении компьютерной программы построения сечения Пуанкаре (для простоты ограничимся 3-х мерными динамическими системами) необходимо предусмотреть процедуры (А) выбора секущей плоскости и (Б) нахождения и уточнения координат точек ее пересечения фазовой траекторией.

Задать секущую можно несколькими способами, например:

- Вручную выбрать координаты 3-х точек в фазовом пространстве, через которые будет проходить секущая (эти точки не должны находиться на одной прямой);
- Задать координаты 1-й точки в фазовом пространстве, через которую

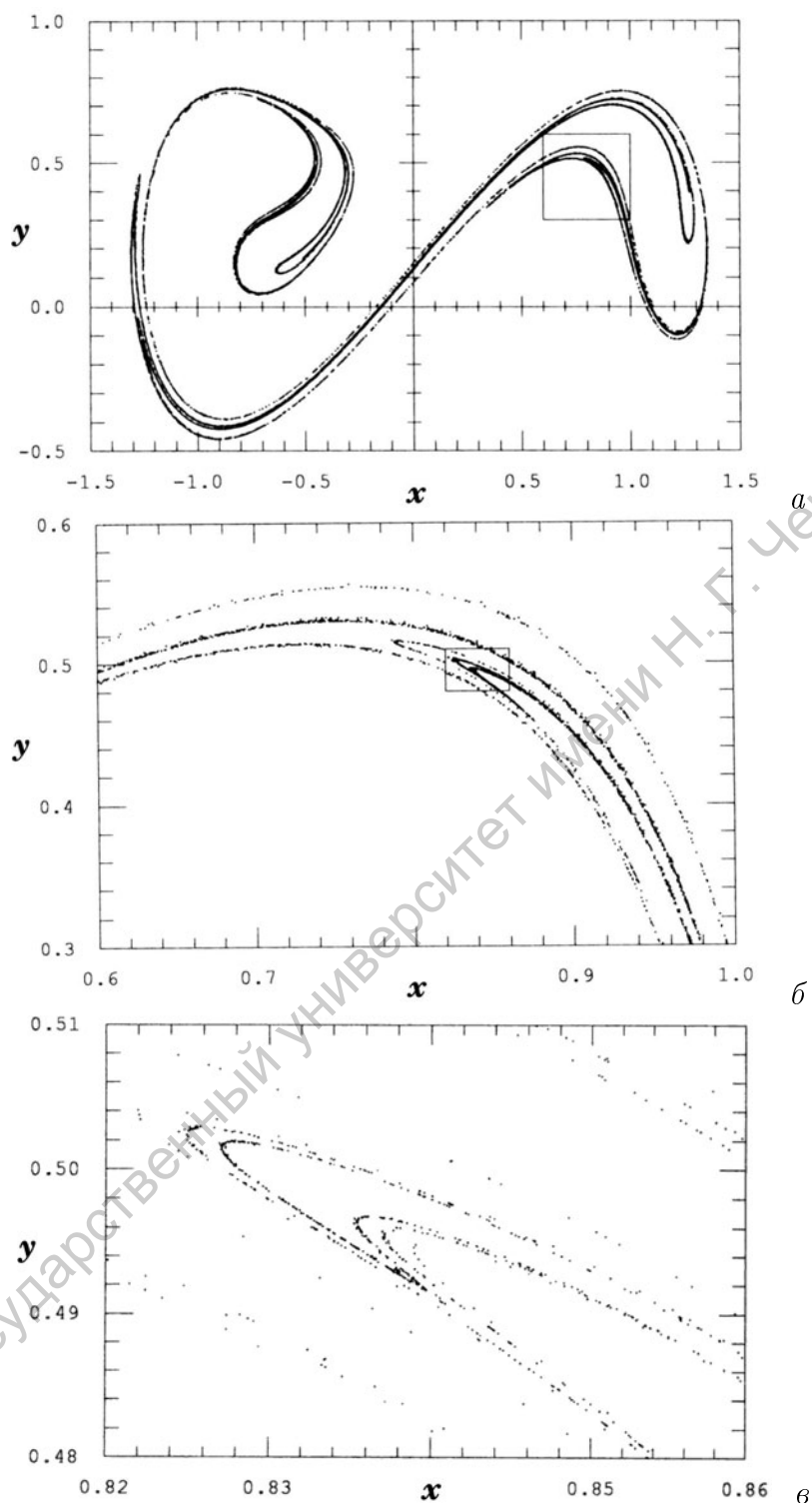


Рис. 2.6: Фрактальная структура сечения Пуанкаре. Рисунок *б* является увеличенным фрагментом рисунка *а*, а рисунок *в* – увеличенным фрагментом рисунка *б*.

будет проходить секущая плоскость, и направление вектора, ортогонального этой плоскости.

Существуют и другие варианты, однако во всех случаях предварительно необходимо проанализировать исходный фазовый портрет, чтобы выбрать секущую оптимальным образом. В частности, бывает целесообразно выби-

рать плоскость, проходящую через состояние равновесия, вокруг которого осуществляется движение в фазовом пространстве, или вблизи состояния равновесия.

Для практических целей (чтобы было легко найти точки пересечения) удобно использовать секущие вида $x = C = const$ (где в качестве x рассматривается любая переменная состояния исследуемой динамической системы). Это позволяет легко контролировать процесс пересечения плоскости при интегрировании уравнений математической модели (о пересечении будет свидетельствовать смена знака для разности $x - C = 0$). Для секущих, заданных уравнением плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (в 3-мерном случае), на каждом шаге интегрирования вычисляется величина $f = Ax + By + Cz + D$. Если $f < 0$, точка фазовой траектории расположена с одной стороны от плоскости, если $f > 0$ – то с другой. Контролируя смену знака f , мы идентифицируем переход фазовой траектории через секущую.

В целях уточнения координат точки в сечении используют несколько приемов:

- **Подстройка шага интегрирования.** После того, как произошло пересечение секущей P , целесообразно вернуться назад (в предыдущую точку), уменьшить шаг и решать задачу численного интегрирования с малым шагом до тех пор, пока не будет достигнута плоскость P . Более гибкие процедуры управления шагом интегрирования могут предусматривать подстройку шага в зависимости от расстояния до плоскости по аналогии с методом половинного деления. Иными словами, пока фазовая траектория находится на расстоянии от секущей, шаг выбирается сравнительно большим, при приближении к ней шаг уменьшается.
- **Метод Эно (Henon).** Этот оригинальный алгоритм позволяет очень быстро осуществлять поиск точек в сечении. Проиллюстрируем его идею на примере системы уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Предположим, что в качестве секущей выбирается плоскость $z = a = const$. Разделим первые 2 уравнения системы (2.4) на третье уравне-

ние, а само третье уравнение преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= \frac{f_1(x, y, z)}{f_3(x, y, z)} \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{f_2(x, y, z)}{f_3(x, y, z)} \\ \frac{dt}{dz} &= \frac{1}{f_3(x, y, z)}\end{aligned}\quad (2.5)$$

После такого преобразования z выступает в роли независимой переменной. Получив текущее значение z вблизи секущей путем интегрирования системы (2.4), можно легко вычислить, на какую величину необходимо изменить это значение, чтобы обеспечить выполнение равенства $z = a$; с таким шагом по переменной z далее требуется проинтегрировать систему (2.5). В результате, проинтегрировав уравнения системы (2.5) всего один раз, мы сразу попадаем в секущую плоскость.

2.3 Численный алгоритм

Фрагмент кода, реализующий поиск и уточнение пересечения с секущей Пуанкаре, удобно встроить в цикл пошагового интегрирования, который обсуждался в предыдущей работе. На рисунке 2.7 приведен пример, когда уточнение точки пересечения производится методом половинного деления шага интегрирования.

После каждого шага интегрирования проверяется, не произошло ли пересечение секущей. Для этого текущие значения фазовых переменных подставляются в выражение для секущей, которое задано отдельно. В комплексе ANONS оно определено с помощью функции **cutfun** и задается пользователем вместе с выражениями для правых частей. Изменение знака этой функции означает пересечение секущей на данном шаге интегрирования. Если такое событие обнаружено, то управление передается фрагменту программы, уточняющему точку сечения. Здесь возможны несколько вариантов.

В простейшем случае, когда не требуется высокая точность вычислений, но важна их скорость, точка сечения может быть вычислена с помощью интерполяции по каждой из переменных. Такой способ реализован в окне фазовых проекций ANONS и применяется для оперативного наблюдения фазовых проекций в “реальном масштабе времени”.

На рисунке 2.7 проиллюстрирован более точный алгоритм. При обнаружении факта пересечения секущей, проверяется минимальное расстояние от секущей. Если оно превышает наперед заданное, то интегрирование возвращается к предыдущему шагу путем восстановления исходных значений

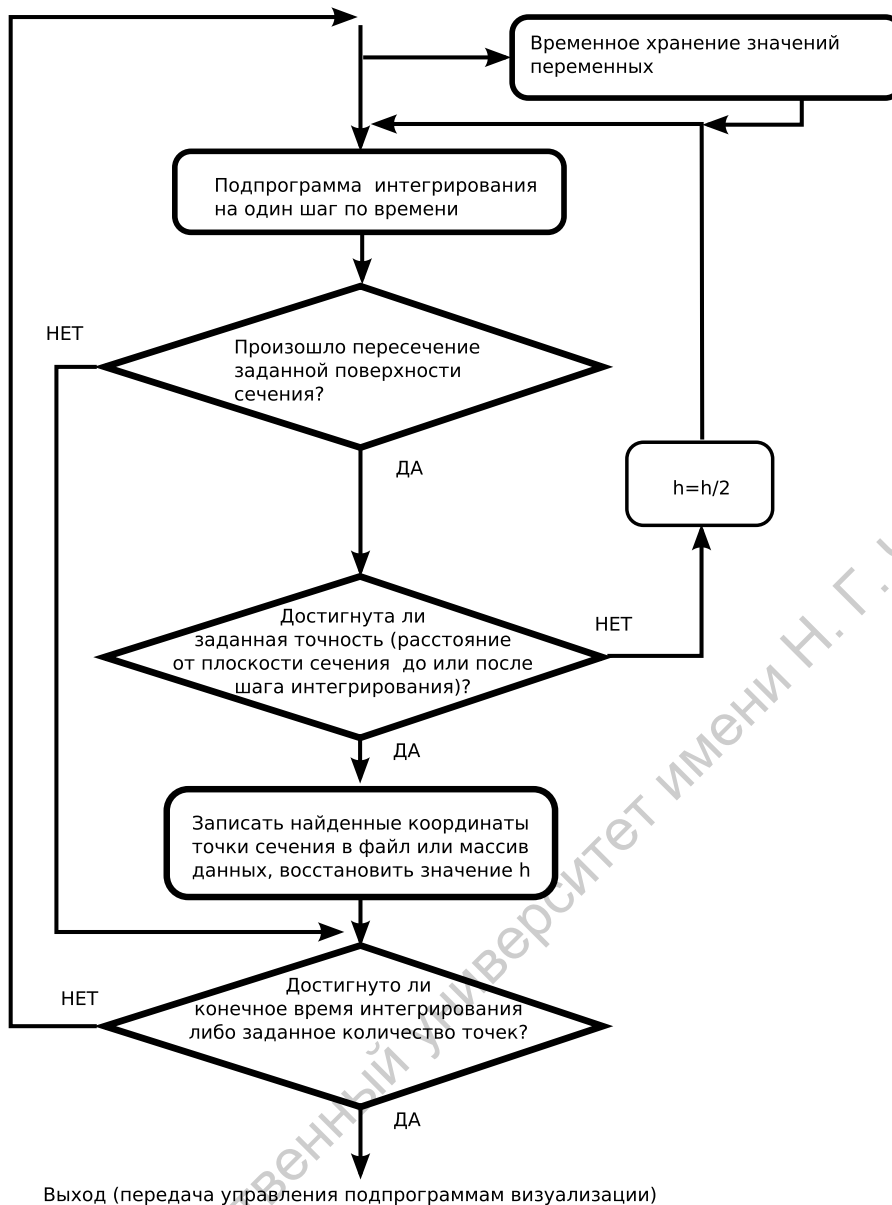


Рис. 2.7: Структурная схема сегмента программы, реализующая поиск точки в сечении Пуанкаре с уточнением посредством деления шага интегрирования пополам.

фазовых переменных и времени. Шаг интегрирования при этом делится пополам. В результате повторения интегрирования с половинным шагом возможны два исхода: пересечение произойдет либо на первом, либо на втором шаге. Далее следует повторение проверки на точность и, если необходимо, дальнейшее деление шага пополам. Следует отметить, что описанный выше метод работоспособен и при наличии шумовой добавки в уравнениях. В этом случае повторение процедуры интегрирования с половинным шагом не повторяет в точности исходную траекторию, однако ее результат может рассматриваться как другая, равновероятная временная реализация, так как два соседних значения шумового сигнала статистически независимы.

При анализе колебательной динамики типичной является ситуация, когда за каждый оборот фазовой траектории вокруг состояния равновесия

происходит два пересечения секущей в различных направлениях, образуя два соответствующих подмножества точек сечения. Формально, оба этих подмножества принадлежат сечению Пуанкаре. На практике, однако, они могут перекрываться в фазовой проекции, что осложняет анализ динамики системы. При реализации численного алгоритма полезно предусмотреть возможность визуализации одного из двух, либо обоих подмножеств точек. Это можно сделать двумя различными способами:

- отслеживая *направление* пересечения секущей, для чего достаточно учитывать характер смены знака значения функции **cutfun** (с минуса на плюс либо наоборот);
- выводя на экран (записывая в файл) только четные либо нечетные точки сечения.

При анализе одной непрерывной фазовой траектории оба способа эквивалентны. В случае накопления точек сечения в процессе анализа набора отрезков временной реализации (периодограмм) необходимо применять первый способ.

2.4 Практическая часть

Программный комплекс ANONS предлагает два способа получения сечения Пуанкаре. Первый из них активируется нажатием соответствующих кнопок-индикаторов в окне фазовых проекций и предназначен для оперативного наблюдения сечения Пуанкаре при предварительном исследовании динамики модели. В этом случае точность вычисления точек определяется процедурой интерполяции и, таким образом, косвенно задается шагом интегрирования. Количество точек сечения определяется временем наблюдения T_{obs} и параметром количества изображаемых траекторий в окне фазовых проекций.

Второй способ реализован в виде отдельного процесса со своим набором параметров (см. Руководство пользователя к ANONS). В этом случае имеются возможность задать требуемую точность вычислений, желаемое количество точек сечения, просмотреть результаты в отдельном окне и записать их в виде файла данных. Кроме того, в рамках этого процесса возможно вычисление двойного сечения Пуанкаре и метрической размерности.

Упражнение 1

Запустите программный комплекс ANONS с моделью **f_vdp** из каталога **models**. Задайте значения переменных и параметров из файла состояния **task_1.st**. Откройте окно фазовых проекций и перейдите в режим непрерывного интегрирования с переприсвоением начальных условий. Изменяя амплитуду внешнего гармонического сигнала, изучите изменения в

виде фазовой проекции. Вернувшись к состоянию **task_1**, включите отображение сечения Пуанкаре в окне фазовых проекций. Изучите и объясните его структуру. Сопоставьте результат выбора подмножества сечения (кнопки-индикаторы **Both, Up, Down**)

Упражнение 2

Выключите изображение фазовых траекторий, и выберите подмножество сечения Пуанкаре «**Up**». Изменяя амплитуду и частоту сигнала гармонического воздействия в пределах, указанных преподавателем, изучите соответствующую эволюцию сечения Пуанкаре. В частности, дайте интерпретацию наблюдаемым изменениям при

- (1) увеличении амплитуды гармонического сигнала;
- (2) изменении частоты гармонического сигнала в окрестности значений 1.0, 2.0, 3.0.

Упражнение 3

Перезапустите программный комплекс **ANONS** с моделью **f_duff** из каталога **models**. Задайте значения переменных и параметров из файла состояния **task_2_3.st**.

Изменяя параметры амплитуды и частоты внешнего воздействия, изучите с помощью сечения Пуанкаре строение хаотического аттрактора модельной системы. Для исследования его тонкой структуры используйте процесс **PNC** комплекса **ANONS**. Проведите сопоставление тонкой структуры хаотического аттрактора в детерминированном случае и при наличии шума различной интенсивности.

Контрольные вопросы

- 1) В чем состоят преимущества метода сечения Пуанкаре по сравнению с визуальным анализом фазового портрета?
- 2) Что такое «цилиндрическое» пространство состояний и стробоскопическое сечение?
- 3) Как выглядит стробоскопическое сечение двумерного тора?
- 4) Каким образом по виду сечения Пуанкаре фиксируются бифуркации удвоения периода?
- 5) В чем состоит фрактальность структуры хаотического аттрактора?
- 6) Назовите методы уточнения координат точек сечения Пуанкаре?

3 Анализ на устойчивость состояний равновесия динамических систем

3.1 Предварительные замечания

В рамках теории нелинейных колебаний анализ математических моделей динамических систем обычно начинают с поиска состояний равновесия и исследования их устойчивости. Вернемся к заданию ДС в виде системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F_1(x_1, \dots, x_n, \mu), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, \dots, x_n, \mu), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= F_n(x_1, \dots, x_n, \mu),\end{aligned}\tag{3.1}$$

где x_1, \dots, x_n – фазовые переменные системы, а μ – вектор совокупности управляющих параметров. Правые части уравнений F_1, \dots, F_n определяют скорость движения изображающей точки в n -мерном фазовом пространстве.

Более компактно система (3.1) может быть записана в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu),\tag{3.2}$$

где \mathbf{x} – вектор состояния системы. Векторная функция \mathbf{F} в (3.2) может быть интерпретирована как некий оператор, задающий отображение системы из состояния \mathbf{x}_0 в момент времени t_0 в состояние \mathbf{x} в момент t :

$$\mathbf{x}_t = \Phi_t(\mathbf{x}_0).\tag{3.3}$$

Определение

Состояние равновесия x_e автономной динамической системы есть стационарное решение такое, что

$$\mathbf{x}_e = \Phi_t(\mathbf{x}_e).\tag{3.4}$$

при любых t .

Это означает, что вектор фазовой скорости в точке равновесия равен нулю, то есть

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, \mu) &= 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n, \mu) &= 0, \\ &\dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n, \mu) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.5) видно, что количество и расположение точек равновесия определяется лишь видом функций F_1, \dots, F_n .

Отметим, что *состоянию равновесия* динамической системы естественно соответствует *особая точка* в фазовом пространстве. Однако, обратное утверждение неверно в случае, когда производные правых частей (3.5) не определены в особой точке. В нашем рассмотрении эти два термина являются практически эквивалентными, отражая в своем названии лишь нюансы подхода к изучению динамической системы.

Пример А. Уравнение колебательного контура с потерями и подключенным источником постоянного напряжения в безразмерной форме имеет вид:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = E$$

и легко преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\alpha y - \omega_0^2 x + E, \\ \dot{x} &= y. \end{aligned}$$

Оно имеет единственную точку равновесия $(x, y) = (E, 0)$ (см. рис. 3.1).

Пример Б. Записанное для произвольной величины отклонения уравнение механического маятника с затуханием

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\alpha y - \sin x, \\ \dot{x} &= y, \end{aligned}$$

имеет счетное множество состояний равновесия в $(x, y) = (k\pi, 0)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (рис. 3.2). При этом состояния равновесия, соответствующие четным k , являются устойчивыми, а нечетным – неустойчивым (маятник в верхнем неустойчивом состоянии).

Пример В. Уравнения типа “хищник–жертва” относятся к классу популярных моделей биологического происхождения. Здесь x описывает популяцию жертв (например, зайцы), а y – хищников (лисицы):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + 4x^2 - xy/2 - x^3, \\ \dot{y} &= -2.1y + xy. \end{aligned}$$

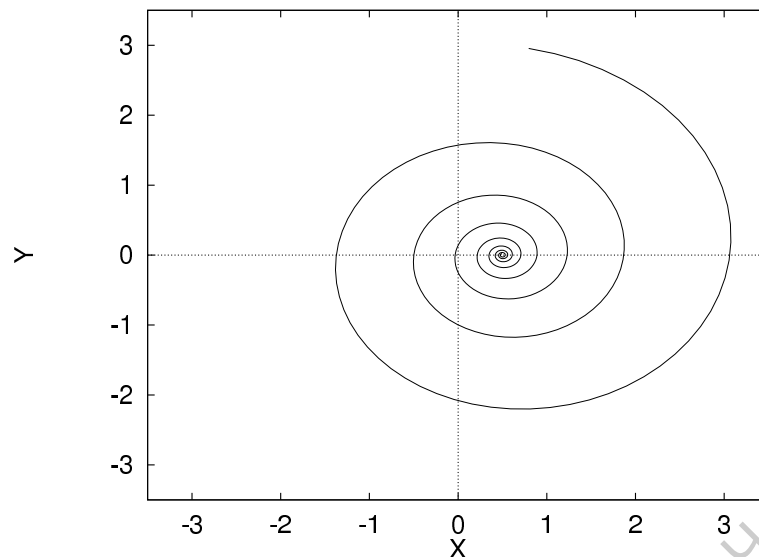


Рис. 3.1: Состояние равновесия для колебательного контура с потерями.

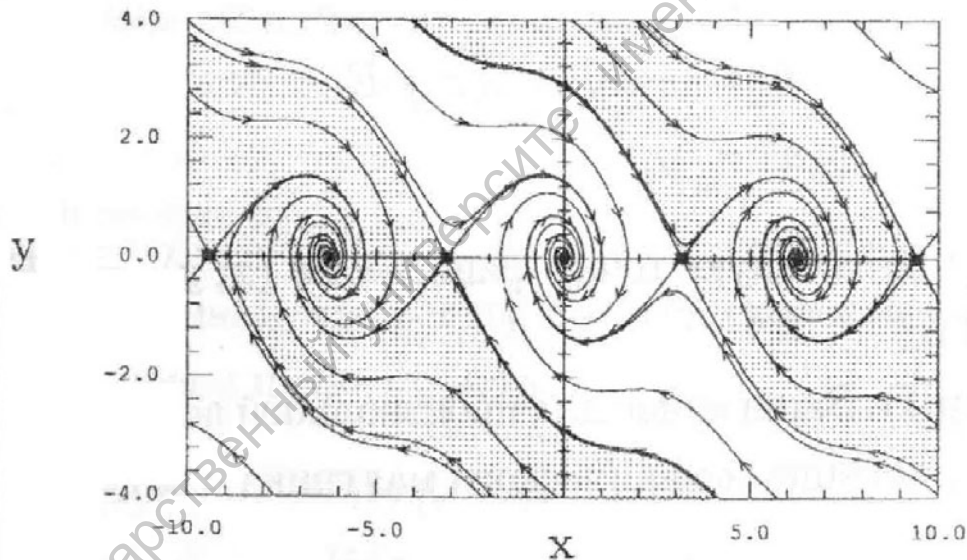


Рис. 3.2: Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия маятника с вращением.

Помимо тривиального решения ($x = 0, y = 0$), система имеет еще три точки равновесия (см. рис. 3.3). При этом P_0 и P_2 устойчивые, а P_1 и P_3 – неустойчивые.

Одним из фундаментальных в теории колебаний является понятие устойчивости. Применительно к состояниям равновесия оно имеет наиболее прозрачный смысл. Без проведения каких-либо расчетов мы определим состояние шарика на рис. 3.4, *a* как устойчивое, а на рис. 3.4, *б* – как неустойчивое. Интуитивно мы вкладываем в понятие устойчивости (или неустойчивости) чувствительность системы к внешним толчкам – **возмущениям**. В первом случае они мало что меняют, во втором – шарик скатится!

Именно реакция системы на слабое возмущение и положена в основу

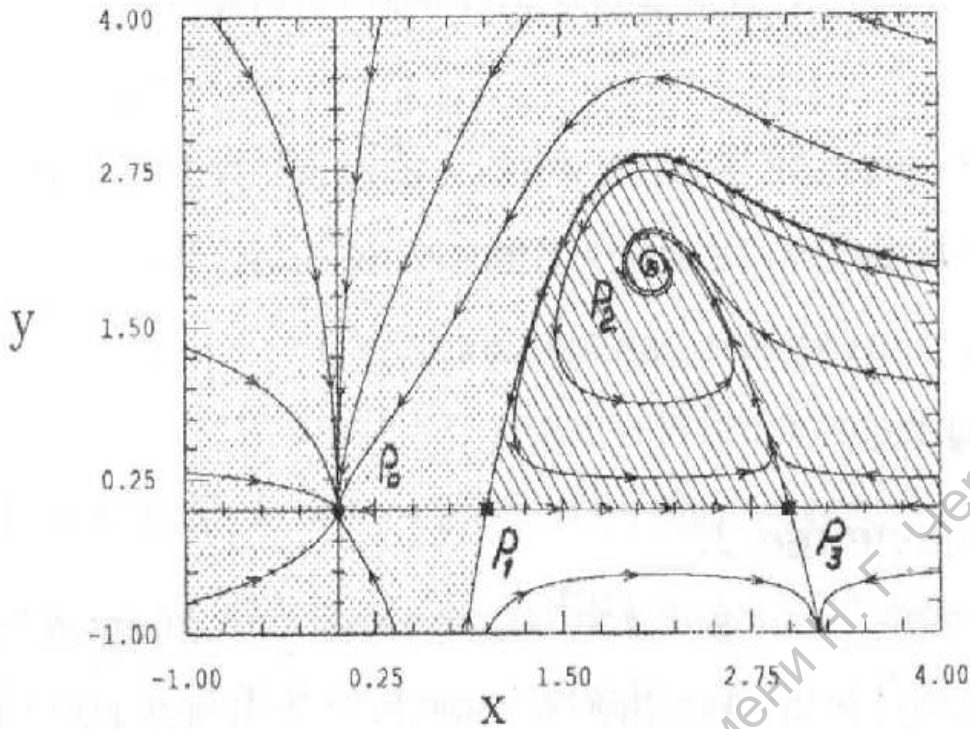


Рис. 3.3: Фазовый портрет системы уравнений типа “хищник-жертва”.

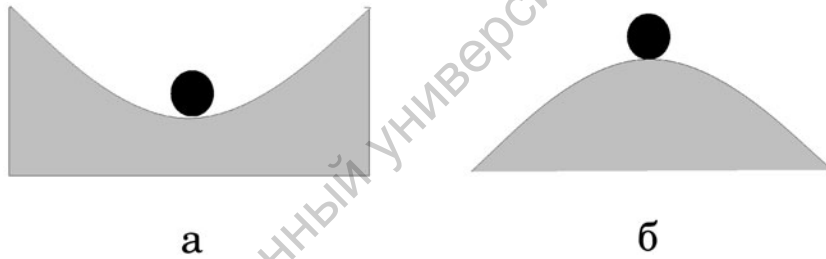


Рис. 3.4: Устойчивое и неустойчивое равновесие.

определения типов устойчивости. Применительно к состояниям равновесия они могут быть сформулированы так:

Определение

Состояние равновесия \mathbf{x}_e называется устойчивым по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать настолько малое число $\delta(\varepsilon)$, что для любого движения $\mathbf{x}(t)$ с начальными условиями, отличающимися от \mathbf{x}_e менее, чем на δ , при всех последующих значениях t выполняется неравенство

$$\rho(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_e) < \varepsilon, \quad (3.6)$$

где $\rho(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_e)$ – расстояние между фазовыми точками с координатами $\mathbf{x}(t)$ и \mathbf{x}_e .

Иными словами, соотношение (3.6) гарантирует, что возмущенная на величину δ система никогда не уйдет от точки равновесия далее, чем на заранее заданное ε , то есть начальное возмущение, как минимум, не нарастает.

Определение

Положение равновесия x_e называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t), x_e) = 0. \quad (3.7)$$

Условие (3.7) трактуется просто – с течением времени возмущение затухает. Ясно, что асимптотическая устойчивость является более сильным требованием, чем устойчивость по Ляпунову.

Всякое состояние равновесия, не удовлетворяющее требованиям устойчивости по Ляпунову, считается неустойчивым.

В случае, когда анализируется устойчивость периодических колебаний, используется еще одно определение устойчивости – так называемая **орбитная устойчивость**. Оно схоже с определением устойчивости по Ляпунову, однако отклонение возмущенной траектории измеряется не от точки, а от замкнутой кривой в фазовом пространстве, что является менее жестким требованием. Для состояний равновесия орбитная устойчивость и устойчивость по Ляпунову совпадают.

3.2 Теория метода

Анализ на устойчивость основывается на расчете *собственных чисел состояния равновесия*. Поскольку в наши планы не входит рассмотрение более чем трехмерного фазового пространства, будем считать, что динамическая система задана тремя уравнениями первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_x(x, y, z), \\ \dot{y} &= F_y(x, y, z), \\ \dot{z} &= F_z(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Этап I – локализация особой точки

Локализация координат состояния равновесия подразумевает необходимость решения системы нелинейных уравнений (3.5). Наиболее быстрым способом поиска искомого решения является алгоритм Ньютона-Рафсона. В одномерном случае идею данного алгоритма легко проиллюстрировать графически – последовательное приближение к решению осуществляется

по касательным к нелинейной функции. В многомерном случае процедура является немного более сложной, однако основная идеология алгоритма при этом сохраняется. Рассмотрение деталей метода Ньютона-Рафсона выходит за рамки настоящей работы. Отметим, что этот алгоритм относится к числу стандартных численных методов и входит в большинство пакетов прикладных программ численного анализа.

Этап II – линеаризация в окрестности особой точки

В состоянии равновесия (x_e, y_e, z_e) можно ввести малые отклонения

$$\begin{aligned}\xi &= x(t) - x_e, \\ \eta &= y(t) - y_e, \\ \zeta &= z(t) - z_e,\end{aligned}\tag{3.9}$$

и записать уравнения в вариациях, проведя линеаризацию системы (3.8) с учетом обращения в ноль правых частей относительно малых величин ξ , η и ζ :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_e \xi + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_e \eta + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)_e \zeta, \\ \dot{\eta} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_e \xi + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_e \eta + \left(\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)_e \zeta, \\ \dot{\zeta} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)_e \xi + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}\right)_e \eta + \left(\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)_e \zeta.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Этап III – нахождение собственных чисел

Решение линеаризованной системы (3.10) определяется корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} - s & \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} - s & \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial z} - s \end{vmatrix} = 0,\tag{3.11}$$

в котором все производные вычислены в точке равновесия (x_e, y_e, z_e) .

Полученный в результате решения (3.11) набор корней определяет характер особой точки. Напомним, что общее решение подобной линейной системы имеет вид линейной комбинации величин вида $e^{s_i t}$. Соответственно, знаки s_i определяют затухание либо возрастание начального возмущения.

Под типом состояния равновесия будем понимать характер поведения фазовых траекторий в его окрестности. Он определяется комбинацией и характером корней уравнения (3.11), которые называются *собственными числами*. При этом определяющим является:

- а) действительный это корень или комплексный;
- б) знак действительной части корня.

Этап IV – анализ свойств состояний равновесия

Типы состояний равновесия двумерных систем

На рис. 3.5 представлены все возможные случаи на фазовой плоскости, когда размерность динамической системы $n=2$.

Устойчивый узел.

Наличие двух действительных отрицательных корней означает, что возмущение затухает по обоим направлениям в фазовом пространстве. Простейший пример – апериодический разряд в колебательном контуре с большими потерями.

Седло.

Наличие двух действительных корней разных знаков означает, что по одному направлению фазовые траектории притягиваются к состоянию равновесия, а по другому – отталкиваются. Входящие и выходящие из седла траектории образуют его устойчивое и неустойчивое многообразия. Они играют роль сепаратрис – разделяют области с различным поведением фазовых траекторий.

Траектории, входящие или выходящие из особых точек относятся к так называемым инфинитным траекториям. Точка, помещенная, например, на устойчивое многообразие седла, будет бесконечно долго приближаться к нему, но никогда не достигнет. Эту ситуацию легко представить на примере верхнего состояния равновесия маятника на жестком стержне. Пытаясь толкнуть маятник так, чтобы он застыл в верхнем положении, мы должны сообщить ему ровно столько энергии, сколько необходимо для достижения этой точки. Это означает, что точка равновесия может быть достигнута только с нулевой скоростью, то есть никогда . . .

Неустойчивый узел.

Два положительных действительных собственных значения соответствуют ситуации, когда возмущение нарастает по обоим возможным направлениям. Неустойчивый узел перейдет в устойчивый, если обратить направление времени в динамической системе.

Устойчивый (неустойчивый) фокус.

Наличие пары комплексно сопряженных собственных чисел приводит к тому, что на затухание (возрастание) возмущения накладывается вращательное движение. Соответственно, при действительной части корней $Re s_{1,2} < 0$ мы имеем устойчивый фокус, а при $Re s_{1,2} > 0$ – неустойчивый. Равенство $Re s_{1,2} = 0$ соответствует негрубой ситуации – точке

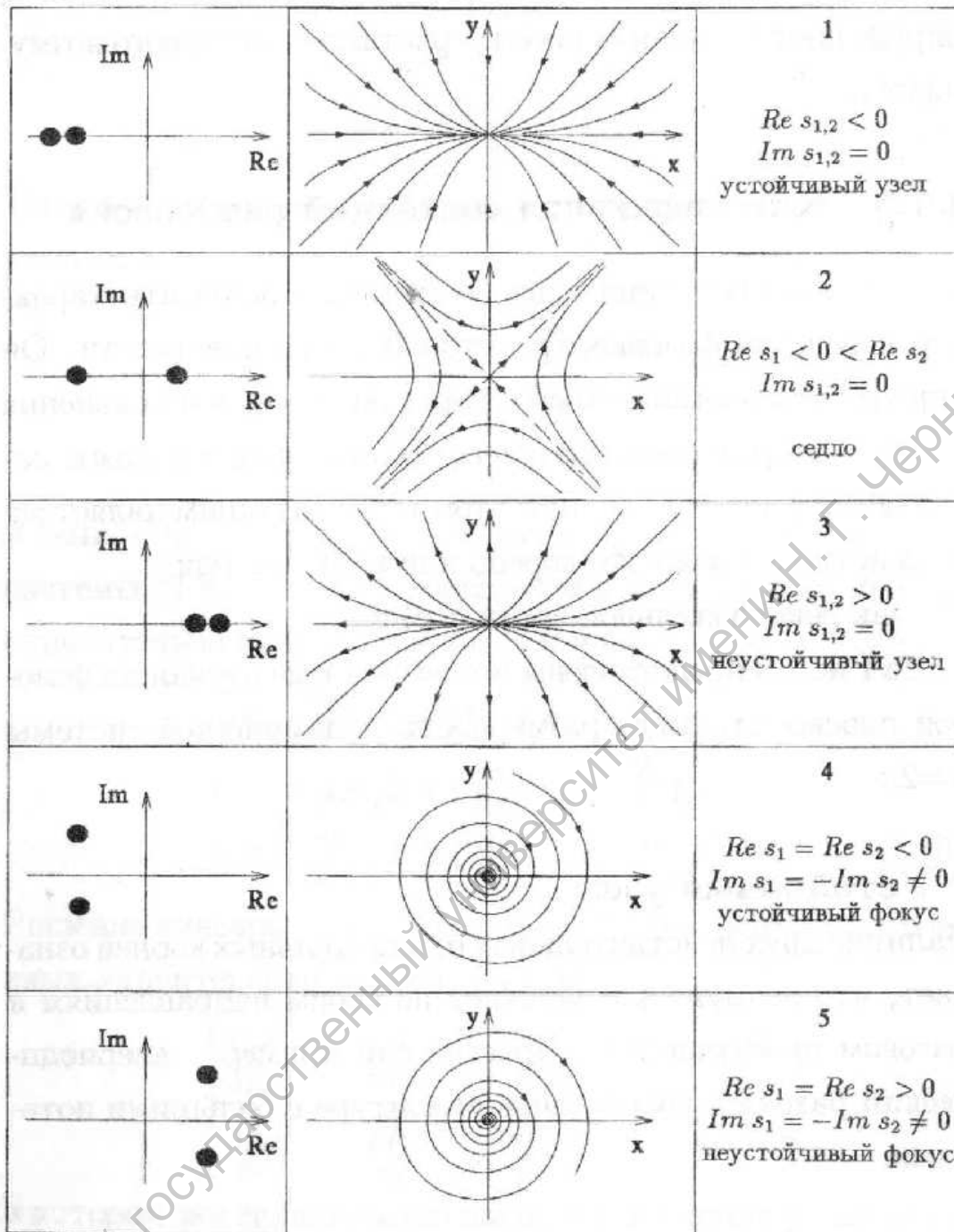


Рис. 3.5: Классификация состояний равновесия на фазовой плоскости.

равновесия типа центр¹.

Следует заметить, что перечисленный выше набор состояний равновесия может быть расширен включением устойчивого и неустойчивого фокусов с левым направлением вращения – против часовой стрелки. В самом деле, уравнение осциллятора с затуханием

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

¹В консервативных системах такое состояние равновесия структурно устойчиво. Мы же, как физики, конечно, имеем дело с диссипативными системами.

может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha x - \omega y, \\ \dot{y} &= \omega x,\end{aligned}$$

В такой записи появляется различие между ситуациями $\omega > 0$ и $\omega < 0$. Первой соответствует вращение по часовой стрелке, второй – против. Разумеется, с позиций механической аналогии (маятника на подвесе) отрицательная частота представляется нонсенсом. Это означало бы, что вектор перемещения и вектор скорости противоположно направлены! Однако, при записи математических моделей различных радиофизических систем такая ситуация вовсе не исключена.

Итак, с учетом возможных направлений вращения, число типов состояний равновесия в двумерных системах может быть расширено до семи. Мы перечислили все возможные структурно устойчивые ситуации². Однако, существует ряд интересных случаев не общего положения, анализ которых полезен для понимания способов качественной перестройки состояний равновесия, что и является нашей конечной целью.

Наличие одного нулевого корня.

Ситуация $Re s_1 = 0, Re s_2 < 0$ означает сжатие по одному из направлений и безразличное состояние по другому. Этот негрубый случай (рис. 3.6, а) можно рассматривать как пограничный между седлом и узлом, он реализуется при седло-узловой бифуркации (будет рассмотрена ниже).

Равенство действительных корней.

При $Re s_1 = Re s_2, Im s_1 = Im s_2 = 0$ реализуется так называемый вырожденный узел (рис. 3.6, б). Обычно он образуется в момент, когда тип особой точки меняется с узла на фокус (или обратно).

Чисто мнимые корни.

Состояние равновесия типа центр описывается условиями: $Re s_1 = Re s_2 = 0, Im s_1 = -Im s_2$. Пример – маятник без трения или идеальный колебательный контур без потерь. Фазовые траектории представляют собой эллипсы с центром в точке равновесия. Размеры эллипса определяются начальными условиями. Внешне эти замкнутые траектории выглядят как предельный цикл, однако различие есть и весьма важное – в окрестности предельного цикла траектории либо притягиваются, либо отталкиваются от него, тогда как при сдвиге начальных условий в любую сторону для состояния равновесия типа центр просто образуется новый эллипс (рис. 3.6, в).

²Определение структурной устойчивости приводится ниже.

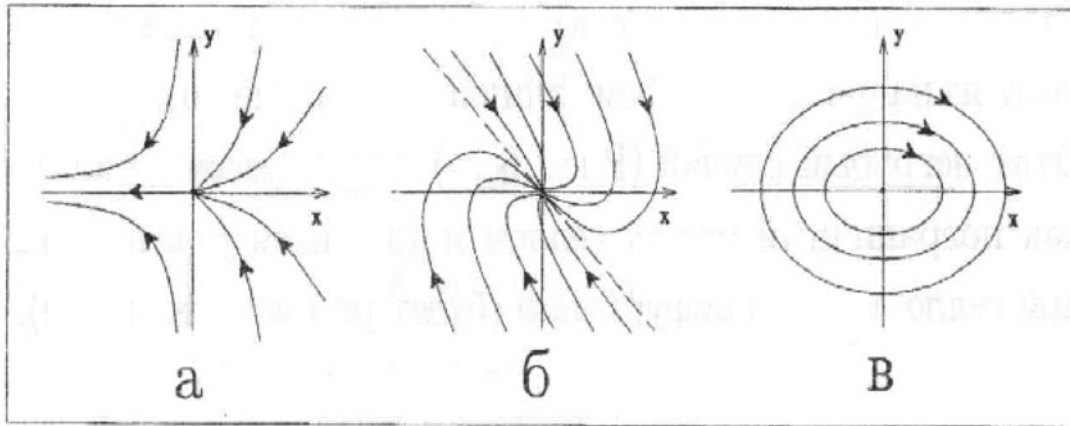


Рис. 3.6: Некоторые вырожденные случаи. *a* – седло-узел; *б* – вырожденный узел; *в* – центр.

Типы состояний равновесия трехмерных систем

Для трехмерной динамической системы характеристическое уравнение может иметь три вещественных корня, либо один вещественный и два комплексно сопряженных. В зависимости от их взаиморасположения на комплексной плоскости возможны как минимум 5 пар структурно устойчивых случаев.

Узел (рис. 3.7).

По сравнению с двумерным случаем добавляется еще один корень и еще одно направления сжатия (растяжения) в фазовом пространстве. Фазовый портрет для неустойчивого узла получается заменой стрелок на рисунке на противоположное.

Седло (рис. 3.8).

В трехмерном случае возможны два варианта:

- а) сжатие по двум направлениям, растяжение по одному – если к двумерному седлу добавляется устойчивое направление;
- б) сжатие по одному направлению, растяжение по двум – если двумерное седло дополнить неустойчивым направлением.

Оба случая переходят один в другой при инвертировании времени.

Фокус (рис. 3.9).

Если состояние равновесия имеет пару комплексно сопряженных собственных чисел (третий корень – действительный), и все их действительные части одного знака, то в фазовом пространстве реализуется устойчивый или неустойчивый фокус (при $Re s_{1,2,3} < 0$ или $Re s_{1,2,3} > 0$ соответственно). При этом в зависимости от соотношения модулей действи-

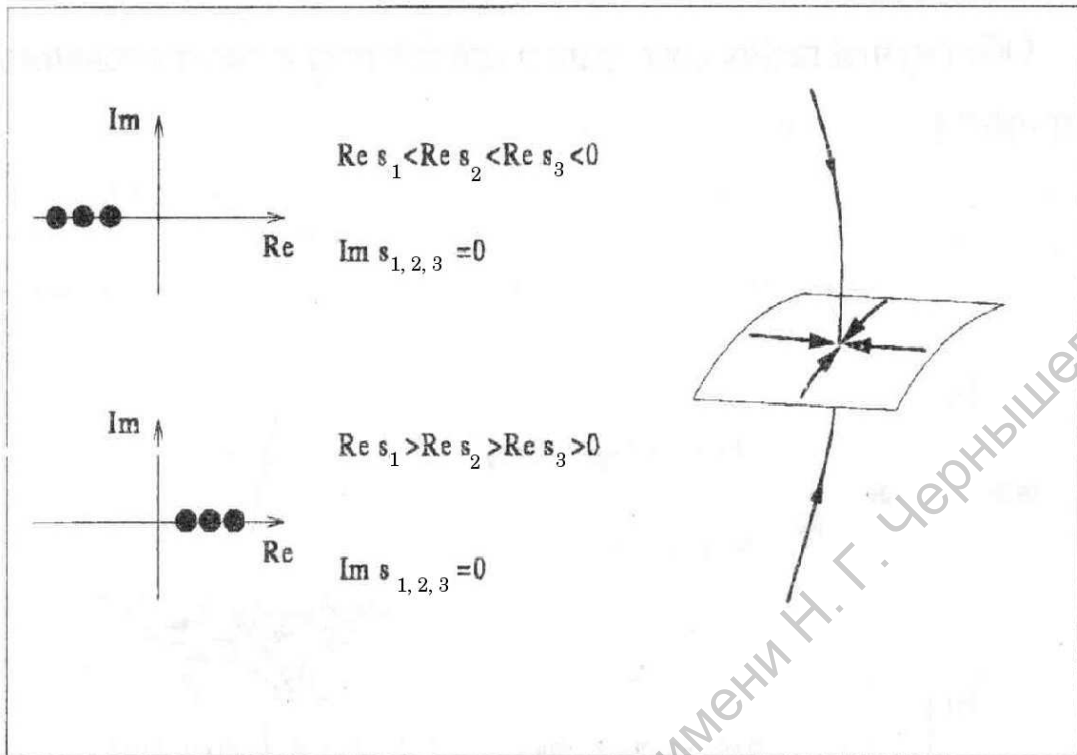


Рис. 3.7: Трехмерный узел.

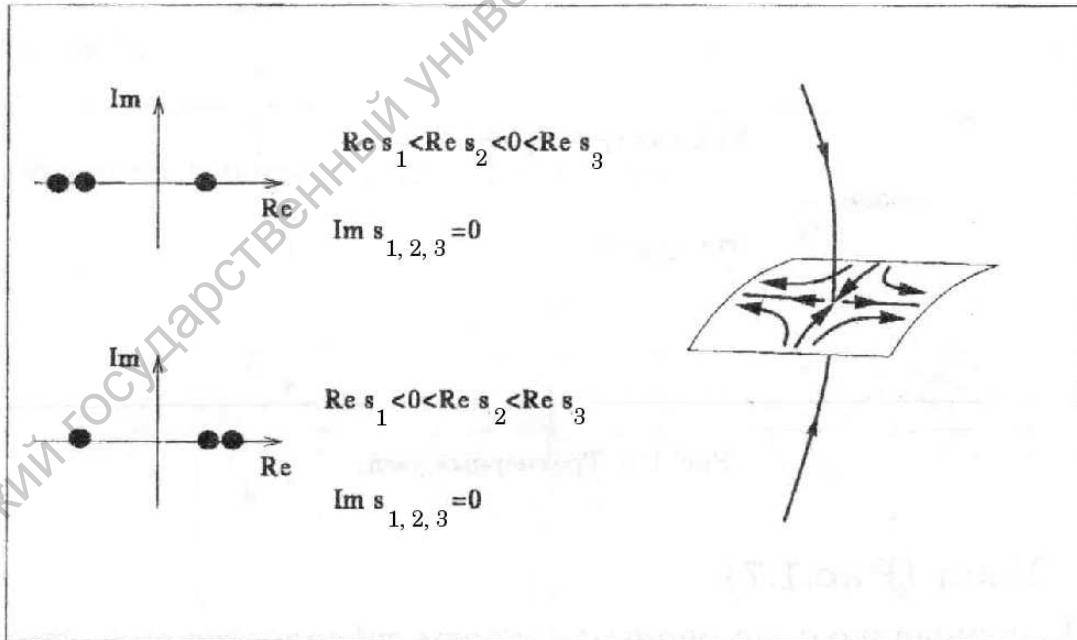


Рис. 3.8: Трехмерное седло.

тельных частей возможен различный характер сходимости (разбегания) траекторий в окрестности особой точки. Для устойчивого фокуса, если $|\text{Re } s_3| > |\text{Re } s_{1,2}|$, то имеет место более медленное сжатие фазового объема в плоскости вращения (рис. 3.9, б). Если $|\text{Re } s_{1,2}| > |\text{Re } s_3|$, то траектория

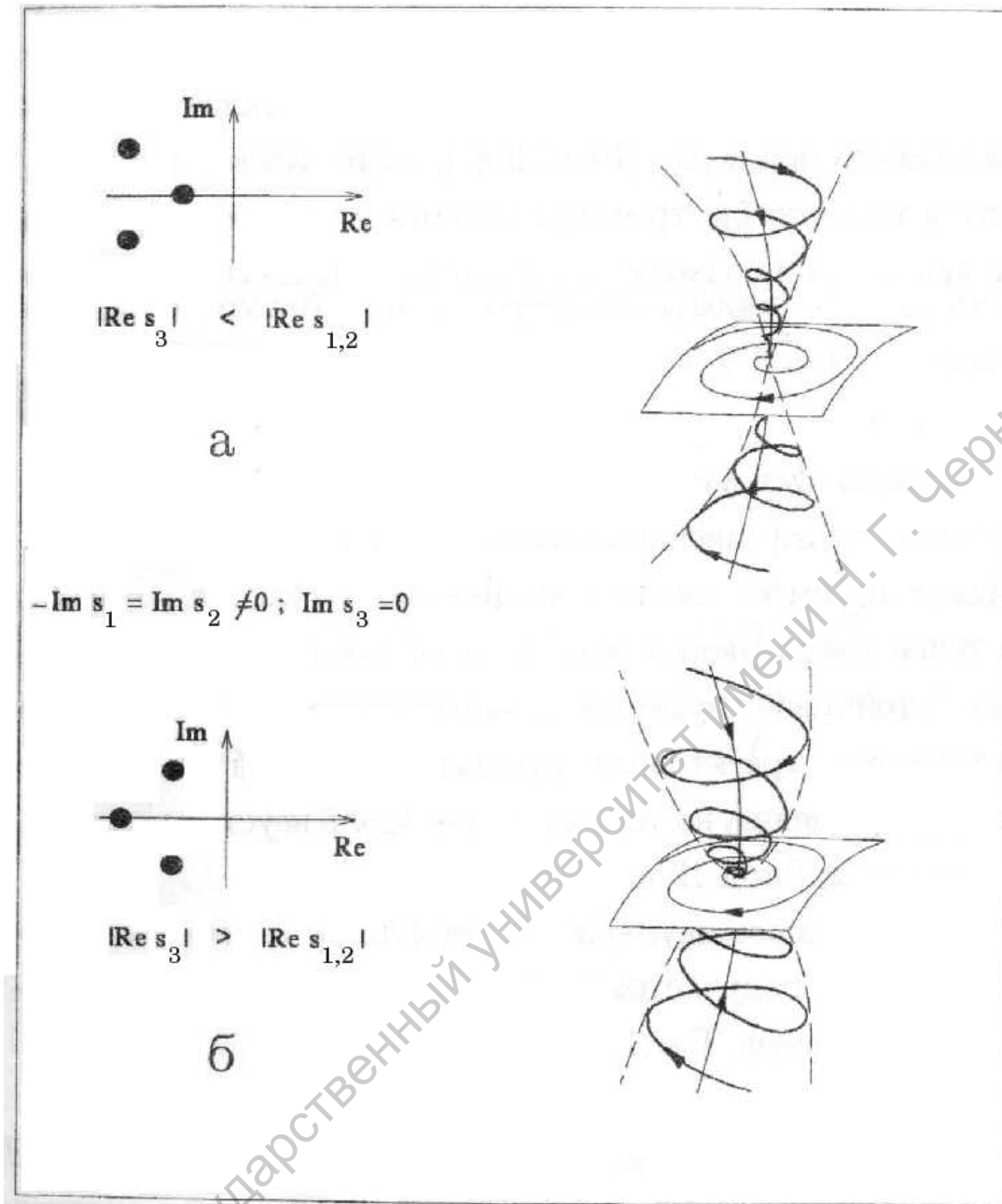


Рис. 3.9: Фокус в трехмерном фазовом пространстве. В зависимости от соотношения действительных частей собственных чисел меняется форма образующей, по которой траектории стремятся к состоянию равновесия. В случае их равенства траектории скручиваются по конусу (не показано).

быстрее скручивается в плоскости вращения и траектории подходят к состоянию равновесия преимущественно со стороны одномерного многообразия, определяемого s_3 (рис. 3.9, а).

Седло–фокус.

В отличие от описанных выше типов особых точек, седло–фокус не имеет аналога на фазовой плоскости. Как и в случае трехмерного седла, здесь

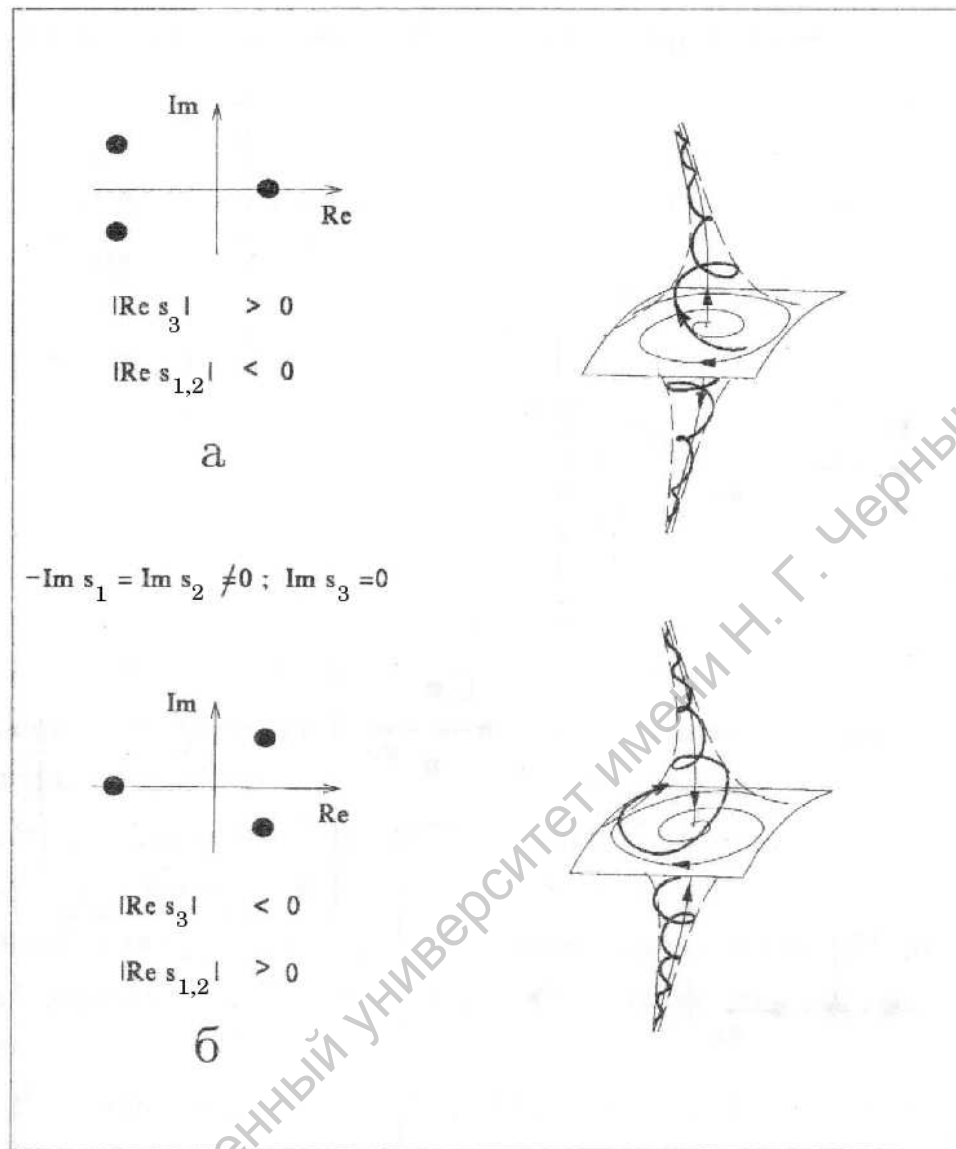


Рис. 3.10: Седло-фокус в трехмерном фазовом пространстве. Различают случаи двумерного устойчивого и одномерного неустойчивого многообразий (вверху) и обратную ситуацию (внизу).

возможны два варианта:

а) Устойчивое двумерное и неустойчивое одномерное многообразия – траектория скручивается к особой точке в плоскости вращения, но убегает от нее вдоль неустойчивого направления (рис. 3.10а);

б) неустойчивое двумерное и устойчивое одномерное многообразия – получается из предыдущего случая инвертированием времени (рис. 3.10, б).

Выше мы перечислили 10 грубых типов состояний равновесия в трехмерном фазовом пространстве. Конечно, как и в случае фазовой плоскости, для комплексно сопряженных корней возможно вращение как по часовой стрелке, так и против. С учетом этого, число структурно устойчивых типов состояний равновесия в динамических системах размерности 3 достигает

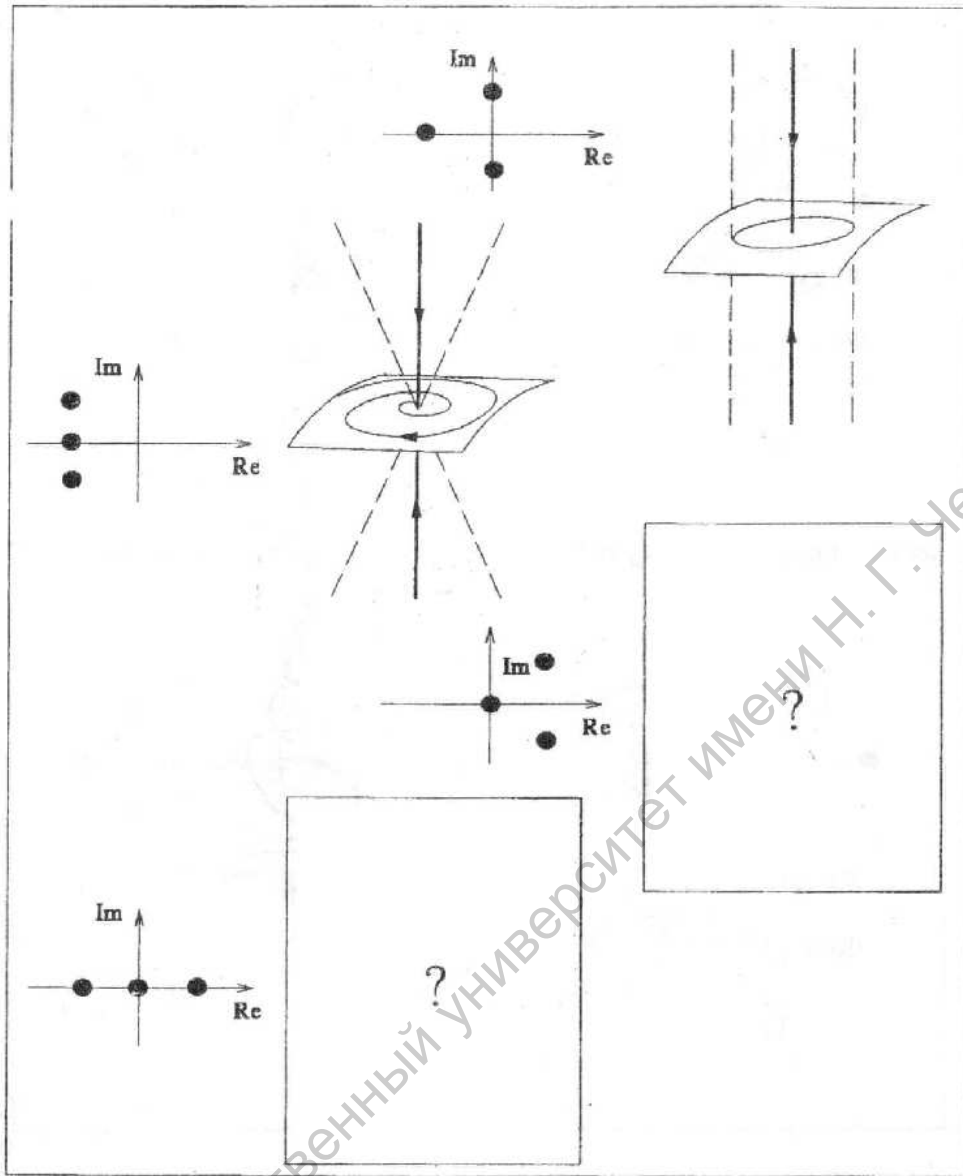


Рис. 3.11: Некоторые структурно неустойчивые случаи.

16. Наряду с ними, возможен также ряд вырожденных ситуаций. Некоторые из них проиллюстрированы на рис. 3.11. Качественный анализ каждого из этих случаев несложен и предлагается в качестве самостоятельного упражнения.

Бифуркации состояний равновесия

Слово бифуркация означает раздвоение и употребляется в широком смысле для обозначения всякой качественной, топологической перестройки фазового портрета при изменении параметров, от которых зависит изучаемый объект.

Моделирование подавляющего большинства физических задач приво-

дит к дифференциальным уравнениям, зависящим от параметра. При этом более типичными (адекватными реальной природе) представляются те модели, которые мало меняют свое поведение, то есть устройство фазового пространства, при достаточно малом возмущении динамической системы (изменении управляющих параметров).

Изменения в разбиении фазового пространства на типы траекторий могут быть оценены с помощью понятия **топологической эквивалентности**. Оно означает, что один фазовый портрет может быть получен из другого с помощью некоторой непрерывной и взаимно однозначной замены координат.

Динамическая система называется **грубой**, или **структурно устойчивой**, если ее малые возмущения приводят к топологически эквивалентным решениям.

С позиций изучения реальных (например, конкретных радиофизических) систем возможен и несколько иной подход. Он базируется на наличии некоторой трудноизменяемой основы в исследуемой системе и набора легко доступных управляющих параметров. В этом случае под динамической системой иногда понимают именно этот “скелет”. Например, в генераторе Ван дер Поля традиционно под управляемыми параметрами понимаются параметр нелинейности ε и частота ω , тогда как вид самой нелинейной функции $1 - x^2$ предполагается неизменным – в реальной электронной схеме весьма трудно сменить вид нелинейности характеристики лампы или транзистора.

Именно с таких позиций говорят о структурной устойчивости **математической модели**, подразумевая устойчивость разбиения на режимы *пространства параметров* исследуемой системы по отношению к малым деформациям того самого “скелета”, задающего вид правых частей в математической модели. Прикладное происхождение такого подхода очевидно – экспериментатор должен быть уверен, что, заменив один экземпляр транзистора на другой, ему не придется переписывать уравнения математической модели, достаточно лишь подправить значения управляющих параметров.

Имея в виду тот факт, что динамическая система однозначно определяет векторное поле в фазовом пространстве, понятие структурной устойчивости (грубости) может с полным правом применяться к структуре фазовых траекторий в нем. Так, говоря о структурной устойчивости какого-либо типа состояния равновесия динамической системы, мы имеем в виду свойства самой динамической системы в конечной области изменения ее управляющих параметров.

Грубую (негрубую) динамическую систему иногда называют системой общего положения (не общего положения).

Задачей бифуркационного анализа является выяснение разбиения пространства параметров изучаемой системы на области различных структур-

но устойчивых режимов. Пусть при изменении некоторого управляющего параметра μ происходит бифуркация – смена одного структурно устойчивого режима на другой. Тогда значение $\mu = \mu^*$ называется бифуркационным значением параметра, а точка в $n + 1$ -мерном пространстве (образованном n фазовыми переменными и параметром μ) называется точкой бифуркации.

Из вышесказанного следует, что точке бифуркации отвечает структурно неустойчивый режим. Действительно, сколь угодно малое шевеление параметра μ в сторону от бифуркационного значения μ^* переводит систему в один из двух структурно устойчивых режимов. Пограничная же ситуация является негрубой.

Таким образом, для выяснения всех возможных бифуркаций состояний равновесия достаточно изучить возможные варианты смены одного из структурно устойчивых типов, перечисленных выше, на другой. Ниже мы разберем основные бифуркационные ситуации, возможные в динамических системах первого – третьего порядка.

Переход узел \Leftrightarrow фокус³.

Снова используем уравнение колебательного контура:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (3.12)$$

Матрица линеаризации системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

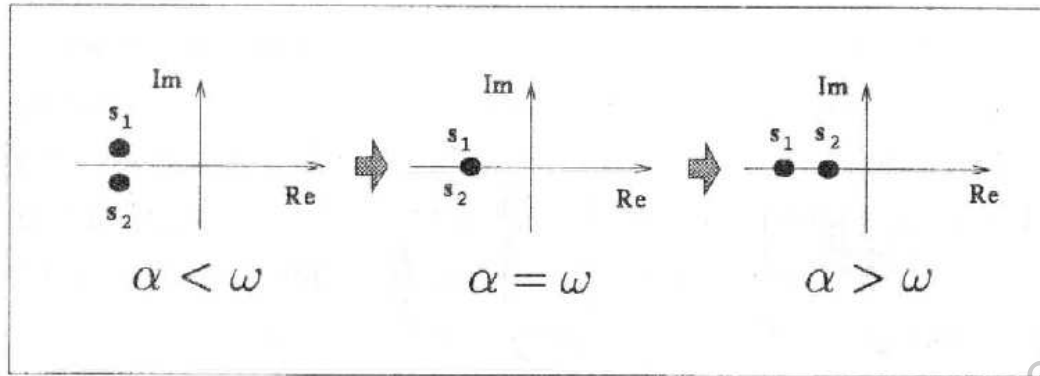
имеет определитель ω_0^2 и след -2α . Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (3.13)$$

Его корни действительны, если $|\alpha| \geq \omega$ и комплексные при $|\alpha| < \omega$. Иными словами, при не слишком больших потерях в контуре состояние равновесия будет устойчивым фокусом, при увеличении же диссипации мы получаем устойчивый узел (рис. 3.12).

Заметим, что для любого $|\alpha| < \omega$ при затухающих колебаниях в контуре емкость заряжается и разряжается бесконечное количество раз, тогда как при $|\alpha| > \omega$ ток в контуре меняет свое направление не более одного раза. Структурно неустойчивым режимом, соответствующим точке бифуркации, является вырожденный узел (рис. 3.6, б).

³ Не бифуркация, так как при строгом математическом подходе данная перестройка режимов должна быть отнесена не к бифуркационному множеству, а к т.н. множеству Максвелла (действительные части собственных чисел не пересекают ноль).

Рис. 3.12: Переход узел \Leftrightarrow фокус.

Седло–узловая бифуркация – двукратное равновесие.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha - x^2, \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \quad (3.14)$$

В зависимости от значения управляющего параметра α она имеет:

- а) 2 состояния равновесия $P_0(\sqrt{\alpha}, 0)$, $P_1(-\sqrt{\alpha}, 0)$ при $\alpha > 0$;
- б) одно состояние равновесия $P(0, 0)$ при $\alpha = 0$;
- в) ни одного состояния равновесия при $\alpha < 0$.

Вычислив собственные числа при $\alpha > 0$, можно убедиться, что P_0 является узлом с $Re\ s_1 = -2\alpha$, $Re\ s_2 = -1$, а P_1 – седлом с $Re\ s_1 = +2\alpha$, $Re\ s_2 = -1$. При уменьшении параметра α точки P_0 и P_1 сближаются, смещаясь к началу координат. При этом сближается, уменьшаясь по модулю, и пара их собственных чисел. В бифуркационной точке $\alpha = 0$ P_0 и P_1 сливаются, образуя вырожденную особую точку в начале координат $P(0, 0)$ с нулевым собственным числом, и исчезают при $\alpha < 0$.

На рис. 3.13, д эта картина представлена в обобщенном пространстве фазовых переменных x, y и управляющего параметра α . Верхний лист поверхности соответствует узлу P_0 , нижний – седловой точке P_1 . Из рисунка ясно, почему такая бифуркационная ситуация носит название складки. На рис. 3.13, а–г изображена эволюция фазовых портретов системы и изменения в диаграммах собственных чисел состояний равновесия при уменьшении параметра α . Вырожденная особая точка, образуемая при слиянии седла и узла (рис. 3.13, в) получила название **седло–узла**, что и определило название бифуркации.

Трехкратное равновесие.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = x^3 + \alpha x + \beta. \quad (3.15)$$

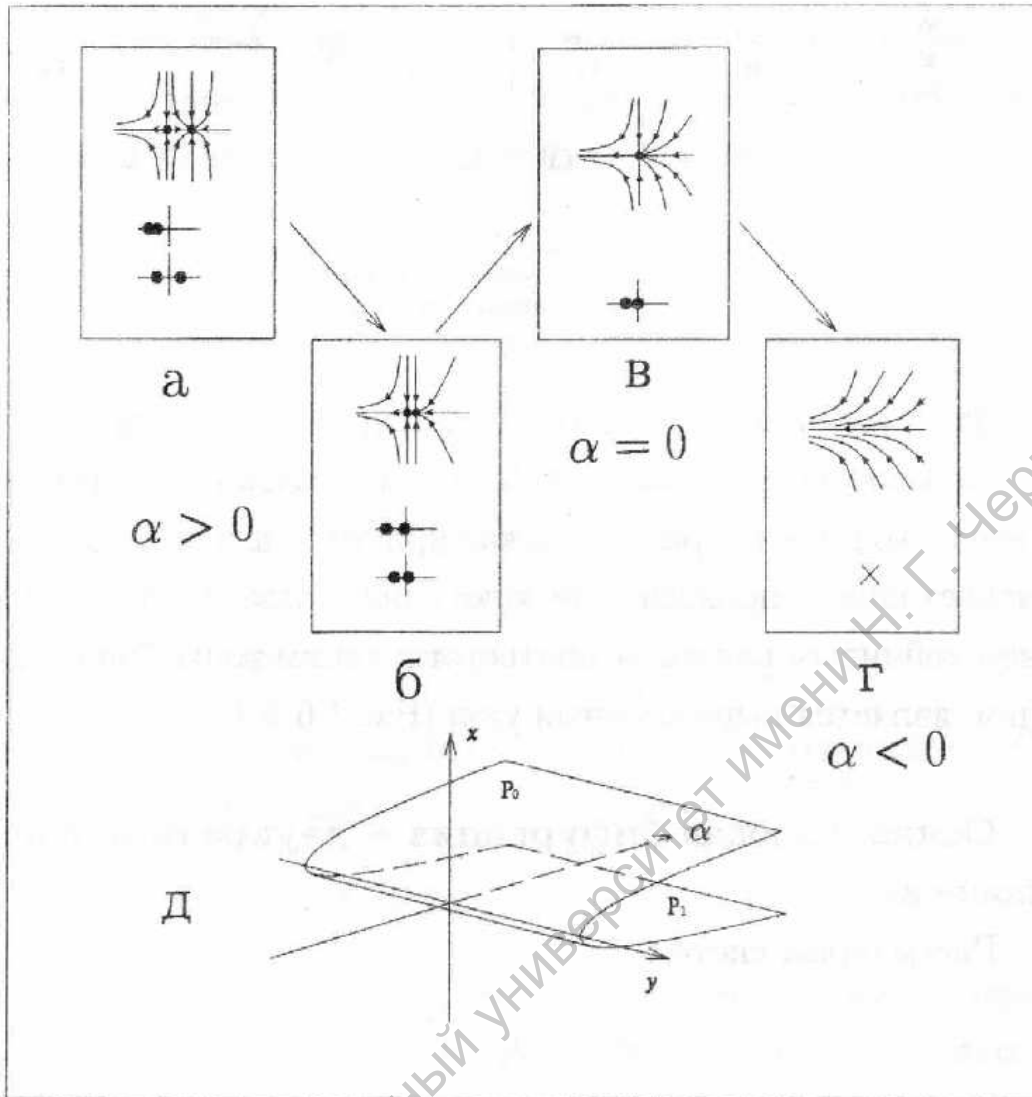


Рис. 3.13: Седло–узловая бифуркация. При прямом движении по параметру (а–г) узел и седло сливаются и исчезают. При обратном – пара состояний равновесия возникает “из ничего”. На фазопараметрической диаграмме d имеет место структура типа складки.

В отличие от предыдущего случая, мы исследуем двухпараметрическую систему. Анализ состояний равновесия показывает, что:

1. При $\alpha > 0$, для любого β система имеет единственное состояние равновесия P_0 с собственным значением $s < 0$.
2. При $\alpha < 0$ существует область Φ значений β (заштрихована на рис. 3.14), где система (3.15) имеет три состояния равновесия P_0, P_1, P_2 , причем $s_0 > 0$, $s_{1,2} < 0$.

Пересечение границы области Φ соответствует “одномерному варианту” седло–узловой бифуркации, рассмотренной в предыдущем разделе⁴. Два из трех состояний равновесия сливаются и исчезают. Линия l_1 соответствует седло–узловой бифуркации для P_0 и P_1 , l_2 – для P_0 и P_2 . Единственное отли-

⁴Роль седла здесь играет неустойчивое состояние равновесия. Модель (3.15) можно было бы дополнить до размерности 2 дополнительным устойчивым направлением, но это было бы менее наглядно.

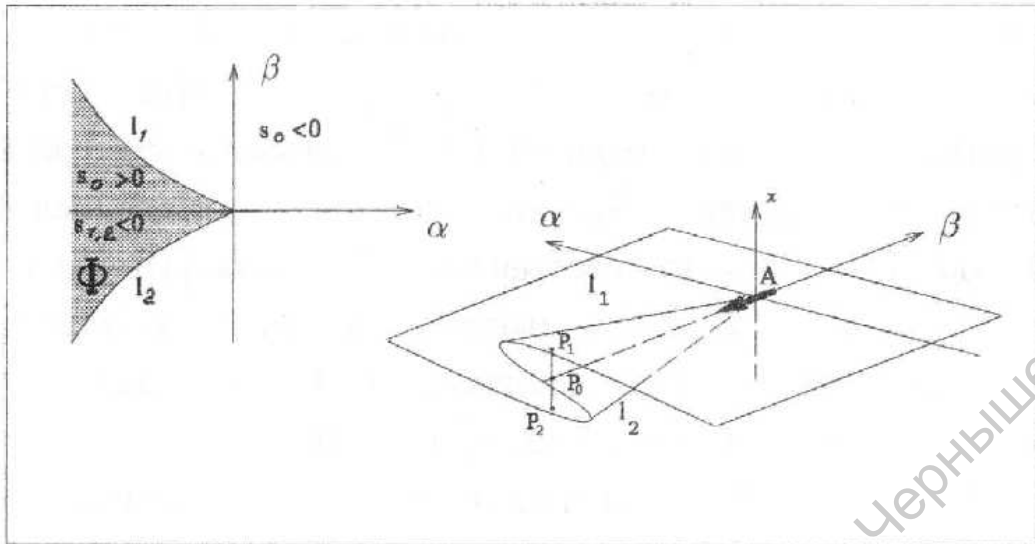


Рис. 3.14: В пространстве параметров–фазовых переменных бифуркации трехкратного равновесия соответствует структура типа сборки.

чие от рассмотренного ранее случая – наличие в системе еще одного состояния равновесия, не участвующего в бифуркации. Однако, при пересечении параметром α нулевого значения в случае $\beta = 0$ линии l_1 и l_2 пересекаются одновременно. Эта точка соответствует более сложной качественной перестройке. В таком случае говорят о бифуркации коразмерности 2, имея в виду выполнение одновременно двух бифуркационных условий. В точке $\alpha = 0, \beta = 0$ из единственного состояния равновесия рождается сразу три, причем ответвившиеся боковые состояния равновесия будут устойчивы, а центральное – нет.

Отметим, что в двухпараметрической системе такая точка является структурно неустойчивой. Действительно, сколь угодно малое шевеление параметра β приводит нас к структурно устойчивому на линии l_1 или l_2 случаю седло–узловой бифуркации коразмерности 1.

В обобщенном пространстве фазовых координат и параметров системы (3.15) имеет место структура, которая называется сборкой (рис. 3.14). В области сборки верхний и нижний листы соответствуют устойчивым состояниям равновесия, средний – неустойчивому.

В заключение отметим, что в системах с числом параметров более двух бифуркации коразмерности 2 могут быть структурно устойчивы. Так, например, если ввести в (3.15) некоторый параметр, ответственный за гладкую деформацию правой части, то в условиях трехпараметрической системы режим, соответствующий вершине сборки, будет структурно устойчив на некоторой линии в фазопараметрическом пространстве.

Бифуркация Андронова–Хопфа. Рождение предельного цикла.

В динамических системах размерности $n \geq 2$ возможна ситуация, когда

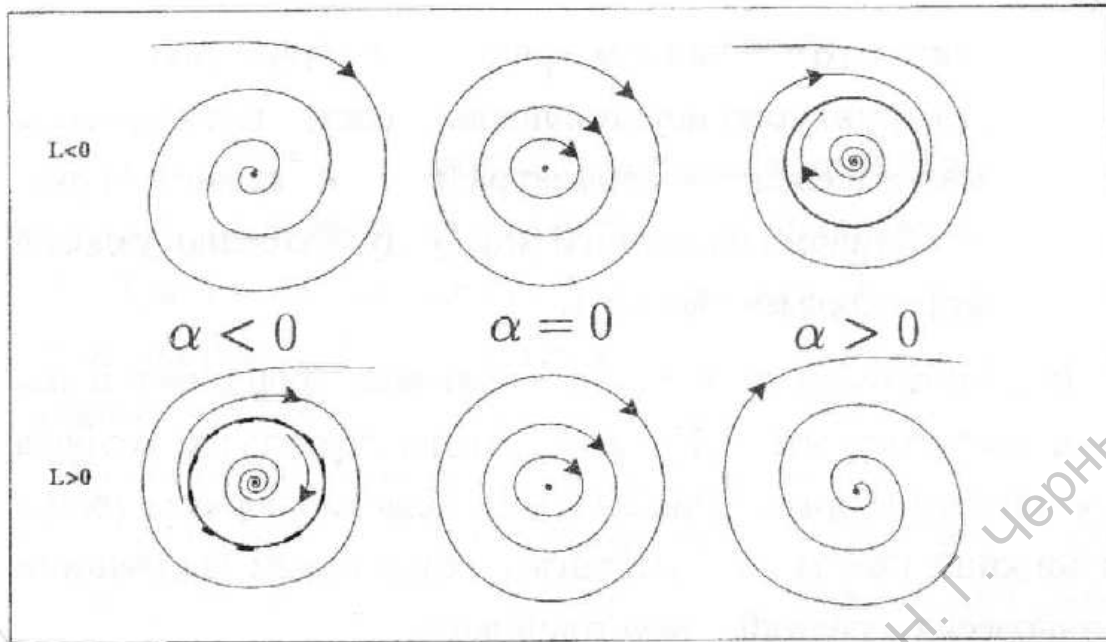


Рис. 3.15: Суперкритической бифуркации Хопфа ($L < 0$) соответствует рождение устойчивого предельного цикла. В случае субкритической бифуркации ($L > 0$) стягивается в точку и исчезает неустойчивый цикл.

пара комплексно сопряженных собственных чисел состояния равновесия пересекает мнимую ось с ненулевой скоростью. При этом в момент бифуркации $Re s_{1,2} = 0$, $Im s_1 = Im s_2 \neq 0$.

Модельные уравнения для такой ситуации могут быть получены из хорошо известного уравнения Ван дер Поля через укороченное уравнение для комплексной амплитуды. Мы используем модельную систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \alpha U_1 - U_2 + L(U_1^2 + U_2^2)U_1, \\ \dot{U}_2 &= U_1 + \alpha U_2 + L(U_1^2 + U_2^2)U_2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где α и L – управляющие параметры.

Заменой переменных $U_1 = \rho \cos \varphi$, $U_2 = \rho \sin \varphi$, система (3.16) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \alpha \rho + L\rho^3, \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В (3.17) характер бифуркации в точке $\alpha = 0$ определяется уравнением первого порядка. В зависимости от знака L , выделяют два случая:

1. $L < 0$. При $\alpha < 0$ имеется устойчивый фокус. Точке $\alpha = 0$ соответствует негрубая ситуация – состояние равновесия типа центр (см. рис. 3.6, в), а при $\alpha > 0$ из него рождается предельный цикл с амплитудой $\rho = \sqrt{|\alpha/L|}$. На языке радиофизиков это означает, что при превышении уровня подкачки энергии над потерями в системе возбуждаются незатухающие периодические колебания.

Отметим, что с точки зрения “бесконечно удаленного поля” (при достаточной удаленности от точки равновесия в фазовом пространстве) ничего не изменилось – область, включающая в себя состояние равновесия, по-прежнему является притягивающей для фазовых траекторий (рис. 3.15, а). Случай $L < 0$ носит название суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

2. Если $L > 0$, то при $\alpha < 0$ устойчивый фокус охвачен неустойчивым предельным циклом, который при $\alpha = 0$ “влипает” в состояние равновесия. Также, как и в случае $L < 0$, точке бифуркации соответствует структурно неустойчивая особая точка типа центр. При $\alpha > 0$ имеется один неустойчивый фокус (рис. 3.15, б). Случай $L > 0$ носит название субкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Его физическая интерпретация зависит от динамики системы в глобальной окрестности состояния равновесия. При положительных α траектория блуждает в фазовом пространстве до тех пор, пока не попадет в окрестность какого-либо иного аттрактора системы, регулярного или хаотического.

Параметр L носит название первой фокусной (ляпуновской) величины.

3.3 Численный алгоритм

Поиск состояния равновесия динамической системы осуществляется методом Ньютона. Ниже изложено сильно упрощенное описание метода. Пусть динамическая система описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad (3.18)$$

где

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Тогда, если X^* — состояние равновесия системы (3.18), то справедливо условие

$$F(X^*) = 0. \quad (3.20)$$

Пусть A_k — семейство невырожденных матриц, тогда уравнение (3.20) эквивалентно уравнению

$$A_k \cdot F(X^*) = 0. \quad (3.21)$$

Переходя к дискретному времени в динамической системе, имеем условие для состояния равновесия:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)}, \quad (3.22)$$

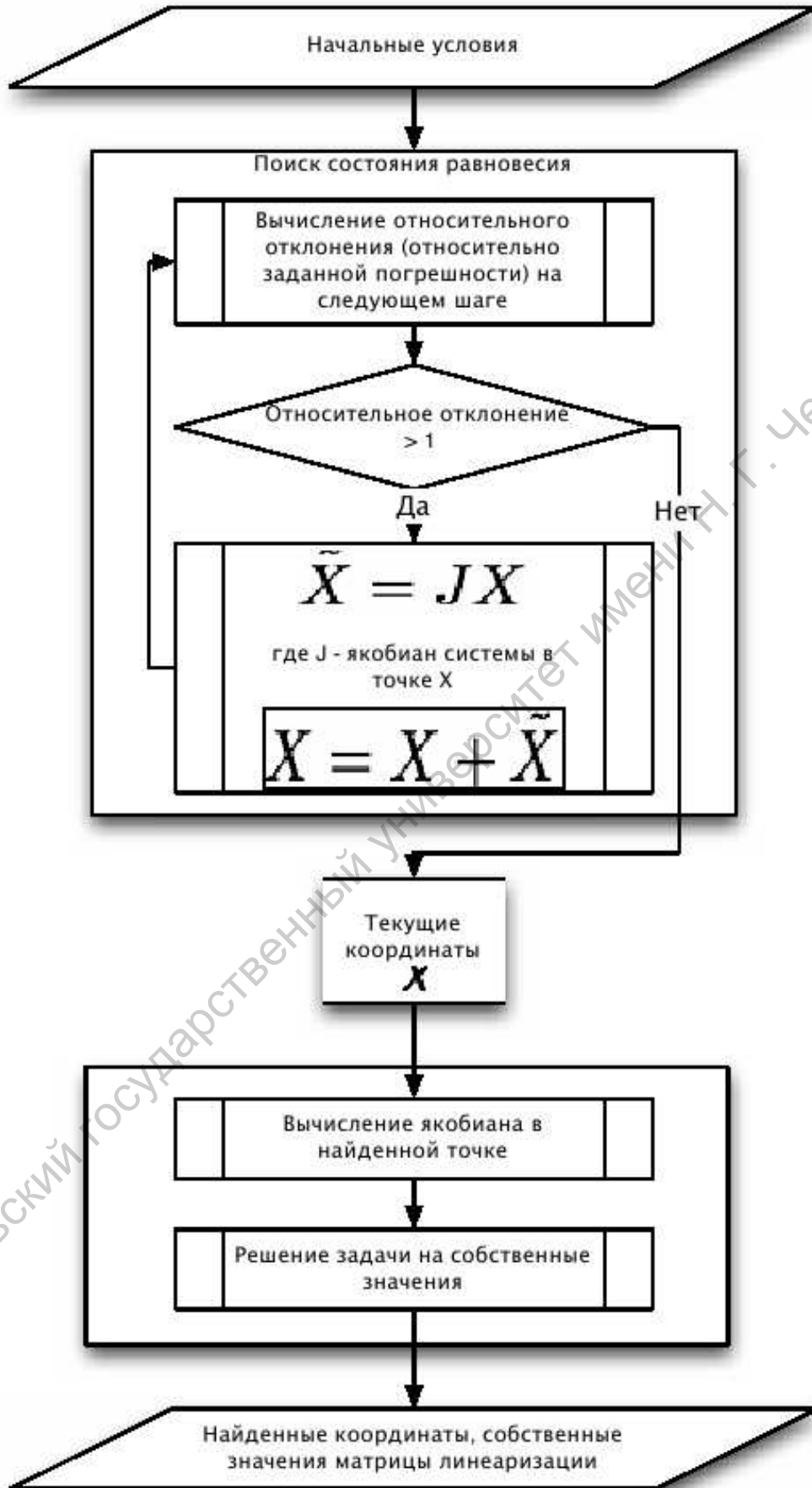


Рис. 3.16: Структурная схема процесса поиска и анализа на устойчивость состояния равновесия

а уравнение (3.20) можно переписать:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - A_k \cdot F \left(X^{(k)} \right). \quad (3.23)$$

Положим $A_k = [F' (X^{(k)})]^{-1}$, где

$$F' \left(X^{(k)} \right) = J \left(X^{(k)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{X=X^{(k)}}. \quad (3.24)$$

Тогда уравнение (3.23) переписывается в виде:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - [F' (X^{(k)})]^{-1} F \left(X^{(k)} \right), \quad (3.25)$$

$$F' \left(X^{(k)} \right) \left(X^{(k+1)} - X^{(k)} \right) = -F \left(X^{(k)} \right). \quad (3.26)$$

Таким образом, нахождение состояния равновесия сводится к решению линейной алгебраической системы

$$F' \left(X^{(k)} \right) P^{(k)} = -F \left(X^{(k)} \right) \quad (3.27)$$

относительно векторной поправки $P^{(k)}$ и прибавлению этой поправки к текущему приближению для получения следующего:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + P^{(k)}. \quad (3.28)$$

Сравнивая (3.26) с формальным разложением в ряд Тейлора

$$F(X) = F \left(X^{(k)} \right) + F' \left(X^{(k)} \right) \left(X - X^{(k)} \right) + \frac{1}{2!} F'' \left(X^{(k)} \right) \left(X - X^{(k)} \right)^2 + \dots, \quad (3.29)$$

видим, что уравнение (3.26) получается путем линеаризации исходной динамической системы в окрестности состояния равновесия. Таким образом, можно рассчитывать, что при достаточной гладкости $F(X)$ и достаточно хорошем начальном приближении $X^{(0)}$, сходимость к решению будет квадратичной.

Графическая схема реализации процесса поиска состояний равновесия с использованием описанного метода изображена на рис. 3.16. Хотелось бы подчеркнуть, что состояние равновесия динамической системы может быть найдено с заданной точностью только если начальные условия выбраны в достаточно малой окрестности неподвижной точки.

3.4 Практическая часть

1. Записать уравнение автономного осциллятора Дуффинга. Подобрать значения управляющих параметров таким образом, чтобы в системе существовало 3 состояния равновесия. Найти их координаты аналитически и рассчитать собственные значения найденных неподвижных точек. Найти неподвижные точки (и их собственные значения) осциллятора Дуффинга при тех же значениях параметров с помощью программного комплекса ANONS. Сопоставить результаты.
2. Меняя значение управляющего параметра, пронаблюдать с помощью программного комплекса ANONS бифуркацию, в результате которой в окрестности одного состояния равновесия образуются еще два.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость?
- 2) Как определить тип особой точки?
- 3) Перечислите состояния равновесия, которые могут наблюдаться на фазовой плоскости.
- 4) Что такое структурная устойчивость?
- 5) В чем состоит седло-узловая бифуркация?
- 6) Какие изменения в фазовом пространстве происходят вследствие бифуркации Андронова-Хопфа?

4 Анализ на устойчивость периодических колебаний

4.1 Предварительные замечания

Пусть, как и ранее, динамическая система задана дифференциальным уравнением в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \mu), \quad (4.1)$$

где \mathbf{x} – вектор состояния системы размерности n , а μ – вектор управляющих параметров.

Определение

Частное решение системы (4.1) $\mathbf{x}^0(t)$ называется периодическим, если для любого t

$$\mathbf{x}^0(t) \equiv \mathbf{x}^0(t + T), \quad \mathbf{x}^0(t) \neq const. \quad (4.2)$$

Второе условие в (4.2) исключает из рассмотрения состояния равновесия.

Периодическое решение называется **изолированным**, если оно имеет окрестность, не содержащую других периодических решений. В автономном случае изолированное периодическое решение называется **предельным циклом**.

Предельный цикл в фазовом пространстве является образом автоколебаний в исходной радиофизической системе. Как известно, такие режимы возможны в системах с размерностью фазового пространства не менее 2.

4.2 Теория метода

Устойчивость периодических решений

Важным является вопрос об устойчивости периодического решения. Заметим, что сохраняют силу данные ранее определения устойчивости по Ляпунову, орбитной и асимптотической устойчивости. Как мы увидим ниже, именно характер устойчивости (неустойчивости) предельного цикла может быть положен в основу их классификации.

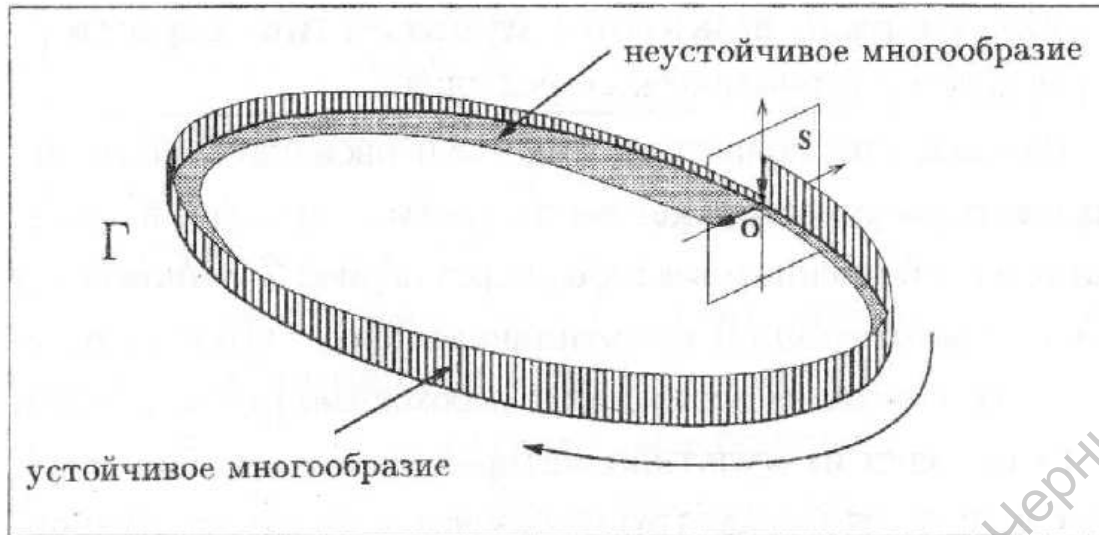


Рис. 4.1: К определению устойчивого и неустойчивого многообразий предельного цикла. Площадка S задает сечение Пуанкаре.

Рассмотрим замкнутую фазовую траекторию Γ в фазовом пространстве размерности $n \geq 2$ (рис. 4.1). Нас интересуют возможные перестройки расположения фазовых траекторий в окрестности Γ при малой вариации параметров исходной динамической системы. Для их описания выберем на Γ точку O . Проведем через эту точку трансверсальную (не касательную) к Γ площадку S . Фазовые траектории в окрестности Γ , выйдя из S , вновь пересекают ее, сделав оборот вдоль кривой. Возникает отображение окрестности точки O на S в S : каждое предыдущее пересечение площадки задает последующее, а управляет этим оператор эволюции динамической системы. Такое отображение называется отображением последования Пуанкаре, или просто **отображением Пуанкаре** (см. работу 2 данного пособия).

Точка O на периодическом решении Γ является неподвижной точкой отображения, она переходит сама в себя. Рассмотрим линеаризацию функции последования в точке O . Устойчивость периодического решения можно оценить, определив, как малое возмущение $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0(t)$ меняется за период T . Его эволюция может быть представлена следующим образом

$$\mathbf{y}(t_0 + T) = \mathbf{M}\mathbf{y}(t_0), \quad (4.3)$$

где \mathbf{M} – оператор монодромии.

Считая, что один из собственных векторов в точке O направлен вдоль траектории, удобно расположить S ортогонально к траектории в этой точке. В этом случае оставшиеся 2 собственных вектора будут лежать в плоскости S . Поэтому, дальнейшие рассуждения о мультипликаторах справедливы для сечения Пуанкаре цикла Γ , что позволяет обсуждать проблемы устойчивости и бифуркаций периодических решений с точки зрения характера неподвижной точки O на S .

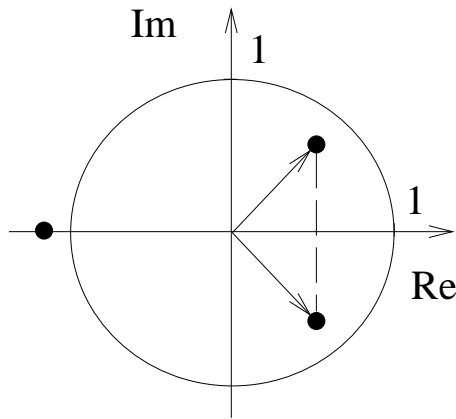


Рис. 4.2: Мультипликаторы на комплексной плоскости.

Определение

Собственные числа оператора монодромии $\rho_1 \dots \rho_n$, где n – размерность фазового пространства системы, то есть корни характеристического уравнения

$$\text{Det}[\mathbf{M} - \rho \mathbf{E}] \equiv 0$$

называются **мультипликаторами** исходного периодического решения.

Их смысл заключается в том, что первоначальное возмущение периодического движения, рассматриваемое в проекциях на собственные векторы, через период T умножается на соответствующий мультипликатор ρ_i . Отсюда ясно, что для затухания возмущения необходимо $|\rho_i| < 1$. Если хотя бы один из мультипликаторов по модулю больше 1, это значит, что существуют фазовые кривые, удаляющиеся от замкнутой кривой Γ .

Любое периодическое движение имеет хотя бы один мультипликатор, равный 1, который соответствует возмущению вдоль фазовой траектории. Физически это эквивалентно точной повторяемости решения через период и прямо следует из определения (4.2). Наличие этого единичного мультипликатора при последующих рассуждениях будет молчаливо предполагаться, специально не оговариваясь.

Как и при вычислении собственных чисел состояний равновесия, не исключено наличие в решении комплексно сопряженных пар мультипликаторов. Поэтому, удобно рассмотрение их расположения относительно круга единичного радиуса на комплексной плоскости (рис. 4.2).

В общем случае, несколько собственных чисел лежат внутри единичной окружности, а несколько – снаружи. Первым соответствует совокупность фазовых кривых, притягивающихся к Γ , вторым – отталкивающихся (притягивающихся в обратном времени). Эти совокупности носят названия **притягивающегося и отталкивающегося многообразий**. В

n -мерном случае секущая площадка имеет размерность $n - 1$. Размерность пересечения притягивающегося (отталкивающегося) многообразия с S равна числу соответствующих мультипликаторов с $|\rho_i| < 1$ ($|\rho_i| > 1$). В случае $n = 3$ для предельного цикла мы можем говорить об одномерном устойчивом и одномерном неустойчивом многообразии, либо о двумерном устойчивом (неустойчивом).

Классификация предельных циклов по типу устойчивости

Исходя из вышесказанного, задачу о классификации типов предельных циклов в трехмерных системах по типу устойчивости можно свести к рассмотрению возможных случаев (устойчивых, неустойчивых и седловых) для неподвижной точки отображения Пуанкаре на плоскости. Эта задача во многом схожа с аналогичной для состояний равновесия двумерных систем, но имеются и отличия.

На рис. 4.3 приведены 9 основных случаев. Принципы проведения подобной классификации следующие:

1. Каждый мультипликатор с $|\rho_i| < 1$ порождает одномерное притягивающееся многообразие.
2. Каждый мультипликатор с $|\rho_i| > 1$ порождает одномерное отталкивающееся многообразие.
3. Пара мультипликаторов с $|\rho_{1,2}| < 1$ ($|\rho_{1,2}| > 1$) порождает двумерное притягивающееся (отталкивающееся) многообразие.
4. Характер сходимости (расходимости) точек на притягивающемся (отталкивающемся) многообразии определяется знаком действительной части мультипликатора. При $Re \rho_i > 0$ каждая последующая точка отображения Пуанкаре располагается по ту же сторону точки O , что и предыдущая (возмущение умножается на положительную величину). При $Re \rho_i < 0$ каждая последующая точка отображения располагается по другую сторону точки O – возмущение меняет знак при каждом обороте вокруг цикла. При таком характере сходимости к описанию особой точки прибавляется слово “обратный”.

На рис. 4.3 позиции 5) и 6) позволяют сравнить “седло” и “обратное седло”. Читателю предлагается самостоятельно проанализировать случаи:

- а) $Im \rho_{1,2} = 0, \quad Re \rho_{1,2} < -1;$
- б) $Im \rho_{1,2} \neq 0, \quad -1 < Re \rho_{1,2} < 0.$

Бифуркации предельных циклов

Замкнутая фазовая кривая (периодическое решение) называется **невырожденной**, если единица не является ее мультипликатором¹. При малом

¹Конечно, за исключением мультипликатора по направлению вдоль предельного цикла.

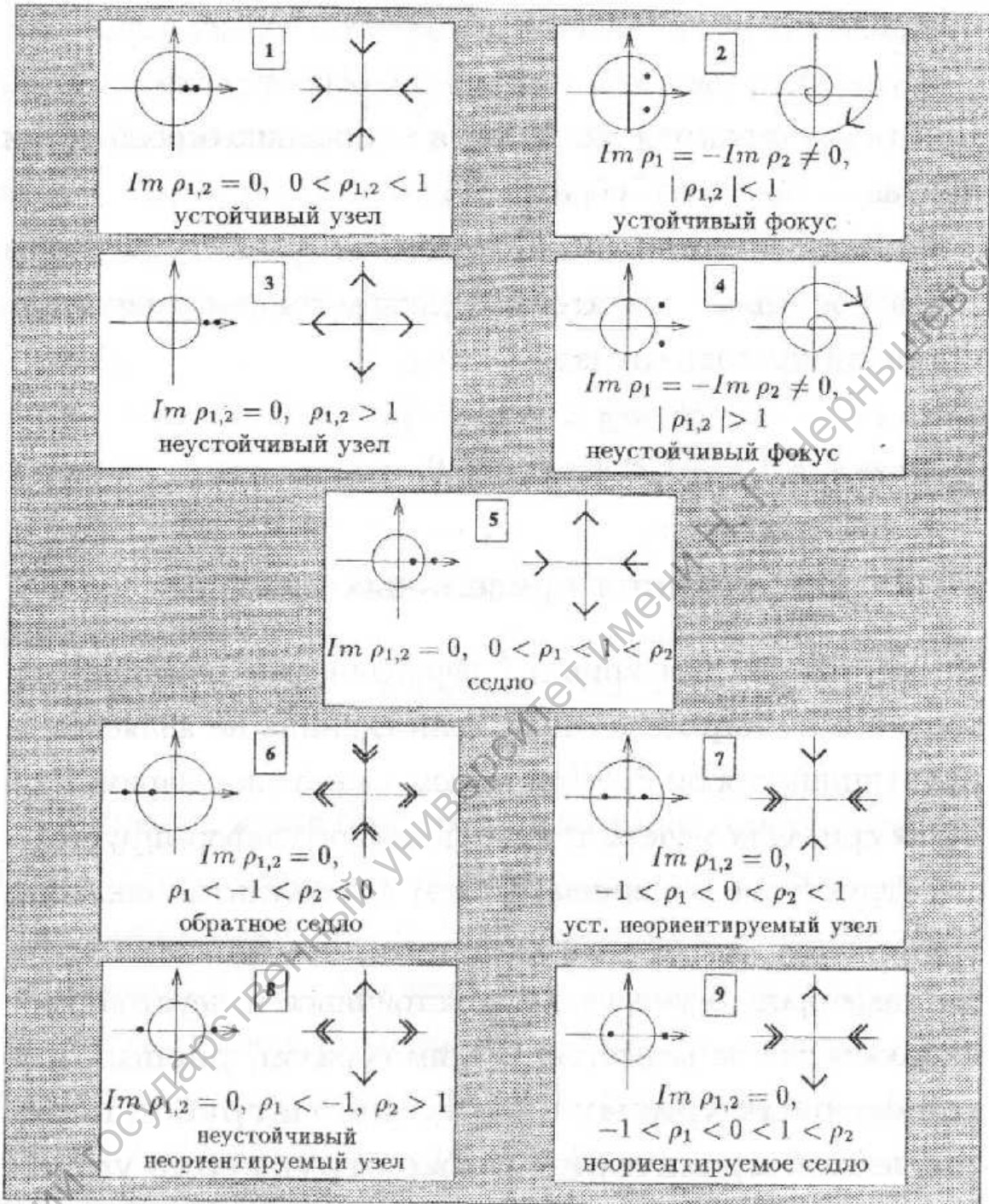


Рис. 4.3: Классификация предельных циклов по типу устойчивости.

“шевелении” параметров такая кривая не исчезает, а лишь немного деформируется – она структурно устойчива. При этом ее мультипликаторы также лишь немного деформируются – количество мультипликаторов, определяющих устойчивое и неустойчивое многообразия, не меняется. Таким образом, **расположение фазовых кривых в окрестности грубой периодической траектории также структурно устойчиво.**

Однако, при широкой вариации параметров исходной системы возмож-

ны случаи перестройки одного структурно устойчивого состояния в другое. Это происходит в точках бифуркации. Из изложенного выше материала ясно, что таким точкам должна соответствовать структурно неустойчивая ситуация – выход одного или нескольких мультипликаторов на единичную окружность. Как уже отмечалось выше, рассмотрение структуры фазовых траекторий в окрестности предельного цикла может проводиться путем исследования соответствующего отображения Пуанкаре. При этом бифуркациям периодических решений ставятся в соответствие бифуркации неподвижных точек отображения, а это аналог состояний равновесия для систем с дискретным временем. Таким образом, рассмотренные в теории к лабораторной работе 3 седло–узловая бифуркация и бифуркация Андронова–Хопфа получают более широкую трактовку в терминах периодических решений.

Седло-узловая бифуркация предельного цикла.

Пусть определенные в сечении Пуанкаре мультипликаторы предельного цикла $\rho_{1,2} < 1$ (напомним, что один из мультипликаторов $\rho_3 \equiv 1$). Здесь и далее предполагается, что плоскость сечения выбрана так, что ρ_3 соответствует направлению, касательное к фазовой траектории в точке сечения. Пусть далее управляющий параметр системы μ меняется так, что при $\mu = \mu^*$ один из мультипликаторов выходит на единичную окружность. Для определенности положим $\rho_1 = 1$, $\rho_2 < 1$. Что при этом происходит?

С точки зрения устойчивости неподвижной точки O отображения Пуанкаре на плоскости, условие $\rho_1 = 1$ аналогично условию равенства нулю одного из собственных чисел состояния равновесия в потоковой системе. Этот случай рассматривался нами ранее как седло-узловая бифуркация. При этом для $\mu < \mu^*$ существуют 2 неподвижные точки отображения - P' и P'' . В точке бифуркации они сливаются и исчезают. В исходной системе первоначально существуют два предельных цикла: устойчивый Γ' , для которого $\rho'_1 < 1$, $\rho''_2 < 1$, и седловой Γ'' с $\rho'_1 > 1$, $\rho''_2 < 1$. При $\mu = \mu^*$ циклы сливаются. Цикл Γ в момент бифуркации, имеющий в сечении Пуанкаре негрубую особую точку типа седло-узел, часто называют “двойным”. При обратном движении по параметру из сгущения фазовых траекторий рождается двойной цикл, распадающийся затем на устойчивый и седловой. Седло–узловая бифуркация предельного цикла проиллюстрирована на рис. 4.4.

Бифуркация удвоения периода.

Если в точке бифуркации $\mu = \mu^*$ имеет место обращение одного из мультипликаторов в -1, то цикл Γ становится неустойчивым, однако, продолжает существовать как седловой (см. рис. 4.3, случай 8). При этом в его окрестности рождается новый предельный цикл с вдвое большим периодом. Как это происходит?

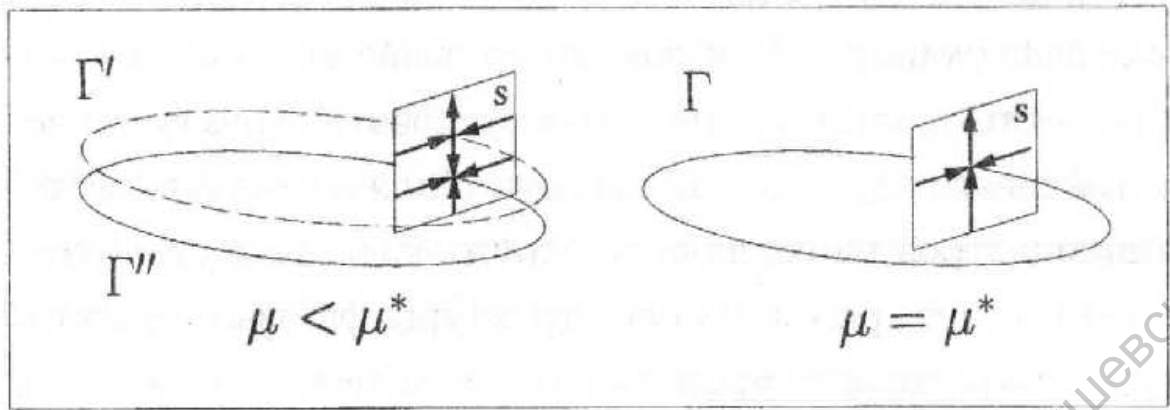


Рис. 4.4: Седло-узловая бифуркация предельных циклов.

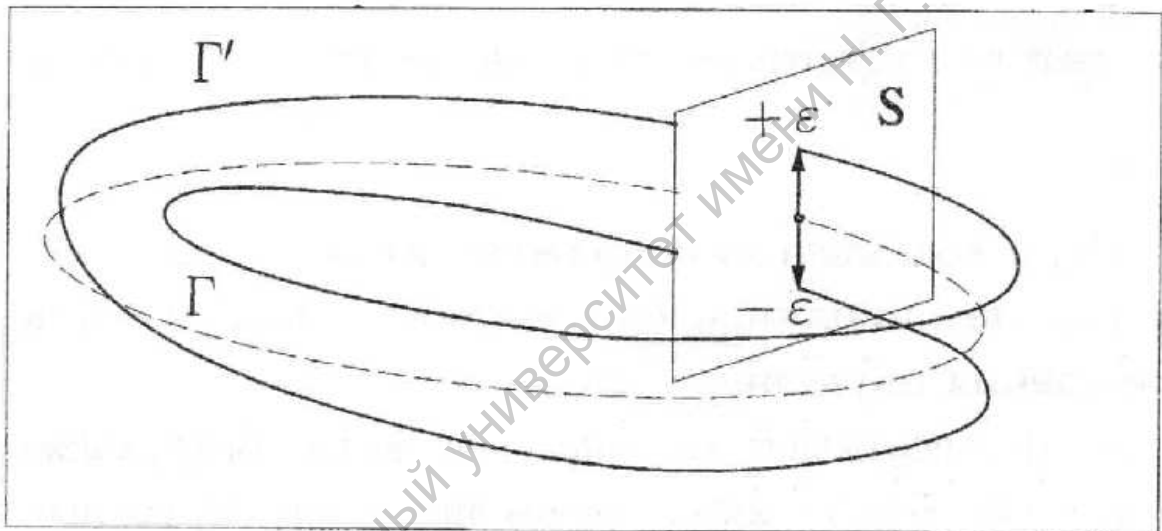


Рис. 4.5: Бифуркация удвоения периода предельного цикла. Пунктиром показан потерявший устойчивость исходный цикл.

Рассмотрим ситуацию, представленную на рис. 4.5, при $\mu = \mu^*$. Если задать малое начальное отклонение $\varepsilon_0 = +\varepsilon$, то через период оно составит $\varepsilon_T = \varepsilon_0 \rho_1 = -\varepsilon$, а через 2 периода $-\varepsilon_{2T} = \varepsilon_0 \rho_1 \rho_1 = \varepsilon_0$. За два оборота траектория замкнулась, вернувшись в исходную точку! Если предположить, что исходный цикл был устойчив не в малом (то есть имел конечную область притяжения), то траектории извне продолжают притягиваться к его окрестности. Тогда при $\mu \geq \mu^*$ найдется новый устойчивый режим Γ' удвоенного периода.

Описанная бифуркация удвоения периода играет ключевую роль в одном из “сценариев” возникновения динамического хаоса, когда каждый из родившихся циклов удвоенного периода в свою очередь претерпевает такую же бифуркацию. При движении по параметру устойчивость обретают режимы с периодами $2T_0, 4T_0, 8T_0, 16T_0 \dots$. Некоторой критической точке $\mu = \mu_{cr}$ соответствует обращение периода в бесконечность – рождение ха-

отического аттрактора.

Пара комплексно сопряженных мультипликаторов на единичной окружности – бифуркация рождения двумерного тора.

Еще одна бифуркация состояний равновесия – бифуркация Андронова-Хопфа – имеет прямой аналог для случая предельных циклов в виде *бифуркации Неймарка*, которая наблюдается в отображении Пуанкаре, представляющем собой образ исходной системы в виде системы с дискретным временем. В фазовом пространстве исходной системы такой бифуркации соответствует мягкая потеря устойчивости предельным циклом и рождение в его окрестности двумерного тора.

Пусть в точке бифуркации $\mu = \mu^*$ пара комплексно сопряженных мультипликаторов выходит на единичную окружность:

$$\begin{aligned} |\rho_1| &= |\rho_2| = 1, \\ \rho_{1,2} &= |\rho_{1,2}| e^{\pm j\omega}, \\ \omega &\neq 0, \pm\pi/2, \pm3\pi/4 \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

где последнее условие означает отсутствие дополнительных вырождений. Условию (4.4) соответствует вращательное движение, задаваемое функцией последования отображения Пуанкаре (рис. 4.6). Начальное отклонение ε от точки O не меняется по модулю, однако, каждая новая точка в сечении S ложится на некоторую окружность L в сечении. L называют **инвариантной окружностью** в том смысле, что любая точка сечения Пуанкаре на L переходит в точку, лежащую на L .

Определение

“Соизмеримость частот” $\omega/2\pi = p/q$ с целыми p и q называется резонансом порядка q . Резонанс называется сильным, если его порядок $q \leq 4$. Величина $\omega/2\pi$ носит название **числа вращения Пуанкаре**.

В случае резонанса точка отображения Пуанкаре, лежащая на L , через q оборотов перейдет сама в себя – фазовая траектория замкнется. В этой ситуации говорят о резонансном торе (рис. 4.6, б).

Если соотношение p/q иррационально, то с течением времени траектория всюду плотно заполнит поверхность “бублика”, никогда не замыкаясь. Такой объект фазового пространства получил название эргодического тора (рис. 4.6, в).

Заметим, что при конечном превышении параметра μ над бифуркационным значением μ^* инвариантная замкнутая кривая в отображении Пуанкаре не обязательно является гладкой, а функция последования не обязательно эквивалентна повороту. Однако, при $\mu \rightarrow \mu^*$ кривая стремится к гладкой, а число вращения – к $\omega/2\pi$. Иными словами, все что говорилось

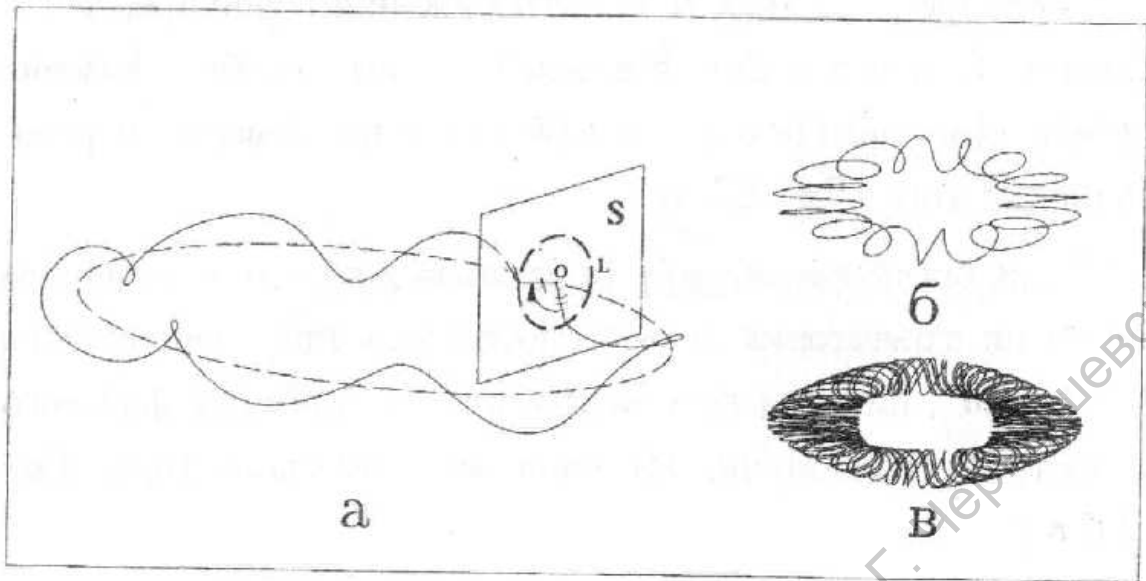


Рис. 4.6: Бифуркация Андронова-Хопфа для предельного цикла. *a* – траектория закручивается вокруг потерявшего устойчивость цикла (пунктир); *б* – резонансный тор; *в* – эргодический тор (квазипериодические колебания).

выше о бифуркации рождения двумерного тора тем более справедливо, чем ближе система к точке бифуркации.

Рождение двумерного тора в фазовом пространстве имеет ясную радиоп физическую интерпретацию. В то время как предельный цикл есть образ автоколебаний, мягкое рождение из него двумерного тора описывает возникновение биений, или автомодуляцию. При этом на рис. 4.7 основной тон колебаний периода T_1 соотносится с движением вдоль потерявшего устойчивость предельного цикла, а модуляция периода T_2 – с вращением на траектории на поверхности тора.

Наконец, как и в случае бифуркации Андронова-Хопфа для состояний равновесия, возможен случай “жесткой” бифуркации, когда в момент потери устойчивости циклом в него “влипают” неустойчивый двумерный тор. Каким будет устойчивый режим системы за точкой бифуркации – зависит в этом случае от глобальных свойств системы.

Бифуркация потери симметрии.

В системах с некоторыми свойствами симметрии возможен особый тип бифуркации, когда при прохождении точки $\mu = \mu^*$, $\rho = +1$ потерявший устойчивость предельный цикл не исчезает, а продолжает существовать как седловой. Такая ситуация соответствует бифуркации потери симметрии. В зависимости от размерности фазового пространства системы и типа симметрии соответствующие этой бифуркации перестройки в фазовом пространстве могут выглядеть по-разному.

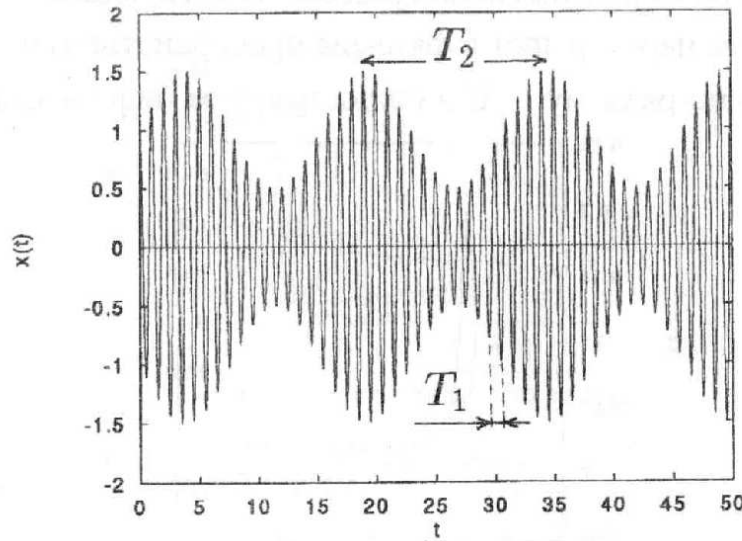


Рис. 4.7: Два временных масштаба квазипериодических колебаний.

4.3 Численный алгоритм

При исследовании предельных циклов удобно использовать сечение Пуанкаре. В этом случае отображением Пуанкаре предельного n -тактного цикла будет неподвижная точка кратности n .

Таким образом, задача поиска и исследования на устойчивость предельного цикла сводится к поиску и исследованию на устойчивость неподвижной точки. Для этой цели может быть применен метод Ньютона, описанный в предыдущем разделе. Однако следует отметить важное отличие — эволюцию малого отклонения за один шаг в данном случае не может описывать якобиан динамической системы, поскольку один шаг отображения Пуанкаре по времени соответствует периоду исследуемого предельного цикла и в общем случае много больше величины шага дискретизации по времени. Напомним, что оператору (4.3), описывающему изменение малого отклонения от предельного цикла за один шаг отображения Пуанкаре, соответствует матрица монодромии, а ее собственные значения, определяющие устойчивость предельного цикла, называются мультипликаторами. Матрица монодромии может быть построена численно путем внесения малого отклонения и ортогонализации его изменения через время, равное периоду предельного цикла.

Для того, чтобы исследовать предельный цикл, в первую очередь следует определить его период. Это можно сделать, интегрируя систему от момента первого пересечения фазовой траектории с секущей Пуанкаре до n -го пересечения, где n — тактность предельного цикла. Затем, внося малые отклонения и ортогонализуя их изменения за период, строится матрица монодромии. Решение задачи на собственные значения матрицы монодро-

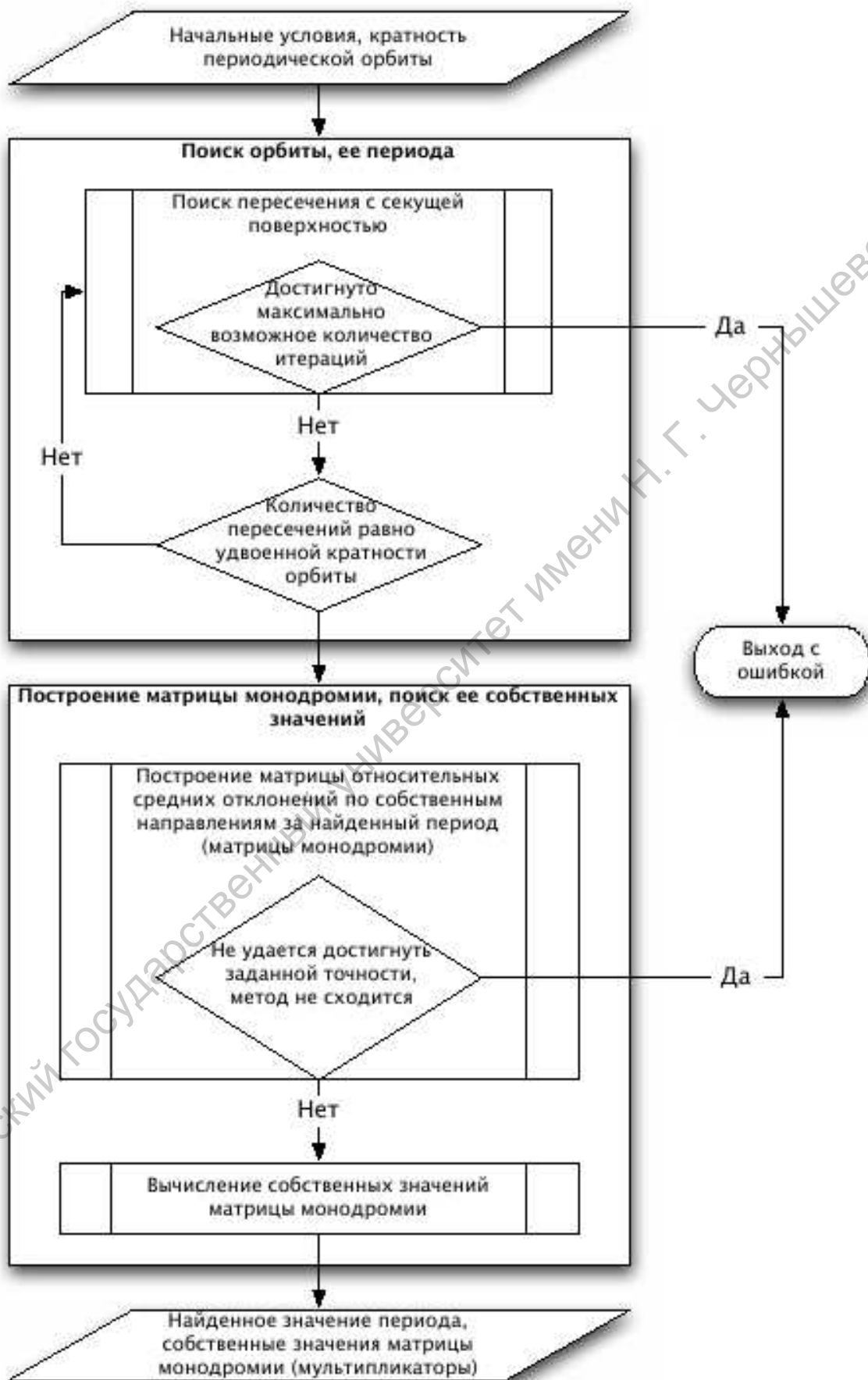


Рис. 4.8: Структурная схема процесса поиска и анализа на устойчивость предельных циклов

мии дает величины мультипликаторов.

Реализация описанного процесса представлена графически на рис. 4.8. Здесь следует отметить, что для его корректного выполнения необходимо задание начальных условий как можно ближе к предельному циклу, иначе метод Ньютона может не дать сходимости.

4.4 Практическая часть

1. С помощью программного комплекса ANONS пронаблюдать предельные циклы кратности 1, 2, 4 в генераторе с инерционной нелинейностью, получить значения их периодов и мультипликаторов.
2. Изменяя значение управляющего параметра, пронаблюдать с помощью программного комплекса ANONS эволюцию мультипликаторов при приближении к первой бифуркации удвоения периода. Объяснить результат.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое мультипликатор периодического режима колебаний?
- 2) Как охарактеризовать устойчивость периодического режима?
- 3) В чем состоит седло-узловая бифуркация предельного цикла?
- 4) Как вычислить число вращения Пуанкаре для двумерного тора?
- 5) В чем состоит бифуркация потери симметрии?

5 Спектральный анализ колебаний как метод диагностики эволюции колебательных режимов при переходе к хаосу

5.1 Предварительные замечания

Многие модели нелинейной динамики, начиная с простейших отображений и заканчивая распределенными системами, демонстрируют переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Данный переход был детально исследован на основе одномерных отображений М. Фейгенбаумом, поэтому соответствующий бифуркационный механизм возникновения хаотической динамики получил название *сценария Фейгенбаума*.

В динамических системах с непрерывным временем данному сценарию соответствует вполне определенная качественная и количественная эволюция предельных циклов. Ее изучение может производиться различными методами, включая визуальное наблюдение временных реализаций и фазовых проекций, или же расчет мультипликаторов. Однако, по мере усложнения геометрии предельного цикла, применение этих методов значительно затрудняется. В этих условиях, полезно и поучительно применение спектрального метода анализа, основанного на преобразовании Фурье и дающего наглядную и однозначную информацию о наличии и относительной амплитуде субгармоник основного тона колебания.

В рамках данной лабораторной работы сценарий Фейгенбаума описывается на примере системы с дискретным временем для упрощения изложения материала. Практическая часть работы выполняется на моделях с непрерывным временем.

Каскад бифуркаций удвоения в логистическом отображении

Не будет преувеличением сказать, что своей широкой известностью логистическое отображение обязано тому, что послужило примером для де-

монстрации и изучения формирования хаотического аттрактора в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения. При каждой такой бифуркации период возрастает вдвое, что соответствует «уполовиниванию» частоты, т.е. появлению субгармоники. По этой причине такую последовательность бифуркаций называют также **субгармоническим каскадом**.

Проведем численный эксперимент с логистическим отображением

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n). \quad (5.1)$$

По мере увеличения μ крутизна параболы плавно растет. Вместе с этим меняется и устойчивый режим отображения. Из рис. 5.1 видно, что $\mu = 2.0$ соответствует неподвижная точка периода 1. Для $\mu = 3.2$ устойчивым является цикл периода 2 – неподвижная точка претерпела бифуркацию удвоения. Однако далее, при больших μ , цикл периода 2 также теряет устойчивость, уступая циклу периода 4 (рис. 5.1, б), который, в свою очередь, сменяется циклом периода 8, и т.д. При значениях μ , близких к 4, траектория может вообще не замкнуться в цикл в течение разумного времени наблюдения.

Попытаемся разобраться, какой механизм лежит в основе последовательного увеличения периода циклов отображения (5.1)? Неподвижная точка периода 1 определяется условием $\mu x^*(1 - x^*) = x^*$. Помимо тривиального решения $x^* = 0$ (которое нас сейчас не интересует), это дает

$$x^* = 1 - \frac{1}{\mu}. \quad (5.2)$$

Точка x^* теряет устойчивость, когда наклон касательной к функции последования в ней становится равным -1 :

$$f'(x^*) = \mu - 2\mu x^* = -1. \quad (5.3)$$

Нетрудно посчитать, что это происходит при $\mu = 3.0$. В этой точке дважды примененное отображение

$$f^{(2)}(x_n) = \mu(\mu x_n(1 - x_n))(1 - \mu^2 x_n^2(1 - x_n^2)) \quad (5.4)$$

претерпевает бифуркацию вил, при которой из потерявшей устойчивость x^* рождаются две новые устойчивые неподвижные точки x^{*1} и x^{*2} . Для исходного отображения (5.1) они образуют цикл периода 2:

$$x^{*1} \longrightarrow x^{*2} \longrightarrow x^{*1} \longrightarrow x^{*2} \longrightarrow x^{*1} \longrightarrow \dots$$

При дальнейшем увеличении μ точки x^{*1} и x^{*2} одновременно теряют устойчивость, когда $f^{(2)'}(x^{*1})$ и $f^{(2)'}(x^{*2})$ в свою очередь достигают значения -1 . Из рис. 5.2 можно видеть, что этому событию соответствует бифуркация

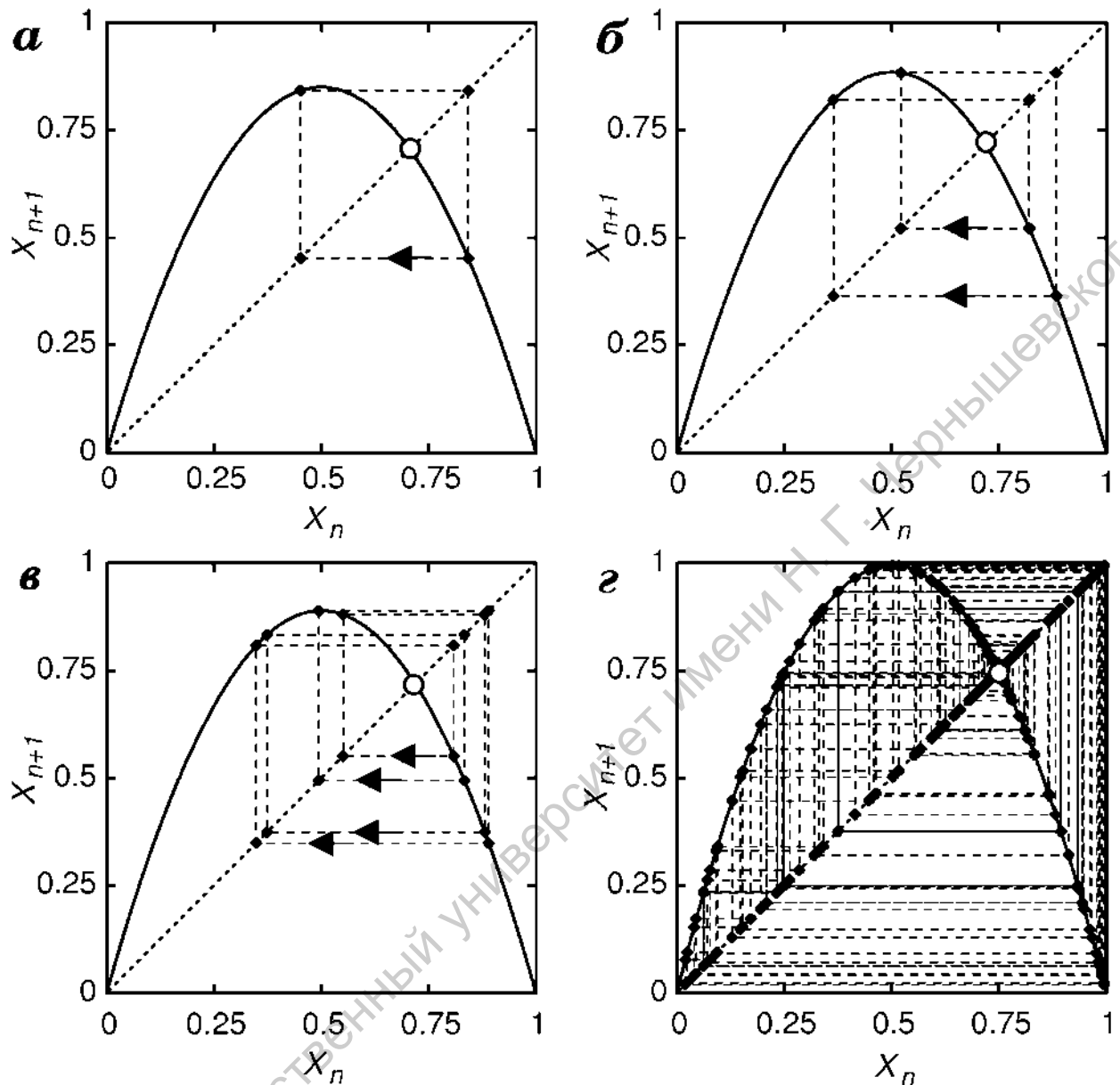


Рис. 5.1: Итерации отображения $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$ при различных значениях параметра μ выявляют различные типы поведения: *a* – при $\mu = 2.9$ наблюдается неподвижная точка периода 2 (2-цикл); *б* – при $\mu = 3.4$ наблюдается 4-цикл; *в* – при $\mu = 3.59$ наблюдается 8-цикл; *г* – при $\mu = 3.98$ траектория не замыкается даже при большом числе итераций

вил неподвижной точки дважды примененного отображения $f^{(2)}$, т.е. $f^{(4)}$. Это отображение после бифуркации имеет 4 неподвижных точки, которые образуют цикл периода 4 отображения (5.1).

Приведенных примеров достаточно, чтобы заключить, что обнаруженные нами циклы различного периода возникают вследствие того, что по мере увеличения μ каждое из $2n$ раз примененных отображений обретает устойчивую точку периода 1, а затем эта точка теряет устойчивость при достижении условия $f^{(2n)'} = -1$.

Чтобы увидеть весь процесс усложнения циклов отображения (5.1) по

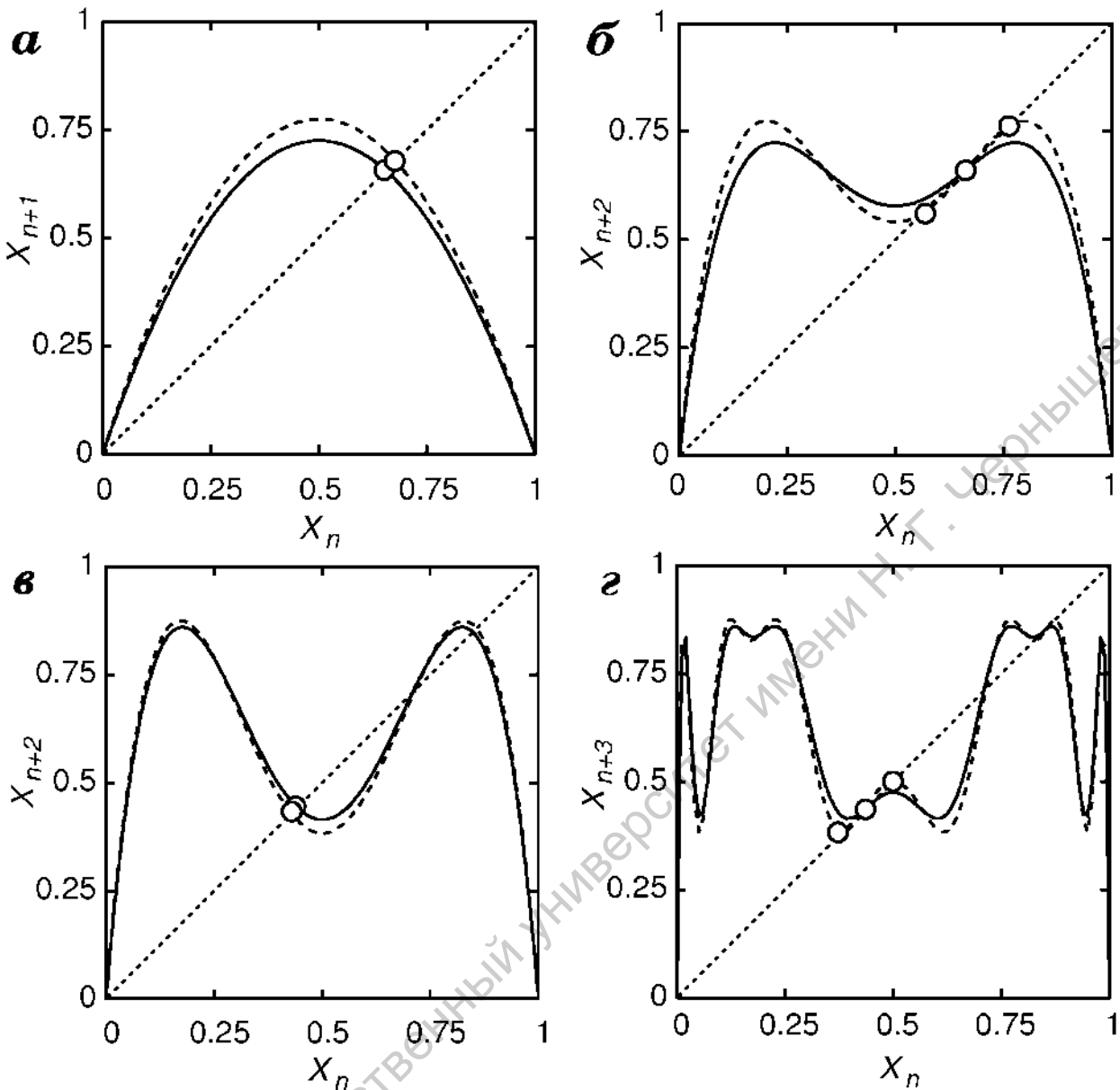


Рис. 5.2: Механизм усложнения динамики отображения $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$ в окрестности бифуркаций удвоения периода: *а* – в графике однократно примененного отображения при переходе от $\mu = 2.9$ к $\mu = 3.1$ никаких качественных изменений не наблюдается; *б* – двукратно примененное отображение при переходе от $\mu = 2.9$ к $\mu = 3.1$ претерпевает суперкритическую бифуркацию потери симметрии; *в* и *г* – тот же сценарий наблюдается при переходе от $\mu = 3.445$ к $\mu = 3.450$ для дважды и четырежды примененного отображения

мере роста μ , построим **однопараметрическую бифуркационную диаграмму**, по горизонтальной оси которой отложим значения μ , а по вертикальной – значения x_n , принадлежащие установившемуся режиму (для этого n должно быть достаточно большим). График, приведенный на рис. 5.3, наглядно иллюстрирует весь процесс увеличения периода циклов с ростом μ .

Очевидно, бифуркационным точкам, где происходит смена устойчивого

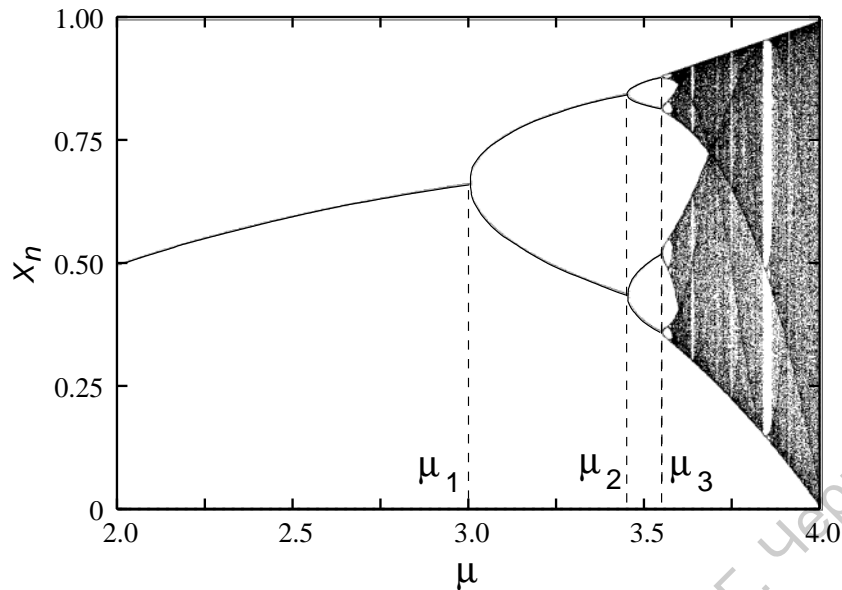


Рис. 5.3: Однопараметрическая бифуркационная диаграмма. Виден весь процесс усложнения устойчивых режимов логистического отображения при изменении параметра μ . μ_1 , μ_2 и μ_3 – точки первых трех бифуркаций удвоения

режима, соответствуют точки ветвления диаграммы. Оценим их положение на диаграмме и определим тем самым области устойчивости циклов. Для цикла периода 2, x^{*1} и x^{*2} удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} x^{*2} &= \mu x^{*1}(1 - x^{*1}), \\ x^{*1} &= \mu x^{*2}(1 - x^{*2}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

что дает

$$x^{*1,2} = (1 + \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3})/2\mu. \quad (5.6)$$

Производная функции последования в этих точках есть

$$\begin{aligned} f'(x^{*2}) &= \mu(1 - 2x^{*2}), \\ f'(x^{*1}) &= \mu(1 - 2x^{*1}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Условие устойчивости для цикла периода 2 есть

$$|f'(x^{*1})f'(x^{*2})| = |\mu^2(1 - 2x^{*1})(1 - 2x^{*2})| < 1. \quad (5.8)$$

Подставляя (5.6) в (5.8), получим:

$$3.0 < \mu < 1 + \sqrt{6} = 3.44949\dots,$$

причем $\mu = 3.0$ соответствует, как мы видели выше, потере устойчивости неподвижной точкой периода 1 отображения (5.1), а значение $\mu = 1 + \sqrt{6}$ соответствует бифуркации удвоения цикла периода 2, т.е. точке диаграммы μ_2 . Применение аналогичной процедуры к циклам больших периодов дает

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 = 3.0 & \mu_5 = 3.568759 \dots \\
\mu_2 = 3.449490 \dots & \mu_6 = 3.569692 \dots \\
\mu_3 = 3.544090 \dots & \mu_7 = 3.569891 \dots \\
\mu_4 = 3.564407 \dots & \mu_8 = 3.569934 \dots
\end{array}$$

Легко видеть, что полученные значения сходятся к некоторому пределу, который обозначим как μ_∞ . Предположив геометрический характер сходимости μ_i , можно попробовать оценить ее параметры, записав ее в виде

$$\mu_\infty - \mu_k = c/\delta^k, \quad (5.9)$$

где c и δ – постоянные, по величине больше единицы: $c, \delta = \text{const} > 1$.

Так как напрямую рассчитать μ_∞ затруднительно, выразим δ для конечных k :

$$\mu_\infty - \mu_{k-1} = c/\delta^{k-1}, \quad (5.10)$$

$$\mu_\infty - \mu_k = c/\delta^k, \quad (5.11)$$

$$\mu_\infty - \mu_{k+1} = c/\delta^{k+1}. \quad (5.12)$$

Вычтем (5.11) из (5.10) и (5.12) из (5.11):

$$\frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{c} = \delta^{1-k} - \delta^{-k}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{c} = \delta^{-k} - \delta^{-k-1}. \quad (5.14)$$

Поделив теперь (5.13) на (5.14) имеем:

$$\frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\mu_{k+1} - \mu_k} = \frac{\delta^{1-k} - \delta^{-k}}{\delta^{-k} - \delta^{-k-1}} = \delta. \quad (5.15)$$

Это соотношение позволяет оценить δ из результатов расчета μ_k . Зная δ , нетрудно получить оценку для c , а затем и для μ_∞ . Результаты расчетов дают

$$\delta = 4.669202 \dots, \quad c = 2.637 \dots, \quad \mu_\infty = 3.5699457 \dots$$

Итак, нам удалось количественно охарактеризовать накопление точек бифуркаций μ_i к некоторому пределу с помощью констант δ , c и μ_∞ .

Однако диаграмма рис. 5.3 показывает, что эволюция x_n также подчиняется неким закономерностям, образуя самоподобную структуру. Как мы увидим ниже, она может быть описана с помощью другой константы.

Выше мы выяснили, что бифуркационные значения параметра μ накапливаются к μ_∞ , образуя самоподобную структуру. Однако по вертикальному направлению (т.е. по значениям x_n) диаграмма рис. 5.3 также демонстрирует самоподобную структуру. Чтобы ее охарактеризовать, введем в

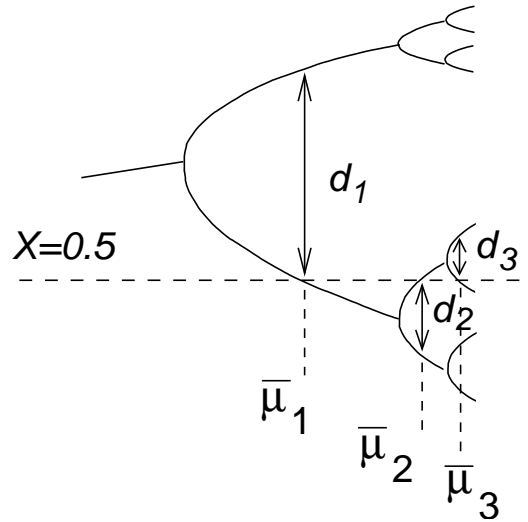


Рис. 5.4: Преобразование масштаба для сверхустойчивых циклов (схематически)

рассмотрение значение параметра $\bar{\mu}_k$, соответствующее суперустойчивым циклам. Заметим, что каждый 2^k -цикл отображения (5.1) рождается при μ_k , имея собственное значение, равное $+1$, и теряет устойчивость при μ_{k+1} по мере достижения собственным значением величины -1 . Таким образом, при некотором $\mu_k < \bar{\mu}_k < \mu_{k+1}$ устойчивость 2^k -цикла максимальна:

$$\left| \frac{dF^{2^k}(\bar{\mu}_k, x_i)}{dx} \right| = \prod_{j=0}^{2^k-1} \left| F'(\mu_k, x_j) \right| = 0, \quad (5.16)$$

где x_i – любая точка, принадлежащая суперциклу. Условие (5.16) означает, что хотя бы одна точка, принадлежащая суперциклу, должна лежать на экстремуме $f(\mu, x)$, где производная обращается в ноль. Для отображения (5.1) это точка $\bar{x} \equiv \frac{1}{2}$. Помимо точки \bar{x} введем в рассмотрение еще одну точку суперцикла, x_1 , ближайшую к \bar{x} . Перед точкой бифуркации удвоения для $\mu \leq \mu_n$ неподвижная точка периода 1 была устойчивой для отображения $f^{2^{k-1}}(\mu, x_n)$. При прохождении параметром значения μ_n x_0 теряет устойчивость, «расщепляясь» на 2 точки цикла периода 2. При достижении параметром μ значения $\bar{\mu}_k$ одна из этих точек становится $\mu \equiv \frac{1}{2}$, а другая – x_1 . Отсюда следует, что $f^{2^{k-1}}(\bar{\mu}_k, \bar{x}) = x_1$.

Теперь рассмотрим, как эволюционирует расстояние между \bar{x} и x_1 по мере увеличения периода цикла: $d_k = f^{2^{k-1}}(\bar{\mu}_k, \bar{x}) - \bar{x}$. Величины d_k схематически изображены на рис. 5.4.

Для упрощения анализа сдвинем начало координат в точку максимума отображения (5.1) $\bar{x} = \frac{1}{2}$. Это легко сделать, положив для новой переменной $g = x - \frac{1}{2}$ (для простоты записи, будем продолжать использовать то же обозначение $f()$ для функции последования). Теперь выражение для d_k выглядит так:

$$d_k = f^{2^{k-1}}(\bar{\mu}_k, 0). \quad (5.17)$$

Можно заметить, что на рис. 5.4 d_k располагаются попеременно то выше, то ниже линии $x = 0.5$. Это соответствует знакопеременности d_k с ростом k . Более того, численные расчеты показывают, что отношение двух последующих таких отрезков сходится к константе:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = -\alpha = -2.50280... \quad (5.18)$$

Из (5.18) следует, что $d_1 \simeq (-\alpha)^{d_{k+1}}$ или с учетом (5.17)

$$d_1 = f(\bar{\mu}_1, 0) \simeq \lim_{k \rightarrow \infty} (-\alpha)^k f^{2k}(\bar{\mu}_{k+1}, 0). \quad (5.19)$$

Соотношение (5.19) говорит о том, что если мы подходящим образом масштабируем значение максимума $f^{2k}(\bar{\mu}_{k+1})$, то они сойдутся к некоторому пределу при увеличении k . Добавим к этому важному результату уже обсуждавшийся нами факт, что каждый из 2^k -циклов теряет устойчивость точно таким же образом, как и его предшественник, 2^{k-1} -цикл. Из этого следует геометрическое подобие f^{k-1} в окрестности теряющего устойчивость цикла.

На рис. 5.5 приведены графики $f^{(2^1)}$, $f^{(2^2)}$ и $f^{(2^3)}$ для значений, соответствующих суперциклам: $\bar{\mu}_1 = 3.24$, $\bar{\mu}_2 = 3.50..$, $\bar{\mu}_3 = 3.55..$ Прямоугольником выделена область, содержащая точку экстремума $\bar{x} = 0.5$ и ближайшую неподвижную точку. С учетом того, что для нечетных значений n график нужно перевернуть, очевидно, что поведение функций в выделенных областях подобно.

Все обсуждавшиеся выше закономерности наводят на мысль, что весь каскад бифуркаций в логистическом отображении подчиняется некоторому закону преобразования масштабов, по всей видимости, сходясь к какому-то универсальному виду такого преобразования. В качестве демонстрации работоспособности такой идеи попробуем проделать вычисления, которые позволили бы перенормировать отображение после одной бифуркации удвоения периода.

Шаг 1. Перенормируем отображение (5.1) так, чтобы бифуркация удвоения происходила при $x = 0$ и $\mu = 0$. Это означает сдвиг начала координат в x^* путем замены переменных $z = x - x^*$, а также использование нового параметра $\nu = \mu - 3$. С учетом того, что $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$, получаем

$$x_{n+1} \longrightarrow z_{n+1} + 1 - \frac{1}{\nu + 3}, \quad (5.20)$$

$$\mu x_n(1 - x_n) \longrightarrow (\nu + 3)\left(z_n + 1 - \frac{1}{\nu + 3}\right)\left(1 - z_n - 1 + \frac{1}{\nu + 3}\right)$$

и новое отображение $f(\nu, z_n)$ выглядит следующим образом:

$$z_{n+1} = -(\nu + 1)z_n - (\nu + 3)z_n^2. \quad (5.21)$$

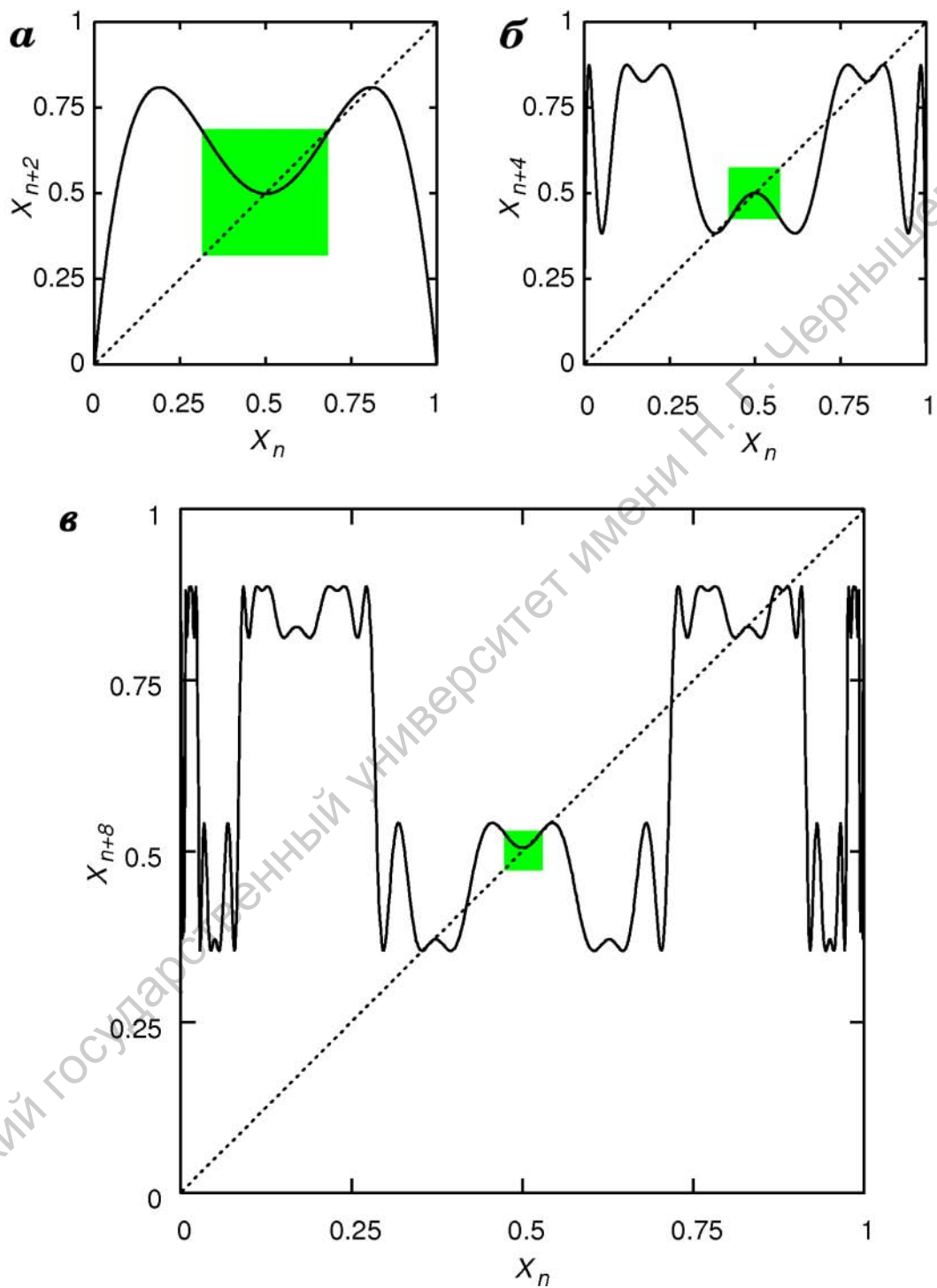


Рис. 5.5: Масштабирование в функции последования логистического отображения для сверхустойчивых циклов: *a* – $f^{(2^1)}()$ при $\mu = 3.24\dots$; *б* – $f^{(2^2)}()$ при $\mu = 3.50\dots$; *в* – $f^{(2^3)}()$ при $\mu = 3.55\dots$

Шаг 2. Найдем точки цикла периода 2 для отображения $f(\nu, z_n)$, или, что то же самое, неподвижные точки периода 1 для $f^{(2)}(\nu, z_n)$. Выберем из пары точек положительную, т.е. ту, что соответствует x_1 в рассуждениях выше:

$$z^{*1} = (\sqrt{\nu^2 + 4\nu - \nu})/2(\nu + 3). \quad (5.22)$$

Шаг 3. Сдвинем начало координат в точку z^{*1} , для чего введем очередную замену $\tilde{z} = z - z^{*1}$ и модифицируем функцию последования так, чтобы $\tilde{z} = 0$ была неподвижной точкой. Новая функция $\bar{f}(\nu, \tilde{z}) = f^{(2)}(\nu, z) - z_1$, где $z = \tilde{z} + z^{*1}$, а z^{*1} дается соотношением (5.22).

Шаг 4. После алгебраических преобразований эта новая функция может быть представлена в виде

$$\bar{f}(\nu, \tilde{z}) = c_1 \tilde{z} + c_2 \tilde{z}^2 + \dots,$$

или

$$\tilde{z}_{n+1} = c_1 \tilde{z}_n + c_2 \tilde{z}_n^2 + \dots,$$

где c_1 и c_2 – функции только ν .

Шаг 5. Перенормируем переменную отображения $\bar{z} = a\tilde{z}$ так, что

$$\bar{z}_{n+1} = c_1 \bar{z}_n + \frac{c_2}{a} \bar{z}_n^2 + \dots \quad (5.23)$$

Шаг 6. Теперь потребуем, чтобы соотношение (5.23) имело в точности ту же форму, что и (5.21) с целью определить новый параметр $\bar{\nu}$:

$$\begin{aligned} c_1 &= -(\bar{\nu} + 1), \\ \frac{c_2}{a} &= -(\bar{\nu} + 3). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Решая вышеприведенные уравнения относительно $\bar{\nu}$ и a (выражая их через ν), получим:

$$\bar{\nu} = \nu^2 + 4\nu - 2, \quad (5.25)$$

$$a = \frac{\nu^3 + 7\nu^2 + 3\sqrt{\nu^2 + 4\nu}(\nu + 3) + 12\nu}{\nu^2 + 4\nu + 1}. \quad (5.26)$$

Теперь, получив отображение в той же форме, но для новой координаты \bar{z} и нового параметра $\bar{\nu}$, можно повторить весь процесс ренормализации сначала. Очевидно, (в силу известных нам свойств логистического отображения) весь процесс сойдется к некоторым ν_∞ и a_∞ . Их можно оценить, используя (5.25): $\nu_\infty = \nu_\infty^2 + 4\nu_\infty - 2$. Решение дает $\nu_\infty = 0.5615528\dots$, что с учетом

использованного нами сдвига на 3.0 соответствует $\mu_\infty = 3.5615528\dots$ и что удивительно близко к уже полученной нами оценке.

Итак, мы убедились в том, что относительно простая (хотя и несколько громоздкая) процедура ренормализации, основанная на идее подобия всех бифуркаций удвоения, позволяет получить значения ряда универсальных констант. Следует понимать, что подобные свойства следуют из самого процесса многократной композиции функций и, по сути, предполагают существование некоторой функции, композиция которой с самой собой воспроизводит при правильном масштабировании ее же.

Относительно каскада удвоения такие универсальные свойства были подмечены Фейгенбаумом. Что особенно важно, все упоминаемые константы не зависят от конкретного вида отображения. Имеет значение лишь характер максимума – он должен быть квадратичным. Свойства универсальности изучаются с помощью метода ренормгруппы, который формализует процедуры, подобные проделанной нами для логистического отображения, и позволяет находить искомые универсальные функции.

Бифуркации удвоения предельных циклов в потоковых системах

Переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода предельного цикла наблюдается во многих динамических системах с непрерывным временем. Этот переход допускает однопараметрический анализ. Визуально мы фиксируем бифуркацию удвоения, если при изменении управляющего параметра период колебаний устойчивого предельного цикла становится вдвое больше по сравнению с периодом колебаний T_0 до точки бифуркации – возникает режим колебаний удвоенного периода $2T_0$ (рис. 5.6).

Если и дальше продолжать менять параметр, то бифуркацию удвоения будет претерпевать режим $2T_0$, в результате чего наблюдаются колебания с периодом $4T_0$. Дальнейший рост параметра приводит к появлению режимов $8T_0, 16T_0, \dots$. Происходит каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к хаотическому режиму колебаний. Данный сценарий возникновения хаоса является универсальным для систем, демонстрирующих бифуркации удвоения, и наблюдается во многих математических моделях. Универсальность его состоит в общих закономерностях и в возможности прогнозировать бифуркационные значения параметров. Если обозначить через α_k значение управляющего параметра, соответствующее k -й бифуркации удвоения, то для всех динамических систем, демонстрирующих данный сценарий перехода к хаосу, существует сходимость к конечному пределу $\delta = 4.669202\dots$, как и для логистического отображения выше.

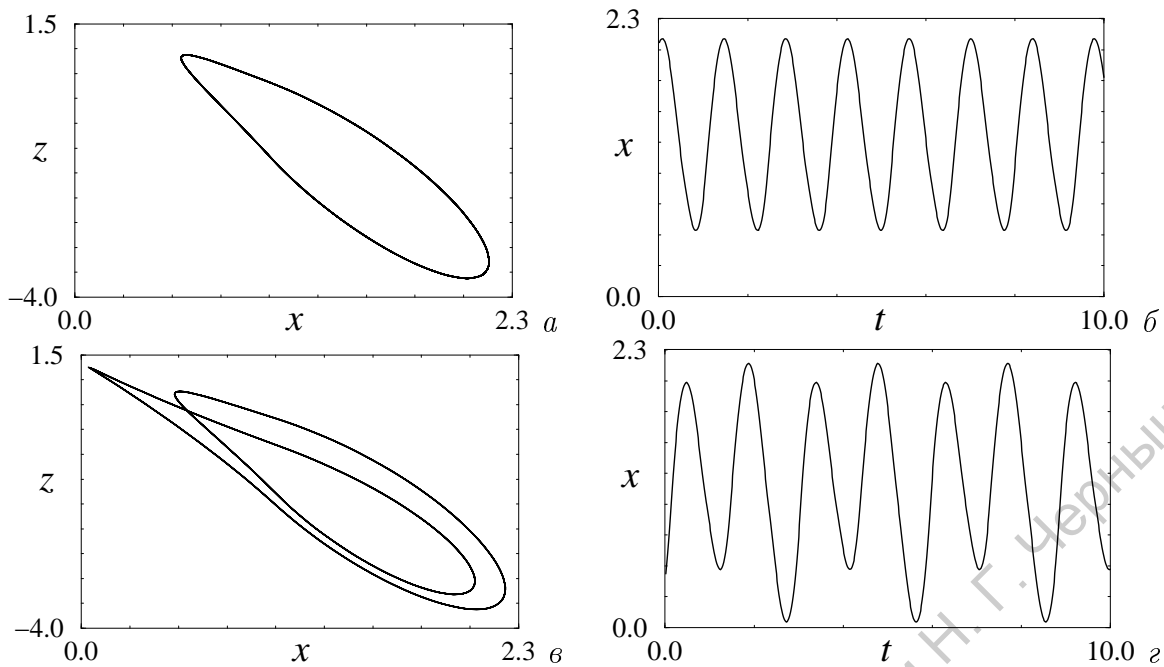


Рис. 5.6: Периодические колебания с периодом T_0 (а, б) и периодом $2T_0$ (в, г) в динамике генератора Чуа.

Эволюция спектра колебаний при каскаде бифуркаций удвоения

Изменения режимов автоколебаний, которые происходят при последовательных удвоениях периода, можно легко зафиксировать в ходе спектрального анализа, позволяющего охарактеризовать частотный состав исследуемого процесса. Математической основой данного анализа является преобразование Фурье. При этом, эволюция периодических режимов отображается в виде обогащения спектра субгармониками основного тона колебаний. В результате научных исследований структуры и путей возникновения динамического хаоса было показано, что обсуждавшимся выше свойствам масштабной инвариантности и скейлинга периодических режимов соответствует вполне определенный набор частот и амплитуд субгармоник в спектре мощности. А именно, каждой очередной бифуркации удвоения соответствует появление субгармоники на частоте, соответствующей удвоенному периоду потерявшего устойчивость предельного цикла. По мере удаления от точки бифуркации удвоения, амплитуда субгармоники растет. При этом, к моменту каждой последующей бифуркации удвоения, амплитуда каждой последующей субгармоники на 13 дБ меньше, чем предыдущей. Моменту возникновения неперiodических колебаний теоретически соответствует линейчатый спектр с бесконечным количеством спектральных составляющих, расположенных на бесконечно малом расстоянии.

5.2 Теория метода

Как известно, любой периодический сигнал $x(t)$, т.е. сигнал, для которого выполняется равенство $x(t + T_0) = x(t)$, где T_0 - период, можно разложить в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = 2\pi/T_0$ - базовая частота в спектре, $C_k(k\omega_0)$ называют спектральной амплитудой, или просто спектром периодического сигнала $x(t)$. Спектр любого периодического процесса является дискретным и эквидистантным, так как коэффициенты C_k определены только на базовой частоте ω_0 и на частотах, кратных базовой частоте: $k\omega_0, k = 1, 2, 3, \dots$

Если $x(t)$ - непериодический сигнал (реализация некоторого случайного или детерминированного процесса $X(t)$), то он может быть представлен интегралом Фурье. Прямое преобразование Фурье непериодического процесса имеет вид:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt,$$

где $F(f)$ называют спектральной функцией. Переменная t , как правило, измеряется в секундах, а f - в герцах. Иногда рассматривают спектральную функцию $F(\omega)$, где $\omega = 2\pi f$.

Преобразование Фурье существует, если выполняется условие абсолютной интегрируемости функции $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty.$$

В этом случае можно записать обратное преобразование Фурье:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{j2\pi ft} df.$$

Отметим одно очень важное обстоятельство. Для реализаций стационарных случайных процессов преобразование Фурье не существует, поскольку не выполняется условие абсолютной интегрируемости. (*А это условие не будет выполняться для любой отличной от нуля реализации стационарного случайного процесса!*) Невыполнение условия абсолютной интегрируемости на практике означает, что оценка спектральной функции приведет к большим ошибкам. Поэтому для анализа особенностей случайного процесса $X(t)$ в частотной области пользуются другой характеристикой - *функцией спектральной плотности мощности* или *спектром мощности* $S(f)$.

Отличие $F(f)$ и $S(f)$ в том, что $F(f)$ определяет амплитудный спектр, а $S(f)$ – энергетический спектр. Для того, чтобы дать определение функции $S(f)$, рассмотрим не всю бесконечно длинную реализацию $x(t)$, а ее фрагмент длительности T , то есть функцию:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

Она соответствует тому, что из бесконечного во времени процесса “вырезается” некоторая часть. Функция $x_T(t)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, и для нее можно записать преобразование Фурье:

$$F_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

$$x_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_T(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Спектральная функция $F_T(f)$ характеризует спектральные свойства конечного отрезка конкретной реализации случайного процесса. Чтобы охарактеризовать исходный случайный процесс $X(t)$, необходимо перейти к пределу $T \rightarrow \infty$. Этот предельный переход для функции $F_T(f)$ осуществить нельзя, поскольку преобразование Фурье не определено в этом пределе (из-за невыполнения условия абсолютной интегрируемости для функции $x(t)$). Оказывается, что переход к пределу $T \rightarrow \infty$ возможен, если рассмотреть величину $|F_T(f)|^2 / T$ вместо $F_T(f)$.

Целью анализа структуры сигналов является определение характеристик процесса, которому принадлежит сигнал. Это означает, что та или иная характеристика должна отражать свойства не отдельно взятой реализации, а всего статистического ансамбля реализаций случайного процесса (пусть даже гипотетического). Поэтому определение любой характеристики должно включать операцию вычисления средних по ансамблю значений (и лишь для эргодических процессов мы можем заменять усреднение по ансамблю усреднением по времени).

Функция спектральной плотности (или спектр мощности) случайного процесса $X(t)$ определяется следующим образом:

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{|F_T(f)|^2}}{T},$$

где черта сверху означает процедуру усреднения по ансамблю реализаций. Таким образом, спектр мощности представляет собой среднее значение от квадрата модуля преобразования Фурье усеченной реализации.

На практике, вычисление спектра мощности проводят по одной реализации, заменяя усреднение по ансамблю усреднением по различным участкам

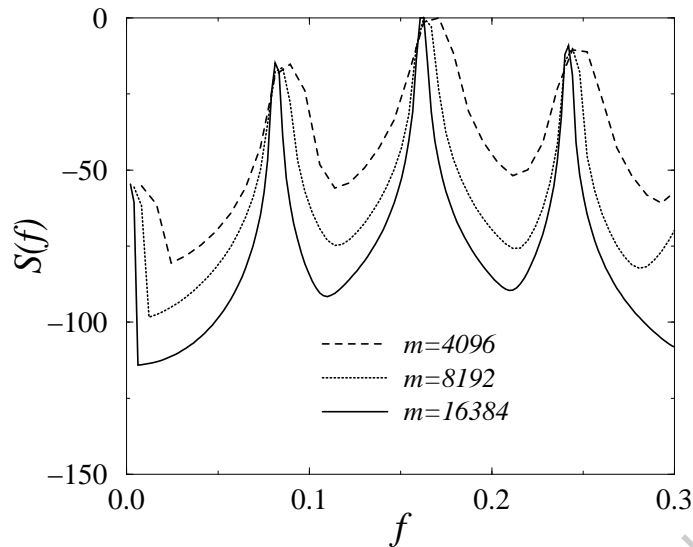


Рис. 5.7: Спектральное разрешение зависит от длины периодограммы m .

реализации (метод периодограмм)¹. Иными словами, временной ряд разбивается на участки (неперекрывающиеся либо перекрывающиеся), для каждого из них вычисляется квадрат Фурье преобразования, затем результаты усредняются. Для получения достаточно гладких функций $S(f)$ обычно рассматривают хотя бы 8-10 периодограмм.

Заметим, что расчет спектра мощности на практике подразумевает поиск компромисса между длиной периодограммы (чем она больше, тем лучше спектральное разрешение) и числом сегментов (с увеличением количества периодограмм спектр становится более гладким из-за лучшего усреднения – это особенно важно для зашумленных данных). Таким образом, чтобы качественно посчитать спектр мощности, целесообразно сопоставить результаты при различных параметрах счета и выбрать оптимальный (см., например, рис. 5.7).

Спектр периодических колебаний (см. рис. 5.8, *a*) содержит основную или базовую частоту $\omega_0 = 2\pi/T_0$ и ее гармоники $k\omega_0$. Бифуркация удвоения периода сопровождается появлением субгармоник половинной частоты $n\omega_0/2$ (рис. 5.8, *b*); их амплитуды растут при удалении от точки бифуркации и достигают насыщения к моменту следующей бифуркации удвоения. Учетверение периода сопровождается появлением спектральных компонент $n\omega_0/4$ (рис. 5.8, *в*), и аналогичная картина повторяется при последующих бифуркациях.

В качестве примера на рис. 5.9 изображены изменения, которые происходят в процессе перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода в генераторе с инерционной нелинейностью (генераторе Анищенко-Астахова). Хаотический аттрактор, возникающий на базе кас-

¹Естественно, при этом мы имеем дело не с непрерывной функцией времени $x(t)$, а с временным рядом $x(i)$, и все интегралы в ранее записанных формулах заменяются суммами.

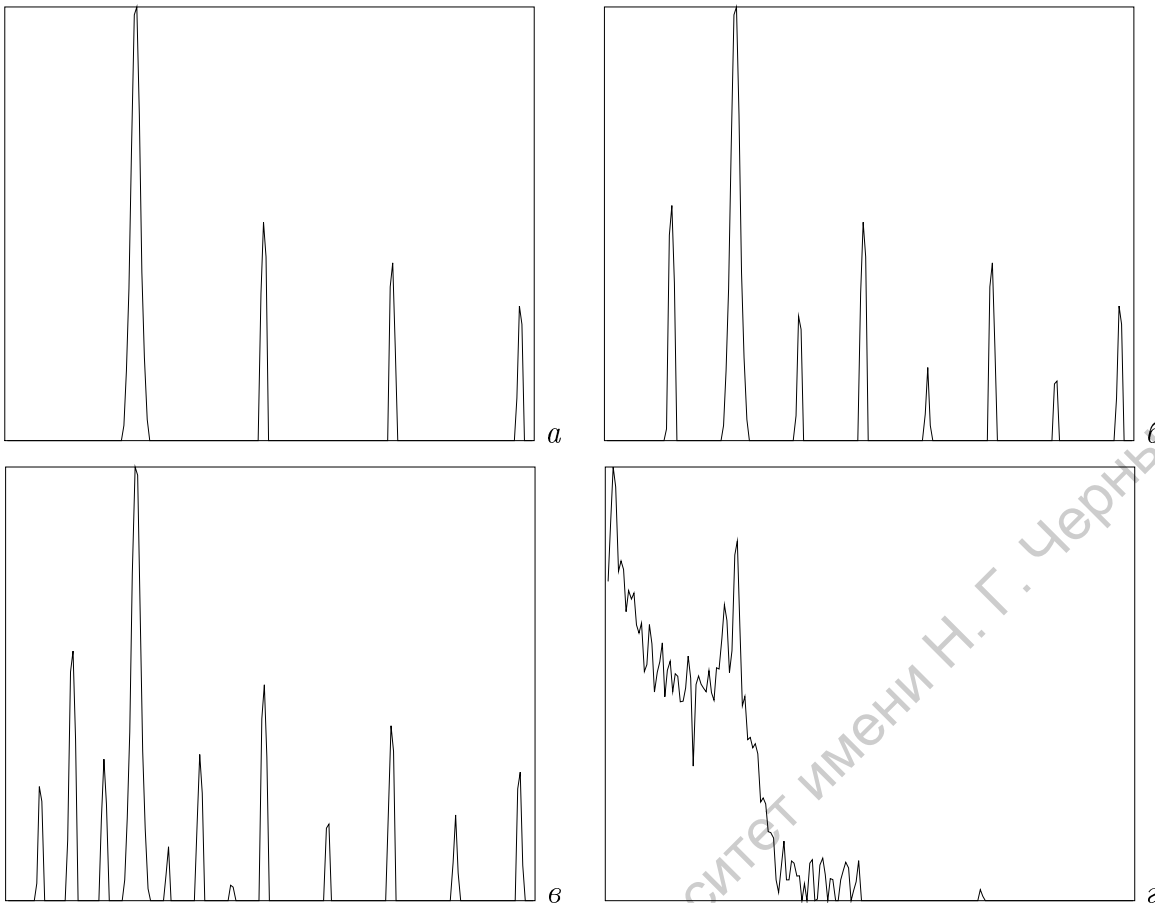


Рис. 5.8: Спектры мощности периодических колебаний: a – периода T_0 , $б$ – $2T_0$, $в$ – $4T_0$ и $г$ – спектр мощности хаотических колебаний.

када удвоений, наследует характерные черты механизма перехода к хаосу.

5.3 Численный алгоритм

Дискретное преобразование Фурье может быть записано в следующей форме:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (5.27)$$

Для вычисления спектров мощности временных реализаций в программном комплексе ANONS применяется схема быстрого преобразования Фурье. Алгоритм быстрого преобразования Фурье — это оптимизированный по скорости способ вычисления дискретного преобразования Фурье. Основная идея заключается в двух пунктах:

1. Необходимо разделить сумму (5.27) из N слагаемых на две суммы по $N/2$ слагаемых и вычислить их по отдельности. Для вычисления каждой из подсумм надо их тоже разделить на две и т.д.

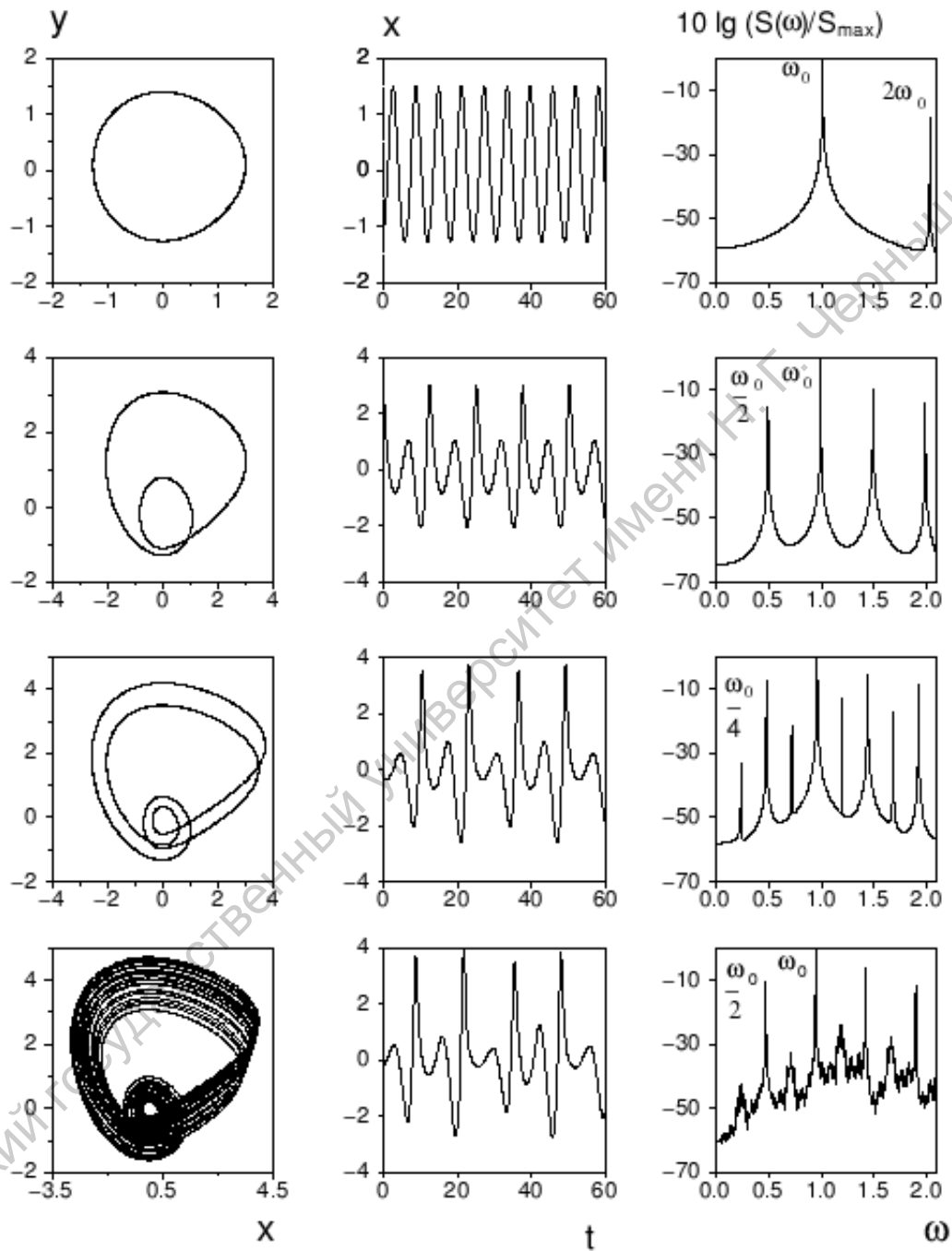


Рис. 5.9: Переход к хаосу через субгармонический каскад в генераторе с инерционной нелинейностью: проекции фазовых траекторий, временные зависимости одной из координат состояния и соответствующие спектры мощности для циклов T_0 , $2T_0$, $4T_0$ и хаотического аттрактора.

2. Необходимо повторно использовать уже вычисленные слагаемые.

В силу специфики алгоритма приходится применять только N , являющиеся степенями 2.

Определим две последовательности: $\{x_{[even]}\}$ и $\{x_{[odd]}\}$ через последовательность $\{x\}$ следующим образом:

$$x_{[even]n} = x_{2n}, \quad x_{[odd]n} = x_{2n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (5.28)$$

Пусть к этим последовательностям применены дискретные преобразования Фурье и получены результаты в виде двух новых последовательностей $\{X_{[even]}\}$ и $\{X_{[odd]}\}$ по $N/2$ элементов в каждой. Тогда элементы последовательности $\{X\}$ можно выразить через элементы последовательностей $\{X_{[even]}\}$ и $\{X_{[odd]}\}$ по формуле

$$\begin{aligned} X_k &= X_{[even]k} + W_N^k X_{[odd]k}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ X_k &= X_{[even]k - \frac{N}{2}} - W_N^{k - \frac{N}{2}} X_{[odd]k - \frac{N}{2}}, \quad k = \frac{N}{2}, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где

$$W_N^k = e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \quad (5.30)$$

называется поворачивающим множителем.

Формула (5.29) позволяет сократить число умножений вдвое (не считая умножений при вычислении $X_{[even]k}$ и $X_{[odd]k}$) если вычислять X_k не последовательно от 0 до $N - 1$, а попарно: X_k и $X_{\frac{N}{2}+k}$ по формулам:

$$\begin{aligned} X_k &= X_{[even]k} + W_N^k X_{[odd]k}, \\ X_{\frac{N}{2}+k} &= X_{[even]k} - W_N^k X_{[odd]k}, \\ k &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Пусть имеется $N = 2^T$ элементов последовательности $\{x\}$ и надо получить последовательность $\{X\}$. Прежде всего, нам придется разделить $\{x\}$ на две последовательности: элементы с четными и нечетными номерами. Затем точно так же поступить с каждой из полученных последовательностей. Этот итерационный процесс закончится, когда останутся последовательности длиной по 2 элемента. Пример для $N = 16$ изображен на рис. 5.10. После такой сортировки, пользуясь формулами (5.31), строится Фурье-образ исходной последовательности в соответствии со схемой, изображенной на рис. 5.10.

Для получения спектра мощности производится нормировка последовательности $X_{\{N\}}$.

5.4 Практическая часть

Упражнение 1

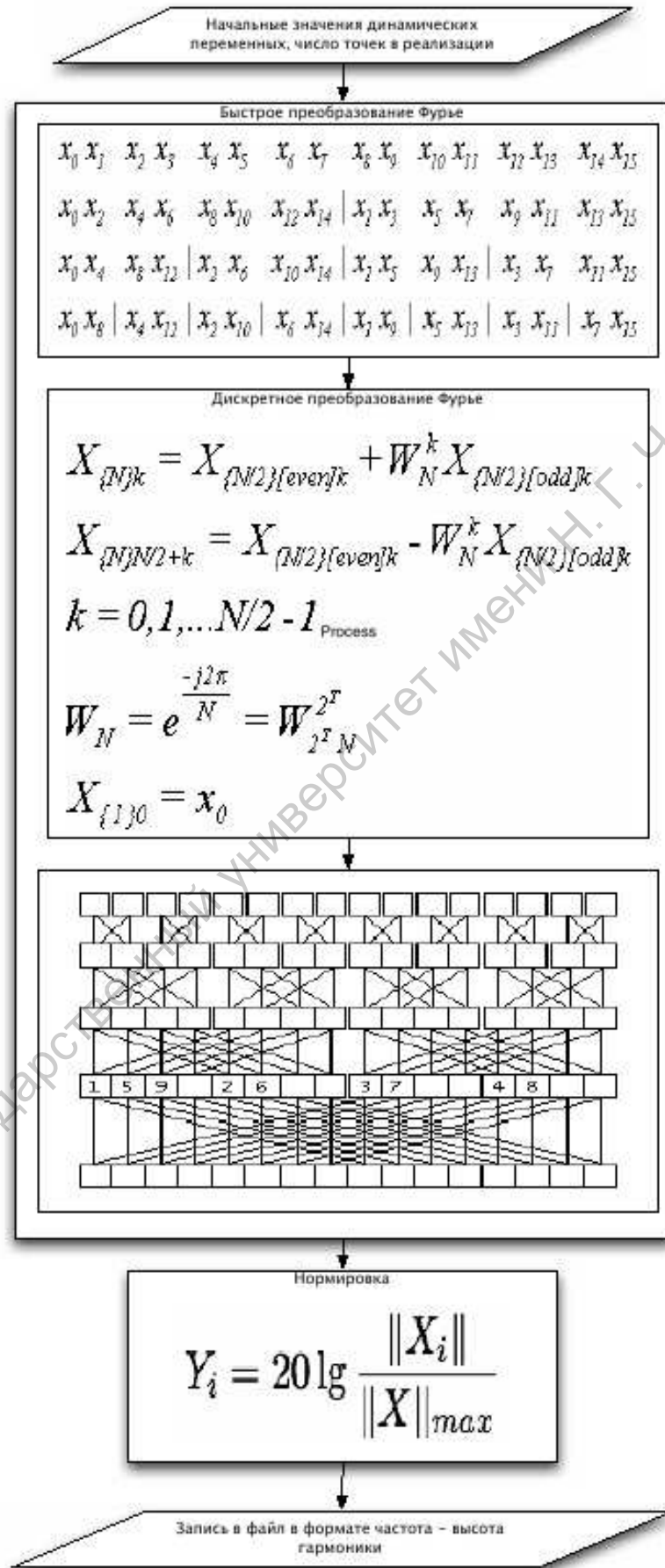


Рис. 5.10: Структурная схема процесса построения спектра мощности методом быстрого преобразования Фурье

Запустите программный комплекс ANONS с моделью **gen_aa**, **rossler** или **lorenz** (по указанию преподавателя) из каталога **models**. Изменяя управляющие параметры модели, найдите их интервал, соответствующий переходу от режима квазигармонических колебаний, через длиннопериодические циклы (каскад бифуркаций удвоения периода) к детерминированному хаосу. Определите базовую частоту (основной тон) колебаний и в дальнейшем сконцентрируйтесь на исследовании области частот от нуля до базовой частоты. В найденном ранее интервале изменения параметра, исследуйте эволюцию структуры спектра мощности, отслеживая изменения в частотном составе субгармоник основного тона колебания и их амплитуды.

Упражнение 2

В продолжение задания Упражнения 1, исследуйте характер эволюции спектра мощности в области возникновения и развития хаотического аттрактора, до превращения его в одноленточный.

Контрольные вопросы

- 1) Почему последовательность бифуркаций удвоения периода называется субгармоническим каскадом?
- 2) Как определить границы области устойчивости неподвижной точки периода 1 для логистического отображения?
- 3) В чем состоит универсальность сценария Фейгенбаума?
- 4) Как предсказать последующие бифуркации удвоения периода, зная значения параметра, при которых происходили предыдущие бифуркации?
- 5) Каким образом можно судить о бифуркациях удвоения периода по спектру мощности?
- 6) Что такое процедура ренормализации?
- 7) Почему для анализа случайных процессов используется спектр мощности, а не амплитудный спектр?
- 8) Как вычисляется функция спектральной плотности?
- 9) Из каких соображений выбираются длина периодограммы и число сегментов?

6 Диагностика режима динамического хаоса с помощью ляпуновских показателей

6.1 Предварительные замечания

Для режима динамического хаоса характерно наличие чувствительности системы к выбору начальных условий и экспоненциальной неустойчивости траекторий. Количественной мерой этих свойств является набор величин, которые называются *ляпуновскими характеристическими показателями*. Попробуем оценивать устойчивость к слабому возмущению произвольной, выбранной нами траектории $\mathbf{x}^0(t)$. Для этого в момент времени $t_0 = 0$ введем возмущение σ^0 , перейдя тем самым на некую траекторию $\mathbf{x}(t)$. Наблюдая затем за поведением во времени разности $\sigma(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0(t)$, можно сделать вывод об устойчивости (если $\sigma(t)$ не нарастает) или о неустойчивости опорной траектории $\mathbf{x}^0(t)$. Интересуясь малой окрестностью $\mathbf{x}^0(t)$, имеют дело с линеаризацией исходной динамической системы. В этом случае затухание (либо нарастание) возмущения носит экспоненциальный характер. По этой причине имеет смысл сравнивать изменение возмущения с экспоненциальной функцией.

Наконец, представляя исходную динамическую систему в векторной форме (3.2) и записывая уравнение в вариациях, можно рассматривать устойчивость траектории в проекциях на собственные вектора:

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}. \quad (6.1)$$

Здесь $A(t)$ – квадратная матрица (типа (3.10)) с элементами

$$a_{i,j}(t) = \left. \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) \right|_{x_i=x_i^0(t)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.1) имеет фундаментальную матрицу решений, составленную из N линейно независимых решений $\mathbf{y}^i(t)$, соответствующих различным собственным векторам.

Определение

Ляпуновскими характеристическими показателями называется совокупность n величин

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \ln \| \mathbf{y}^i(t) \| \right), \quad i = \dots n, \quad (6.3)$$

где черта сверху означает верхний предел, а $\| \cdot \|$ – норма.

Спектром ляпуновских характеристических показателей (спектром ЛХП) называется упорядоченная по убыванию совокупность величин $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_n$. Наибольший по модулю показатель называют старшим. Таких показателей может быть несколько.

Сигнатура спектра ЛХП n -мерной системы есть упорядоченная последовательность символов, отражающая последовательность знаков показателей спектра ЛХП. При этом нулевому значению показателя отвечает символ "0".

В определенном смысле, понятие ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) реализует наиболее общий подход к вопросу об устойчивости движения, а именно, они показывают, как ведет себя возмущение произвольной фазовой траектории. Затуханию во времени возмущения по какому-либо из направлений (собственных векторов системы) соответствует отрицательность соответствующего показателя $\lambda_i < 0$. Число положительных экспонент в спектре ЛХП определяется количеством неустойчивых направлений периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор. В рамках данной лабораторной работы мы в основном будем вести речь о динамических системах с одним положительным показателем Ляпунова λ_1 .

При вычислении λ_1 делается предположение о «типичности» фазовой траектории, являющейся решением ДС при выбранных начальных условиях. В противном случае величина показателя, определенная на интервале времени T , может отличаться от предельного значения λ_1 , соответствующего $T \rightarrow \infty$. В частности, известны случаи, когда дискретные модели демонстрируют очень длительные переходные процессы (до 1500000 итераций динамика является «хаотической», после чего сменяется регулярной). С точки зрения вычисления ляпуновского показателя это соответствует тому, что величина λ_1 в течение переходного процесса сходится к некоторому положительному значению и только на очень длительных временах спадает до нуля. Чтобы охарактеризовать поведение типичной фазовой траектории, иногда используют понятие «ляпуновских показателей на конечном времени» (*finite time Lyapunov exponents*), которые характеризуют скорость

разбегания или сжатия по различным направлениям в течение конечного временного интервала T .

Любая потоковая ДС, если ее решение отлично от состояния равновесия, имеет по крайней мере один нулевой показатель, характеризующий практически не меняющуюся величину оси эллипсоида, касательной к потоку. Оси, размер которых будет увеличиваться (уменьшаться), соответствуют положительным (отрицательным) показателям. Сигнатуры спектра ЛХП различных аттракторов в трехмерных системах представлены в таблице 6.1.

тип аттрактора	знаки ляпуновских показателей
неподвижная точка	$(-, -, -)$
предельный цикл	$(0, -, -)$
двумерный тор	$(0, 0, -)$
странный аттрактор	$(+, 0, -)$

Таблица 6.1. Знаки показателей Ляпунова различных аттракторов.

Изучая динамику систем при изменении управляющих параметров по величине старшего показателя можно судить о переходе от периодических режимов колебаний к хаотическим, о существовании “окон периодичности” внутри области динамического хаоса и т.д. Типичная иллюстрация зависимости λ_1 от управляющего параметра динамической системы изображена на рис. 6.1.

Спектр ЛХП позволяет диагностировать многочастотные колебания, образом которых является n -мерный тор (n первых показателей в этом случае будут равны нулю) и режимы гиперхаотических колебаний, для которых характерно наличие нескольких положительных показателей Ляпунова.

Иногда ляпуновские показатели анализируют в терминах информации, в частности, как скорость потери информации о начальном состоянии. В этих случаях их определяют в таких единицах, как бит/сек (количество бит информации в секунду), бит/период (для потоковых систем) или бит/итерация (для систем с дискретным временем). Соответственно вычисляют скорость разбегания соседних траекторий не по закону $e^{\lambda_1 t}$, а по закону $2^{\lambda_1 t}$. Например, если старший показатель Ляпунова хаотического аттрактора Лоренца равен 2.16 бит в единицу времени, а начальные условия определены с точностью до одной миллионной части (≈ 20 бит), то дальнейшее поведение не может быть предсказано спустя 9 единиц безразмерного времени ($20/2.16$), что соответствует примерно 20 оборотам вокруг одного из состояний равновесия. Спустя это время малая начальная неопределенность будет покрывать весь аттрактор, и фазовая точка может оказаться где угодно.

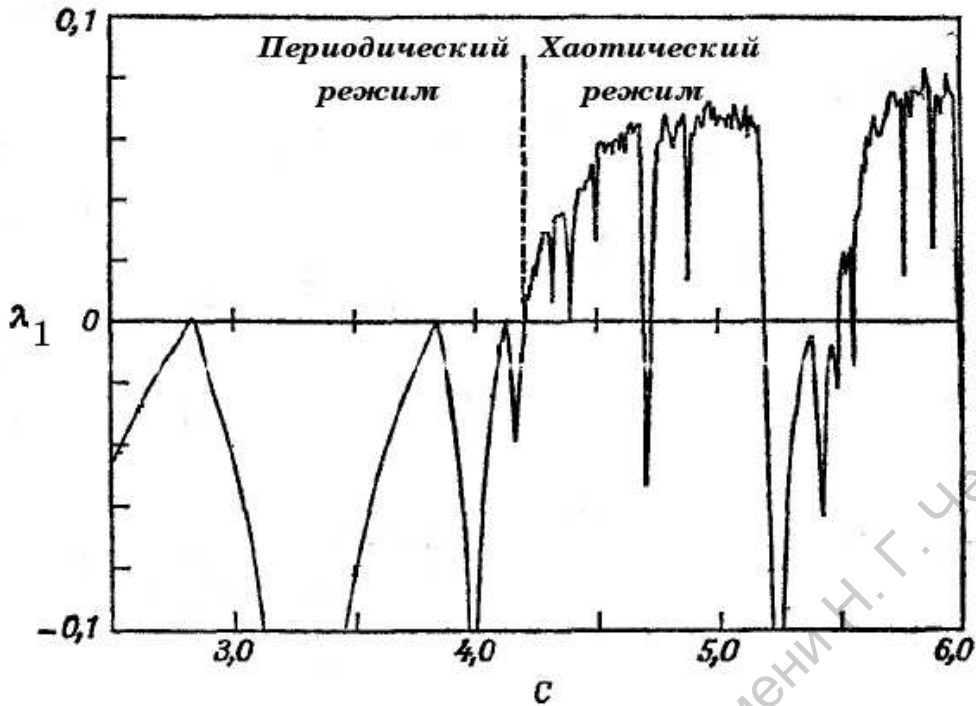


Рис. 6.1: Зависимость старшего показателя Ляпунова от управляющего параметра системы Ресслера.

Спектр ЛХП позволяет вычислять ляпуновскую размерность хаотического аттрактора D , которая на практике часто оказывается близкой к информационной размерности

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|},$$

где j определяется условием:

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0.$$

Таким образом, вычисление размерности D требует знания не только положительных, но и отрицательных ляпуновских показателей.

6.2 Теория метода

Если уравнения ДС, генерирующие фазовую траекторию, известны, то определить величину максимального показателя (или полный спектр ЛХП) можно с помощью стандартного алгоритма расчета ляпуновских экспонент, предложенного независимо в работе Бенеттина с соавторами, а также в

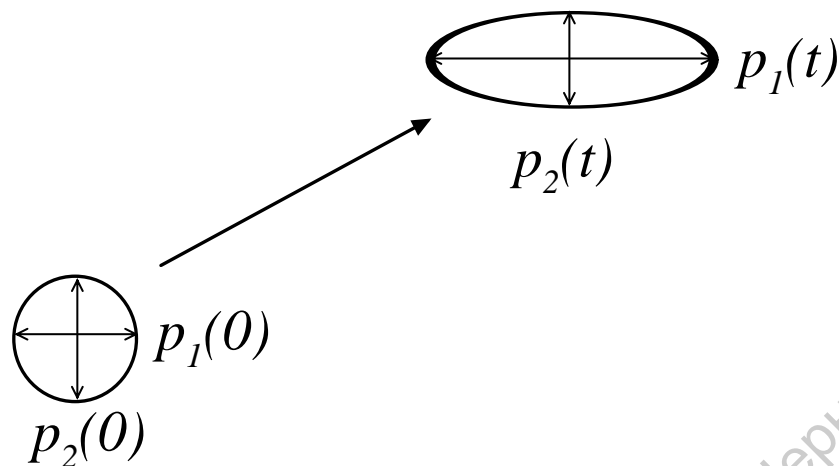


Рис. 6.2: Эволюция по времени бесконечно малой n -мерной сферы начальных условий.

работе Шимады и Нагашимы. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\mu}), \quad \vec{x} \in R^n, \vec{\mu} \in R^m, \quad (6.4)$$

в которой \vec{x} – вектор состояния, \vec{f} – нелинейная вектор-функция, $\vec{\mu}$ – вектор управляющих параметров.

Чтобы охарактеризовать устойчивость ее решения, анализируется временная эволюция бесконечно малой n -мерной сферы начальных условий; с течением времени эта сфера преобразуется в эллипсоид (рис. 6.2).

Если говорить о спектре ЛХП, то i -й показатель Ляпунова может быть определен в терминах длин осей эллипсоида $p_i(t)$:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)},$$

где λ_i упорядочены от наибольшего к наименьшему. Таким образом, показатели Ляпунова определяются расширением либо сжатием сферы по различным направлениям в фазовом пространстве. Поскольку ориентация эллипсоида непрерывно меняется во времени, меняются и направления, ассоциирующиеся с тем или иным показателем. Поэтому нельзя говорить о каком-то одном направлении для каждой ляпуновской экспоненты.

Отметим, что если задается только одно возмущение (это значит, что мы следим лишь за главной осью эллипсоида), то оно будет в линейном приближении увеличиваться по закону $e^{\lambda_1 t}$. Для двух независимых возмущений площадь эллипса меняется по закону $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$; для трех – эволюция объема описывается законом $e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$ и т.д. Данное свойство приводит к несколько иному определению спектра ляпуновских экспонент: сумма

первых j показателей определяется скоростью экспоненциального роста j -мерного элемента объема. Такая интерпретация обеспечивает основу для алгоритма вычисления спектра ЛХП.

Важно обратить внимание на то обстоятельство, что ляпуновские показатели являются характеристиками *линейного приближения!* Если на практике задать n -мерную сферу начальных условий для ДС вида (6.4), то в пределе $t \rightarrow \infty$ она достигнет размера аттрактора, превысить который длины осей $p_i(t)$ просто не могут. Более того, еще на этапе приближения к размерам аттрактора сказываются нелинейности, и разбегание траекторий перестает быть экспоненциальным. Чтобы корректно оценивать спектр ЛХП, необходимо оставаться в рамках линеаризованных уравнений и рассматривать совместно эволюцию исходной системы (6.4) и уравнения в вариациях (т.е. линеаризованную систему). С другой стороны, нам необходимо получить усредненные характеристики вдоль фазовой траектории, то есть обеспечить возможность многократного посещения самых разных участков аттрактора.

Рассмотрим вначале самый простой случай – расчет только старшего показателя Ляпунова (в этом случае алгоритм существенно упрощается). Искомая величина λ_1 будет определять эволюцию во времени вектора возмущения

$$r(t) = r_0 e^{\lambda_1 t},$$

где r_0 – величина начального возмущения (в момент времени $t_0 = 0$), $r_0 = |\vec{x}(t_0) - \vec{x}_p(t_0)|$, \vec{x}_p – частное решение системы (6.4), устойчивость которого требуется исследовать. Данная формула является очень приближенной, поскольку скорость разбегания траекторий не является постоянной, а зависит от выбора точки на аттракторе.

Строго говоря, ляпуновские показатели определяют путем решения уравнений в вариациях, рассматривая бесконечно малые возмущения. Однако экспоненциальный закон разбегания траекторий справедлив не только для бесконечно малых возмущений, но также и для малых возмущений конечной величины, поэтому последняя формула вполне может быть использована при практическом анализе локальной неустойчивости (рис. 6.3). В данном случае мы рассматриваем наглядную иллюстрацию процедуры расчета λ_1 .

Ценность рассматриваемого подхода состоит в том, что он дает основу для алгоритма расчета показателей Ляпунова по экспериментальным данным, когда неизвестны уравнения ДС и, следовательно, нельзя ввести в рассмотрение уравнения в вариациях. Поскольку большие значения $r(t)$ принимать не может (в противном случае не будет выполняться условие линейного приближения), при расчете старшего ЛХП проводят перенормировки, в ходе которых задаются новые возмущения – малые по величине, но выбранные в направлении, которое соответствует вектору возмущения

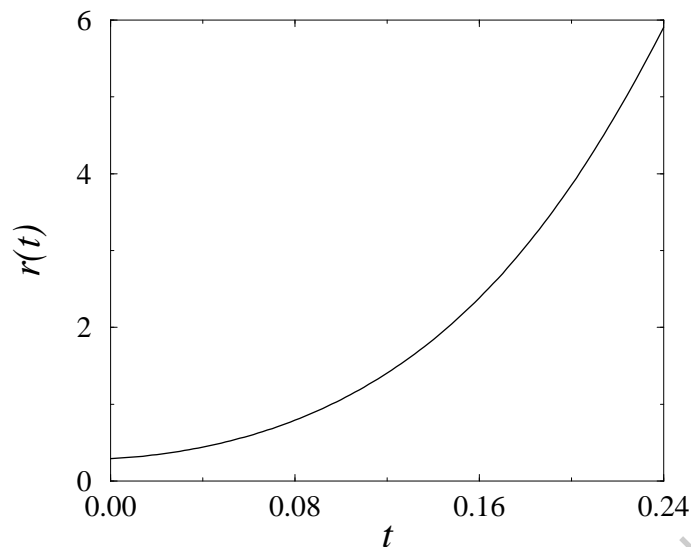


Рис. 6.3: Пример экспоненциального разбегания близких в начальный момент траекторий для аттрактора в системе Лоренца.

непосредственно перед перенормировкой. Затем вновь оценивают скорость экспоненциального разбегания близлежащих траекторий. В результате вычисляется усредненная вдоль фазовой траектории $\vec{x}_p(t)$ количественная характеристика степени хаотичности. Схематично процедура перенормировки вектора изображена на рис. 6.4. При таком подходе важным моментом является выбор границ линейного приближения – если их задать неправильно, расчеты будут произведены со значительной погрешностью. Метод, основанный на совместном анализе системы (6.4) и линеаризованных уравнений, лишен этого недостатка. Рассмотрим его детали на конкретном примере.

Алгоритм расчета полного спектра ЛХП легче проиллюстрировать на системе с дискретным временем. Выберем для иллюстрации отображение Хенона

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Наряду с итерированием отображения (6.5), необходимо анализировать динамику во времени линеаризованной системы

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = J_n \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

где элементы матрицы Якоби J определяются как частные производные правых частей уравнений по различным координатам вектора состояния, в данном случае, x_n и y_n :

$$J_n = \begin{bmatrix} 2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

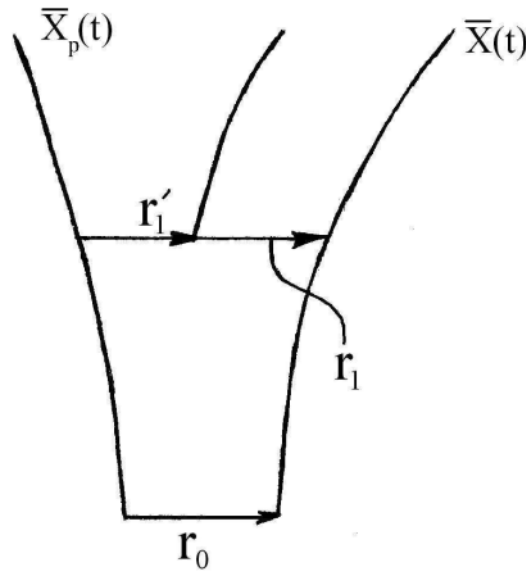


Рис. 6.4: Процедура перенормировок при расчете ЛХП по заданной системе уравнений. В данном случае r_1 – вектор возмущения до перенормировки, r_1' – после.

Задавая набор из двух ортонормированных векторов, например, $(0,1)$ и $(1,0)$, и умножая матрицу Якоби J на каждый вектор, можно изучать эволюцию во времени двух независимых возмущений, формируемых этими векторами. Отметим, что в случае дискретного отображения можно выбрать начальные условия (x_0, y_0) и для вектора возмущения $(0,1)$ переписать (6.6) в виде

$$\begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix} = J_{n-1} \left(J_{n-2} \cdots J_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (6.7)$$

или

$$\begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix} = [J_{n-1} J_{n-2} \cdots J_1] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В формуле (6.7) последняя матрица Якоби умножается на текущий вектор, который представляет собой исходный вектор $(0,1)$, умноженный на все предыдущие матрицы Якоби.

При рассмотрении двух независимых возмущений $(0,1)$ и $(1,0)$, величина каждого из них будет увеличиваться при последующих итерациях, а угол между двумя векторами стремиться к нулю. Как следует из рис. 6.5, отличить поведение независимых векторов удастся лишь на протяжении нескольких первых итераций.

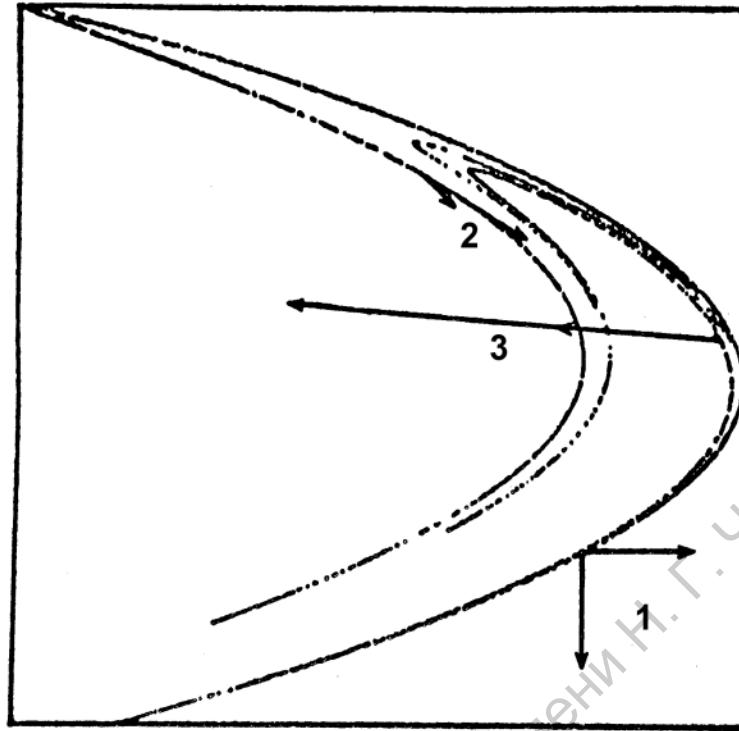


Рис. 6.5: Угол между двумя ортонормированными векторами (1) при последующих итерациях (2,3) стремится к нулю.

После каждой итерации необходимо проводить процедуру ортогонализации векторов. С этой целью традиционно используется подход, основанный на ортогонализации Грама-Шмидта. В общем случае n -мерной динамической системы эта процедура выглядит следующим образом. Предположим, что задана система ортонормированных векторов $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, которые характеризуют возмущения анализируемой фазовой траектории по различным направлениям. Все возмущения стремятся расти в направлении, соответствующем показателю λ_1 , и угол между векторами со временем стремится к нулю. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта позволяет задать новые направления для множества ортонормированных векторов $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$:

$$\begin{aligned}
 v'_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|}, \\
 v'_2 &= \frac{v_2 - \langle v_2, v'_1 \rangle v'_1}{\|v_2 - \langle v_2, v'_1 \rangle v'_1\|}, \\
 &\dots \\
 v'_n &= \frac{v_n - \langle v_n, v'_{n-1} \rangle v'_{n-1} - \dots - \langle v_n, v'_1 \rangle v'_1}{\|v_n - \langle v_n, v'_{n-1} \rangle v'_{n-1} - \dots - \langle v_n, v'_1 \rangle v'_1\|},
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

где скобками $\langle \cdot \rangle$ обозначена операция вычисления внешнего произведения. Процедура (6.8) не меняет направлением первого вектора, который

характеризует максимальное “разбегание” фазовых траекторий и ассоциируется с показателем λ_1 .

Второй вектор v'_2 выбирается ортогональным вектору v'_1 ; с помощью двух векторов v_1 и v_2 анализируется скорость изменения во времени площади параллелограмм, ими образуемого, которая пропорциональна величине $e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$. Рассмотрение последующих векторов v'_3, \dots, v'_n позволяет учитывать новые направления для малых отклонений от исследуемой фазовой траектории и ляпуновские показатели, которые ассоциируются с этими направлениями. Частота проведения ортогонализации не является критичной, если только угол между векторами возмущения до перенормировки не становится близок к нулю.

Для рассматриваемого частного случая (отображения Хенона), ляпуновские показатели вычисляются путем оценки скорости роста длины первого вектора (λ_1) и скорости изменения площади параллелограмма, формируемого двумя векторами ($\lambda_1 + \lambda_2$). Вычисляемые ляпуновские показатели не являются локальными характеристиками. Каждый показатель определяется в ходе усреднения, при рассмотрении длительного движения вдоль фазовой траектории. Попытки оценить показатель Ляпунова *локально* могут приводить к существенным отличиям от усредненных величин.

В случае динамических систем с непрерывным временем, моделируемых системой (6.4), процедура вычислений является сходной, но вместо итерирования необходимо интегрировать как исходную динамическую систему, так и линеаризованную систему уравнений. Чтобы определить полный спектр ЛХП, задаются n независимых векторов. В отличие от дискретных отображений, для которых процедура ортогонализации Грама-Шмидта проводится на каждой итерации, для потоковых систем осуществляется интегрирование в течение некоторого заданного времени (например, характерного периода колебаний), и лишь после этого проводится ортогонализация.

6.3 Численный алгоритм

Вычисление спектра ЛХП производится в соответствии с процедурой, описанной в предыдущем разделе. Укрупненная структурная схема на рисунке 6.6 иллюстрирует логику построения программы. Как уже отмечалось, наряду с интегрированием самой N -мерной системы необходимо интегрировать N линеаризованных уравнений, по одному для каждого из направлений векторов возмущения $U_k(t)$, изначально формирующих ортонормированный базис. Это делается в течение времени, заданного параметром «Time between reortonormalizations» процесса PNC при работе в комплексе ANONS.

Следующим этапом вычисляются объемы V_k , $k = 1 \dots N$, k -мерных па-



Выход (передача управления подпрограммам визуализации)

Рис. 6.6: Структурная схема сегмента программы, реализующей расчет спектра ляпуновских характеристических показателей.

раллелепипедов, которые формируются векторами $U_r(t)$.

Далее, вычисляются текущие значения k -мерных показателей Ляпунова по формуле

$$\lambda^{(k)} = \frac{1}{\tau} \ln \left\{ \frac{V_k(t_0 + j\tau)}{V_k(t_0 + (j-1)\tau)} \right\}$$

и проводится процедура ортогонализации Грама-Шмидта для векторов $U_k(t)$.

Вычисления заканчиваются после повторения описанной выше процедуры столько раз, сколько определено параметром «Calculation steps» процесса PNC, при этом параметр «Transient steps» задает количество повторений этой процедуры перед началом собственно вычислений (результаты будут отброшены как соответствующие периоду установления).

Полученный в результате спектр ляпуновских характеристических показателей ранжируется по убыванию, выводится как результат вычислений используется для расчета ляпуновской размерности.

Расчет ляпуновской размерности имеет свои технические особенности. Поскольку на практике теоретически нулевому значению показателя ЛХП всегда соответствует малое, но конечное значение, то для получения осмысленных результатов необходимо задать дополнительное правило, согласно которому значение показателя, модуль которого менее некоторого порогового значения, объявляется равным нулю. При работе в комплексе ANONS такое пороговое значение задается параметром «Zero level for LCEs» процесса PNC.

6.4 Практическая часть

Упражнение 1

Запустите программный комплекс ANONS с моделью `van_der_pol` из каталога `models`. Задайте значения переменных и параметров из файла состояния `task_LCE_1.st`. Установите значения управляющих параметров в области автоколебаний, так, чтобы на фазовом портрете наблюдался бы предельный цикл. С помощью окон временных реализаций оцените период колебаний. Запустив окно процесса PNC, произведите расчет спектра ляпуновских показателей при различных значениях параметров численной схемы, добиваясь максимальной близости к нулю старшего из показателей. Изменяйте величину возмущения, время между перенормировками векторов, а также шагов переходного процесса и вычислений. Постройте графики зависимости старшего ляпуновского показателя при изменении указанных параметров. Предложите объяснение полученным результатом, соотнесите оптимальные значения параметров с характеристиками колебаний в модельной системе.

Упражнение 2

Запустите программный комплекс **ANONS** с моделью **f_vdp** из каталога **models**. Задайте значения переменных и параметров из файла состояния **task_LCE_2.st**. Выберите два состояния системы, одно из которых соответствовало бы нерезонансному тору (точки в сечении Пуанкаре ложатся на инвариантную кривую), а другое – резонансу $N:1$ (N точек в сечении Пуанкаре). Предварительно оптимизировав значения параметров численной схемы, рассчитайте в каждом случае величину ляпуновской размерности.

Перезапустите программный комплекс **ANONS** с моделью **gen_aa**, **rossler** или **lorenz** (по указанию преподавателя) из каталога **models**. Изменяя управляющие параметры модели, подберите состояние системы, соответствующее переходу от режима периодических колебаний к детерминированному хаосу. Постройте график изменения ляпуновских показателей и ляпуновской размерности в зависимости от значения управляющего параметра. Предложите объяснение полученным результатам.

Контрольные вопросы

- 1) Какие знаки принимают показатели Ляпунова двумерного тора и странного аттрактора?
- 2) Что такое ляпуновская размерность?
- 3) Как вычислить старший показатель Ляпунова?
- 4) Для чего нужны перенормировки векторов возмущения?
- 5) В чем состоит процедура ортогонализации Грама-Шмидта?
- 6) Как вычислить второй показатель Ляпунова для отображения Хенона?

7 Анализ структуры хаотического аттрактора с помощью корреляционной размерности

7.1 Предварительные замечания

К настоящему времени разработаны различные методы, позволяющие проводить численное исследование сложных режимов колебаний. С этой целью может использоваться, например, спектральный анализ. Однако расчет спектров не дает возможности отличить хаотическую динамику в системах с малым числом степеней свободы от динамики многомерных систем. Визуально очень похожие спектры могут быть получены как для детерминированных хаотических колебаний, так и для случайных процессов. Определенные преимущества имеет исследование траекторий в фазовом пространстве с помощью сечений Пуанкаре. Но при этом удастся получать только качественную информацию, причем для наглядного представления о геометрии анализируемых объектов размерность фазового пространства не должна быть больше трех. Образом хаотического режима колебаний в фазовом пространстве является странный аттрактор – геометрически очень сложный объект. Особенности его геометрии можно количественно охарактеризовать с помощью *фрактальных размерностей*.

Существуют различные виды размерностей. *Размерность фазового пространства* (n) соответствует количеству переменных, определяющих состояние динамической системы (ДС). Если математическая модель ДС задана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\mu}), \quad \vec{x} \in R^n, \quad \vec{\mu} \in R^k, \quad (7.1)$$

то n определяется числом данных уравнений. Чтобы охарактеризовать некоторое множество S в пространстве R^n , можно воспользоваться *топологической размерностью* d_T . Она равна минимальному количеству переменных, которое необходимо указать, чтобы обозначить положение точки на множестве S . Величина d_T (также как и n) принимает только целые положительные значения. Если речь идет о линии, то $d_T = 1$; для поверхности $d_T = 2$ и т.д.

Другое определение размерности было предложено Хаусдорфом. Пусть S – некоторое множество в пространстве R^n . Предположим, что мы покрываем данное множество кубиками $\{B_i\}$ с величиной ребра, не превышающей некоторое значение ε . При этом каждая точка множества S должна обязательно попасть в тот или иной кубик. Тогда мера Хаусдорфа l_δ вводится следующим образом:

$$l_\delta(S) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{B_i \in K(\varepsilon)} |B_i|^\delta.$$

Здесь \inf – минимальное значение (нижняя грань) по всем возможным покрытиям $K(\varepsilon)$ множества S кубиками $\{B_i\}$; $|B_i|$ – величина ребра кубика ($|B_i| \leq \varepsilon$). Указанный предел зависит от параметра δ . Размерность Хаусдорфа d_H представляет собой такое значение δ , при котором величина $l_\delta(S)$ является конечной:

$$\begin{cases} \delta > d_H(S) \implies l_\delta(S) = 0 \\ \delta < d_H(S) \implies l_\delta(S) = +\infty. \end{cases}$$

Согласно данному определению, d_H может принимать нецелые значения. В общем случае, если размерность является нецелой, ее называют *фрактальной*. Соответственно, объекты, характеризующиеся нецелой размерностью, называют *фракталами*. Наличие нецелой размерности является типичной особенностью хаотических аттракторов.

Понятие размерности Хаусдорфа хорошо определено с точки зрения математики, но ее чрезвычайно сложно вычислить. Поэтому обычно используют более «практичные» определения фрактальных размерностей. Одним из таких «практичных» определений является *емкость* (или емкостная размерность D_0). Пусть S – некоторое множество в пространстве R^n , которое покрывается кубиками размера ε . Если обозначить через $N(\varepsilon)$ число кубиков, необходимых для покрытия всего множества, то емкость представляет собой предел следующего вида:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}. \quad (7.2)$$

По сути, эта величина характеризует, как меняется число элементов покрытия при изменении ε :

$$N \sim \varepsilon^{-D_0}.$$

Если в качестве S рассматривается единственная точка, то $N(\varepsilon) = 1$ и не зависит от ε :

$$N \sim \varepsilon^0 \implies D_0 = 0.$$

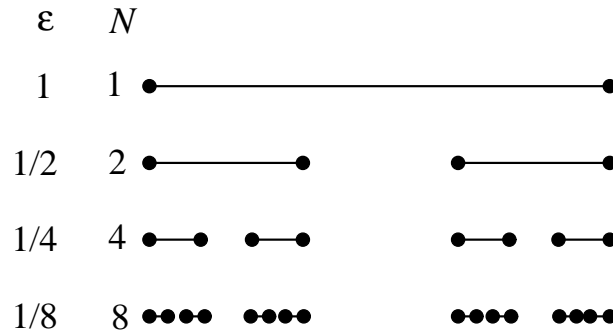


Рис. 7.1: Процедура построения канторова множества.

Если анализируется отрезок линии длины L , то

$$N(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon} \sim \varepsilon^{-1} \implies D_0 = 1.$$

Для поверхности площади P :

$$N(\varepsilon) = \frac{P}{\varepsilon^2} \sim \varepsilon^{-2} \implies D_0 = 2.$$

Во всех этих случаях емкость D_0 совпадает с топологической размерностью d_T и является целым числом. В качестве примера объекта с дробной размерностью D_0 (фрактального объекта) рассмотрим канторово множество. Процедура его построения состоит в следующем. Берется отрезок единичной длины $[0, 1]$, разбивается на 3 равные части, и средняя из них выбрасывается. В результате на первом шаге процедуры построения канторова множества мы получаем два отрезка $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ длиной $\varepsilon = 1/3$ (рис. 7.1). На следующем шаге каждый из этих отрезков вновь разбивается на 3 равные части, и опять выбрасывается средняя часть. Такая процедура продолжается со всеми оставшимися отрезками. Если для покрытия множества на некотором шаге k используются кубики с величиной ребра $\varepsilon = 1/3^k$, то необходимое количество кубиков составит $N(\varepsilon) = 2^k$. Таким образом:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63.$$

Если говорить о геометрии данного объекта, то канторово множество есть нечто большее, чем точка (для которой $D_0 = 0$), но нечто меньшее, чем интервал ($D_0 = 1$). Для канторова множества емкость совпадает с размерностью Хаусдорфа $D_0 = d_H$, но не совпадает с топологической размерностью ($d_T = 0$). В общем случае справедливо неравенство

$$d_T \leq d_H \leq D_0.$$

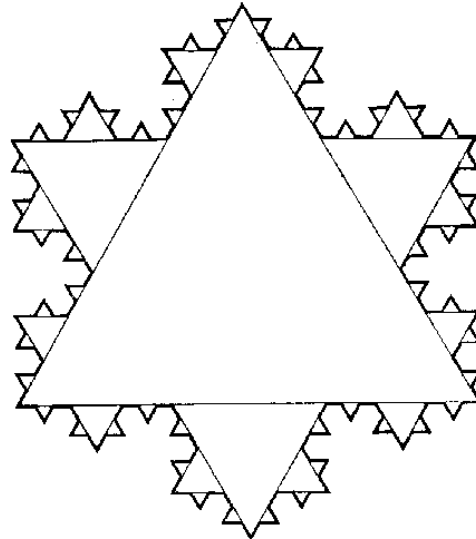


Рис. 7.2: «Снежинка».

Еще одним примером фрактала служит объект, называемый «снежинкой» (или кривой Кох). «Снежинка» имеет удивительное свойство: ее периметр является бесконечным, тогда как сама она занимает ограниченную площадь на плоскости. Процедура построения «снежинки» состоит в следующем. Рассматривается равносторонний треугольник, каждая сторона которого разбивается на 3 равные части, и к средней части «пририсовывается» равносторонний треугольник меньшего размера (рис. 7.2). Затем данная процедура повторяется с каждым отрезком полученной геометрической фигуры.

К сожалению, во многих случаях, представляющих практический интерес (например, если проводится анализ сложной геометрии объектов фазового пространства), вычислить емкость можно только численно, и при этом определение D_0 непосредственно по формуле (7.2) зачастую осложняется очень медленной сходимостью отношения $\ln N(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon)$ к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ (если речь идет о расчете емкости объекта в фазовом пространстве размерности $n > 2$). Кроме того, D_0 не зависит от вероятности посещения тех или иных областей фазового пространства, то есть не учитывает статистические свойства потока, обусловленные динамикой системы (7.1). Поэтому на практике вместо емкости предпочитают вычислять описанную ниже *корреляционную размерность* ν , которую можно легче и быстрее оценить численно. Для объектов с целой размерностью $\nu = D_0$. В более общем случае $\nu \leq D_0$.

7.2 Теория метода

Рассмотрим ДС вида (7.1), демонстрирующую хаотический режим колебаний. Решением системы уравнений (7.1) является фазовая траектория $\vec{x}(t)$. При проведении численных исследований осуществляется анализ не непрерывных функций времени, а дискретных значений $\vec{x}(i\Delta t)$, где Δt – шаг дискретизации (он может быть выбран равным, например, шагу интегрирования). Таким образом, мы имеем дело с многомерными временными рядами $x_j(i\Delta t), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n$, где N – число точек анализируемых данных. Предположим, что фазовая траектория $\vec{x}(t)$ n -мерной ДС (7.1) лежит на некотором аттракторе A и возвращается в любую сколь угодно малую окрестность произвольной точки данного аттрактора. Обозначим через $k_i(\varepsilon)$ число точек \vec{x}_j внутри шара радиуса ε с центром в точке \vec{x}_i . Вероятность того, что точка на аттракторе попадет в этот шар (меру шара) можно приближенно оценить как $P_i(\varepsilon, N) = k_i(\varepsilon)/N$. Эта вероятность, усредненная по всему аттрактору, называется корреляционным интегралом, и в качестве ее оценки можно использовать

$$C(\varepsilon, N) = \frac{1}{N} \sum_i P_i(\varepsilon, N).$$

Фактически $C(\varepsilon, N)$ – это просто отношение числа пар точек, расстояние между которыми $|\vec{x}_j - \vec{x}_i|$ меньше ε , к полному числу пар. Если обозначить среднее число ε -«соседей» точки через $k(\varepsilon) = \sum_i k_i(\varepsilon)/N$, то $C(\varepsilon, N) = k(\varepsilon)/N$. Определение корреляционного показателя ν основано на свойствах масштабной инвариантности корреляционного интеграла:

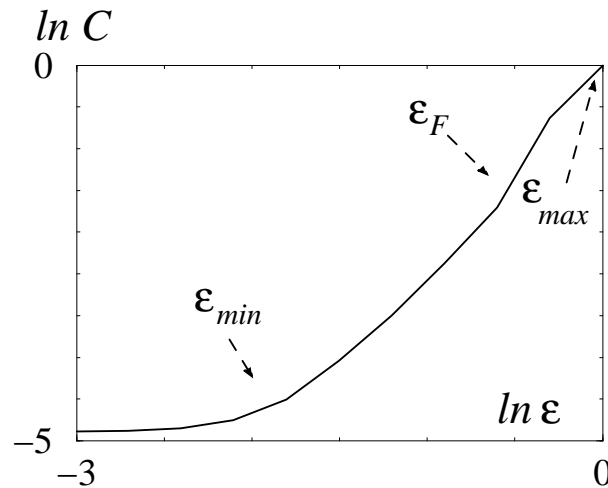
$$\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\log[\lim_{N \rightarrow \infty} C(\varepsilon, N)]}{\log \varepsilon} \right],$$

то есть наличия степенной зависимости вида $C(\varepsilon, N) \sim \varepsilon^\nu$, справедливой при малых значениях параметра ε . Часто формулу для ν записывают иначе:

$$\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln C(\varepsilon, N)}{\ln \varepsilon}, \quad (7.3)$$

$$C(\varepsilon, N) = N^{-2} \sum_{i \neq j} \theta(\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|), \quad (7.4)$$

где θ – функция Хевисайда, $\vec{x}_i = \vec{x}(i\Delta t)$, $\vec{x}_j = \vec{x}(j\Delta t)$. В численных экспериментах N всегда конечно, и оба предела $\varepsilon \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ являются бессмысленными; поэтому отношение $\ln C(\varepsilon, N)/\ln \varepsilon$ рассматривается при не слишком малых значениях ε .

Рис. 7.3: Зависимость $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$.

Расчет корреляционной размерности может производиться непосредственно по массиву векторов $\vec{x}(i\Delta t)$. Однако для оценки ν аттрактора A целесообразнее осуществлять переход к сечению Пуанкаре и вычислять корреляционную размерность точек в сечении (ν_c). Размерность аттрактора A в этом случае определяется путем увеличения значения ν_c на единицу: $\nu = \nu_c + 1$. Отметим одно важное обстоятельство: вычисление ν позволяет получать некоторую оценку снизу значения емкости D_0 либо размерности Хаусдорфа аттрактора A . Причем, если корреляционная размерность рассматривается именно как оценка d_H , нужно принимать во внимание, что ν может существенно отличаться от размерности Хаусдорфа (в частности, для хаотического аттрактора в системе Ресслера ν может принимать значение ≈ 1.6 , тогда как $d_H > 2$). В связи с этим привлечение алгоритма расчета корреляционной размерности является более привлекательным для исследования ДС по одномерным «проекциям» фазовой траектории (скалярным временным рядам). В этом случае вычисление корреляционной размерности позволяет сделать вывод о наличии (или отсутствии) маломерной динамики системы ($\nu < 4$).

При вычислении ν по формуле (7.3) нужно учитывать, что в численных экспериментах N всегда конечно, и оба предела $\varepsilon \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ не имеют реального смысла. Для определения ν строят зависимость $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$ в широком диапазоне по ε (рис. 7.3) и проводят поиск линейного участка, наклон которого определяет искомое значение размерности.

При вычислении корреляционного интеграла существует ряд ограничений на величину ε . Если ε приближается к размерам аттрактора ε_{max} , то $C(\varepsilon, N) = 1$, а следовательно, $\rightarrow \ln C(\varepsilon, N) = 0$. На графике зависимости $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$ (рис. 7.3) обычно можно выделить еще два масштаба:

- верхнюю границу линейного участка ε_F (начало масштабной инвариантности $C \sim \varepsilon^\nu$). Часто отсутствие линейной зависимости при $\varepsilon > \varepsilon_F$

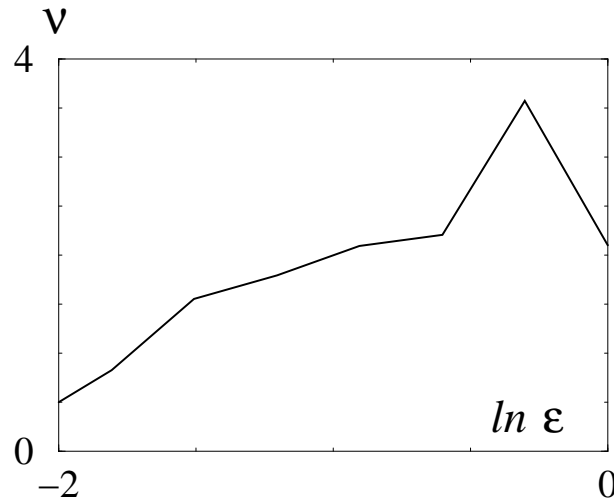


Рис. 7.4: Локальные наклоны зависимости $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$.

объясняют влиянием краев аттрактора, где среднее число ε -соседей обычно меньше, чем в «середине»;

- нижнюю границу линейного участка ε_{min} . Для $\varepsilon < \varepsilon_{min}$ структура аттрактора остается неразрешенной. Чем меньше ε , тем меньше число соседей внутри ячейки будет у точек в фазовом пространстве. Размерность не может быть измерена, если в среднем имеется меньше ν соседей, поэтому значение нижней границы ε_{min} зависит от времени наблюдения T_{obs} и числа точек N , используемых при расчете размерности.

Для удобства анализа вместо зависимости $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$ можно рассматривать локальные наклоны данного графика, соответствующие различным масштабам (рис. 7.4). Вариация размерности пространства вложения позволит наблюдать насыщение значения ν в области участка масштабной инвариантности (или фрактальности), который соответствует линейной зависимости $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$.

Точность расчета корреляционной размерности определяется длиной линейного участка, то есть величиной $p = \varepsilon_F / \varepsilon_{min}$. Считается, что при наличии свойств фрактальности p не может быть меньше $p_{min} \approx 2 \div 3$, а для надежного измерения ν необходимо $p \approx 10$.

Существуют различные оценки минимального числа точек для правильного определения ν . Аргументы в пользу той или иной оценки слегка варьируются в разных исследованиях, но все они основаны на предположениях об «однородности» аттрактора. Аттракторы в динамических системах почти никогда однородными не бывают, но тем не менее эти оценки полезны и дают, по крайней мере, общее представление о возможности определения размерности по экспериментальным данным. При расчете ν можно выделить 3 важные характеристики массива данных: полное время наблюдения

T_{obs} , число точек N и шаг между ними Δt . Они связаны соотношением $T_{obs} = N\Delta t$, и их следует рассматривать вместе, поскольку одной характеристики недостаточно: большое T_{obs} при малом N может быть столь же плохо, как и малое T_{obs} при большом N .

Возможность расчета корреляционной размерности по данным только об одной траектории основана на хорошо известном свойстве хаотических аттракторов: траектория, проходящая через любую точку, в течение некоторого времени блуждает по аттрактору, но затем (через интервал времени T_R) она возвращается в ε -окрестность этой точки. Чем меньше ε , тем больше должно быть T_R . При одном и том же ε величина T_R обычно меняется от одной точки к другой, но тем не менее, можно ввести некоторое среднее время возврата. Чтобы определить ν по интервалу масштабов $\varepsilon \in [\varepsilon_{min}, \varepsilon_F]$, точки аттрактора должны иметь достаточное число «соседей». Для различных точек аттрактора число ε -соседей будет отличаться, но предполагается, что ε_{min} соответствует ситуации, когда в среднем у точки аттрактора существует порядка одного соседа внутри шара радиуса ε_{min} , то есть когда $k(\varepsilon_{min}) \approx 1$. Соответствующее T_{obs} должно быть таким, чтобы для большинства точек траектория успела вернуться в их ε_{min} -окрестность 1–2 раза. Таким образом, если рассмотреть покрытие аттрактора шарами размера ε_{min} (число которых равно M), то большинство из них траектория посетит 1–2 раза.

Для данного T_{obs} существует некоторое оптимальное число точек N , необходимое для того, чтобы обеспечить разрешение на масштабе ε_{min} (это число должно быть близко к M). Так как скорость $|d\vec{x}/dt|$ вдоль траектории меняется, при однородном разбиении траектории по времени t_i плотность точек в фазовом пространстве однородной не будет, но этим эффектом можно пренебречь. Если $N \ll M$, то разрешаемый масштаб будет ограничен уже величиной N вместо T_{obs} , а в случае $N \gg M$ на малых масштабах ($\varepsilon < \varepsilon_{min}$) алгоритм будет измерять размерность не аттрактора, а самой траектории, если не принять специальных мер предосторожности. Следовательно, чтобы разрешить масштаб ε_{min} , необходимо $N \approx M$.

Существуют фундаментальные ограничения на значение корреляционной размерности, связанные с конечной длиной анализируемого временного ряда:

$$\nu_{max} = \frac{2 \ln N}{\ln(1/r)}, \quad r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}.$$

Данная формула означает, что алгоритм расчета размерности не может дать значение больше, чем ν_{max} при заданном числе точек N . Иными словами, если $r = 0.1$ и $N = 1000$, то $\nu_{max} \leq 6$; если $N = 100000$, то $\nu_{max} \leq 10$. Наличие фундаментальных ограничений создает серьезные проблемы, если проводится сравнение сложных, но детерминированных режимов динамики в системах с достаточно большим числом степеней свободы и случайных

процессов. При изучении динамики маломерных систем таких проблем не возникает.

Практическая реализация алгоритма расчета размерности ν предполагает составление программы вычисления корреляционного интеграла в широком диапазоне по параметру ε и нахождение локальных наклонов зависимости $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$. Если уравнения ДС (7.1) известны, то есть можно проинтегрировать математическую модель, в формуле (7.4) рассматривается массив векторов \vec{x}_i . В случае одномерного временного ряда предварительно проводится реконструкция (выбирается значение задержки и размерности пространства вложения), после чего в формуле (7.4) рассматривается массив векторов \vec{z}_i . Если расчет размерности сопровождается процедурой реконструкции аттрактора, появляются дополнительные параметры, которые также влияют на точность расчетов. Для того чтобы быть уверенным в результатах вычислений, экспериментаторы предпочитают немного поварьировать различные параметры и убедиться, что полученные оценки ν при этом будут меняться незначительно.

Меньше проблем возникает при исследовании дискретных отображений вида

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n, \vec{\mu}), \quad \vec{x} \in R^n, \vec{\mu} \in R^k,$$

поскольку в этом случае уменьшается число параметров, от которых зависит точность определения корреляционной размерности (в частности, отсутствует Δt), в то время как сама программа расчета размерности остается прежней.

7.3 Численный алгоритм

Рисунок 7.5 иллюстрирует алгоритм вычисления корреляционной размерности в соответствии с описанными выше формулами. Входные данные представляют собой N -мерный массив, содержащий точки сечения Пуанкаре, где N – размерность модельной системы. Тот факт, что такой массив фактически соответствует $(N - 1)$ -множеству сечения, не влияет отрицательно на работоспособность алгоритма, но удобен с точки зрения организации вычислений.

Предварительно, диапазон изменения каждой из фазовых переменных приводится к интервалу $0.0 \dots 1.0$. Эта процедура соответствует гладкой и обратимой деформации исходного аттрактора системы. При этом пространственные масштабы по всем переменным выравниваются, и дальнейшее покрытие объема можно проводить сферами.

Изначально задается максимальный радиус сферы покрытия (он определен пользователем как параметр численной схемы) Далее для каждой из опорных точек перебираются все остальные точки облака. Количество

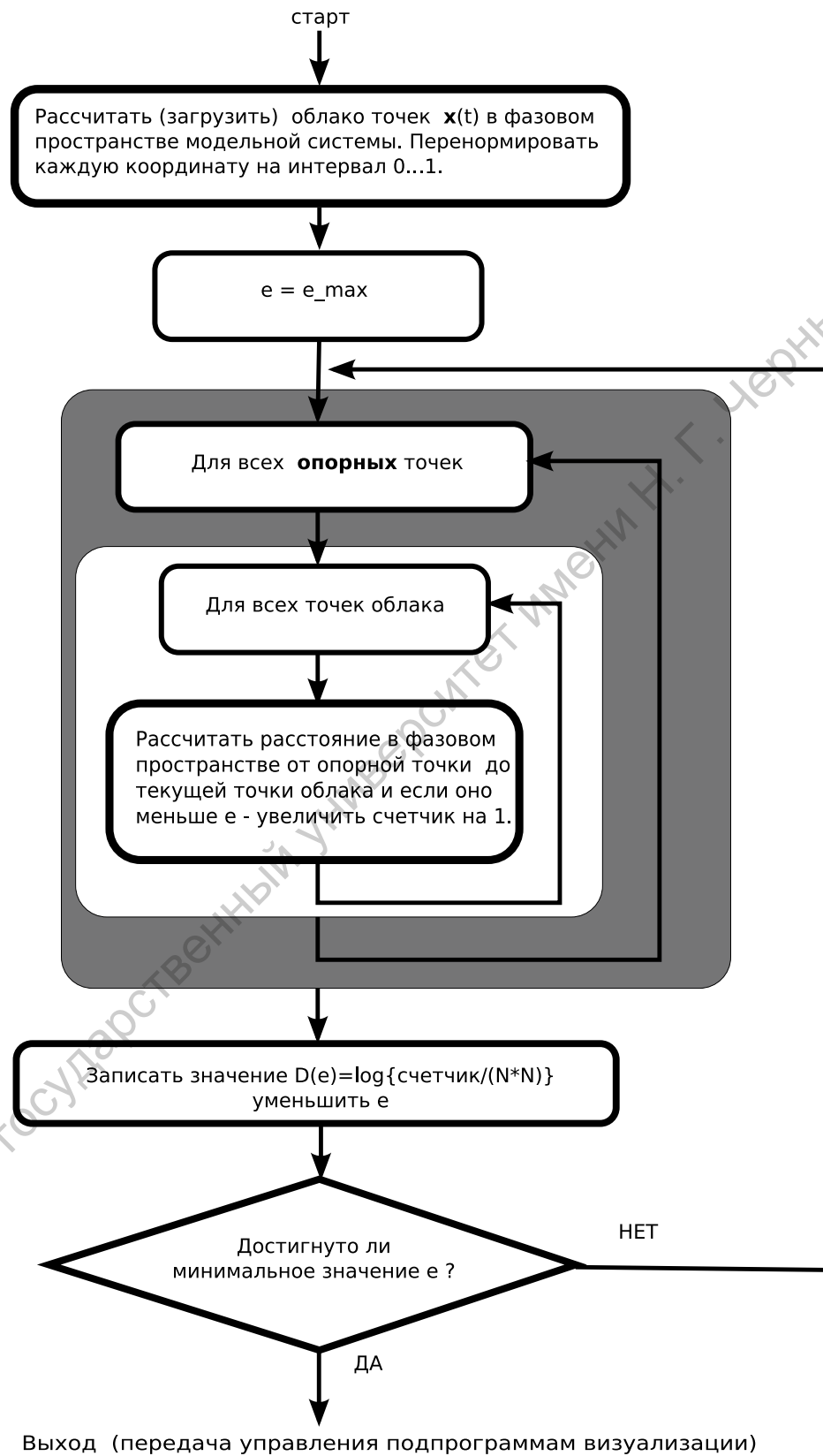


Рис. 7.5: Структурная схема сегмента программы, реализующая расчет корреляционной размерности по заданному облаку точек сечения Пуанкаре.

опорных точек выбирается из соображений разумного времени вычислений и обычно составляет около 10% от общего числа точек. Для каждой пары точек рассчитывается расстояние между ними. Если это расстояние не превышает радиус сферы покрытия, то переменной счетчика числа точек дается приращение на единицу. По окончании перебора точек для данного радиуса рассчитывается значение $C(\varepsilon)$ в соответствии с (7.4), затем радиус сферы покрытия уменьшается путем умножения на заданный пользователем коэффициент (меньший единицы) и вся процедура повторяется. Вычисления прекращаются по достижении определенным пользователем минимального значения радиуса сферы покрытия.

7.4 Практическая часть

Вычисление корреляционной размерности в комплексе ANONS реализовано как дополнительная функция процесса PNC и предполагает предшествующее вычисление сечения Пуанкаре.

Упражнение 1

Запустите программный комплекс ANONS с моделью **f_vdp** из каталога **models**. Задайте значения переменных и параметров из файла состояния **task_PNC_1.st** так, как это делалось в работе 2 при вычислении сечения Пуанкаре. Выберите два состояния системы, одно из которых соответствовало бы нерезонансному тору (точки в сечении Пуанкаре ложатся на инвариантную кривую), а другое - резонансу N:1 (N точек в сечении Пуанкаре). Рассчитайте в каждом случае величину корреляционного интеграла в зависимости от радиуса сферы покрытия и постройте ее график в программе xmgase. Используя встроенные средства xmgase, вычислите коэффициенты линейной регрессии для центрального участка зависимости и тем самым определите значение корреляционной размерности.

Упражнение 2

Запустите программный комплекс ANONS с моделью **gen_aa**, **rossler** или **lorenz** (по указанию преподавателя) из каталога **models**. Изменяя управляющие параметры модели, подберите состояние системы, соответствующее переходу от режима периодических колебаний к детерминированному хаосу. Давая приращение управляющему параметру так, чтобы это заметно меняло вид фазовой проекции аттрактора, проведите 6-8 измерений корреляционной размерности и постройте соответствующий график. Предложите объяснение полученным результатам.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое размерность Хаусдорфа?
- 2) Чем отличаются емкостная и корреляционная размерности?
- 3) Почему именно корреляционную размерность предпочитают вычислять на практике?
- 4) Объясните, в чем состоят ограничения на величину ε при расчете корреляционного интеграла.
- 5) В чем состоят ограничения величины размерности при конечной выборке?

8 Анализ структуры динамического хаоса с помощью автокорреляционной функции

8.1 Предварительные замечания

Одним из классических методов исследования структуры сигналов является корреляционный анализ, который находит многочисленные применения в задачах, связанных с передачей информации, радарным обнаружением, системами управления, анализом вибраций, выделением слабого сигнала при наличии флуктуаций большой интенсивности, исследованием статистической взаимосвязи процессов в физике, биологии и т.д. Ковариационные (корреляционные) функции допускают разные варианты интерпретации. С одной стороны, они позволяют выявлять степень сходства (линейной зависимости) двух сигналов при варьировании сдвига по времени между ними. В этом случае говорят о взаимных ковариационных (взаимных корреляционных) функциях. С другой стороны, они применимы для изучения взаимосвязи значений одного и того же случайного процесса в разные моменты времени, что позволяет использовать терминологию автоковариационных (автокорреляционных) функций.

Автокорреляционная функция (АКФ) является важной статистической характеристикой, позволяющей изучать свойства хаотических режимов автоколебаний, порождаемой детерминированной динамикой нелинейных систем. Спадание АКФ является следствием эффекта перемешивания, который состоит в том, что любой малый элемент фазового объема с течением времени “размазывается” по всему хаотическому аттрактору. Как следствие, теряется статистическая взаимосвязь между состояниями системы, разделенных достаточно большим промежутком времени. Для хаотических аттракторов расщепление корреляций во времени связано с неустойчивостью фазовых траекторий. Особенностью АКФ (в отличие, например, от показателей Ляпунова) является то, что ее можно вычислять независимо от природы сигнала: один и тот же алгоритм применим к полностью детерминированным процессам, зашумленным хаотическим сигналам и совершенно случайным процессам (например, цветному шуму).

Поэтому при описании метода расчета АКФ мы будем рассматривать

более общий случай случайных процессов, подразумевая, что все формулы и их трактовка справедливы для изучения структуры динамического хаоса по одномерным проекциям фазовой траектории, принадлежащей аттрактору.

8.2 Теория метода

Предположим, что анализируется стационарный случайный процесс $X(t)$. Охарактеризовать статистическую взаимосвязь его значений $X_1 = X(t)$ и $X_2 = X(t + \tau)$ можно с помощью автоковариационной функции

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \quad (8.1)$$

или автокорреляционной функции

$$\Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{X})(x_2 - \bar{X}) p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \quad (8.2)$$

где \bar{X} – математическое ожидание, $p(x_1, x_2, \tau)$ – двумерная плотность распределения вероятности. В задачах анализа структуры сигналов на этапе предварительной обработки данных часто используется приведение исходного процесса к нулевому среднему уровню, в этом случае характеристики $K(\tau)$ и $\Psi(\tau)$ совпадают.

Отметим, что проведение вычислений по формулам (8.1) и (8.2) предполагает наличие статистического ансамбля реализаций случайного процесса с заданной на нем функцией $p(x_1, x_2, \tau)$. Но при обработке экспериментальных данных исследователь имеет дело лишь с одной реализацией случайного процесса $x^*(t)$, поэтому принципиальным моментом является свойство *эргодичности*, которое означает, что все статистические характеристики анализируемого процесса можно определить по сигналу $x^*(t)$, если заменить процедуру усреднения по ансамблю усреднением по времени. Заметим, что для хаотических аттракторов свойство эргодичности является следствием свойства перемешивания.

Ковариационная (или *автоковариационная*) функция эргодического случайного процесса $X(t)$, имеющего конечную длительность T , вычисляется по одной реализации $x(t)$ следующим образом:

$$K(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t + \tau) dt, \quad (8.3)$$

где $0 \leq \tau < T$. Она характеризует степень линейной зависимости между значениями случайного процесса, сдвинутыми друг относительно друга на интервал времени τ . Для периодической функции времени $K(\tau)$ также

является периодической функцией с тем же самым периодом. Если $X(t)$ – случайный процесс, не содержащий периодических компонент, то с ростом τ ковариационная функция стремится к нулю, если $\bar{X} = 0$. Такое поведение $K(\tau)$ свидетельствует о потере статистической взаимосвязи: с увеличением τ предыдущие состояния “забываются”.

Аналогичными свойствами обладает *корреляционная* (или *автокорреляционная*) функция (АКФ):

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} (x(t) - \langle X \rangle)(x(t + \tau) - \langle X \rangle) dt, \quad (8.4)$$

где $\langle X \rangle$ – среднее по времени значение. С практической точки зрения отличие формул (8.3) и (8.4) состоит в том, что ковариационная функция содержит информацию об энергии процесса $X(t)$, тогда как корреляционная функция теряет часть информации при переходе к нулевому среднему уровню.

По виду АКФ можно делать выводы об изменении режима функционирования исследуемой динамической системы. Например, для периодических процессов с периодом T_0 : $\Psi(0) = \Psi(\tau = T_0) = \Psi(\tau = nT_0)$, т.е. АКФ будет также периодической функцией (рис. 8.1, а).

Аналогичная картина (наличие повторяемости в поведении АКФ) наблюдается при бифуркациях удвоения периода (рис. 8.1, б) до перехода к хаосу. В хаотическом режиме огибающая автокорреляционной функции $\gamma_x(\tau)$ будет спадать до нуля (рис. 8.1, в), причем скорость стремления ее к нулю служит важной количественной характеристикой: чем быстрее спадает $\gamma_x(\tau)$, тем более хаотичен режим. Обычно для того чтобы охарактеризовать скорость спадания огибающей, используют время корреляции τ_c – время, за которое $|\gamma_x(\tau)|$ уменьшится в e раз:

$$\frac{|\gamma_x(\tau_c)|}{|\gamma_x(0)|} = \frac{1}{e}.$$

Автокорреляционная функция может иметь достаточно сложный вид, при котором зависимость $\gamma_x(\tau)$ не удастся аппроксимировать экспоненциальной или степенной функцией (рис. 8.2).

В этом случае рассматривают другой способ определения τ_c :

$$\tau_c = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \gamma_x(\tau) d\tau.$$

Чем меньше время корреляции, тем быстрее происходит «забывание» предыдущих значений, то есть случайный процесс является более «хаотичным». Случай $\tau_c = 0$ соответствует белому шуму, для которого «память о прошлом» полностью отсутствует.

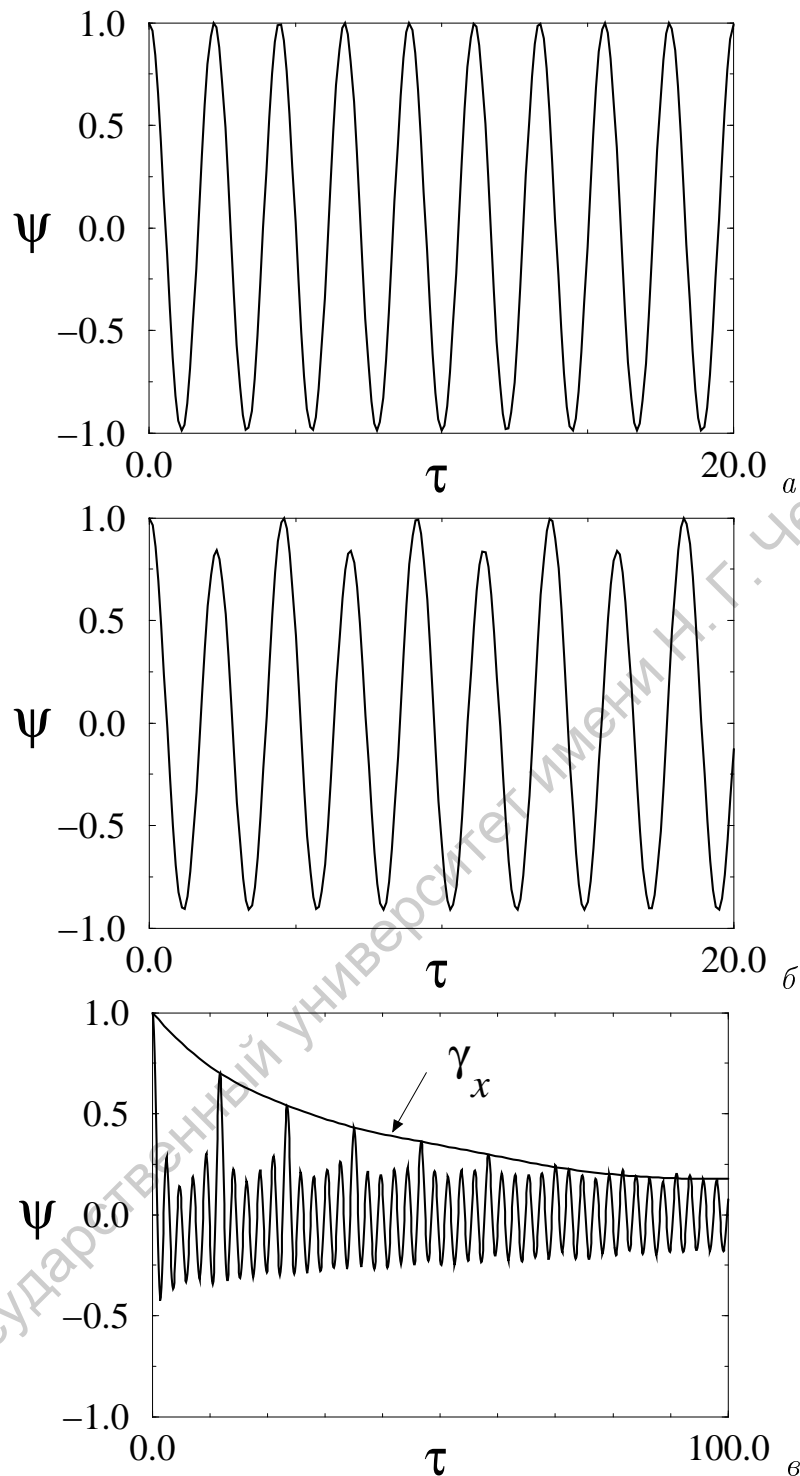


Рис. 8.1: Автокорреляционные функции: *a* – периодических колебаний периода T_0 , *б* – периодических колебаний периода $2T_0$, *в* – хаотических колебаний.

Формулы, по которым вычисляются ковариационные и корреляционные функции, были записаны для аналогового сигнала $x(t)$. Модифицируем их теперь для случая временных рядов. С этой целью рассмотрим временной ряд $x(i)$, представляющий собой значения непрерывной функции $x(t)$, дискретизованной с постоянным шагом Δt : $x(i) = x(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Процедура дискретизации всегда проводится при преобразовании аналого-

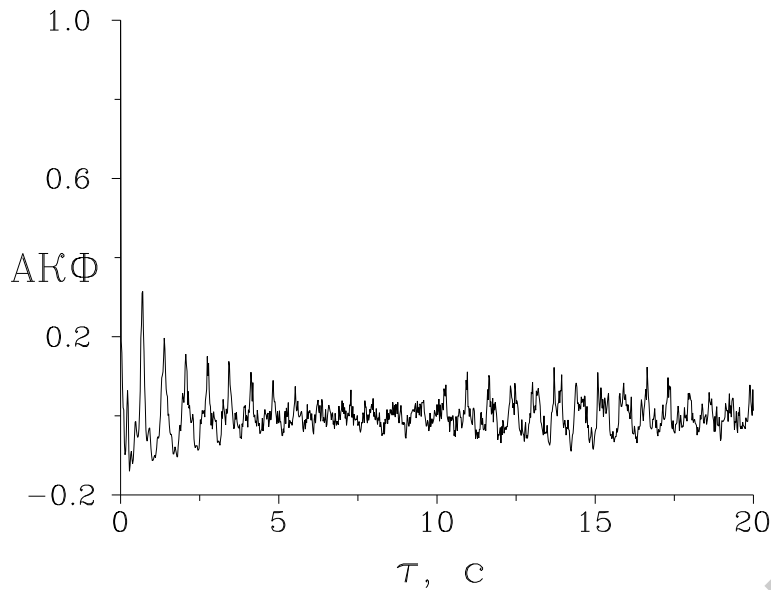


Рис. 8.2: Пример АКФ хаотического процесса, имеющей сложную для аппроксимации форму.

вых сигналов в цифровую форму для последующего анализа на компьютере. Длина временного ряда N и шаг дискретизации Δt определяются как практическими соображениями, например, приемлемой продолжительностью эксперимента $T = N\Delta t$, так и техническими возможностями используемой измерительной аппаратуры и характеристиками АЦП.

Расчеты ковариационной и корреляционной функций в этом случае проводятся по формулам:

$$K(m) = K(m\Delta t) = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} x(i)x(i+m),$$

$$\Psi(m) = \Psi(m\Delta t) = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} (x(i) - \langle X \rangle)(x(i+m) - \langle X \rangle).$$

Здесь $m = 0, 1, \dots, M$ — число шагов дискретизации, характеризующее сдвиг по времени между значениями случайного процесса (обычно выбирают $M \ll N$). Заметим, что свое максимальное значение АКФ принимает в нуле $\Psi_{max} = \Psi(0)$, и оно совпадает с дисперсией: $\Psi(0) = \sigma^2$. По аналогии, ковариационная функция также принимает максимальное значение в нуле $K_{max} = K(0)$, оно соответствует средней энергии процесса $X(t)$.

Для того, чтобы охарактеризовать степень линейной зависимости между значениями анализируемых данных, удобно пользоваться нормированной корреляционной функцией — коэффициентом корреляции:

$$R(m) = \frac{\Psi(m)}{\sigma^2},$$

который может принимать значения от -1 до 1 и не зависит от единиц измерения переменной $x(t)$. Причем, как и сама АКФ, максимальное значение коэффициент корреляции принимает в нуле: $R_{max} = R(0) = 1$.

8.3 Численный алгоритм

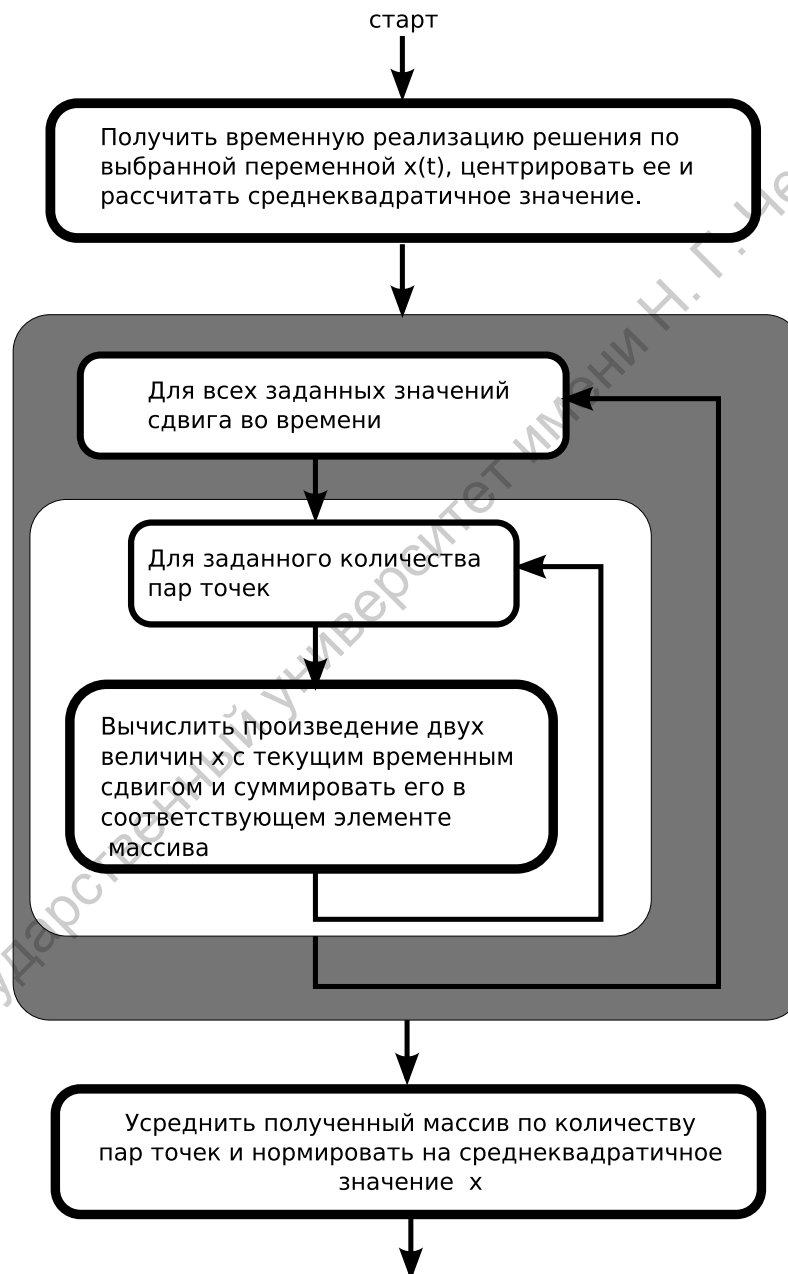


Рис. 8.3: Структурная схема сегмента программы, реализующей расчет нормированной автокорреляционной функции.

В вычислительной практике используют два основных способа расчета автокорреляционной функции: либо в соответствии с данными выше определениями, либо с использованием теоремы Винера-Хинчина, пу-

тем преобразования предварительно рассчитанного спектра мощности. Поскольку алгоритмы расчета Фурье-спектра мощности хорошо разработаны и оптимизированы (быстрое преобразование Фурье), то второй способ часто предпочтителен как более быстросействующий. Однако в ряде задач, особенно при анализе корреляций на больших временах, применяется прямое вычисление АКФ. На рисунке 8.3 изображена соответствующая структурная схема программы. Как можно видеть, она относительно несложна. После подготовительных действий (получение и центрирование временной реализации) данные передаются на обработку в два вложенных цикла, внешний из которых осуществляет перебор всех временных сдвигов из заданного интервала, а внутренний - перебор заданного числа пар точек, сумма произведений которых накапливается в элементе массива, соответствующем текущему временному сдвигу. По выходу из вложенных циклов, значения массива нормируются на число пар точек и на значение средней квадратичной величины для всей временной реализации.

Следует заметить, что временной интервал между точками временной реализации должен быть равен тому минимальному (ненулевому) сдвигу τ , который интересует пользователя и задается параметром «Time step» процесса ACF комплекса ANONS. Наибольший временной сдвиг τ_{max} задается там же параметром «Maximal time shift», а количество пар точек N при усреднении - параметром «Average number». В результате, временная реализация для расчета АКФ будет содержать $M = INT\{\tau_{max}/\tau\} + N$ точек, где $INT\{\}$ обозначает округление до целого.

Заметим, что при той же длине временной реализации усреднение АКФ на малых временах можно улучшить, если проводить усреднение не по N , а по $INT\{M - \tau_i/\tau\}$ точкам, где τ_i - текущий временной сдвиг. При этом, однако, качество усреднения будет неодинаково для различных частей графика.

8.4 Практическая часть

Упражнение 1

Запустите программный комплекс ANONS с моделью `van_der_pol` из каталога `models`. Задайте значения переменных и параметров из файла состояния `task_ACF_1.st`. Изменяя параметры численной схемы процесса ACF, рассчитайте автокорреляционную функцию на больших и малых временах и различной степени усреднения. Объясните полученные результаты.

Упражнение 2

Запустите программный комплекс ANONS с моделью `van_der_pol` из каталога `models`. Задайте значения переменных и параметров из файла

состояния `task_ACF_1.st`. Установите оптимальные значения параметров численной схемы, определенные в предыдущем упражнении.

Изменяя управляющие параметры модели, подберите следующие состояния:

- (1) затухающие колебания в отсутствие шума;
- (2) затухающие колебания при наличии шума средней интенсивности, такой, что во временной реализации прослеживаются нерегулярные осцилляции;
- (3) то же, при значительной интенсивности шума, когда динамика выглядит полностью случайной.

Рассчитайте графики АКФ для указанных случаев. Объясните полученные результаты.

Упражнение 3

Запустите программный комплекс **ANONS** с моделью `gen_aa`, `rossler` или `lorenz` (по указанию преподавателя) из каталога **models**. Изменяя управляющие параметры модели, подберите состояние системы, соответствующее переходу от режима периодических колебаний к детерминированному хаосу. Давая приращение управляющему параметру так, чтобы это заметно меняло вид фазовой проекции аттрактора, проведите для каждого значения параметра расчет автокорреляционной функции и постройте соответствующие графики. Предложите объяснение полученным результатам.

Контрольные вопросы

- 1) Что характеризуют корреляционные функции?
- 2) Как вычислить время корреляции? Что оно характеризует?
- 3) Что такое коэффициент корреляции? Почему данной характеристикой удобнее пользоваться по сравнению с АКФ?
- 4) Почему АКФ хаотического режима колебаний является спадающей функцией?
- 5) Чем отличается ковариационная функция от корреляционной?

9 Анализ структуры точечных процессов

9.1 Предварительные замечания

Во многих областях естественных наук встречаются задачи, которые требуют статистического описания последовательности событий, происходящих в определенные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_N . Геометрически каждую последовательность можно изобразить в виде точек на оси времени, поэтому ее можно рассматривать в качестве реализации *случайного точечного процесса*. Под точечным процессом, таким образом, понимается случайный процесс, в котором носителями информации о динамике являются времена каких-то событий. Примерами могут служить моменты срабатывания пороговых устройств при достижении непрерывным сигналом на входе фиксированного уровня или случайные моменты вылета электронов из нагретого катода электронной лампы, являющиеся одной из главных причин наличия дробового шума анодного тока. Терминология точечных процессов широко используется при изучении принципов кодирования информации нейронами в виде последовательностей электрических импульсов (потенциалов действия). В статистической радиофизике хорошо известен процесс Пуассона, представляющий собой простейший точечный процесс, удовлетворяющий условиям стационарности и независимости приращений.

В теории колебаний примерами точечных процессов служат последовательности времен пересечения фазовой траекторией секущей плоскости, на основе которых вычисляются времена возврата в секущую. Наряду с сечением Пуанкаре, времена возврата позволяют характеризовать “поперечную” структуру хаотического аттрактора. Начиная с 80-х годов, изучение сложных режимов автоколебаний по скалярным временным рядам в терминах фазового пространства базируется на применении метода задержек, обоснованием которого служит теорема Такенса и ее обобщения. Возможность применения аналогичного подхода к последовательностям времен возврата является менее очевидной. Это связано с тем, что рассмотрение временных интервалов вместо переменной состояния $S(t)$ динамической системы означает существенную потерю информации о режиме ее функционирования. Как следствие, возникает вопрос: если точечный процесс служит отражением сложного режима колебаний некоторой динамической

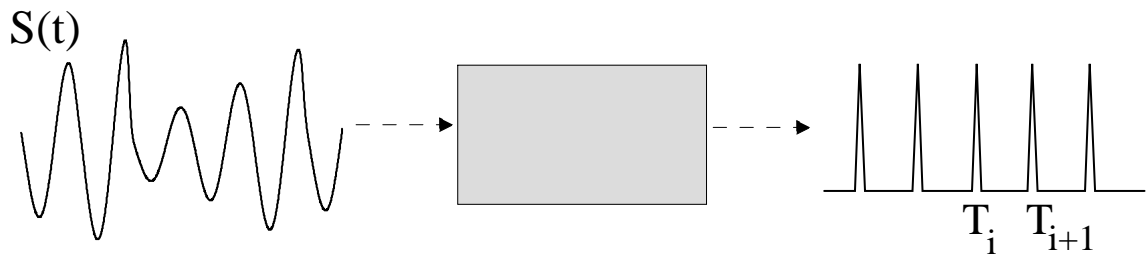


Рис. 9.1: Преобразование сигнала $S(t)$ пороговым устройством, генерирующим кратковременный импульс при достижении порогового уровня.

системы с непрерывным временем, то можно ли идентифицировать состояние данной системы на основе информации, которая содержится в точечном процессе (например, провести оценку метрических и динамических характеристик хаотического аттрактора)? Если да, то при каких условиях?

Для большей наглядности и удобства дальнейшего изложения переход от переменной состояния $S(t)$ к точечному процессу T_i можно представить в виде преобразования сигнала $S(t)$ пороговым устройством, генерирующим стереотипные импульсы при достижении порогового уровня (рис. 9.1).

В ряде исследований, посвященных решению задачи идентификации состояния динамической системы по последовательности T_i , была рассмотрена модель порогового устройства типа “накопление-сброс” (НС). Согласно терминологии, используемой в зарубежной литературе, данная модель часто носит название “integrate-and-reset” или “integrate-and-fire” (в дословном переводе, “интегрируй и стреляй”). Эта модель получила широкое распространение в задачах, связанных с изучением динамики нейронов и их ансамблей. Наряду с исследованиями электрической активности клеток, такие модели встречаются и непосредственно в радиофизике, например, при рассмотрении сигма-дельта модуляции. Точечные процессы, генерацию которых описывает НС-модель, представляют собой более простой случай по сравнению с последовательностями времен возврата. Для них доказана возможность идентификации состояния динамической системы в виде теоремы вложения, аналогичной теореме Такенса для временных зависимостей фазовых переменных.

В рамках НС-модели, описывающей преобразование детерминированных процессов, в качестве сигнала $S(t)$ на входе порогового устройства часто выбирается линейное преобразование одной из переменных маломерной динамической системы, демонстрирующей режим автоколебаний, или функция нескольких переменных. Сигнал $S(t)$ интегрируется, начиная с некоторого момента времени T_0 , а времена T_i , в которые интеграл достигает заданное пороговое значение θ , определяются уравнением

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t) dt = \theta, \quad I_i = T_{i+1} - T_i. \quad (9.1)$$

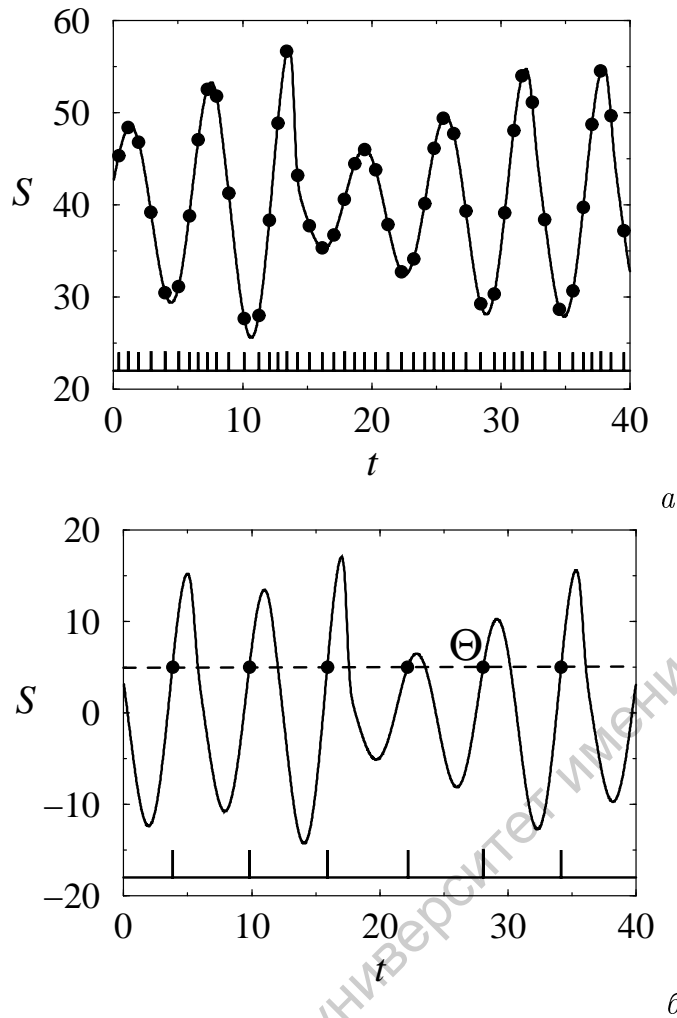


Рис. 9.2: Модели “накопление-сброс” (а) и “пересечения порога” (б). Точками на сигналах $S(t)$ обозначены моменты времени, соответствующие достижению порога и генерации импульса. Внизу на каждом рисунке изображена последовательность импульсов, представляющая собой сигнал на выходе системы.

При достижении порога генерируется кратковременный импульс (рис.9.2, а), после чего значение интеграла обнуляется. Межимпульсные интервалы (МИ) I_i иногда рассматриваются в качестве координаты состояния, позволяющей охарактеризовать динамику хаотического сигнала $S(t)$. В частности, была доказана теорема Зауэра (теорема вложения для временных интервалов модели “накопление-сброс”).

Другой моделью порогового устройства (рис.9.1) является модель “пересечения порога” (ПП), предполагающая введение уровня Θ , который задает уравнение секущей $S = \Theta$, и запись интервалов времени между пересечениями данного уровня сигналом $S(t)$ в одном направлении, например, снизу вверх (рис.9.2, б). Для аттрактора динамической системы интервалы I_i соответствуют временам возврата в секущую плоскость.

Проблема анализа МИ является актуальной в тех случаях, когда возникают сложности регистрации полной реализации интересующего нас про-

цесса $S(t)$ (или она по каким-то причинам недоступна), и единственно доступный сигнал представляет собой последовательность времен T_i . Классическим примером служит сенсорный нейрон, который может интерпретироваться как пороговое устройство, преобразующее входной сигнал $S(t)$ в последовательность “спайков”, генерируемых при превышении порога. Данное преобразование неоднократно исследовалось с позиции теории информации.

Если в случае НС-модели возможность определения характеристик хаотических режимов колебаний по точечному процессу базируется на теореме Зауэра, то для последовательности времен возврата строгого доказательства теоремы вложения в настоящее время неизвестно. Тем не менее, последовательность времен возврата позволяет проводить оценку таких характеристик сложной динамики как размерности, энтропии, ляпуновские показатели.

9.2 Теория метода

Анализ точечных процессов может проводиться на основе статистических методов (построения гистограмм межимпульсных интервалов, отображений последования и т.д.). Например, из рисунка 9.3 видно, что отображение времен возврата для хаотического аттрактора качественно напоминает отображение Пуанкаре.

Другой вариант анализа – применение методов реконструкции динамических систем (если необходимо извлечь информацию о режиме сложной динамики, отражением которого является точечный процесс). В последнем случае могут применяться стандартные методы анализа характеристик хаотического аттрактора (возможно, с незначительными модификациями).

Модель накопление-сброс

Рассмотрим вначале проблему реконструкции хаотического аттрактора, соответствующего входному сигналу НС-модели, по последовательности временных интервалов I_i . Качество реконструкции в значительной степени определяется выбором порога θ . Если частота генерации импульсов на выходе порогового устройства велика, то применение интегральной теоремы о среднем в некотором приближении позволяет рассматривать межимпульсные интервалы I_i как нелинейное преобразование входного сигнала $S(t)$:

$$I_i \approx \theta/S_i, \quad S_i = S(T_i). \quad (9.2)$$

Поскольку старший показатель Ляпунова является инвариантом нелинейных преобразований, величина λ_1 , вычисленная для аттрактора, реконструированного по точечному процессу, должна совпадать со значением

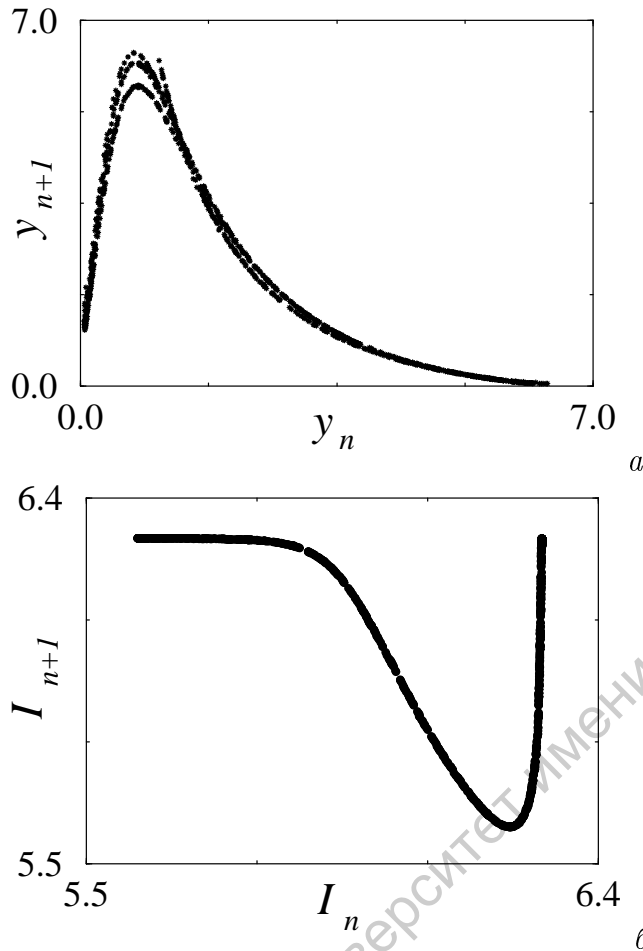


Рис. 9.3: Отображение Пуанкаре (а) и отображение времен возврата (б) для хаотического аттрактора системы Ресслера.

показателя, определенного по входному сигналу $S(t)$. Вопрос состоит лишь в том, какую методику выбрать для расчета показателя.

С одной стороны, можно рассматривать точечный процесс исключительно как дискретную последовательность I_1, I_2, \dots, I_N , восстанавливать аттрактор методом задержки $(I_i, I_{i+1}, \dots, I_{i+m-1})$ и определять для него меру хаотичности как усредненную за одну “итерацию” скорость потери информации о начальном состоянии; причем, длительность “итерации” приблизительно можно принять соответствующей среднему значению временного интервала $\bar{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i$. Данные вычисления обычно приводят к заниженным значениям λ_1 . В частности, расчеты на примере системы Ресслера в хаотическом режиме приводят к недооценке λ_1 , составляющей примерно 25%. В качестве входного сигнала в этом примере рассматривалась зависимость $S(t) = x(t) + 40$, а порог был выбран равным $\theta = 35$.

Другой подход к проблеме расчета λ_1 состоит в следующем. Если известна последовательность I_i , то согласно (9.2)

$$\frac{1}{I_i} \approx \frac{1}{\theta} S_i = k S(T_i), \quad k = \frac{1}{\theta}, \quad (9.3)$$

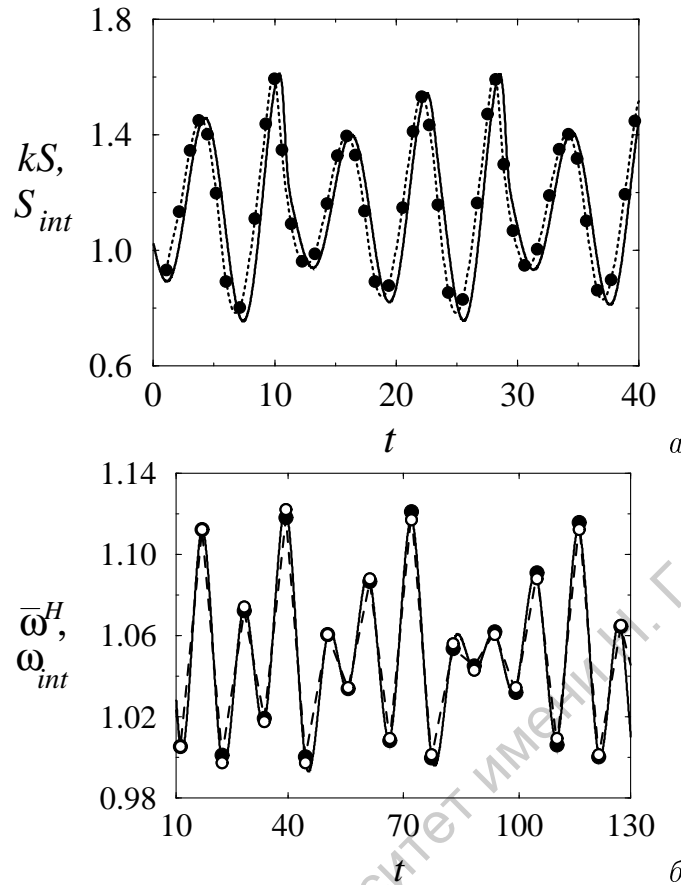


Рис. 9.4: а) - Линейное преобразование входного сигнала $\frac{1}{\theta}S(t)$ – сплошная линия и временная зависимость $S_{int}(t)$ – результат интерполяции точек $\frac{1}{I_i}(T_i)$ – пунктир. Небольшое смещение по оси времени может быть устранено, если в формуле (9.2) рассмотреть $S_i = S((T_i + T_{i+1})/2)$; б) - Точки усредненной мгновенной частоты по Гильберту в моменты времени, соответствующие пересечению порога, - $\bar{\omega}^H(T_i)$ (черные кружочки, соединенные пунктирной линией) и значения $\frac{2\pi}{T_i}(T_i)$ в те же моменты времени (белые кружочки, соединенные гладкой функцией $\omega_{int}(t)$).

то есть в фиксированные моменты времени T_i можно определить значения входного сигнала, умноженные на постоянный множитель. Зная значения $kS(T_i)$ и желая восстановить входной сигнал как непрерывную функцию времени, предлагается интерполировать точки $1/I_i$, рассмотренные в моменты времени T_i , гладкой функцией $S_{int}(t)$ (например, кубическим сплайном). Интерполяция позволит перейти к постоянному шагу по времени и приблизительно восстановить линейное преобразование входного сигнала, то есть временную зависимость $kS(t)$ – рис. 9.4, а. Следовательно, реконструированный по сигналу $S_{int}(t)$ фазовый портрет будет сохранять метрические и динамические характеристики хаотического аттрактора, соответствующего процессу $S(t)$. Разумеется, при этом будет присутствовать некоторая погрешность, связанная как с ошибками интерполяции, так и с приближенным характером соотношения (9.3). Однако значение λ_1 , вычисленное по сигналу $S_{int}(t)$, соответствует результатам расчета старшего показателя

Ляпунова по исходному сигналу $S(t)$, причем, точность вычисления существенно выше, чем в предыдущем случае (по дискретной последовательности I_i). Рассматриваемый подход позволяет уменьшить погрешность оценки λ_1 примерно в 2-3 раза. Данное обстоятельство можно объяснить тем, что увеличение числа точек в интерполированной временной зависимости $S_{int}(t)$ по сравнению с дискретной последовательностью МИ (соответственно, увеличение числа точек в восстановленном фазовом портрете) приводит к существенному уменьшению ошибки ориентации вектора возмущения при расчете λ_1 .

Модель пересечения порога

Более сложную задачу представляет собой оценка динамических характеристик хаотического аттрактора по набору времен возврата. Возможный вариант решения данной проблемы состоит в следующем. Осуществляется переход от набора временных интервалов I_i к точкам $\omega(T_i) = 2\pi/I_i$, соответствующим значениям усредненной мгновенной частоты $\bar{\omega}^H$ за время возврата $I_i = T_{i+1} - T_i$, где T_i – времена пересечения порогового уровня. Далее точки $\omega(T_i)$ интерполируются гладкой функцией (кубическим сплайном) $\omega_{int}(t)$ для перехода к сигналу с равномерной выборкой, используемому при реконструкции – рис. 9.4,б. Данная временная зависимость позволяет качественно описать поведение усредненной мгновенной частоты колебаний, и реконструированный аттрактор сохраняет характеристики хаотического аттрактора, соответствующего динамике на входе порогового устройства.

9.3 Численный алгоритм

Центральной задачей при анализе точечных процессов является выделение моментов событий и накопление информации о них. На рисунке 9.5 приведена соответствующая структура программы в случае модели пересечения порога.

Отслеживание моментов событий происходит в цикле интегрирования. Предполагается, что наступлению события поставлено в соответствие достижение заданного уровня выбранной переменной (см. вставку в правом верхнем углу рисунка). В простейшем случае для диагностики события достаточно отслеживать изменение знака разности переменной и заданного уровня A . Если на предыдущем шаге интегрирования эта разность была отрицательной, а после шага стала положительной – то событие обнаружено. Однако, в целом ряде задач, связанных с воздействием шума на нелинейные системы, такой метод ненадежен. Наличие флуктуаций делает возможным обратное и повторное пересечение порогового уровня A в

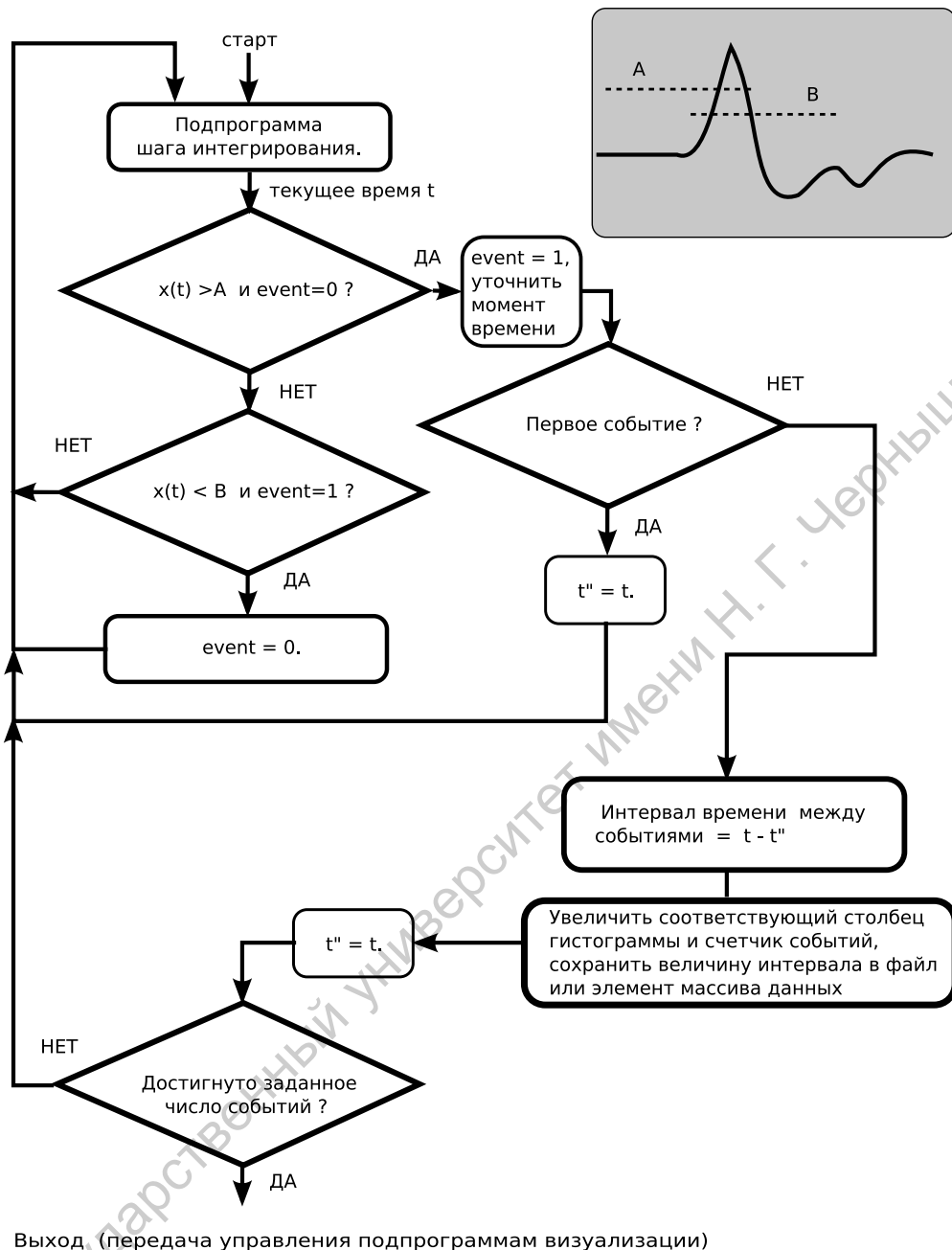


Рис. 9.5: Структурная схема сегмента программы, реализующей расчет последовательности интервалов времени между событиями.

течение короткого времени, что отражает лишь наличие шума, но не динамику самой системы. Подобный эффект особенно выражен, когда порог соответствует области замедленного изменения фазовой переменной, например, при преодолении потенциального барьера между состояниями в бистабильной (мультистабильной) системе.

В этих условиях гораздо более надежен и универсален метод диагностики событий, который проиллюстрирован на рисунке. В дополнение к порогу наступления события A , вводится также порог завершения события B , имеющий меньшее значение (см. вставку на рисунке). Состояние системы кодируется дополнительной переменной $event$. Соответствующий алгоритм

прост: исходно $event = 0$. Первое превышение порога A выбранной переменной переводит систему в состояние события $event = 1$. В этом состоянии, первое пересечение уровня B (сверху) возвращает исходное состояние $event = 0$. Таким образом устраняется влияние возможных флуктуаций системы в области пороговых значений.

Следует отметить, что определение момента пересечения порога A или B , по сути, эквивалентно нахождению точки в сечении Пуанкаре. Для уточнения момента пересечения могут быть использованы все обсуждавшиеся ранее методы: интерполяция, деление шага интегрирования и т.д. (см. Работу 2). На рисунке 9.5 эти детали опущены.

Обработка первого обнаруженного события сводится к запоминанию момента времени, когда оно произошло. Обработка последующих событий включает также вычисление интервала от предыдущего события, приращение счетчика событий, и накопление статистики интервалов для построения гистограммы.

Выход из вычислительного блока производится по достижению заданного числа событий. На практике, предусматривают дополнительное условие аварийного выхода из вычислительного блока в том, например, случае, когда события не обнаружены или случаются слишком редко (на рисунке для упрощения не показано). Таким условием аварийного выхода может служить достижение предельного времени вычислений, либо превышение заранее заданного интервала времени от предыдущего события.

9.4 Практическая часть

Упражнение 1

Запустите программный комплекс **ANONS** с моделью **fh_n** из каталога **models**. Задайте значения переменных и параметров из файла состояния **task_ISI_1.st**. Изменяя управляющие параметры a и b модели, а также интенсивность шума $Dnoise$, подберите три состояния:

(1) Автоколебательный режим: регулярная последовательность импульсов в отсутствие шума;

(2) Возбудимый режим: в отсутствие шума система остается в состоянии равновесия, добавление шума приводит к генерации нерегулярной последовательности импульсов примерно одинаковой амплитуды;

(3) Система в области перехода между возбудимым и автоколебательным режимом. В отсутствие шума наблюдаются квазигармонические автоколебания малой амплитуды, небольшой сдвиг управляющего параметра приводит к режиму (1) или (2). При добавлении шума система генерирует нерегулярную последовательность импульсов, в промежутках между которыми видны нерегулярные осцилляции малой амплитуды.

Сопоставьте каждому из указанных состояний характерное взаиморас-

положение нульклин, для построения которых воспользуйтесь окном фазовых проекций.

Упражнение 2

В каждом из указанных выше состояний, исследуйте влияние интенсивности шума на среднюю частоту генерации импульсов и на вид распределения (гистограммы) интервалов между импульсами. Сопоставьте полученные результаты с фазовым портретом и взаиморасположением нульклин. Предложите объяснение полученных результатов.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое точечный процесс?
- 2) Приведите примеры точечных процессов и генерирующих их моделей.
- 3) В чем состоит различие моделей накопление-сброс и пересечения порога?
- 4) Какие методы могут применяться для анализа точечных процессов?
- 5) Как можно вычислить старший ляпуновский показатель по последовательности времен возврата в секущую плоскость для хаотического режима автоколебаний?

Список литературы

Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008.

Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

Постнов Д. Э. Бифуркации регулярных аттракторов. – Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.

Постнов Д. Э. Введение в динамику итерируемых отображений. – Саратов: Изд-во СГУ, 2007.

Павлов А. Н. Методы анализа сложных сигналов. – Саратов: Научная книга, 2008.

Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. – М.: Техносфера, 2003.

Научно-образовательный портал кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ <http://chaos.ssu.runnet.ru>

Википедия (Интернет-энциклопедия) <http://ru.wikipedia.org>

ПРИЛОЖЕНИЕ:

Список модельных систем

В программном комплексе ANONS для всех приведенных ниже моделей реализована возможность задания внешнего воздействия и шумового сигнала следующим образом

$$F(t) = A_f f(t) + D_{noise} \xi(t).$$

Соответствующая функция времени при необходимости может добавляться в правые части уравнений модельных систем.

Осциллятор Ван дер Поля (модельная система `van_der_pol`).

Эта система второго порядка по праву считается классической моделью теории колебаний. Как правило, именно на ее примере обсуждается проблема возбуждения незатухающих колебаний и стабилизации их амплитуды.

$$\varepsilon \ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

Параметр ω определяет частоту автоколебаний в системе, параметр нелинейности ε управляет интенсивностью диссипации/подкачки энергии.

Добавив в правую часть внешнее гармоническое воздействие, можно перейти к *неавтономному осциллятору Ван дер Поля*, который представляет собой прекрасную модель для изучения явления синхронизации (то есть, практически, бифуркаций квазипериодических аттракторов).

Неавтономный осциллятор Ван дер Поля (модельная система `f_vdp`).

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + \omega^2 x &= A_{sin} \sin(z), \\ \dot{z} &= \omega_{sin} \end{aligned}$$

Модель FitzHugh-Nagumo (модельная система **fh_n**).

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - x^3/3 - y \\ \dot{y} &= x + a + by.\end{aligned}$$

В комплексе ANONS можно включить внешнее воздействие $F(t)$ в правую часть 2-го уравнения.

Неавтономный осциллятор Дуффинга (модельная система **f_duff**).

Эта математическая модель описывает пассивный нелинейный контур, который под воздействием внешней вынуждающей силы (периодического воздействия) способен демонстрировать сложное и разнообразное поведение. В литературе под названием “осциллятор Дуффинга” можно встретить разнообразные модификации уравнений. Здесь приводится наиболее общая форма записи, позволяющая получать все частные случаи соответствующим выбором параметров:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + k\dot{x} - \alpha x(\beta - x^2) &= A_{sin} \sin(z), \\ \dot{z} &= \omega_{sin}\end{aligned}$$

В уравнениях k -параметр, отвечающий за диссипацию в контуре (обычно $k = 0.1 \dots 0.2$); α и β позволяют задавать нелинейную характеристику (типичные значения: $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ либо $\alpha = 1$, $\beta = 0$). В правой части – внешняя вынуждающая сила с амплитудой A и частотой ω_{sin} .

Генератор Анищенко-Астахова (модельная система **gen_aa**).

Подобный тип автоколебательной системы известен с 50-х годов (работы К.Ф. Теодорчика). Значительно позднее было обнаружено, что модифицированная модель такого генератора (генератор Анищенко–Астахова) позволяет наблюдать богатое разнообразие сложных, в том числе и хаотических, колебательных режимов. Это обстоятельство сделало ГИН удобной моделью для исследования закономерностей возникновения и эволюции хаотических колебаний.

В соответствии с названием, амплитуда колебаний такого генератора регулируется не характеристикой усилительного каскада, а специальной цепью обратной связи (ОС), управляющей коэффициентом передачи линей-

ного усилителя. Сама цепь ОС состоит из детектора (нелинейный элемент) и фильтра (инерционность).

Математическая модель ГИН содержит три дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= m x - x z + y - a x^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -g\left(z - x \frac{x + |x|}{2}\right).\end{aligned}$$

Здесь m – нормированный параметр петлевого усиления; g – нормированный параметр инерционности (отношение частоты среза фильтра в цепи ОС к собственной частоте колебаний генератора). Типичные значения: $g = 0.2 \dots 0.3$, $m = 0 \dots 2.0$.

Так же, как и в случае генератора Ван дер Поля, включение в правую часть первого уравнения гармонического внешнего воздействия приводит к неавтономной модели ГИН, позволяющей наблюдать и исследовать разнообразные бифуркации квазипериодических колебательных режимов.

Система Ресслера (модельная система **rossler**).

Эта трехмерная система была предложена на основе динамики химических реакций. При вариации управляющих параметров α и μ она демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода и рождение хаотического аттрактора.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu).\end{aligned}$$

Типичные значения параметров: $\alpha = 0.2$, $\mu = 2.6 \dots 6.0$.

Система Лоренца (модельная система **lorenz**).

Знаменитая система уравнений, полученная американским метеорологом Лоренцем при упрощении уравнений Зальцмана для тепловой конвекции в жидкости, ныне стала классическим примером динамической системы с хаотическим аттрактором.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy.\end{aligned}$$

Типичные значения параметров: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28.0$.

Цепь Чуа «Double Scroll» (модельная система `chua_ds`).

Этот пример несложной радиотехнической системы с весьма разнообразной динамикой был разработан Т. Matsumoto, L. Chua и др. в 1984г. В последующие годы, во многом благодаря неистощимой энергии и энтузиазму профессора L. Chua (университет Беркли, США) эта кусочно-линейная система была исследована или использована в качестве модели в множестве работ различных авторов. Было разработано большое количество модификаций и вариантов. Здесь приведен один из наиболее популярных вариантов – так называемая “double scroll circuit”. Эта схема обязана своим названием хаотическому аттрактору сложной структуры - “двойной завиток”.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - g(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x) &= cx + 0.5(b - c)(|x + d| - |x - d|) + \\ &+ 0.5(a - b)(|x + 1| - |x - 1|).\end{aligned}$$

Здесь α , β , a , b , c , d – управляющие параметры системы. Из них четыре последних задают нелинейную характеристику (наклон соответствующего сегмента). Типичный набор параметров: 11.0, 14.0, -0.713, -0.445, 4.6, 7.2 .

Оглавление

Предисловие	3
1 Визуализация фазовых траекторий	4
1.1 Постановка задачи	4
1.2 Теоретические сведения: Методы численного интегрирования	6
1.3 Численный алгоритм	13
1.4 Практическая часть	13
2 Построение сечения Пуанкаре	16
2.1 Постановка задачи	16
2.2 Теория метода	20
2.3 Численный алгоритм	23
2.4 Практическая часть	25
3 Анализ на устойчивость состояний равновесия	27
3.1 Предварительные замечания	27
3.2 Теория метода	31
3.3 Численный алгоритм	47
3.4 Практическая часть	50
4 Анализ на устойчивость периодических колебаний	51
4.1 Предварительные замечания	51
4.2 Теория метода	51
4.3 Численный алгоритм	60
4.4 Практическая часть	62
5 Спектральный анализ колебаний	63
5.1 Предварительные замечания	63
5.2 Теория метода	75
5.3 Численный алгоритм	78
5.4 Практическая часть	80
6 Ляпуновские показатели	83
6.1 Предварительные замечания	83
6.2 Теория метода	86

6.3	Численный алгоритм	92
6.4	Практическая часть	94
7	Корреляционная размерность	96
7.1	Предварительные замечания	96
7.2	Теория метода	100
7.3	Численный алгоритм	104
7.4	Практическая часть	106
8	Автокорреляционная функция	108
8.1	Предварительные замечания	108
8.2	Теория метода	109
8.3	Численный алгоритм	113
8.4	Практическая часть	114
9	Анализ структуры точечных процессов	116
9.1	Предварительные замечания	116
9.2	Теория метода	119
9.3	Численный алгоритм	122
9.4	Практическая часть	124
	Список модельных систем	127

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Учебное издание

Постнов Дмитрий Энгелевич
Павлов Алексей Николаевич
Астахов Сергей Владимирович

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

*Учебное пособие
для студентов физического факультета*

Оригинал-макет подготовил Павлов А.Н.