

В.В. Астахов, А.В. Шабунин

Издание поддержано

программой BRNE, грант REC-006

# Радиофизический практикум по теории колебаний

Издательство ГосУНЦ “Колледж”

Саратов 2003

УДК 53.182(076.5)

**А 91** Астахов В.В., Шабунин А.В. Радиофизический практикум по теории колебаний: Учебное пособие для студентов вузов. Саратов: Издательство ГосУНЦ “Колледж”, 2003.

Учебное пособие составлено в соответствии с программой по курсу теории колебаний для физического факультета университета. Содержит описание семи лабораторных работ, выполняемых индивидуально студентами параллельно со слушанием курса лекций по теории колебаний. В него входит сжатое описание необходимых теоретических сведений, описание методов исследований, схем лабораторных установок и подробный порядок выполнения проводимых экспериментальных исследований. В конце каждого раздела приведены контрольные вопросы и задания. В общем библиографическом списке к “Практикуму” дана дополнительная литература, знакомство с которой будет полезным при выполнении лабораторных работ.

Предназначено для студентов вузов.

Рецензенты: проф. В.С. Анищенко, проф. Т.Е. Вадивасова, проф. А.В. Хохлов

Рекомендовано к изданию кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ.

© В.В. Астахов, А.В. Шабунин, 2003

© Оформление Д.В. Соколов, 2003

© Издательство ГосУНЦ “Колледж”, 2003

# Оглавление

Предисловие авторов	6
<b>1 Состояние равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации</b>	<b>7</b>
1.1 Поведение системы в окрестности состояния равновесия. Типы точек равновесия на фазовой плоскости . . . . .	11
1.2 Состояния равновесия в динамических системах с размерностью фазового пространства равной трем . . . . .	18
1.3 Бифуркации состояний равновесия . . . . .	18
1.3.1 Седло - узловая бифуркация . . . . .	19
1.3.2 Транскритическая бифуркация . . . . .	21
1.3.3 Бифуркация типа вил . . . . .	22
1.3.4 Бифуркация Андронова - Хопфа . . . . .	23
1.4 Работа N 1. Исследование состояний равновесия в осцилляторе Дуффинга	27
1.4.1 Исследуемая система . . . . .	27
1.4.2 Практические задания . . . . .	30
1.5 Работа N 2. Исследование состояний равновесия в динамической модели, описывающей ход химических реакций . . . . .	32
1.5.1 Исследуемая система . . . . .	32
1.5.2 Практические задания . . . . .	34
1.6 Работа N 3. Исследование состояний равновесия в генераторе с инерционной нелинейностью . . . . .	36
1.6.1 Исследуемая система . . . . .	36
1.6.2 Практические задания . . . . .	40
1.7 Контрольные вопросы и задания . . . . .	41
<b>2 Нелинейный осциллятор под действием внешней периодической силы</b>	<b>43</b>
2.1 Сравнительный анализ поведения линейного и нелинейного осцилляторов	43
2.2 Явление нелинейного резонанса. Метод гармонического баланса . . . . .	48

2.3	Работа N 4. Исследование явления нелинейного резонанса в последовательном колебательном контуре . . . . .	54
2.3.1	Исследуемая система . . . . .	54
2.3.2	Лабораторная установка . . . . .	58
2.3.3	Практические задания . . . . .	59
2.4	Контрольные вопросы и задания . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Осцилляторы с изменяющимися параметрами. Явление параметрической неустойчивости</b>	<b>62</b>
3.1	Примеры параметрических осцилляторов. Уравнение Матъе и уравнение Хилла . . . . .	62
3.2	Условия возникновения параметрической неустойчивости . . . . .	65
3.3	Энергетическое описание параметрического резонанса . . . . .	71
3.4	Нелинейные механизмы ограничения амплитуды колебаний . . . . .	73
3.5	Работа N 5. Исследование параметрической неустойчивости в колебательном контуре с переменной емкостью . . . . .	78
3.5.1	Исследуемая система . . . . .	78
3.5.2	Лабораторная установка . . . . .	80
3.5.3	Порядок выполнения работы . . . . .	81
3.6	Контрольные вопросы и задания . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Автоколебания. Возбуждение автоколебаний</b>	<b>83</b>
4.1	Примеры автоколебательных систем. Уравнение Ван-дер-Поля и уравнение Рэля . . . . .	85
4.1.1	Ламповый генератор с колебательным контуром и индуктивной обратной связью . . . . .	85
4.1.2	Генератор на туннельном диоде . . . . .	87
4.1.3	RC - генератор с мостом Вина . . . . .	89
4.1.4	Закрепленный пружинами грузик на ленте, движущейся с постоянной скоростью . . . . .	91
4.2	Методы исследования автоколебательных систем . . . . .	93
4.2.1	Состояния равновесия и анализ устойчивости . . . . .	94

4.2.2	Методы нахождения приближенных аналитических решений, соответствующих периодическим автоколебаниям . . . . .	94
4.2.3	Метод анализа устойчивости периодических движений на фазовой плоскости . . . . .	109
4.2.4	Бифуркации рождения предельного цикла . . . . .	113
4.3	Генератор с жестким возбуждением . . . . .	116
4.4	Работа N 6. Исследование мягкого и жесткого режимов возбуждения автоколебаний . . . . .	126
4.4.1	Порядок выполнения работы . . . . .	125
4.5	Контрольные вопросы и задания . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Синхронизация автоколебательных систем</b>	<b>129</b>
5.1	Синхронизация колебаний. Виды синхронизации . . . . .	129
5.2	Вынужденная синхронизация в генераторе Ван дер Поля . . . . .	136
5.3	Работа N 7. Исследование вынужденной синхронизации автогенератора	140
5.3.1	Лабораторная установка . . . . .	140
5.3.2	Вывод уравнения генератора . . . . .	142
5.3.3	Порядок выполнения работы . . . . .	143
5.4	Контрольные вопросы и задания . . . . .	144
	<b>Литература</b>	<b>145</b>

## Предисловие авторов

Данное учебное пособие предназначено для студентов-физиков, выполняющих лабораторные работы в радиофизическом практикуме по курсу “Теория нелинейных колебаний”. Оно охватывает разделы курса, посвященные исследованию состояний равновесия, бифуркациям состояния равновесия, теории нелинейного резонанса, параметрическим колебаниям, автоколебательным системам и вынужденной синхронизации. Каждый раздел начинается с вводных теоретических сведений, после которых приводится описание лабораторных работ. В лабораторных работах предусмотрено выполнение практических заданий, связанных с проведением теоретических исследований, численного моделирования и радиофизического эксперимента. Ряд самостоятельных задач, предназначенных для контроля и самоконтроля знаний студентов, вынесен в разделы “контрольные вопросы и упражнения” к каждой главе пособия.

Авторы выражают свою признательность профессору Анищенко В.С., профессорам Вадивасовой Т.Е. и Хохлову А.В. за полезные замечания, сделанные в ходе обсуждения настоящего пособия. Авторы также признательны зав. лабораторией Никитину А.П., инженерам Акопову А.А., Демидову В.В., Николаеву С.Н., аспиранту Червакову В.П. за помощь при создании лабораторных работ.

В.В. Астахов

А.В. Шабунин

# 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

Исследование поведения динамической системы можно свести к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве. При фиксированных значениях управляющих параметров все возможные движения системы отображаются на фазовом портрете. *Фазовым портретом динамической системы называется структура разбиения фазового пространства на фазовые траектории.* Под структурой разбиения фазового пространства на траектории понимается геометрическая картина взаимного расположения траекторий в фазовом пространстве. Все возможные траектории разделяют на обыкновенные и особые. При построении фазового портрета ключевой задачей является поиск и исследование особых фазовых траекторий. К простейшим особым траекториям относятся: 1). *Особые точки* или *точки равновесия*, которым соответствует состояние покоя динамической системы (значения динамических переменных остаются постоянными во времени), 2). *Изолированные замкнутые траектории* или *предельные циклы*, которым соответствуют периодические колебания, 3). *Сепаратрисные кривые и поверхности* (или *устойчивые и неустойчивые многообразия седловых точек равновесия и предельных циклов*), которые являются границами

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

бассейнов притяжения устойчивых особых траектория (например, устойчивых точек равновесия или устойчивых предельных циклов).

Данный раздел посвящен изучению простейших особых фазовых траекторий, а именно, точек равновесия или состояний равновесия динамических систем, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_N), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

*Состоянием равновесия динамической системы называется точка в фазовом пространстве, в которой вектор скорости равен нулю  $(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_N}{dt}) = 0$ .*

Из определения видно, что состояние равновесия - это состояние в котором отсутствует всякое движение. Для того чтобы найти координаты состояния равновесия, необходимо приравнять к нулю правые части дифференциальных уравнений (1.1), описывающих динамическую систему.

Наглядным примером состояний равновесия является нижнее и верхнее положение математического маятника:  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  ( $\varphi$  - угол отклонения маятника от вертикали). Если начальные условия задать в состоянии равновесия, то при отсутствии возмущений система будет находиться в нем как угодно долго. Однако, в реальности всегда присутствуют возмущающие факторы, которые обязательно выведут динамическую систему из состояния равновесия (например, флуктуации). В этом случае ее дальнейшее поведение будет зависеть от того, является ли состояние равновесия устойчивым или нет. Если оно устойчиво, то система вернется к состоянию равновесия. Если нет, то начнется переходный процесс к какому-либо другому устойчивому состоянию. Например, в случае маятника с трением нижнее состояние равновесия устойчиво. Если вывести маятник из этого состояния (отклонить его на небольшой угол от вертикали), то он вернется через некоторое время в исходное состояние равновесия. Верхняя



## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

точка равновесия маятника является неустойчивой. Малейшие флуктуации приведут к тому, что маятник выйдет из этого состояния и начнутся затухающие колебания, после которых система перейдет к нижнему устойчивому состоянию равновесия.

Метод определения устойчивости состояния равновесия (также как и любого иного решения) основан на исследовании поведения линеаризованной системы в окрестности точки равновесия (или иной особой траектории). Алгоритм заключается в следующем.

Пусть в фазовом пространстве системы (1.1) точка  $P$  с координатами  $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_N = \bar{x}_N$  является состоянием равновесия данной системы, то есть:

$$f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) = 0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.2)$$

Выберем начальные условия в окрестности состояния равновесия:

$$x_1 = \bar{x}_1 + \tilde{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2 + \tilde{x}_2, \dots, \quad x_N = \bar{x}_N + \tilde{x}_N \quad (1.3)$$

где  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$  - координаты состояния равновесия,  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$  - малые приращения. Подставим (1.3) в уравнения системы (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_i}{dt} + \frac{d\tilde{x}_i}{dt} &= f_i(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1, \dots, \bar{x}_N + \tilde{x}_N), \\ i &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.4)$$

При малых отклонениях  $\tilde{x}_i$  функции  $f_i(x_i)$  можно разложить в ряд Тейлора около точки  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ , ограничиваясь линейными членами разложения (линеаризовать):

$$f_i(x_1, \dots, x_N) = f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) + \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N} \tilde{x}_j \quad (1.5)$$

где значения производных вычисляются в точке равновесия. Подставляя (1.5) в (1.4) и принимая во внимание (1.2), запишем уравнения для эволюции возмущений:

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N} \tilde{x}_j \quad (1.6)$$

Состояние равновесия будет устойчивым, если все возмущения  $\tilde{x}_i$  будут затухать во времени. При каких условиях это будет происходить? Уравнения (1.6) являются линейными и их решения имеют форму  $\tilde{x} \sim \exp(\lambda t)$ . Экспоненциальная функция будет затухающей при увеличении времени  $t$ , если показатель экспоненты отрицателен (вещественный) или имеет отрицательную вещественную часть (комплексный). Из теории линейных уравнений известно, что показатели  $\lambda_i$  определяются как корни характеристического уравнения:

$$\det \left[ \left. \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N} - \delta_{ij} \lambda \right] = 0 \quad (1.7)$$

( $\delta_{ij}$  - символ Кронекера) или, что тоже самое, как собственные значения матрицы Якоби  $[\partial f_i / \partial x_j]$ . Таким образом, для того чтобы исследовать устойчивость состояния равновесия, необходимо проделать следующее:

1. Записать матрицу, элементами которой являются частные производные от правых частей уравнений системы по динамическим переменным  $\partial f_i / \partial x_j$  (матрица Якоби).
2. Вычислить значения коэффициентов матрицы в точке равновесия.
3. Определить собственные числа полученной числовой матрицы  $[a_{ij}]$ . Это можно сделать, решив для нее характеристическое уравнение:

$$\det[a_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = 0 \quad (1.8)$$

где  $\delta_{ij}$  - единичная матрица.

## 1.1 Поведение системы в окрестности состояния равновесия. Типы точек равновесия на фазовой плоскости

Проведем анализ состояний равновесия для простейших динамических систем в которых возможны колебания - систем с размерностью фазового пространства  $N = 2$  (то есть на фазовой плоскости). Характер особой точки (состояния равновесия) определяется характером поведения фазовых траекторий в ее малой окрестности. Поведение фазовых траекторий вблизи точки равновесия описывается уравнениями в вариациях, то есть при малых отклонениях от состояния равновесия мы пренебрегаем нелинейными слагаемыми при разложении в ряд Тейлора (1.5). Таким образом, поведение системы приближенно описывается линейными дифференциальными уравнениями, решение которых имеет форму  $\tilde{x} \sim \sum C_i \exp(\lambda_i t)$ , то есть собственные значения  $\lambda_i$  полностью определяют характер точки равновесия динамической системы.

Рассмотрим динамическую систему вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{1.9}$$

и исследуем возможные типы точек равновесия на фазовой плоскости. Пусть точка  $P$  с координатами  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$  является состоянием равновесия. Как уже было показано выше (1.3) в окрестности этой точки мы можем представить динамические переменные системы в виде  $x = \bar{x} + \tilde{x}$ ,  $y = \bar{y} + \tilde{y}$  (где  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  - малые величины). Подставляя новые

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

переменные в (1.9) и используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \tilde{x} + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \tilde{y} \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= g(\bar{x}, \bar{y}) + \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \tilde{x} + \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \tilde{y}\end{aligned}\quad (1.10)$$

Поскольку  $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ,  $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ , линеаризованная в окрестности точки равновесия система примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= A\tilde{x} + B\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= C\tilde{x} + D\tilde{y}.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Данную систему можно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \frac{d\tilde{x}}{dt} \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

где  $A = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ ,  $B = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ ,  $C = \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ ,  $D = \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ . Получена система двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, с помощью которой можно проанализировать характер состояний равновесия. Частное решение системы уравнений (1.11) ищется в виде

$$\tilde{x} = \gamma_1 \exp(\lambda t), \quad \tilde{y} = \gamma_2 \exp(\lambda t). \quad (1.13)$$

Общее решение системы линейных уравнений есть линейная комбинация частных решений.

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

Подставляя (1.13) в (1.11), получим

$$\begin{aligned}(A - \lambda)\gamma_1 + B\gamma_2 &= 0 \\ C\gamma_1 + (D - \lambda)\gamma_2 &= 0.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Для того чтобы система линейных однородных алгебраических уравнений (1.14) относительно неизвестных  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель ее был равен нулю

$$\det \begin{bmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{bmatrix} = 0.\tag{1.15}$$

Уравнение (1.15) называется характеристическим уравнением системы (1.11). Оно представляет собой частный случай уравнения (1.7). Перепишем характеристическое уравнение (1.15) в виде

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0,\tag{1.16}$$

где  $S = A + D$ ,  $J = AD - BC$ . Отметим, что  $S$  и  $J$  - след и детерминант матрицы, входящие в уравнение (1.12). Корни характеристического уравнения (1.16)

$$\lambda_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}\tag{1.17}$$

определяют решение системы (1.11), следовательно и поведение фазовых траекторий в окрестности точки равновесия. В вопросе об устойчивости состояния равновесия определяющую роль играет знак действительной части собственного значения ( $Re \lambda$ ).

Если хотя бы у одного корня характеристического уравнения действительная часть положительная ( $Re \lambda_1 > 0$  или  $Re \lambda_2 > 0$ ), то состояние равновесия неустойчиво.

Состояние равновесия устойчиво только в том случае, когда и  $Re \lambda_1 < 0$ , и  $Re \lambda_2 < 0$ .

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

Типы состояния равновесия определяются тем, каковы корни  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения. На фазовой плоскости могут наблюдаться следующие случаи:

1.  $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексные с отрицательными вещественными частями:  $\lambda_1 = -\alpha + j\omega$ ,  $\lambda_2 = -\alpha - j\omega$ ,  $\alpha > 0$  и  $\omega$  - вещественные числа. Подстановка данных собственных значений в общее решение приводит к следующей зависимости динамических переменных от времени:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= X \exp(-\alpha t) \cos(\omega t + \Theta_1) \\ \tilde{y} &= Y \exp(-\alpha t) \cos(\omega t + \Theta_2)\end{aligned}$$

где вещественные константы  $X, Y, \Theta_1, \Theta_2$  определяются из начальных условий. Вид траекторий в окрестности состояния равновесия представляет собой закручивающуюся спираль (рис.1.2а). Тип состояния равновесия - *устойчивый фокус*.

2.  $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексные числа с положительными вещественными частями  $\lambda_1 = \alpha + j\omega$ ,  $\lambda_2 = \alpha - j\omega$ ,  $\alpha > 0$  и  $\omega$  - вещественные числа. Вид решений тот же, что и в предыдущем пункте, но показатель экспоненты - положительный. Фазовый портрет представляет собой раскручивающуюся спираль (рис.1.2б), тип состояния равновесия - *неустойчивый фокус*.

3.  $\lambda_1, \lambda_2$  - действительные отрицательные числа:  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . В этом случае решение линеаризованного уравнения в окрестности состояния равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \xi_1 \exp(\lambda_1 t) + \xi_2 \exp(\lambda_2 t) \\ \tilde{y} &= \zeta_1 \exp(\lambda_1 t) + \zeta_2 \exp(\lambda_2 t)\end{aligned}\tag{1.18}$$

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

где постоянные  $\xi_{1,2}$  и  $\zeta_{1,2}$  определяются из начальных условий. Вид фазовых траекторий в окрестности состояния равновесия показан на рис. 1.2с. Траектории сходятся к состоянию равновесия без вращения вокруг него. Данный тип состояния равновесия называется *устойчивый узел*.

4.  $\lambda_1, \lambda_2$  - действительные положительные числа:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ . Вид решения тот же, что и в предыдущем пункте. Траектории отходят от состояния равновесия (рис.1.2d). Тип равновесия - *неустойчивый узел*.

5.  $\lambda_1, \lambda_2$  - действительные числа разных знаков:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . Вид решения - тот же, что и в случае узла, но показатели экспонент имеют разные знаки. При этом на фазовой плоскости существует траектория (точнее множество траекторий), направляющаяся при возрастании времени к состоянию равновесия (для того, чтобы оказаться на такой траектории нужно выбрать начальные значения такими, чтобы константы  $\xi_1$  и  $\zeta_1$  в (1.18) оказались равными нулю). Совокупность таких траекторий называется *притягивающим многообразием* состояния равновесия (также используется термин “устойчивое многообразие”). Направление притягивающего многообразия задается собственным вектором матрицы линеаризации (1.12), соответствующим отрицательному собственному значению:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \vec{a} = \lambda_2 \vec{a}$$

Траектории не лежащие на притягивающем многообразии могут также в течении ограниченного времени приближаться к состоянию равновесия, но в конце концов уходят от него (рис. 1.2e). Если мы рассмотрим эволюцию системы в обратном времени, то есть при замене  $t$  на  $-t$ , мы сможем найти такие начальные условия, что траектория будет неограниченно приближаться к точке

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

равновесия (для того, чтобы оказаться на такой траектории нужно выбрать начальные значения такими, чтобы константы  $\xi_2$  и  $\zeta_2$  в (1.18) оказались равными нулю). Совокупность таких траекторий называется *отталкивающим многообразием* (или неустойчивым многообразием) состояния равновесия. Направление отталкивающего многообразия задается собственным вектором матрицы линеаризации (1.12), соответствующим положительному собственному значению:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \vec{b} = \lambda_1 \vec{b}$$

Все траектории не лежащие на отталкивающем многообразии в конце концов отдаляются от него при  $t \rightarrow -\infty$ . Точка равновесия указанного выше типа называется *седлом*.

6. Для консервативных осцилляторов можно выделить случай, когда  $\lambda_1, \lambda_2$  - чисто мнимые, т.е.  $Re \lambda_1 = 0$  и  $Re \lambda_2 = 0$ . Вид решения схож с решением в случае фокуса, но показатель экспоненты нулевой. Вид фазовых траекторий в окрестности состояния равновесия изображен на рис. 1.2f. Тип состояния равновесия - *центр*.

На рис. 1.1 показаны области существования различных типов состояния равновесия на плоскости  $(J, S)$ . Отметим, что ось ординат ( $S = 0$ ) - это линия, соответствующая консервативным системам. Фазовые портреты перечисленных типов состояний равновесия представлены на рис.1.2.



1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

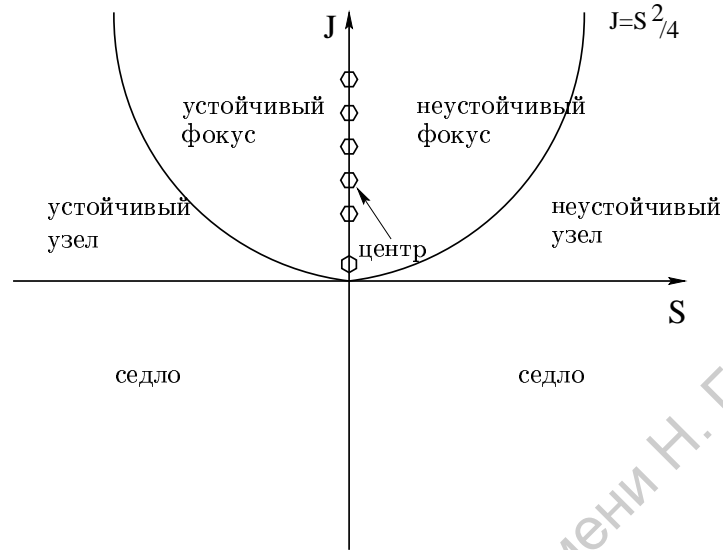


Рис. 1.1: Области существования различных типов состояния равновесия на плоскости (J,S).

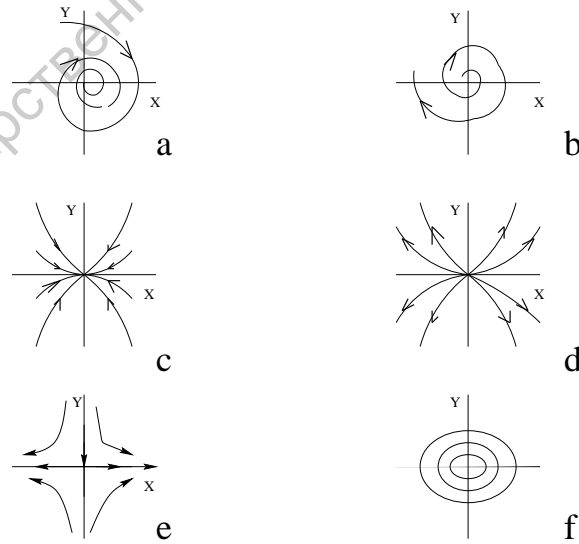


Рис. 1.2: Типы состояний равновесия на фазовой плоскости: (а) - устойчивый фокус, (b) - неустойчивый фокус, (с) - устойчивый узел, (d) - неустойчивый узел, (е) - седло, (f) - центр.

## 1.2 Состояния равновесия в динамических системах с размерностью фазового пространства равной трем

В динамической системе с размерностью фазового пространства равной трем имеется 3 корня характеристического уравнения. Точки равновесия могут иметь более сложный и разнообразный характер. Здесь возможны следующие основные случаи:

1.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - действительные отрицательные (положительные) числа. Состояние равновесия в этом случае называется *устойчивым (неустойчивым) узлом*,
2.  $\lambda_1$  - действительный,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  - комплексные, причем все корни имеют отрицательные (положительные) действительные части. Состояние равновесия в этом случае называется *устойчивым (неустойчивым) фокусом*,
3. Один из корней действительный, два других комплексные, причем знаки действительного корня и действительных частей двух других комплексно - сопряженных корней - разные ( $\lambda_1$ - действительный,  $\lambda_2, \lambda_3$  - комплексно - сопряженные,  $\lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_{2,3} > 0$ ). Состояние равновесия в этом случае называется *седло - фокусом*.
4. Все корни действительные и разных знаков. Этот случай соответствует особым точкам, которые называются *седло-узел*.

## 1.3 Бифуркации состояний равновесия

Поведение динамической системы при непрерывном изменении ее параметра, проходя через некоторые значения, может претерпевать качественные изменения, что

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

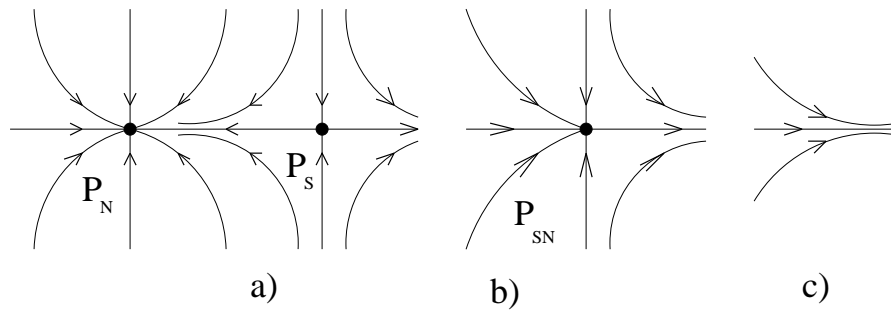


Рис. 1.3: Перестройки структуры фазового пространства в окрестности точек равновесия при седло-узловой бифуркации.

отражается в качественной перестройке фазового портрета. Подобные качественные изменения в поведении системы при непрерывном изменении параметра называют бифуркацией. Значения параметра, при котором происходит бифуркация, называют бифуркационным значением или точкой бифуркации. В динамических системах могут происходить бифуркации состояний равновесия, бифуркации предельных циклов и бифуркации более сложных предельных множеств.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся бифуркации состояний равновесия.

### 1.3.1 Седло - узловая бифуркация

Пусть в фазовом пространстве системы имеется две точки равновесия: устойчивый узел  $P_N$  и седло  $P_S$  (рис.1.3.a). При движении по параметру  $m$  к некоторому бифуркационному значению  $m_{cr}$  точки равновесия сближаются и при значении  $m = m_{cr}$  происходит бифуркация слияния узла и седла с образованием негрубого состояния равновесия, называемого седло - узлом (рис.1.3.b). При дальнейшем изменении параметра за точку бифуркации положение равновесия исчезает (рис.1.3.c).

Простейшей модельной системой, описывающей слияние и исчезновение устойчиво-

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

го и неустойчивого состояния равновесия, служит уравнение вида:

$$\frac{dx}{dt} = m - x^2, \quad (1.19)$$

где  $x$ -динамическая переменная,  $m$ - управляющий параметр.

Уравнение (1.19) является одномерным и в его фазовом пространстве естественно не может происходить седло-узловая бифуркация (она требует как минимум двумерного фазового пространства). Однако, закономерности слияния и исчезновения состояний равновесия в фазовом пространстве системы (1.19) качественно повторяют закономерности седло-узловой бифуркации в пространстве большей размерности. Подобные простейшие формы дифференциального уравнения в окрестности особой точки, которые полностью описывают локальную бифуркацию и в которых важные для характеристики особой точки величины оказываются выписанными в явном виде (например, собственные значения), называются *нормальной формой*. Нормальной формой седло-узловой бифуркации является уравнение (1.19).

Система (1.19) имеет две точки равновесия с координатами  $\bar{x}_1 = \sqrt{m}$  и  $\bar{x}_2 = -\sqrt{m}$ . Видно, что они определены только при  $m > 0$ . Их устойчивость определяется собственным значением  $\rho = -2\bar{x}_i$  (где  $\bar{x}_i$  - координата точки равновесия). Для состояния равновесия с координатой  $\bar{x}_1 = \sqrt{m}$  получаем  $\rho_1 = -2\sqrt{m}$ , и для точки  $\bar{x}_2 = -\sqrt{m}$  получаем  $\rho_2 = 2\sqrt{m}$ . Следовательно,  $\bar{x}_1$  - устойчивая точка равновесия, а  $\bar{x}_2$  - неустойчивая. В результате мы получаем бифуркационную диаграмму, изображенную на рис.1.4.

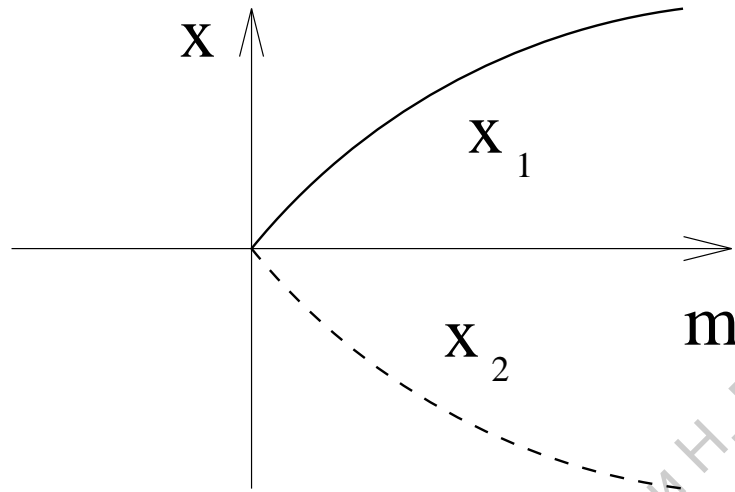


Рис. 1.4: Диаграмма седло-узловой бифуркации. При  $m < 0$  состояния равновесия отсутствуют. В бифуркационной точке  $m = 0$  возникает седло-узел. При  $m > 0$  имеется две ветви состояний равновесия: устойчивая (сплошная линия, на которой лежат точки  $x_1$ ) и неустойчивая (штриховая линия, на которой лежат точки  $x_2$ ).

### 1.3.2 Транскритическая бифуркация

При данной бифуркации происходит обмен устойчивостью между двумя точками равновесия. Нормальная форма для транскритической бифуркации имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = mx - x^2 \quad (1.20)$$

Система (1.20) имеет две точки равновесия  $\bar{x}_1 = 0$  и  $\bar{x}_2 = m$ . Их устойчивость определяется собственным значением  $\rho = m - 2\bar{x}_i$ . Для точки равновесия  $\bar{x}_1 = 0$  получаем  $\rho_1 = m$  и для точки  $\bar{x}_2 = m$  получаем  $\rho_2 = -m$ . Видно, что точка  $\bar{x}_1 = 0$  является устойчивой при  $m < 0$  и неустойчивой при  $m > 0$ . Для точки  $\bar{x}_2 = m$  все наоборот.

При бифуркационном значении параметра  $m = 0$  точки равновесия сливаются и обмениваются устойчивостью. Диаграмма транскритической бифуркации изображена на рис.1.5.

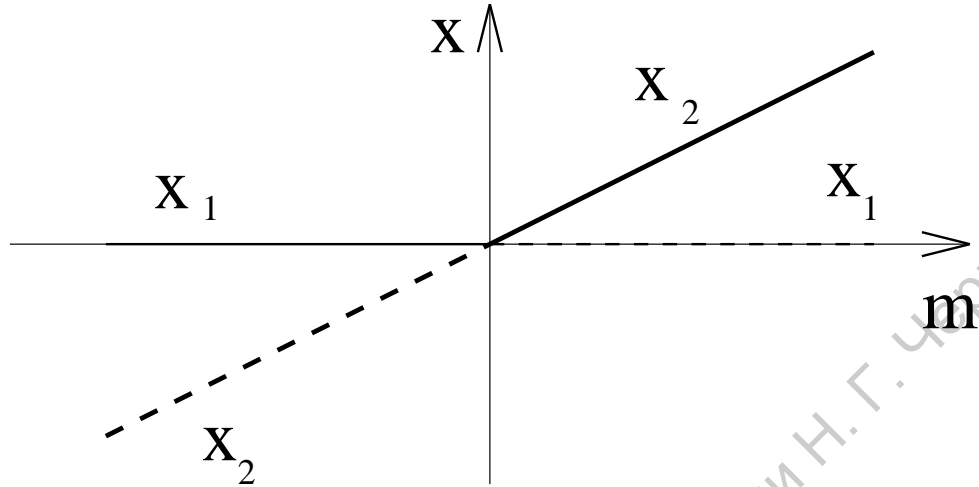


Рис. 1.5: Диаграмма транскритической бифуркации

### 1.3.3 Бифуркация типа вил

Нормальная форма, описывающая данную бифуркацию, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = mx - x^3 \quad (1.21)$$

В этой системе при  $m < 0$  имеется одна точка равновесия  $\bar{x}_1 = 0$ . При  $m > 0$  существует три состояния равновесия:  $\bar{x}_1 = 0$ ,  $\bar{x}_2 = \sqrt{m}$  и  $\bar{x}_3 = -\sqrt{m}$ . Устойчивость состояний равновесия характеризуется собственным значением  $\rho = m - 3\bar{x}_i^2$ . Видно, что для точки  $\bar{x}_1 = 0$  собственное значение  $\rho = m$ , для  $\bar{x}_2 = \sqrt{m}$  и  $\bar{x}_3 = -\sqrt{m}$  собственное значение  $\rho = -2m$ . В результате получаем бифуркационную диаграмму, изображенную на рис.1.6. При переходе управляющего параметра через ноль устойчивое состояние равновесия становится неустойчивым и в его окрестности рождается пара устойчивых симметричных друг другу состояний равновесия. Следует отметить, что данная бифуркация наблюдается в системах с симметрией. (Система (1.21) симметрична по отношению к замене  $x \leftrightarrow (-x)$ .)

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

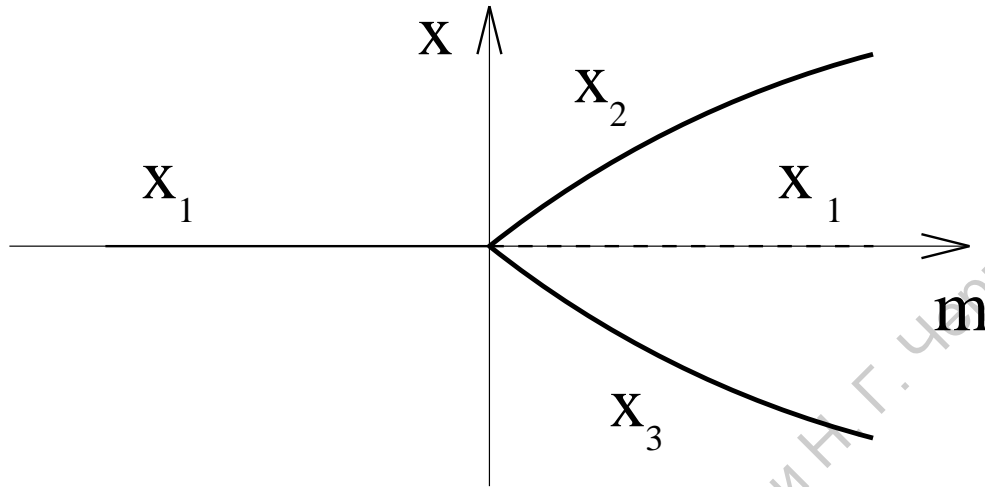


Рис. 1.6: Диаграмма бифуркации вил. Сплошные линии соответствуют устойчивым состояниям, штриховая - неустойчивым состояниям

### 1.3.4 Бифуркация Андронова - Хопфа

При этой бифуркации состояния равновесия происходит рождение предельного цикла. Нормальная форма, описывающая данную бифуркацию, имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = (m + i\omega)z - z|z|^2, \quad (1.22)$$

где  $z$  - комплексная переменная,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  - произвольная константа, которая определяет собственную частоту системы и не играет роли бифуркационного параметра. Нормальная форма (1.22) является комплексным эквивалентом нормальной формы бифуркации вил.

Перепишем (1.22) в вещественных переменных, полагая  $z = x + iy$ . В результате получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [m - (x^2 + y^2)]x - \omega y, \\ \frac{dy}{dt} &= [m - (x^2 + y^2)]y + \omega x, \end{aligned} \quad (1.23)$$

1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

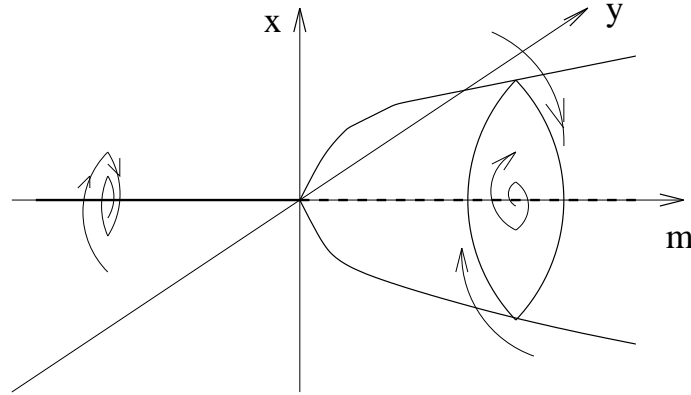


Рис. 1.7: Диаграмма бифуркации Андронова - Хопфа

Уравнения для стационарных решений имеют вид:

$$\begin{aligned} [m - (x^2 + y^2)]x - \omega y &= 0 \\ [m - (x^2 + y^2)]y + \omega x &= 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Домножая первое уравнение на  $x$ , второе - на  $y$  и складывая правые и левые части, получим

$$[m - (x^2 + y^2)](x^2 + y^2) = 0. \quad (1.25)$$

Видно, что существует два решения: одно из них -  $x = 0, y = 0$  (или  $z = 0$ ) и второе, для которого  $x^2 + y^2 = |z|^2 = m$ . То есть при бифуркационном значении  $m = 0$  в окрестности состояния равновесия с координатами  $x = 0, y = 0$  рождается предельный цикл, радиус которого  $|z| = \sqrt{m}$ . Схема бифуркации Андронова - Хопфа для нормальной формы (1.22), представленной в прямоугольных координатах, изображена на рис.1.7.



## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

В заключение рассмотрим пример исследования состояний равновесия в осцилляторе Ван-дер-Поля.

**Пример.** Дано уравнение осциллятора:

$$x'' - (\epsilon - x^2)x' + x = 0. \quad (1.26)$$

Определим состояния равновесия осциллятора. Перепишем (1.26) в виде системы уравнений первого порядка:

$$x' = y, \quad (1.27)$$

$$y' = (\epsilon - x^2)y - x. \quad (1.28)$$

Приравняем нулю правые части уравнений:  $y = 0$ ,  $(\epsilon - x^2)y - x = 0$ . Единственная точка, удовлетворяющая этим уравнениям, - начало координат  $(0, 0)$ . Следовательно, она является состоянием равновесия для рассматриваемой системы. Теперь определим характер устойчивости найденного состояния равновесия. Для этого построим матрицу Якоби:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2xy - 1 & \epsilon - x^2 \end{bmatrix},$$

которая в начале координат будет иметь значения коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

Чтобы определить собственные значения полученной матрицы линеаризации, постро-

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

им характеристическое уравнение:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \epsilon - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

или:

$$\lambda^2 - \epsilon\lambda + 1 = 0.$$

Решение данного квадратного уравнения дает нам собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}.$$

Проанализируем полученные собственные значения в зависимости от параметра системы  $\epsilon$ . При малых  $\epsilon$  ( $|\epsilon| < 2$ ) подкоренное выражение отрицательно, следовательно собственные значения комплексно-сопряженные:

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon}{2} + j \frac{\sqrt{4 - \epsilon^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\epsilon}{2} - j \frac{\sqrt{4 - \epsilon^2}}{2}.$$

При  $\epsilon < 0$  состояние равновесия представляет собой устойчивый фокус (рис.1.2a). При переходе параметра  $\epsilon$  через ноль состояние равновесия теряет устойчивость и становится неустойчивым фокусом (рис.1.2b). При этом фазовый портрет в окрестности состояния равновесия качественно меняется (сравним рис. 1.2a и 1.2b). Таким образом, при переходе параметра  $\epsilon$  через ноль состояние равновесия претерпевает бифуркацию. Если значение  $\epsilon$  велико ( $|\epsilon| > 2$ ), то подкоренное выражение положительно и оба собственных значения чисто вещественные. При  $\epsilon > 2$  оба собственных значения положительны и состояние равновесия представляет собой неустойчивый узел (рис.1.2d). При  $\epsilon < -2$  оба собственных значения отрицательны и состояние равновесия представляет собой устойчивый узел (рис.1.2c).

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

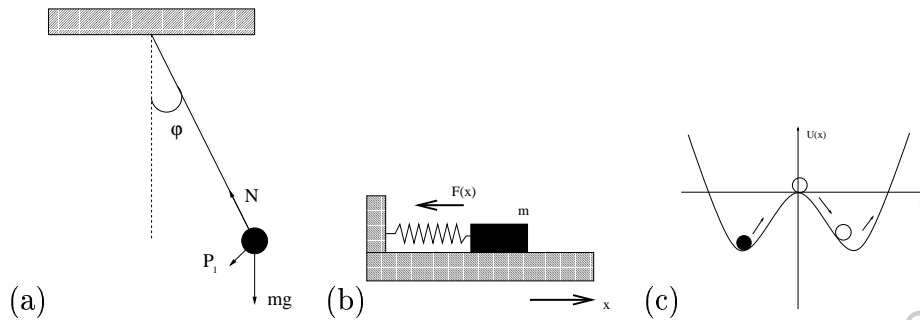


Рис. 1.8: Примеры колебательных систем, приводящих к уравнению Дуффинга: (а) - математический маятник при небольших углах отклонения, (б) - груз на пружине с нелинейной жесткостью, (с) - движение частицы в потенциале из двух ям.

### 1.4 Работа N 1. Исследование состояний равновесия в осцилляторе Дуффинга

#### 1.4.1 Исследуемая система

Осциллятор Дуффинга или осциллятор с кубической нелинейностью является одной из наиболее распространенных моделей теории колебаний. Уравнение осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0. \quad (1.29)$$

Его можно получить, рассматривая, к примеру, колебания математического маятника при небольших углах отклонения (рис. 1.8а), колебания грузика на пружине с нелинейной возвращающей силой, расположенного на плоской горизонтальной поверхности (рис. 1.8б). Данное уравнение также можно получить при описании движения частицы в потенциале из двух ям (рис. 1.8с). Рассмотрим перечисленные примеры более подробно.

а). Математический маятник представляет собой грузик малого размера массой  $m$ , подвешенный на длинной тонкой нити  $l$  (рис. 1.8а). Предполагается, что масса ма-

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

ятника сосредоточена в грузике и нить является нерастяжимой. Запишем уравнение движения без учета трения

$$ma = -P_1,$$

где  $a$  - ускорение движения,  $P_1$  - восстанавливающая сила. Как видно из рисунка,  $P_1 = mg \sin(\varphi)$ . Линейная и угловая скорости связаны соотношением  $v = l \frac{d\varphi}{dt}$ . В результате получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Функцию  $\sin \varphi$  можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки равновесия  $\varphi = 0$ :  $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} \mp \dots$ . При малых углах отклонения от состояния равновесия (случай слабой нелинейности) в разложении можно ограничиться первыми двумя слагаемыми. В этом случае уравнение примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \left( \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 \right) = 0.$$

С учетом силы сопротивления среды, которую будем полагать пропорциональной скорости ( $F_d = \delta v$ ), получим уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \delta l \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \varphi - \frac{g}{6l} \varphi^3$$

Вводя обозначения  $\varphi = x$ ,  $\delta l = \alpha$ ,  $(g/l) = \beta$  и  $(-g/6l) = \gamma$ , приходим к уравнению (1.29).

б). В колебательной системе, изображенной на рис.1.8b, на грузик массой  $m$  действует возвращающая сила  $F$ , которая зависит от жесткости пружины  $k$  и смещения

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

$x$  от состояния равновесия, и сила трения  $F_d$ . Будем полагать, что силу упругости пружины можно задать в виде

$$F = k_0x + k_1x^3,$$

а сила трения пропорциональна скорости

$$F_d = \delta \frac{dx}{dt}.$$

Тогда получим уравнение движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + k_0x + k_1x^3 = 0$$

или

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0,$$

где  $\alpha = (\delta/m)$ ,  $\beta = (k_0/m)$  и  $\gamma = (k_1/m)$ .

в). Рассмотрим движение частицы массой  $m$  в потенциале из двух ям (см. рис.1.8с), который определяется функцией

$$u(x) = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4,$$

где  $a < 0$  и  $b > 0$ . При отклонении частицы от состояния равновесия, на нее действует возвращающая сила  $F = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ . В отсутствие других сил, уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V(x)}{\partial x} = 0$$

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

или

$$m\ddot{x} + ax + bx^3 = 0.$$

С учетом силы трения  $F_d = \delta\dot{x}$  получим уравнение (1.29)

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0,$$

где  $\alpha = (\delta/m)$ ,  $\beta = (a/m)$ ,  $\gamma = (b/m)$ .

Рассмотренные примеры представляют собой простейшие колебательные системы. Осциллятор Дуффинга является хорошей моделью и для более сложных систем. Например, уравнение неавтономного осциллятора описывает вынужденные колебания изогнутого стержня в одномодовом приближении (20). Осциллятор Дуффинга при внешнем гармоническом воздействии широко используется при изучении свойств хаотических колебаний и является одной из базовых моделей теории детерминированного хаоса.

### 1.4.2 Практические задания

1. Найти аналитически все состояния равновесия системы (1.29), провести их анализ (тип состояния равновесия и устойчивость в зависимости от значений параметров  $\beta$ ,  $\mu$ ). Использовать фиксированное положительное значение коэффициента диссипации  $\alpha$  (задается преподавателем).
2. На плоскость параметров  $\beta$  -  $\mu$  нанести линии, разграничивающие области с разным типом поведения, для каждого из найденных состояний равновесия.
3. Используя программу численного интегрирования дифференциальных уравнений, построить типичные картины фазовых траекторий в окрестностях состо-

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

аний равновесия. Значения параметров  $\beta$  и  $\mu$  должны быть взяты из соответствующих областей (см. п. 2). Для этого проинтегрировать систему уравнений в прямом времени из нескольких начальных условий в окрестности каждого из выбранного состояния равновесия. Построить численно притягивающие и отталкивающие многообразия седловых точек. Для построения отталкивающих многообразий выбрать несколько начальных условий в окрестности седловой точки и проинтегрировать систему уравнений в прямом времени. Для построения притягивающих многообразий выбрать несколько начальных условий в окрестности седловой точки и проинтегрировать систему уравнений в обратном времени.

4. Для указанных преподавателем значений параметров построить общую картину расположения фазовых траекторий, задавая начальные значения в разных областях фазового пространства.
5. Выполнить пункты 2 и 4 для консервативного осциллятора Дуффинга (при  $\alpha = 0$ ). Произвести сравнительный анализ поведения консервативного и диссипативного осцилляторов.

## 1.5 Работа N 2. Исследование состояний равновесия в динамической модели, описывающей ход химических реакций

### 1.5.1 Исследуемая система

Методы теории колебаний могут применяться к задачам из разных областей науки: физики, химии, биологии, социологии, экономики. В данной работе рассматривается применение методов теории колебаний к задачам исследования хода химических реакций на каталитических решетках. Пусть имеются вещества двух типов  $X$  и  $Y$ , между которыми возможны следующие реакции. При встрече на молекуле катализатора молекулы  $X$  и  $Y$  взаимодействуют с образованием двух молекул  $Y$  (вещество  $X$  превращается в вещество  $Y$ ):



где  $\alpha$  - скорость реакции. Если такой встречи не происходит, то осуществляются реакции двух типов. В месте нахождения молекул первого типа происходит их генерация из нереагирующих компонентов среды:



а в месте нахождения молекул второго вещества происходит их разложение на нереагирующие компоненты:





## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

где  $\beta$  и  $\gamma$  - скорости соответствующих реакций, а знак  $S$  означает “вакантное место” или “дырка”.

Рассмотрим динамику описанных реакций во времени. Как будут изменяться концентрации веществ  $X$ ,  $Y$ , а также дырок  $S$  во времени? Обозначим эти концентрации буквами  $x$ ,  $y$  и  $s$ , соответственно. Для решения задачи применим подход “среднего поля”, при котором считается, что реагирующие компоненты равномерно распределены по всему пространству реакции и вероятность встречи реагирующих веществ на молекуле катализатора пропорциональна произведению их концентраций. Изменение концентрации вещества  $X$  происходит в ходе реакции (1.30). Она уменьшается пропорционально скорости реакции  $\alpha$  и произведению концентраций реагирующих компонентов  $xy$ . В ходе реакции (1.31) она увеличивается пропорционально скорости реакции  $\beta$  и произведению концентраций  $xs$ . Таким образом, можно составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение концентрации вещества  $X$ :

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha xy + \beta xs$$

Изменение концентрации вещества  $Y$  происходит в ходе реакции (1.30), где она увеличивается пропорционально скорости реакции  $\alpha$  и произведению концентраций реагирующих компонентов  $xy$ , и в ходе реакции (1.32), где она уменьшается пропорционально скорости реакции  $\gamma$  и произведению концентраций  $ys$ :

$$\frac{dy}{dt} = \alpha xy - \gamma ys$$

Аналогично можно записать уравнение для изменения концентрации “дырок”:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta xs + \gamma ys$$

Объединяя все три уравнения получим систему уравнений, описывающих динамику

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

химических реакций:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(-\alpha y + \beta s) \\ \dot{y} &= y(\alpha x - \gamma s) \\ \dot{s} &= s(-\beta x + \gamma y)\end{aligned}\tag{1.33}$$

Легко увидеть, что для системы (1.33) выполняется условие сохранения:  $x + y + s = \text{const}$ . Для этого достаточно сложить правые части трех уравнений и убедиться, что  $\dot{x} + \dot{y} + \dot{s} = 0$ . Если интерпретировать  $x$ ,  $y$  и  $s$  как относительные концентрации, то их сумму можно принять за единицу:  $x + y + s = 1$ . В этом случае число уравнений можно уменьшить до двух:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\beta - \beta x - (\alpha + \beta)y) \\ \dot{y} &= y(-\gamma + (\alpha + \gamma)x + \gamma y)\end{aligned}\tag{1.34}$$

Система уравнений (1.34) описывает динамику реакций с учетом условия сохранения. В рамках описанной модели параметры системы должны быть положительны, а динамические переменные - положительные и меньше единицы:  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

### 1.5.2 Практические задания

1. Найти аналитически все состояния равновесия системы (1.34), провести их анализ (тип состояния равновесия и устойчивость в зависимости от значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ).

1 *Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации*

2. Для седловых состояний равновесия определить собственные вектора, касательные к притягивающему и отталкивающему многообразиям.
3. Используя программу численного интегрирования дифференциальных уравнений, для конкретных значений параметров построить типичную картину фазовых траекторий. Для этого проинтегрировать систему уравнений в прямом времени из нескольких начальных условий. Построить численно притягивающие и отталкивающие многообразия седловых точек. Для построения отталкивающих многообразий выбрать несколько начальных условий в окрестности седловой точки и проинтегрировать систему уравнений в прямом времени. Для построения притягивающих многообразий выбрать несколько начальных условий в окрестности седловой точки и проинтегрировать систему уравнений в обратном времени.
4. Используя программу численного интегрирования дифференциальных уравнений построить зависимость периода колебаний концентрации вещества  $X$  от параметра  $\alpha$  при фиксированных значениях других параметров. Сравнить со значением периода колебаний, полученного из линейного анализа системы.

## 1.6 Работа N 3. Исследование состояний равновесия в генераторе с инерционной нелинейностью

### 1.6.1 Исследуемая система

Генератор с инерционной нелинейностью (ГИН) по своим свойствам является одной из базовых моделей теории детерминированного хаоса. Это достаточно простая реальная радиофизическая система, математическая модель которой хорошо описывает экспериментально наблюдаемые типичные режимы и бифуркационные переходы. Генератор с инерционной нелинейностью демонстрирует все характерные для квазиаттракторов закономерности, причиной возникновения которых является наличие в системе состояния равновесия типа “седло-фокус”. Модель ГИН базируется на классических схемах генератора Теодорчика и в предельных случаях переходит в модель генератора Ван дер Поля.

В классическом генераторе с инерционной нелинейностью Теодорчика (рис.1.9) автоколебания обеспечиваются введением в колебательный контур термосопротивления, свойства которого нелинейным образом зависят от протекающего через него тока. В

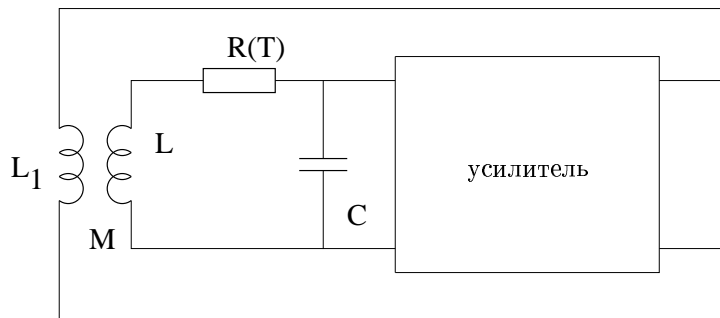


Рис. 1.9: Схема классического генератора с инерционной нелинейностью

1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

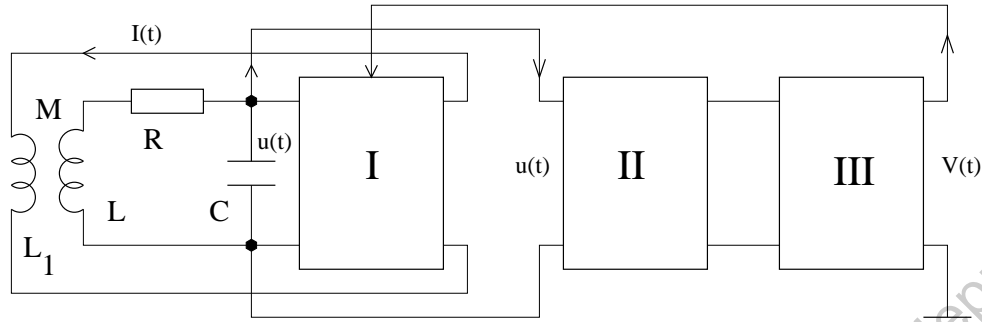


Рис. 1.10: Схема модифицированного генератора с инерционной нелинейностью

отличие от обычного генератора на триоде с колебательным контуром в цепи сетки, где рост амплитуды автоколебаний ограничивается нелинейностью вольт - амперной характеристики триода, здесь характеристика усилителя является линейной, а баланс между поступающей и рассеиваемой в системе энергией обеспечивается нелинейной зависимостью сопротивления от протекающего через него тока. Изменение значений сопротивления происходит не мгновенно, а инерционным образом. Зависимость сопротивления от тока задается дифференциальным уравнением. Размерность фазового пространства данной автоколебательной системы равна трем.

Рассмотрим модифицированную схему генератора с инерционной нелинейностью, изображенную на рис.1.10. Здесь колебательный контур в отличие от классического случая не содержит нелинейных элементов. Усилитель (I) управляется дополнительной цепью обратной связи, содержащей линейный усилитель (II) и инерционный преобразователь (III).

Запишем уравнения для колебательного контура относительно напряжения  $u(t)$  на конденсаторе C:

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = M \frac{dI}{dt}. \quad (1.35)$$

Предположим, что зависимость тока  $I(t)$  на выходе усилителя от входного напря-

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

жения  $u(t)$  без учета воздействия дополнительной обратной связи можно записать в виде

$$I = (S_0 - S_1 u^2)u, \quad (1.36)$$

где  $S_0$  и  $S_1$  - постоянные положительные коэффициенты. Предположим, что механизм воздействия цепи инерционной обратной связи подчиняется закономерности

$$I = (S_0 - S_1 u^2 - bV)u, \quad (1.37)$$

где  $V = V(u)$  - напряжение на выходе инерционного преобразователя,  $b$  - постоянный коэффициент. Пусть инерционное преобразование осуществляется в соответствии с уравнением

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma V + \varphi(u). \quad (1.38)$$

В этом случае для схемы на рис.1.10 получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{R}{L} - \frac{MS_0}{LC} + \frac{3MS_1}{LC}u^2 + \frac{Mb}{LC}V \right) \frac{du}{dt} + \left( \frac{1}{LC} + \frac{Mb}{LC} \frac{dV}{dt} \right) u &= 0, \\ \frac{dV}{dt} &= -\gamma V + \varphi(u). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Видно, что эта система представляет собой осциллятор, диссипация и частота колебаний в котором инерционным образом зависят от их амплитуды.

Преобразуем первое уравнение системы (1.39) к следующему виду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dt} - \frac{MS_0 - RC}{LC} u + \frac{1}{LC} \int u dt + \frac{Mb}{LC} uV + \frac{MS_1}{LC} u^3 \right) = 0.$$

1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

Тогда

$$\frac{du}{dt} - \frac{MS_0 - RC}{LC}u + \frac{1}{LC} \int u dt + \frac{Mb}{LC}uV + \frac{MS_1}{LC}u^3 = A$$

(где  $A$  - константа) или

$$\frac{du}{dt} = \frac{MS_0 - RC}{LC}u - \frac{Mb}{LC}uV - \frac{MS_1}{LC}u^3 + (A - \frac{1}{LC} \int u dt).$$

Сделаем замену переменных

$$W = A - \frac{1}{LC} \int u dt.$$

В результате для схемы генератора с инерционной нелинейностью на рис.1.10 получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{MS_0 - RC}{LC}u + W - \frac{Mb}{LC}uV - \frac{MS_1}{LC}u^3, \\ \frac{dW}{dt} &= -\frac{1}{LC}u, \\ \frac{dV}{dt} &= -\gamma V + \varphi(u). \end{aligned} \quad (1.40)$$

В безразмерных переменных уравнения генератора можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= mx + y - xz - dx^3, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -x, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -gz + g\Phi(x), \end{aligned} \quad (1.41)$$

где

$$x = (u/u_0\sqrt{LC}), \quad y = W/u_0, \quad z = V(Mb/\sqrt{LC}), \quad \Phi(x) = \varphi(u)(Mb/\gamma\sqrt{LC}),$$

## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

$$m = (MS_0 - RC)/\sqrt{LC}, \quad g = \gamma\sqrt{LC}, \quad d = MS_1\sqrt{LC}u_0^3.$$

Здесь параметр  $m$  пропорционален разности вносимой и рассеиваемой энергий,  $g$  - параметр, характеризующий отношение собственного периода колебаний контура к времени релаксации инерционного элемента,  $d$  - параметр, характеризующий степень влияния нелинейности характеристики усилителя,  $\Phi(x)$  - функция, описывающая свойства инерционного преобразователя. В генераторе, описываемом уравнениями (1.41), действуют два механизма нелинейного ограничения амплитуды колебаний. Первый - безинерционный и связан с нелинейностью характеристики усилителя, второй - инерционный, обусловленный зависимостью крутизны характеристики усилителя от напряжения  $V$ .

Динамика генератора, моделируемого уравнениями (1.41), принципиальным образом зависит от вида функции  $\Phi(x)$ , то есть от свойств инерционного преобразователя. Если  $\Phi(x)$  представляет собой симметричную функцию, то система демонстрирует только периодические колебания. Если функция не является симметричной, то в генераторе могут существовать как периодические, так и хаотические режимы колебаний.

### 1.6.2 Практические задания

1. Найти аналитически состояния равновесия в системе (1.41) и проанализировать их устойчивость в зависимости от управляющих параметров  $m$  и  $g$  при  $d = 0$  с нелинейной функцией  $\Phi(x)$  в виде:

$$\Phi(x) = x^2,$$

$$\Phi(x) = e^x,$$

$$\Phi(x) = x,$$

$$\Phi(x) = ax - bx^3,$$



## 1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} ax, & x < 0 \\ bx, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 0 \\ bx^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

2. Используя программу численного интегрирования дифференциальных уравнений, провести исследование состояний равновесия в системе (1.41) в зависимости от управляющих параметров  $m$  и  $g$  при  $d = 0$ . Построить на плоскости параметров  $m$  и  $g$  области различных типов состояния равновесия при вариации управляющих параметров.

### 1.7 Контрольные вопросы и задания

1. Найти состояния равновесия и определить их тип в осцилляторе Релея:  $\ddot{x} + (\varepsilon - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$ .
2. Записать в явном виде выражение для траектории в окрестности неустойчивого

1 Состояния равновесия динамической системы, устойчивость и бифуркации

фокуса в осцилляторе Ван-дер-Поля в зависимости от начальных условий.

3. Доказать, что направление притягивающего и отталкивающего многообразий седловой точки на фазовой плоскости определяются собственными векторами матрицы линеаризации.
4. Добавить в систему (1.19) еще одно дифференциальное уравнение, так чтобы оно в полной мере иллюстрировало седло-узловую бифуркацию в двумерном фазовом пространстве.
5. Переписать уравнение для нормальной формы бифуркации Андронова-Хопфа (1.22) в полярных координатах и исследовать уравнение для амплитуды и фазы колебаний.

## 2 Нелинейный осциллятор под действием внешней периодической силы

Как будет вести себя нелинейный осциллятор под действием внешней периодической (гармонической) силы? В чем отличие его поведения от поведения линейного осциллятора?

### 2.1 Сравнительный анализ поведения линейного и нелинейного осцилляторов

Линейный неавтономный диссипативный осциллятор описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = F(t), \quad (2.1)$$

где  $x$  - динамическая переменная, характеризующая состояние системы (ток, напряжение, заряд и т.п.),  $\alpha$  - коэффициент диссипации,  $\omega_0$  - собственная частота осциллятора без потерь,  $F(t)$  - внешнее периодическое воздействие. Из уравнения (2.1) можно,

## 2 Нелинейный осциллятор

если известен явный вид воздействия  $F(t)$ , начальные значения переменной  $x(0)$  и ее производной  $x'(0)$ , определить вид функции  $x(t)$ . Решение неавтономного уравнения (2.1) есть сумма общего решения автономного уравнения  $x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0$ , соответствующего свободным колебаниям осциллятора, и частного решения неавтономного уравнения (2.1), соответствующего вынужденным колебаниям осциллятора. При наличии диссипации свободные колебания затухают и остаются только вынужденные колебания, которые уже не зависят от начальных условий. Такие колебания называют установившимися. Если  $F(t)$  - гармоническая функция времени вида:  $F(t) = B \cos pt$ , то решение уравнения (2.1) получается следующим:

$$x = A \cos(pt + \Theta), \quad (2.2)$$

где  $A = \sqrt{\frac{B^2}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\alpha^2 p^2}}$  - амплитуда колебаний,  $\Theta = \arctan \frac{2\omega_0}{p^2 - \omega_0^2}$  - сдвиг фазы между вынуждающей силой и колебаниями осциллятора. Из формулы (2.2) следует, что амплитуда колебаний возрастает при стремлении частоты воздействия к собственной частоте осциллятора. Данное явление называется резонансом, а зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты воздействия - резонансной кривой. Вид резонансных кривых для линейного осциллятора при различных  $\alpha$  приведен на рис.2.1. Следует отметить, что максимальное значение амплитуды в осцилляторе с потерями достигается не при  $p = \omega_0$ , а на близкой к  $\omega_0$  частоте  $\omega_p$ , причем разность  $|\omega_0 - \omega_p|$  тем больше, чем больше коэффициент диссипации. Точное совпадение  $\omega_p = \omega_0$  достигается только в случае консервативного осциллятора, то есть в случае, когда в системе отсутствуют потери или подкачка энергии ( $\alpha = 0$ ).

Из решения (2.2) легко вывести основные свойства колебаний в линейном осцилляторе:

1. Колебания совершаются на частоте вынуждающей силы. В более общем случае,

## 2 Нелинейный осциллятор

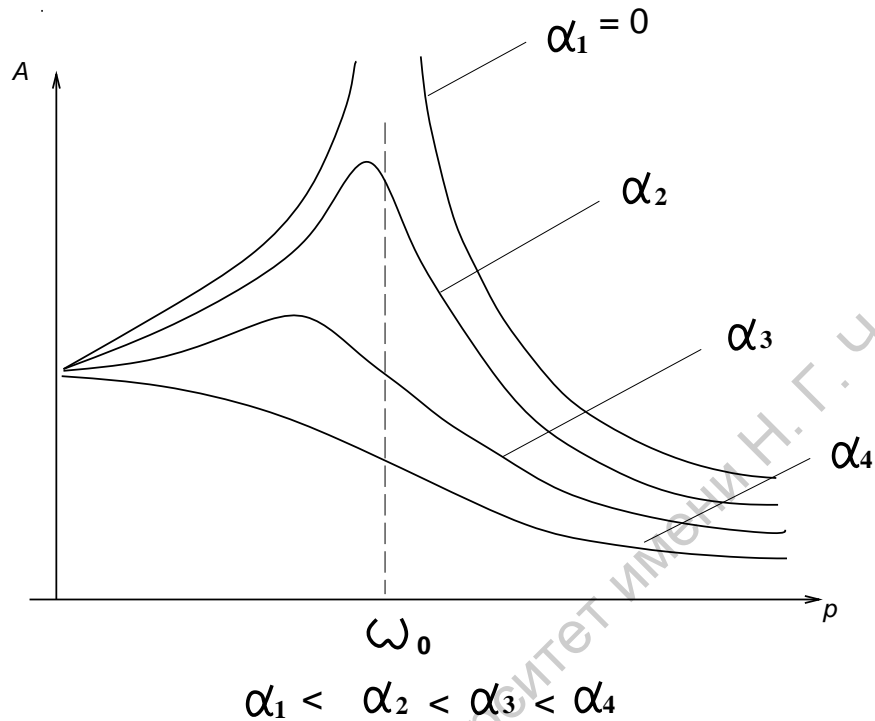


Рис. 2.1: Резонансные кривые линейного неавтономного осциллятора (2.1)

когда в спектре внешней силы присутствуют несколько частот, те же частоты будут присутствовать в спектре вынужденных колебаний.

2. Амплитуда и фаза установившихся колебаний определяются амплитудой и фазой вынуждающей силы и не зависят от начальных условий в линейном осцилляторе. Амплитуда колебаний прямо пропорциональна амплитуде воздействия.
3. На частотах, близких к собственной частоте осциллятора происходит резонанс, то есть резкое возрастание амплитуды при  $p \rightarrow \omega_p$ .

Предположим теперь, что параметры линейного осциллятора (см. ур.(2.1)) коэффициент диссипации  $\alpha$  и собственная частота  $\omega_0$  являются не постоянными величинами, а зависят от динамических переменных системы  $x$  и  $x'$ . Уравнение (2.1) в этом случае переписывается следующим образом:

## 2 Нелинейный осциллятор

$$x'' + 2\alpha(x, x') + \omega_0^2(x, x') = F(t) \quad (2.3)$$

Явный вид коэффициентов определяется характеристиками нелинейных элементов конкретной системы. Уравнение (2.3) в отличие от (2.1) является нелинейным и осциллятор, который им описывается называется нелинейным осциллятором. Рассмотрим, как изменятся в нелинейном случае свойства 1 - 3, полученные для линейного осциллятора. Одним из свойств нелинейных систем является обогащение спектра колебаний новыми частотами, не содержащимися в спектре воздействия. То есть спектральный состав колебаний может отличаться от спектрального состава вынуждающей силы. В частности, если внешнее воздействие задано гармонической функцией времени  $F(t) = B \cos pt$ , то в спектре колебаний осциллятора будет присутствовать как частота  $p$ , так в общем случае и другие частоты. Колебания системы перестают быть гармоническими, как в линейном случае. Гармоническое воздействие на нелинейный осциллятор может приводить не только к ангармоническим периодическим колебаниям, но и к более сложным режимам поведения - хаотическим колебаниям. Зависимость собственной частоты нелинейного осциллятора от динамической переменной нарушает изохронность колебаний, выполняющуюся в линейном осцилляторе. Собственная частота осциллятора становится функцией амплитуды вынужденных колебаний (эффект неизохронности). Неизохронность колебаний нелинейного осциллятора оказывает влияние на вид его резонансных кривых, благодаря "нелинейному механизму ограничения колебаний". Заключается он в следующем. Пусть частота внешнего воздействия близка к собственной частоте осциллятора. В этом случае система эффективно отбирает энергию от внешнего источника и колебания в ней возрастают. Рост амплитуды вынужденных колебаний приводит к отстройке собственной частоты осциллятора, которая тем больше, чем больше амплитуда. В результате эф-

## 2 Нелинейный осциллятор

Эффективность взаимодействия осциллятора с внешним источником уменьшается. Система выходит из резонанса и осциллятор перестает замечать внешнюю силу. Таким образом, в случае нелинейного осциллятора можно ожидать, что вид резонансных кривых будет зависеть не только от параметров системы, но и от амплитуды внешнего воздействия. При малых амплитудах, когда отстройка мала, резонансные кривые схожи с резонансными кривыми линейного осциллятора. При больших амплитудах резонансные кривые могут значительно отличаться от них. Максимальная амплитуда вынужденных колебаний в этом случае будет достигаться уже на другой частоте, чем при малой амплитуде воздействия.

Другим важным свойством, отличающим нелинейный осциллятор от линейного, является наличие резонанса на гармониках, то есть на частотах воздействия, кратных собственной частоте осциллятора. Например, в случае квадратичной нелинейности, когда уравнение осциллятора имеет вид:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x + \mu x^2 = B \cos pt$$

в спектре колебаний будут присутствовать четные гармоники с частотами  $2p$ ,  $4p$  и т.д. На этих частотах будет также происходить эффективное взаимодействие осциллятора с внешним источником, а значит резонансное увеличение амплитуды колебаний, если  $\omega_0 \approx 2p$ ,  $4p$  и т.д..

В линейном осцилляторе установившиеся колебания не зависят от начальных значений  $x(0)$  и  $x'(0)$ , а определяются только вынуждающей силой. Как показывают исследования, в нелинейном осцилляторе при одном и том же воздействии могут сосуществовать несколько установившихся, устойчивых колебательных режимов. На какой из этих возможных режимов перейдет система определяется начальными условиями. Данное явление, заключающееся в сосуществовании в фазовом пространстве системы

## 2 Нелинейный осциллятор

нескольких установившихся, устойчивых режимов колебаний, к которым она асимптотически стремится при возрастании времени, называется мультистабильностью. Проведенное сравнение нелинейного осциллятора с линейным показало наличие принципиального, качественного отличия в свойствах этих систем.

### 2.2 Явление нелинейного резонанса. Метод гармонического баланса

Рассмотрим теперь подробнее вид резонансных кривых нелинейного осциллятора при гармоническом воздействии на примере осциллятора Дуффинга - одной из базовых моделей теории колебаний. Его уравнение записывается следующим образом:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x + \mu x^3 = B \cos pt \quad (2.4)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -2\alpha y - \omega_0^2 x - \mu x^3 + B \cos z, \\ \dot{z} &= p. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Представление в форме системы уравнений (2.5) показывает, что неавтономный осциллятор имеет трехмерное фазовое пространство с координатами  $x, y, z$ .

Предположим, что нелинейное слагаемое  $\mu x^3$  мало по сравнению с линейными слагаемыми уравнения (2.4). Осциллятор с малой нелинейностью называется квазилинейным осциллятором. Колебания в таком осцилляторе близки к колебаниям линейного



## 2 Нелинейный осциллятор

осциллятора, поэтому амплитуда основной гармоники, то есть гармоники на частоте  $p$ , должна быть много больше амплитуд высших гармоник. Следовательно, решение уравнения (2.4) можно записать в виде:

$$x(t) \approx a \cos pt + b \sin pt \quad (2.6)$$

Для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  подставим (2.6) в (2.4) и пренебрежем слагаемыми с кратными частотами. Данный подход к определению приближенных решений для нелинейной системы называется *методом гармонического баланса*. В результате получается

$$\begin{aligned} -ap^2 \cos pt - bp^2 \sin pt - 2\alpha pa \sin pt + 2\alpha pb \cos pt + \omega_0^2 a \cos pt + \omega_0^2 b \sin pt + \\ + \frac{3}{4}\mu(a^3 \cos pt + b^3 \sin pt + a^2 b \sin pt + ab^2 \cos pt) = B \cos pt \end{aligned}$$

Сгруппировав коэффициенты перед  $\cos pt$  и  $\sin pt$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - p^2)a + 2\alpha pb + \frac{3}{4}\mu(a^3 + ab^2) &= B \\ (\omega_0^2 - p^2)b - 2\alpha pa + \frac{3}{4}\mu(b^3 + a^2b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Перейдем в (2.7) к полярным координатам  $a = \rho \cos \varphi$ ,  $b = \rho \sin \varphi$ , где  $\rho$  - амплитуда, а  $\varphi$  - фаза колебаний:

$$(\omega_0^2 - p^2)\rho \cos \varphi + 2\alpha \rho^2 \sin \varphi + \frac{3}{4}\mu \rho^3 \cos \varphi = B \quad (2.8)$$

$$(\omega_0^2 - p^2)\rho \sin \varphi - 2\alpha \rho^2 \cos \varphi + \frac{3}{4}\mu \rho^3 \sin \varphi = 0 \quad (2.9)$$

## 2 Нелинейный осциллятор

Умножим (2.8) на  $\cos \varphi$ , а (2.9) на  $\sin \varphi$  и сложим:

$$(\omega_0^2 - p^2)\rho + \frac{3}{4}\mu\rho^3 = B \cos \varphi \quad (2.10)$$

Умножим (2.8) на  $\sin \varphi$ , а (2.9) на  $\cos \varphi$  и вычтем второе выражение из первого:

$$2\alpha\rho p = B \sin \varphi \quad (2.11)$$

Чтобы избежать зависимости от  $\varphi$  нужно возвести (2.10) и (2.11) в квадрат и сложить.

Обозначая через  $A$  квадрат амплитуды колебаний:  $\rho^2 = A$ ; получим:

$$\frac{9}{16}\mu^2 A^3 + \frac{3}{2}\mu(\omega_0^2 - p^2)A^2 + ((\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\alpha^2 p^2)A - B^2 = 0 \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) - кубическое алгебраическое уравнение относительно переменной  $A$ . Оно может иметь либо одно, либо три вещественных решения в зависимости от коэффициентов уравнения. Это означает, что в зависимости от параметров осциллятора, амплитуды и частоты воздействия, в фазовом пространстве системы может существовать либо один, либо три предельных цикла, соответствующих установившимся колебаниям. Вид соответствующих резонансных характеристик приведен на рис.2.2. Каждая из характеристик (1,2,3,4) соответствует определенной амплитуде вынуждающей силы; причем  $B_1 < B_2 < B_3 < B_4$ . При амплитуде воздействия  $B_1$ , при любых значениях частоты воздействия возможен только один вид колебаний, амплитуда которых определяется ординатой рабочей точки на резонансной кривой (рабочей точкой будем считать точку на резонансной кривой, абсцисса которой равна частоте воздействия, а ордината - амплитуде установившихся колебаний). При амплитуде воздействия  $B_4$  в области частот  $\omega_1 < p < \omega_2$ , как видно из рис.2.2, резонансная кривая становится неоднозначной. Этот участок ограничивается вертикальными линиями  $ad$  и  $bc$ , проведенными через точки перегиба графика (точки  $b$  и  $d$ ) до пересечения с осью

## 2 Нелинейный осциллятор

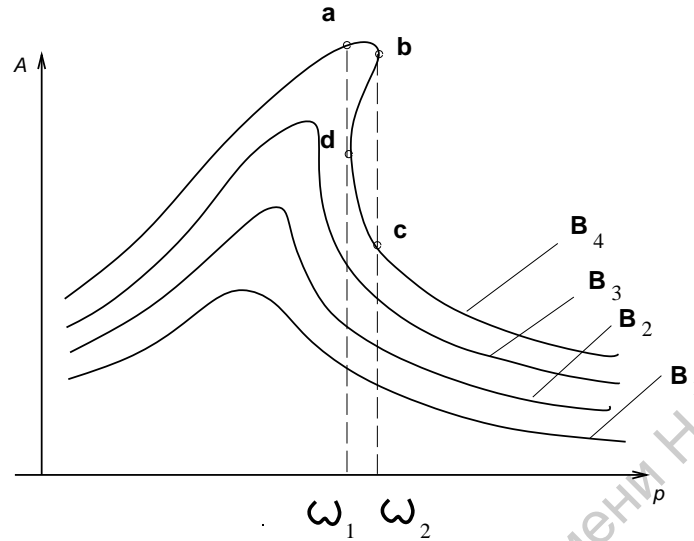


Рис. 2.2: Резонансные кривые нелинейного осциллятора

абсцисс в точках  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Любому значению частоты из этого диапазона соответствуют 3 значения амплитуды колебаний  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , причем  $A_1 < A_2 < A_3$ . Колебания с амплитудами  $A_1$  и  $A_3$  являются устойчивыми и могут наблюдаться в эксперименте. Колебания с амплитудой  $A_2$ , когда рабочая точка находится на среднем участке (между точками  $b$  и  $d$ ) резонансной характеристики, являются неустойчивыми и в эксперименте не наблюдаются. Устойчивость колебаний означает, что малые флуктуации слабо сказываются на установившихся колебаниях. Если колебания неустойчивы, то даже совершенно незначительное возмущение переводит систему в другой колебательный режим.

Предположим, что частота воздействия  $p$  меньше  $\omega_1$  и рабочая точка находится на кривой левее т.  $a$ . В этом случае амплитуда колебаний однозначно определяется частотой воздействия. В фазовом пространстве системы располагается один устойчивый предельный цикл (рис.2.3а). С увеличением частоты, при переходе через бифуркационное значение  $p = \omega_1$ , в фазовом пространстве рождается пара новых циклов: устойчивый (цикл 3) и неустойчивый (цикл 2) (рис.2.3б). На резонансной кривой точ-

## 2 Нелинейный осциллятор

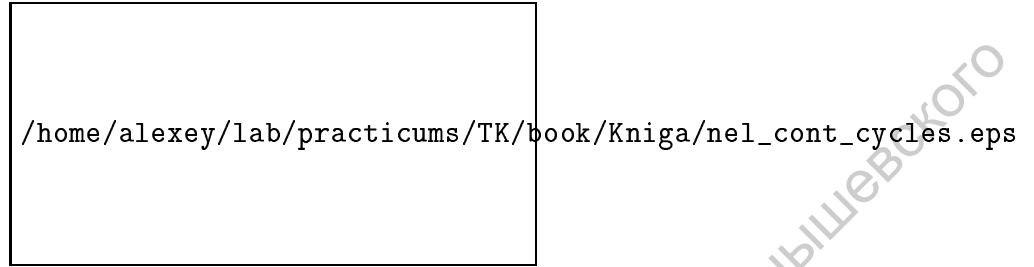


Рис. 2.3: Проекция фазовых портретов на плоскость  $(x, x')$

ке бифуркации соответствует точка  $d$ . Теперь в осцилляторе возможны 2 устойчивых колебательных режима. Какой из них будет осуществлен зависит от исходного состояния системы. На практике, если мы движемся по резонансной кривой со стороны нижних частот, то при прохождении т.  $a$ . никаких качественных изменений наблюдаться не будет, поскольку начальное состояние соответствует первому циклу. При изменении частоты воздействия от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  радиус устойчивого предельного цикла 3 уменьшается. Радиус неустойчивого предельного цикла 2 увеличивается, и он сближается с устойчивым циклом 1. При  $p = \omega_2$  оба цикла (устойчивый 1 и неустойчивый 2) сливаются и исчезают за точкой бифуркации. На резонансной кривой это соответствует точке  $b$ . Теперь в фазовом пространстве системы остается опять единственный устойчивый цикл - цикл 3. Рабочая точка на характеристике скачком перемещается с т.  $b$  в т.  $c$ . В осцилляторе будет наблюдаться скачкообразное уменьшение амплитуды колебаний. Если теперь начать уменьшать частоту, рабочая точка будет перемещаться по нижнему участку характеристики от т.  $c$  к т.  $d$ . Колебания осциллятора будут соответствовать внутреннему устойчивому циклу 3. При уменьшении частоты от  $\omega_2$  к  $\omega_1$  неустойчивый предельный цикл в фазовом пространстве системы будет перемещаться от устойчивого цикла 1 к устойчивому циклу 3. При переходе через  $p = \omega_2$  произойдет слияние и исчезновение устойчивого предельного цикла 3 и неустойчивого 2. Рабочая точка скачком переместится на верхнюю часть резонансной характеристики с т.  $d$  в

## 2 Нелинейный осциллятор

т. а. Участок характеристики, ограниченный точками  $abcd$ , является областью гистерезиса, поскольку перескоки рабочей точки между ветвями характеристики вверх и вниз происходят на разных частотах. Характерные изменения в фазовом пространстве системы, происходящие в области гистерезиса, проиллюстрированы на рис.2.3.

Таким образом, при увеличении частоты при  $p = \omega_1$  происходит бифуркация рождения пары циклов: устойчивого 3 и неустойчивого 2. При  $p = \omega_2$  - бифуркация слияния устойчивого цикла 1 с неустойчивым циклом 2, сопровождающаяся их исчезновением. При уменьшении частоты от значений больших  $\omega_2$  при  $p = \omega_2$  происходит рождение пары циклов: устойчивого 1 и неустойчивого 2, затем при  $p = \omega_1$  - слияние и исчезновение устойчивого цикла 3 и неустойчивого 2 (рис.2.3). Бифуркация рождения или слияния пары циклов: устойчивого и неустойчивого называется седло-узловой бифуркацией. Таким образом, при значениях параметров  $p = \omega_1$  и  $p = \omega_2$  происходят седло-узловые бифуркации предельных циклов. Естественно, что при другом значении амплитуды воздействия, бифуркационные значения частоты будут иными (либо их не будет вовсе). Если на графике, по осям которого отложены амплитуда и частота воздействия отмечать бифуркационные значения параметров, то получится линия, называемая бифуркационной кривой. При пересечении такой кривой в фазовом пространстве системы происходит седло-узловая бифуркация.

## 2 Нелинейный осциллятор

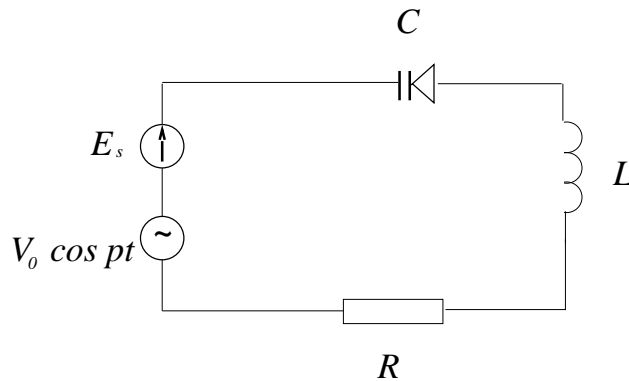


Рис. 2.4: Колебательный контур с нелинейной емкостью при внешнем гармоническом воздействии

### 2.3 Работа N 4. Исследование явления нелинейного резонанса в последовательном колебательном контуре

В данной работе исследуется явление резонанса в нелинейном колебательном контуре. Исследуемая цепь представляет собой последовательный колебательный контур с нелинейной емкостью (рис. 2.4). В качестве емкости используется р-п переход диода при обратном включении. Для запираания диода на него подается постоянное напряжение смещения от внешнего источника питания.

#### 2.3.1 Исследуемая система

Будем считать, что емкость р-п перехода является функцией напряжения на диоде. Естественно, данное предположение есть некоторая идеализация свойств диода, поскольку в действительности между емкостью и напряжением может существовать более сложная зависимость, выражающаяся, например, дифференциальными уравнениями. Кроме того, диод также обладает определенной нелинейной проводимостью.

## 2 Нелинейный осциллятор

Тем не менее, в рамках нашей задачи, пренебрегая этими эффектами, можно предположить, что  $C = C(U)$ . Используя уравнения Кирхгофа для схемы на рис.2.4, запишем:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + U = e(t) \quad (2.13)$$

где  $i$  - ток через контур,  $U$  - напряжение на емкости,  $e(t)$  - внешняя ЭДС. Выразим ток в цепи через заряд  $q$  на емкости ( $i = \frac{dq}{dt}$ ):

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + U(q) = E_s + V_0 \cos pt \quad (2.14)$$

Рассмотрим сначала случай, когда амплитуда переменной составляющей вынуждающей силы мала  $V_0 \ll E_s$ . При этом мы будем предполагать, что соответствующее изменение заряда на емкости представляет собой малые колебания относительно определенного значения  $q_0 = q(E_s)$ :

$$q = q_0 + \tilde{q} \quad (2.15)$$

Сделав соответствующую подстановку в (2.14) получим:

$$L \frac{d^2\tilde{q}}{dt^2} + R \frac{d\tilde{q}}{dt} + U(q_0 + \tilde{q}) = E_s + V_0 \cos pt$$

Поскольку  $\tilde{q}$  мало, можно разложить  $U(q)$  в ряд Тейлора по степеням  $\tilde{q}$ , ограничившись линейными слагаемыми:  $U(q) \simeq U(q_0) + \frac{dU(q_0)}{dq} \tilde{q}$ . Подставив это выражение в уравнение и вспомнив, что  $U(q_0) = E_s$ , получим уравнение для переменной составляющей заряда  $\tilde{q}$ :

$$L \frac{d^2\tilde{q}}{dt^2} + R \frac{d\tilde{q}}{dt} + \frac{1}{C_d} \tilde{q} = V_0 \cos pt \quad (2.16)$$

Здесь введено обозначение:  $C_d = dq/dU$  - дифференциальная емкость п-р перехода

## 2 Нелинейный осциллятор

диода. Уравнение (2.16) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2\tilde{q}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\tilde{q}}{dt} + \omega_0^2(E_s)\tilde{q} = V_0 \cos pt \quad (2.17)$$

Оно совпадает с уравнением для линейного осциллятора, собственная частота которого определяется дифференциальной емкостью диода, на который подано напряжение смещения  $E_s$ :  $\omega_0(E_s) = 1/\sqrt{LC_d(E_s)}$ . Таким образом, при малой амплитуде вынуждающей силы нелинейный контур ведет себя как линейный осциллятор, частота собственных колебаний которого определяется напряжением смещения, поданным на р-п переход. Рассмотрим теперь более общий случай произвольной амплитуды. Для того чтобы решить уравнение (2.14), необходимо задать в явном виде функцию  $U(q)$ , определяемую свойствами р-п перехода. Поскольку измерить напрямую заряд на конденсаторе непросто, эту зависимость обычно получают косвенным методом, исходя из зависимости  $C_d(E_s)$ , которая легко может быть получена посредством измерения собственной частоты контура  $\omega_0$  в зависимости от напряжения смещения. Типичный вид зависимости дифференциальной емкости от напряжения на диоде имеет вид:

$$C_d = \frac{\Theta}{\sqrt[3]{(U_{pn} - U)^2}} \quad (2.18)$$

где  $\Theta$  - некоторая константа, а  $U_{pn}$  - контактная разность потенциалов для запертого перехода. Оба этих параметра необходима определить экспериментально из характеристик диода. Интегрированием уравнения (2.18) можно получить зависимость заряда на диоде от приложенного напряжения:

$$q = -3\Theta \sqrt[3]{U_{pn} - U} + D$$

где  $D$  - постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий. В качестве



## 2 Нелинейный осциллятор

этих условий зададим:

$$C_0 = C_d(E_s)$$

При этом получим  $q_0 = D - 3\Theta\sqrt[3]{U_{pn} - E_s}$ , откуда  $D = q_0 + 3\Theta\sqrt[3]{U_{pn} - E_s}$ . Из (2.18) следует, что  $\Theta = C_0\sqrt[3]{(U_{pn} - E_s)^2}$ . Окончательно получаем:

$$D = q_0 + 3C_0(U_{pn} - E_s)$$

или

$$\tilde{q} = q - q_0 = 3C_0(U_{pn} - E_s) - 3C_0\sqrt[3]{(U_{pn} - E_s)^2}\sqrt[3]{U_{pn} - U} \quad (2.19)$$

Будем рассматривать колебания напряжения на емкости  $v$  относительно напряжения смещения  $E_s$ :  $U = E_s + v$ . Выразим из (2.19) зависимость  $v(\tilde{q})$ :

$$v = \frac{\tilde{q}}{C_0} - \frac{\tilde{q}^2}{3C_0^2(U_{pn} - E_s)} + \frac{\tilde{q}^3}{27C_0^3(U_{pn} - E_s)^2} \quad (2.20)$$

Подставляя зависимость (2.20) в уравнение для контура (2.14) получим уравнение для переменной составляющей заряда на р-п переходе диода в замкнутом виде:

$$L\frac{d^2\tilde{q}}{dt^2} + R\frac{d\tilde{q}}{dt} + \frac{\tilde{q}}{C_0} - \frac{\tilde{q}^2}{3C_0^2(U_{pn} - E_s)} + \frac{\tilde{q}^3}{27C_0^3(U_{pn} - E_s)^2} = V_0 \cos pt$$

Введем новую переменную  $x = \tilde{q}/C_0$  и подставим ее в уравнение:

$$LC_0\frac{d^2x}{dt^2} + RC_0\frac{dx}{dt} + x - \beta x^2 + \mu x^3 = V_0 \cos pt$$

Здесь  $\beta = \frac{1}{3(U_{pn} - E_s)}$ ,  $\mu = \frac{1}{27(U_{pn} - E_s)^2}$ . При переходе к “медленному времени”  $\tau = \omega_0 t$ ,

получим

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x - \beta x^2 + \mu x^3 = V_0 \cos \Omega\tau, \quad (2.21)$$

## 2 Нелинейный осциллятор

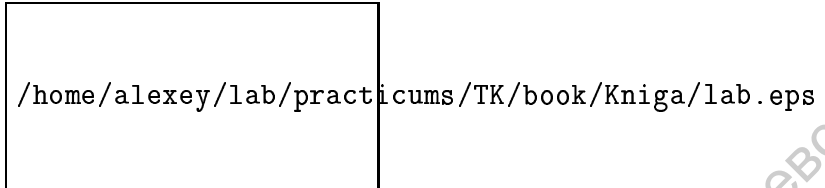


Рис. 2.5: Блок-схема лабораторной установки

где  $\dot{x}$  означает  $\frac{dx}{d\tau}$ ,  $\alpha = \frac{R}{2\sqrt{L/C}}$ ,  $\Omega = p/\omega_0$  - приведенная частота задающего генератора. Полученное уравнение (2.21) - модель осциллятора с нелинейной емкостью, которая может быть численно проинтегрирована при помощи стандартных методов.

### 2.3.2 Лабораторная установка

Лабораторная установка состоит из следующих основных частей:

1. Блок питания с источником изменяемого напряжения смещения  $E_s$ ;
2. Генератор гармонического напряжения, работающий в диапазоне частот от 10 до 25 кГц, с частотомером и низкоомным выходом;
3. Исследуемый контур с выходным буферным каскадом и системой коммутации, коэффициент передачи выходного буферного каскада 1/70.

На передней панели установки расположены сетевой тумблер с индикатором включения, регулятор и индикатор напряжения смещения  $E_s$ , трехпозиционный переключатель "Режим", гнезда для подключения вольтметра и осциллографа, переключатель "Вольтметр", ручки управления амплитудой и частотой сигнала генератора, шкала частотомера. Блок питания, кроме необходимых для работы установки напряжений, вырабатывает напряжение смещения  $E_s$ , задающее рабочую точку на вольт-фарадной характеристике диода, которое можно менять регулировкой "E" (рис. 2.5).

## 2 Нелинейный осциллятор

Амплитуда  $V$  напряжения генератора устанавливается ручкой "Амплитуда". Частотой генератора можно управлять при помощи двух регулировок "Частота грубо" и "Частота точно". Отсчет частоты производится по цифровым индикаторам частотомера. Экспериментально определяется резонансная частота  $f_0$  контура, на который подается напряжение смещения  $E_s$ . Режим измерения  $f_0$ , включается установкой трехпозиционного переключателя "Режим" в положение "Рез". В положении "Рез" того же переключателя производится исследование резонансных характеристик последовательного контура, состоящего из той же индуктивности  $L$ , диода и внесенного активного сопротивления. Значения параметров контура -  $L = 117\text{мГн}$ ,  $R = 500\text{Ом}$ . Как видно из схемы установки (рис.2.5), осциллограф постоянно подключен к выходу буферного каскада, вольтметр же может подключаться как к выходу буферного каскада для измерения амплитуды колебаний в контуре, так и к выходу генератора для измерения амплитуды напряжения воздействия  $V$ . Коэффициент передачи буферного каскада  $K = 1/70$ .

### 2.3.3 Практические задания

1. Получить от преподавателя значение напряжения смещения на диоде, которое будет использоваться при дальнейших измерениях.
2. Определить зависимость собственной частоты контура от напряжения смещения на диоде.

Установить переключатель "Режим" в положение "Рез", переключатель "Вольтметр" в положение "1", регулировкой "Амплитуда" установить амплитуду воздействия 20 мВ по вольтметру. Переключатель "Вольтметр" поставить в положение "2". Ручкой "Смещение" установить напряжение смещения на диоде  $E_s$ , контролируемое вольтметром на передней панели. Меняя частоту генератора с помощью регулировки "Частота

## 2 Нелинейный осциллятор

грубо" и "Частота точно", определить резонансную частоту контура  $f_0$  при данном напряжении смещения.

Построить графики  $f_o(E_s)$ ,  $C_d(E_s)$  и  $\bar{C}(E_s) = C_d/C_0$  (- приведенная емкость).

3. Аппроксимировать зависимость  $\bar{C}(E_s)$  функцией  $\sqrt[3]{(U_{pn} - E_0)^2} / \sqrt[3]{(U_{pn} - E_s)^2}$ , определив значения неизвестного коэффициента  $U_{pn}$ .

Для аппроксимации необходимо задать значение напряжения смещения на характеристике  $\bar{C}(E_s)$  (одно из них - значение, при котором будут производиться измерения) в пределах рабочей области и добиться, подбором параметра  $U_{pn}$ , чтобы аппроксимирующая функция прошла через выбранную точку на вольт-фарадной характеристике.

Построить аппроксимирующую функцию на том же графике, что и приведенная вольт-фарадная характеристика диода  $\bar{C}(E_s)$ .

4. Измерить и построить резонансные характеристики контура.

Переключатель "Режим" поставить в положение "Рез". Регулировкой смещение установить указанное преподавателем значение напряжения смещения  $E_s$ . Поставить переключатель "Вольтметр" в положение "1", регулировкой "Амплитуда" установить нужную амплитуду воздействия (50, 100, 150, 200, 250 или 300 мВ). Поставить переключатель "Вольтметр" в положение "2" и снять для установленных значений амплитуды воздействия резонансные характеристики контура. Для этого необходимо ручками "Частота грубо" и "Частота точно" изменять частоту генератора и измерять по вольтметру амплитуду колебаний в контуре. Вблизи резонанса необходимо производить измерения особенно тщательно, плавно меняя частоту и постоянно следя за показаниями вольтметра, чтобы не пропустить переход с одного устойчивого колебательного режима на другой.

5. Расчитать резонансные характеристики математической модели контура (2.21).

Используя полученное значение  $U_{pn}$  и другие параметры исследуемого контура расчи-

## 2 Нелинейный осциллятор

тать значения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  и  $\omega_0$ . Используя программу численного интегрирования дифференциальных уравнений построить резонансные характеристики в тех же координатах и для тех же значений амплитуды воздействия, что и в задании 4.

### 6. Построение бифуркационных кривых контура.

Поставить все переключатели в те же положения, что и при определении резонансных характеристик в п.4. На плоскости параметров "амплитуда - частота воздействия" нанести точки, при переходе через которые происходят скачкообразные изменения амплитуды колебаний. Для этого, устанавливая амплитуду воздействия, определить два значения частоты, при которых происходят бифуркации. Соединить полученные бифуркационные точки плавными кривыми. Построить бифуркационные кривые для математической модели контура.

## 2.4 Контрольные вопросы и задания

1. Для нелинейной системы характерными являются эффекты неизохронности и мультистабильности. В чем заключаются эти эффекты?
2. Используя метод медленно меняющихся амплитуд (см. раздел 4.2.2.3) определить поправку к частоте колебаний автономного консервативного осциллятора с кубической нелинейностью  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0$
3. Покажите, что при определенных значениях параметров в фазовом пространстве осциллятора:  $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0$  сосуществуют два аттрактора. Постройте эту область значений на плоскости параметров  $(\beta - \gamma)$  при фиксированном значении  $\alpha > 0$ . Что определяет границу бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов?

# 3 Осцилляторы с изменяющимися параметрами. Явление параметрической неустойчивости

## 3.1 Примеры параметрических осцилляторов.

### Уравнение Матье и уравнение Хилла

Параметрическими называют системы, параметры которых меняются во времени. Простейшим примером параметрического осциллятора является математический маятник с изменяющейся длиной. Пусть длина маятника меняется относительно среднего значения  $l_0$  по гармоническому закону с частотой  $\omega_p$  (в случае параметрических осцилляторов частоту изменения параметра называют *частотой накачки* или *частотой возбуждения*) и с амплитудой  $\nu/l_0$  (*амплитуда накачки* или *амплитуда возбуждения*):  $l = l_0(1 + \nu \cos \omega_p t)$ . Уравнение движения математического маятника имеет вид:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$$

или, если подставить выражение для изменяющейся длины:

### 3 Явление параметрической неустойчивости

$$\ddot{x} + \frac{g}{l_0(1 + \nu \cos \omega_p t)} x = 0 \quad (3.1)$$

Обозначим  $\frac{g}{l_0}$  как  $\omega_0^2$  и, предполагая малость амплитуды накачки по сравнению со средним значением параметра:  $\nu \ll 1$ , разложим функцию  $\frac{1}{1 + \nu \cos \omega_p t}$  в ряд Тейлора по  $\nu$  вблизи нуля, ограничившись линейными членами разложения:

$$\frac{1}{1 + \nu \cos \omega_p t} = 1 - \nu \cos \omega_p t + \dots \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получаем уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - \nu \cos \omega_p t)x = 0. \quad (3.3)$$

В осцилляторе (3.3) параметр меняется во времени по гармоническому закону. Данный вид уравнения называется “уравнение Матгье”. Его можно записать в виде

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (3.4)$$

где  $\omega(t) = \omega_0 \sqrt{1 - \nu \cos \omega_p t}$  - зависящая от времени собственная частота осциллятора. Если в уравнении (3.4)  $\omega^2(t)$  задано периодической (не обязательно гармонической функцией), получается уравнение более общего вида, которое называется уравнением Хилла.

Уравнение Хилла - это линейное неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка. В отличие от неавтономного уравнения осциллятора под действием внешней силы, где зависящее от времени слагаемое добавляется в уравнение аддитивно, здесь зависимость от времени входит в уравнение мультипликативно, через зависимость коэффициентов при динамических переменных. К такому же уравнению приводит задача о колебательном контуре без потерь, емкость которого меняется по

### 3 Явление параметрической неустойчивости

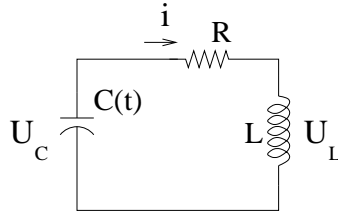


Рис. 3.1: Схема линейного контура с изменяющейся от времени емкостью

периодическому закону.

Рассмотрим схему линейного колебательного контура, емкость которого зависит от времени (рис. 3.1). Исходя из законов Кирхгофа, можно записать уравнение:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + U_c = 0 \quad (3.5)$$

Напряжение на конденсаторе  $U_c$  можно выразить через значения емкости конденсатора и заряда на его обкладках:  $U_c = q/C$ . Перепишем уравнение (3.5) для переменной  $q$ :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(t)} = 0. \quad (3.6)$$

Обозначая  $R/2L = \alpha$ ,  $1/LC = \omega^2$ ,  $q = x$ ,  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ , получим уравнение линейного осциллятора в традиционной форме:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2(t)x = 0 \quad (3.7)$$

Если емкость меняется по закону  $C(t) = C_0(1 + \nu c(t))$ , где  $C_0$  - среднее значение,  $\nu$  - коэффициент (глубина) модуляции параметра,  $c(t)$  - функция, задающая закон изменения параметра, (причем  $\max|c(t)| = 1$ ), то при малом коэффициенте модуляции изменение собственной частоты контура можно представить в виде:

$$\omega(t) = \omega_0 \sqrt{1 - \nu c(t)}.$$



### 3 Явление параметрической неустойчивости

Пусть параметр  $\omega(t)$  меняется периодически с периодом  $T_p$ :  $c(t + T_p) = c(t)$ . Как при этом будет вести себя система (3.7)? В зависимости от амплитуды и частоты параметрической накачки в ней возможно развитие параметрической неустойчивости, которая приводит к неограниченному нарастанию амплитуды колебаний. Такое явление в системах с периодически меняющимися параметрами называется параметрическим резонансом.

## 3.2 Условия возникновения параметрической неустойчивости

Для решения задачи о возникновении параметрической неустойчивости в линейном диссипативном параметрическом осцилляторе (3.7) несколько упростим систему, предположив, что параметр (собственная частота) меняется по закону “меандра”

$$\omega(t) = \omega_0 \sqrt{1 - \nu \text{Sign}(\cos \omega_p t)}$$

$\text{Sign}(x)$  - функция знака, принимающая значение  $+1$ , при положительном аргументе  $x$  и  $-1$  - при отрицательном. В этом случае собственная частота контура периодически принимает два значения:  $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \nu}$  и  $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - \nu}$  за период параметрического воздействия  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ . В течение времени равного половине периода воздействия  $[0; T_p/2]$  и  $[T_p/2; T_p]$  частота осциллятора остается постоянной. В этом случае для каждой части периода можно найти точное аналитическое решение и проанализировать поведение за весь период. Найдем точное решение для уравнения контура

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_{1,2}^2 x = 0$$

Перейдем к системе уравнений первого порядка:

### 3 Явление параметрической неустойчивости

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2\alpha y - \omega_{1,2}^2 x\end{aligned}\quad (3.8)$$

Производя подстановку  $x \sim \exp kt$  и определив значения показателя экспоненты  $k_{1,2} \simeq -\alpha \pm j\omega_{1,2}$ , получим общий вид решения для системы (3.8):

$$\begin{aligned}x &= \exp(-\alpha t)[A \exp(j\omega_{1,2}t) + B \exp(-j\omega_{1,2}t)] \\ y &= \exp(-\alpha t)[A(j\omega_{1,2} - \alpha) \exp(j\omega_{1,2}t) - B(j\omega_{1,2} + \alpha) \exp(-j\omega_{1,2}t)]\end{aligned}$$

Данное решение зависит от двух произвольных постоянных  $A$  и  $B$ , которые могут быть выражены через начальные условия  $x_0 = x(0)$  и  $y_0 = y(0)$ . При этом решение (при  $\omega = \omega_1$ ) запишется в виде:

$$\begin{aligned}x(t) &= \exp(-\alpha t)\left[x_0 \cos \omega_1 t + y_0 \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1}\right] \\ y(t) &= \exp(-\alpha t)\left[-x_0 \omega_1 \sin \omega_1 t + y_0 \cos \omega_1 t\right]\end{aligned}\quad (3.9)$$

Используя выражение (3.9), легко записать соотношение между начальными значениями  $x_0$ ,  $y_0$  и значениями через пол-периода параметрического воздействия  $t = \frac{\pi}{\omega_p}$ .

Представим это соотношение в виде матрицы:

$$\begin{bmatrix} x\left(\frac{\pi}{\omega_p}\right) \\ y\left(\frac{\pi}{\omega_p}\right) \end{bmatrix} = \exp\left(-\alpha \frac{\pi}{\omega_p}\right) \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} & \frac{1}{\omega_1} \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \\ -\omega_1 \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} & \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

или  $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{\omega_p}\right) = [M_1]\mathbf{x}(0)$ . Аналогично можно записать для интервала времени от  $\frac{\pi}{\omega_p}$

### 3 Явление параметрической неустойчивости

до  $\frac{2\pi}{\omega_p}$ :  $\mathbf{x}(\frac{2\pi}{\omega_p}) = [M_2]\mathbf{x}(\frac{\pi}{\omega_p})$ , где матрицу  $[M_2]$  можно получить из матрицы  $[M_1]$  заменой частоты  $\omega_1$  на  $\omega_2$  (в силу того что поведение на первом и втором интервалах времени описываются одинаковым уравнением, но с разными значениями параметра  $\omega(t) = \omega_{1,2}$ ). Можно ли определить соотношение между начальными значениями динамических переменных  $x_0, y_0$  и их значениями через период параметрического воздействия? Очевидно, что если нам известны матрицы  $[M_1]$  и  $[M_2]$ , которые задают такие соотношения для первой и второй половины периода, соответственно, то матрица, являющаяся их произведением, будет связывать значения динамических переменных через период параметрического воздействия:

$$\begin{bmatrix} x(\frac{2\pi}{\omega_p}) \\ y(\frac{2\pi}{\omega_p}) \end{bmatrix} = [M_2] \begin{bmatrix} x(\frac{\pi}{\omega_p}) \\ y(\frac{\pi}{\omega_p}) \end{bmatrix} \equiv [M_2][M_1] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

или:

$$\begin{bmatrix} x(\frac{2\pi}{\omega_p}) \\ y(\frac{2\pi}{\omega_p}) \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

где

$$[M] = \exp(-2\alpha \frac{\pi}{\omega_p}) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \cos \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \sin \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} & -\omega_1 \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \sin \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} - \omega_2 \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \cos \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} \\ \frac{1}{\omega_1} \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \cos \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} + \frac{1}{\omega_2} \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \sin \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} & \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \cos \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \sin \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} \end{bmatrix}$$

Данное решение будет нарастающим, если хотя бы одно собственное значение матрицы  $[M]$  по модулю будет больше единицы.

Определим собственные значения матрицы  $[M]$ . Они находятся из характеристического уравнения, которое в двумерном случае имеет вид:

### 3 Явление параметрической неустойчивости

$$\mu^2 - S\mu + J = 0 \quad (3.10)$$

где  $S = M_{11} + M_{22}$  - след матрицы  $[M]$ , а  $J = \det[M]$  - ее определитель. В рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} S &= \exp(-2\alpha \frac{\pi}{\omega_p}) \left[ 2 \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \cos \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} - \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \sin \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} \right] \\ J &= \exp(-4\alpha \frac{\pi}{\omega_p}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Используя (3.11), запишем собственные значения:

$$\mu_{1,2} = \exp(-2\alpha \frac{\pi}{\omega_p}) \left[ \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - 1} \right] \quad (3.12)$$

где  $s = 2 \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \cos \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} - \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \sin \frac{\pi\omega_2}{\omega_p}$ . Параметрическая неустойчивость возникает в том случае, если:

$$\left| \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - 1} \right| > \exp(2\alpha \frac{\pi}{\omega_p}) \quad (3.13)$$

Рассмотрим условие (3.13) более подробно. Пусть  $|s| < 2$ . В этом случае дискриминант квадратного уравнения отрицателен, и собственные значения - комплексно-сопряженные. Их модули одинаковы:

$$|\mu_{1,2}| = \sqrt{\mu_{1,2}\mu_{1,2}^*} = \exp(-2\alpha \frac{\pi}{\omega_p}) \sqrt{\left( \frac{s}{2} + j\sqrt{1 - \frac{s^2}{4}} \right) \left( \frac{s}{2} - j\sqrt{1 - \frac{s^2}{4}} \right)} = \exp(-2\alpha \frac{\pi}{\omega_p}) \leq 1$$

Таким образом, при условии  $|s| < 2$  колебания в параметрическом осцилляторе не нарастают. Пусть  $|s| \geq 2$ . Рассмотрим сначала случай консервативного осциллятора

### 3 Явление параметрической неустойчивости

( $\alpha = 0$ ). В этом случае условием параметрической неустойчивости будет:

$$|s| \geq 2$$

или:

$$\left| 2 \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \cos \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} - \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \sin \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} \right| \geq 2 \quad (3.14)$$

Пусть  $\nu \rightarrow 0$  (случай бесконечно малой амплитуды параметрического воздействия).

Тогда  $\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \rightarrow 2$  и условие (3.14) превратится в:

$$\left| \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \cos \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} - \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega_p} \sin \frac{\pi\omega_2}{\omega_p} \right| \geq 1$$

что можно переписать в виде:

$$\left| \cos \frac{\pi(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_p} \right| \geq 1$$

Данное неравенство выполняется для  $\frac{\pi(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_p} = \pi k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  или:

$$\frac{2\omega_0}{\omega_p} = k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Обозначим через  $\zeta = \frac{\omega_0}{\omega_p}$  - отношение собственной средней частоты контура к частоте накачки. Границами областей параметрической неустойчивости для консервативного осциллятора будут кривые, задаваемые уравнениями:

$$\cos \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\nu}} \cos \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1+\nu}} - \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \sin \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\nu}} \sin \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1+\nu}} = \pm 1 \quad (3.16)$$

Как видно из условия (3.15), данные границы, построенные на плоскости параметров  $\zeta - \nu$ , опираются на точки  $(0.5; 0)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(1.5; 0)$ ,  $(2; 0)$ , .... Вид областей неустойчиво-

### 3 Явление параметрической неустойчивости

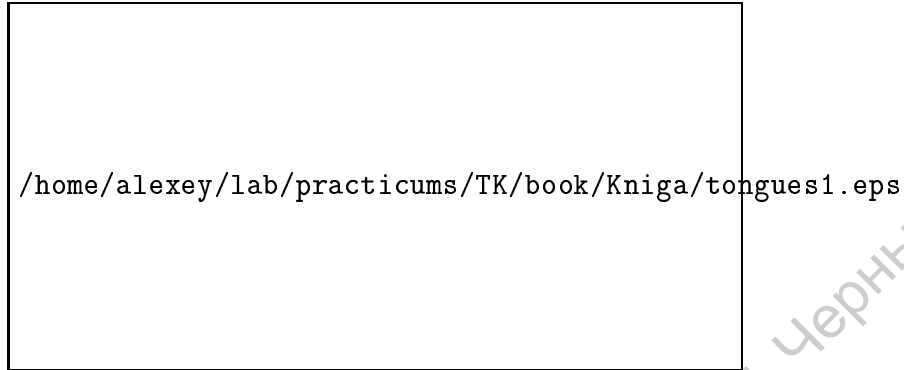


Рис. 3.2: Вид областей параметрической неустойчивости для консервативного осциллятора (линии “a”) и для диссипативного при значениях диссипации (линии “b”)  $\alpha/\omega_0 = 0.001$ , (линии “c”)  $\alpha/\omega_0 = 0.002$ , (линии “d”)  $\alpha/\omega_0 = 0.003$ , (линии “e”)  $\alpha/\omega_0 = 0.004$

сти для консервативного параметрического осциллятора приведен на рис.3.2 (линии “a”). В случае диссипативного осциллятора необходимо вернуться к более общему выражению (3.13). При бесконечно малой амплитуде воздействия  $\nu \rightarrow 0$  нарастание колебаний происходить не будет (поскольку  $\exp(2\alpha\frac{\pi}{\omega_p}) = \exp(2\pi\zeta\frac{\alpha}{\omega_0}) > 1$ ) Зоны параметрической неустойчивости для осциллятора с потерями оказываются приподнятыми над осью абсцисс. Величина порога определяется значением отношения параметра диссипации к собственной частоте контура  $\alpha/\omega_0$ . Вид областей параметрической неустойчивости при различных значениях  $\alpha/\omega_0$  приведен на рис. 3.2 (линии “b”). На рис.3.3 показан график зависимости  $\nu_{min}$  от приведенной диссипации  $\alpha/\omega_0$  для области генерации  $\zeta \approx 0.5$  и  $\zeta \approx 1$ .

### 3.3 Энергетическое описание параметрического резонанса

Параметрический резонанс можно объяснить с точки зрения баланса энергии. Пусть, например, емкость диссипативного колебательного контура меняется по закону “ме-

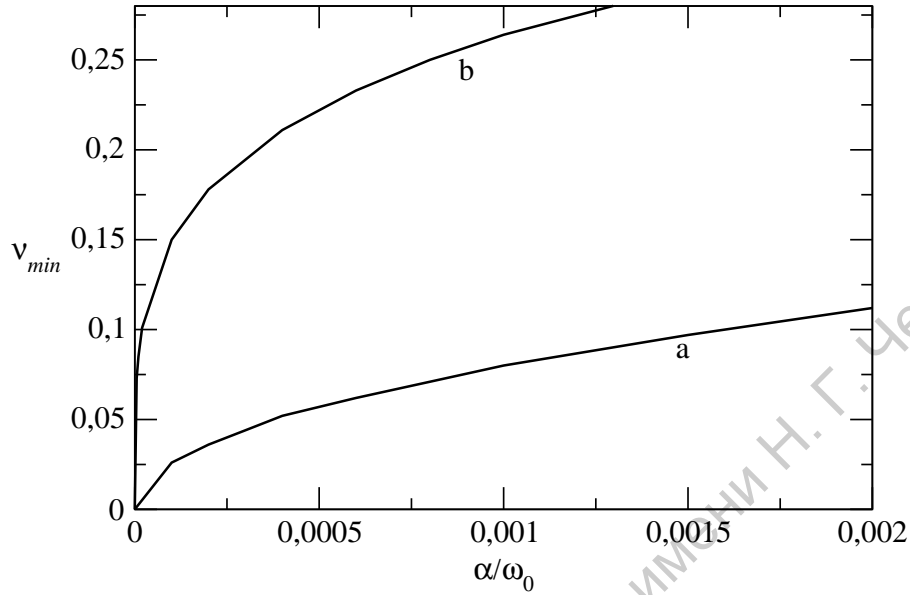


Рис. 3.3: Зависимость минимального значения глубины модуляции параметра от приведенной диссипации для областей (а)  $\zeta \approx 0.5$  и (б)  $\zeta \approx 1$ .

андра” с частотой, равной удвоенной собственной частоте контура (рис. 3.4).

Предположим, что параметрическое воздействие и колебания в контуре находятся в фазовых соотношениях, показанных на рисунке. Как известно, энергия электрического поля конденсатора равна  $q^2/2C$  ( $q$  - заряд,  $C$  - емкость). Если в момент максимального значения заряда уменьшить емкость на  $2\Delta C$ , то энергия, запасенная в конденсаторе, увеличится на:

$$\Delta W = \frac{q_0^2}{2} \left( \frac{1}{C_0 - \Delta C} - \frac{1}{C_0 + \Delta C} \right) = \frac{q_0^2}{2} \frac{2\Delta C}{C_0^2 - (\Delta C)^2}$$

В случае малого изменения емкости ( $\Delta C \ll C_0$ )

$$\Delta W \simeq \frac{q_0^2}{2C_0} \frac{2\Delta C}{C_0} = 2W_0\nu$$

где  $\nu = \Delta C/C_0$  - глубина модуляции параметра. В момент времени, когда заряд на конденсаторе равен нулю, емкость скачкообразно увеличивается на  $2\Delta C$ . Однако, это

### 3 Явление параметрической неустойчивости

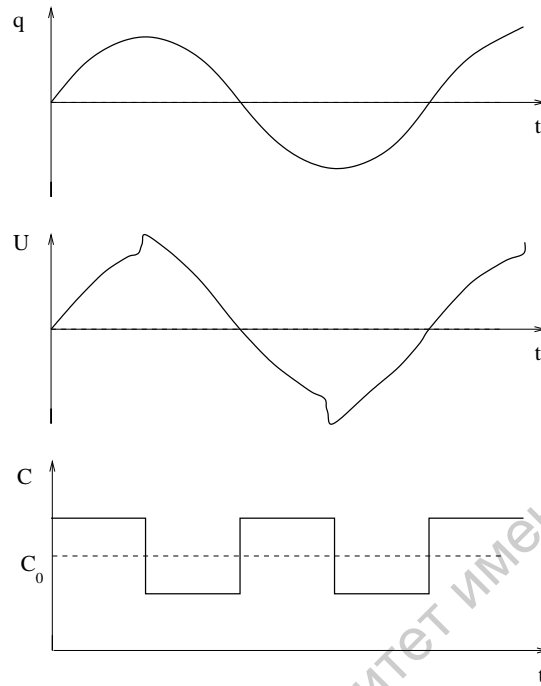


Рис. 3.4: Графики периодического изменения заряда, напряжения и емкости конденсатора

не приведет к уменьшению энергии в конденсаторе вследствие отсутствия заряда на нем. Поэтому в течение одного периода собственных колебаний конденсатор дважды получает порцию энергии, следовательно приращение энергии за период составит:

$$\Delta W_T = 4W_0\nu \quad (3.17)$$

Потери в контуре за счет диссипации за период колебаний составляют

$$\Delta W_d = \frac{W_0}{Q}$$

где  $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$  - добротность контура. Амплитуда колебаний будет нарастать в том случае, если приток энергии превышает потери. Поэтому, условием возникновения параметрического резонанса будет:



### 3 Явление параметрической неустойчивости

$$4W_0\nu \geq \frac{W_0}{Q} \quad (3.18)$$

или

$$\nu \geq \frac{1}{4Q} = \frac{\alpha}{2\omega_0} \quad (3.19)$$

## 3.4 Нелинейные механизмы ограничения амплитуды колебаний

Если глубина модуляции параметра  $\nu$  больше критического значения, то каждый период колебаний в контур будет добавляться энергия. Амплитуда колебаний начнет неограниченно возрастать. Неограниченное возрастание амплитуды - результат использования линейной модели для описания параметрического резонанса. В реальности неограниченного возрастания амплитуды не происходит, поскольку при больших амплитудах колебаний система демонстрирует нелинейные свойства, приводящие к ограничению амплитуды колебаний. Одним из таких проявлений нелинейности может служить зависимость величины активных потерь в осцилляторе от амплитуды колебаний в нем. Пусть, например, коэффициент диссипации осциллятора зависит от колебаний в нем следующим образом:  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x^2$ . В этом случае, средние потери в контуре будут расти с ростом амплитуды колебаний в нем и при некотором значении амплитуды, возникнет динамическое равновесие между энергией, поступающей в контур и энергией рассеиваемой. Следовательно, любое сколь угодно малое значение коэффициента диссипативной нелинейности  $\alpha_1$  приведет к ограничению колебаний. Описанный механизм ограничения амплитуды колебаний называется *диссипативным*. Другим примером нелинейности, ограничивающей колебания в параметрическом ос-

### 3 Явление параметрической неустойчивости

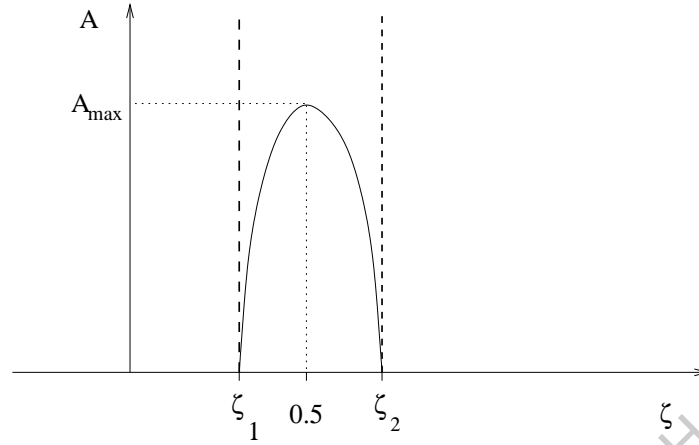


Рис. 3.5: Зависимость амплитуды параметрических колебаний  $A$  от отношения частот  $\zeta$  при диссипативном механизме ограничения амплитуды.  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  - границы области параметрической неустойчивости при выбранном значении глубины модуляции параметра  $\nu$ . Штриховые линии изображают амплитудно-частотную характеристику для линейного осциллятора.

циллаторе, может служить зависимость собственной частоты осциллятора от амплитуды колебаний в нем:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 - \nu \text{Sign}(\cos \omega_p t) + \mu x^2)$$

В этом случае, рост амплитуды колебаний в осциллаторе приведет к смещению его собственной частоты и, следовательно, к выходу из зоны параметрического резонанса. Данный механизм ограничения амплитуды называется *расстроечным*.

Рассмотрим к каким эффектам приводит расстроечный механизм ограничения амплитуды колебаний. Запишем уравнение для нелинейного консервативного осциллятора при гармоническом параметрическом воздействии:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \nu \cos 2\omega_p t)(x + \mu x^3) = 0 \quad (3.20)$$

Подобное уравнение может описывать контур без потерь, в котором емкость не только

### 3 Явление параметрической неустойчивости

периодически меняется со временем, но еще и зависит от приложенного напряжения. Для анализа уравнения (3.20) используем метод гармонического баланса, подставив в уравнение решение  $x = a \cos \omega_p t + b \sin \omega_p t$  на частоте, равной половине частоты накачки (то есть мы рассматриваем случай основной области параметрического резонанса). Пренебрегая слагаемыми с кратными частотами  $2\omega_p t, 3\omega_p t$  получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\omega_0^2(a + \frac{3\mu}{4}a^3 + \frac{3\mu}{4}ab^2)(1 + \frac{\nu}{2}) - a\omega_p^2 &= 0 \\ \omega_0^2(b + \frac{3\mu}{4}b^3 + \frac{3\mu}{4}a^2b)(1 - \frac{\nu}{2}) - b\omega_p^2 &= 0\end{aligned}\quad (3.21)$$

Тривиальное решение (3.21)  $a = 0, b = 0$  соответствует состоянию равновесия в начале координат, то есть отсутствию колебаний. Легко увидеть, что при одновременном выполнении неравенств  $a \neq 0, b \neq 0$  система становится несовместной. Таким образом, параметрическим колебаниям может соответствовать один из случаев: (а)  $a \neq 0, b = 0$  или (б)  $a = 0, b \neq 0$ . Определим амплитуду колебаний как  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Рассмотрим случай (а). Уравнение для амплитуды колебаний примет вид:

$$A^2 = \frac{3}{4\mu} \left[ \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2(1 + \nu/2)} - 1 \right] \quad (3.22)$$

В зависимости от знака параметра нелинейности  $\mu$  параметрические колебания с ненулевой амплитудой ( $A$  - вещественно) существуют либо при  $\omega_p > \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \nu/2}$  - для положительных значений  $\mu$ , либо при  $\omega_p < \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \nu/2}$  - для отрицательных значений  $\mu$ . Для случая (б) получим уравнение для амплитуды:

$$A^2 = \frac{3}{4\mu} \left[ \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2(1 - \nu/2)} - 1 \right] \quad (3.23)$$

Условия для существования вещественного решения следующие: либо  $\omega_p > \omega_2 =$

### 3 Явление параметрической неустойчивости

$\omega_0\sqrt{1-\nu/2}$  - для положительных значений  $\mu$ , либо при  $\omega_p < \omega_2 = \omega_0\sqrt{1-\nu/2}$  - для отрицательных значений  $\mu$ . Из уравнений (3.22) и (3.23) видно, что:

1. Существуют значения частоты накачки ( $\omega_2 < \omega_p < \omega_1$ ), при которых возможны колебания с двумя разными значениями амплитуды.
2. Амплитуда колебаний линейно зависит от частоты.

Хотя при частотах больших  $\omega_1$  существует два колебательных режима с разными амплитудами, но только один из них является устойчивым и будет наблюдаться в эксперименте. График зависимости амплитуды колебаний от частоты накачки представлен на рис.3.6. При частотах меньших  $\omega_2$  колебаний в осцилляторе нет. Единственным аттрактором в системе является устойчивое состояние равновесия в начале координат. При значении частоты накачки  $\omega_p = \omega_2$  состояние равновесия теряет устойчивость и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, соответствующий колебаниям малой амплитуды. При увеличении частоты амплитуда данных колебаний увеличивается по линейному закону (ветвь 1 на рис.3.6). Когда частота накачки становится равной  $\omega_1$ , из седлового состояния равновесия рождается неустойчивый предельный цикл, амплитуда которого соответствует линии 2 на рис. 3.6. Состояние равновесия при этом снова становится устойчивым. Область частот выше частоты  $\omega_1$  - зона бистабильности. В зависимости от выбора начальных условий в осцилляторе либо будут наблюдаться параметрические колебания (ветвь 1), либо нет. Бассейны притяжения устойчивого предельного цикла и устойчивого состояния равновесия разграничиваются неустойчивым предельным циклом. Если осциллятор диссипативный, то зависимость амплитуды колебаний от частоты имеет характер линии 3 на рис. 3.6. При значении частоты  $\omega_p = \omega_c$  устойчивый и неустойчивый предельные циклы встречаются в фазовом пространстве и исчезают. Остается единственный аттрактор - состояние равновесия. В эксперименте в области частот  $\omega_1 < \omega_p < \omega_c$  будет наблюдаться

### 3 Явление параметрической неустойчивости

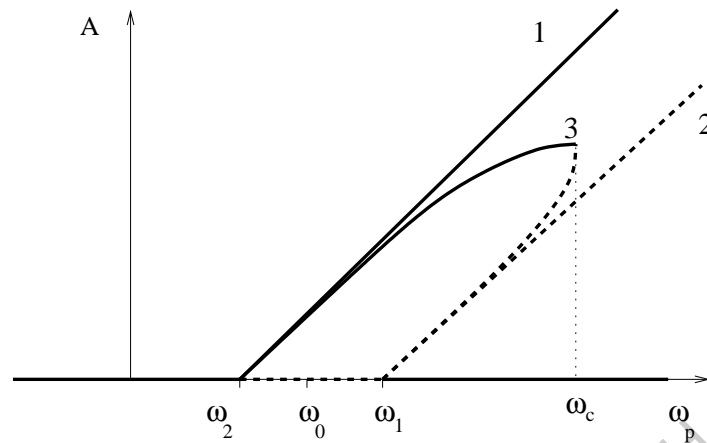


Рис. 3.6: Зависимость амплитуды колебаний параметрического осциллятора от частоты. Линии 1 и 2 соответствуют случаю консервативного осциллятора, 3 - диссипативного осциллятора. Сплошными линиями показаны амплитуды устойчивых режимов, штриховыми - амплитуды неустойчивых.

ся гистерезис. При уменьшении частоты, в точке  $\omega_p = \omega_1$  будет наблюдаться жесткое возбуждение колебаний, амплитуда которых постепенно уменьшается до нуля в точке  $\omega_p = \omega_2$ . При обратном движении по параметру, в точке  $\omega_p = \omega_2$  произойдет мягкое возникновение колебаний, а в точке  $\omega_p = \omega$  произойдет их срыв. Изображенные на рис. 3.6 зависимости соответствуют положительным значениям параметра  $\mu$ . При отрицательных значениях нелинейности картина становится зеркально симметричной относительно линии  $\omega_p = \omega_0$ .

Для многих систем характерно одновременное присутствие обоих механизмов, один из которых может играть определяющую роль при ограничении амплитуды колебаний в осцилляторе.

## 3.5 Работа N 5. Исследование параметрической неустойчивости в колебательном контуре с переменной емкостью

Выполнение лабораторной работы предполагает исследование электронной схемы, моделирующей параметрический осциллятор.

### 3.5.1 Исследуемая система

Исследуемая в работе электронная цепь представляет собой последовательный колебательный контур, с управляемой внешним сигналом емкостью. Каким образом управлять емкостью конденсатора? Механическое изменение расстояния между пластинами или их площади очень неудобно с точки зрения практического исполнения. Поэтому обычно применяют эквивалентные электронные схемы, моделирующие конденсатор, параметры которых легко менять посредством внешних электрических сигналов. Рассмотрим, например, схему на рис. 3.7. К обычному конденсатору с постоянной емкостью  $C$  подключен трансформатор сопротивлений с высоким входным и низким выходным сопротивлениями и коэффициентом передачи по напряжению  $k$ . В идеальном случае можно считать входное сопротивление трансформатора бесконечным ( $R_{in} \rightarrow \infty$ ), а выходное - нулевым ( $R_{out} \rightarrow 0$ ). Если входное напряжение равно

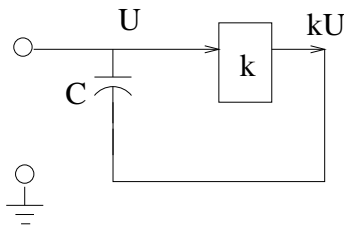


Рис. 3.7: Простейший пример эквивалентного электронного конденсатора

### 3 Явление параметрической неустойчивости

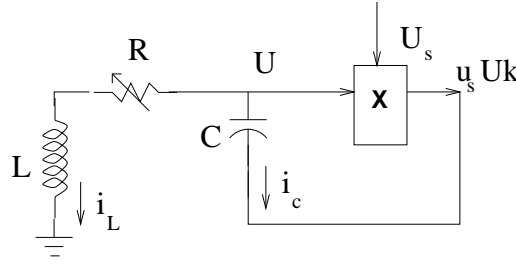


Рис. 3.8: Схема осциллятора с перестраиваемой емкостью

$U$ , то выходное равно  $kU$ . Напряжение с выхода трансформатора сопротивлений подается на вторую обкладку конденсатора. Таким образом, разность потенциалов на емкости равна  $U_c = U - kU = U(1 - k)$ . С другой стороны, согласно определению емкости  $C = \frac{q}{U_c}$ , где  $q$  - заряд на обкладках конденсатора. Следовательно,  $U = \frac{q}{C(1-k)} = \frac{q}{C_e}$ , где  $C_e = C(1 - k)$  - эквивалентная емкость схемы на рис.3.7, которую легко менять электрически, перестраивая коэффициент передачи  $k$ . В качестве трансформатора сопротивлений с перестраиваемым коэффициентом передачи можно взять аналоговый множитель сигналов. В этом случае напряжение на выходе такого устройства будет равно произведению входного напряжения  $U$  и управляющего напряжения  $U_s(t)$ :  $U_{out} = UU_s(t)k$  ( $k$  - коэффициент пропорциональности). Суммируя вышесказанное, нарисуем структурную схему колебательного контура с перестраиваемой емкостью (рис. 3.8). Выведем уравнение для схемы, изображенной на рис. 3.8. Напряжение на входе умножителя есть сумма напряжений на сопротивлении  $U_R$  и индуктивности  $U_L$ :  $U = U_R + U_L$ . С другой стороны,  $U = U_C + UU_s(t)k$  или  $U = \frac{U_C}{1 - U_s(t)k}$ , поэтому:

$$U_L + U_R = \frac{U_C}{1 - U_s(t)k}$$

или:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = \frac{q}{C(1 - U_s(t)k)}$$

### 3 Явление параметрической неустойчивости

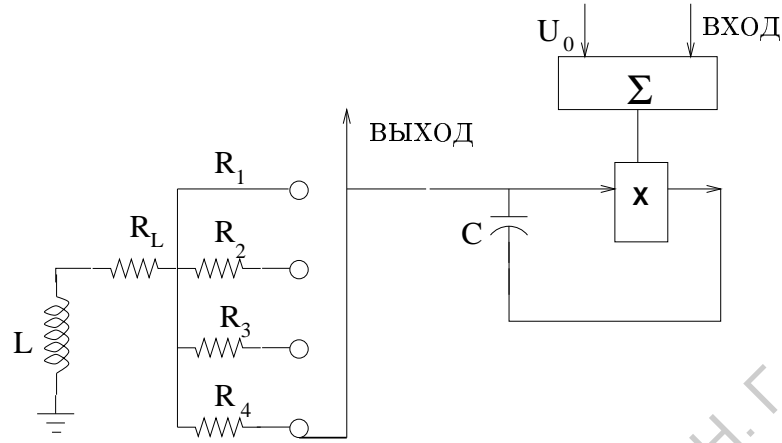


Рис. 3.9: Схема исследуемого контура

Так как  $i_L = -i_C = -\frac{dq}{dt}$ , то можно записать уравнение для заряда на емкости:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(1 - U_s(t)k)} = 0$$

или

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_e(t)} = 0$$

где  $C_e(t) = C(1 - U_s(t)k)$  - эквивалентная емкость.

#### 3.5.2 Лабораторная установка

Экспериментальная установка состоит из исследуемого осциллятора, схема которого изображена на рис. 3.9, генератора стандартных сигналов, который служит для управления емкостью контура, и осциллографа, предназначенного для визуального наблюдения параметрических колебаний.

Катушка характеризуется значением индуктивности  $L = 18\text{мГн}$  и внутренним сопротивлением  $R_L = 33\text{ Ом}$ . В контур вводится дополнительное сопротивление, вели-



### 3 Явление параметрической неустойчивости

чина которого может принимать ряд дискретных значений:  $R_1 = 0$  Ом,  $R_2 = 33$  Ом,  $R_3 = 56$  Ом и  $R_4 = 100$  Ом. Постоянная емкость контура  $C = 10$  нФ. В качестве аналогового перемножителя используется микросхема К525ПС2, которая осуществляет перемножение с масштабным множителем  $k = 0.1$  В<sup>-1</sup>. Управляющее напряжение является суммой входного сигнала и постоянной составляющей  $U_0 = 5$  В.

#### 3.5.3 Порядок выполнения работы

1. Подключить к контуру внешний генератор и осциллограф, выбрать указанный преподавателем режим работы генератора, установить значения амплитуды и частоты воздействия внутри основной зоны параметрической неустойчивости и добиться установления параметрических колебаний в системе. Зарисовать фазовые портреты параметрических колебаний вблизи границы и внутри зоны неустойчивости. Для наблюдения фазовых портретов необходимо отключить развертку осциллографа, переведя его в режим X-Y, на вход X подать сигнал с внешнего генератора.
2. Меняя значения частоты и амплитуды управляющего сигнала определить и построить на графике области параметрической неустойчивости для  $\zeta \simeq 0.5$ , 1 для разных значений сопротивления:  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ . При выполнении данного задания необходимо менять значение частоты накачки, как в сторону увеличения, так и уменьшения частоты, так как при этом могут получаться разные значения границ зон параметрической неустойчивости.
3. В окрестности основной зоны неустойчивости построить амплитудно-частотную характеристику колебаний в контуре для одного значения сопротивления. Определить какой механизм ограничения амплитуды параметрических колебаний работает в данной схеме.

### 3.6 Контрольные вопросы и задания

1. В уравнении (3.3) собственная частота  $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}}$ . Полагая  $C(t) = C_0(1 + \nu c(t))$ , показать, что при малом коэффициенте модуляции  $\nu$  изменения собственной частоты контура может быть представлено в виде  $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 - \nu c(t))$ .
2. Используя энергетическое описание, определите амплитуду установившихся колебаний при диссипативном механизме ограничения амплитуды, если параметр контура меняется по закону меандра.
3. Каким образом определить в эксперименте какой из механизмов ограничения амплитуды колебаний имеет место в исследуемом контуре?
4. Получите уравнение для колебательного контура с периодически меняющейся индуктивностью.
5. Покажите, что при периодическом изменении активного сопротивления контура, явление параметрической неустойчивости не возникнет.
6. Как меняются свойства консервативного параметрического осциллятора при внесении в него диссипации?

## 4 Автоколебания. Возбуждение автоколебаний

Системы, способные совершать незатухающие колебания, можно разделить на два класса: колебательные системы, находящиеся под внешним периодическим воздействием, и автоколебательные системы. Термин "автоколебательные системы", был впервые введен А.А. Андроном. Он использовался им для того, чтобы определить те системы:

- а) которые способны совершать колебательные движения без воздействия внешней периодической силы, за счет внутренних источников энергии;
- б) характеристики колебаний которых (амплитуда, частота, фаза) не зависят, по крайней мере в некотором диапазоне, от начальных условий.

Математической моделью автоколебательной системы могут служить автономные дифференциальные уравнения или системы уравнений. В качестве примера можно привести хорошо известные в теории колебаний уравнения Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4.1)$$

и Релея:

$$\ddot{x} - (\epsilon - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4.2)$$

#### 4 Автоколебания

Автономность этих систем означает, что в них не входит в явном виде время. Для сравнения уравнение

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t, \quad (4.3)$$

описывающее линейный осциллятор под периодическим воздействием, не является автономным, поскольку его правая часть содержит время в качестве переменной.

Однако, не всякое автономное дифференциальное уравнение может описывать автоколебательную систему. Прежде всего, необходимо, чтобы порядок уравнения был больше или равен двум. Во-вторых, из условия независимости колебаний от начальных условий следует, что уравнения, описывающие их, должны быть нелинейными. Кроме того, поскольку система содержит внутренние источники энергии, должны существовать элементы на которых эта энергия рассеивается. Поэтому математической моделью автоколебательной системы не может быть консервативная, гамильтонова система, а может быть лишь система с диссипацией. Таким образом, необходимыми условиями для уравнений, описывающих автоколебания будут:

- 1) автономность,
- 2) порядок уравнения  $\geq 2$ ,
- 3) нелинейность,
- 4) неконсервативность.

Всем этим условиям удовлетворяют уравнения (4.1) и (4.2).

Простейшим видом автоколебаний являются периодические колебания, то есть движения, удовлетворяющие соотношению:

$$x(t + T) = x(t),$$

где  $x$  - переменная, описывающая движение,  $T$  - период колебаний.

На фазовой плоскости периодическим колебаниям соответствует предельный цикл

## 4 Автоколебания

- изолированная замкнутая кривая. Изолированность предельного цикла означает, что в его ближайшей окрестности не может существовать других замкнутых траекторий, соответствующих другим периодическим колебаниям системы. Необходимо подчеркнуть, что периодические колебания - это установившийся процесс, к которому система асимптотически стремится при неограниченном возрастании времени. В теории колебаний все движения подразделяются на установившиеся и переходные, то есть стремящиеся к установившимся. В дальнейшем мы будем рассматривать только установившиеся процессы.

### 4.1 Примеры автоколебательных систем.

#### Уравнение Ван-дер-Поля и уравнение Рэля

##### 4.1.1 Ламповый генератор с колебательным контуром и индуктивной обратной связью

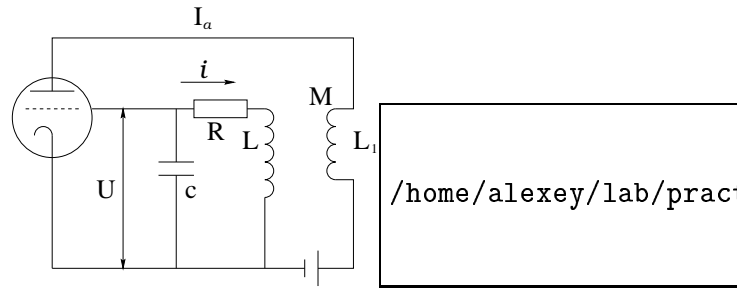
Упрощенная схема радиотехнического генератора с колебательным контуром в цепи сетки и индуктивной обратной связью изображена на рис.4.1а. Используя законы Кирхгофа, можно записать дифференциальные уравнения для колебательного контура относительно напряжения  $u$  на конденсаторе  $C$  :

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = M \frac{dI_a}{dt} \quad (4.4)$$

где  $L$ ,  $R$ ,  $C$  - индуктивность, сопротивление и емкость колебательного контура,  $M$  - коэффициент взаимной индукции,  $I_a$  - анодный ток лампы.

Предположим, что анодный ток зависит лишь от напряжения  $u$  на сетке лампы, т.е.

#### 4 Автоколебания



(a) Схема генератора

(b) Анодно-сеточная характеристика лампы

Рис. 4.1: Ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки и индуктивной обратной связью

$I_a = f(u)$  и, следовательно:

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dt} \quad (4.5)$$

С учетом (4.5) уравнение (4.4) можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left\{ \frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \frac{df(u)}{du} \right\} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0. \quad (4.6)$$

Предположим далее, что анодно - сеточную характеристику лампы можно аппроксимировать полиномом

$$I_a = I_0 + S_0u - S_2u^3, \quad (4.7)$$

график которого представлен на рис.4.1b. Перепишем уравнение (4.4) с учетом явного

## 4 Автоколебания

вида функции  $f(u)$  в форме

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \alpha(1 - \beta u^2)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (4.8)$$

где  $\alpha = (MS_0 - RC)/LC$ ,  $\beta = 3MS_2/(MS_0 - RC)$ ,  $\omega_0^2 = 1/LC$ .

Введем новое время  $\tau = \omega_0 t$  и сделаем замену переменных и параметров:  $\varepsilon = \alpha/\omega_0$  и  $x = \sqrt{\beta}u$ . В результате уравнение (4.8) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{d\tau} + x = 0. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) называется уравнением Ван дер Поля. Во многих случаях его удобно представлять в виде

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - (\varepsilon - y^2)\frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad (4.10)$$

которое получается из (4.9) при замене  $y = \sqrt{\varepsilon}x$ .

### 4.1.2 Генератор на туннельном диоде

Рассмотрим схему генератора, представляющего собой линейный колебательный контур, в который включена нелинейная проводимость. Схема генератора и вольт - амперная характеристика нелинейного элемента представлены на рис. 4.2.

Генераторы подобного типа называются в радиотехнике генераторами с отрицательным сопротивлением, поскольку вольт-амперная характеристика нелинейного элемента имеет падающий участок, что позволяет интерпретировать данный элемент как

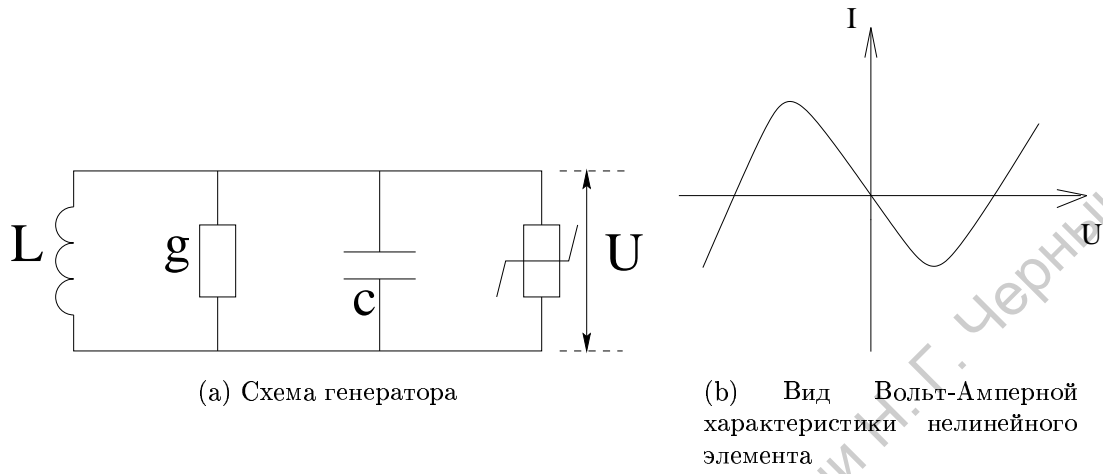


Рис. 4.2: Генератор на туннельном диоде

элемент с отрицательным дифференциальным сопротивлением  $dU/dI < 0$ . Вольт - амперную характеристику нелинейного элемента можно аппроксимировать функцией

$$I = -\alpha u + \beta u^3. \quad (4.11)$$

Используя законы Кирхгофа, запишем уравнения для колебательного контура с нелинейным элементом:

$$\begin{aligned} C \frac{du}{dt} + gu - \alpha u + \beta u^3 + i &= 0, \\ L \frac{di}{dt} &= u. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Дифференциальное уравнение относительно напряжения  $u$  на нелинейном элементе имеет вид



$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{\alpha - g}{C} \left\{ 1 - \frac{3\beta}{\alpha - g} u^2 \right\} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0.$$

Если введем безразмерное время и сделаем замену переменных и параметров

$$\tau = \omega_0 t, \quad (\omega_0 = \frac{1}{LC}), \quad x = \sqrt{\frac{3\beta}{\alpha - g}} u, \quad \epsilon = \frac{\alpha - g}{\omega_0 C},$$

получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \epsilon(1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Для генератора на туннельном диоде, вольт - амперная характеристика которого задана функцией (4.11), получили уравнение Ван дер Поля. Если для контура записать дифференциальное уравнение относительно тока  $i$  протекающего через катушку индуктивности  $L$ , то можно получить уравнение Рэлея.

### 4.1.3 RC - генератор с мостом Вина

Генератор с мостом Вина - наиболее распространенный тип RC-генератора. Он представляет собой последовательно-параллельную RC - цепочку, включенную в цепь обратной связи усилителя. Упрощенная схема RC - генератора изображена на рис.4.3.

Используя для этой цепи законы Кирхгофа и учитывая, что  $u_1 = f(u_2)$ , запишем уравнение относительно напряжения  $u_2$ :

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + \left\{ \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_1C_2} - \frac{1}{R_1C_2} \frac{df(u_2)}{du_2} \right\} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2} u_2 = 0.$$

Будем рассматривать симметричный мост Вина, когда  $R_1 = R_2 = R$  и  $C_1 = C_2 = C$ .

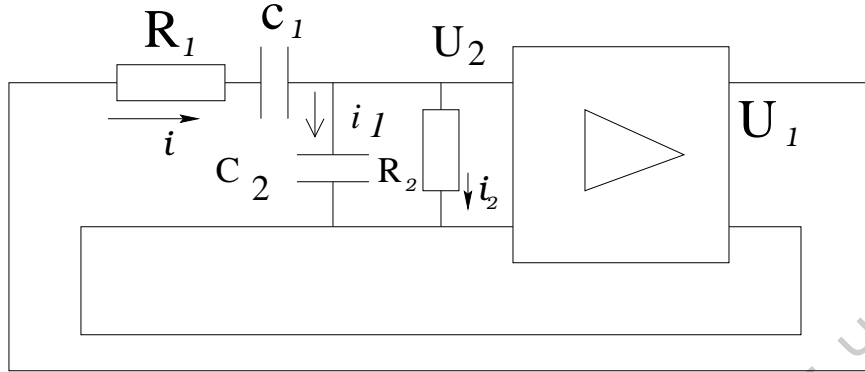


Рис. 4.3: Схема RC-генератора с мостом Вина

В этом случае уравнение примет вид

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \left\{ \frac{3}{RC} - \frac{1}{RC} \frac{df(u_2)}{du_2} \right\} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R^2 C^2} u_2 = 0. \quad (4.13)$$

Введем обозначение  $\omega_0 = 1/RC$  и предположим, что зависимость выходного напряжения  $u_1$  усилителя от входного  $u_2$  можно аппроксимировать функцией

$$f(u_2) = k u_2 - k_1 u_2^3. \quad (4.14)$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} - \left\{ \frac{k-3}{RC} - \frac{3k_1}{RC} u_2^2 \right\} \frac{du_2}{dt} + \omega_0^2 u_2 = 0. \quad (4.15)$$

Перейдем к новому времени и сделаем замену переменных и параметров:  $\tau = \omega_0 t$ ,

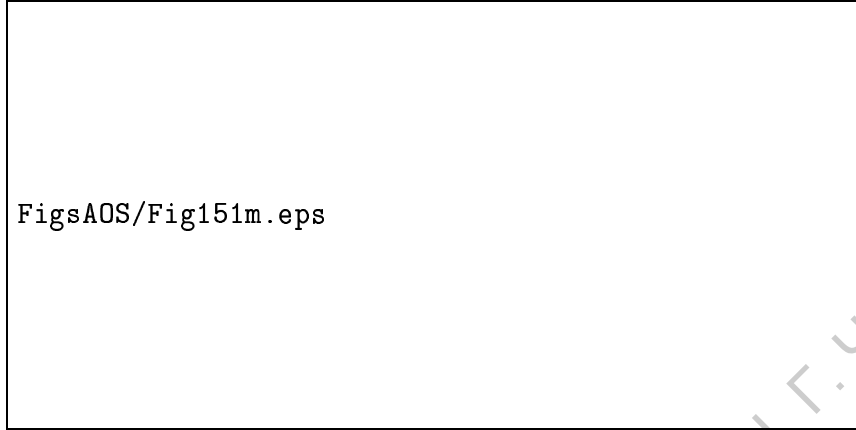


Рис. 4.4: Простейший пример механической автоколебательной системы: закрепленный пружинами грузик на движущейся ленте

$x = u_2\sqrt{3k_1}$ ,  $\lambda = k - 3$ . В результате получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - (\lambda - x^2)\frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Таким образом, для генератора с симметричным мостом Вина при условии, что характеристика усилителя может быть аппроксимирована функцией (4.14), получили уравнение Ван дер Поля.

#### 4.1.4 Закрепленный пружинами грузик на ленте, движущейся с постоянной скоростью

Простым примером механической автоколебательной системы может служить устройство(2), изображенное на рис. 4.4.

На движущейся равномерно со скоростью  $v_0$  ленте лежит грузик массой  $m$ , который закреплен с двух сторон пружинками с коэффициентами упругости  $k_1$  и  $k_2$ . Обозначим смещение груза от состояния равновесия через  $x$ , а его скорость через  $x'$ . Силу трения ленты о груз обозначим через  $F(v_0 - x')$ , которая представляет собой

#### 4 Автоколебания

некоторую функцию относительно скорости ленты и тела  $(v_0 - x')$ . “Результирующий” коэффициент упругости двух пружин обозначим через  $k$ , и будем считать пропорциональными первой степени скорости все остальные силы трения, действующие в этой системе (например сопротивление воздуха или внутреннее трение в пружинах).

Запишем уравнение движения груза

$$mx'' + bx' + kx = F(v_0 - x'). \quad (4.16)$$

Будем полагать, что постоянная скорость движения ленты  $v_0$  много больше скорости движения груза. В таком рассмотрении, раскладывая функцию  $F$  в ряд вблизи значений  $v_0$  ограничимся несколькими первыми членами ряда

$$F(v_0 - x') = F(v_0) + F'(v_0)(-x') + \frac{1}{2}F''(v_0)(-x')^2 + \frac{1}{6}F'''(v_0)(-x')^3 + \dots \quad (4.17)$$

Уравнение движения примет вид

$$mx'' + bx' + kx = F(v_0) - F'(v_0)x' + \frac{1}{2}F''(v_0)(x')^2 - \frac{1}{6}F'''(v_0)(x')^3. \quad (4.18)$$

Значения коэффициентов  $F'(v_0)$ ,  $F''(v_0)$ ,  $F'''(v_0)$  зависят от вида характеристики трения. Если функция  $F(v_0 - x')$  имеет “падающий” участок ( $F'(v_0) < 0$ ), точку перегиба на падающем участке и  $F'''(v_0) > 0$ , и если мы выберем постоянную скорость движения ленты так, чтобы это значение являлось абсциссой точки перегиба на “падающем” участке функции  $F(v_0 - x')$ , тогда  $F''(v_0) = 0$  и уравнение (1.5.3) можно переписать в виде

$$mx'' + bx' + kx + F(v_0) + \alpha x' - \beta(x')^3, \quad (4.19)$$

где  $\alpha = -F'(v_0)$ ,  $\beta = \frac{1}{6}F'''(v_0)$ . Переходя к новому времени  $\tau = \sqrt{\frac{k}{m}}t$  при замене

переменных и параметров

$$y = \sqrt{\frac{\beta}{m} \sqrt{\frac{k}{m}} \left(x - \frac{f(v_0)}{k}\right)}, \quad \lambda = \frac{\alpha - b}{\sqrt{mk}}$$

получим уравнение

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} - \left\{ \lambda - \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right\} \frac{dy}{d\tau} + y = 0.$$

Рассмотренная механическая автоколебательная система, представляющая собой закрепленный пружинами грузик на ленте, движущейся с постоянной скоростью, описывается уравнением Рэлея, которое можно свести к уравнению Ван дер Поля.

## 4.2 Методы исследования автоколебательных систем

Исследование автоколебательных систем как правило занимается следующими вопросами:

- Условия и характер возникновения автоколебаний.
- Тип возникающих колебаний (периодические, квазипериодические или хаотические) и его изменение при изменении параметров системы.
- Характеристики установившихся колебаний: амплитуда, частота, спектральный состав в зависимости от параметров системы.

Поскольку в большинстве случаев получить точное аналитическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений не представляется возможным, для анализа автоколебаний приходится прибегать к численному исследованию, либо использовать приближенные методы нахождения аналитического решения.

### 4.2.1 Состояния равновесия и анализ устойчивости

При исследовании автоколебательных систем, определении условий возникновения автоколебаний важно знать какие состояния равновесия существуют в системе и как меняется характер их устойчивости в зависимости от управляющих параметров. При потере устойчивости состоянием равновесия типа “фокус” в его окрестности может возникнуть устойчивый предельный цикл (бифуркация Андронова-Хопфа). Данный сценарий возникновения автоколебаний является типичным и реализуется в большом числе автоколебательных систем. С точки зрения радиофизики он представляет собой “мягкое возбуждение автоколебаний”. Существует и другой сценарий возникновения колебаний - так называемое “жесткое возбуждение колебаний”. Явления, наблюдаемые при жестком возбуждении колебаний также связаны с бифуркациями состояния равновесия (субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа). Данная бифуркация будет рассмотрена позже. Методика анализа состояний равновесия и их типичные бифуркации подробно описаны в главе 1.

### 4.2.2 Методы нахождения приближенных аналитических решений, соответствующих периодическим автоколебаниям

#### 4.2.2.1 Энергетический метод Теодорчика

Иследуем автоколебательный режим в осцилляторе Ван дер Поля методом Теодорчика. Для иллюстрации метода воспользуемся осциллятором Ван дер Поля, уравнение которого запишем в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt}. \quad (4.20)$$

#### 4 Автоколебания

Будем рассматривать случай малых значений параметра  $\varepsilon$ . Решение уравнения (4.20) будем искать в виде квазигармонических колебаний с медленно меняющейся амплитудой  $A$  и постоянной частотой  $\omega$ , которая может отличаться от собственной частоты  $\omega_0 = 1$ :

$$x(t) = A(t) \cos \omega t. \quad (4.21)$$

Для того чтобы определить значение частоты автоколебаний, величину стационарной амплитуды и закон ее установления, представим исходное уравнение (4.20) в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = (\omega^2 - 1)x + \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (4.22)$$

Правую часть этого уравнения будем рассматривать как сумму сил, действующих на консервативную колебательную систему

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = F, \quad (4.23)$$

где

$$F = (\omega^2 - 1)x + \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}.$$

Запишем силу  $F$  с учетом заданного движения (4.21)

$$\begin{aligned} F &= (\omega^2 - 1)x + \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} \\ &= (\omega^2 - 1)A(t) \cos \omega t + \varepsilon(1 - A^2 \cos^2 \omega t) \left\{ \frac{dA}{dt} \cos \omega t - \omega A \sin \omega t \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $A(t)$  - медленно меняющаяся величина, то  $\frac{dA}{dt}$  - малая величина (величина первого порядка малости). Слагаемые, которые содержат произведение  $\varepsilon \frac{dA}{dt}$ , в

#### 4 Автоколебания

преобразованиях учитывать не будем, поскольку они являются величинами второго порядка малости. С учетом сказанного получим

$$F(t) = (\omega^2 - 1)A \cos \omega t - \varepsilon \omega A \sin \omega t + \varepsilon \omega A^3 \cos^2 \omega t \sin \omega t.$$

Разложим функцию  $F$  в ряд Фурье и выделим резонансные члены. Все высшие гармоники в разложении должны слабо влиять на консервативную колебательную систему, поэтому их можно отбросить.

$$F(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + \text{высшие гармоники}$$

где

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt,$$

$$A_1 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \omega t dt,$$

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \omega t dt.$$

Здесь  $T$  - период функции  $F(t)$  и  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Вычислим коэффициенты  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ .

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (\omega^2 A - A) \cos \omega t dt - \\ &- \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \varepsilon \omega A \sin \omega t dt + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \varepsilon \omega A^3 \cos^2 \omega t \sin \omega t dt = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \omega t dt = \frac{\omega}{\pi} (\omega^2 A - A) \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \sin \omega t dt - \\ &- \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \omega A \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt + \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \omega A^3 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t \sin^2 \omega t dt = -\varepsilon \omega A + \frac{\varepsilon \omega A^3}{4} \end{aligned}$$



#### 4 Автоколебания

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \omega t dt = \frac{\omega}{\pi} (\omega^2 A - A) \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt -$$

$$-\frac{\omega}{\pi} \varepsilon \omega A \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos \omega t dt + \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \omega A^3 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^3 \omega t \sin \omega t dt = \omega^2 A - A.$$

Таким образом выражение для  $F(t)$  имеет вид:

$$F(t) = \left\{ -\varepsilon \omega A + \frac{\varepsilon \omega A^3}{4} \right\} \sin \omega t + \{ \omega^2 A - A \} \cos \omega t. \quad (4.24)$$

Теперь выражение (4.24) и решение (4.21) подставим в уравнение (4.23). При этом учтем, что вторая производная медленно меняющейся функции  $A(t)$  является величиной второго порядка малости, учитывать которую не будем. В результате получим уравнение

$$-2\omega \frac{dA}{dt} \sin \omega t = \left\{ -\varepsilon \omega A + \frac{\varepsilon \omega A^3}{4} \right\} \sin \omega t + \{ \omega^2 A - A \} \cos \omega t. \quad (4.25)$$

Приравнявая в уравнении (4.25) коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ , находим

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\varepsilon A^3}{8}. \quad (4.26)$$

$$A(\omega^2 - 1) = 0. \quad (4.27)$$

Выражение (4.27) определяет зависимость частоты автоколебаний от амплитуды, а уравнение (4.26) описывает процесс установления амплитуды.

Стационарные значения амплитуды колебаний определяет уравнение

$$\frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\varepsilon A^3}{8} = 0,$$

из которого получаем  $A = 0$  и  $A = 2$ . В случае  $A = 0$  автоколебания отсутствуют. Стационарная амплитуда  $A$  не зависит от значений параметра  $\varepsilon$ . Если при  $\varepsilon > 0$  возбу-

#### 4 Автоколебания

ждаются автоколебания, то их стационарная амплитуда достигает скачком величины  $A = 2$  и более не зависит от  $\varepsilon$ , она всегда остается постоянной и равной этой величине. Частота стационарных автоколебаний всегда равна 1 и полностью совпадает с собственной частотой генератора Ван дер Поля, что видно из уравнения (4.27).

Рассмотрим переходные процессы в генераторе, анализируя уравнения (4.26) и (4.27). Уравнение (4.26) не зависит от уравнения (4.27) и его можно решать отдельно. Разделим обе части уравнения (4.26) на  $A^3$  и сделаем замену переменных  $x = \frac{1}{A^2}$ . В результате получим

$$\frac{dx}{dt} = -\varepsilon \left\{ x - \frac{1}{4} \right\}.$$

Сделаем еще одну замену  $X = x - \frac{1}{4}$  и получим уравнение

$$\frac{dX}{dt} = -\varepsilon X,$$

решение которого

$$X = C \exp\{-\varepsilon t\}.$$

Возвращаясь к исходной переменной  $A$  получим

$$\frac{1}{A^2} = C \exp\{-\varepsilon t\} + \frac{1}{4}.$$

Будем считать, что в начальный момент времени  $t = 0$  амплитуда колебаний  $A = A_0$ .

Учитывая начальные условия, определим постоянную интегрирования

$$C = \frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{4}.$$

#### 4 Автоколебания

В результате получим решение

$$\frac{1}{A^2} = \left\{ \frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{4} \right\} \exp\{-\varepsilon t\} + \frac{1}{4}$$

или

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{4}\right) \exp(-\varepsilon t)}}. \quad (4.28)$$

Из выражения (4.28) видно, что при  $t \rightarrow \infty$  амплитуда колебаний  $A(t)$  стремится к стационарной амплитуде  $\bar{A} = 2$ . Выражение (4.28) можно переписать в виде

$$A(t) = \frac{A_0 e^{(\varepsilon/2)t}}{\sqrt{(A_0/\bar{A})^2 \{e^{\varepsilon t} - 1\} + 1}}. \quad (4.29)$$

С помощью данного метода мы описали переходной процесс установления амплитуды автоколебаний к стационарному значению. Однако, метод Теодорчика не позволяет нам определить изменение частоты автоколебаний в зависимости от параметров системы.

#### 4.2.2.2 Метод малого параметра (метод Пуанкаре)

Для определения изменения частоты автоколебаний в зависимости от параметров рассмотрим другой метод получения приближенного решения - метод Пуанкаре. Будем считать, что период автоколебательного режима зависит от параметра нелинейности  $\varepsilon$ :

$$T = T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega(\varepsilon)}$$

где  $\omega(\varepsilon)$ - частота автоколебаний. При малых значениях параметра  $\varepsilon$  частота автоколебаний должна быть близкой к частоте линейного консервативного осциллятора

#### 4 Автоколебания

$\omega_0 = 1$ . Поэтому мы будем искать такие режимы, частота которых стремится к собственной частоте  $\omega_0$  при стремлении параметра  $\varepsilon$  к нулю, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon) = \omega_0 = 1.$$

Запишем зависимость периода автоколебаний в виде ряда по параметру  $\varepsilon$ :

$$T(\varepsilon) = 2\pi(1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots)$$

В этом случае зависимость частоты автоколебаний  $\omega(\varepsilon)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega(\varepsilon) &= \frac{\omega_0}{1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots} \\ &= \frac{1}{1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Перейдем к новому времени  $\tau = \omega t$ . Отметим, что поскольку  $\tau = \omega t = \frac{2\pi}{T}t$ , то значению  $t = T$  отвечает значение  $\tau = 2\pi$ , следовательно, период искомого решения относительно новой переменной (нового времени) равен  $2\pi$ . Итак с учетом (4.30) получим

$$\tau = \omega t = \frac{\omega_0}{1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots} t = \frac{t}{1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots}.$$

Или

$$t = \tau(1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots). \quad (4.31)$$

Числа  $g_i$  должны быть определены в процессе построения решения. Запишем уравнение Ван дер Поля в новом времени  $\tau$ . Предварительно выразим производные по времени  $t$  через производные по времени  $\tau$ .

#### 4 Автоколебания

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots} \frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = \frac{1}{(1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots)^2} \frac{d^2x}{d\tau^2}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение Ван-дер-Поля, получим:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x(1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots)^2 = \varepsilon(1 - x^2)(1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots) \frac{dx}{d\tau}. \quad (4.32)$$

Решение уравнения (4.32) будем искать в виде ряда по степеням параметра  $\varepsilon$

$$x(\tau) = x^{(0)}(\tau) + \varepsilon x^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 x^{(2)}(\tau) + \dots \quad (4.33)$$

с начальными условиями

$$\tau = 0; \quad x = x_0, \quad \frac{dx}{d\tau} = 0. \quad (4.34)$$

Для того чтобы определить функции  $x^{(i)}$ , подставим решение (4.33) в уравнение (4.32) и соберем величины одинакового порядка малости (приравняем слагаемые с одинаковыми степенями  $\varepsilon$ ).

$$\left\{ \frac{d^2x^{(0)}}{d\tau^2} + \varepsilon \frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2x^{(2)}}{d\tau^2} + \dots \right\} + \{x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots\} \{1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots\}^2 =$$

$$\varepsilon \{1 - (x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots)^2\} \{1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots\} \left\{ \frac{dx^{(0)}}{d\tau} + \varepsilon \frac{dx^{(1)}}{d\tau} + \varepsilon^2 \frac{dx^{(2)}}{d\tau} + \dots \right\}$$

В правой части уравнения величин нулевого порядка малости нет, поскольку множителем стоит  $\varepsilon$  - величина первого порядка малости.

Уравнение для нулевого порядка малости или уравнение для порождающего реше-

#### 4 Автоколебания

ния имеет вид

$$\frac{d^2 x^{(0)}}{d\tau^2} + x^{(0)} = 0. \quad (4.35)$$

Теперь выпишем уравнения для величин первого порядка малости. Предварительно преобразуем некоторые выражения.

$$\begin{aligned} & (1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots)(1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots) = \\ & 1 + 2g_1\varepsilon + 2g_2\varepsilon^2 + g_1^2\varepsilon^2 + 2g_1g_2\varepsilon^3 + g_2^2\varepsilon^4 + \dots \\ & (x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots)(x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots) = \\ & (x^{(0)})^2 + 2\varepsilon x^{(0)}x^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Для величин первого порядка малости получается

$$\varepsilon \frac{d^2 x^{(1)}}{d\tau^2} + 2g_1\varepsilon x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} = \varepsilon \{1 - (x^{(0)})^2\} \frac{dx^{(0)}}{d\tau}$$

или

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{d\tau^2} + x^{(1)} = \{1 - (x^{(0)})^2\} \frac{dx^{(0)}}{d\tau} - 2g_1 x^{(0)}. \quad (4.36)$$

Общее решение уравнения (4.35) имеет вид

$$x^{(0)} = c \cdot \cos \tau + d \cdot \sin \tau. \quad (4.37)$$

Определим константы  $c$  и  $d$  при начальных условиях (4.34).

$$c \cdot 1 + d \cdot 0 = x_0(\varepsilon)$$

#### 4 Автоколебания

$$-c \cdot 0 + d \cdot 1 = 0$$

Получаем

$$c = x_0(\varepsilon), \quad d = 0.$$

Следовательно, решение уравнения (4.35) примет вид:

$$x^{(0)} = c \cdot \cos \tau. \quad (4.38)$$

Величина  $c$  - амплитуда порождающего решения. На этом шаге алгоритма амплитуда порождающего решения  $c$  остается неопределенной.

Рассмотрим теперь уравнение (4.36) для величин первого порядка малости. Перепишем его, подставив в правую часть порождающее решение (4.38).

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{d\tau^2} + x^{(1)} = -c\{1 - c^2 \cdot \cos^2 \tau\} \sin \tau - 2g_1 c \cdot \cos \tau. \quad (4.39)$$

Преобразуем правую часть уравнения, разложив ее на гармоники

$$\begin{aligned} -c\{1 - c^2 \cdot \cos^2 \tau\} \sin \tau - 2g_1 c \cdot \cos \tau &= -c\{\sin \tau - c^2 \cdot \sin \tau + c^2 \cdot \sin^3 \tau\} - 2g_1 c \cdot \cos \tau = \\ &= -c\left\{\left(1 - \frac{c^2}{4}\right) \sin \tau - \frac{c^2}{4} \sin 3\tau\right\} - 2g_1 c \cdot \cos \tau. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{d\tau^2} + x^{(1)} = -c\left\{\left(1 - \frac{c^2}{4}\right) \sin \tau - \frac{c^2}{4} \sin 3\tau\right\} - 2g_1 c \cdot \cos \tau. \quad (4.40)$$

Для того чтобы уравнение (4.40) имело периодические решения периода  $2\pi$ , необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения не содержала первых гармоник

#### 4 Автоколебания

(иначе в решении появятся секулярные члены), т.е. чтобы коэффициенты при  $\sin \tau$  и  $\cos \tau$  были равны нулю. Это дает два уравнения для определения  $c$  и  $g_1$ :

$$-c\left(1 - \frac{c^2}{4}\right) = 0, \quad -2g_1c = 0,$$

из которых получаем

$$g_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 2.$$

Таким образом, в нулевом приближении имеем два стационарных режима

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 2 \cos \tau.$$

Первый режим - это состояние покоя, точка равновесия. Второй - это режим автоколебаний. Поскольку  $g_1 = 0$ , в нулевом приближении частота автоколебаний в генераторе Ван дер Поля не зависит от параметра нелинейности  $\epsilon$  и совпадает с собственной частотой  $\omega_0 = 1$ .

#### 4.2.2.3 Метод медленно меняющихся амплитуд

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля в форме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \{\epsilon - x^2\} \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (4.41)$$

Будем считать, что при малых значениях  $\epsilon$  решение уравнения близко к гармоническим колебаниям. Запишем его в виде гармонических колебаний с медленно меняющейся амплитудой:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{A(t)e^{jt}\} = \frac{1}{2}\{Ae^{jt} + A^*e^{-jt}\}, \quad (4.42)$$



#### 4 Автоколебания

где  $A(t)$ - комплексная амплитуда. Поскольку вместо действительной функции мы  $x(t)$  ввели новую комплексную функцию  $A(t)$  и она недостаточно определена, наложим дополнительное условие. Потребуем, чтобы функция  $A(t)$  удовлетворяла условию

$$\frac{dA}{dt}e^{jt} + \frac{dA^*}{dt}e^{-jt} = 0. \quad (4.43)$$

Подставим решение (4.42) в уравнение Ван-дер-Поля. Предварительно вычислим первую и вторую производную для (4.42).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{dA}{dt}e^{jt} + \frac{dA^*}{dt}e^{-jt} + jAe^{jt} - jAe^{-jt} \right\}.$$

С учетом условия (4.43) получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \{ jAe^{jt} - jAe^{-jt} \}. \quad (4.44)$$

Дифференцируя (4.44), запишем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \left\{ j \frac{dA}{dt}e^{jt} - j \frac{dA^*}{dt}e^{-jt} - Ae^{jt} - A^*e^{-jt} \right\}.$$

Учитывая (4.43), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = j \frac{dA}{dt}e^{jt} - \frac{1}{2} \{ Ae^{jt} + A^*e^{-jt} \}. \quad (4.45)$$

При подстановке (4.45), (4.44) и (4.42) в уравнение Ван-дер-Поля приходим к уравнению

$$j \frac{dA}{dt}e^{jt} = \left\{ \varepsilon - \frac{A^2e^{2jt} + 2|A|^2 + (A^*)^2e^{-2jt}}{4} \right\} \frac{jAe^{jt} - jAe^{-jt}}{2}.$$

Раскроем скобки и разделим обе части уравнения на  $j e^{jt}$

#### 4 Автоколебания

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}\varepsilon A - \frac{1}{8}|A|^2 A - \frac{1}{2}\varepsilon A^* e^{-2jt} - \frac{1}{8}A^3 e^{2jt} + \frac{1}{4}|A|^2 A^* e^{-2jt} - \\ &- \frac{1}{8}|A|^2 A^* e^{-2jt} + \frac{1}{8}(A^*)^3 e^{-4jt}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ранее мы предположили, что  $A(t)$  - медленно меняющаяся функция времени, то есть она меняется столь медленно, что ее изменением за один период колебаний исходной системы можно пренебречь. Также считаем, что производная  $\frac{dA}{dt}$  в течение одного периода постоянна. Умножим обе части уравнения (4.46) на  $\frac{1}{2\pi}$  и интегрируем по времени от 0 до  $2\pi$ :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon A - \frac{1}{8}|A|^2 A. \quad (4.47)$$

Это уравнение отличается от уравнения (4.46) тем, что в нем стоят средние за период  $2\pi$  от правой и левой части уравнения (4.46). Уравнение (4.47) называется “укороченным” уравнением Ван дер Поля в комплексной форме.

Для решения данного уравнения перейдем к вещественным переменным (полярным координатам):

$$A = \rho \exp(j\phi)$$

где  $\rho$  - вещественная амплитуда,  $\phi$  - вещественная фаза колебаний. Уравнение (4.47) в новых переменных запишется в виде системы двух уравнений:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 \quad (4.48)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (4.49)$$

Из (4.48, 4.49) легко определить стационарное (установившееся) значение амплиту-

#### 4 Автоколебания

ды квазигармонических автоколебаний. Полагая  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dt} = 0$  получаем:

$$\rho = 0$$

$$\phi = \Theta_0 = \text{const}$$

или

$$\rho = 2\sqrt{\varepsilon} \tag{4.50}$$

$$\phi = \Theta_0 = \text{const} \tag{4.51}$$

Первое из стационарных решений соответствует отсутствию колебаний в исходной системе (4.41), то есть нахождению фазовой точки в состоянии равновесия (0 : 0).

Второе соответствует гармоническим колебаниям вида:

$$x(t) = 2\sqrt{\varepsilon} \cos(t + \Theta_0) \tag{4.52}$$

где  $\Theta_0$ - начальная фаза колебаний (она может быть произвольной).

Рассмотрим устойчивость стационарного решения (4.50, 4.51). Поскольку уравнения (4.48) и (4.49) независимы, то их можно рассматривать по отдельности. Так как уравнение (4.48) одномерно, то его матрица линеаризации есть просто производная от функции, задающей правую часть, от динамической переменной  $\rho$ :

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{8}\rho^2$$

Если учесть, что  $\rho = 2\sqrt{\varepsilon}$ , получим собственное значение матрицы линеаризации,

#### 4 Автоколебания

равное  $\lambda_\rho = -\varepsilon$ . Оно отрицательно при положительных значениях параметра  $\varepsilon$  и, следовательно, ненулевое состояние равновесия уравнения для вещественной амплитуды (4.48) устойчиво. Что касается установившегося решения (4.51) уравнения для фазы (4.49), то для него собственное значение матрицы линеаризации всегда равно нулю  $\lambda_\phi = 0$ . Стационарное решение для фазы - нейтрально устойчиво: любое возмущение начальной фазы не возрастает и не убывает со временем.

Таким образом, периодические колебания вида (4.52) возникают при переходе параметра  $\varepsilon$  к положительным значениям. При этом (см. раздел 1) состояние равновесия в начале координат теряет устойчивость и в его окрестности возникает устойчивый предельный цикл с бесконечно малой амплитудой. Данный сценарий возникновения колебаний соответствует бифуркации Андронова-Хопфа, описанной в первом разделе.

Для того чтобы описать переходный процесс к установившимся колебаниям необходимо найти решение системы (4.48, 4.49) в зависимости от начальных условий. Решение уравнения для фазы очевидно. Уравнение для вещественной амплитуды колебаний (4.48) также может быть решено аналитически. Для этого разделим его на  $\rho^3$ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = -\varepsilon\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{4}$$

Сделав замену переменных  $y = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\varepsilon}$  перейдем к линейному уравнению:

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon y$$

которое легко решается. Для исходной переменной  $\rho$  решение может быть выражено следующим образом:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \exp(-\varepsilon t) + \frac{1}{4\varepsilon}}} \quad (4.53)$$

где  $\rho_0 = \rho(0)$  начальная амплитуда колебаний (по условиям решения  $\rho_0 \neq 0$ ). Вы-

ражение (4.53) определяет процесс установления колебаний в осцилляторе Ван-дер-Поля. При возрастании времени решение (4.53) стремится к стационарному состоянию  $\rho = 2\sqrt{\varepsilon}$ .

### 4.2.3 Метод анализа устойчивости периодических движений на фазовой плоскости

Использование метода медленно меняющихся амплитуд позволило свести анализ устойчивости периодических колебаний к анализу устойчивости состояния равновесия в уравнениях для амплитуды и фазы. Однако, не всегда, такой переход возможен. Существует и другой метод анализа устойчивости периодических движений, основанный на линеаризации уравнения автогенератора в окрестности периодического решения. Применим этот метод к установившимся периодическим колебаниям в осцилляторе Ван-дер-Поля  $\bar{x}(t) = 2\sqrt{\varepsilon} \cos t$ . Запишем уравнение Ван-дер-Поля в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (4.54)$$

где  $f(x, y) = y$  и  $g(x, y) = (\varepsilon - x^2)y - x$ .

Напомним, что движение  $x(t)$ ,  $y(t)$  называется периодическим движением с периодом  $T$ , если  $T$  ( $T > 0$ ) - наименьшее число, для которого при всяком  $t$  выполняется условие  $x(t+T) = x(t)$ ,  $y(t+T) = y(t)$ . Для системы (4.54) существуют периодические движения  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{y}(t)$  с периодом  $T = 2\pi$ , которые задаются функциями

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= 2\sqrt{\varepsilon} \cos t, \\ \bar{y}(t) &= -2\sqrt{\varepsilon} \sin t. \end{aligned} \quad (4.55)$$

#### 4 Автоколебания

Периодическому движению соответствует замкнутая фазовая траектория на фазовой плоскости  $(x, y)$ . Однако, всякой замкнутой траектории соответствует бесчисленное множество периодических движений, отличающихся друг от друга выбором начала отсчета времени.

Изолированная замкнутая траектория, к которой приближаются соседние траектории в прямом или обратном времени, **называется предельным циклом**. Предельные циклы могут быть асимптотически устойчивыми или асимптотически неустойчивыми.

*Асимптотически устойчивым предельным циклом называется предельный цикл, к которому приближаются все соседние траектории при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Асимптотически неустойчивым предельным циклом называется предельный цикл, от которого удаляются все соседние траектории при  $\tau \rightarrow +\infty$ .*

Наряду с асимптотической устойчивостью предельного цикла выделяют устойчивость по Ляпунову периодического движения, соответствующего предельному циклу.

*Движение  $x = \bar{x}(t)$  и  $y = \bar{y}(t)$  назовем устойчивым по Ляпунову, если для каждого положительно заданного  $\epsilon$  можно подобрать такое положительное  $\delta$ , что если  $|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \delta$  и  $|y(t_0) - \bar{y}(t_0)| < \delta$ , то  $|x(t) - \bar{x}(t)| < \epsilon$  и  $|y(t) - \bar{y}(t)| < \epsilon$  для всех значений  $t > 0$ .*

Для того чтобы проанализировать устойчивость предельного цикла, рассмотрим эволюцию малых возмущений относительно предельного цикла. Введем обозначения  $\xi = x - \bar{x}$  и  $\eta = y - \bar{y}$ . Переменные  $\xi$  и  $\eta$  характеризуют величину возмущения относительно предельного цикла. Подставляя  $x = \bar{x} + \xi$  и  $y = \bar{y} + \eta$  в уравнения (4.54), получим

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{d\bar{x}}{dt} + f(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) \quad (4.56)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{d\bar{y}}{dt} + g(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) \quad (4.57)$$

#### 4 Автоколебания

Разложим функции  $f$  и  $g$  в ряд по степеням  $\xi$  и  $\eta$  в окрестности значений  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$

$$f(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \xi \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \eta \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} + \dots \quad (4.58)$$

$$g(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) = g(\bar{x}, \bar{y}) + \xi \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \eta \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} + \dots \quad (4.59)$$

Подставим (4.58, 4.59) в систему (4.56, 4.57). При этом учтем, что  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  удовлетворяют исходным уравнениям, то есть

$$\frac{d\bar{x}}{dt} - f(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} - g(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

и ограничимся только линейными слагаемыми по  $\xi$  и  $\eta$  в разложении функций  $f$  и  $g$ .

В результате получим уравнения первого приближения:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \xi + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \eta, \quad (4.60)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \xi + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \eta \quad (4.61)$$

Полученная система (4.60, 4.61) является системой линейных уравнений с периодическими коэффициентами периода  $T$ , поскольку коэффициенты при  $\xi$  и  $\eta$  есть функции от периодических аргументов  $\bar{x}, \bar{y}$  периода  $T$ .

Из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами известно, что общее решение системы (4.60, 4.61) имеет следующий вид:

$$\xi = C_1 e^{h_1 t} f_{11}(t) + C_2 e^{h_2 t} f_{12}(t), \quad (4.62)$$

$$\eta = C_1 e^{h_1 t} f_{21}(t) + C_2 e^{h_2 t} f_{22}(t), \quad (4.63)$$

#### 4 Автоколебания

где  $f_{ik}$  - периодические функции с периодом  $T$ ,  $C_1$  и  $C_2$  - постоянные, определяемые начальными условиями для уравнений (4.56, 4.57) т.е. выбором начальных возмущений периодической траектории. Величины  $h_1$  и  $h_2$  называются характеристическими показателями. Они определяют, будут ли решения  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  нарастающими или затухающими во времени.

Из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами известно, что сумма характеристических показателей  $h_1 + h_2$  равна среднему за период от суммы диагональных коэффициентов системы уравнений (4.62, 4.63):

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right\} dt.$$

Кроме того, из инвариантности уравнения Ван-дер-Поля относительно выбора начального момента времени следует, что один из характеристических показателей равен нулю. Для того чтобы убедиться в этом можно выбрать начальные возмущения вдоль предельного цикла. При этом, поскольку возмущенное движение происходит на том же предельном цикле, но с другой начальной фазой, оно не приближается и не отходит от исходного решения, что как раз и соответствует нулевому значению одного из характеристических показателей.

Из уравнений (4.62, 4.63) можно сформулировать условие устойчивости периодических движений: периодическое движение в автономной системе (4.54) устойчиво по Ляпунову, если один характеристический показатель уравнения первого приближения отрицателен; движение неустойчиво, если один характеристический показатель положителен; уравнение первого приближения не решает вопроса об устойчивости, если оба характеристических показателя равны нулю. Таким образом, чтобы предельный



## 4 Автоколебания

цикл был устойчивым необходимо выполнение следующего неравенства :

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right\} dt < 0.$$

Применим данное условие к осциллятору Ван-дер-Поля. Поскольку  $f(x, y) = y$ ,  $g(x, y) = (\varepsilon - x^2)y - x$  и периодические движения задаются функциями  $\bar{x}(t) = 2\sqrt{\varepsilon} \cos t$ ,  $\bar{y}(t) = -2\sqrt{\varepsilon} \sin t$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} &= \varepsilon - 4\varepsilon \cos^2 t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\varepsilon - 4\varepsilon \cos^2 t\} dt = \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} \{1 + \cos 2t\} dt = -\varepsilon$$

Естественно, что мы получили тот же результат, что и при анализе состояния равновесия в укороченном уравнении. Таким образом, при  $\varepsilon > 0$  характеристический показатель  $h < 0$ , то есть периодические автоколебания в генераторе Ван-дер-Поля являются устойчивыми.

### 4.2.4 Бифуркации рождения предельного цикла

Для описания возможных сценариев возбуждения колебаний и анализа бифуркаций рождения предельного цикла в автоколебательной системе рассмотрим так называемое обобщенное укороченное уравнение Ван дер Поля

$$\dot{A} = (\alpha + i\beta)A - (\mu + i\nu)|A|^2 A \quad (4.64)$$

#### 4 Автоколебания

которое отличается от полученного ранее укороченного уравнения (4.47) тем, что оно зависит от двух комплексных параметров. Это уравнение является нормальной формой для бифуркации Андронова - Хопфа (см. раздел 1). Перепишем его в действительных переменных, используя представление комплексной величины  $A = \rho e^{i\phi}$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \alpha\rho - \mu\rho^3, \\ \dot{\phi} &= \beta - \nu\rho^2.\end{aligned}$$

Первое (амплитудное) уравнение системы не зависит от второго и его можно исследовать отдельно. В зависимости от знака параметра  $\mu$  в системе будет наблюдаться либо прямая (или суперкритическая) бифуркация Андронова - Хопфа, либо обратная (или субкритическая) бифуркация.

1. Случай  $\mu > 0$  соответствует суперкритической бифуркации.

Рассмотрим поведение системы при изменении параметра  $\alpha$ . Если  $\alpha < 0$ , то имеется одна особая точка  $\rho_1 = 0$ . Если  $\alpha > 0$ , то в системе будет три особых точки с координатами  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = \sqrt{\alpha/\mu}$  и  $\rho_3 = -\sqrt{\alpha/\mu}$ . Видно, что точки  $\rho_{2,3}$  рождаются при переходе параметра  $\alpha$  через ноль. В бифуркационной точке их координаты равны нулю и совпадают с точкой  $\rho_1$ . С ростом управляющего параметра координаты точек изменяются пропорционально  $\sqrt{\alpha}$ . Исследуем устойчивость точек равновесия. Собственное значение  $h$  в данном случае имеет вид

$$h = \frac{\partial}{\partial \rho} (\alpha\rho - \mu\rho^3)_{\rho=\rho_i} = \alpha - 3\mu\rho_i^2$$

где  $\rho_i$  - координата неподвижной точки. Для точки  $\rho_1 = 0$  собственное значение  $h = \alpha$ , и для точек  $\rho_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha/\mu}$  собственные значения  $h = -2\alpha$ . При  $\alpha < 0$  точка  $\rho_1$  является устойчивой. При  $\alpha > 0$  она теряет устойчивость. При положительных значениях

#### 4 Автоколебания

управляющего параметра точки  $\rho_{2,3}$  являются устойчивыми. Таким образом, из анализа уравнения для амплитуды следует, что в системе при отрицательных значениях управляющего параметра имеется устойчивая точка равновесия в начале координат. При переходе через бифуркационное значение параметра  $\alpha_{cr} = 0$  она теряет устойчивость и в ее окрестности рождаются устойчивые неподвижные точки  $\rho_{2,3}$ , координаты которых изменяются пропорционально корню из надкритичности ( $\sim \sqrt{\alpha - \alpha_{cr}}$ ). В укороченных уравнениях динамическая переменная  $\rho$  представляет собой амплитуду автоколебаний. Следовательно, точке  $\rho_1$  в полной системе будет соответствовать точка равновесия в начале координат, а особым точкам  $\rho_{2,3}$  - предельный цикл с радиусом равным  $\sqrt{\alpha/\mu}$  (разным знакам особых точек соответствуют разные начальные фазы периодического движения). В полной системе при изменении управляющего параметра состояние равновесия теряет устойчивость и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого увеличивается пропорционально корню из надкритичности. Такой переход называется суперкритической бифуркацией Андронова - Хопфа. Он уже рассматривался нами при анализе обычного укороченного уравнения Ван-дер-Поля.

2. Случай  $\mu < 0$  соответствует субкритической бифуркации Андронова - Хопфа.

Из уравнения для амплитуды видно, что при  $\alpha < 0$  имеется три особые точки с координатами  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_{2,3} = \pm \sqrt{\alpha/\mu}$ . При  $\alpha > 0$  в системе будет только одна особая точка  $\rho_1$ . Выражение для собственных значений указанных точек будет таким же как и в предыдущем случае. Из него следует, что при  $\alpha < 0$  особая точка  $\rho_1$  является устойчивой, а две другие - неустойчивыми. При положительных значениях управляющего параметра точка  $\rho_1$  теряет устойчивость. Таким образом, в полной системе при отрицательных значениях управляющего параметра имеется устойчивое состояние равновесия в начале координат и неустойчивый предельный цикл. При движении к точке бифуркации  $\alpha_{cr} = 0$  неустойчивый предельный цикл стягивается к точке рав-

#### 4 Автоколебания

новесия и при  $\alpha_{cr} = 0$  “влипает” в него. За точкой бифуркации состояние равновесия становится неустойчивым. Такой переход называется субкритической бифуркацией Андронова - Хопфа. Субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа реализуется в генераторе с жестким возбуждением колебаний.

### 4.3 Генератор с жестким возбуждением

В предыдущих разделах мы установили, что в генераторе Ван-дер-Поля при прохождении управляющего параметра через ноль состояние равновесия системы теряет устойчивость и в генераторе возникают автоколебания, амплитуда которых пропорциональна корню квадратному из управляющего параметра. В момент бифуркации амплитуда колебаний равна нулю. Рождение предельного цикла происходит в непосредственной окрестности теряющей устойчивость неподвижной точки. Такой сценарий возникновения колебаний на радиотехническом языке называется "мягким возбуждением генератора".

Существует и другой путь, называемый "жестким возбуждением генератора". Предположим, что к моменту потери устойчивости неподвижной точкой, в фазовом пространстве системы уже сформировался устойчивый предельный цикл конечной амплитуды, а области притяжения данного цикла и неподвижной точки разграничиваются неустойчивым циклом (рис.4.5а). В этом случае при одних и тех же значениях параметров возможны два устойчивых режима: отсутствие колебаний и периодические колебания конечной амплитуды. Какой из режимов будет реализован зависит от начальных условий. Чтобы вывести систему из устойчивой неподвижной точки и возбудить колебания, необходимо сообщить генератору "начальный толчок", величина которого превосходит амплитуду разграничивающего неустойчивого цикла. При этом фазовая точка попадет в область притяжения устойчивого предельного цикла

#### 4 Автоколебания

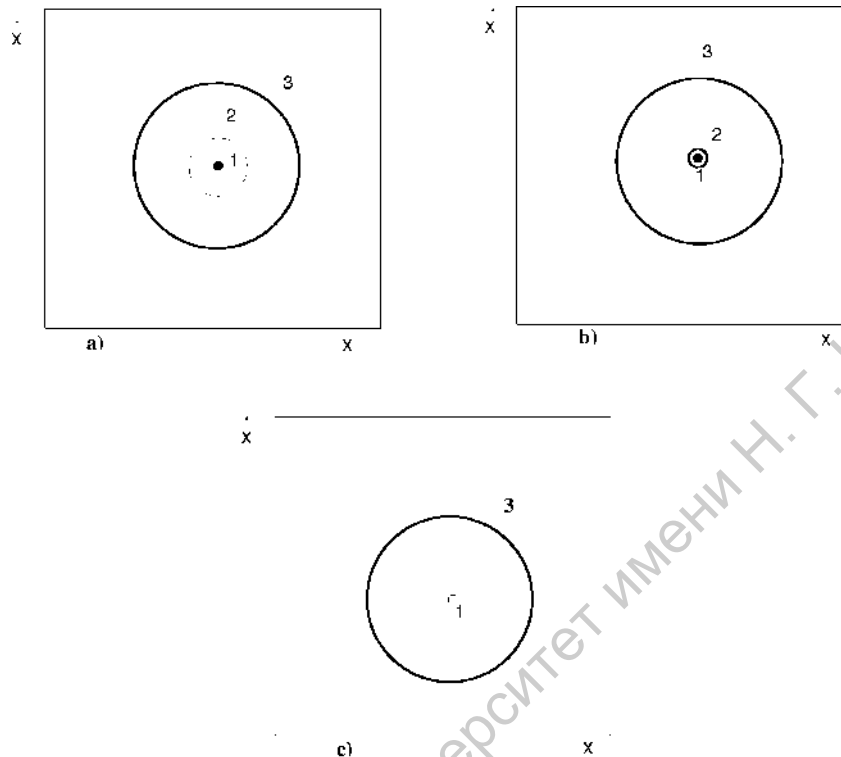


Рис. 4.5: Структура фазового пространства, соответствующая различным этапам жесткого возбуждения колебаний в генераторе: (а) сосуществование устойчивого предельного цикла с устойчивым состоянием равновесия (зона гистерезиса); (б) слияние и исчезновение седлового предельного цикла с состоянием равновесия, состояние равновесия теряет устойчивость. После данной бифуркации остается единственный аттрактор - предельный цикл - (с).

и начнется переходный процесс к этому установившемуся режиму. Пусть теперь при изменении управляющего параметра неподвижная точка потеряла устойчивость. При этом неустойчивый предельный цикл стягивается к ней и в момент бифуркации исчезает (рис. 4.5b). В фазовом пространстве системы остается единственный устойчивый режим - предельный цикл, соответствующий периодическим колебаниям конечной амплитуды (рис. 4.5с).

Таким образом, различия между мягким и жестким видами возбуждения генератора заключаются в том, что:

- а) в случае мягкого возбуждения колебания возникают только после того, как состо-

#### 4 Автоколебания

яние равновесия стало неустойчивым, а при жестком возбуждении возможен перевод толчком генератора из устойчивого состояния равновесия в режим колебаний;

б) при достижении управляющим параметром бифуркационного значения в системе с мягким возбуждением колебания возникают с малой, стремящейся к нулю амплитудой, а в системе с жестким возбуждением возникают сразу с конечной амплитудой.

Рассмотрим возникновение автоколебаний в автогенераторе с жестким возбуждением. Выберем уравнение системы в виде:

$$\ddot{x} - (\lambda - \gamma x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0 \quad (4.65)$$

От уравнения Ван-дер-Поля оно отличается слагаемым  $x^4\dot{x}$ . Будем также считать, что колебания в системе (4.65) - почти гармонические с медленно меняющейся амплитудой:

$$x(t) = \frac{1}{2}[a(t) \exp(jt) + a^*(t) \exp(-jt)] \quad (4.66)$$

Также, как и для генератора Ван-дер-Поля, наложим дополнительное условие:

$$\dot{a} \exp(jt) + \dot{a}^* \exp(-jt) = 0$$

Произведя аналогичные выкладки, получим укороченное уравнение для комплексной амплитуды  $a$ :

$$\dot{a} = \left[ \frac{\lambda}{2} - \frac{\gamma}{8}|a|^2 - \frac{1}{16}|a|^4 \right] a. \quad (4.67)$$

Запишем комплексную величину  $a$  в полярной форме:  $a = \rho \exp j\phi$ , где  $\rho$  и  $\phi$  - вещественные амплитуда и фаза колебаний генератора и подставим ее в (4.67), выделив

#### 4 Автоколебания

отдельно действительную и мнимую части:

$$\dot{\rho} = \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\gamma}{8}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4 \right) \rho \quad (4.68)$$

$$\dot{\phi} = 0 \quad (4.69)$$

Приравняв правые части (4.68, 4.69) нулю, получим уравнения для неподвижных точек, отвечающих возможным значениям амплитуды колебаний:

$$\rho = 0 \quad (4.70)$$

$$\rho^4 + 2\gamma\rho^2 - 8\lambda = 0 \quad (4.71)$$

Точка  $A_0 : \rho = 0$  соответствует отсутствию колебаний в системе. Из (4.71) получаем:

$$\rho^2 = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}$$

Если дискриминант меньше нуля, то есть:

$$\gamma^2 < 8\lambda,$$

то других неподвижных точек уравнения (4.68) кроме  $\rho = 0$  не существует.

Рассмотрим устойчивость нулевой неподвижной точки уравнения (4.68)  $A_0$ . Для этого надо вычислить в этой точке производную от правой части уравнения:

$$\left( \left[ \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\gamma}{8}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4 \right) \rho \right] \Big|_{\rho=0} \right)' = \frac{\lambda}{2} \quad (4.72)$$

При  $\lambda < 0$  нулевая неподвижная точка уравнения (4.68) устойчива, при  $\lambda > 0$  - неустойчива.

#### 4 Автоколебания

Рассмотрим точку  $A_1$ , являющуюся решением уравнения (4.71):

$$\rho^2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda} \quad (4.73)$$

Область существования этой точки:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &> -8\lambda \\ -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda} &> 0. \end{aligned}$$

То есть,

$$\gamma^2 > -8\lambda$$

и, либо  $\lambda > 0$  при всех  $\gamma$ , либо  $\gamma < 0$  при всех  $\lambda$ .

Найдем область устойчивости точки  $A_1$ . Для этого определим значение производной от правой части уравнения (4.68) в этой точке:

$$f'(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}) = -\frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}) \quad (4.74)$$

Поскольку производная всегда отрицательна, то точка  $A_1$  всегда устойчива (в области существования).

Рассмотрим точку  $A_2$ , являющуюся решением уравнения (4.71):

$$\rho^2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}$$

Область существования этой точки:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &> -8\lambda \\ \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda} &< 0. \end{aligned}$$



#### 4 Автоколебания

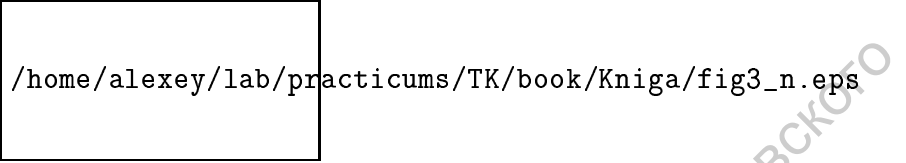


Рис. 4.6: Диаграмма колебательных режимов на плоскости управляющих параметров.

То есть:

$$\gamma < 0, \lambda < 0, \gamma^2 > -8\lambda$$

Найдем область устойчивости для точки  $A_2$ . Для этого подсчитаем производную от правой части уравнения (4.68) в этой точка:

$$f'(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}) = \frac{1}{4} \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda} (-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}) \quad (4.75)$$

Производная всегда положительна. Таким образом точка  $A_2$  всегда неустойчива.

На рис.4.6 приведены области существования и устойчивости точек  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$ . Точка  $A_0$  соответствует колебаниям с нулевой амплитудой, то есть отсутствию колебаний в исходной системе. Точка  $A_1$  соответствует колебаниям с амплитудой  $\sqrt{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}}$ :

$$x(t) = \sqrt{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}} \cos t \quad (4.76)$$

Точка  $A_2$  соответствует колебаниям с амплитудой  $\sqrt{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}}$ :

$$x(t) = \sqrt{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}} \cos t \quad (4.77)$$

Если  $\gamma > 0$ , то при переходе  $\lambda$  через ноль, от отрицательных значений к положительным, нулевая неподвижная точка теряет устойчивость. На линии  $l_2$  (рис.4.6) рождается устойчивый предельный цикл, соответствующий решению (4.73). Зависимость амплитуды цикла от параметра  $\lambda$  при  $\gamma = 0.5$  приведена на рис.4.7а. В момент

#### 4 Автоколебания

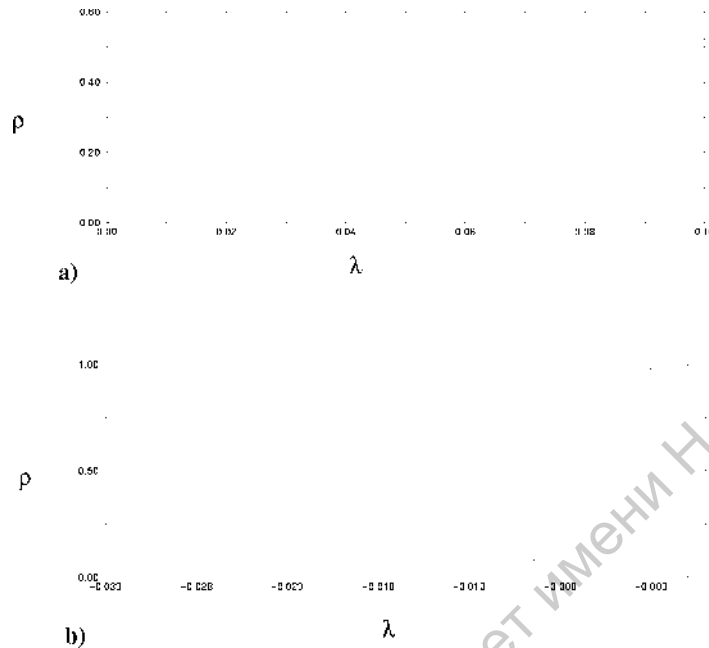


Рис. 4.7: Зависимость амплитуды колебаний от управляющего параметра для (а) мягкого возбуждения колебаний и (б) жесткого возбуждения колебаний.

появления при  $\lambda = 0$  цикл имеет нулевую амплитуду, что соответствует мягкому возбуждению колебаний. При увеличении  $\lambda$  амплитуда колебаний плавно увеличивается. Рассмотрим, что произойдет при отрицательных значениях  $\gamma$  с увеличением параметра  $\lambda$ .

При пересечении снизу вверх линии  $l_1$  (рис.4.6) в фазовом пространстве системы рождается пара предельных циклов: устойчивый предельный цикл

$$C_1 : x(t) = \sqrt{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}} \cos t$$

и неустойчивый предельный цикл

$$C_2 : x(t) = \sqrt{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda}} \cos t.$$

Зависимость амплитуды этих циклов от параметра  $\lambda$  при  $\gamma = -0.5$  представлена на

#### 4 Автоколебания

рис.4.7б. Сплошной линией показана амплитуда устойчивого цикла, штриховой линией - амплитуда неустойчивого. Циклы рождаются с одинаковой и конечной в момент появления амплитудой. В дальнейшем при увеличении  $\lambda$  амплитуда устойчивого цикла плавно увеличивается, а амплитуда неустойчивого плавно уменьшается до нуля при  $\lambda = 0$ . Цикл  $C_2$  при увеличении  $\lambda$  к нулю стягивается к нулевой неподвижной точке и при  $\lambda = 0$  сливается с ней. При этом цикл исчезает, а неподвижная точка теряет устойчивость. Таким образом, при положительных и отрицательных  $\gamma$ , при  $\lambda = 0$  происходят разные бифуркации нулевой неподвижной точки. При положительных  $\gamma$  точка теряет устойчивость, и в ее окрестности рождается устойчивый предельный цикл, что соответствует суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. При отрицательных  $\gamma$  в точку “влипают” неустойчивый предельный цикл, в результате точка теряет устойчивость. Это соответствует субкритической бифуркации Андронова-Хопфа.

Рассмотрим теперь, какие колебания будут возбуждаться в генераторе, описываемом уравнением (4.65), при изменении управляющего параметра  $\lambda$ . Выберем  $\gamma$  отрицательным и значение  $\lambda$  ниже линии  $l_1$  на рис. 4.6. В фазовом пространстве системы (4.65) существует только устойчивая нулевая неподвижная точка. Колебания отсутствуют. При пересечении  $\lambda$  линии  $l_1$  (рис.4.6) в фазовом пространстве появляется еще устойчивый предельный цикл  $C_1$  и неустойчивый предельный цикл  $C_2$ , который разграничивает области притяжения цикла  $C_1$  и неподвижной точки в начале координат. Если выбрать начальные условия в окрестности цикла  $C_1$ , то траектория будет с течением времени приближаться к устойчивому циклу и в генераторе возникнут установившиеся периодические колебания. Но, поскольку начальные условия выбраны в окрестности устойчивой неподвижной точки, то траектория не выйдет из этой окрестности (так как точка устойчива) и колебания наблюдаться не будут. Таким образом, при пересечении линии  $l_1$  никаких видимых изменений не произойдет. При увеличении  $\lambda$  цикл  $C_2$  стягивается к нулевой точке и при  $\lambda = 0$  исчезает, нулевая точка при

#### 4 Автоколебания

этом теряет устойчивость. В результате в фазовом пространстве системы остается один устойчивый режим - цикл  $C_1$ , и при  $\lambda = 0$  в генераторе скачком возбуждаются колебания конечной амплитуды. При обратном уменьшении  $\lambda$  срыв колебаний произойдет при пересечении параметром  $\lambda$  линии  $l_1$  (рис.4.6). То есть в системе наблюдается гистерезис: колебания возбуждаются при больших значениях параметра  $\lambda$ , чем гасятся.

## 4.4 Работа N 6. Исследование мягкого и жесткого режимов возбуждения автоколебаний

В работе исследуются мягкий и жесткий режимы возбуждения автоколебаний в системе (4.65) методом компьютерного моделирования. Используется стандартная программа численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, краткое описание которой дается в приложении к работе. Программа позволяет задавать значения управляющих параметров системы ( $\lambda$  и  $\gamma$ ) и начальные условия ( $x_0$  и  $y_0 = \dot{x}_0$ ) и изображает на экране компьютера фазовые портреты и временные реализации получаемых решений.

### 4.4.1 Порядок выполнения работы

#### 1. Исследование зависимости амплитуды установившихся колебаний от параметра $\lambda$

а) Выберите по согласованию с преподавателем значения параметра  $\gamma$ , соответствующие мягкому и жесткому режимам возбуждения автогенератора. Просчитайте и постройте графики зависимости амплитуды установившихся колебаний в зависимости от параметра  $\lambda$ .

б) Постройте экспериментально зависимость амплитуды установившихся колебаний от параметра  $\lambda$  в прямом и обратном направлении по параметру. Параметр  $\lambda$  изменяйте от  $-0.1$  до  $0.1$ . Для определения значений амплитуды установившихся колебаний необходимо:

- установить выбранные значения управляющих параметров ( $\lambda$  - **P0**,  $\gamma$  - **P1**) ;
- установить время численного интегрирования;
- проинтегрировать систему в прямом времени (клавиша **F10**) несколько раз,

#### 4 Автоколебания

до тех пор, пока колебания не установятся, т.е. их фазовый портрет не будет меняться. Для этого, каждый раз после счета, результат вычислений необходимо использовать как начальные условия для следующего вычисления (клавиша **Shift + F10**).

- Используя клавиши “стрелка вверх” и “стрелка вниз”, определить максимальное и минимальное значение переменной  $x$  и получить т.о. значение амплитуды колебаний:  $A = 0.5(x_{max} - x_{min})$ .

#### 2. Исследование структуры фазового пространства системы при разных значениях управляющих параметров

В этом задании на фазовой плоскости строятся фазовые портреты устойчивых и неустойчивых колебательных режимов системы. Для построения фазового портрета устойчивого режима необходимо: выбрать начальные условия вблизи фазового портрета (точнее в области его притяжения) и проинтегрировать систему в прямом времени (клавиша **F10**). Для построения фазового портрета неустойчивого режима необходимо: выбрать начальные условия вблизи фазового портрета и проинтегрировать систему в обратном времени (клавиша **F9** для интегрирования и **Shift + F9** для того, чтобы сделать результат предыдущего вычисления начальными условиями для последующего вычисления).

а) Установите значение параметра  $\gamma$ , соответствующее жесткому режиму возбуждения (см. предыдущее задание). Выберите несколько возрастающих значений параметра  $\lambda$ , соответствующих отсутствию предельных циклов в системе, сосуществованию двух предельных циклов в системе, существованию одного предельного цикла. Постройте для каждого из значений  $\lambda$  фазовые портреты установившихся устойчивых и неустойчивых колебаний. Выберите начальные условия внутри и вне неустойчивого предельного цикла и проинтегрируйте си-

#### 4 Автоколебания

стему в прямом времени. Определите каким предельным режимам стремятся траектории в этих случаях.

б) Установите значение параметра  $\gamma$ , соответствующее мягкому режиму возбуждения. Выберите несколько значений параметра  $\lambda$  соответствующих отсутствию и наличию колебаний в системе. Постройте для этих значений  $\lambda$  фазовые портреты устойчивых и неустойчивых колебательных режимов.

### 3. Построение бифуркационных линий рождения и исчезновения предельного цикла в системе с жестким возбуждением

а) Бифуркация рождения устойчивого и неустойчивого циклов соответствует срыву колебаний при обратном движении по параметру  $\lambda$ . Установите значение параметра  $\gamma$  вблизи нуля. Выберите значение  $\lambda > 0$ . Проинтегрируйте систему в прямом времени. С помощью клавиш **Shift** + **F10** сделайте результат вычислений начальными условиями для нового вычисления. Производя аналогичные вычисления для последовательно уменьшаемых значений  $\lambda$  определите значение параметра  $\lambda$ , при котором происходит срыв колебаний. Измените значение  $\gamma$  и проделайте те же вычисления. Постройте график  $\lambda = F(\gamma)$ . Постройте график соответствующей теоретической зависимости (см. краткую теорию) и сравните с результатами эксперимента.

б) Бифуркация исчезновения неустойчивого предельного цикла соответствует потере устойчивости нулевой неподвижной точки. Для построения бифуркационной линии, выберите значение параметра  $\gamma$ , выберите начальные условия вблизи нуля:  $x_0 \sim 0$ ,  $y_0 \sim 0$ . Проинтегрируйте систему в прямом времени. Определите значение  $\lambda$ , при котором в системе возбуждаются колебания. Постройте график  $\lambda = F(\gamma)$  и сравните его с теоретическим.

## 4.5 Контрольные вопросы и задания

1. Исходя из схемы генератора на туннельном диоде получите уравнение для тока через индуктивность (уравнение Релея).
2. Проведите анализ периодического решения уравнения Релея методом Теодорчика.
3. Найдите дифференциальное уравнение, описывающее закон изменения входного напряжения усилителя схемы генератора с мостом Вина, если зависимость выходного напряжения усилителя от входного представляет собой полином пятой степени. В каком случае можно ожидать жесткое возбуждение колебаний.
4. По аналогии с решением укороченного уравнения Ван-дер-Поля получите решение для амплитуды и фазы из обобщенного укороченного уравнения Ван-дер-Поля.
5. Найдите, чему равен характеристический показатель для периодического решения в осцилляторе Релея.
6. Покажите, что один из характеристических показателей решения линеаризованного уравнения в окрестности периодического решения генератора Ван-дер-Поля действительно равен нулю.



# 5 Синхронизация автоколебательных систем

## 5.1 Синхронизация колебаний. Виды синхронизации

Под синхронизацией понимают согласованное поведение связанных осцилляторов, которые при отсутствии связи ведут себя отличным друг от друга образом. Впервые явление синхронизации было описано в физике Гюйгенсом, который наблюдал его для маятниковых часов, висящих на общей балке. При экспериментальных исследованиях двух близких по параметрам часов было обнаружено, что:

- а) несмотря на то, что сами по себе часы имеют отличный друг от друга темп колебаний, с течением времени они подстраиваются под единый темп хода и начинают двигаться в унисон;
- б) при введении первоначальной произвольной отстройки фаз колебаний с течением времени маятники часов начинают двигаться либо в фазе, либо в противофазе друг другу;
- в) причиной взаимоподстройки хода часов являются едва заметные колебания балки, на которую они подвешены, причем при близких параметрах автоколебательных си-

## 5 Синхронизация автоколебательных систем

Синхронизация может происходить при каких угодно малых связях между ними.

Позднее явление синхронизации было обнаружено в различных областях естествознания: в акустике, биологии, радиофизике, социологии и т.д. При исследовании радиофизических систем выяснилось, что синхронизация может происходить не только при близости частот генераторов, но и в случае, когда отношение частот близко к рациональному числу:  $f_1/f_2 = 1, 2, 3, \dots, 1/2, 1/3, 2/3, \dots$  и т. д. Данное явление получило название синхронизацией на гармониках и субгармониках.

Явление синхронизации применительно к автоколебательным системам принято разделять на два класса: вынужденная синхронизация и взаимная синхронизация. При взаимной синхронизации обе системы в равной степени воздействуют друг на друга (как в случае часов Гюйгенса) и обе подстраиваются под общий ритм. При вынужденной синхронизации одна из систем является задающей и воздействует на вторую, обратная же связь на нее отсутствует. В этом случае воздействие первой системы может быть записано в виде внешней вынуждающей силы, действующей на синхронизуемый генератор, и моделью данного явления будет уравнение автоколебательной системы с дополнительным слагаемым в правой части, содержащим периодическую по времени функцию:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}) + \vec{f}(t), \quad (5.1)$$

где  $d\vec{x}/dt = \vec{F}(\vec{x})$  - уравнение автоколебательной системы, записанное в векторной форме,  $\vec{f}(t)$  - вектор вынуждающей силы.

Классическим случаем вынужденной синхронизации является случай, когда в отсутствие воздействия генератор совершает периодические колебания. При этом в режиме синхронизации:

а) отношение частот генератора и вынуждающей силы является рациональным числом;

## 5 Синхронизация автоколебательных систем

б) разность фаз колебаний генератора и вынуждающей силы не является произвольной, а может принимать строго определенные значения, зависящие от характеристик системы;

в) эффект синхронизации не носит пороговый характер, то есть при какой угодно малой амплитуде внешнего воздействия всегда можно подобрать частоту воздействия так, чтобы синхронизация имела место.

В отсутствие синхронизации автоколебательная система под внешним воздействием находится в режиме "биений", то есть двухчастотных квазипериодических колебаний (квазипериодические колебания записываются следующим образом:  $x = F(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ , где  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  - периодические по времени функции с несоизмеримыми периодами  $T_1$  и  $T_2$ ). Спектр таких движений является дискретным и содержит частоты, являющиеся линейными комбинациями собственной частоты автоколебаний генератора  $\omega_0$  и частоты воздействия  $\omega_f$ :  $a_i\omega_0 + b_i\omega_f$ , где  $a_i$  и  $b_i$  - целые числа. Проекция фазового портрета квазипериодических колебаний на плоскость  $x - \dot{x}$  - не замкнутая кривая, как для периодических движений, а кольцо, конечной толщины. Его легко представить, если спроектировать на плоскость тор, поверхность которого в фазовом пространстве является фазовым портретом квазипериодических колебаний. Также как периодические колебания в теории динамических систем часто называют "циклом", двухчастотные квазипериодические колебания называют "двумерным тором".

Если выделить на плоскости параметров "частота воздействия - амплитуда воздействия" области синхронизации, то получится картина, качественно представленная на рис. 5.1.

Заштрихованные области получили название "клювы синхронизации". Каждый из таких клювов опирается на рациональное число на оси абсцисс, на которой откладывается отношение частоты колебаний к частоте воздействия. Отношение частоты колебаний к частоте вынуждающей силы в каждом из таких "клювов" неизменно и

## 5 Синхронизация автоколебательных систем

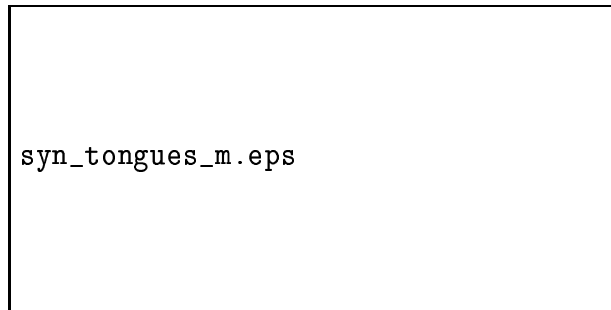


Рис. 5.1: Вид областей синхронизации на плоскости параметров “частота воздействия - амплитуда воздействия”

равно рациональному числу, соответствующему той точке, на которую он опирается. При пересечении границы "клюва" (при входе в заштрихованную область) происходит синхронизация квазипериодических колебаний.

Различают два механизма синхронизации. У основания "клюва", когда амплитуда воздействия мала, а частоты воздействия и собственная близки (для синхронизации 1:1) при пересечении границы области синхронизации происходит **захват частоты**. При этом в спектре колебаний гармоника, соответствующая собственной частоте колебаний, сближается с гармоникой, соответствующей частоте вынуждающей силы, и в момент бифуркации они сливаются (рис.5.2а). Вблизи границы зоны синхронизации движение представляет собой амплитудно-модулированные колебания с конечной глубиной модуляции и стремящейся к нулю частотой огибающей. Если следить за проекцией фазового портрета, то при пересечении границы зоны синхронизации, кольцо конечной толщины скачком схлопывается в цикл. На рис. 5.2а,б показаны изменения, происходящие со спектрами колебаний (а) и с временными реализациями (б) при пересечении границы области синхронизации. Левые рисунки соответствуют несинхронным, а правые - синхронным колебаниям.

Вне зоны синхронизации спектр содержит гармоники на двух несоизмеримых частотах:  $\omega_o$  и  $\omega_e$  (частота вынуждающей силы). При вхождении в область синхронизации  $\omega_o$

## 5 Синхронизация автоколебательных систем

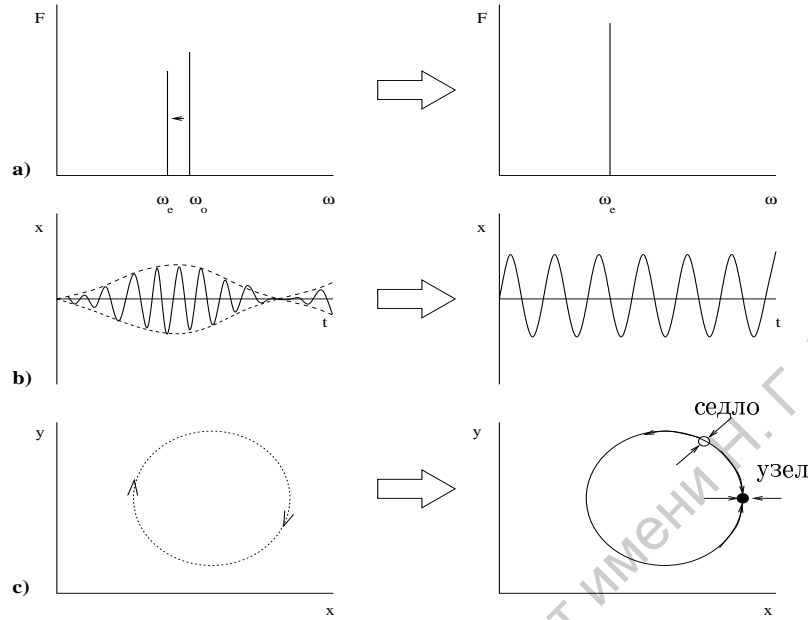


Рис. 5.2: Изменения в спектрах (а), временных реализациях (b) и в структуре фазового пространства, взятого в стробоскопическом сечении (с), происходящие в результате синхронизации при захвате частоты.

сдвигается в сторону  $\omega_e$  и в области синхронизации сливается с ней (захватывается).

Что происходит в фазовом пространстве при синхронизации захватом собственной частоты колебаний? Для большей наглядности перейдем из исходного трехмерного фазового пространства в двумерное посредством стробоскопического сечения. Для этого будем строить на плоскости двух динамических переменных (в нашем случае  $x$  и  $y$ ) точки фазовой траектории в моменты времени, отстоящие друг от друга на период внешнего воздействия:  $x(nT_e)$ ,  $y(nT_e)$ . Сечением двумерного тора будет замкнутая кривая (рис.5.2с слева), сечением устойчивого предельного цикла - устойчивая неподвижная точка (точка “узел” на рис.5.2с справа). Внутри области синхронизации на секущей поверхности существуют: устойчивый узел “узел” и седловая неподвижная точка “седло”. В полном фазовом пространстве им соответствуют устойчивый и седловой предельные циклы, соответственно. При этом неустойчивое многообразие седлового цикла замыкается на устойчивый цикл (сечение многообразия обозначено на

## 5 Синхронизация автоколебательных систем

рис.5.2с линией). Напомним, что неустойчивым многообразием седлового цикла называется совокупность траекторий, притягивающихся к циклу в обратном времени. При подходе к границе области синхронизации седловой и устойчивый предельные циклы сближаются (на правом рисунке 5.2с этому соответствует сближение точек “седло” и “узел”) и на самой границе сливаются друг с другом и исчезают. После исчезновения устойчивого предельного цикла фазовая траектория начинает двигаться вдоль бывшего неустойчивого многообразия седлового цикла, которое теперь формирует поверхность двумерного тора, соответствующего квазипериодическим колебаниям. Описанное слияние и исчезновение двух предельных циклов: устойчивого и седлового называется седло - узловой бифуркацией предельного цикла. При данной бифуркации значение мультипликатора равно  $+1$ .

В верхней области "клюва" синхронизации, когда амплитуда воздействия велика, а частоты воздействия и собственная сильно отстроены друг от друга, реализуется другой механизм, который называется **“подавление собственной частоты колебаний”**. При этом в спектре колебаний гармоника, соответствующая собственной частоте автоколебаний, уменьшается ( подавляется ) и в момент бифуркации исчезает совсем. Вблизи области синхронизации движение представляет собой амплитудно-модулированные колебания с исчезающе малой глубиной модуляции и конечной частотой огибающей. Толщина кольца, являющегося проекцией фазового портрета квазипериодических колебаний, при приближении к границе зоны синхронизации постепенно уменьшается, и тор постепенно стягивается в цикл.

Изменения в спектрах колебаний, во временных реализациях и в стробоскопическом сечении фазового пространства проиллюстрированы на рис. 5.3а-с. Бифуркационный механизм здесь иной, чем в случае захвата собственной частоты. Внутри области синхронизации, вблизи ее границ в стробоскопическом сечении располагается неподвижная точка - устойчивый фокус, соответствующая устойчивому предельному

## 5 Синхронизация автоколебательных систем

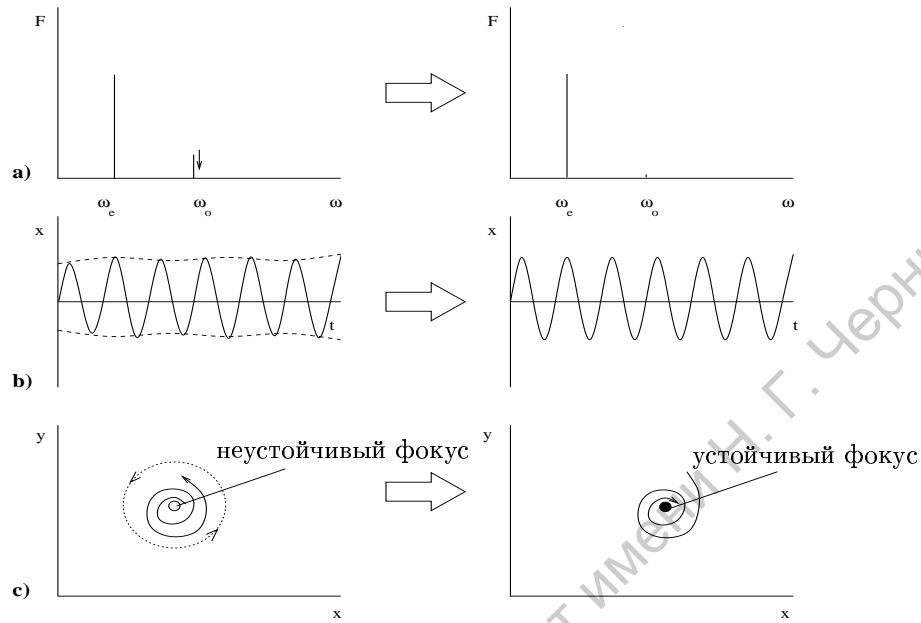


Рис. 5.3: Изменения в спектрах (а), временных реализациях (b) и в структуре фазового пространства, взятого в стробоскопическом сечении (с), происходящие в результате синхронизации при подавлении собственной частоты.

циклу в полном фазовом пространстве. При пересечении границы области синхронизации цикл теряет устойчивость: два комплексно-сопряженных мультипликатора становятся равными по модулю единицы. На секущей плоскости этому соответствует бифуркация Андронова-Хопфа неподвижной точки. В результате, около потерявшей устойчивость точки возникает устойчивый цикл, имеющий в момент бифуркации бесконечно малый размер. В полном фазовом пространстве возникшему устойчивому циклу соответствует устойчивый двумерный тор. При перемещении от границы области синхронизации цикл увеличивается в размере. Описанные изменения в фазовом пространстве проиллюстрированы на рис.5.3с.

На левой и правой границах "клюва синхронизации" существуют точки, разделяющие оба механизма синхронизации.

## 5.2 Вынужденная синхронизация в генераторе Ван дер Поля

При малых значениях амплитуды воздействия и малой нелинейности явление синхронизации допускает приближенное аналитическое описание. Проведем его на примере генератора Ван дер Поля с периодическим внешним воздействием:

$$\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + x = B \sin(\Omega t), \quad (5.2)$$

где  $B$  - амплитуда,  $\Omega$  - частота внешнего воздействия. Собственная частота колебаний равна единице. Полагаем, что частота воздействия близка к частоте автоколебаний:  $\Omega \simeq 1$  и  $0 < \epsilon \ll 1$ . Методом медленно меняющихся амплитуд ищем решение в виде:

$$x(t) = \operatorname{Re}[a(t) \exp(jt)] = \frac{1}{2}[a(t) \exp(jt) + a^*(t) \exp(-jt)].$$

где  $a(t)$  - комплексная амплитуда колебаний, медленно зависящая от времени. Тогда:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}[\dot{a} \exp(jt) + \dot{a}^* \exp(-jt) + ja \exp(jt) - ja^* \exp(-jt)].$$

Наложим дополнительное условие:

$$\dot{a} \exp(jt) + \dot{a}^* \exp(-jt) = 0.$$

При этом

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{2}j[a \exp(jt) - a^* \exp(-jt)], \\ \ddot{x}(t) &= \dot{a}j \exp(jt) - \frac{1}{2}a \exp(jt) - \frac{1}{2}a^* \exp(-jt). \end{aligned}$$



## 5 Синхронизация автоколебательных систем

Подставим полученные выражения для  $\ddot{x}$  и  $\dot{x}$  в уравнение (5.2):

$$\begin{aligned} \dot{a} = & \frac{1}{2}[\epsilon a - \frac{1}{4}|a|^2 a + (\frac{1}{4}|a|^2 a^* - \epsilon a^*) \exp(-2jt) - \frac{1}{4}a^3 \exp(2jt) + \frac{1}{4}a^{*3} \exp(-4jt)] \\ & + \xi \exp(j\Delta t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Усредним за период данное выражение, интегрируя по времени в интервале  $[-\pi, \pi]$ . При этом будем полагать, что амплитуда  $a$  медленно меняется на этом интервале и ее можно вынести за знак интеграла как постоянную величину. В результате получаем уравнение:

$$\dot{a} = \frac{\epsilon}{2}a - \frac{1}{8}|a|^2 a + \xi \exp(j\Delta t), \quad (5.4)$$

где  $\xi = B/2$ ,  $\Delta = \Omega - 1$  - расстройка между частотой внешнего воздействия и собственной частотой автоколебаний генератора.

Решение укороченного уравнения ищем в виде:

$$a = \rho \exp(j(\varphi + \Delta t)). \quad (5.5)$$

Подставляя его в (5.4) и разделяя действительную и мнимую части, получаем систему уравнений для амплитуды и фазы колебаний:

$$\dot{\rho} = \frac{\epsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 + \xi \cos(\varphi) \quad (5.6)$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \frac{\xi}{\rho} \sin(\varphi). \quad (5.7)$$

Если амплитуда воздействия  $B$ , а следовательно и параметр  $\xi$  малы, то в уравнении (5.6) слагаемым  $\xi \cos(\varphi)$  можно пренебречь:

## 5 Синхронизация автоколебательных систем

$$\dot{\rho} = \frac{\epsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 \quad (5.8)$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \frac{\xi}{\rho} \sin(\varphi). \quad (5.9)$$

и из условия  $\dot{\rho} = 0$  получим значение установившейся амплитуды колебаний равной амплитуде в автономном режиме:  $\rho \simeq \sqrt{4\epsilon}$ . При этом  $\dot{\varphi} \simeq -\Delta - \frac{\xi}{\sqrt{4\epsilon}} \sin(\varphi)$ . Случаю синхронизации будет соответствовать постоянная начальная фаза колебаний, т.е.  $\dot{\varphi} = 0$ , или

$$\Delta = -\frac{\xi}{\sqrt{4\epsilon}} \sin(\varphi). \quad (5.10)$$

Поскольку  $|\sin(\varphi)| \leq 1$ , то синхронизация может осуществляться, если  $|\Delta| \leq \frac{\xi}{\sqrt{4\epsilon}}$ .

Прямые, задаваемые уравнениями:

$$\Delta = \pm \frac{\xi}{\sqrt{4\epsilon}} \quad (5.11)$$

определяют границы области синхронизации при малой амплитуде и близкой частоте воздействия.

Пусть значение частоты и амплитуды воздействия выбраны внутри области синхронизации. Для определенности пусть частота внешнего воздействия меньше собственной частоты автономного генератора, т.е.  $\Delta < 0$ . Уравнение (5.10) имеет два решения:

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{-2\sqrt{\epsilon}\Delta}{\xi} \quad (5.12)$$

и

## 5 Синхронизация автоколебательных систем

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{-2\sqrt{\epsilon}\Delta}{\xi} \quad (5.13)$$

Таким образом, система уравнений (5.8,5.9) имеет две неподвижные точки:  $(2\sqrt{\epsilon}, \varphi_1)$  и  $(2\sqrt{\epsilon}, \varphi_2)$ . Определим их тип и устойчивость. Первое из уравнений (5.8) не содержит зависимости от переменной  $\varphi$ , поэтому устойчивость в радиальном направлении не зависит от значения фазы  $\varphi$ . Найдем значение производной от правой части уравнения (5.8) в точке  $2\sqrt{\epsilon}$ . Оно равно  $-\epsilon$ . Следовательно, при положительных значениях параметра  $\epsilon$  (то есть при тех значениях, при которых в генераторе Ван дер Поля существуют автоколебания) обе неподвижные точки устойчивы в радиальном направлении. Для определения устойчивости в азимутальном направлении, найдем значения производной от правой части уравнения (5.9) для значений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Для первой точки получаем величину  $(-\frac{\xi}{2\sqrt{\epsilon}} \cos \varphi_1)$ , для второй -  $(-\frac{\xi}{2\sqrt{\epsilon}} \cos \varphi_2)$ . Поскольку  $\cos \varphi_1 \geq 0$ , а  $\cos \varphi_2 \leq 0$ , то первая из указанных неподвижных точек устойчива также и в азимутальном направлении, а вторая в этом направлении неустойчива. Первая соответствует устойчивому предельному циклу, колебания на котором наблюдаются в системе, вторая - седловому, неустойчивое многообразие которого образует поверхность двумерного тора (рис.5.2с).

Проведенный анализ показал, что в случае малой расстройки  $\Delta$  и малой амплитуды воздействия  $\xi$  в системе существует область синхронизации посредством захвата частоты. Амплитуда синхронных колебаний близка к  $2\sqrt{\epsilon}$ , частота колебаний равна частоте вынуждающей силы, а начальная фаза определяется выражением (5.12). При большой амплитуде воздействия уже не удастся разделить систему уравнений (5.6,5.7) и следовательно в этом случае необходимо численно находить для данных трансцендентных уравнений значения неподвижных точек и проводить численный анализ их на устойчивость.

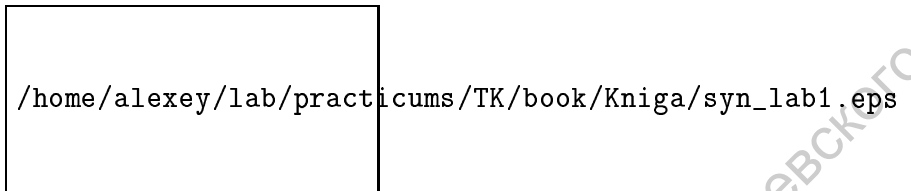


Рис. 5.4: Блок-схема экспериментальной установки

## 5.3 Работа N 7. Исследование вынужденной синхронизации автогенератора

### 5.3.1 Лабораторная установка

Экспериментальная установка состоит из исследуемого генератора, внешнего синхронизирующего генератора, анализатора спектра, осциллографа, вольтметра и генератора импульсов (рис.5.4).

Два выхода исследуемого генератора X и Y подключаются к соответствующим входам каналов горизонтального и вертикального отклонения осциллографа, на экране которого можно при этом наблюдать фазовый портрет колебаний. На вход исследуемого генератора подается сигнал с внешнего синхрогенератора, амплитуда которого контролируется вольтметром. Установка дает возможность наблюдать стробоскопическое сечение фазового портрета колебаний исследуемого генератора. Для этого с выхода синхрогенератора (выход ТТЛ) подается сигнал на вход генератора импульсов, который генерирует прямоугольные импульсы малой длительности с частотой следования, задаваемой синхрогенератором. Импульсы подаются на вход Z осциллографа и управляют яркостью луча (подсвечивают луч). При этом яркость луча осциллографа подбирается таким образом, чтобы луч зажигался только в моменты прихода импульсов.

Функциональная схема исследуемого генератора приведена на рис.5.5.

5 Синхронизация автоколебательных систем

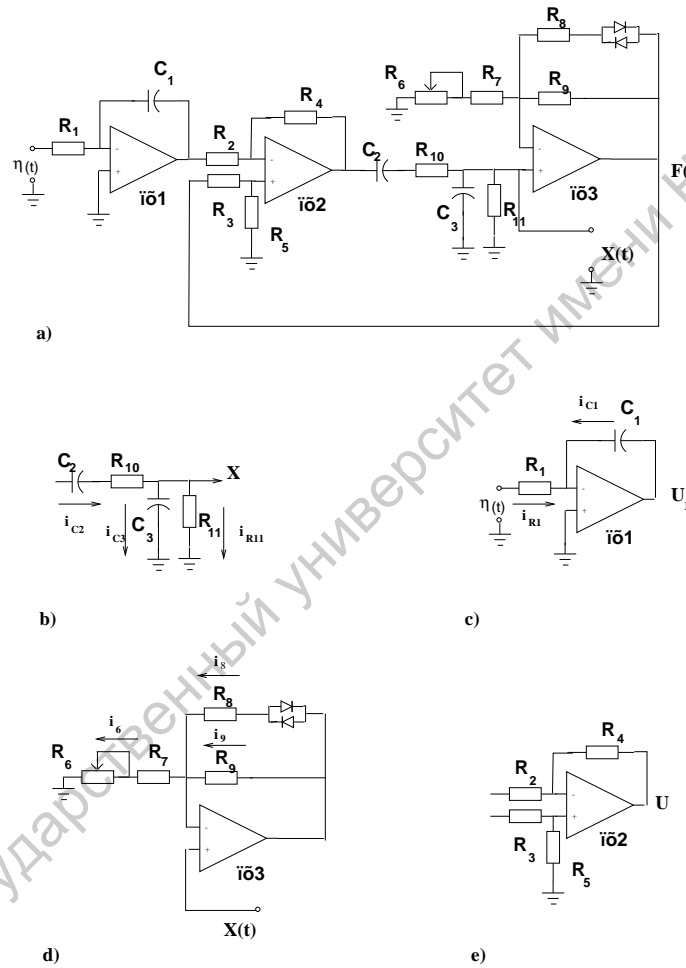


Рис. 5.5: Схема исследуемого генератора (а) и его отдельных компонентов: моста Вина (b), интегратора входного сигнала (с), нелинейного усилителя (d) и сумматора (e)

Он представляет собой нелинейный усилитель (с) с селективной положительной обратной связью, в качестве селективного устройства используется симметричный мост Вина (b). Сигнал с выхода нелинейного усилителя ( $F(X(t))$ ) подается на вход моста Вина через сумматор (е), на вход которого также подается проинтегрированный внешний управляющий сигнал ( $\int \eta(t)dt$ ).

### 5.3.2 Вывод уравнения генератора

Начнем вывод уравнения генератора с уравнения для моста Вина (рис.5.5b). Мост симметричен, то есть сопротивления и емкости равны:  $C_2 = C_3 = C$ ,  $R_{10} = R_{11} = R$ . Напряжение на входе моста обозначим как  $U$ , на выходе  $X$ . Разность между входным и выходным напряжениями равна сумме падений напряжений на элементах  $C_2$  и  $R_{10}$ :

$$U - X = U_{C_2} + U_{R_{10}} = \frac{1}{C_2} \int i_{C_2} dt + R_{10} i_{C_2} \quad (5.14)$$

С другой стороны  $i_{C_2} = i_{C_3} + i_{R_{11}}$ , где  $i_{C_3} = C_3 \frac{dX}{dt}$ ,  $i_{R_{11}} = \frac{X}{R_{11}}$ . Подставляя данные соотношения в (5.14) и дифференцируя по времени, получаем дифференциальное уравнение, связывающее входной и выходной сигналы моста Вина:

$$\frac{dU}{dt} - \frac{dX}{dt} = \frac{1}{C} \left( C \frac{dX}{dt} + \frac{X}{R} \right) + R \frac{d}{dt} \left( C \frac{dX}{dt} + \frac{X}{R} \right)$$

или в более компактной форме:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{dX}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} X = \frac{1}{RC} \frac{dU}{dt} \quad (5.15)$$

Видно, что уравнение моста Вина представляет собой уравнение линейного осциллятора с собственной частотой  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  и коэффициентом диссипации  $\alpha = \frac{3}{2RC}$ .

На вход моста Вина подается сумма напряжений с интегратора (рис.5.5с) и с нели-

нейного усилителя (рис.5.5d) через суммирующее устройство (рис.5.5e):  $U = U_1 + F(X, R_6)$ , где функция  $F$  определяется нелинейной характеристикой усилителя ОУЗ,  $R_6$ - управляющий параметр.

Уравнение для интегратора можно получить, из законов Кирхгофа и закона Ома для цепи на рис.5.5с:

$$i_{R1} = -i_{C1}, i_{R1} = \frac{\eta}{R_1}, i_{C1} = C_1 \frac{dU_1}{dt}$$

(последнее соотношение верно при очень большом коэффициенте усиления операционного усилителя ОУ1, когда потенциал на его входе почти нулевой). Таким образом, уравнение для интегратора на рис.5.5с принимает вид:

$$U_1 = -\frac{1}{RC} \int \eta(t) dt \quad (5.16)$$

( $R_1 = R, C_1 = C$ ).

Таким образом, полное уравнение всей схемы на рис.5.5а можно записать в виде:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{1}{RC} \left( 3 - \frac{d}{dX} F(X, R_6) \right) \frac{dX}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} X = -\frac{1}{(RC)^2} \eta(t) \quad (5.17)$$

Управление величиной коэффициента усиления усилителя ОУЗ осуществляется при помощи переменного сопротивления  $R_6$ , играющего роль управляющего параметра.

### 5.3.3 Порядок выполнения работы

1. Исследовать возбуждение колебаний в автономном генераторе. Для этого (а) построить зависимость амплитуды колебаний в генераторе от управляющего параметра, определить каков режим возбуждения (мягкий или жесткий) и построить фазовые портреты колебаний для нескольких возрастающих значений управля-

## 5 Синхронизация автоколебательных систем

ющего параметра (вблизи порога возникновения колебаний и вдали от него).

2. На плоскости параметров частота - амплитуда воздействия построить области резонансов разной кратности. Для определения кратности резонанса удобнее использовать стробоскопическое сечение.
3. Построить области основного резонанса (1:1) для нескольких значений управляющего параметра.
4. Зарисовать временные реализации, проекции фазовых портретов, стробоскопические сечения и спектры мощности, иллюстрирующие механизмы захвата и подавления частоты. Определить точку на границе области синхронизации, разделяющую эти механизмы.

### 5.4 Контрольные вопросы и задания

1. Для генератора Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии получить систему укороченных уравнений для амплитуды и фазы колебаний.
2. Аппроксимировать нелинейную характеристику усилителя  $F(X, R_6)$ .
3. Записать уравнения генератора в безразмерном виде.
4. Исследовать состояния равновесия автономного генератора.



# Литература

- [1] Л.И. Мандельштам. *Лекции по теории колебаний*. - М., Наука, 1972.
- [2] А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. *Теория колебаний*. - М., Наука, 1981.
- [3] В.И. Калинин, Г.М. Герштейн. *Введение в радиофизику*. М., Гостехиздат, 1957.
- [4] А.А. Харкевич. *Основы радиотехники*. М., Связьиздат, 1962.
- [5] А.А. Харкевич. *Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике*. -М., Гостехиздат, 1956.
- [6] К.Ф. Теодорчик. *Автоколебательные системы*. М.: Гостехиздат, 1952.
- [7] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. - М., Физматгиз, 1958.
- [8] Н.Н. Моисеев. *Асимптотические методы нелинейной механики*. М., Наука, 1981.
- [9] П.С. Ланда. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*. М., Наука, 1980.
- [10] М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. *Введение в теорию колебаний и волн*. М., Наука, 1984.

## Литература

- [11] В.С. Анищенко. *Сложные колебания в простых системах*. М., Наука, 1990.
- [12] Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. М., Наука, 1987.
- [13] И.И. Блехман. *Синхронизация в природе и технике*. М., Наука, 1981.
- [14] А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*. - М., Техносфера, 2003.
- [15] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. *Нелинейные колебания: Учеб. пособие для вузов*. - М., Издательство физико-математической литературы, 2002.
- [16] П. Берже, И. Помо, Л. Видаль. *Порядок в хаосе*. М., Мир, 1991.
- [17] Г. Шустер, *Детерминированный хаос*. М., Мир. 1988.
- [18] В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов, *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем*. Саратов, Изд-во Сарат. ун-та, 1999.
- [19] Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко. *Колебания, волны, структуры*. - М.: Физматлит, 2001.
- [20] Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

Литература

Учебное издание

АСТАХОВ Владимир Владимирович

ШАБУНИН Алексей Владимирович

**Радиофизический практикум**

**по**

**теории колебаний**

Компьютерная верстка А.В. Шабунина

Технический редактор Н.Н. Левина

Художник Д.В. Соколов

---

Сдано в набор . Подписано к печати .  
Формат 64 × 80 1/16. Бумага “Снегурочка”. Гарнитура  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 8,6. Уч. -изд. л. 8,5.

Тираж 250 экз. Заказ 328

Издательство ГосУНЦ “Колледж”

Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Отпечатано на резографе RA 420 издательства ГосУНЦ “Колледж”