Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

С. В. Тышкевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие для студентов
физического факультета

Саратов
2017

Оглавление

Введение

Перечень задач, которые решаются методами комплексного анализа, огромен. Это и эффективные методы вычисления интегралов, и получение асимптотических оценок, и способы исследования решений дифференциальных уравнений, и описание плоских векторных полей. Методы теории функций комплексного переменного (ТФКП) постоянно и успешно используются в технических расчетах.

Настоящее пособие предназначено для студентов, обучающихся на физическом факультете ФГБОУ ВО «СГУ имени Н. Г. Чернышевского» по направлениям подготовки 03.03.02 Физика, 03.03.03 Радиофизика, 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи, 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств, 12.03.04 Биотехнические системы и технологии.

Основное внимание в пособии уделяется методам ТФКП, которые часто применяются в прикладных задачах (конформные отображения, разложения в ряды, вычисление интегралов с помощью вычетов). Материал пособия изложен так, чтобы максимально помочь читателю овладеть основами ТФКП: каждая глава содержит необходимые теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров. При написании пособия использовались многие учебники и монографии по ТФКП, в частности [1–4]. Часть примеров и задач составлена автором, некоторые задачи заимствованы из задачников [5, 6].

Пособие состоит из семи глав. Первые две содержат основные сведения о комплексных числах и аналитических функциях комплексного переменного. Глава 3 посвящена важнейшим элементарным аналитическим функциям и отображениям, осуществляемым посредством этих функций. Следующие две главы содержат основной аппарат теории аналитических функций — интегральное исчисление (глава 4) и разложения в ряды (глава 5). Понятие изолированных особых точек, классификация этих точек, краткое изложение теории вычетов приводятся в главе 6. Глава 7 посвящена преобразованию Лапласа.

Глава 1

Комплексные числа и их геометрическое представление

1.1. Комплексные числа: основные понятия, формы записи, арифметические операции

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$ (алгебраическая форма), где x и y — действительные числа, i — мнимая единица ($i^2 = -1$). Число x называют *действительной частью комплексного числа* z, число y — *мнимой частью комплексного числа* z и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ соответственно.

Если $y = 0$, то комплексное число $z = x + i \cdot 0$ отождествляется с действительным числом x; комплексное число $z = 0 + iy$ принято отождествлять с iy. Числа вида $z = iy$ называют *чисто мнимыми числами.*

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* числу $z = x + iy$ и обозначается $\bar{z}$.

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны между собой тогда и только тогда, когда равны между собой их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z = z_1 - z_2$, являющееся решением уравнения $z_1 = z + z_2$ и вычисляемое по формуле

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Частным чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ ($z_2 \neq 0$) называется число z, которое удовлетворяет уравнению $z z_2 = z_1$, обозначается $\frac{z_1}{z_2}$ и вычисляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Геометрическая интерпретация

Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат с началом координат в точке O. Каждая точка $M(x, y)$ (каждый радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$) рассматривается как образ комплексного числа $z = = x + iy$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех комплексных чисел. Множество всех действительных чисел при этом изображается осью абсцисс, называемой *действительной осью*, множество чисто мнимых чисел — осью ординат, называемой *мнимой осью*. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется *комплексной*.

Модулем $|z|$ *комплексного числа* z называется модуль (длина) вектора $\overrightarrow{OM}$. Таким образом,

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}. \tag{1.1}$$

Положение любой точки (кроме начала координат) на плоскости характеризуется полярными координатами ρ, φ $(\rho > 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi)$. Очевидно, $\rho = |z|$ (рис. 1.1).

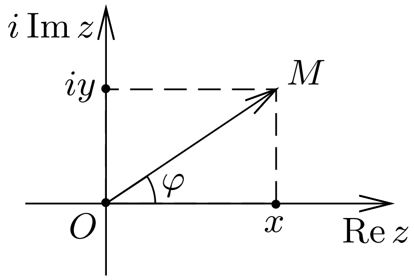

Рис. 1.1

Полярный угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением действительной оси, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Последний определен с точностью до слагаемого, кратного 2π. Значение φ аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$. Очевидно, что

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0,\ y \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0,\ y < 0; \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y, & \text{если } x = 0,\ y \neq 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Выразив действительную и мнимую части числа $z \neq 0$ через модуль и аргумент

$$\operatorname{Re} z = |z| \cos\varphi,\ \operatorname{Im} z = |z| \sin\varphi,$$

можем записать число z в виде

$$z = |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right), \tag{1.3}$$

который называется *тригонометрической формой* этого числа.

Обозначив $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, получим *показательную форму* комплексного числа:

$$z = |z|e^{i\varphi}. \tag{1.4}$$

Представление комплексного числа в тригонометрической (и показательной) форме единственно: если

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \rho > 0,\ -\pi < \varphi \le \pi,$$

то $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Геометрически сложение и вычитание комплексных чисел производится по правилу сложения и вычитания соответствующих векторов.

Так как для $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ имеют место равенства

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right), \tag{1.5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right), \tag{1.6}$$

то умножение z_1 на z_2 $(z_1 \ne 0,\ z_2 \ne 0)$ означает растяжение вектора z_1 в $|z_2|$ раз и его поворот около своего начала на угол φ_2 против часовой стрелки, деление z_1 на z_2 $(z_1 \ne 0,\ z_2 \ne 0)$ – сжатие вектора z_1 в $|z_2|$ раз и его поворот около своего начала на угол φ_2 по часовой стрелке.

Имеют место следующие важные соотношения (формулы Моавра):

$$z^m = |z|^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi),\ m \in \mathbb{Z}, \tag{1.7}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.8}$$

Все n значений корня $\sqrt[n]{z}$ лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в эту окружность.

Пример 1. *Найти вещественную и мнимую части комплексного числа* $\left(\frac{1+i^{15}}{1+i^{121}}\right)^2$.

Решение. Так как

$$z = \left(\frac{1+i^{15}}{1+i^{121}}\right)^2 = \left(\frac{1+i^3}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^2 = \left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right)^2 = -1,$$

то $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 0$.

Пример 2. *Доказать равенство* $\overline{(\overline{z})} = z$.

Решение. $\overline{(\overline{z})} = \overline{x - iy} = x + iy = z$.

Пример 3. *Найти модули и аргументы комплексных чисел*:
$z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = \sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5} - i$.

Решение. Модули и аргументы чисел z_1 и z_2 вычислим по формулам (1.1), (1.2):

$$|z_1| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$
$$\arg z_1 = \arg(1 - i) = \operatorname{arctg}\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4};$$
$$|z_2| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$
$$\arg z_2 = \arg(1 + i\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Число z_3 запишем в тригонометрической форме

$$z_3 = \sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5} - i = 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} - i\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{10} =$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{10}\left(\sin\frac{\pi}{10} - i\cos\frac{\pi}{10}\right) = 2\cos\frac{\pi}{10}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) +\right.$$
$$\left.+ i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)\right) = 2\cos\frac{\pi}{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right).$$

Из единственности тригонометрической формы комплексного числа следует, что

$$|z_3| = 2\cos\frac{\pi}{10},$$
$$\arg z_3 = -\frac{2\pi}{5}.$$

Пример 4. *Найти все значения корня* $\sqrt[3]{i}$ *и построить их.*

Решение. Так как $|i| = 1$, $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{2}$, то по формуле Моавра будем иметь:

$$\left(\sqrt[3]{i}\right)_k = \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \ k = 0, 1, 2,$$

т.е. получаем следующие значения (рис. 1.2):

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{i}\right)_0 &= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad (\text{при } k=0),\\
\left(\sqrt[3]{i}\right)_1 &= \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad (\text{при } k=1),\\
\left(\sqrt[3]{i}\right)_2 &= \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) =\\
&= \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i \quad (\text{при } k=2).
\end{aligned}$$

Пример 5. *Описать геометрически множество всех точек плоскости, удовлетворяющих условию* $|z+2-i| = 3$.

Решение. $|z+2-i| = 3 \Leftrightarrow |x+iy+2-i| = 3 \Leftrightarrow |x+2+i(y-1)| = 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2 = 9$, т.е. искомое множество точек — окружность радиуса 3 с центром в точке $(-2,\ 1)$ (рис. 1.3).

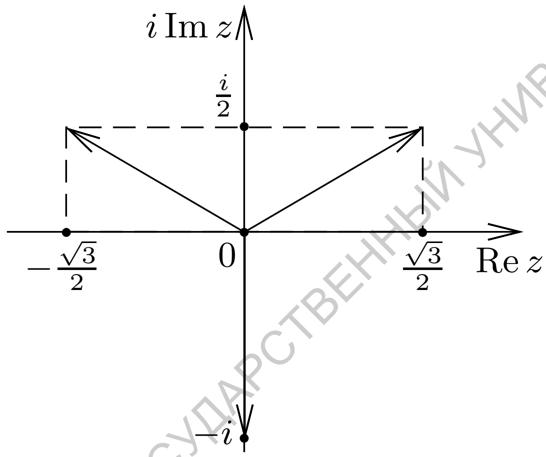

Рис. 1.2

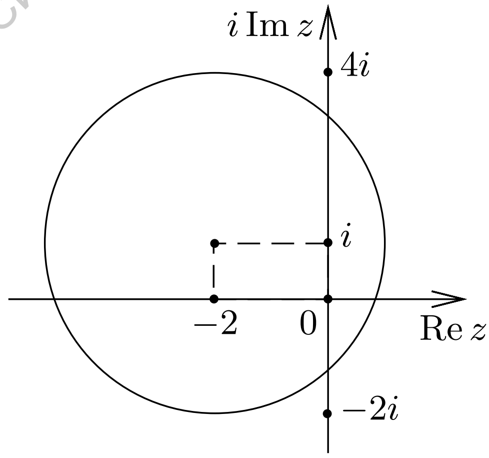

Рис. 1.3

1.2. Предел последовательности. Бесконечность. Стереографическая проекция

Пусть $n \in \mathbb{N}$; $a, b, x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n = x_n + iy_n$ называется *сходящейся к пределу* $c = a + ib$ (пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$), если

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,N = N(\varepsilon)\colon \forall\,n > N\ |z_n - c| < \varepsilon.$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b. \end{cases}$$

ε–окрестностью бесконечно удаленной точки (точки ∞) называют внешность круга с центром в начале координат и радиуса ε ($|z| > \varepsilon$).

Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *сходящейся к* ∞ (пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$), если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N = N(\varepsilon)\colon \forall\, n > N \;|z_n| > \varepsilon,$$

т.е. $\forall\, \varepsilon > 0$ все точки последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат окрестности бесконечно удаленной точки $|z| > \varepsilon$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty.$$

Чтобы получить геометрическое изображение числа ∞, прибегают к представлению комплексных чисел точками сферы.

Опишем из точки комплексной плоскости z, как из центра, сферу радиуса 1. Окружность, по которой сфера пересекается комплексной плоскостью, назовем экватором; прямую, проходящую через и перпендикулярную плоскости, – осью сферы, а точки N и S, в которых ось пересекает сферу, – северным и южным полюсами соответственно. «Широта» считается от экватора в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ (южной полюс) до $\frac{\pi}{2}$(северный полюс), «долгота» - в плоскости экватора от $-\pi$ (не включая) до π (включая); при этом положительным направлением считается направление против часовой стрелки, если смотреть на экватор со стороны северного полюса. Соединяя точку N с различными точками сферы, будем отмечать на каждом луче точку его встречи с плоскостью. Таким образом, все точки сферы, кроме N, проецируются на плоскость. Эта проекция называется *стереографической*. Точку N рассматривают как изображение на сфере бесконечно удаленной точки.

Комплексная плоскость, образованная лишь собственными (конечными) точками, называется *конечной комплексной плоскостью*. Комплексная плоскость, к которой присоединяется единственная бесконечно удаленная точка, называется *расширенной комплексной плоскостью*. Наглядно конечную плоскость можно представить сферой, из которой исключена одна точка (точка N).

1.3. Кривые и области на комплексной плоскости

Пусть дано множество $E \subset \mathbb{C}$.

Круг $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < \varepsilon\}$ называется *ε-окрестностью* точки z_0 ($\varepsilon > 0$).

Точка z называется *внутренней* точкой множества E , если имеется ее окрестность, состоящая только из точек E. Соответственно, z является *внешней* точкой множества E, если имеется окрестность точки z, состоящая только из точек, не принадлежащих множеству E.

Граничной точкой множества E называется точка, в любой окрестности которой есть точки, принадлежащие множеству E и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества E называется его границей и обозначается ∂E.

Множество, содержащее свою границу, называется *замкнутым*.

Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Пусть на отрезке $[a;\, b]$ действительной оси заданы непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, $t \in [a;\, b]$. Тогда говорят, что задана непрерывная кривая

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{1.9}$$

а уравнение (1.9) называют *параметрическим уравнением* этой *кривой*. Точки $z(a)$ и $z(b)$ называют соответственно *началом* и *концом* этой кривой.

Кривая (1.9) всегда считается ориентированной в направлении возрастания параметра t. Направление движения точки z, отвечающее возрастанию параметра t, будем называть *положительным*.

Кривая L, задаваемая уравнением (1.9), лежит на множестве E, если $z(t) \in E$ для всех $t \in [a;\, b]$.

Если одна и та же точка плоскости отвечает нескольким точкам кривой L, то говорят, что кривая L имеет точки самопересечения. Исключением является совпадение начала и конца кривой: если $z(a) = z(b)$, то эта точка не считается самопересечением кривой.

Кривую, не имеющую самопересечений, называют *простой* (или *жордановой*) кривой. Кривую, у которой конец совпадает с началом, называют *замкнутой* кривой.

Непрерывная кривая L, задаваемая уравнением (1.9), называется гладкой, если в $[a;\, b]$ существует производная $z'(t)$ (в точках a и b – односторонняя), непрерывная и отличная от нуля. Кривая, составленная из конечного числа гладких кривых, называется кусочно-гладкой.

Множество E называют *связным*, если любые две его точки можно было соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Связное открытое множество называют *областью*.

Теорема 1 (Жордана)**.** *Каждая простая замкнутая непрерывная кривая разбивает расширенную комплексную плоскость на две области и представляет собой границу каждой из этих областей.*

Область расширенной комплексной плоскости называется n-связной областью, если ее граница состоит из n связных замкнутых множеств, называемых компонентами границы. Любую n-связную область можно представлять себе как односвязную область, в которой прорезана $n-1$ дырка.

Непрерывная кривая L, задаваемая уравнением $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, называется *спрямляемой*, если при любых значениях

$$t_0, t_1, \ldots t_n, \quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

и при любом их числе $n+1$ сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})|$ остаётся ограниченной. Верхняя граница этих сумм относительно всевозможных значений $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ называется *длиной кривой* L.

Глава 2

Функции комплексного переменного

2.1. Понятие функции. Предел функции в точке. Непрерывность

Если каждой точке $z = x + iy$ области D комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ поставлено в соответствие число $w = u + iv$ области $W \subset \overline{\mathbb{C}}$, то говорят, что задана функция $w = f(z)$ комплексного переменного z или отображение области D в область W. Значения этой функции можно представить в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.1}$$

Если каждому значению z соответствует лишь одно значение w, то функция называется *однозначной*, в противном случае — *многозначной.*

Пример 6. *Функции $w = |z|$, $w = \operatorname{Re} z$, $w = \overline{z}$ — однозначные, определённые на всей плоскости функции; $w = \sqrt[n]{z}$ — многозначная (n-значная) функция, определённая на всей плоскости; $w = \operatorname{Arg} z$ — многозначная функция (бесконечнозначная), определенная на множестве всех точек, отличных от нуля.*

Говорят, что определённая в области D функция $w = f(z)$ *однолистна (взаимно однозначна)* в D, если в разных точках области она принимает разные значения (из равенства $f(z_1) = f(z_2)$ следует равенство $z_1 = z_2$ для $z_1, z_2 \in D$). Область, в которой функция однолистна, называется *областью однолистности* функции.

Пусть $w = f(z)$ — однозначная функция комплексного переменного, определённая в проколотой окрестности точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Число A называется *пределом функции* $f(z)$ при $z \to z_0$, если для любой окрестности $U(A)$ точки A найдется такая проколотая окрестность $U'(z_0)$ точки z_0, что для всех $z \in U'(z_0)$ значения $f(z)$ принадлежат $U(A)$, при этом пишут

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

Другими словами, в случае, когда $z_0, A \neq \infty$, говорят, что функция $f(z)$ *стремится к пределу* A при $z \to z_0$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall z, 0 < |z - z_0| < \delta, \text{ выполняется } |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется *пределом функции* $f(z)$ при $z \to \infty$ (пишут $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall z, \delta < |z| < \infty, \text{ выполняется } |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Наконец, говорят, что функция $f(z)$ *стремится* ∞ при $z \to z_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall z, 0 < |z - z_0| < \delta, \text{ выполняется } |f(z)| > \varepsilon,$$

при этом пишут

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Если $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = A_1 + iA_2$, $A \neq \infty$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = A_1, \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = A_2. \end{cases}$$

Поэтому простейшие теоремы о пределах в точке функций действительных переменных автоматически распространяются на пределы функций комплексного переменного (о пределе суммы, разности и др.).

В некоторых случаях говорят о пределах функций по множествам. Пусть точка z_0 — предельная точка множества E, множество определения функции $f(z)$ содержит E.

Число A называется *пределом функции* $f(z)$ при $z \to z_0$ *по множеству* E, если для любой окрестности $U(A)$ точки A найдется такая проколотая окрестность $U'(z_0)$ точки z_0, что для всех $z \in E$, попадающих в окрестность $U'(z_0)$, значения $f(z)$ принадлежат $U(A)$, при этом пишут

$$\lim_{z \to z_0,\, z \in E} f(z) = A.$$

Функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, называется непрерывной в точке z_0, если существует

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0); \tag{2.2}$$

если $f(z_0) \neq \infty$, говорят о непрерывности в смысле $\mathbb{C}$; если $f(z_0) = \infty$ — о непрерывности в смысле $\overline{\mathbb{C}}$.

Если $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0), \end{cases}$$

т.е. функция комплексного переменного непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда ее действительная и мнимая части, рассматриваемые как функции действительных переменных x и y, непрерывны в той же точке. Поэтому многие свойства непрерывных функций двух действительных переменных непосредственно переносятся на непрерывные функции комплексного переменного (непрерывность здесь надо понимать в смысле $\mathbb{C}$).

Если z_0 — предельная точка множества E, и предел в левой части равенства (2.2) понимается как предел по множеству, то говорят о непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 по множеству E. Функция, непрерывная в каждой точке множества E (по множеству E), называется *непрерывной на множестве* E.

Свойства функций, непрерывных (в смысле $\mathbb{C}$) на замкнутых множествах.

Пусть множество E ограничено и замкнуто, тогда:

1) любая функция $w = f(z)$, непрерывная на E, ограничена на этом множестве;

2) ее модуль достигает на E, своей верхней и нижней грани;

3) $f(z)$ *равномерно непрерывна на* E ($\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall z_1,\ z_2 \in E,\ |z_2 - z_1| < \delta$, выполняется $|f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon$).

2.2. Дифференцируемость

Пусть функция $f(z)$ — однозначная функция комплексного переменного, определенная на множестве E, z_0 — предельная точка этого множества.

Производной функции $f(z)$ по множеству E в точке z_0 называется предел (если он существует)

$$\lim_{z\to z_0,\ z\in E} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

обозначаемый $f'_E(z_0)$, или $f'(z_0)$. Сама функция $f(z)$, обладающая производной по множеству E в точке z_0, называется *дифференцируемой* по множеству E в точке z_0.

Приращение дифференцируемой по множеству E в точке z_0 функции $f(z)$ представимо в виде

$$\Delta f(z) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z)\Delta z,$$

где $\Delta f(z) = f(z) - f(z_0)$, $\Delta z = z - z_0$, $\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$ ($z \in E$).

Отсюда непосредственно следует, что функция, дифференцируемая в точке $z_0 \in E$, является непрерывной в этой точке (по этому множеству).

Замечание 1. *Роль множества E в определении понятия дифференцируемости функции существенна. Например, если E — действительная ось ($y = \operatorname{Im} z = 0$), и $f(z) = f(x) = x$, то $f'_E(x)$ существует при любом $x \in E$ и равна 1 (функция дифференцируема всюду на E). Если же рассматривать функцию $f(z) = x$ на всей комплексной плоскости (очевидно, когда $z \in E$, она совпадает с исходной функцией), то*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.$$

При $z \to z_0$ (z_0 — любая точка плоскости) это выражение не имеет предела (при $x = x_0$, $y \neq y_0$ равно 0, при $x \neq x_0$, $y = y_0$ равно 1). Таким образом, функция $f(z) = x$ недифференцируема по плоскости ни в одной точке.

Из определения производной и свойств пределов функций комплексного переменного следует, что основные правила дифференциального исчисления распространяются и на производные по множеству от функций комплексного переменного.

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие дифференцируемости во внутренней точке области)**.** *Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определённая в некоторой области D, дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ области D тогда и только тогда, когда в точке (x_0, y_0) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных x и y, и выполняются условия Коши—Римана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3}$$

При выполнении всех условий теоремы производная $f'(z)$ может быть записана в одной из форм:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Доказательство 1. *Необходимость.*

Пусть функция $f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y)$, определённая в некоторой области D, дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ области D, тогда

$$\Delta f(z) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z)\Delta z,$$

где $\Delta f(z) = f(z) - f(z_0),\ \Delta z = z - z_0,\ \varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

С другой стороны,

$$\Delta f(z) = \Delta u(x,\, y) + i\Delta v(x,\, y),\ \Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

$$f'(z_0) = a + ib,\ \varepsilon(z_0, \Delta z) = \varepsilon_1(\Delta x,\, \Delta y) + i\varepsilon_2(\Delta x,\, \Delta y),$$

где $\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Поэтому можем записать

$$\Delta u(x,\, y) = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y,$$

$$\Delta v(x,\, y) = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_1\Delta y,$$

где $\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Следовательно,

1) *функции $u(x,\, y)$, $v(x,\, y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных x, y в точке $(x_0,\, y_0)$;*

2) имеют место равенства

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ -b = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Достаточность.

Пусть функции $u(x,\,y)$, $v(x,\,y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных x, y в точке $(x_0,\,y_0)$, и выполнены условия Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y,$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 стремятся к 0 при Δx и Δy стремящихся к 0.

Обозначая $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -b$, $a + ib = A$, получим

$$\Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta v = a(\Delta x + i\Delta y) + ib(\Delta x + i\Delta y) +$$

$$+(\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y = (a + ib)\Delta z +$$

$$+\left((\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)\Delta z = A\Delta z + \varepsilon\Delta z.$$

Так как

$$|\varepsilon| = \left|(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le$$

$$\le |\alpha_1 + i\beta_1| \cdot \left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| + |\alpha_2 + i\beta_2| \cdot \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le |\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_2 + i\beta_2| \le$$

$$\le \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2},$$

то ε вместе с α_1, α_2, β_1, β_2 стремится к 0 при Δx и $\Delta y \to 0$.

Следовательно, функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и ее производная равна

$$f'(z_0) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теорема доказана.

В полярных координатах $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ условия Коши—Римана записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Функция $f(z)$ называется *аналитической* (или *голоморфной*, или *регулярной*) в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если она дифференцируема как функция комплексного переменного в некоторой окрестности этой точки.

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D, называется *дифференцируемой в области* D или *аналитической в области* D.

Под аналитичностью функции $f(z)$ в бесконечной точке понимается аналитичность функции $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ в точке $z = 0$.

2.3. Геометрический смысл аргумента и модуля производной

Рассмотрим комплексную функцию $z = \lambda(t)$ действительного переменного t, определённую и непрерывную на отрезке $E = [\alpha, \beta]$ действительной оси. Она определяет непрерывную кривую L.

Теорема 3. *Пусть в некоторой точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$ существует производная (по множеству E) $\lambda'(t_0) \neq 0$. Тогда в соответствующей точке $z_0 = \lambda(t_0)$ кривой L существует касательная T к ней, причем угол между T и действительной осью совпадает с $\mathrm{Arg}\lambda'(t_0)$.*

Доказательство 2. *Проведем через точки $z_0 = \lambda(t_0)$ и $z_1 = \lambda(t_1)$ кривой L секущую. Направление секущей одинаково с направлением вектора $\frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$. Поэтому секущая имеет предельное положение при $t_1 \to t_0$ ($z_1 \to z_0$), если только угол $\mathrm{Arg}\frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$ между последним вектором и действительной осью имеет предел при $t_1 \to t_0$.*

По условию теоремы существует

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \lambda'(t_0) \neq 0,$$

поэтому существует и предел

$$\lim_{t_1 \to t_0} \mathrm{Arg}\frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \mathrm{Arg}\lambda'(t_0).$$

Таким образом, для комплексной функции действительного переменного наличие отличной от нуля производной означает существование касательной к соответствующей кривой; угол наклона касательной к действительной оси совпадает с аргументом производной. Теорема доказана.

Пусть функция комплексного переменного $w = f(z)$ определена и непрерывна в некоторой области D, в точке $z_0 \in D$ существует производная $f'(z_0) \neq 0$.

Теорема 4 (геометрический смысл $\mathrm{Arg}f'(z_0)$). $\mathrm{Arg}f'(z_0)$ *равен углу поворота касательной к кривой L в точке z_0 при переходе к ее образу Λ и к точке $w_0 = f(z_0)$.*

Доказательство 3. *Через точку $z_0 \in D$ проведем кривую L:*

$$z = \lambda(t)\ (\alpha \le t \le \beta,\ \lambda(t_0) = z_0),$$

для которой существует производная $\lambda'(t_0) \ne 0$; в этой точке кривая L обладает касательной с углом наклона, равным $\mathrm{Arg}\lambda'(t_0)$.

Посредством отображения $w = f(z)$ эта кривая преобразуется в кривую Λ, расположенную в плоскости w:

$$w = f\left(\lambda(t)\right) = \mu(t),\ (\alpha \le t \le \beta,\ \mu(t_0) = f(z_0) = w_0).$$

По правилу дифференцирования сложных функций функция $\mu(t)$ дифференцируема в точке $t = t_0$:

$$\mu'(t_0) = f'(z_0)\lambda'(t_0) \ne 0,$$

поэтому кривая Λ обладает касательной в точке $w_0 = f(z_0)$, причем угол между касательной и действительной осью равен

$$\mathrm{Arg}\mu'(t_0) = \mathrm{Arg}\left(f'(z_0)\lambda'(t_0)\right) = \mathrm{Arg}\lambda'(t_0) + \mathrm{Arg}f'(z_0).$$

Откуда следует, что при переходе от кривой L к ее образу Λ угол наклона касательной в начальной точке кривой изменяется на величину

$$\mathrm{Arg}\mu'(t_0) - \mathrm{Arg}\lambda'(t_0) = \mathrm{Arg}f'(z_0),$$

не зависящую от этой кривой. Теорема доказана.

Отображение посредством непрерывной функции, сохраняющее углы между кривыми, проходящими через данную точку, называется *конформным* в этой точке; при этом если сохраняются не только величины углов, но и направление их отсчета, то говорят о *конформном отображении первого рода*; если же направление отсчета углов меняется на противоположное, то говорят о *конформном отображении второго рода.* Отображение называется *конформным в области*, если оно конформно в каждой точке этой области.

Выясним геометрический смысл модуля производной $|f'(z_0)|$. Так как

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|},$$

числа $|z - z_0|$ и $|f(z) - f(z_0)|$ представляют собой соответственно расстояния между точками z и z_0 плоскости z и между их образами $f(z)$ и $f(z_0)$ в плоскости w, то отношение $\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ можно рассматривать как растяжение вектора $z - z_0$ в результате отображения посредством функции $f(z)$. Поэтому модуль производной $|f'(z_0)|$ можно рассматривать как растяжение в точке z_0 при отображении посредством функции $f(z)$. Величина растяжения в точке z_0 не зависит от того, какой берется вектор $z - z_0$, выходящий из этой точки; однако она не совпадает с растяжением вектора $z - z_0$, а представляет собой предел этого растяжения при условии $z \to z_0$.

Таким образом, если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \ne 0$, то отображение посредством этой функции конформно в точке z_0, причем $\mathrm{Arg}f'(z_0)$ — угол поворота, а $|f'(z_0)|$ — коэффициент линейного растяжения при этом отображении в точке z_0.

Пример 7. *Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = z^2$ в точке $z_0 = -3 + 4i$.*

Решение. Находим $f'(z) = 2z$ и $|f'(-3+4i)| = |-6+8i| = 10 > 1$ — растяжение. Далее, $\arg f'(-3+4i) = \pi - \mathrm{artcg}\,\frac{4}{3}$ — угол поворота.

2.4. Гармонические и сопряженные гармонические функции

Гармонической в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функцией называется действительная функция $u(x,y)$ двух действительных переменных, имеющая в D непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2.4}$$

Теорема 5. *Если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — аналитическая в области D, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — гармонические в области D.*

Доказательство 4. *Так как функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — аналитическая в области D, то в области D выполняются условия Коши—Римана* (2.3), *откуда*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Следовательно, имеет место равенство (2.4)*. Теорема доказана.*

Если гармонические функции связаны в области уравнениями Коши—Римана, то они называются *сопряженными гармоническими функциями* в этой области.

Теорема 6. *Для любой гармонической в односвязной области D функции $\varphi(x,\, y)$ существует аналитическая в D функция $f(z)$, действительная часть $u(x,y)$ которой совпадает с $\varphi(x,\, y)$. Эта функция определена с точностью до постоянного чисто мнимого слагаемого.*

Доказательство 5. *Пусть $\varphi(x,\, y)$ — какая-либо гармоническая в односвязной области D функция. Найдем функцию $f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y)$, аналитическую в D, и такую, что $u(x,\, y) = \varphi(x,\, y)$.*

В силу условий Коши—Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = P(x,\, y),\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x,\, y),$$

где $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ — функции, непрерывные в области D и обладающие в ней непрерывными частными производными первого порядка. При этом выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

поэтому криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} P(x,\, y)dx + Q(x,\, y)dy$$

не зависит от вида пути, соединяющего точки $(x_0,\, y_0)$ и $(x,\, y)$ области D, и представляет собой однозначную функцию $\psi(x,\, y)$ точки $(x,\, y)$. Эта функция имеет те же производные, что и искомая функция $v(x,\, y)$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P(x,\, y) = \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q(x,\, y) = \frac{\partial v}{\partial y},$$

поэтому может отличаться от неё только на постоянное слагаемое

$$v(x,\, y) = \psi(x,\, y) + c =$$

$$= \int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} P(x,\, y)dx + Q(x,\, y)dy + c = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + c.$$

Таким образом, имеем две дифференцируемые в области D функции

$$u = \varphi(x,\, y),\ v = \psi(x,\, y),$$

связаные в D условиями Коши—Римана. Следовательно, функция

$$f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y) = \varphi(x,\, y) + i\psi(x,\, y) + ic$$

является аналитической в D. Теорема доказана.

Замечание 2. *Аналогично определяется аналитическая функция по мнимой части (с точностью до постоянного слагаемого). Для нахождения функции $u(x, y)$ по заданной функции $v(x, y)$ (или наоборот) можно использовать непосредственно условия Коши—Римана.*

Пример 8. *Восстановить аналитическую функцию*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ f(0) = 0,$$

по её мнимой части

$$v(x, y) = e^y \sin x + 3xy + y,$$

предварительно убедившись, что функция $v(x, y)$ является гармонической в некоторой области.

Решение. Функция $v(x,y)=e^y\sin x+3xy+y$ является гармонической во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, так как

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^y\cos x+3y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e^y\sin x+3x+1,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-e^y\sin x,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=e^y\sin x,$$

т.е. во всей плоскости имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Воспользуемся условиями Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^y\sin x+3x+1,$$

откуда для функции $u(x,y)$ будем иметь:

$$u(x,y)=-e^y\cos x+\frac{3}{2}x^2+x+\varphi(y). \tag{2.5}$$

Из (2.5) находим

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^y\cos x+\varphi'(y).$$

Но по условиям Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^y\cos x-3y,$$

поэтому

$$\varphi'(y)=-3y,\qquad \varphi(y)=-\frac{3}{2}y^2+c,$$

где c — действительная постоянная.

Из (2.5)

$$u(x,y)=-e^y\cos x+\frac{3}{2}x^2+x-\frac{3}{2}y^2+c,$$

следовательно,

$$\begin{gathered} f(z)=-e^y\cos x+\tfrac{3}{2}x^2+x-\tfrac{3}{2}y^2+c+i\left(e^y\sin x+3xy+y\right)= \\ =-e^y(\cos x-i\sin x)+\tfrac{3}{2}\left(x^2+2ixy-y^2\right)+(x+iy)+c= \\ =-e^{-iz}+\tfrac{3}{2}z^2+z+c. \end{gathered}$$

Из условия $f(0)=0$ вытекает, что $c=1$. Таким образом,

$$f(z)=-e^{-iz}+\frac{3}{2}z^2+z+1.$$

Глава 3

Элементарные аналитические функции и соответствующие конформные отображения

Теорема 7 (принцип соответствия границ)**.** *Пусть даны две односвязные ограниченные области D и Δ с границами Γ и γ. Пусть в области D задана аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная и дифференцируемая в замыкании $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Если $w = f(z)$ является взаимно однозначным и непрерывным вместе со своим обратным отображением Γ на γ и положительному обходу Γ соответствует положительный обход γ, то функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области D на область Δ.*

3.1. Дробно-линейная функция

Пусть a, b, c, d — комплексные числа, $ad - bc \neq 0$.

Функция, определяемая равенствами

$$w = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{если } z \in \mathbb{C},\ z \neq -\dfrac{d}{c}, \\ \dfrac{a}{c}, & \text{если } z = \infty, \\ \infty, & \text{если } z = -\dfrac{d}{c}, \end{cases} \tag{3.1}$$

называется *дробно-линейной.*

Каждую дробно-линейную функцию можно представить в виде композиции трех функции: линейной $\eta = cz + d$, инверсии $\zeta = \frac{1}{\eta}$ и снова линейной $w = A + B\zeta$ ($A = \frac{a}{c}$, $B = \frac{bc-ad}{c}$).

Основные свойства дробно-линейного отображения

1. *Конформность отображения.* Функция (3.1) осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости z на расширенную комплексную плоскость w.

2. *Круговое свойство.* При дробно-линейном отображении образом любой окружности (прямой) является окружность или прямая.

Точки P и P' называются *симметричными относительно окружности* Γ, если они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности O и

$$|OP| \cdot |OP'| = R^2,$$

где R — радиус окружности (центр окружности считается симметричным бесконечно удаленной точке).

3. *Сохранение симметрии.* При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности или прямой, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности или прямой.

4. *Инварианты дробно-линейного отображения.* Существует единственное дробно-линейное отображение, которое три разные точки z_1, z_2, z_3 переводит соответственно в три разные точки $w_1,\ w_2,\ w_3$; оно задается формулой

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \tag{3.2}$$

Если одна из точек $z_k,\ w_k$ $(k=1,2,3)$ является бесконечно удаленной, то в формуле (3.2) разности, в которые входит эта точка, следует заменить единицами.

Пример 9. *Найти образ множества* $\mathcal{E} = \{z : \operatorname{Re} z = 1\}$ *при отображении* $w = \dfrac{z-1}{z+1}$.

Решение. Способ 1. Множество $\mathcal{E}$ — прямая, параллельная мнимой оси и проходящая через точку $z=1$, следовательно, по круговому свойству ее образом будет либо прямая, либо окружность. Все точки множества $\mathcal{E}$ при отображении $w = \frac{z-1}{z+1}$ переходят в конечные точки w-плоскости, поэтому образом $\mathcal{E}$ будет окружность Γ. Возьмем три точки множества $\mathcal{E}$: $z=1,\ z=1+i,\ z=\infty$ (считаем, что прямая проходит через бесконечно удаленную точку) и найдем их образы, принадлежащие окружности Γ:

$$w(1)=0,\ w(1+i)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i,\ w(\infty)=1.$$

Эти три точки w-плоскости однозначно определяют окружность Γ:

$$\left|w-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Способ 2. Данную функцию можно представить в виде

$$w = \frac{z-1}{z+1} = 1 - 2\cdot\frac{1}{z+1},$$

и, следовательно, в виде композиции отображений

$$\eta = z+1,\ \zeta = \frac{1}{\eta},\ w = 1-2\zeta.$$

Отображение $\eta = z+1$ переводит множество $\mathcal{E}$ z-плоскости во множество $\mathcal{E}_\eta = \{\eta : \operatorname{Re}\eta = 2\}$ η-плоскости.

Отображение $\zeta = \frac{1}{\eta}$ – дробно-линейное и переводит прямую $\mathcal{E}_\eta$ в окружность: $\zeta(2) = \frac{1}{2}$, $\zeta(\infty) = 0$, а точкам действительной оси сопоставляет опять точки действительной оси. Это важно, потому что в силу конформности отображения $\zeta = \frac{1}{\eta}$ в точке $\eta = 2$ угол между $\mathcal{E}_\eta$ и действительной осью, равный $\frac{\pi}{2}$, сохранится. Другими словами, окружность, являющаяся образом прямой $\mathcal{E}_\eta$, пересекает действительную ось ζ-плоскости под прямым углом, поэтому ее диаметр проходит по действительной оси, т.е. это окружность

$$\left|\zeta - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}. \tag{3.3}$$

Отображение $w = 1 - 2\zeta$ сводится к равномерному растяжению ζ-плоскости в 2 раза, повороту ее вокруг $\zeta = 0$ на угол π и сдвигу вдоль вектора $\zeta = 1$. В результате окружность (3.3) переходит в искомую (рис. 3.1).

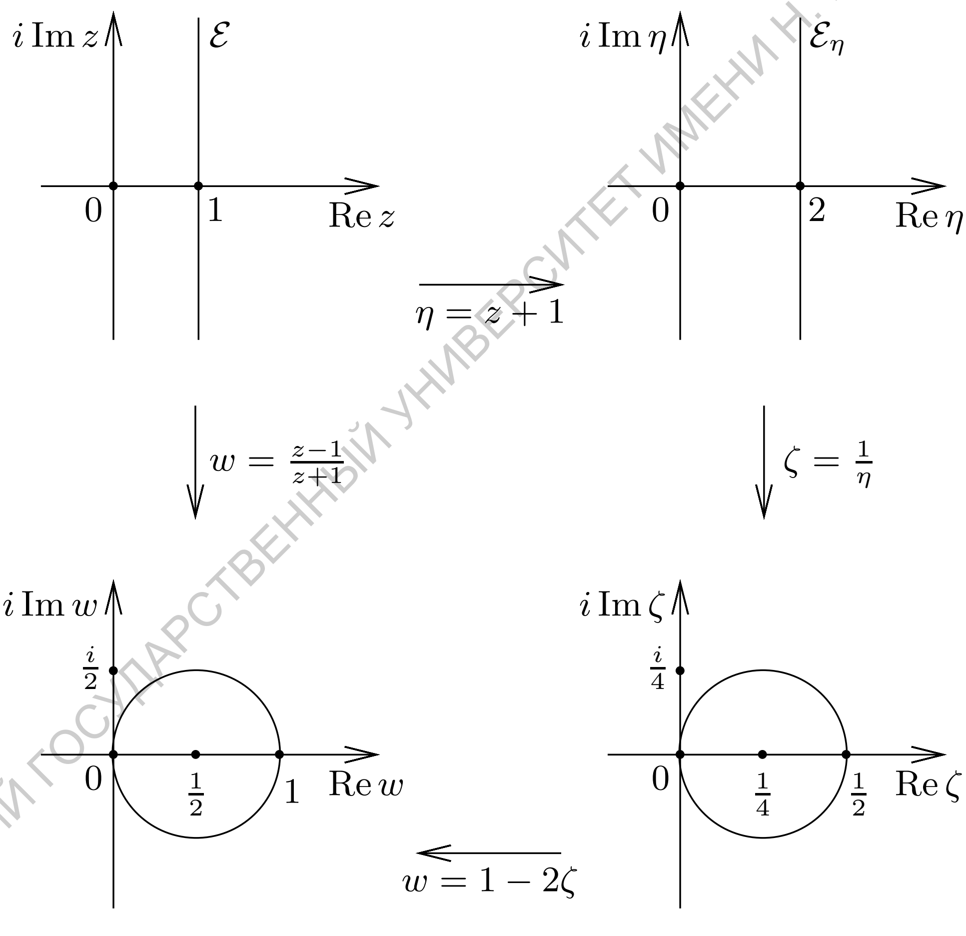

Рис. 3.1

Способ 3. Точка $z = -1$ при отображении $w = \frac{z-1}{z+1}$ переходит в точку $w = \infty$, следовательно, точка $z^* = 3$, симметричная точке $z = -1$ относительно прямой $\mathcal{E}$, переходит в центр окружности, являющейся образом прямой $\mathcal{E}$, $w(z^*) = \frac{1}{2}$. Так как $w(\infty) = 1$, то искомая окружность задается равенством

$$\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Пример 10. *Найти образ области*

$$D = \{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \ 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

при отображении функцией $w = \dfrac{z}{z-1}$.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции w:

$$u = \operatorname{Re} w = \frac{x(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2},$$
$$v = \operatorname{Im} w = -\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$$

и найдем образ границы области D (рис. 3.2).

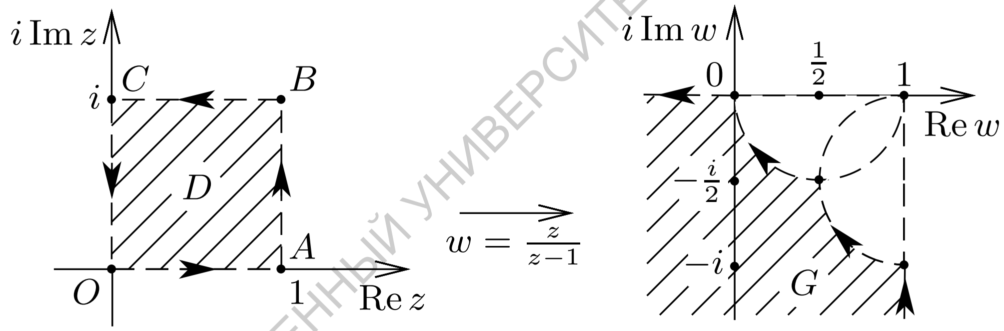

Рис. 3.2

Сторона OA ($y = 0, \ 0 \le x \le 1$) отображается на отрицательную часть действительной оси $\operatorname{Re} w$ ($v = 0, \ -\infty < u \le 0$).

Сторона AB ($x = 1, \ 0 < y \le 1$) отображается в линию $u = 1$, $-\infty < v \le -1$.

Сторона BC ($y = 1, \ 1 \ge x \ge 0$) отображается в линию, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$u = \frac{x(x-1)+1}{(x-1)^2+1}, \ v = -\frac{1}{(x-1)^2+1}, \ 0 \le x \le 1.$$

Исключив параметр x, получим

$$(u-1)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{2} \le u \le 1, \ -1 \le v \le -\frac{1}{2}.$$

Аналогично образ стороны CO определяется уравнением

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4},$$

$$0\le u\le\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\le v\le 0.$$

По принципу соответствия границ образом квадрата D будет область G (см. рис. 3.2).

Пример 11. *Найти дробно-линейное отображение, которое переводит точку $z_3=i$ в точку $w_3=0$, а точки $z_1=1$ и $z_2=-1$ оставляет неподвижными. Найти образ полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ при данном отображении.*

Решение. По условию имеем три пары соответствующих точек:

$$z_1=1,\ z_2=-1,\ z_3=i,$$

$$w_1=1,\ w_2=-1,\ w_3=0.$$

Применяя формулу (3.2), получим искомое дробно-линейное отображение:

$$w=\frac{iz+1}{z+i}.$$

Найдем теперь образ верхней полуплоскости, границей которой является действительная ось. Согласно круговому свойству действительная ось при отображении $w=\frac{iz+1}{z+i}$ переходит в окружность. Чтобы найти ее, на действительной оси выберем три точки $z_1=1$, $z_2=-1$, $z_3=0$, образами которых будут точки $w_1=1$, $w_2=-1$, $w_3=-i$. Они лежат на окружности $|w|=1$. По принципу соответствия границ получаем, что образом верхней полуплоскости будет область $G=\{w:\ |w|<1\}$.

Пример 12. *Найти дробно-линейное отображение, которое переводит круг $|z-4i|<2$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>\operatorname{Re} w$ так, что $w(4i)=-4$, $w(2i)=0$.*

Решение. Условие задачи определяет две пары соответствующих точек. Третью пару найдем, пользуясь свойством симметрии дробно-линейного отображения. По этому свойству точки $z_1=4i$ и $z_3=\infty$, симметричные относительно окружности $|z-4i|=2$, перейдут в точки $w_1=-4$ и $w_3=-4i$, симметричные относительно прямой $\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z$. Таким образом, найдена третья пара точек $z_3=\infty$ и $w_3=-4i$. По формуле (3.2) найдем искомое отображение

$$w=\frac{-4iz-8}{z-2-4i}.$$

3.2. Степенная функция

Функция $w = z^n$, $n = 2, 3, \ldots$, называется *целой степенной функцией*; она определена и однозначна во всей комплексной плоскости.

Основные свойства целой степенной функции

1. *Аналитичность.* Функция $w = z^n$ аналитическая во всей комплексной плоскости.

2. *Конформность отображения.* Отображение, осуществляемое посредством степенной функции, конформно в каждой точке комплексной плоскости, кроме $z = 0$.

3. *Геометрическое поведение.* Функция $w = z^n$ отображает взаимно однозначно и конформно внутренность любого угла с вершиной в точке $z = 0$ и раствора α, $0 < \alpha < \frac{2\pi}{n}$, на внутренность угла с вершиной в точке $w = 0$ и раствором $n\alpha$, $0 < n\alpha < 2\pi$; при $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ область

$$D = \left\{z:\ \varphi_0 < \arg z < \varphi_0 + \frac{2\pi}{n}\right\}$$

отображается на плоскость с разрезом вдоль луча $\arg w = n\varphi_0$. Образом окружности $|z| = R$ является окружность $|w| = R^n$.

Пример 13. *Найти образы заданных множеств при указанных отображениях:*

1. $D = \{z:\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{4}\}$, $w = z^4$;

2. $D = \{z:\ \operatorname{Im} z < -1\}$, $w = z^2$.

Решение. 1. Положив $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$, находим $\rho = r^4$, $\psi = 4\varphi$, поэтому образом луча $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ при отображении функцией $w = z^4$ является луч $\arg w = -2\pi$, а образом луча $\arg z = -\frac{\pi}{4}$ — луч $\arg w = -\pi$. Значит, образом области $D = \left\{z:\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{4}\right\}$ является область $G = \{w:\ 0 < \arg w < \pi\}$, т.е. верхняя полуплоскость.

2. Выделим действительную и мнимую части функции w:

$$u = \operatorname{Re} w = x^2 - y^2,\ v = \operatorname{Im} w = 2xy.$$

Образом границы области $D = \{z:\ \operatorname{Im} z < -1\}$ — прямой $\operatorname{Im} z = -1$ — является линия, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$u = \operatorname{Re} w = x^2 - 1,\ v = \operatorname{Im} w = 2x,$$

т.е. парабола $v^2 = 4(1 + u)$.

Так как точка $z = 0$, не принадлежащая $D = \{z:\ \operatorname{Im} z < -1\}$, при отображении $w = z^2$ остается неподвижной, то ее образ $w = 0$ также не принадлежит образу этой области. Значит, образом области D является внешность параболы $v^2 = 4(1 + u)$.

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к $z = w^n$, определена на всей комплексной плоскости, n-значна при $z \neq 0$. Как следует из формулы Моавра для корня n-й степени, значение $\sqrt[n]{z}$ определяется значением аргумента, выбранным для точки z:

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right).$$

Однозначной непрерывной ветвью многозначной функции $f(z)$ в области D называется однозначная непрерывная функция $\varphi(z)$, значение которой в каждой точке $z \in D$ совпадает с одним из значений функции $f(z)$.

Пусть область D — комплексная плоскость с разрезом по лучу, выходящему из начала координат под углом φ_0 к положительному направлению действительной оси. В этой области существуют n различных ветвей функции $\sqrt[n]{z}$:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_k z}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}_k z}{n}\right), \ k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (3.4)$$

где

$$\varphi_0 + 2\pi k < \operatorname{Arg}_k z < \varphi_0 + 2\pi(k+1).$$

Каждая из ветвей осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение области D на один из секторов

$$D_k = \left\{w:\ \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} < \operatorname{Arg} w < \frac{\varphi_0 + 2\pi(k+1)}{n}\right\}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Для выделения ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, достаточно определить сектор D_k, на который эта ветвь отображает область D.

Пример 14. *Найти образы следующих областей D при отображении ветвью функции w, выделяемой ее значением в указанной точке:*

1. $D = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \sqrt{z}$, $\sqrt{z}\big|_{z=i} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;
2. $D = \{z:\ (\operatorname{Im} z)^2 > 2\operatorname{Re} z + 1\}$, $w = \sqrt{z}$, $\sqrt{z}\big|_{z=-1} = -i$.

Решение. 1. Так как $w = \sqrt{z}$ — функция, обратная к $z = w^2$, то задание можно переформулировать следующим образом: в w-плоскости найти такую область, которая при отображении $z = w^2$ переводится в данную область D. Таких областей две:

$$G_1 = \left\{w:\ 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}\right\} \text{ и } G_2 = \left\{w:\ -\pi < \arg w < -\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Из этих двух областей выбираем ту, которая содержит точку $w = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, т.е. G_2.

2. В z-плоскости D — внешность параболы $y^2 = 2x + 1$, которая является образом при отображении $z = w^2$ прямой $\operatorname{Im} w = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (или $\operatorname{Im} w = -\frac{\sqrt{2}}{2}$). Таким образом, область D является образом двух областей:

$$G_1 = \left\{ w : \ \operatorname{Im} w > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \text{ и } G_2 = \left\{ w : \ \operatorname{Im} w < -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Из этих двух областей выбираем ту, которая содержит точку $w = -i$, т.е. G_2.

3.3. Функция Жуковского и обратная к ней

Функция, задаваемая равенством $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, называется *функцией Жуковского.*

Основные свойства функции Жуковского

1. *Аналитичность.* Функция Жуковского аналитическая во всех точках комплексной плоскости, кроме $z = 0$, $z = \infty$.

2. *Однолистность.* Функция Жуковского однолистна в любой области D, в которой нет различных точек z_1 и z_2, связанных равенством $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Аналитическая в области D функция $w = f(z)$ называется *однолистной* в области D, если в разных точках области она принимает разные значения. Область, в которой функция однолистна, называется *областью однолистности* этой функции.

3. *Геометрическое поведение.* Функция Жуковского окружности $|z| = \rho$, $\rho \neq 1$, переводит в эллипсы

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \tag{3.5}$$

$$\left(u = \operatorname{Re} w, \ v = \operatorname{Im} w, \ a = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \ b = \frac{1}{2}\left|\rho - \frac{1}{\rho}\right| \right);$$

образом окружности $|z| = 1$ является отрезок $[-1, \ 1]$, проходимый дважды.

Лучи $\arg z = \alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, посредством функции Жуковского переходят в ветви гипербол

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1; \tag{3.6}$$

луч $\arg z = 0$ переходит в луч $[1, \ \infty)$, проходимый дважды; луч $\arg z = \pi$ переходит в луч $(-\infty, \ -1]$, проходимый дважды; лучи $\arg z = \frac{\pi}{2}$ и $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ переходят в мнимую ось $\operatorname{Re} w = 0$.

Фокусы всех эллипсов (3.5) и гипербол (3.6) расположены в точках $w = \pm 1$. Любой эллипс (3.5) пересекается с любой гиперболой (3.6) под прямым углом.

4. *Конформность отображения.* Функция Жуковского конформно отображает внешность (внутренность) единичного круга на внешность отрезка $[-1,\ 1]$, верхнюю (нижнюю) полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ $(\operatorname{Im} z < 0)$ — на плоскость w с разрезами по лучам $(-\infty,\ -1]$ и $[1,\ \infty)$.

Пример 15. *Найти образы следующих множеств при отображении функцией Жуковского* $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:

1. $D = \left\{z:\ |z| < 1,\ z \notin \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$;

2. $D = \left\{z:\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4},\ z \notin \{\operatorname{Re} z = 0,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}\right\}$.

Решение. 1. Записав z в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, выделим действительную и мнимую части функции Жуковского:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \qquad (3.7)$$

По формулам (3.7) находим: окружность единичного радиуса $|z| = 1$ $(r = 1)$ отображается в отрезок $v = 0$, $u = \cos\varphi$ $(-\pi < \varphi \le \pi)$, т.е. в отрезок $[-1,\ 1]$, проходимый дважды; отрезок действительной оси $y = 0$, $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ $\left(\varphi = \pi, \frac{1}{2} \le r \le 1\right)$ переходит в отрезок действительной оси $v = 0$, $u \in \left[-\frac{5}{4}, -1\right]$; отрезок действительной оси $y = 0$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ $\left(\varphi = 0, \frac{1}{2} \le r \le 1\right)$ переходит в отрезок действительной оси $v = 0$, $u \in \left[1, \frac{5}{4}\right]$. Таким образом, исходная область отображается на всю комплексную плоскость с разрезом по отрезку действительной оси $v = 0$, $u \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

2. Учитывая формулы (3.7), имеем: луч $\arg z = \frac{\pi}{2}$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{2},\ r > 0\right)$ переходит в мнимую ось $\operatorname{Re} w = 0$; так как $w(i) = 0$, $w\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{3}{4}i$ и $w(0) = \infty$, то отрезок $x = 0$, $0 \le y \le 1$, проходимый дважды, переходит в отрицательную часть мнимой оси, проходимую дважды. При помощи формул (3.7) и (3.6) находим, что луч $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ $\left(\varphi = \frac{3\pi}{4},\ 0 \le r < \infty\right)$ переходит в левую ветвь гиперболы $2u^2 - 2v^2 = 1$, а луч $\arg z = \frac{\pi}{4}$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{4},\ 0 \le r < \infty\right)$ переходит в правую ветвь гиперболы $2u^2 - 2v^2 = 1$. Таким образом, исходная область отображается на внутренность гиперболы $2u^2 - 2v^2 = 1$ с разрезом по отрицательной части мнимой оси.

Решая уравнение $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ относительно z, находим

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1},$$

т.е. функция

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \qquad (3.8)$$

является *обратной к функции Жуковского* .

Пусть D — плоскость z с разрезом по отрезку $[-1,\ 1]$. В этой области функция $z+\sqrt{z^2-1}$ распадается на две ветви: $w=f_1(z)$, которая конформно отображает D на внешность единичного круга, и $w=f_2(z)$, которая отображает D на круг $|w|<1$.

Пример 16. *Найти образ области* $D=\left\{z:\ 144x^2+400y^2>225\right\}$ *при отображении ветвью функции* $w=z+\sqrt{z^2-1}$, *выделяемой значением* $w(\infty)=0$.

Решение. В w-плоскости существуют две области, которые функцией Жуковского отображаются на указанную внешность эллипса

$$G_1=\{w:\ |w|>2\}\ \text{ и } G_2=\left\{w:\ |w|<\frac{1}{2}\right\}.$$

Так как $w(\infty)=0$, то в качестве образа при отображении, обратном к функции Жуковского, выбираем область G_2.

3.4. Показательная функция

Функция $f(z)=e^x\left(\cos y+i\sin y\right),\ z=x+iy$, называется *показательной* и обозначается e^z.

Основные свойства показательной функции

1. *Однолистность.* Любая полоса шириной 2π, стороны которой параллельны действительной оси, является областью однолистности функции $w=e^z$.

2. *Геометрическое поведение.* При отображении $w=e^z$ начало координат w-плоскости не принадлежит образу конечной z-плоскости ($\forall z\in\mathbb{C}\quad e^z\neq 0$); образом прямой $y=a$ является луч, выходящий из начала координат под углом a к положительному направлению действительной оси; образом прямой $x=d$ является окружность с центром в начале координат и радиусом e^d.

Пример 17. *Найти образ области* $D=\{z:\ 0<\operatorname{Im}z<2\pi,\ \operatorname{Re}z>0\}$ *при отображении функцией* $w=e^z$.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции w:

$$u=\operatorname{Re}w=e^x\cos y,\ v=\operatorname{Im}w=e^x\sin y.$$

Найдем образ границы области D: луч $y=2\pi,\ 0<x<\infty$, отображается в луч $v=0,\ 1<u<\infty$; отрезок $x=0,\ 0\leq y\leq 2\pi$, отображается в окружность единичного радиуса ($e^z=e^{iy}$); луч $y=0,\ 0<x<\infty$, отображается в луч $v=0,\ 1<u<\infty$. По принципу соответствия границ образом области D является вся плоскость с разрезом по лучу $v=0,\ 1<u<\infty$, и удаленным единичным кругом $|w|\leq 1$.

3.5. Тригонометрические и гиперболические функции

Напомним, что *тригонометрические функции* задаются формулами:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

гиперболические функции определяются по формулам:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right), \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Известные из тригонометрии соотношения между тригонометрическими функциями действительного аргумента сохраняются и в комплексной области.

Из определения следуют очевидные соотношения:

- $\cos z = \operatorname{ch}(iz), \quad \operatorname{ch} z = \cos(iz)$;
- $\sin z = -i\operatorname{sh}(iz), \quad \operatorname{sh} z = -i\sin(iz)$;
- $\operatorname{tg} z = -i\operatorname{th} z, \quad \operatorname{th} z = -i\operatorname{tg}(iz)$;
- $\operatorname{ctg} z = i\operatorname{cth}(iz), \quad \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg}(iz)$.

Основные свойства тригонометрических функций

1. Функции $\sin z$, $\cos z$ непрерывны во всей комплексной плоскости.

2. Функции $\sin z$, $\cos z$ принимают все значения, т.е. для любого комплексного числа A уравнения $\sin z = A$, $\cos z = A$ имеют решения.

3. *Конформность* $w = \sin z$. Отображение $w = \sin z$ конформно во всех точках z-плоскости, кроме $z = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$.

4. *Геометрическое поведение* $w = \sin z$. Отображение $w = \sin z$ переводит ортогональную сетку прямых, параллельных координатным осям, в сетку гипербол и эллипсов с общими фокусами ± 1.

5. Отображение $w = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ сводится к сдвигу $\xi = z + \frac{\pi}{2}$ плоскости в направлении действительной оси и отображению $w = \sin\xi$.

Свойства функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ непосредственно вытекают из свойств функций $\sin z$ и $\cos z$.

Пример 18. *Найти образ области* $D = \left\{z : \ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\right\}$ *при отображении* $w = \operatorname{ctg} z$.

Решение. Представим функцию $w = \operatorname{ctg} z$ в виде композиции функций:

$$\xi = 2iz, \quad \eta = e^{\xi}, \quad w = i\frac{\eta + 1}{\eta - 1}.$$

Функция $\xi = 2iz$ отображает область D в область

$$G_1 = \left\{\xi : \ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$$

(равномерное растяжение области D в 2 раза и поворот вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки).

Функция $\eta = e^{\xi}$ отображает область G_1 на область

$$G_2 = \{\eta : \ \mathrm{Re}\, \eta > 0\}\,.$$

Наконец, дробно-линейная функция $w = i\dfrac{\eta+1}{\eta-1}$ отображает область G_2 на внешность единичного круга $|w| > 1$.

Пример 19. *Решить уравнение* $\cos z = \frac{4i}{3}$.

Решение.

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) = \frac{5}{3} \ \Leftrightarrow \ e^{iz}+e^{-iz} = \frac{10}{3} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} w = e^{iz} \\ w^2 - \frac{10}{3}w + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \begin{cases} w = e^{iz} \\ w_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \frac{4}{3} \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} e^{iz} = 3 \\ e^{iz} = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{iz} = e^{\ln 3 + 2k\pi i} \\ e^{iz} = e^{-\ln 3 + 2k\pi i} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ z = \pm i \ln 3 + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\,.$$

3.6. Логарифмическая функция

Логарифмической функцией комплексного аргумента называется функция, обратная к показательной, т. е. определяемая уравнением $e^w = z$, $z \neq 0$, и обозначаемая $w = \mathrm{Ln}\, z$.

Справедлива формула

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\left(\arg z + 2\pi k\right), \ k \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Каждое значение функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ называется *логарифмом комплексного числа.* Значение логарифма комплексного числа z, $z \neq 0$, которое соответствует $\ln|z| + i\arg z$, называется *главным значением логарифмической функции* $w = \mathrm{Ln}\, z$ и обозначается $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \ -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Поэтому

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2\pi k i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

В области D, являющейся комплексной плоскостью с разрезом по лучу, выходящему под углом α к действительной оси, существует бесчисленное множество разных однозначных ветвей функции $w = \mathrm{Ln}\, z$. Каждая из этих ветвей отображает область D на одну из полос

$$D_k = \{z : \ \alpha + 2\pi k < \mathrm{Im}\, w < \alpha + 2(k+1)\pi\}\,, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Для выделения однозначной ветви логарифмической функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ достаточно определить полосу D_k, на которую эта ветвь отображает область D. Ветвь логарифмической функции, отображающая область D на полосу D_0, является главной ветвью $\ln z$, остальные однозначные непрерывные ветви функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ в этой области (отображающие D на D_k) имеют вид

$$\mathrm{Ln}_k z = \ln z + 2\pi k i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Основные свойства логарифмической функции

1. Логарифмическая функция определена на всей комплексной плоскости с выколотой точкой $z = 0$, бесконечно значна, и разные ее значения отличаются на $2\pi k i, \ k \in \mathbb{Z}$.

2. *Конформность.* Отображение, осуществляемое каждой ветвью логарифмической функции, является конформным для всех точек $z \in D$.

Пример 20. *Найти образ области $D = \{z : \ 2 < |z| < 4, \ z \notin [-4, -2]\}$ при отображении ветвью логарифмической функции $w = \mathrm{Ln}\, z$, определяемой значением $w(1) = -2\pi i$.*

Решение. Ветвь, определяемая уравнением $\mathrm{Ln}\, 1 = -2\pi i$, имеет вид

$$\mathrm{Ln}_{-1} z = \ln |z| + i \arg z - 2\pi i.$$

При этом отображении образом области $\Delta = \{z : \ -\pi < \arg z < \pi\}$ является полоса $G_{-1} = \{w : \ -3\pi < \mathrm{Im}\, w < -\pi\}$. Образом дуги окружности $|z| = 2, \ -\pi < \arg z < \pi$, является отрезок $u = \ln 2, \ -3\pi < v < -\pi$, а образом дуги окружности $|z| = 4, \ -\pi < \arg z < \pi$, является отрезок $u = \ln 4, \ -3\pi < v < -\pi$. Поэтому образом области D является прямоугольник $\ln 2 < u < \ln 4, \ -3\pi < v < -\pi$.

3.7. Построение конформных отображений

Теорема 8 (Римана о существовании конформного отображения)**.** *Каждую односвязную область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит более одной точки, можно конформно отобразить на круг с центром в начале координат.*

Теорема 9 (единственности для конформного отображения)**.** *Существует лишь одна функция $F(z)$, конформно отображающая область G на круг $\{w : \ |w| < 1\}$ и удовлетворяющая условиям*

$$F(z_0) = 0 \ \text{и} \ F'(z_0) > 0,$$

где z_0 — заданная конечная точка области G.

При фактическом построении функции, реализующей конформное отображение данной области G на круг или на полуплоскость, используются уже изученные примеры конформных отображений путем суперпозиции подходящих отображений.

Пример 21. *Отобразить конформно и однолистно множество*

1. $E = \{z:\ z \notin \{\operatorname{Re} z = 0,\ -1 < \operatorname{Im} z < 2\}\}$;

2. $E = \{z:\ |z| < 1,\ |z+i| > 1\}$;

3. $E = \{z:\ \operatorname{Im} z < 2,\ -1 < \operatorname{Re} z < 3\}$;

4. $E = \{z:\ |z+i| > 1,\ |z+3i| > 1\}$

на верхнюю полуплоскость.

Решение. 1. Множество E представляет собой плоскость с разрезом вдоль отрезка $[-i,\ 2i]$ мнимой оси. Переведем разрез в разрез по лучу с началом в точке 0. Это можно сделать с помощью дробно-линейного отображения

$$w_1 = \frac{z+i}{z-2i}.$$

Так как точка $0 \in [-i,\ 2i]$ при этом отображении перейдет в точку $-\frac{1}{2}$, $\left(w_1(0) = -\frac{1}{2}\right)$, то разрез переходит в отрицательную часть действительной оси.

Выделим в полученной области (плоскости с разрезом) однозначную ветвь функции $w_2 = \sqrt{w_1}$ требованием $\sqrt{1} = 1$. Поскольку область в плоскости w_1 задается неравенствами $-\pi < \arg w_1 < \pi$, то ее образ будет задаваться неравенствами $-\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}$, т.е. является правой полуплоскостью.

Последнее отображение — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, $w = e^{i\frac{\pi}{2}} w_2 = i w_2$.

Окончательный ответ имеет вид

$$w = i\sqrt{\frac{z+i}{z-2i}},$$

где ветвь корня выделяется условием $\sqrt{1} = 1$.

2. Область E представляет собой «круговую луночку», т.е. ограничена дугами двух окружностей. В этой ситуации целесообразно отобразить точки пересечения окружностей в 0 и ∞.

Найдем точки пересечения окружностей $|z| = 1$ и $|z+i| = 1$:

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+i| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

откуда искомыми точками являются $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Отображение задается формулой

$$w_1 = \frac{z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}.$$

Так как $w_1(0) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то дуга окружности $|z+1| = 1$ отобразится на луч $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$. Поскольку $w_1(i) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то дуга окружности $|z| = 1$ отобразится на луч $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Положительному обходу границы луночки $z_1 \to i \to z_2 \to 0$ соответствует обход $\infty \to \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \to 0 \to -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому область, являющаяся образом E, будет углом

$$\left\{-\frac{2\pi}{3} < \arg w_1 < -\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Отображение $w = w_1^3$ переведет этот угол в

$$\{-2\pi < \arg w < -\pi\} = \{0 < \arg w < \pi\},$$

т.е. искомое отображение имеет вид

$$w = \left(\frac{z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}\right)^3.$$

3. Способ 1. Отобразим данную полуполосу на горизонтальную полуполосу шириной π. Для этого надо применить параллельный перенос $w_1 = z + 1 - 2i$, поворот $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}w_1 = iw_1$ и сжатие $w_3 = \frac{\pi}{4}w_2$. Результатом будет полуполоса

$$\{w_3 :\ \operatorname{Re} w_3 > 0,\ 0 < \operatorname{Im} w_3 < \pi\}.$$

Отображение $w_4 = e^{w_3}$ переведет ее в «круговую луночку»

$$\{w_4 :\ |w_4| > 1,\ 0 < \arg w_4 < \pi\},$$

одна из граничных «окружностей» которой — действительная ось.

Применим дробно-линейное отображение

$$w_5 = \frac{w_4 - 1}{w_4 + 1}.$$

Так как $w(\infty) = 1$, то образом объединения двух полупрямых

$$\{w_4 :\ \operatorname{Im} w_4 = 0,\ \operatorname{Re} w_4 \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$$

будет луч $[0, +\infty)$; аналогично из равенства $w_5(i) = i$ следует, что верхняя полуокружность

$$\{w_4 :\ |w_4| = 1,\ \operatorname{Im} w_4 \geq 0\}$$

переходит в луч $[0, +\infty i)$. Учитывая, что $w_5(2i) = 3 + 4i$, найдем — образом «круговой луночки» будет первая четверть

$$\{w_5 :\ \operatorname{Re} w_5 > 0,\ \operatorname{Im} w_5 > 0\} = \left\{w_5 :\ 0 < \arg w_5 < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Наконец, отображение $w = w_5^2$ дает требуемое.

Способ 2. Отобразим данную полуполосу на горизонтальную полуполосу шириной 2π. Для этого надо применить аналогично первому способу следующие отображения:

$$w_1 = z + 1 - 2i,\ w_2 = iw_1 \text{ и } w_3 = \frac{\pi}{2} w_2.$$

Результатом будет полуполоса

$$\{w_3 :\ \operatorname{Re} w_3 > 0,\ 0 < \operatorname{Im} w_3 < 2\pi\}.$$

Отображение $w_4 = e^{w_3}$ переведет ее в область

$$\{w_4 :\ |w_4| > 1,\ 0 < \arg w_4 < 2\pi\},$$

т.е. внешность единичного круга с разрезом вдоль $[1, +\infty)$.

Функция Жуковского $w_5 = \frac{1}{2}\left(w_4 + \frac{1}{w_4}\right)$ отображает внешность единичного круга во внешность отрезка $[-1,\ 1]$, а полупрямую $[1, +\infty)$ — в себя. Таким образом, в плоскости w_5 получаем внешность полупрямой $[-1, +\infty)$.

Сдвиг $w_6 = w_5 + 1$ отобразит ее на область

$$\{w_6 :\ 0 < \arg w_6 < 2\pi\},$$

а применение отображения $w = \sqrt{w_6}$ с выделением ветви $\sqrt{-1} = i$ дает искомое отображение.

4. Данная область представляет собой внешность двух кругов, касающихся между собой в точке $z = -2i$. Поэтому отображение

$$w_1 = \frac{1}{z + 2i}$$

переводит обе граничные окружности в прямые, не имеющие конечных точек пересечения, т.е. параллельные. Так как

$$w_1(-i + 1) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2},\ \ w_1(0) = -\frac{i}{2},$$

то одна из этих прямых — $\left\{w_1 :\ \operatorname{Im} w_1 = -\frac{1}{2}\right\}$, а поскольку $w_1(-4i) = \frac{i}{2}$, то другая прямая — $\left\{w_1 :\ \operatorname{Im} w_1 = \frac{1}{2}\right\}$. Бесконечная точка принадлежит данной области, $w_1(\infty) = 0$, поэтому образом области является полоса

$$\left\{w_1 :\ \left|\operatorname{Im} w_1\right| < \frac{1}{2}\right\}.$$

Применяя растяжение $w_2 = \pi w_1$, получим полосу

$$\left\{w_2 :\ \left|\operatorname{Im} w_2\right| < \frac{\pi}{2}\right\}$$

шириной π.

Теперь функция $w_3 = e^{w_2}$ отображает эту полосу на правую полуплоскость
$$\left\{w_3 : \ \left|\arg w_3\right| < \frac{\pi}{2}\right\},$$
поворачивая которую с помощью $w = iw_3$, найдем искомое отображение.

Пример 22. *Отобразить верхнюю полуплоскость на единичный круг* $|w| < 1$ *так, чтобы* $w(2i) = 0$ *и* $\arg w'(2i) = 0$.

Решение. Так как точка $-2i$ симметрична точке $2i$ относительной действительной оси (границы указанной области), то ее образ $w(-2i)$ должен быть симметричен центру окружности $|w| = 1$ относительно этой окружности, т. е. $w(-2i) = \infty$. Любая дробно-линейная функция, осуществляющая такое отображение двух точек, имеет вид
$$w = k\frac{z-2i}{z+2i}.$$
Чтобы найти k, прежде всего заметим, что образ точки $z = 0$, т.е. точка $w(0) = -k$, должен находиться на единичной окружности, т. е. $k = e^{i\theta}$. Чтобы найти θ, найдем
$$w'(2i) = e^{i\theta}\left.\frac{4i}{(z+2i)^2}\right|_{z=2i} = -e^{i\theta}\frac{i}{4},$$
откуда
$$\arg w'(2i) = \pi + \theta + \frac{\pi}{2}.$$
По условию $\arg w'(2i) = 0$, откуда $\theta = -\frac{3\pi}{2}$, или $e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, т. е. искомое отображение имеет вид
$$w = i\frac{z-2i}{z+2i}.$$

Глава 4

Интегрирование функций комплексного переменного

4.1. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

Пусть $f(z)$ — непрерывная функция в области D комплексной плоскости, L — спрямляемая кривая, лежащая в области D, с началом в точке z_0 и концом в точке z.

Разобьем кривую L точками $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z$ произвольным образом на n частей $\gamma_0,\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. На каждой из частей γ_k выберем точку ξ_k и составим сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right) \Delta z_k,$$

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k,\ k = \overline{0,\ n-1}$.

Обозначим через l_k длину кривой $\gamma_k,\ k = \overline{0,\ n-1}$, $\lambda = \max\limits_k l_k$.

Интегралом от функции $f(z)$ по кривой L называется

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right) \Delta z_k = \int\limits_L f(z) dz.$$

Если через $-L$ обозначить ту же кривую L, но с противоположным направлением обхода, то

$$\int\limits_{-L} f(z) dz = -\int\limits_L f(z) dz.$$

Если $f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$, то

$$\int\limits_L f(z) dz = \int\limits_L u(x,\ y) dx - v(x,\ y) dy + i \int\limits_L v(x,\ y) dx + u(x,\ y) dy. \qquad (4.1)$$

Некоторые свойства интеграла от функции комплексного переменного

Свойства интеграла от функции комплексного переменного непосредственно следуют из свойств криволинейного интеграла:

1. $\int\limits_L (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int\limits_L f(z)dz + \beta \int\limits_L g(z)dz;$

2. $\int\limits_{L_1+L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz,$

где $L_1 + L_2$ — кривая, составленная из дуг L_1 и L_2 так, что конец L_1 совпадает с началом L_2;

3. *Связь с определенным интегралом.* Пусть L — гладкая кривая, задаваемая уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, тогда

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_a^b f\left(z(t)\right) z'(t)dt. \tag{4.2}$$

Пример 23. *Вычислить интеграл:*

1. $\int\limits_L (z-a)^n\, dz$, $L = \{z:\ |z-a| = \rho\}$ *— окружность, проходимая против часовой стрелки,* $n \in \mathbb{Z}$;

2. $\int\limits_L \left(z^2 + z \cdot \overline{z}\right) dz$, $L = \left\{z:\ \operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2,\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\right\}$, *начало пути в* $z = 0$.

Решение. 1. Параметрическое уравнение окружности L имеет вид

$$z = a + \rho e^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Тогда $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ и по формуле (4.2) находим

$$\int\limits_L (z-a)^n\, dz = i\rho^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } n = -1 \\ \frac{\rho^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0, & \text{если } n \neq -1. \end{cases}$$

2. Выделим действительную и мнимую части подынтегральной функции:

$$z^2 + z \cdot \overline{z} = (x+iy)^2 + (x+iy)(x-iy) = 2x^2 + 2ixy,$$

т.е. $u(x,\ y) = 2x^2,\ v(x,\ y) = 2xy.$

По формуле (4.1) имеем $(y = x^2,\ dy = 2xdx)$:

$$\int\limits_L \left(z^2 + z \cdot \overline{z}\right) dz = \int\limits_L 2x^2 dx - 2xydy + i \int\limits_L 2xydx + 2x^2 dy =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left(x^2 - 2x^4\right) dx + 6i \int\limits_0^1 x^3 dx = -\frac{2}{15} + \frac{3}{2}i.$$

4.2. Интегральная теорема Коши

Теорема 10 (интегральная теорема Коши для простого контура)**.** *Если функция $f(z)$ — аналитическая в некоторой односвязной области D, контур Γ — замкнутый, жордановый, кусочно-гладкий, лежащий в D, то*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Доказательство 6 (проведем в предположении непрерывности $f'(z)$ вплоть до границы области D)**.** *Так как $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая в области D, то в этой ообласти выполняются условия Коши–Римана (2.3):*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

причем в силу непрерывности $f'(z)$ вплоть до границы области D частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ также непрерывны. Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy = 0,$$

и

$$\int\limits_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy = 0,$$

как интегралы по замкнутому контуру от полных дифференциалов. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Пример 24. *Определить, когда для интеграла* $\displaystyle\int\limits_{L} \frac{dz}{z^2 - 9}$ *можно применить интегральную теорему Коши, если:*

1. $L = \left\{z : \ |z| = \dfrac{1}{2}\right\}$;

2. $L = \{z : \ |z - 1| = 5\}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^2-9}$ имеет особенности в точках $z = \pm 3$, поэтому:

1. круг $|z| \le \frac{1}{2}$ полностью входит в область аналитичности функции $f(z)$, и теорема Коши имеет место;

2. в круге с центром $z = 1$ и радиуса 5 функция имеет особенности и не является аналитической, следовательно, теорема Коши в данном случае не применима.

Пример 25. *Доказать, что*

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Решение. Проинтегрируем аналитическую во всей комплексной плоскости функцию $f(z) = e^{-z^2}$ по контуру L прямоугольника $|x| \leq R$, $0 \leq y \leq b$:

$$\int\limits_L e^{-z^2}dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + \int\limits_0^b e^{-(R+iy)^2}i\,dy + \int\limits_R^{-R} e^{-(x+ib)^2}dx + \int\limits_b^0 e^{-(-R+iy)^2}i\,dy =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + i\int\limits_0^b e^{-R^2+y^2}e^{-2iRy}dy + \int\limits_R^{-R} e^{-x^2+b^2}e^{-2ibx}dx + i\int\limits_b^0 e^{-R^2+y^2}e^{2iRy}dy =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx - i\int\limits_0^b e^{-R^2+y^2}\left(e^{2iRy} - e^{-2iRy}\right)dy +$$

$$+ \int\limits_R^0 e^{-x^2+b^2}e^{-2ibx}dx + \int\limits_0^{-R} e^{-x^2+b^2}e^{-2ibx}dx =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + 2\int\limits_0^b e^{-R^2+y^2}\sin(2Ry)\,dy - \int\limits_0^R e^{-x^2+b^2}e^{-2ibx}dx - \int\limits_0^R e^{-x^2+b^2}e^{2ibx}dx =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + 2\int\limits_0^b e^{-R^2+y^2}\sin(2Ry)\,dy - 2\int\limits_0^R e^{-x^2+b^2}\cos(2bx)\,dx.$$

Но по интегральной теореме Коши $\int\limits_L e^{-z^2}dz = 0.$

Таким образом,

$$\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + 2\int\limits_0^b e^{-R^2+y^2}\sin(2Ry)\,dy - 2\int\limits_0^R e^{-x^2+b^2}\cos(2bx)\,dx = 0.$$

При $R \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^b e^{-R^2+y^2}\sin(2Ry)\,dy = 0,$$

поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2+b^2}\cos(2bx)\,dx = 2e^{b^2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx.$$

Учитывая,что интеграл Эйлера—Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi},$$

окончательно получаем

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Следствие 1 (из теоремы Коши). *Если функция $f(z)$ — аналитическая в некоторой односвязной области D, $\gamma_1 \subset D$, $\gamma_2 \subset D$ – две кривые, имеющие общие начало и конец, то*

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz,$$

т. е. интеграл от аналитической функции не зависит от пути интегрирования.

Теорема 11 (интегральная теорема Коши для составного контура). *Пусть $f(z)$ — аналитическая в области D функция; Γ и γ_k ($k = \overline{1,\ n}$) — замкнутые, спрямляемые, жордановые кривые, лежащие в D, такие, что γ_k ($k = \overline{1,\ n}$) принадлежат внутренности Γ, и каждая γ_i лежит во внешности γ_k ($i, k = \overline{1,\ n}$, $i \neq k$). Пусть многосвязная область G, ограниченная кривыми $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, принадлежит области D.*

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz$$

(*все кривые обходятся в одном направлении*).

Доказательство 7 (проведем для $n = 2$). *Соединим спрямляемыми жордановыми дугами δ_1, δ_2, δ_3 кривую Γ с γ_1, кривую γ_1 с γ_2 и, наконец, γ_2 с Γ и рассмотрим два контура*

$$C_1 = z_0z_3'z'z_4z_2'z_3z_2z_1'z_1z_0, \quad C_2 = z_0z_1z_1''z_2z_3z_2''z_4z'z_3''z_0.$$

По теореме Коши для простого контура

$$\int\limits_{C_1} f(z)dz = 0, \quad \int\limits_{C_2} f(z)dz = 0,$$

поэтому

$$0 = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz + \int\limits_{-\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{-\gamma_2} f(z)dz.$$

Откуда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz,$$

и теорема доказана.

4.3. Интегральная формула Коши

Теорема 12 (интегральная формула Коши). *Пусть функция $f(z)$ – однозначная и аналитическая в области G, кривая L – замкнутая, жордановая, спрямляемая, принадлежащая G вместе со своей внутренностью D.*

Тогда для всякой точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{4.3}$$

Доказательство 8. *Опишем из точки z_0 как из центра окружность γ_ρ радиуса ρ столь малого, чтобы круг $|z - z_0| \le \rho$ лежал внутри L. Тогда для составного контура, образованного кривыми L и γ_ρ, будем иметь*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{4.4}$$

т. е. для доказательства теоремы достаточно установить равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

или, используя первую часть примера 23,

$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) =$$

$$= \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0. \tag{4.5}$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad (z \in \gamma_\rho)$$

будет выполняться $\forall\, \varepsilon > 0$, если $\rho < \delta(\varepsilon)$. При этом условии получаем

$$\left|\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Интеграл, стоящий под знаком предела, равен левой части равенства (4.5) *и в силу* (4.4) *не зависит от ρ. Следовательно, он равен нулю при всех рассматриваемых значениях ρ. Таким образом, справедливо* (4.5), *и имеет место интегральная формула Коши* (4.3).

Интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ называется *интегралом Коши.*

Замечание 3. *Если z_0 принадлежит внешности кривой L, то подынтегральная функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ является аналитической не только на L, но и всюду внутри L, и по интегральной теореме Коши в этом случае*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

Интегральная формула Коши выражает значения функции внутри области через значения на границе.

Следствие 2 (теорема о среднем)**.** *Значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0 области аналитичности равно среднему арифметическому ее значений на любой окружности с центром в точке z_0 (сама окружность и ее внутренность лежат в той же области).*

Действительно,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) i\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) d\varphi.$$

Следствие 3. *Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в замкнутой области $\overline{D}$ с границей L, обладает внутри этой области производными всех порядков, причем эти производные представляются формулами*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Пример 26. *Используя интегральную формулу Коши, вычислить*:

1. $\displaystyle\int\limits_L \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}\, dz$, $L = \left\{z : \ |z-1-i| = \sqrt{2}\right\}$;

2. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos\varphi}$.

Решение. 1. В круге $|z-1-i| < \sqrt{2}$ лежат две точки, в которых знаменатель обращается в нуль: $z_1 = 1$ и $z_2 = i$, поэтому воспользоваться непосредственно интегральной формулой Коши невозможно. Разложим функцию на сумму простых дробей

$$\frac{z}{(z^2+1)(z-1)} = -\frac{z-1}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2(z-1)}.$$

Тогда, применяя формулу (4.3) к каждому из интегралов, имеем

$$\int\limits_L \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}\, dz = -\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{(z-1)e^z}{z^2+1}\, dz + \frac{1}{2}\int\limits_L \frac{e^z}{z-1}\, dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{\frac{(z-1)e^z}{z+i}}{z-i}\, dz + \frac{1}{2}\int\limits_L \frac{e^z}{z-1}\, dz = -\pi i \frac{(z-1)e^z}{z+i}\bigg|_{z=i} + \pi i e^z\bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)e^i + \pi e i.$$

2. Заменой $z = e^{i\varphi}$ сведем интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ к интегралу по контуру от функции комплексной переменной. Так как

$$d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

то

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = \frac{2}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$z^2+2az+1 = (z-z_1)(z-z_2),$$

где

$$z_1 = -a-\sqrt{a^2-1},\ z_2 = -a+\sqrt{a^2-1}.$$

Так как $z_1 \in \{z:\ |z|>1\}$, $z_2 \in \{z:\ |z|<1\}$, то функция

$$\frac{1}{z+a+\sqrt{a^2-1}}$$

является аналитической в круге $\{z:\ |z|<1\}$, и по формуле (4.3) имеем

$$\frac{2}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1} = \frac{2}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z+a+\sqrt{a^2-1}}}{z+a-\sqrt{a^2-1}}\, dz =$$

$$= \frac{2}{i} \cdot \frac{2\pi i}{z+a+\sqrt{a^2-1}}\Bigg|_{z=-a+\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Теорема 13 (теорема Мореры)**.** *Если функция $f(z)$ однозначна и непрерывна в односвязной области D, и для любой кусочно-гладкой, замкнутой кривой $\Gamma \in D$ выполняется*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

то $f(z)$ аналитическая в области D.

Доказательство 9. *Так как для любой кусочно-гладкой, замкнутой кривой $\Gamma \in D$ выполняется*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

то для z_0 и z из области D

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = F(z)$$

является однозначной функцией.

В силу непрерывности функции $f(z)$ $\forall\, \varepsilon >$ *о найдется* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что* $\forall \xi \in U_\delta(z) = \{\xi : |\xi - z| < \delta\}$, $U_\delta(z) \subset D$, *выполняется неравенство*

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon.$$

Обозначим через σ *– радиус, связывающий* z *и* ξ,*через* γ *– гладкую кривую, связывающую* z_0 *и* z. *Так как*

$$\left|\frac{F(\xi) - F(z)}{\xi - z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\xi - z}\left(\int\limits_{\gamma+\sigma} f(\tau)d\tau - \int\limits_{\gamma} f(\tau)d\tau\right) - f(z)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\xi - z}\left(\int\limits_{\sigma} f(\tau)d\tau - f(z)(\xi - z)\right)\right| = \left|\frac{1}{\xi - z}\int\limits_{\sigma} (f(\tau) - f(z))\, d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|\xi - z|}\int\limits_{\sigma} |f(\tau) - f(z)| \cdot |d\tau| \le \frac{\varepsilon\delta}{\delta} = \varepsilon,$$

то

$$\frac{F(\xi) - F(z)}{\xi - z} \to f(z) \text{ при } \xi \to z,$$

т. е. $F'(z) = f(z)$.

Таким образом, $F(z)$ *– аналитическая в области* D *функция, значит, ее производная* $f(z)$ *является функцией, аналитической в области* D. *Теорема доказана.*

Теорема Мореры можно рассматривать как обратную к интегральной теореме Коши. Однако в теореме Мореры вводится существенное дополнительное условие непрерывности функции $f(z)$.

Глава 5

Степенные ряды. Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана

5.1. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n , \tag{5.1}$$

где $z_0,\ c_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — фиксированные числа.

Множеством сходимости степенного ряда называется множество точек z, при которых ряд (5.1) сходится.

Будем в дальнейшем считать, что $\dfrac{1}{0} = \infty,\ \dfrac{1}{\infty} = 0.$

Теорема 14 (Коши–Адамара). *Если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} \quad (0 \le R \le \infty),$$

то

1) при $R = \infty$ ряд (5.1) *сходится во всей комплексной плоскости*;

2) при $R = 0$ ряд (5.1) *сходится только в точке $z = z_0$ и расходится при $z \neq z_0$*;

3) при $0 < R < \infty$ ряд (5.1) *сходится абсолютно в круге $\left|z - z_0\right| < R$ и расходится во внешности этого круга.*

Круг $\{z : \ |z - z_0| < R\}$, внутри которого ряд (5.1) сходится, а во внешности расходится, называется *кругом сходимости*, число R — *радиусом сходимости*. Поведение ряда (5.1) на границе круга сходимости может быть различным: он может расходиться во всех точках границы, сходиться во всех точках границы, наконец, может расходиться в одних и сходиться в других точках границы. Характер сходимости — абсолютный, условный — также может быть различным (хотя, очевидно, одним и тем же для всех точек границы, в которых ряд сходится).

Пример 27. *Найти радиусы сходимости рядов*:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$; *2.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{n^3}$.

Решение. 1. По формуле Коши–Адамара имеем

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Для вычисления последнего предела воспользуемся формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n+\theta_n/12n},\ \theta_n \in (0,\ 1).$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n+\theta_n/12n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{2\pi n}}{e^{1-\theta_n/12n^2}} = e^{-1},$$

откуда $R = e$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n z^{n^3}$ — степенной ряд, у которого многие коэффициенты равны нулю. Воспользуемся формулой Коши–Адамара, записав предварительно выражения коэффициентов c_k этого ряда через номер коэффициента k (здесь c_k — коэффициент при z^k):

$$c_k = \begin{cases} 3^n,\ k = n^3,\ n = 0, 1, \ldots \\ 0,\ k \neq n^3, \end{cases}$$

тогда

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^3]{|c_{n^3}|} = \lim_{n\to\infty} (3^n)^{\frac{1}{n^3}} = 1.$$

Значит, $R = 1$.

Пример 28. *Найти множество сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}\ \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Решение. Определим круг сходимости данного степенного ряда:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{\alpha}{n}} = 1,$$

т.е. $R = 1$, поэтому $\{z :\ |z| < 1\}$ — круг сходимости.

На окружности $|z| = 1$ имеем

$$\left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha},$$

поэтому при $\alpha > 1$ ряд абсолютно сходится во всех ее точках, а при $\alpha \le 0$ расходится. При $0 < \alpha \le 1$ и $z = 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

расходится. В остальных точках окружности ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$ сходится, так как при $z = e^{i\varphi}$ $(0 < \varphi < 2\pi)$ имеем:

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{e^{ik\varphi}}{k^\alpha} =$$

$$= e^{i(n+1)\varphi} \left\{ \sum_{j=0}^{p-2} \sigma_j \left[\frac{1}{(n+j+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+j+2)^\alpha} \right] + \frac{\sigma_{p-1}}{(n+p)^\alpha} \right\},$$

$$\sigma_j = 1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots + e^{ji\varphi} = \frac{1 - e^{i(j+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = e^{ji\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin \frac{j+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Так как $\left|\sigma_j\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, то

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{e^{ik\varphi}}{k^\alpha} \right| < \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} \left\{ \sum_{j=0}^{p-2} \left[\frac{1}{(n+j+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+j+2)^\alpha} \right] + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^\alpha \sin\frac{\varphi}{2}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 15 (Абеля). *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ *сходится в точке* $z_1 \ne z_0$, *то он абсолютно сходится в круге* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Доказательство 10. *Так как* z_1 *не лежит во внешности круга сходимости, то она лежит внутри него или на его границе. В обоих случаях круг* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ *содержится в круге сходимости, а значит ряд в нем абсолютно сходится? что и требовалось доказать.*

Теорема 16 (о почленном дифференцировании степенных рядов). *В круге сходимости* $|z-z_0| < R$ $(R > 0)$ *степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *его сумма* $f(z)$ *является аналитической функцией, причем производная* $f'(z)$ *может быть получена путем почленного дифференцирования* (5.1), *т.е.*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}.$$

Следует отметить, что

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)c_n(z-z_0)^{n-p}, \tag{5.2}$$

откуда

$$c_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}.$$

5.2. Ряд Тейлора

Теорема 17 (о разложении функции в ряд Тейлора). *Если функция $f(z)$ — аналитическая в области D, $z_0 \in D$, то ее можно представить в любом круге $U = \{z: \ |z - z_0| < R\} \subset \ D$ в виде суммы сходящегося степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n, \tag{5.3}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\left(\xi - z_0\right)^{n+1}} \tag{5.4}$$

$$\left(\gamma_r = \{\xi: \ |\xi - z_0| = r < R\}\right).$$

Доказательство 11. *Пусть $z \in U$ — произвольная точка; выберем число r так, чтобы $|z - z_0| < r < R$, и обозначим $\gamma_r = \{\xi: \ |\xi - z_0| = r\}$.*

По интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{\left(\xi - z_0\right)^{n+1}},$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\left(\xi - z_0\right)^{n+1}} (z - z_0)^n. \tag{5.5}$$

Так как $f(\xi)$ непрерывна на γ_r, то ряд (5.5) сходится равномерно по ξ на γ_r, а значит (5.5) можно почленно проинтегрировать по γ_r:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n\,,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0,\, 1,\, 2\, \ldots).$$

Теорема доказана.

Ряд (5.3), коэффициенты которого определены формулами (5.4), называется *рядом Тейлора функции $f(z)$ с центром в точке z_0.*

Теорема 18 (о единственности разложения в степенной ряд)**.** *Если функция $f(z)$ в круге $\{z:\ |z - z_0| < R\}$ представима как сумма степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n,$$

то коэффициенты этого ряда однозначно определяются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство 12. *Следует из формулы* (5.2).

Как правило, прямое вычисление коэффициентов ряда Тейлора через производные высших порядков затруднительно, поэтому прибегают к различным искусственным приемам. Важную роль в этих вопросах играет теорема единственности разложения функции в степенной ряд.

Будем использовать следующие *основные разложения*:

1. $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < +\infty);$

2. $\sin z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|z| < +\infty);$

3. $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty);$

4. $\operatorname{sh} z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|z| < +\infty);$

5. $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty);$

6. $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \quad (|z| < 1);$

7. $(1+z)^a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_a^n z^n \quad (|z| < 1),$

$$C_a^n = \begin{cases} \dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}, \ n = 1, 2, \ldots, \\ 1, \ n = 0; \end{cases}$$

8. $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$

Пример 29. *Разложить указанные функции в ряд Тейлора в окрестности точки* z_0:

1. $e^z \cos z, \ z_0 = 0;$

2. $\cos z, \ z_0 = \dfrac{\pi}{4};$

3. $\dfrac{1}{z^2+1}, \ z_0 = 0;$

4. $\dfrac{1}{(1-z)^2}, \ z_0 = 0;$

5. $\dfrac{z}{1-z+z^2}, \ z_0 = 0;$

6. $\dfrac{z-1}{2z^2+5z+2}, \ z_0 = -1.$

Решение. 1. По формуле Эйлера $\cos z = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$, поэтому

$$e^z \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{z(1+i)+e^{z(1-i)}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{n!} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} e^{i\pi n/4} + 2^{n/2} e^{-i\pi n/4}}{2n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos\frac{\pi n}{4}\, z^n.$$

Разложение сходится во всей комплексной плоскости ($R = \ \infty$).

2. Пользуясь тригонометрическими формулами, получаем

$$\cos z = \cos\left(\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Учитывая основные разложения, можем записать

$$\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Окончательно имеем

$$\cos z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^n\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right).$$

Разложение сходится во всей комплексной плоскости ($R=\infty$).

3. Для $|z|<1$ имеем:

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

4. Из теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов и разложения 8 для $|z|<1$ имеем:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}.$$

5. Записав данную функцию в виде

$$\frac{z}{1-z+z^2}=\frac{z(z+1)}{(z+1)\left(z^2-z+1\right)}=\frac{z(z+1)}{1+z^3}$$

и воспользовавшись разложением 8, для $|z|<1$ имеем

$$\frac{z(z+1)}{1+z^3}=\left(z^2+z\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n}=$$

$$=z+z^2-z^4-z^5+z^7+z^8-z^{10}-z^{11}+\ldots+(-1)^n z^{3n+1}+(-1)^n z^{3n+2}+\ldots$$

6. Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, разложим функцию на простейшие дроби:

$$\frac{z-1}{2z^2+5z+2}=\frac{z-1}{(z+2)(2z+1)}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{2z+1}.$$

Применим разложение 8 к каждой из полученных дробей:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{1-(-(z+1))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n, \quad |z+1| < 1,$$

$$\frac{1}{2z+1} = \frac{1}{2(z+1)-1} = -\frac{1}{1-2(z+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(z+1)^n, \quad |z+1| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда для всех точек круга $|z+1| < \frac{1}{2}$

$$\frac{z-1}{2z^2+5z+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n + (-1)^n\right)(z+1)^n.$$

Пример 30. *Найти первые три отличные от нуля члена разложения в ряд Тейлора по степеням z функции*

$$f(z) = \frac{z}{\ln(1+z)}.$$

Решение. Пусть искомое разложение имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

Тогда

$$z = \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots\right) \ln(1+z).$$

Так как ряды в круге сходимости сходятся абсолютно, то перестановки членов законны. Поэтому

$$z = \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots\right)\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\right) =$$

$$= c_0 z + \left(c_1 - \frac{c_0}{2}\right) z^2 + \left(c_2 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{3}\right) z^3 + \ldots$$

В силу теоремы о единственности разложения функции в степенной ряд справедливы равенства:

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_1 - \frac{c_0}{2} = 0, \\ c_2 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{3} = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1, \\ c_1 = \frac{1}{2}, \\ c_2 = -\frac{1}{12}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{z}{\ln(1+z)} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \ldots$$

5.3. Ряд Лорана

Теорема 19 (о разложении функции в ряд Лорана). *Любую функцию $f(z)$, аналитическую в кольце*

$$V = \{z: \ r < |z - z_0| < R\}, \ \ 0 \le r < R \le \infty,$$

можно в этом кольце представить как сумму сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{5.6}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \ \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{5.7}$$

где $r < \rho < R$.

Доказательство 13. *Фиксируем точку $z \in V$ и построим кольцо $V' = \{\xi: \ r' < |\xi - z_0| < R'\}$ такое, что $z \in V' \subset V$ По интегральной формуле Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V'} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma'} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)},$$

где $\Gamma' = \{\xi: \ |\xi - z_0| = R'\}$, $\gamma' = \{\xi: \ |\xi - z_0| = r'\}$ — окружности, ориентированные против часовой стрелки. Так как $\forall \xi \in \Gamma'$ выполняется неравенство

$$\frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} < 1,$$

и

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma'} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma'} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В тоже время

$$\forall \xi \in \gamma' \quad \frac{|\xi - z_0|}{|z - z_0|} < 1,$$

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n},$$

поэтому

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-z_0)^n},$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'} f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}\,d\xi \qquad (n=1,\,2,\,3,\ldots).$$

Заменяя в последней формуле n на $-n$, получим

$$d_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'} f(\xi)(\xi-z_0)^{-n-1}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi = c_n \quad (n=-1,\,-2,\,-3,\ldots).$$

Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

где ряд определяется как объединение двух рядов (по положительным и неположительным степеням), а окружности Γ' и γ' можно заменить любой окружностью $|\xi - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$. Теорема доказана.

Ряд (5.6), коэффициенты которого определяются по формулам (5.7), называется *рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце V.*

Выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{5.8}$$

называется *правильной частью ряда Лорана*, выражение

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \ldots \tag{5.9}$$

— *главной частью ряда Лорана.*

Ряд (5.7) называют *сходящимся*, если сходятся оба ряда (5.8) и (5.9), при этом его суммой называют сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty} + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}$.

Замечание 4. *Если $z_0 = \infty$, то рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки называется ряд*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

при этом правильной его частью называется выражение

$$f_1 = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots,$$

а главной —

$$f_2 = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$$

По формуле Коши–Адамара

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad \frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

Теорема 20 (о единственности разложения в ряд Лорана)**.** *Всякий сходящийся ряд по отрицательным и положительным степеням $z - z_0$ является рядом Лорана своей суммы, т.е. если функция $f(z)$ в кольце V представима рядом вида (5.6), то коэффициенты этого ряда определяются по формулам (5.7).*

Приемы разложения функций в ряды Тейлора и Лорана имеют много общего.

Пример 31. *Найти всевозможные разложения функции*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

в ряд Лорана по степеням z.

Решение. Функция

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

является однозначной и аналитической в областях $V_1 = \{z: \ |z| < 1\}$, $V_2 = \{z: \ 1 < |z| < 2\}$, $V_3 = \{z: \ |z| > 2\}$. Найдем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в этих областях. Используя метод неопределенных коэффициентов, представим функцию $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}. \tag{5.10}$$

Если $|z| < 1$, то

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{5.11}$$

если же $|z| > 1$, то

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n. \qquad (5.12)$$

Аналогично в круге $|z| < 2$ имеем разложение

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \qquad (5.13)$$

если же $|z| > 2$, то

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^{n+1}}. \qquad (5.14)$$

В области $V_1 = \{z: \ |z| < 1\}$ в силу формул (5.10), (5.11), (5.13) функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

Данный ряд не содержит отрицательных степеней z.

В области $V_2 = \{z: \ 1 < |z| < 2\}$ разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана (формулы (5.10), (5.12), (5.13)) имеет следующий вид:

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Этот ряд содержит как отрицательные, так и положительные степени z.

В области $V_3 = \{z: \ |z| > 2\}$ функция $f(z)$ представляется рядом Лорана, содержащим только отрицательные степени z (см. формулы (5.10), (5.12), (5.14))

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)z^n.$$

Пример 32. *Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0:*

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z-3}$, $z_0 = 1$;

2. $f(z) = \cos\dfrac{z}{z+1}$, $z_0 = -1$.

Решение. 1. Используя метод неопределенных коэффициентов, разложим функцию $f(z)$ на сумму простых дробей:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z-3} = \frac{1}{(z-1)(z+3)} = \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{4(z+3)} = f_1(z) - f_2(z).$$

Функция $f_2(z)$ аналитическая в круге $|z-1| < 4$, поэтому в окрестности $z_0 = 1$ ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$f_2(z) = \frac{1}{4(z+3)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{4}\right)^n.$$

Функция $f_1(z)$ аналитическая в кольце $|z-1| > 0$ и уже записана рядом Лорана по степеням $(z-1)$. Окончательно получаем:

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z) = \frac{1}{4(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{4^{n+2}} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{4^{n+2}},$$

где $0 < |z-1| < 4$.

2. Так как $\dfrac{z}{z+1} = 1 - \dfrac{1}{z+1}$, то

$$\cos\left(\frac{z}{z+1}\right) = \cos\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \cos 1 \cos\left(\frac{1}{z+1}\right) + \sin 1 \sin\left(\frac{1}{z+1}\right).$$

Воспользуемся основными разложениями 2 и 3:

$$\cos\left(\frac{z}{z+1}\right) = \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z+1)^{2n}} + \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+1)^{2n+1}},$$

где $|z+1| > 0$.

Пример 33. *Разложить функцию* $\ln \dfrac{z+1}{z-1}$ *в ряд Лорана в кольце*

$$V = \{z: \ 1 < |z| < \infty\}.$$

Решение.

$$F(z) = \left(\ln \frac{z+1}{z-1}\right)' = \frac{-2}{z^2-1} = \frac{-2}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = -\frac{2}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}}.$$

Этот ряд равномерно сходится на любой гладкой кривой, соединяющей точку z с ∞. Интегрируя почленно, находим

$$\ln \frac{z+1}{z-1} = \int_{\infty}^{z} F(t)dt = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\infty}^{z} \frac{dt}{t^{2n}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)z^{2n-1}}.$$

Глава 6

Изолированные особые точки однозначного характера. Вычет, вычисление вычетов

6.1. Изолированные особые точки однозначного характера

Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой однозначного характера* функции $f(z)$, если существует такая проколотая окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична.

В зависимости от поведения функции $f(z)$ при приближении к такой точке различают три типа особых точек.

Изолированная особая точка однозначного характера z_0 функции $f(z)$ называется:

- *устранимой точкой*, если существует конечный предел
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A;$$
- *полюсом*, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
- *существенной особой точкой*, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Изолированные особые точки могут быть классифицированы по виду лорановского разложения функции в проколотой окрестности этой точки.

Теорема 21 (критерий устранимой точки). *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана для этой функции в проколотой окрестности точки z_0 является тождественным нулем, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Теорема 22 (критерий полюса). *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения этой функции в проколотой окрестности точки z_0 имеет конечное число отличных от нуля членов, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Номер N старшего члена главной части ряда Лорана функции $f(z)$ в проколотой окрестности полюса называют *порядком полюса.* Полюс первого порядка называют *простым полюсом.* Порядок полюса функции $f(z)$ равен кратности нуля функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ в этой точке.

Теорема 23 (критерий существенно особой точки)**.** *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является существенно особой тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана для этой функции в проколотой окрестности точки z_0 содержит бесконечно много отличных от 0 членов, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Эти критерии справедливы и для случая $z_0 = \infty$ с учетом определения ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Пример 34. *Найти особые точки функций, выяснить их характер*:

1. $f(z) = \dfrac{z}{e^z + 1}$; *2.* $f(z) = \dfrac{z^5}{(1-z)^3}$; *3.* $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3}$;

4. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1} \cos \dfrac{\pi z}{z + 1}$; *5.* $f(z) = \dfrac{z^3}{\sin^2 \frac{1}{z+1}}$.

Решение. 1. Все конечные особые точки $z = z_0$ находятся из уравнения

$$e^{z_0} + 1 = 0.$$

Таким образом, $z_0 = (2k+1)\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$. Так как

$$\lim_{z \to \pi i} f(z) = \infty$$

и

$$\lim_{z \to \pi i} (z - \pi i) f(z) = \lim_{z \to \pi i} \frac{z(z - \pi i)}{-e^{z - \pi i} + 1} = -\pi i,$$

то $z_0 = \pi i$ — простой полюс. В силу $2\pi i$ периодичности функции e^z то же верно для остальных точек $(2k+1)\pi i$.

Точка $z_0 = \infty$ не является изолированной особой точкой: в любой ее окрестности есть полюса вида $(2k+1)\pi i$.

2. Так как

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \infty$$

и

$$\lim_{z \to 1} (z - 1)^3 f(z) = \lim_{z \to 1} z^5 = -1,$$

то $z_0 = 1$ — полюс 3-го порядка.

Точка $z_0 = \infty$ является полюсом 2-го порядка, так как

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

и

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^3}{(1-z)^3} = -1.$$

3. Из уравнения $e^{z_0} - 1 = 0$ находим конечные особые точки функции $f(z)$:

$$z_0 = 2k\pi i \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Так как при $z \to 0$ имеем

$$1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2}, \ \ (e^z - 1)^3 \sim z^3, \ \text{т.е. } f(z) \sim \frac{1}{2z},$$

то $z = 0$ — простой полюс функции $f(z)$.

Точки $z_k = 2k\pi i \ \ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются нулями третьего порядка функции $(e^z - 1)^3$, при этом функция $(1 - \cos z)$ в этих точках не обращается в 0, значит, для $f(z)$ точки $z_k = 2k\pi i \ \ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — полюсы третьего порядка.

Точка $z_0 = \infty$ не является изолированной особой точкой: в любой ее окрестности есть полюса вида $2k\pi i$.

4. Очевидно, что конечные особые точки — это ± 1. Так как

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{z^2 - 1} \cos\frac{\pi z}{z+1} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{\cos\dfrac{\pi z}{z+1}}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \left(-\sin\frac{\pi z}{z+1} \cdot \frac{\pi}{(z+1)^2} \right) = -\frac{\pi}{8},$$

то $z_0 = 1$ — устранимая особая точка.

Точка $z_0 = -1$ — существенно особая, так как $\lim\limits_{z\to -1} f(z)$ не существует. Действительно, положим

$$z_n = -1 + \frac{2}{2n+1}, \ \ z_n^* = -1 - \frac{1}{2n-1} \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{-8n} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \pi n\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n^*) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2}{4n-1} \cos(2\pi n) = +\infty.$$

Наконец, так как

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0,$$

то $z = \infty$ — устранимая особая точка.

5. Для функции

$$f(z) = \frac{z^3}{\sin^2 \dfrac{1}{z+1}}$$

точки $z_k = -1 + \dfrac{1}{k\pi}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются полюсами второго порядка, $z = -1$ не является изолированной особой точкой (является предельной точкой или точкой накопления полюсов), а точка $z = \infty$ — полюс пятого порядка, так как при $z \to \infty$

$$\sin \frac{1}{z+1} \sim \frac{1}{z}, \quad f(z) \sim z^5.$$

Других особых точек у функции $f(z)$ нет.

Поведение функции в окрестности существенно особой точки характеризует следующая

Теорема 24 (Сохоцкого – Казорати – Вейерштрасса)**.** *Если точка z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого числа $A \in \overline{\mathbb{C}}$ можно найти последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \to z_0$ такую, что*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

Доказательство 14. *Пусть $A = \infty$. Так как функция $f(z)$ не может быть ограниченной в проколотой окрестности $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$, то в этой окрестности найдется точка z_1 такая, что $|f(z_1)| > 1$. Аналогично, в окрестности $\{z : 0 < |z - z_0| < \frac{|z_1 - z_0|}{2}\}$ найдется точка z_2 такая, что $|f(z_2)| > 2$, в окрестности $\{z : 0 < |z - z_0| < \frac{|z_1 - z_0|}{n}\}$ найдется точка z_n такая, что $|f(z_n)| > n$. Очевидно, что при $n \to \infty$ последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \to z_0$, и*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty.$$

Пусть $A \neq \infty$. Либо точки, в которых $f(z) = A$ (A-точки), имеют z_0 своей предельной точкой, и тогда из них можно выбрать последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \to z_0$, на которой $f(z_n) = A$; либо существует проколотая окрестность $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$, в которой $f(z) \neq A$. В этой окрестности определена аналитическая функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A},$$

для которой z_0 также является существенно особой точкой (это следует из того, что $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$, и если бы $\varphi(z)$ при $z \to z_0$ стремилась к конечному или бесконечному пределу, то $f(z)$ — также). По до-

казанному в первой части доказательства существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \to z_0$, по которой $\varphi(z_n) \to \infty$, но по этой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(z_n)} = A.$$

Теорема доказана.

6.2. Вычет функции

При изучении аналитических функций наиболее интересными являются точки, в которых функции перестают быть аналитическими – их особые точки, так как именно в них и главных частях лорановских разложений в их окрестностях содержится основная информация об аналитических функциях. Если трактовать аналитическую функцию как комплексный потенциал векторного поля (например, поля скоростей течения жидкости), то особые точки будут интерпретироваться как источники, стоки, вихри и другие элементы, определяющие это поле.

6.2.1. Понятие вычета в конечной точке

Пусть $z_0 \neq \infty$ — изолированная особая точка однозначной и аналитической в проколотой окрестности точки z_0 функции $f(z)$, Γ — замкнутый жордановый кусочно-гладкий контур, содержащий внутри себя точку z_0 и лежащий целиком в окрестности z_0.

Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется интеграл от этой функции по контуру Γ, деленный на $2\pi i$:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)dz. \tag{6.1}$$

Теорема 25 (Коши о вычетах). *Интеграл от функции $f(z)$, взятый по замкнутому контуру Γ, содержащемуся в области D, где функция является однозначной и аналитической, за исключением изолированных особых точек однозначного характера, и не проходящему через особые точки, равен произведению суммы вычетов функции относительно всех особых точек $z_1, \ldots, z_n$, заключенных внутри Γ, на $2\pi i$:*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство 15. *Пусть функция $f(z)$ – однозначная и аналитическая в области D, за исключением изолированных особых точек однозначного характера; Γ – замкнутый контур, лежащий в D; его внутренность может содержать лишь конечное число особых точек (в противном случае особые точки имели бы, по крайней мере, одну предельную точку, являющуюся также особой, но неизолированной).*

Опишем около каждой из изолированных особых точек $z_1, \dots, z_n$ функции $f(z)$, расположенных внутри Γ, окружность γ_k: $|z - z_0| = \rho_k$ столь малого радиуса ρ_k, чтобы эта окружность лежала внутри Γ, и чтобы каждая из них лежала во внешности остальных. Тогда по интегральной теореме Коши для составного контура

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Учитывая, что по определению

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz,$$

получим утверждение теоремы.

Замечание 5. *Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке однозначного характера $z_k \in \mathbb{C}$ равен коэффициенту при первой отрицательной степени $(z - z_k)^{-1}$ в ее лорановском разложении в окрестности z_k:*

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = c_{-1}.$$

Действительно, в проколотой окрестности точки z_k функция $f(z)$ представима рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_k)^n.$$

Интегрируя почленно по окружности γ_k (что возможно в силу равномерной сходимости ряда Лорана на γ_k), получим:

$$\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{\gamma_k} (z - z_k)^n dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Вычисление вычетов в конечных точках

1. Если z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

2. Если z_0 — полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ (z - z_0)^n f(z) \right\}^{(n-1)}. \tag{6.2}$$

В частности, если z_0 — простой полюс, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, f(z). \tag{6.3}$$

Действительно, в проколотой окрестности точки z_0 имеет место разложение

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^k.$$

Умножим обе части равенства на $(z-z_0)^n$ и продифференцируем $n-1$ раз:

$$((z-z_0)^n f(z))^{(n-1)} = (n-1)!c_{-1} + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2c_0(z-z_0) + \ldots.$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$, получим формулу (6.2) (при $n=1$ формулу (6.3)).

Приведем также две модификации этих формул.

Если в окрестности точки z_0

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические функции в точке z_0, причем

$$\varphi(z_0) \neq 0,\ \psi(z_0) = 0,\ \psi'(z_0) \neq 0,$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{6.4}$$

Если

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n},$$

где функция $\varphi(z)$ — аналитическая в точке z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\, \varphi^{(n-1)}(z_0). \tag{6.5}$$

3. Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то, раскладывая $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$, находят c_{-1} и применяют формулу

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

6.2.2. Вычет в бесконечно удаленной точке

Если $z_0 = \infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, то *вычетом в бесконечности* называется величина

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\Gamma} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)dz; \qquad (6.6)$$

здесь $-\Gamma$ — замкнутый жордановый кусочно-гладкий контур, содержащий внутри себя начало координат и полностью лежащий в окрестности бесконечно удаленной точки $\{z: \ R < |z| < \infty\}$, где $f(z)$ — аналитическая, причем $-\Gamma$ означает, что обход контура Γ осуществляется в отрицательном направлении.

Из определения вычета в бесконечности следует, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1},$$

где c_{-1} — коэффициент при z^{-1} в лорановском разложении функции в окрестности бесконечно удаленной точки.

Теорема 26 (основная теорема о вычетах). *Если $z_1, \ldots, z_n$ — конечные изолированные особые точки функции $f(z)$, аналитической, за исключением этих точек, во всей комплексной плоскости, то*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Доказательство 16. *Построим окружность $\gamma_R = \{z : |z| = R\}$ столь большого радиуса R, что она содержит внутри себя все конечные особые точки z_k; пусть γ_R ориентирована против часовой стрелки. По теореме Коши о вычетах*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),$$

с другой стороны, учитывая направление обхода окружности,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

Значит справедливо утверждение теоремы.

Вычисление вычетов в бесконечности

1. Если $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(f(\infty) - f(z)\right), \qquad (6.7)$$

где $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Если точка $z_0 = \infty$ — нуль n-го порядка для функции $f(z)$, и при $z \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$f(z) \sim \frac{A}{z^n},$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} -A, \ n = 1, \\ 0, \ n \geq 2. \end{cases} \tag{6.8}$$

2. Если $z_0 = \infty$ — полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z\to\infty} z^{n+2} f^{(n+1)}(z). \tag{6.9}$$

3. Если $z_0 = \infty$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то применяется формула

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Пример 35. *Вычислить вычет функций $f(z)$ в указанных точках:*

1. $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$, $z_0 = 0$;

2. $f(z) = \dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$, $z_0 = \infty$;

3. $f(z) = \dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$, *во всех изолированных особых точках функции*;

4. $f(z) = \sin z \sin\dfrac{1}{z}$, *во всех изолированных особых точках функции.*

Решение. 1. Для данной функции точка $z_0 = 0$ — полюс 2-го порядка. Применим формулу (6.2):

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \left(z^2 \operatorname{ctg}^2 z\right)' = \lim_{z\to 0} \left(2z \operatorname{ctg}^2 z - \frac{2z^2 \operatorname{ctg} z}{\sin^2 z}\right) =$$

$$= 2\lim_{z\to 0} z \operatorname{ctg} z \left(\frac{\cos z \sin z - z}{\sin^2 z}\right) = 2\lim_{z\to 0} \frac{(\cos z \sin z - z)'}{\left(\sin^2 z\right)'} =$$

$$= 2\lim_{z\to 0} \frac{-\sin^2 z + \left(\cos^2 z - 1\right)}{2\sin z \cos z} = -2\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\cos z} = 0.$$

2. Так как

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z(z-1)} = 0,$$

то $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка. По формуле (6.7) найдем

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(0 - \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}\right) = -\lim_{z\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}}\,\frac{1}{z-1} = 0.$$

3. Особыми точками функции являются $z_1 = -1,\ z_2 = 0,\ z_3 = \infty$. Точка $z_1 = -1$ — простой полюс, поэтому по формуле (6.3) имеем:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to-1}(z+1)\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{z}}{z+1} = \lim_{z\to-1}\cos^2\frac{\pi}{z} = 1.$$

Так как при $z\to\infty$

$$\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{z}}{z+1} \sim \frac{1}{z},$$

то $z_3 = \infty$ — устранимая особая точка (нуль первого порядка), и по формуле (6.8) получаем

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1.$$

Точка $z_2 = 0$ — существенно особая. По основной теореме о вычетах:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\left(\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right) = 0.$$

4. Функция $f(z) = \sin z \sin\dfrac{1}{z}$ имеет две особые точки — $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$, обе существенно особые. Разложения в ряд Лорана данной функции для этих точек совпадают и содержат в силу четности исходной функции лишь четные степени z, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

6.3. Вычисление интегралов с помощью вычетов

При вычислении интегралов по замкнутому контуру от функции комплексной переменной применяется теорема Коши о вычетах (теорема 25).

Пример 36. *Вычислить интегралы*:

1. $\displaystyle\int_L \frac{z^2+1}{z^2(z-2)}\,dz,\ L = \{z:\ |z+1| + |z-1| = 6\};$

2. $\displaystyle\int_L \frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z}\,dz,\ L = \{z:\ |z-1-i| = 2\};$

3. $\int\limits_L (2z-1)\cos\frac{z}{z-1}\,dz,\ L=\{z:\ |z|=2\}.$

Решение. 1. Особыми точками подынтегральной функции являются $z_1 = 0$ — полюс 2-го порядка, $z_2 = 2$ — простой полюс, $z_3 = \infty$ — устранимая особая точка. Точки $z_1,\ z_2 \in D$, $z_3 \notin D$ (D — область, ограниченная контуром L). Воспользовавшись формулой (6.2), подсчитаем вычеты в точках $z_1,\ z_2$:

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{z^2+1}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2+1}{z-2}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{z^2-4z-1}{(z-2)^2} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{z=2}\frac{z^2+1}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{z^2+1}{z^2} = \frac{5}{4}.$$

Тогда по теореме Коши о вычетах будем иметь

$$\int\limits_L \frac{z^2+1}{z^2(z-2)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right) = 2\pi i.$$

2. Согласно теореме Коши о вычетах и основной теореме о вычетах

$$\int\limits_L \frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z} + \operatorname*{res}_{z=0}\frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z}\right) =$$

$$= -2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z} = -2\pi i\lim_{z\to\infty}\frac{-z}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z} = \frac{2\pi i}{i} = 2\pi.$$

3. По теореме Коши о вычетах

$$I = \int\limits_L (2z-1)\cos\frac{z}{z-1}\,dz = 2\pi i\operatorname*{res}_{z=1}(2z-1)\cos\frac{z}{z-1},$$

так как подынтегральная функция аналитична в круге $|z|<2$, кроме точки $z=1$, которая является существенно особой. Имеем

$$\cos\frac{z}{z-1} = \cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = \cos 1\cdot\cos\frac{1}{z-1} - \sin 1\cdot\sin\frac{1}{z-1} =$$

$$= \cos 1\left(1-\frac{1}{2(z-1)^2}+\ldots\right) - \sin 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-3)^3}+\ldots\right),$$

$$2z-1 = 2(z-1)+1,$$

откуда находим коэффициент c_{-1} при $(z-1)^{-1}$ ряда Лорана для подынтегральной функции:

$$c_{-1} = -\left(\cos 1+\sin 1\right).$$

Следовательно, $I = -2\pi i\,(\cos 1 + \sin 1)$.

Наиболее популярный в математическом анализе путь вычисления определенных интегралов через формулу Ньютона—Лейбница может оказаться неэффективным, особенно если первообразная подынтегральной функции не является элементарной функцией. Применение теории вычетов в ряде случаев гораздо эффективней, так как позволяет избежать трудностей вычисления первообразной.

Пусть $R(u, v)$ — рациональная функция аргументов u, v, не имеющая особенностей на окружности $u^2 + v^2 = 1$. Тогда

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} R\,(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$$

заменой $z = e^{i\varphi}$ сводится к интегралу по замкнутому контуру от функции комплексной переменной, который легко вычисляется с помощью вычетов. При указанной замене

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad d\varphi = \frac{dz}{iz},$$

а когда φ меняется от $-\pi$ до π, точка z пробегает окружность $|z| = 1$ в положительном направлении, и

$$I = \int_{|z|=1} R_1(z)dz,$$

где $R_1(z) = -\dfrac{i}{z}R\left[\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right),\ \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right]$ — рациональная функция от z. По теореме Коши о вычетах

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R_1(z),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все полюсы рациональной функции $R_1(z)$, лежащие в круге $|z| < 1$.

Пример 37. *Вычислить интегралы*:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2},\ \ \rho \in \mathbb{C},\ \ |\rho| \neq 1;$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a - x)\sqrt{1 - x^2}},\ \ a > 1.$

Решение. 1. Сделав замену переменной $z = e^{i\varphi}$, получим:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2} = i \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\rho z^2 - (1+\rho^2)z + \rho}.$$

Точки $z = \rho$, $z = \frac{1}{\rho}$ — простые полюсы подынтегральной функции, причем только один лежит в круге $|z| < 1$. Если $|\rho| < 1$, то в круге $|z| < 1$ лежит полюс $z = \rho$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\rho} \frac{i}{\rho z^2 - (1+\rho^2)z + \rho} = \frac{2\pi}{1-\rho^2}.$$

Если $|\rho| > 1$, то в круге $|z| < 1$ лежит полюс $z = \dfrac{1}{\rho}$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\frac{1}{\rho}} \frac{i}{\rho z^2 - (1+\rho^2)z + \rho} = \frac{2\pi}{\rho^2 - 1}.$$

2. Заменой переменной $x = \cos\varphi$ приведем исходный интеграл к виду

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a - \cos\varphi} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a - \cos\varphi}.$$

Выполнив теперь замену переменной $z = e^{i\varphi}$, находим

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a - \cos\varphi} = -\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2az + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Теорию вычетов можно использовать при вычислении несобственных интегралов по вещественной оси, если методы действительного анализа оказываются неэффективными.

1. Если функция $f(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости, за исключением особых точек z_k, $\operatorname{Im} z_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, непрерывная в замкнутой полуплоскости, за исключением тех же точек, и

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \geq 0),$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Для нижней полуплоскости правую часть последней формулы нужно брать с минусом.

2. Если функция $f(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости, за исключением особых точек z_k, $\operatorname{Im} z_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, непрерывная в замкнутой полуплоскости, за исключением тех же точек, и

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \geq 0)\,,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{imz} \quad (m > 0).$$

Если, кроме того, функция $f(z)$ вещественна на действительной оси, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\, dx = -2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{imz} \quad (m > 0),$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\, dx = 2\pi \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{imz} \quad (m > 0).$$

Пример 38. *Вычислить интегралы*:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$; *2.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix}}{x^2+1}\, dx$; *3.* $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\, dx$.

Решение. 1. В верхней полуплоскости находится единственный полюс подынтегральной функции $z = i$ порядка n. Найдем $\operatorname*{res}_{z=i} f(z)$ по формуле для вычета в полюсе порядка n:

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \left(\left(\frac{z-i}{z^2+1}\right)^n\right)^{(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \left((z+i)^{-n}\right)^{(n-1)} = \frac{-n(n+1)\ldots(2n-2)i}{2^{2n-1}(n-1)!}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{(2n-2)!\pi}{((n-1)!)^2\, 2^{2n-2}}.$$

2. Единственная особая точка, лежащая в верхней полуплоскости, — это простой полюс $z = i$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix}}{x^2+1}\, dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{ze^{2iz}}{z^2+1} = 2\pi i \frac{ze^{2iz}}{(z^2+1)'}\bigg|_{z=i} = \frac{\pi i}{e^2}.$$

3. В верхней полуплоскости находится единственный полюс подынтегральной функции $z = 3i$, поэтому

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx = -\pi\,\mathrm{Im}\,\underset{z=3i}{\mathrm{res}}\,\frac{e^{iz}}{z^2+9} = -\pi\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{-3}}{6i} = \frac{\pi}{6e^3}.$$

Глава 7

Преобразование Лапласа

Функция-оригинал, изображение. Аналитичность изображения
Функцией-оригиналом называют любую комплекснозначную функцию $f: R \to C$ действительного аргумента t, удовлетворяющую условиям:

1) $f(t)$ непрерывна вместе со своими производными, кроме отдельных точек разрыва первого рода, причем на каждом конечном интервале таких разрывов конечное число;

2) $f(t) = 0$ для $t < 0$;

3) существуют константы M и s такие, что $|f(t)| < Me^{st}$, при этом число s называют показателем роста функции $f(t)$.

В приложениях t, как правило, это время, $f(t)$ — функция, описывающая физический процесс. С этой точки зрения, безразлично, как протекал этот процесс до момента наблюдения (при $t < 0$), поэтому второе условие не ограничивает области приложения метода, рассматриваемого в этой главе.

Простейшей функцией-оригиналом является «единичная функция» (функция Хевисайда):

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Функции $\eta(t)\sin\omega t$, $\eta(t)\cos\omega t$, $\eta(t)e^{\omega t}$ также являются функциями-оригиналами. В дальнейшем множитель $\eta(t)$ будем опускать и всегда под функцией-оригиналом понимать функцию, домноженную на $\eta(t)$.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу будем называть функцию

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7.2}$$

Соответствие $f(t) \to F(z)$ называется *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$ в функцию $F(z)$ и обозначается $F[f]$ (используются также обозначения: $f(t) \doteq F(z)$, $F(z) \doteq f(t)$; оригинал, как правило, обозначается строчной буквой, изображение – соответствующей прописной).

Теорема 27 (об аналитичности изображения). *Если $f(t)$ – функция-оригинал с показателем роста s, то ее изображение по Лапласу $F(z)$ — аналитическая функция, определенная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > s$.*

Доказательство 17. *Так как* $z = x + iy$, *то* $|e^{-zt}| = |e^{-xt}| \cdot \left|e^{-iyt}\right| = e^{-xt}$, *поэтому*

$$\left|\int\limits_0^\infty f(t)e^{-tz}dt\right| \le \int\limits_0^\infty Me^{st}\left|e^{-tz}\right|dt = M\int\limits_0^\infty e^{t(s-x)}dt = \frac{M}{s-x}e^{t(s-x)}\Big|_0^\infty = \frac{M}{x-s}.$$

Следовательно, интеграл сходится при $x > s$, *и функция* $F(z)$ *определена в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > s$.

$$\left|\int\limits_0^\infty \left[f(t)e^{-tz}\right]'_z dt\right| = \left|\int\limits_0^\infty f(t)te^{-tz}dt\right| \le M\int\limits_0^\infty e^{st}\left|te^{-tz}\right|dt =$$

$$= M\int\limits_0^\infty te^{t(s-x)}dt = M\left[\frac{te^{t(s-x)}}{s-x}\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{e^{t(s-x)}}{s-x}dt\right] = \frac{M}{(s-x)^2},$$

т.е. $F'(z)$ *существует.*

Формула обращения преобразования Лапласа. Единственность обращения

Теорема 28 (формула обращения). *Если* $f(t)$ – *функция-оригинал с показателем роста* s, $F(z)$ – *ее изображение по Лапласу, то в точках непрерывности*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{tz}dz,$$

где $a \in \mathbb{R}$, $a > s$, *интеграл понимается в смысле Коши.*

Доказательство 18. *Рассмотрим*

$$f_b(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-ib}^{a+ib} F(z)e^{zt}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-ib}^{a+ib}\left(\int\limits_0^\infty f(\xi)e^{-z\xi}d\xi\right)e^{zt}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty f(\xi)\left(\int\limits_{a-ib}^{a+ib} e^{tz-\xi z}dz\right)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\left(\frac{f(\xi)}{t-\xi}e^{z(t-\xi)}\Big|_{z=a-ib}^{a+ib}\right)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{f(\xi)}{t-\xi}\left(e^{a(t-\xi)}e^{ib(t-\xi)} - e^{a(t-\xi)}e^{-ib(t-\xi)}\right)d\xi =$$

$$= \frac{e^{at}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{f(\xi)}{t-\xi}e^{-a\xi}\sin b(t-\xi)d\xi.$$

Полагая $u = (\xi - t)b$, получим

$$f_b(t) = \frac{e^{at}}{\pi} \int\limits_{-bt}^{\infty} f\left(\frac{u}{b} + t\right) e^{-a\left(\frac{u}{b}+t\right)} \frac{\sin u}{u} du =$$

$$= \frac{e^{at}}{\pi} \int\limits_{-bt}^{\infty} \left(f\left(\frac{u}{b} + t\right) e^{-a\left(\frac{u}{b}+t\right)} - f(t)e^{-at}\right) \frac{\sin u}{u} du + \frac{f(t)}{\pi} \int\limits_{-bt}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

Интеграл Эйлера $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi$, *в силу непрерывности функции* $f(t)e^{-at}$

$$\lim_{b\to\infty} \left(f\left(\frac{u}{b} + t\right) e^{-a\left(\frac{u}{b}+t\right)} - f(t)e^{-at}\right) = 0,$$

поэтому

$$\lim_{b\to\infty} f_b(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{zt} dz = f(t).$$

Теорема 29 (единственность обращения)**.** *Если два оригинала $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют одно и тоже изображение $F(z)$, то функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ совпадают во всех точках t, где обе функции непрерывны.*

Доказательство 19. *В точке t, где функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны, имеют место формулы*

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{tz} dz,$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{tz} dz,$$

поэтому $f_1(t) = f_2(t)$.

Таким образом, оригинал определяется своим изображением с точностью до значений в точках разрыва.

Свойства преобразования Лапласа

1) *линейность*: $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(z) + \beta G(z)$.

2) *теорема подобия*: $f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Действительно,

$$f(\alpha t) \doteq \int\limits_{0}^{\infty} f(\alpha t)e^{-zt} dt = \int\limits_{0}^{\infty} f(u)e^{-z\frac{u}{\alpha}} d\left(\frac{u}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

3) *дифференцирование оригинала*: если $f^{(n)}(t)$ является функцией-оригиналом, то

$$f^{(n)}(t) \doteq z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0); \qquad (7.3)$$

в частности, при $n = 1$

$$f'(t) \doteq zF(z) - f(0).$$

Действительно,

$$f'(t) \doteq \int\limits_0^\infty f'(t) e^{-zt} dt = f(t) e^{-zt} \Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty f(t) z e^{-zt} dt =$$

$$= -f(0) + z \int\limits_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = zF(z) - f(0),$$

т.е. при $n = 1$ формула (7.3) верна.

При $n = 2$ будем иметь:

$$f''(t) = \left(f'(t)\right)' \doteq z\left(zF(z) - f(0)\right) - f'(0) = z^2 F(z) - zf(0) - f'(0).$$

Далее, используя метод математической индукции, получим (7.3).

4) *дифференцирование изображения*:

$$F^{(n)}(z) \doteq (-t)^n f(t). \qquad (7.4)$$

В самом деле,

$$F'(z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\int\limits_0^\infty f(t) e^{-zt} dt \right) = -\int\limits_0^\infty f(t) t e^{-zt} dt \doteq -t f(t);$$

$$F''(z) = \frac{\partial}{\partial z} F'(z) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\int\limits_0^\infty f(t) t e^{-zt} dt \right) = \int\limits_0^\infty f(t) t^2 e^{-zt} dt \doteq t^2 f(t).$$

Далее методом математической индукции получим (7.4).

5) *интегрирование оригинала*: $\int\limits_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(z)}{z}$.

Очевидно, что, если $f(t)$ — функция-оригинал, то $g(t) = \int\limits_0^t f(t) dt$ — оригинал. Поэтому

$$f(t) = g'(t) \doteq zG(z) - g(0) = zG(z) = F(z), \quad \text{откуда}$$

$$\int_0^t f(t)dt \doteq G(z) = \frac{F(z)}{z}.$$

6) *интегрирование изображения*: если интеграл сходится, то

$$\int_z^\infty F(z)dz \doteq \frac{f(t)}{t}.$$

Действительно,

$$\int_z^\infty F(z)dz = \int_z^\infty \left(\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt \right) dz = \int_0^\infty f(t) \left(\int_z^\infty e^{-zt}dz \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{e^{-zt}}{t} \Big|_z^\infty \right) dt = \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-zt}}{t} dt \doteq \frac{f(t)}{t}.$$

7) *теорема запаздывания*: для $\lambda > 0$

$$f(t-\lambda) \doteq e^{-z\lambda}F(z).$$

Действительно,

$$f(t-\lambda) \doteq \int_0^\infty f(t-\lambda)e^{-zt}dt = \int_{-\lambda}^\infty f(u)e^{-z(u+\lambda)}du =$$

$(f(u) = 0$ при $u < 0)$

$$= \int_0^\infty f(u)e^{-zu}e^{-z\lambda}du = e^{-z\lambda} \int_0^\infty f(u)e^{-zu}du = e^{-z\lambda}F(z).$$

8) *теорема смещения*: для $\lambda \in \mathbb{C}$

$$F(z-\lambda) \doteq e^{\lambda t}f(t).$$

В самом деле,

$$e^{\lambda t}f(t) \doteq \int_0^\infty f(t)e^{\lambda t}e^{-zt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(z-\lambda)t}dt = F(z-\lambda).$$

Преобразования Лапласа применяются при решении дифференциальных уравнений, в расчетах электрических контуров и других областях.

Примеры преобразований Лапласа

1) $1 \doteq \int\limits_0^\infty 1 \cdot e^{-zt} dt = -\frac{e^{-zt}}{z}\Big|_0^\infty = \frac{1}{z}.$

2) $e^{\lambda t} \doteq \int\limits_0^\infty e^{\lambda t} e^{-zt} dt = \frac{1}{\lambda - z} e^{t(\lambda - z)}\Big|_{t=0}^\infty = \frac{1}{z-\lambda} \quad (\text{при } \lambda < \operatorname{Re} z)\,.$

3) $\sin \lambda t = \frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i} \doteq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z - i\lambda} - \frac{1}{z + i\lambda}\right) = \frac{\lambda}{z^2 + \lambda^2}.$

4) $\cos \lambda t = \frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z - i\lambda} + \frac{1}{z + i\lambda}\right) = \frac{z}{z^2 + \lambda^2}.$

5) $\operatorname{sh} \lambda t = \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z - \lambda} - \frac{1}{z + \lambda}\right) = \frac{\lambda}{z^2 - \lambda^2}.$

6) $\operatorname{ch} \lambda t = \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{1}{z + \lambda}\right) = \frac{z}{z^2 - \lambda^2}.$

7) $t^n = (-1)^n t^n \frac{1}{(-1)^n} \doteq F^{(n)}\left[\frac{1}{(-1)^n}\right] = \frac{1}{(-1)^n}\left(\frac{1}{z}\right)^{(n)} = \frac{n!}{z^{n+1}}.$

8) $t^n e^{\lambda t} = (-1)^n t^n \frac{e^{\lambda t}}{(-1)^n} \doteq F^{(n)}\left[\frac{e^{\lambda t}}{(-1)^n}\right] = \frac{1}{(-1)^n}\left(\frac{1}{z-\lambda}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}.$

9) $t \sin \lambda t = -t \frac{\sin \lambda t}{-1} \doteq F'\left[-\sin \lambda t\right] = \left(-\frac{\lambda}{z^2 + \lambda^2}\right)' = \frac{2\lambda z}{(z^2 + \lambda^2)^2}.$

10) $t \cos \lambda t = -t \frac{\cos \lambda t}{-1} \doteq F'\left[-\cos \lambda t\right] = \left(-\frac{z}{z^2 + \lambda^2}\right)' = \frac{z^2 - \lambda^2}{(z^2 + \lambda^2)^2}.$

11) $\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \doteq \int\limits_z^\infty F\left[e^{bt} - e^{at}\right] dz = \int\limits_z^\infty \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) dz = \ln \frac{z-b}{z-a}\Big|_{z=z}^\infty = \ln \frac{z-a}{z-b}.$

12) $\frac{\sin t}{t} \doteq \int\limits_z^\infty F\left[\sin t\right] dz = \int\limits_z^\infty \frac{1}{z^2+1} dz = \operatorname{arctg} z\Big|_{z=z}^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z = \operatorname{arcctg} z.$

Список литературы

1. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. 5-е изд. М. : Мир, 2006.

2. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. 12-е изд. М. : Наука, 1977.

3. *Свешников А. Г.*, *Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. 6-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010.

4. *Сидоров Ю. В.*, *Федорюк М. Ф.*, *Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. 3-е изд. М. : Наука, 1989.

5. *Волковыский Л. И.*, *Лунц Г. Л.*, *Араманович И. Г.* Сборник задач по функций комплексного переменного. 4-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.

6. *Евграфов М. А.*, *Бежанов К. А.*, *Сидоров Ю. В.*, *Федорюк М. Ф.*, *Шабунин М. И.* Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. М. А. Евграфова. 2-е изд. М. : Наука, 1972.