100-летию со дня основания Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского посвящается

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9

Глава 1
Основы теории динамических систем 17

1.1. Введение 17
1.2. Динамическая система и ее математическая модель 18
1.2.1. Классификация динамических систем 18
1.2.2. Предельные множества динамической системы 20
1.2.3. Автоколебательные системы 22
1.2.4. Фазовые портреты динамических систем 24
1.3. Устойчивость фазовых траекторий 29
1.3.1. Линейный анализ устойчивости 30
1.3.2. Устойчивость состояний равновесия 33
1.3.3. Устойчивость периодических решений 34
1.3.4. Устойчивость квазипериодических и хаотических решений . . 36
1.3.5. Устойчивость фазовых траекторий в системах с дискретным временем 37
1.4. Бифуркации динамических систем, катастрофы 39
1.4.1. Бифуркации состояний равновесия 41
1.4.2. Бифуркации предельных циклов 45
1.4.3. Нелокальные бифуркации. Гомоклинические траектории и структуры 49
1.5. Аттракторы динамических систем. Детерминированный хаос 52
1.5.1. Регулярные аттракторы 54
1.5.2. Грубые гиперболические хаотические аттракторы 55
1.5.3. Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Лоренца 57
1.5.4. Негиперболические хаотические аттракторы 57
1.5.5. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы 58
1.6. Выводы 59

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Глава 2
Автоколебательные системы с одной степенью свободы: осциллятор Ван дер Поля, генератор с жестким возбуждением 62
2.1. Введение 62
2.2. Примеры автоколебательных систем, описываемых уравнением осциллятора с нелинейной диссипацией 62
2.2.1. Маятник Фроуда 62
2.2.2. Закрепленный грузик на движущейся ленте 65
2.2.3. Ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки 66
2.2.4. *RC*-генератор с мостом Вина 67
2.2.5. Колебательный контур с активным нелинейным элементом . 69
2.3. Исследование динамики осциллятора Ван дер Поля 71
2.3.1. Состояния равновесия и анализ устойчивости 72
2.3.2. Квазигармонические автоколебания. Энергетический метод Теодорчика 74
2.3.3. Квазигармонические автоколебания. Метод усреднения Ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы . 77
2.3.4. Релаксационные автоколебания 80
2.4. Исследование динамики генератора с жестким возбуждением 84
2.4.1. Типы состояний равновесия 84
2.4.2. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы генератора с жестким возбуждением 86
2.4.3. Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением 87
2.5. Выводы 90

Глава 3
Автоколебательные системы с полутора и двумя степенями свободы . 92
3.1. Введение 92
3.2. Генератор Теодорчика 93
3.3. Модификация генератора с инерционной нелинейностью. Генератор Анищенко–Астахова 99
3.3.1. Периодические режимы автоколебаний и их бифуркации . . . 100
3.3.2. Бифуркации удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума 109
3.3.3. Хаотический аттрактор и гомоклинические траектории в генераторе 113
3.4. Генератор Чуа 118
3.4.1. Состояния равновесия системы Чуа 120
3.4.2. Гомоклинические траектории и аттракторы системы Чуа . . . 122
3.5. Генераторы квазипериодических колебаний. Цепь Чуа 126

3.6. Генератор квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами. Бифуркация удвоения тора 131
3.6.1. Бифуркационная диаграмма системы 134
3.6.2. Бифуркация удвоения двумерного тора 135
3.7. Выводы 137

Глава 4
Синхронизация автоколебаний 143
4.1. Введение 143
4.2. Синхронизация периодических автоколебаний 145
4.2.1. Внешняя синхронизация генератора Ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы 146
4.2.2. Взаимная синхронизация. Бифуркационные механизмы эффектов синхронизации и гашения в диссипативно связанных генераторах Ван дер Поля 166
4.3. Синхронизация квазипериодических колебаний 178
4.3.1. Резонансный предельный цикл на двумерном торе 179
4.3.2. Воздействие внешней периодической силы на резонансный предельный цикл в системе связанных генераторов 183
4.3.3. Основные бифуркации квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла 185
4.3.4. Фазовая синхронизация системы связанных генераторов Ван дер Поля внешним гармоническим сигналом 192
4.3.5. Синхронизация двухчастотных колебаний в автогенераторе квазипериодических колебаний 200
4.4. Синхронизация хаоса 207
4.4.1. Частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний 208
4.4.2. Полная синхронизация взаимодействующих хаотических систем 221
4.4.3. Количественные характеристики степени синхронности хаотических автоколебаний 225
4.5. Выводы 229

Глава 5
Флуктуации в автоколебательных системах 238
5.1. Введение 238
5.2. Основы теории случайных процессов 241
5.2.1. Основные характеристики случайных процессов 241
5.2.2. Основы теории марковских процессов 252
5.2.3. Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) 256

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

5.3. Флуктуации в автономном квазигармоническом генераторе 258
5.3.1. Стохастические уравнения квазигармонического автогенератора 258
5.3.2. Флуктуации амплитуды автоколебаний 261
5.3.3. Случайная фаза автоколебаний 262
5.3.4. Автокорреляционная функция и спектр автоколебаний в присутствии шума 264
5.4. Методы измерения флуктуаций автогенераторов 267
5.5. Обобщение спектрально-корреляционной теории флуктуаций на случай генераторов спирального хаоса 275
5.5.1. Численное исследование детерминированных хаотических автоколебаний в режиме спирального хаоса 276
5.5.2. Влияние белого шума на хаотические автоколебания в режиме спирального аттрактора 281
5.5.3. Исследование динамики мгновенной фазы и спектральных характеристик автогенератора со спиральным аттрактором в натурном эксперименте 282
5.6. Синхронизация автоколебаний в присутствии шума 284
5.6.1. Вынужденная синхронизация зашумленных автоколебаний гармонической внешней силой 284
5.6.2. Взаимная синхронизация квазигармонических автогенераторов в присутствии шума 291
5.6.3. Синхронизация хаотических автоколебаний в присутствии шума 294
5.6.4. Синхронизация автоколебаний узкополосным шумом 295
5.7. Выводы 299

Приложения 306
П.1. Преобразование источников шума в автогенераторе 306
П.2. Получение выражения для автокорреляционной функции колебаний генератора с шумом 309

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемый читатель!

Перед Вами еще одна книга по теории колебаний, которая является неотъемлемой частью радиофизики. За период становления и развития радиофизики написано достаточно много замечательных книг по теории колебаний, которые вошли в золотой фонд отечественной науки. Возникает вопрос, а что интересного, важного и нового можно к этому добавить? По мнению авторов, сегодня это целесообразно и необходимо сделать, и мы попытаемся вас в этом убедить. Прежде чем поставить эту книгу на полку, советуем прочитать краткое предисловие, ознакомиться с оглавлением, а затем сделать выводы.

Теория колебаний является разделом фундаментальной радиофизики, изучающей физические явления общего характера, существенные для радиосвязи в широком ее понимании. Следуя терминологии С. М. Рытова, это направление радиофизики относится к «физике для радио», так как непосредственно решает одну из главных проблем радиофизики — проблему генерации электромагнитных колебаний.

Уместно отметить, что радиофизика как фундаментальная область научных знаний явилась уникальным достижением отечественной науки. Основы радиофизики в СССР были заложены трудами выдающихся советских ученых, таких как Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, А.А. Андронов, Г.С. Горелик, С.М. Рытов, В.А. Котельников, С.П. Стрелков, В. И. Калинин, А. А. Харкевич и другие. Нигде в мире не существует такой четко определенной области науки как радиофизика. Безусловно, отдельные направления радиофизических исследований, такие как, например, электротехника и теория цепей, электродинамика и электроника СВЧ, лазерная физика, нелинейная динамика и другие, существуют и развиваются. Однако указанные направления исследований в зарубежной науке до сих пор существуют независимо и не объединены единой концепцией радиофизики, как это было в СССР и остается в настоящее время в России. Отечественная радиофизическая научная

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

школа является единственной в своем роде и ее достижения за столетие существования признаны международным научным сообществом.

Вернемся к теории колебаний, а точнее — к теории автоколебаний, которая составляет главный предмет обсуждения предлагаемой Вашему вниманию книги. Термин «автоколебания» был введен в рассмотрение А. А. Андроновым применительно к колебаниям, возникающим в автономных нелинейных диссипативных системах в результате преобразования постоянной энергии источника в энергию периодических незатухающих колебаний. Характеристики процесса, такие как амплитуда, частота и форма периодических автоколебаний, определяются исключительно параметрами системы и не зависят от начальных условий.

А. А. Андронов с соавторами детально исследовал автоколебательные режимы в системах с одной степенью свободы, фазовым пространством которых является плоскость. Была установлена однозначная взаимосвязь автоколебаний в таких системах с предельным циклом Пуанкаре, который есть изолированная замкнутая фазовая траектория на плоскости. Значение этого результата во многом повлияло на дальнейшее развитие нелинейной теории колебаний.

На первом этапе формирования теории колебаний важно было убедиться в фундаментальной общности автоколебаний как явления, присущего широкому классу систем различной природы. Еще в довоенные годы появилось много работ, в которых колебательные процессы, демонстрирующие принципиальные свойства автоколебаний, иллюстрировались на примерах механических, электротехнических, гидравлических и других типов систем. Было показано, что незатухающие колебания поршневых двигателей, язычков духовых музыкальных инструментов, часов, электронных и других типов систем являются автоколебаниями. Были вскрыты принципиальные механизмы возбуждения и поддержания устойчивых автоколебаний, обусловленные нелинейностью и диссипативностью, введены понятия отрицательного сопротивления и сформулированы амплитудные и фазовые требования к обратной связи в автогенераторах.

Замечательной особенностью этих работ явилось то, что достаточно сложный эффект автоколебаний описывался на языке классических физических представлений. Определенным итогом этих работ явилась книга А. А. Харкевича «Автоколебания», излагающая физическую трактовку явления автоколебаний применительно к широкому классу систем, которая не содержит ни единой формулы.

Однако физическая трактовка явления автоколебаний нуждается в количественном, математически строгом описании и эта задача решалась А. А. Андроновым и многими другими выдающимися учеными

(Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский). Математический анализ задачи об автоколебаниях наталкивался на серьезную проблему решения нелинейных дифференциальных уравнений. Было установлено, что наиболее простым и в то же время достаточно общим уравнением автоколебательной системы с одной степенью свободы является уравнение Ван дер Поля (или уравнения типа Ван дер Поля). Это нелинейное диссипативное однородное уравнение второго порядка, строгое решение которого в аналитической форме было неизвестно.

В связи с тем, что общих методов строгого решения нелинейных дифференциальных уравнений не создано, необходимо было разработать эффективные методы приближенного решения уравнений автогенераторов, которые позволили бы разработать аналитическую теорию автоколебаний. И такие методы были развиты.

В создание приближенных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений огромный вклад внесли отечественные ученые (Н.М. Крылов, Л.И. Мандельштам, Н.Д. Папалекси, М.А. Бонч–Бруевич, Ю. Б. Кобзарев и др.). Кроме того, примерно в то же время Л. И. Мандельштам и А. А. Андронов предложили специальные методы анализа нелинейных уравнений, использующие работы А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре. В частности, ими был эффективно использован метод фазовых траекторий для анализа режима автоколебаний.

В послевоенные годы в вопросе об автоколебаниях динамических систем с одной степенью свободы была достигнута практически полная ясность. Создана приближенная аналитическая теория, разработаны основы качественной теории динамических систем и ее приложения к задаче автоколебаний (А. А. Андронов, Е. М. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер), проведены экспериментальные исследования и установлено их соответствие с выводами теории. Все это нашло отражение в прекрасных книгах (С. П. Стрелков, В. И. Калинин и Г. М. Герштейн, П.С. Ланда, В.В. Немыцкий и В.В. Степанов, Н.Н. Баутин и Е.М. Леонтович и др.) и вошло в курсы лекций по теории колебаний для радиофизических специальностей вузов.

Во второй половине прошлого века произошло важнейшее событие, которое оказало принципиальное влияние на понимание и трактовку динамических закономерностей природы. Этим событием явилось открытие феномена детерминированного хаоса (Э. Лоренц, 1963 г., Д. Рюэль и Ф. Такенс, 1971 г.). Эффект детерминированного хаоса и его математический образ в виде странного аттрактора существенно изменили наши представления об автоколебаниях. Стало понятным, что предельный цикл как образ устойчивых незатухающих периодических колебаний характеризует лишь частный и наиболее простой пример автоколебаний. Обсудим это более детально.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Устойчивый предельный цикл является притягивающим предельным множеством в фазовом пространстве динамической системы, т. е. аттрактором. Наличие области его притяжения означает по сути дела важную характеристику автоколебаний — независимость предельного, установившегося движения от начальных условий. Естественно сделать следующий шаг: постулировать, что любой аттрактор, реализующийся в автономной динамической системе (исключая тривиальный в виде состояния равновесия), является математическим образом автоколебаний. Свойства последних будут определяться структурой и свойствами конкретного типа аттрактора. Например, известно, что образом устойчивых колебаний с двумя независимыми частотами является двумерный устойчивый тор. Это означает, что мы можем говорить в этом случае о двухчастотных (квазипериодических) автоколебаниях. Следуя этой логике, странный аттрактор, если он реализуется в динамической системе, является математическим образом хаотических автоколебаний. При этом необходимо согласиться с тем, что неустойчивая в смысле Ляпунова фазовая траектория на странном аттракторе характеризует автоколебания. Отметим это важное отличие хаотических автоколебаний от случая периодических и квазипериодических автоколебаний, которым отвечают устойчивые по Ляпунову фазовые траектории. Это послужило основанием ввести классификацию аттракторов по принципу «регулярный» и «хаотический».

Необходимым условием существования странного аттрактора в системе, помимо нелинейности и диссипативности, является достаточная размерность фазового пространства. Хаотические автоколебания возможны только в системах, описываемых дифференциальными уравнениями порядка не менее трех, т. е. в системах с числом степеней свободы не менее 1,5. Отметим два принципиально важных обстоятельства, с этим непосредственно связанных. Во-первых, увеличение размерности фазового пространства до $N \geq 3$ приводит, как установлено, не только и не столько к возможности наблюдать режим детерминированного хаоса и, соответственно, режим странного аттрактора. Выход с двумерной плоскости в трехмерное (и более) пространство позволяет резко увеличить число возможных режимов функционирования системы и их бифуркаций. Если на фазовой плоскости число возможных аттракторов исчерпывается точкой и предельным циклом, то в системах размерности $N \geq 3$ их число заметно возрастает: реализуются аттракторы в виде предельных циклов удвоенного периода, торы и хаотические аттракторы различной структуры и размерности.

Уместно отметить, что существенное обогащение картины наблюдаемых явлений, обусловленное выходом с плоскости в пространство большей размерности, за много лет до установления этого факта предсказал поэт Федор Сологуб:

Наш темный глаз печально слеп,
И только плоскость нам знакома.
Наш мир широкий — только склеп
В подвале творческого дома.

(На опрокинутый кувшин..., 1923)

Во-вторых, в силу того, что режиму детерминированного хаоса отвечает сложное во времени, непериодическое решение, характеризуемое непрерывным спектром мощности, квазигармонический подход к получению приближенного аналитического решения уравнений динамической системы в принципе не может дать результата. Необходимо получать решение существенно нелинейных уравнений, а это, как уже упоминалось, в общем случае невозможно.

Что же делать? Выход из создавшейся ситуации был найден благодаря появлению быстродействующих ЭВМ и персональных компьютеров. Их использование в современной теории колебаний сыграло поистине революционную роль. Численное решение нелинейных дифференциальных уравнений с помощью компьютера не вызывает трудностей. Конечно, численное решение не является аналитическим. Однако возможность его расчета с высокой точностью в совокупности с хорошо развитыми методами графического представления результатов по сути дела решают основную задачу анализа автоколебательных режимов, их устойчивости и бифуркаций применительно к многомерным нелинейным системам.

В свете сказанного выше, становится понятной необходимость и важность анализа автоколебаний в системах с конечным числом степеней свободы, моделируемых дифференциальными уравнениями размерности три и выше. Этой проблеме и посвящена предлагаемая Вашему вниманию книга.

В основу книги положены разделы курсов лекций по теории колебаний, нелинейной динамике, теории синхронизации и статистической радиофизике, читаемые на протяжении многих лет авторами студентам физического факультета Саратовского государственного университета.

По своей структуре и содержанию книга относится к разряду учебников-монографий, так как помимо изложения классической теории автоколебаний, включает ряд современных и новых научных результатов.

Книга содержит пять глав, каждая из которых включает список цитируемой литературы и может изучаться независимо. В первой главе

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

изложены основы теории динамических систем, необходимые для анализа периодических и хаотических автоколебаний конечномерных систем. Представлена линейная теория устойчивости и теория бифуркаций применительно к состояниям равновесия, предельным циклам, торам и хаотическим аттракторам. Даются необходимые сведения о нелокальных бифуркациях, играющих важную роль в исследованиях многомерных систем. Приведена классификация аттракторов.

Во второй главе представлена классическая теория автоколебаний в системах с одной степенью свободы. Изложение ведется на примере уравнений генератора Ван дер Поля как наиболее простой и общей модели периодических автоколебаний с предельным циклом на фазовой плоскости. Предпринята попытка наиболее полного детального изложения теории с использованием классических работ, которые в силу ряда объективных обстоятельств сегодня труднодоступны широкой аудитории студентов и молодых преподавателей.

Третья глава посвящена изложению динамики автоколебательных систем с полутора и двумя степенями свободы. На примерах радиотехнических устройств формулируются уравнения и проводится анализ нескольких базовых моделей нелинейной теории колебаний, иллюстрирующих автоколебательные режимы и их бифуркации, типичные для указанного класса динамических систем. Сопоставление результатов третьей главы с классическими результатами главы 2 дает возможность проиллюстрировать то многообразие, сложность и принципиальные отличия режимов автоколебаний в многомерных системах в сравнении с моделью генератора Ван дер Поля.

В четвертой главе описаны неавтономные колебания, обусловленные реакцией автогенераторов на внешнее периодическое воздействие. Исследуется фундаментальное явление синхронизации автоколебаний. В начале, как и в первой главе ниги, проводится детальный анализ классических результатов по синхронизации генератора Ван дер Поля. Дается детальное теоретическое описание явления синхронизации периодических автоколебаний на основе полных, укороченных уравнений и уравнений фазового приближения. Сделано это, с одной стороны, в учебных целях и избавляет читателей от необходимости поиска труднодоступной литературы. С другой стороны, методы и идеи классической теории используются при описании более сложных явлений синхронизации квазипериодических и хаотических режимов автоколебаний. Отметим, что вопрос о синхронизации квазипериодических колебаний впервые описывается в учебной литературе.

Наконец, пятая глава книги посвящена изложению эффектов влияния флуктуаций в автоколебательных системах. В соответствии с принятой методикой в начале приводятся результаты классической теории

флуктуаций в генераторе Ван дер Поля (Р. Л. Стратонович, С. М. Рытов, А. Н. Малахов, Ю. Л. Климонтович). Используя методы компьютерного моделирования, выводы теории иллюстрируются графически, что делает результаты более наглядными и ясными. Далее, с использованием классических результатов, исследуется влияние флуктуаций на режим хаотических автоколебаний. Рассматривается влияние флуктуаций на эффекты синхронизации периодических и хаотических автоколебаний.

Таким образом, в предлагаемой книге предпринята попытка наиболее полного и взаимосвязанного изложения теории автоколебательных систем, базирующаяся на выводах классической теории периодических автоколебаний и развивающая идеи А. А. Андронова применительно к автоколебаниям в системах с полутора и более степенями свободы. Нельзя не отметить, что имеется достаточно много книг, в том числе и в отечественной литературе, которые посвящены описанию автоколебаний в системах с более чем одной степенью свободы. Среди них отметим работы Ю. И. Неймарка и П. С. Ланды, В. С. Анищенко, С. П. Кузнецова, В. Я. Кислова, А. С. Дмитриева и др. Однако, в этой книге сделана попытка более последовательного и детального изложения теории автоколебаний от классики до современных представлений с целью выделить преемственность в трактовке автоколебаний от простых к более сложным.

Книга в целом написана для студентов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей физико-математических специальностей университетов, изучающих нелинейную теорию колебаний. Излагаемые проблемы требуют знаний физики, высшей математики, основ радиоэлектроники и статистической физики. Однако некоторые главы книги, в которых обсуждаются классические проблемы теории автоколебаний, рекомендуются более широкой аудитории студентов естественно-научных специальностей университетов.

Мы пользуемся приятной возможностью поблагодарить всех сотрудников кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета Саратовского госуниверситета за обсуждения материалов книги на научных семинарах и в частных беседах, которые во многом определили ее содержание, педагогическую и научную направленность. Мы благодарны аспирантам С. М. Николаеву, С. В. Астахову и С. А. Коблянскому за проведение компьютерных расчетов и подготовку ряда иллюстраций. Мы выражаем глубокую признательность главному редактору издательства Л. Ф. Соловейчику за проявленный интерес к работе и ряд предложений, способствующих улучшению содержания книги. Мы благодарим также профессора А. С. Дмитриева за детальное рецензирование рукописи, сделанные замечания и предложения, учтенные нами в окончательной редакции книги. Особую благодарность мы выражаем доценту

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

кафедры Г. И. Стрелковой за участие в работе по написанию книги и огромный труд по подготовке рукописи к печати.

В заключение приведем список монографий и учебников, излагающих фундаментальные основы классической теории автоколебаний, которые использованы авторами при написании книги.

Литература

1. *Мандельштам Л. И.* Лекции по колебаниям. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981 (см. также издания 1937 и 1959 гг.).
3. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1964 (см. также издания 1950 и 1952 гг.).
4. *Калинин В. И., Герштейн Г. М.* Введение в радиофизику. — М.: Гос. изд-во технико-теор. лит-ры, 1957.
5. *Горелик Г. С.* Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959.
6. *Теодорчик К. Ф.* Автоколебательные системы. — М.: Гостехиздат, 1952.
7. *Харкевич А. А.* Автоколебания. — М.: Гос. изд-во технико-теор. лит-ры, 1954.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1954.
9. *Андронов А. А., Леонтович Е. М., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
10. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. — М.: Наука, 1980.
11. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
12. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976.
13. *Малахов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
14. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1982.
15. *Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1987.

В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ГЛАВА 1 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Динамическое (или детерминированное) описание эволюционных процессов базируются на понятии *динамической системы* (ДС). ДС можно представлять как некоторый объект, состояние которого изменяется во времени в соответствии с заданным динамическим законом, т. е. как результат действия *детерминированного* оператора эволюции. Таким образом, понятие ДС является следствием определенной математической идеализации, при которой пренебрегают влиянием случайных возмущений, неизбежно присутствующих в любой реальной системе.

Теория ДС является самостоятельной, чисто математической дисциплиной, роль которой в современной теории нелинейных колебаний трудно переоценить. Дело в том, что многие результаты, касающиеся поведения нелинейных систем, сегодня получают на основе численного решения модельных уравнений. Компьютерные расчеты, хотя и достаточно точные, тем не менее содержат неизбежные численные погрешности, так же как результаты натурных экспериментов всегда ограничены ошибками измерений. Значимость численных расчетов существенно возрастает, если они анализируются с использованием строгих теорем и выводов теории динамических систем.

В настоящей главе излагаются основные результаты теории ДС, которые представляют собой фундамент современных представлений о нелинейных колебаниях в системах с конечным числом степеней свободы. На этом фундаменте, в частности, базируются все необходимые алгоритмы и программы численного моделирования колебательных процессов в нелинейных ДС, методы исследования их эволюции с изменением параметров и действующих сил, расчеты основных характеристик режимов колебаний и т. д. Даются определение и принципы классификации ДС, выделяются колебательные и более детально — автоколебательные ДС. Рассматриваются линейная теория устойчивости ДС и ее приложения к анализу устойчивости состояний равновесия, периодических, квазипе-

риодических и хаотических решений. Приводятся необходимые сведения по теории локальных и нелокальных бифуркаций ДС и теории аттракторов. Во всех последующих разделах книги используются определения, терминология и выводы теории ДС, описанные в настоящей главе.

1.2. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Под динамической системой (ДС) в широком смысле понимают любой объект, эволюционирующий во времени или во времени и пространстве по некоторому детерминированному закону. Все, что движется, развивается, совершенствуется или деградирует закономерным образом может пониматься как ДС. Задачей естествознания является решение проблемы количественного предсказания эволюции системы во времени и пространстве, что представляет собой безусловно математическую задачу. Эта задача формулируется и решается в рамках теории ДС.

В теории ДС под динамической системой понимается математическая модель исследуемой физической ДС. Математическая модель считается заданной, если определено понятие состояния системы в виде набора координат (или функций) состояния и введен оператор эволюции, позволяющий однозначно устанавливать соответствие между начальным состоянием и состоянием в любой последующий момент времени. Оператор эволюции в общем случае может быть задан с помощью дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, дискретных отображений, а также в форме матриц, графов и т. д. В настоящей книге мы ограничимся рассмотрением динамических систем, заданных в виде обыкновенных дифференциальных уравнений или отображений последования конечной размерности.

Важно следующее: в зависимости от степени приближения одной и той же физической системе можно поставить в соответствие много различных математических моделей. Например, линейный осциллятор, нелинейный осциллятор, осциллятор с трением и без. В теории ДС и в теории колебаний под ДС понимается имено математическая модель, а не физический прототип системы. Понятно, что, например, сердечно-сосудистая система живого организма не может рассматриваться как ДС, если мы не имеем ее математической модели.

1.2.1. Классификация динамических систем

Классификация ДС основана на способе задания мгновенного состояния, на свойствах оператора эволюции и методах его описания. Состояние системы определяется набором некоторых величин x_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, или функций $x_j(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^M$. Величины x_j, называемые *динамическими переменными*, непосредственно связаны с наблюдаемыми количественными характеристиками ДС и в реальных системах могут быть измерены (ток, напряжение, скорость, температура, концентрация вещества, численность популяции, и т. д.). Множество всех теоретически возможных состояний системы называется ее *фазовым пространством*. Если x_j являются переменными, а не функциями, и их число конечно, то фазовое пространство системы представляет собой арифметическое пространство $\mathbf{R}^N$ конечной размерности N. Системы с конечномерным фазовым пространством называются также системами с *сосредоточенными параметрами*. Действительно, если не надо учитывать распределение параметров системы (массы, температуры, сопротивления, емкости и т. д.) в пространстве и их зависимость от пространственных координат, то состояние системы может быть задано конечным числом переменных. Такие системы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями или отображениями последования конечной размерности.

Однако, имеется широкий класс систем с бесконечномерным фазовым пространством. Если состояние системы задается функциями $x_j(r_1, r_2, \ldots)$ некоторых переменных r_k, $k = 1, 2, \ldots, M$, то фазовое пространство является функциональным пространством и его размерность бесконечна. Как правило, переменные r_k представляют собой пространственные координаты. К такому представлению мы приходим, если параметры системы непрерывным образом распределены в пространстве с некоторой плотностью и зависят от пространственных координат. Такие системы называются системами с *распределенными параметрами* или просто *распределенными* системами. Они описываются дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями. Еще один пример системы с бесконечномерным фазовым пространством — система, оператор эволюции которой включает задержку во времени T_d. В этом случае мгновенное состояние системы определяется набором функций $x_j(t)$, $t \in [0, T_\mathrm{d}]$.

Можно классифицировать ДС в зависимости от свойств оператора эволюции. Если оператор эволюции удовлетворяет принципу суперпозиции, то соответствующая система является *линейной*, в противном случае система *нелинейна*. Если состояние системы и оператор эволюции определены в любой момент времени, то говорят о системе с *непрерывным временем*. Если состояние системы определено только в отдельные (дискретные) моменты времени, мы имеем систему с *дискретным временем* (*отображение последования* или *каскад*). Для каскадов оператор эволюции обычно определяется с помощью *функции последования* или *отображения последования*. Если оператор эволюции не зависит от момента времени явным образом, то соответствующая система *автономна*, т. е. не

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

подвержена действию каких-либо аддитивных или мультипликативных внешних сил; в противном случае мы имеем дело с *неавтономный* системой. Среди всех ДС особое место занимают системы, в которых происходят незатухающие колебания, т. е. полностью или частично повторяющиеся процессы. Колебательные системы, как и в общем ДС, подразделяются на *линейные* и *нелинейные*, *сосредоточенные* и *распределенные*.

Все динамические системы можно разделить на два больших класса: *консервативные системы* и *неконсервативные системы*. В *консервативной системе* нет ни потерь, ни поступления энергии. В результате исходный запас энергии остается постоянным и система совершает незатухающие колебания. В консервативной системе фазовый объем сохраняется (в среднем по времени) под действием оператора эволюции. Если имеются потери или подкачка энергии, то система называется *неконсервативной*. Потери означают диссипацию (рассеяние) энергии, поэтому система, в которой есть потери называется *диссипативной* (даже если потери компенсируются за счет подкачки). Диссипация энергии эквивалентна сжатию фазового объема под действием оператора эволюции. В случае, когда потери больше, чем подкачка, энергия со временем убывает и система, если на нее не действует внешняя сила, приходит в состояние равновесия. Колебания в ней затухают. Если подкачка энергии превосходит потери, то энергия неограниченно растет, соответственно растет и амплитуда колебаний. Очевидно, что в реальных системах такое поведение может наблюдаться только на ограниченном интервале времени. В диссипативной системе, также как в консервативной, могут существовать незатухающие колебания. Для этого необходимо, чтобы подкачка энергии компенсировала потери. Эти колебания называются *автоколебаниями* и по своиму характеру они сильно отличаются от колебаний в консервативных системах. Фазовый объем сжимается, стремясь к нулю, и в случае, когда в системе существуют автоколебания и в случае, когда подкачка энергии превосходит потери и амплитуда колебаний растет. Свойство сжатия или сохранения объема легко установить количественно применительно к конкретной математической модели.

1.2.2. Предельные множества динамической системы

Все траектории в фозовом пространстве дисипативной системы можно разделить на траектории, соответствующие переходным процессам (процессам релаксации системы к некоторым установившимся режимам) и траектории, принадлежащие инвариантным предельным множествам. Такие траектории соответствуют стационарным, неизменным во времени движениям. Мы уже говорили о предельном цикле и предельном тороидальном множестве. Дадим общее определение предельных множеств ДС. Точка $p \in \mathbf{X}$ называется *ω-предельной точкой* траектории $\mathbf{x}(t)$, $t \geq t_0$, если существует последовательность $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такая, что последовательность состояний $\mathbf{x}(t_k)$ сходится к точке p. Аналогично, точка $q \in \mathbf{X}$ называется *α-предельной точкой* траектории $\mathbf{x}(t)$, $t \leq t_0$, если существует последовательность $t_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, такая, что последовательность состояний $\mathbf{x}(t_k)$ сходится к точке q. Множество всех ω-предельных точек траектории $\mathbf{x}(t)$ называется *ω-предельным множеством данной траектории*. Обозначим его $\omega(\mathbf{x}(t))$. Множество всех α-предельных точек траектории $\mathbf{x}(t)$ есть *α-предельное множество данной траектории*. Обозначим его $\alpha(\mathbf{x}(t))$. Предельные множества любой фазовой траектории сами состоят из фазовых траекторий. Кроме того, предельные множества ω и α инвариантны относительно оператора эволюции. Это означает, что оператор эволюции отображает любую точку предельного множества в точку этого же множества.

Определив, куда стремятся различные траектории ДС в прямом и обратном времени, можно выделить все инвариантные предельные множества в фазовом пространстве. Типичные предельные множества траекторий на фазовой плоскости — это состояния равновесия, периодические движения и особые траектории типа сепаратрисных контуров, двоякоасимптотических к седловым состояниям равновесия. Указанные предельные множества полностью исчерпывают возможные ситуации на фазовой плоскости. Им отвечают три различных типа решений уравнений. Сепаратрисные контуры и петли — это особые кривые, которые в диссипативных системах не являются *структурно устойчивыми* (*грубыми*). Они существуют только при определенных значениях параметров и исчезают при сколь угодно малом возмущении оператора эволюции. Напротив, точки равновесия и предельные циклы при выполнении некоторых условий будут структурно устойчивыми предельными множествами и могут существовать в некоторой области пространства параметров.

Рассмотрим структурно устойчивые предельные множества в R^N. Если некоторое множество $Q \in \mathbf{X}$ является предельным множеством ДС, это означает одну из трех возможностей.

1. Имеется множество фазовых траекторий, не принадлежащих Q, для которых Q является ω-предельным множеством и не существует траекторий, не принадлежащих Q, для которых Q было бы α-предельным. В таком случае множество Q есть *притягивающее предельное множество* или *аттрактор* динамической системы.

2. Имеется множество фазовых траекторий, не принадлежащих Q, для которых Q будет α-предельным множеством и нет траекторий, не принадлежащих Q, для которых Q было бы ω-предельным. В таком случае множество Q есть *отталкивающее предельное множество* или *репеллер* динамической системы.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

3. Имеются траектории, не принадлежащие Q, для которых Q является ω-предельным множеством и, в то же время, имеются траектории, для которых Q является α-предельным множеством. В этом случае множество Q есть *седло* (например седловая точка равновесия, седловой предельный цикл, седловой инвариантный тор).

Множество всех траекторий, стремящихся к аттрактору, образует в фазовом пространстве ДС некоторую область (конечную или бесконечную) называемую *бассейном притяжения аттрактора*[1]).

Седло обладает устойчивым и неустойчивым многообразиями. *Устойчивым многообразием* седлового предельного множества Q называется множество всех траекторий фазового пространства, для которых Q является ω-предельным множеством. *Неустойчивым многообразием* седла Q называется множество всех траекторий, для которых Q является α-предельным множеством. Для седловой точки равновесия на плоскости устойчивое и неустойчивое многообразия состоят из пары сепаратрис, соответственно входящих в седло и выходящих из него.

1.2.3. Автоколебательные системы

Среди широкого класса ДС, реализующих режимы колебаний, выделяются системы, способные совершать незатухающие колебания, обладающие рядом особых свойств и названные А. А. Андроновым автоколебательными [1]. Определение автоколебательных систем было введено А. А. Андроновым для автономных ДС на плоскости

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,$$

имеющих устойчивое T-периодическое решение

$$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t + T).$$

ДС будет автоколебательной в смысле Андронова, если выполняются следующие два условия:

— решение $\mathbf{x}(t)$ устойчиво по отношению к малым изменениям самой системы (т. е. к изменениям оператора эволюции $\mathbf{F}$);

— решение $\mathbf{x}(t)$ в пределе $t \to \infty$ не зависит от выбора начальных условий, по крайней мере в пределах некоторой области фазового пространства.

Замкнутая траектория на фазовой плоскости как образ периодического решения $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющего вышесформулированным условиям, называется предельным циклом.

[1]) Более строгое определение аттрактора и его бассейна притяжения будет дано в разд. 1.5.

Определение автоколебательной системы, которое можно найти во многих книгах и учебниках, требует выполнения второго условия (независимости от начальных данных). Однако А. А. Андронов вкладывал в это определение еще и требование грубости ДС (условие 1), имеющее очень глубокий смысл. В современной теории ДС это условие сформулировано как структурная устойчивость и топологическая эквивалентность ДС.

Любая автоколебательная ДС является нелинейной и диссипативной. Именно эти два условия обеспечивают автоколебательный режим в смысле независимости от начальных условий. Изменения начальных условий однозначно ведет к изменению начальной энергии, которая в итоге принимает некоторое определенное значение в режиме установившихся автоколебаний. Это возможно только для диссипативных систем. И второе: изменение начальной энергии в сторону увеличения или уменьшения управляется самой системой, а следовательно, свойства ДС должны быть различными для различных ее состояний. Такими свойствами обладают исключительно нелинейные ДС.

В современной теории колебаний понятие автоколебаний существенно расширено по сравнению с определением Андронова. Во-первых, оно обобщается на ДС размерности $N > 2$. Во-вторых, оно применяется не только к системам с периодическими решениями, но и к ДС, имеющим квазипериодические и хаотические решения. Можно дать следующее, более общее определение автоколебательной системы: автономная ДС называется автоколебательной, если ее решение представляется в фазовом пространстве в виде аттрактора с конечным или бесконечным бассейном притяжения. Аттрактор может быть периодическим (предельным циклом), квазипериодическим (n-мерным тором) или хаотическим (странный аттрактор)[1]). ДС должна быть грубой, что означает нечувствительность топологической структуры решения к малым изменениям оператора эволюции. Введенное понятие аттрактора и бассейна его притяжения означает по сути второе требование определения Андронова: изменение начальных условий в пределах бассейна притяжения не меняет свойств установившегося решения, которое зависит исключительно от свойств ДС.

Несмотря на краткость в изложении настоящего параграфа, он включает достаточно обширный круг вопросов и проблем, требующих более детальных пояснений и обсуждений. Этому и посвящены последующие разделы настоящей книги.

[1]) Подробное определение и описание указанных типов аттракторов будет дано в разд. 2.5.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

1.2.4. Фазовые портреты динамических систем

Метод анализа колебаний ДС с помощью графического представления в фазовом пространстве был введен в теорию колебаний Л. И. Мандельштамом и А. А. Андроновым [1]. С тех пор этот метод стал общепринятым для изучения различных колебательных явлений. Он приобрел еще большее значение, когда были обнаружены колебания сложного вида, т. е. динамический хаос. Анализ фазовых портретов сложных колебательных процессов позволяет судить о топологической структуре хаотического предельного множества, а также выдвигать гипотезы и предположения, которые могут оказаться ценными при дальнейших исследованиях [2, 3].

Пусть изучаемая ДС описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_N), \tag{1.1}$$

где $j = 1, 2, \ldots, N$, или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор с компонентами x_j, индекс j принимает значения $j = 1, 2, \ldots, N$, а $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — вектор-функция с компонентами $f_j(\mathbf{x})$. Набор N динамических переменных x_j или N-мерный вектор $\mathbf{x}$ определяет состояние системы, которому ставится в соответствие точка в пространстве состояний $\mathbf{R}^N$. Эта точка называется *изображающей* или *фазовой* точкой, а само пространство состояний $\mathbf{R}^N$ называется *фазовым пространством* ДС. Движение фазовой точки соответствует эволюции состояния системы с течением времени. Траектория фазовой точки, стартующая из некоторого начального состояния $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ и отслеживаемая при $t \to \pm\infty$, представляет собой *фазовую траекторию*. Иногда используется сходное понятие интегральной кривой. Интегральные кривые описываются уравнениями $dx_j/dx_k = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N$, где x_k — одна (любая) из динамических переменных. В большинстве случаев интегральные кривые и фазовые траектории совпадают. Однако интегральные кривые, проходящие через особые точки, состоят из нескольких фазовых траекторий.

Правая часть (1.2) задает векторное поле скоростей $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ в фазовом пространстве системы. Точки фазового пространства, для которых $f_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, остаются неизменными с течением времени и называются *неподвижными точками*, *особыми точками* или *состояниями равновесия* ДС. Множество характерных фазовых траекторий в фазовом пространстве образует *фазовый портрет* ДС.

Кроме размерности фазового пространства часто используется понятие *числа степеней свободы ДС*. Под числом степеней свободы в теоретической механике понимается число независимых координат и импульсов, характеризующих движение n материальных точек. Движение каждой материальной точки подчиняется второму закону Ньютона и описывается уравнением движения второго порядка. Следовательно число степеней свободы n связано с размерностью ДС N соотношением $2n = N$. Очевидно, для произвольной ДС (1.1) число степеней свободы может быть нецелым (кратным 0,5).

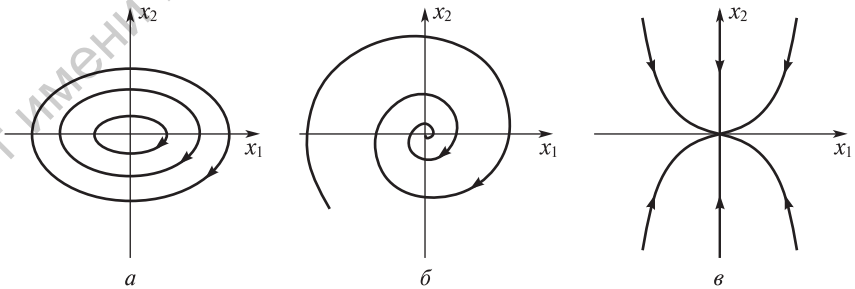


Рис. 1.1. Фазовые портреты линейных осцилляторов: *а* — без трения, *б* — с малым трением, *в* — с сильным трением

Рассмотрим гармонический осциллятор

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1.3}$$

Его фазовый портрет показан на рис. 1.1, *а* и представляет собой семейство концентрических эллипсов (в случае $\omega_0 = 1$ — окружностей) на плоскости $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ с центром в начале координат:

$$\frac{\omega_0^2 x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = H(x_1, x_2) = \text{const}. \tag{1.4}$$

Каждому значению полной энергии $H(x_1, x_2)$ соответствует свой собственный эллипс. В начале координат расположено состояние равновесия, называемое *центром*. Если к линейному осциллятору добавить трение, то фазовые траектории, стартующие из любой точки фазовой плоскости, будут приближаться к состоянию равновесия в пределе $t \to \infty$. При слабой диссипации фазовые траектории представляют собой спирали, закручивающиеся к началу координат (рис. 1.1, *б*), а решения уравнений осциллятора с трением соответствуют затухающим колебаниям. В этом случае состояние равновесия в нуле координат называется *устойчивым фокусом*. С увеличением коэффициента трения решения станут

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

апериодическими. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 1.1, *в*. В начале координат имеется состояние равновесия, называемое *устойчивым узлом*.

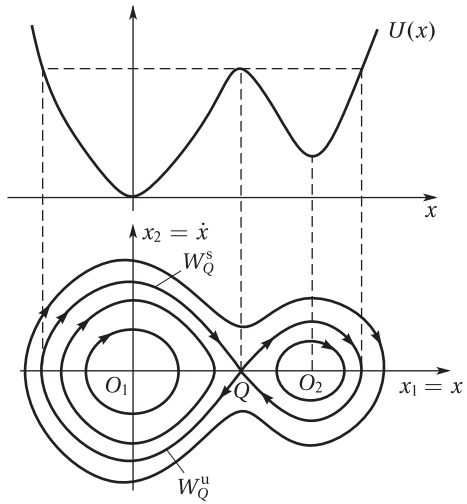


Рис. 1.2. Качественное построение фазового портрета нелинейного консервативного осциллятора с помощью потенциальной функции $U(x)$

Фазовый портрет для нелинейного консервативного осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0,$$

качественно нетрудно построить с помощью потенциальной функции $U(x)$. Пример такого построения приводится на рис. 1.2. Минимумам потенциальной функции соответствуют положения равновесия типа центр. В потенциальной яме, существующей вблизи каждого центра, семейство замкнутых кривых упорядочено в соответствии со значениями интеграла энергии $H(x, \dot{x})$. В непосредственной окрестности центра эти кривые имеют эллиптическую форму, которая постепенно деформируется при удалении от центра. Максимумам $U(x)$ соответствуют положения равновесия, называемые *седлами*. Седла неустойчивы по отношению к произвольным возмущениям. Фазовые траектории, входящие в седло Q (рис. 1.2) при $t \to \pm\infty$, называются устойчивыми и неустойчивыми *сепаратрисами седла* Q. Пара траекторий, приближающихся к седлу в прямом времени, образует его *устойчивое многообразие* W_Q^{s}, а пара траекторий, стремящихся к седлу в обратном времени, составляют его *неустойчивое многообразие* W_Q^{u}. Сепаратрисы делят фазовое пространство на области

с принципиально различным характером фазовых траекторий. В некоторых случаях сепаратрисы могут замыкаться, образуя сепаратрисные петли (контуры) (рис. 1.2).

Фазовые портреты неавтономных систем имеют некоторые особенности. Одна из них состоит в следующем. Фазовые траектории неавтономной системы при изменении времени t от $-\infty$ до $+\infty$ не остаются в пределах ограниченной области фазового пространства, поскольку t в данном случае является одной из фазовых координат. В случае периодического внешнего воздействия можно построить фазовый портрет, сведя неавтономную систему к автономной. Для этого нужно ввести фазу воздействия $\Psi = \omega_{\mathrm{ex}} t$ и добавить к уравнениям ДС еще одно уравнение: $\dot{\Psi} = \omega_{\mathrm{ex}}$. Однако, если предполагать, что Ψ определена на всей действительной оси, то новая переменная ничего не дает, и фазовые траектории остаются неограниченными как и прежде. Можно перейти к ограниченным фазовым траекториям, если положить, что $\Psi \in [0, 2\pi]$, и ввести цилиндрическое фазовое пространство (вообще говоря многомерное). На рис. 1.3 показаны фазовые траектории неавтономной системы, лежащие на цилиндре (в целях наглядности приведена только одна динамическая переменная x).

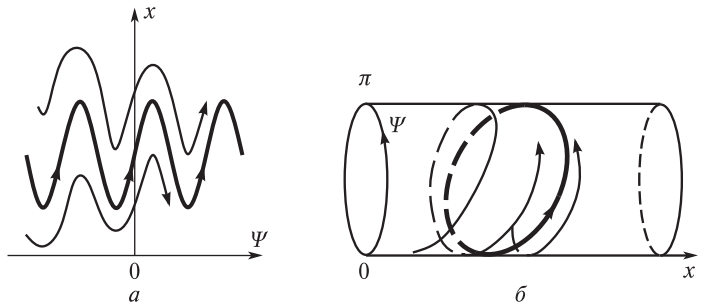


Рис. 1.3. Фазовые портреты неавтономной системы $\dot{x} = f(x) + B\sin\omega_{\mathrm{ex}} t$ для $\Psi = \omega_{\mathrm{ex}} t$, определенной на интервале $(-\infty, +\infty)$ (*а*) и для $\Psi \in [0, 2\pi]$ (*б*)

Рассмотрим осциллятор Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (1.5)$$

Для $\varepsilon > 0$ и $t \to \infty$ в автоколебательной системе (1.5) независимо от выбора начальных условий устанавливаются периодические колебания. Этим колебаниям в фазовом пространстве соответствует замкнутая изолированная кривая, называемая *предельным циклом Андронова–Пуанкаре* [1]. Все фазовые траектории (1.5), выходящие из различных точек фазовой плоскости, при $t \to \infty$ стремятся к предельному циклу. Единственное

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

исключение составляет состояние равновесия в начале координат. При малых ε предельный цикл по форме близок к эллипсу, а состоянию равновесия в начале координат отвечает *неустойчивый фокус*. Соответствующий фазовый портрет и форма колебаний $x(t)$ показаны на рис. 1.4, *а*. При увеличении ε предельный цикл искажается, и характер состояния равновесия меняется. При $\varepsilon > 2\omega_0$ неустойчивый фокус превращается в неустойчивый узел, а продолжительность переходного процесса значительно уменьшается (рис. 1.4, *б*).

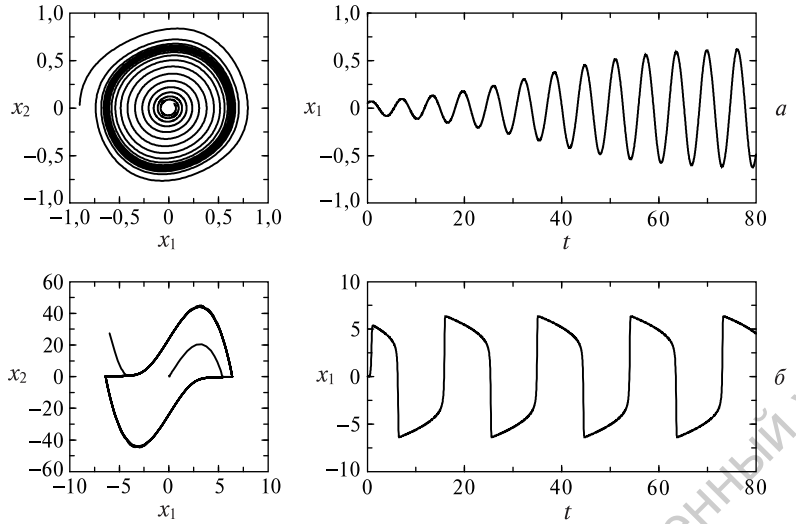


Рис. 1.4. Фазовые портреты и форма колебаний для осциллятора Ван дер Поля (1.5) с $\omega_0 = 1$ для $\varepsilon = 0{,}1$ (*а*) и для $\varepsilon = 10$ (*б*). $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$

Фазовые портреты трехмерных систем не столь наглядны. В этом случае разумно рассматривать сечение фазовых траекторий некоторой плоскостью или поверхностью, выбранной таким образом, чтобы все траектории пересекали эту поверхность под ненулевым углом. На секущей поверхности возникает множество точек, соответствующих различным фазовым траекториям исходной системы, которые могут дать нам представление о структуре фазового портрета ДС. Обычно рассматриваются точки пересечения поверхности траекториями, идущими в одном выбранном направлении, как показано на рис. 1.5. Оператор эволюции однозначным (но не взаимно однозначным) образом определяет отображение секущей поверхности в себя, называемое *отображением возврата* или *отображением Пуанкаре* [4]. Отображение Пуанкаре уменьшает размерность исследуемого множества до $N - 1$, что делает фазовый портрет системы более наглядным. Конечные последовательности точек (периодические орбиты или циклы отображения) соответствуют замкнутым кривым (предельным циклам) исходной системы, а бесконечные последовательности точек соответствуют апериодическим траекториям.

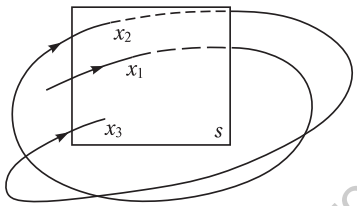


Рис. 1.5. Сечение Пуанкаре

1.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Задача анализа устойчивости конкретного режима функционирования системы — одна из наиболее важных в теории ДС. Режиму эволюции ДС из некоторого заданного начального состояния соответствует траектория в фазовом пространстве. Таким образом необходимо исследовать устойчивость той или иной фазовой траетории по отношению к малым возмущениям. Существует несколько различных определений устойчивости, а именно: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, орбитальная устойчивость и устойчивость по Пуассону [2, 5, 6]. Исследуемая фазовая траектория $\mathbf{x}^*(t)$ является *устойчивой по Ляпунову*, если для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой траектории $\mathbf{x}(t)$, для которой $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\| < \delta$, для всех $t > t_0$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon$. Знак $\|\ldots\|$ обозначает норму в $\mathbf{R}^N$. Таким образом, малое начальное возмущение устойчивых по Ляпунову фазовых траекторий не возрастает с течением времени. Если малое возмущение δ со временем уменьшается, т. е. $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то траектория обладает более сильной устойчивостью, а именно, *асимптотической устойчивостью*. Любая асимптотически устойчивая фазовая траектория устойчива по Ляпунову. Обратное утверждение в общем случае не верно.

Определение *орбитальной устойчивости* несколько отличается от определения устойчивости по Ляпунову. В последнем случае расстояние между точками исследуемой и возмущенной фазовых траекторий рассматривается в один и тот же момент времени. Орбитальная устойчивость характеризует минимальное расстояние между фазовой точкой возмущенной траектории в данный момент времени t и орбитой Γ^*, соответствующей исследуемому движению. Траектория, устойчивая по Ляпунову, всегда орбитально устойчива. Обратное утверждение в общем случае не справедливо.

Самым слабым требованием является требование *устойчивости* фазовой траектории $\mathbf{x}^*(t)$ *по Пуассону*. Устойчивость по Пуассону означает,

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

что фазовая траектория возвращается в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата могут соответствовать периоду или квазипериоду регулярного движения или представлять случайную последовательность в режиме динамического хаоса.

При анализе динамической системы особенно важна устойчивость фазовых траекторий, принадлежащих предельным множествам (например, аттракторам). Изменение характера устойчивости того или другого предельного множества во многих случаях приводит к смене режима функционирования системы.

1.3.1. Линейный анализ устойчивости

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость определяются эволюцией во времени малых возмущений траектории, а именно тем, будут ли эти возмущения уменьшаться, расти или останутся ограниченными с течением времени. Малость рассматриваемых возмущений позволяет линеаризовать оператор эволюции вблизи изучаемой траектории и провести анализ ее устойчивости в линейном приближении.

Рассмотрим автономную ДС вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha), \tag{1.6}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, и $\alpha \in \mathbf{R}^m$ — вектор параметров. Проанализируем устойчивость частного решения $\mathbf{x}^0(t)$. Введем малое возмущение $\mathbf{y} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0(t)$, для которого можно записать уравнение

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^0). \tag{1.7}$$

Раскладывая $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{y})$ в ряд в окрестности $\mathbf{x}^0$ и принимая во внимание тот факт, что возмущение является малым, приходим к следующему линеаризованному уравнению относительно $\mathbf{y}$:

$$\dot{\mathbf{y}} = \widehat{A}(t)\mathbf{y}, \tag{1.8}$$

где $\widehat{A}$ — матрица с элементами

$$a_{j,k} = \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^0(t)}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.9}$$

называемая *матрицей линеаризации* системы в окрестности решения $\mathbf{x}^0(t)$, а f_j — компоненты функции $\mathbf{F}$. Матрица $\widehat{A}$ характеризуется собственными векторами $\mathbf{e}_i$ и собственными значениями s_i:

$$\widehat{A}\mathbf{e}_i = s_i\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.10}$$

Собственные значения s_i являются корнями характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}[\widehat{A} - s\widehat{E}] = 0, \tag{1.11}$$

где $\widehat{E}$ — единичная матрица.

Рассмотрим матрицу линеаризации в точке исследуемой траектории в момент времени t. Начальное возмущение в направлении i-го собственного вектора, заданное в момент t, меняется за малый интервал времени τ следующим образом:

$$\mathbf{y}^i(t + \tau) = \mathbf{y}^i(t)\exp[\tau s_i(t)]. \tag{1.12}$$

Увеличение или уменьшение нормы возмущения $\|\mathbf{y}^i(t+\tau)\|$ определяется знаком вещественной части $s_i(t)$. При движении вдоль траектории $\mathbf{x}^0(t)$ показатель экспоненты $s_i(t)$ принимает различные значения. Следовательно возможна ситуация, когда возмущение $\mathbf{y}(t + \tau) = \sum_{i=1}^N \mathbf{y}^i(t + \tau)$ экспоненциально растет с ростом τ в одних точках исследуемой траектории и уменьшается в других.

Рассмотрим эволюцию компоненты малого возмущения $\mathbf{y}^i(t)$, направленной вдоль i-го собственного вектора матрицы $\widehat{A}(t)$. Устойчивость траектории вдоль собственного вектора $\mathbf{e}_i(t)$ определяется *характеристическим показателем Ляпунова* λ_i,

$$\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t - t_0} \ln \left\| \frac{\mathbf{y}^i(t)}{\mathbf{y}^i(t_0)} \right\|, \tag{1.13}$$

где черта сверху означает верхний предел, t_0 — начальный момент времени. Таким образом, устойчивость траектории в R^N определяется набором из N показателей Ляпунова. Расположенные в убывающем порядке — $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$, они образует так называемый *спектр характеристических показателей Ляпунова* (*спектр ЛХП*) фазовой траектории $\mathbf{x}^0(t)$.

Выясним, как показатели Ляпунова связаны с собственными значениями матрицы линеаризации $s_i(t)$. Рассмотрим (1.12) в начальный момент времени $t = t_0$, предполагая, что интервал τ мал. Перейдем в точку $\mathbf{x}(t_1)$, где $t_1 = t_0 + \tau$, и в качестве начального возмущения возьмем

$$\mathbf{y}^i(t_1) = \mathbf{y}^i(t_0)\exp[s_i(t_0)\tau].$$

Поскольку τ мало, будем считать, что направление собственных векторов $\mathbf{e}_i$ почти не меняется за время τ, и можно считать, что вектор $\mathbf{y}^i(t_1)$ направлен вдоль i-го собственного вектора $\mathbf{e}_i(t_0)$. Полагаем, что начальное возмущение $\mathbf{y}^i(t_0)$ настолько мало, что оно остается малым и в последующие моменты времени. Перемещаясь по кривой $\mathbf{x}^0(t)$ с малым

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

шагом τ, получаем приближенное выражение, описывающее эволюцию малого возмущения в направлении i-го собственного вектора:

$$\mathbf{y}^i(t) \approx \mathbf{y}^i(t_0)\exp\Big[\sum_k s_i(t_k)\tau\Big]. \tag{1.14}$$

Переходя к пределу $\|\mathbf{y}^i(t_0)\| \to 0$ и $\tau \to 0$, получаем строгое равенство

$$\mathbf{y}^i(t) = \mathbf{y}^i(t_0)\exp\Big[\int_{t_0}^{t} s_i(t')\,dT'\Big]. \tag{1.15}$$

В результате подстановки (1.15) в (1.13) приходим к равенству

$$\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\operatorname{Re} s_i(t')\,dt'. \tag{1.16}$$

Таким образом, i-й показатель Ляпунова λ_i можно понимать как усредненную вдоль изучаемой траектории вещественную часть собственного значения s_i матрицы линеаризации $\widehat{A}(t)$. Он показывает, что происходит с соответствующей компонентой начального возмущения в среднем вдоль траектории. Дивергенция потока и, следовательно, эволюция фазового объема определяется суммой показателей Ляпунова. При достаточно общих предположениях о свойствах ДС можно показывать, что

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\operatorname{div}\mathbf{F}(t')\,dt'. \tag{1.17}$$

Если траектория $\mathbf{x}^0(t)$ устойчива по Ляпунову, то произвольное начальное возмущение $\mathbf{y}(t_0)$, в среднем, вдоль траектории не растет. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ЛХП не содержал положительных показателей. Если произвольная ограниченная траектория $\mathbf{x}^0(t)$ автономной системы (1.1) не является состоянием равновесия или асимптотической траекторией седла, то по крайней мере один из показателей Ляпунова всегда равен нулю. Действительно, малое возмущение в среднем остается неизменным вдоль направления, касательного к траектории. Элемент фазового объема должен сжиматься для фазовых траекторий, расположенных на аттракторе. В этом случае усредненная дивергенция фазового потока $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ диссипативной ДС отрицательна, и сумма показателей Ляпунова удовлетворяет следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i < 0. \tag{1.18}$$

1.3.2. Устойчивость состояний равновесия

Если частное решение $\mathbf{x}^0(t)$ системы (1.6) является состоянием равновесия, т. е. $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0,\alpha) = \mathbf{0}$, то матрица линеаризации $\widehat{A}$ рассчитывается только в одной точке фазового пространства, и, следовательно, является матрицей с постоянными элементами $a_{i,j}$. Собственные векторы и собственные значения матрицы $\widehat{A}$ постоянны во времени, а показатели Ляпунова равны вещественным частям собственных значений: $\lambda_i = \operatorname{Re} s_i$. Сигнатура спектра ЛХП показывает, является ли состояние равновесия устойчивым или нет. Для анализа поведения фазовых траекторий в локальной окрестности состояния равновесия необходимо знать также и мнимые части собственных значений матрицы линеаризации. На фазовой плоскости (случай $N = 2$) положение равновесия характеризуется двумя собственными значениями матрицы $\widehat{A}$: s_1 и s_2. Возможны следующие случаи:

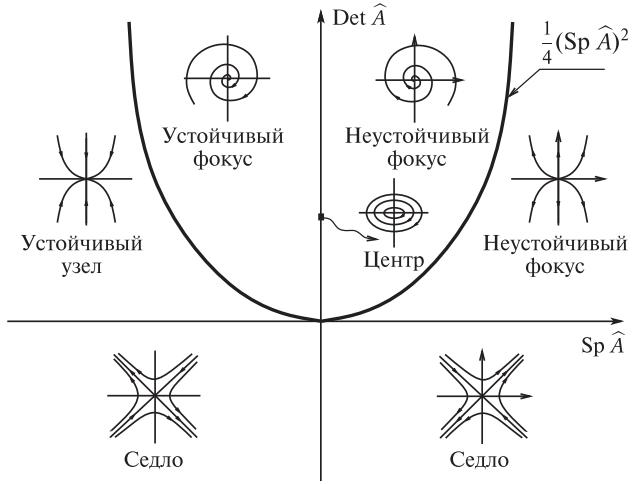


Рис. 1.6. Диаграмма состояний равновесия на плоскости (фазовые портреты показаны в преобразованных координатах [1])

1) s_1 и s_2 являются вещественными отрицательными числами. В этом случае состояние равновесия представляет собой устойчивый узел;

2) s_1 и s_2 — вещественные положительные числа. Состояние равновесия является неустойчивым узлом;

3) s_1 и s_2 — вещественные числа, но с различными знаками. Состояние равновесия в этом случае — седло;

4) s_1 и s_2 — комплексно-сопряженные числа с $\operatorname{Re} s_{1,2} < 0$. Состояние равновесия — устойчивый фокус;

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

5) s_1 и s_2 — комплексно-сопряженные с $\operatorname{Re} s_{1,2} > 0$. Состояние равновесия — неустойчивый фокус;

6) s_1 и s_2 — чисто мнимые числа: $s_{1,2} = \pm i\omega$. Состояние равновесия в этом случае является центром.

На рис. 1.6 показана диаграмма состояний равновесия, существующих на фазовой плоскости при различных значениях детерминанта и следа матрицы $\widehat{A}$ (соответственно, $\operatorname{Det} \widehat{A} = s_1 s_2$ и $\operatorname{Sp} \widehat{A} = s_1 + s_2$).

Помимо вышеупомянутых состояний равновесия, в пространстве с размерностью $N \geq 3$ возможны и другие типы состояний равновесия, например, неустойчивое по Ляпунову состояние равновесия, называемое *седло-фокусом*. На рис. 1.7 показаны два варианта состояния равновесия седло-фокусного типа, реализуемые в $\mathbf{R}^3$. Они различаются размерностями их устойчивых и неустойчивых многообразий.

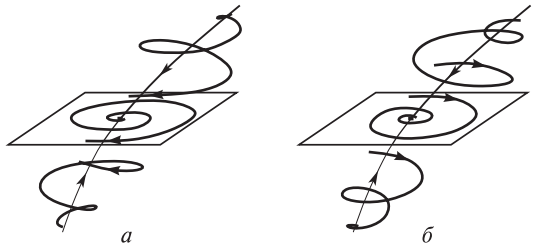


Рис. 1.7. Седло-фокусы в трехмерном фазовом пространстве: s_1 — вещественно и отрицательно, $s_{2,3}$ — комплексно-сопряженные $\operatorname{Re} s_{2,3} > 0$ (*а*); s_1 — вещественно и положительно, $s_{2,3}$ — комплексно-сопряженные $\operatorname{Re} s_{2,3} < 0$ (*б*)

Зная показатели Ляпунова, нетрудно определить, к какому типу предельных множеств принадлежит исследуемое состояние равновесия. Положение равновесия является аттрактором, если оно асимптотически устойчиво во всех направлениях, т. е. его спектр ЛХП состоит только из отрицательных показателей (устойчивый узел или фокус). Если состояние равновесия неустойчиво во всех направлениях, то оно является репеллером (неустойчивый узел или фокус). Если спектр ЛХП включает как положительные, так и отрицательные показатели, то состояние равновесия принадлежит к седловому типу (простое седло или седло-фокус). Кроме того, число показателей $\lambda_i \geq 0$ и $\lambda_j \leq 0$ определяет размерность неустойчивого и устойчивого многообразий.

1.3.3. Устойчивость периодических решений

Любое периодическое решение $\mathbf{x}^0(t)$ системы (1.6) удовлетворяет условию

$$\mathbf{x}^0(t) \equiv \mathbf{x}^0(t+T), \tag{1.19}$$

где T — период решения. Матрица линеаризации $\widehat{A}(t)$, вычисляемая в точках траектории, соответствующей периодическому решению $\mathbf{x}^0(t)$, также является периодической:

$$\widehat{A}(t) = \widehat{A}(t+T). \tag{1.20}$$

В этом случае уравнение для возмущений (1.8) представляет собой линейное уравнение с периодическими коэффициентами. Устойчивость периодического решения можно оценить, определив, как малое возмущение $\mathbf{y}(t_0)$ меняется за период T. Его эволюция может быть представлена следующим образом [9]:

$$\mathbf{y}(t_0 + T) = \widehat{M}_T \mathbf{y}(t_0), \tag{1.21}$$

где $\widehat{M}_T$ — постоянная матрица, называемая *матрицей монодромии*. Собственные значения матрицы монодромии, т. е. корни характеристического уравнения

$$\operatorname{Det}[\widehat{M}_T - \mu \widehat{E}] = 0, \tag{1.22}$$

называются *мультипликаторами* периодического решения $\mathbf{x}^0(t)$. Мультипликаторы определяют устойчивость периодического решения. Действительно, действие оператора монодромии (1.21) за период T сводится к следующему: компоненты разложения первоначального возмущения по собственным векторам матрицы $\widehat{A}(t_0)$, умножаются на соответствующие мультипликаторы μ_i. Таким образом, для того, чтобы периодическое решение $\mathbf{x}^0(t)$ было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы его мультипликаторы удовлетворяли требованию $|\mu_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$. По крайней мере один из мультипликаторов всегда равен $+1$. Как собственные значения матрицы монодромии, мультипликаторы удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i = \operatorname{Sp} \widehat{M}_T, \quad \prod_{i=1}^{N} \mu_i = \operatorname{Det} \widehat{M}_T. \tag{1.23}$$

Мультипликаторы связаны с показателями Ляпунова для периодического решения следующим образом:

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln |\mu_i|. \tag{1.24}$$

Нулевой показатель в спектре ЛХП предельного цикла соответствует мультипликатору, равному единице. Предельный цикл является аттрактором, если все другие показатели отрицательны, а соответствующие мультипликаторы по абсолютной величине меньше единицы. Если спектр ЛХП включает показатели различного знака, то предельный цикл яв-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ляется седловым. Размерность неустойчивого многообразия седлового цикла равна числу неотрицательных показателей в спектре ЛХП, а размерность его устойчивого многообразия равно числу показателей, для которых $\lambda_i \le 0$. Если все $\lambda_i > 0$, то предельный цикл является абсолютно неустойчивым (репеллером).

1.3.4. Устойчивость квазипериодических и хаотических решений

Пусть частное решение $\mathbf{x}^0(t)$ системы (1.6) соответствует квазипериодическим колебаниям с k независимыми частотами ω_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. То есть справедливо следующее:

$$\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}^0\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t)\big) = \\ = \mathbf{x}^0\big(\varphi_1(t) + 2\pi m, \varphi_2(t) + 2\pi m, \ldots, \varphi_k(t) + 2\pi m\big), \quad (1.25)$$

где m — произвольное целое число, $\varphi_j(t) = \omega_j t$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Устойчивость квазипериодического решения характеризуется спектром ЛХП. Матрица линеаризации $\widehat{A}(t)$ является квазипериодической, поэтому показатели Ляпунова строго определены только в пределе $t \to \infty$. В случае *эргодических* квазипериодических колебаний, периодичности решения по всем аргументам φ_j соответствует наличие k нулевых показателей в спектре ЛХП. Если все другие показатели — отрицательные, то k-мерная тороидальная гиперповерхность (мы будем использовать для простоты термин «k-мерный тор»), на которой лежит исследуемая квазипериодическая траектория, является аттрактором. Если все отличные от нуля показатели положительны, то k-мерный тор будет репеллером. Тор является седловым, если спектр ЛХП траекторий на торе помимо нулевых показателей содержит как положительные, так и отрицательные показатели[1]).

Хаотическая траектория, независимо от того, принадлежит ли она хаотическому аттрактору, хаотическому репеллеру или седлу, всегда имеет хотя бы одно направление неустойчивости. Поэтому спектр ЛХП хаотического решения всегда имеет по крайней мере один положительный показатель Ляпунова. Неустойчивость фазовых траекторий на хаотическом аттракторе и притягивающий характер предельного множества, не противоречат друг другу. Фазовые траектории, стартующие из близких начальных точек в бассейне притяжения, стремятся на аттрактор, и в то же время экспоненциально расходятся на нем. Следовательно, хаотические траектории на аттракторе неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуассону.

[1]) Эту ситуацию следует отличать от хаотической динамики на k-мерном торе, которая может иметь место при $k \ge 3$.

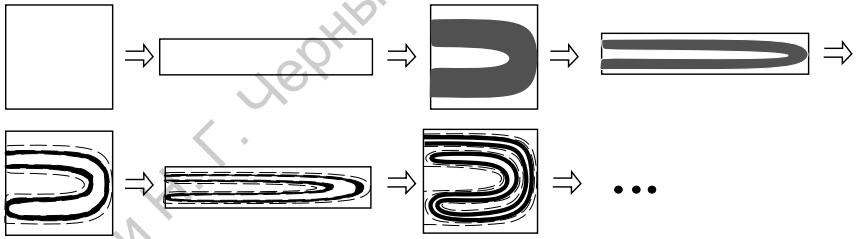


Рис. 1.8. Формирование странного аттрактора в отображении подковы

Для хаотических аттракторов типична сложная геометрическая структура, в связи с чем они были названы странными. Примером странного аттрактора может служить предельное множество, возникающее в так называемом *отображении подковы* (*отображении Смейла*) [10]. Единичный квадрат сжимается по одному направлению и растягивается по другому, при этом площадь уменьшается. Полученная лента изгибается в форме подковы и снова вкладывается в первоначальный квадрат, как показано на рис. 1.8. Такая процедура повторяется много раз. В пределе формируется множество с нулевой площадью, которое не является счетным множеством точек или линий. Оно имеет *Канторову структуру* в своем сечении и характеризуется дробной размерностью Хаусдорфа.

1.3.5. Устойчивость фазовых траекторий в системах с дискретным временем

Пусть система с дискретным временем описывается отображением

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{P}(\mathbf{x}(n), \alpha), \quad (1.26)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ — вектор состояния, n — дискретная переменная времени, $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \alpha)$ — вектор-функция с компонентами P_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, и $\alpha \in \mathbf{R}^m$ — вектор параметров системы. Проанализируем устойчивость произвольного решения $\mathbf{x}^0(n)$. Рассматривая малое возмущение $\mathbf{y}(n) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^0(n)$ и линеаризуя отображение вблизи решения $\mathbf{x}^0(n)$, получаем линейное уравнение для возмущения:

$$\mathbf{y}(n+1) = \widehat{M}(n)\mathbf{y}(n), \quad (1.27)$$

где $\widehat{M}(n)$ — линеаризованная матрица с элементами

$$m_{j,k} = \left.\frac{\partial P_j(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial x_k}\right|_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}^0(n)}. \quad (1.28)$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Из (1.27) следует, что начальное возмущение эволюционирует согласно закону

$$\mathbf{y}(n+1) = \widehat{M}(n)\widehat{M}(n-1)\ldots\widehat{M}(1)\mathbf{y}(1). \tag{1.29}$$

По аналогии с дифференциальными системами введем показатели Ляпунова для решения $\mathbf{x}^0(n)$:

$$\lambda_i = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln\left\|\frac{\mathbf{y}^i(n)}{\mathbf{y}^i(1)}\right\|. \tag{1.30}$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$\widehat{M}(n)\mathbf{y}^i(n) = \mu_i(n)\mathbf{y}^i(n), \tag{1.31}$$

где μ_i — собственное значение матрицы $\widehat{M}(n)$, соответствующее i-му собственному вектору, и из (1.29) и (1.30) получаем

$$\lambda_i = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln|\mu_i(k)|. \tag{1.32}$$

Устойчивость неподвижных точек и предельных циклов отображения характеризуется мультипликаторами. Последовательность состояний $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \ldots, \mathbf{x}_l^0$ называется *циклом периода* l отображения, или просто l*-циклом*, если выполнено следующее условие:

$$\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{P}^l(\mathbf{x}_1^0). \tag{1.33}$$

Если $l = 1$, т. е.,

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{P}(\mathbf{x}^0), \tag{1.34}$$

состояние $\mathbf{x}^0$ называется *неподвижной точкой* отображения или *циклом периода* 1. Матрица линеаризации $\widehat{M}$ для периодического решения $\mathbf{x}^0(n)$ тоже является периодической, т. е. $\widehat{M}(n+l) = \widehat{M}(n)$. Компонента возмущения $\mathbf{y}^i(1)$ за период l меняется следующим образом:

$$\mathbf{y}^i(l+1) = \widehat{M}(l)\widehat{M}(l-1)\ldots\widehat{M}(1)\mathbf{y}^i(1) = \widehat{M}_l\mathbf{y}^i(1). \tag{1.35}$$

Матрица $\widehat{M}_l$ не зависит от выбора начальной точки и является аналогом матрицы монодромии в дифференциальной системе. Собственные значения μ_i^l матрицы $\widehat{M}_l$ называются *мультипликаторами* l*-цикла* отображения. Они показывают, как изменяются проекции вектора возмущения на собственные векторы линеаризованной матрицы $\widehat{M}$ за период l. Мультипликаторы μ_i^l связаны с показателями Ляпунова соотношением

$$\lambda_i = \frac{1}{l}\ln|\mu_i^l|. \tag{1.36}$$

l-цикл отображения асимптотически устойчив, если его мультипликаторы удовлетворяют условию $|\mu_i^l| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Таким образом, спектр ЛХП устойчивого цикла содержит только отрицательные значения.

Если отображение с размерностью фазового пространства $N-1$ является отображением последования в сечении Пуанкаре некоторой N-мерной дифференциальной системы, то оно обладает следующим свойством: множество собственных значений μ_i^l, $i = 1, 2, \ldots, (N-1)$ матрицы $\widehat{M}_l$ для l-цикла, дополненное мультипликатором $\mu_N^l = 1$, полностью совпадает с множеством собственных значений матрицы монодромии соответствующего предельного цикла исходной дифференциальной системы. На этом основании устойчивость периодических решений в дифференциальных системах может быть количественно описана мультипликаторами соответствующих циклов в отображении Пуанкаре.

1.4. БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, КАТАСТРОФЫ

При математическом моделировании большинства практических задач теории колебаний наиболее часто используются дифференциальные уравнения и отображения, зависящие от ряда параметров. Изменение параметров системы может привести к качественному преобразованию фазового портрета системы, называемому *бифуркацией* [2, 7, 8, 11]. Под качественным изменением фазового портрета подразумевается его структурная перестройка, нарушающая *топологическую эквивалентность*. Значение параметра, при котором происходит бифуркация, называется *бифуркационным значением* или *точкой бифуркации*. Помимо фазового пространства, ДС характеризуется также пространством параметров. Определенный набор значений параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M$ образует радиус-вектор α в этом пространстве. В многомерном пространстве параметров системы бифуркационным значениям могут соответствовать определенные множества, представляющие собой точки, линии, поверхности, и т. д. Бифуркации характеризуются некоторым количеством условий, налагаемых на параметры системы. Число таких условий определяет *коразмерность* бифуркации. Например, коразмерность 1 означает, что имеется только одно бифуркационное условие.

Различают *локальные* и *нелокальные бифуркации* ДС. *Локальные бифуркации* связаны с локальной окрестностью траектории на предельном множестве. Они отражают изменение устойчивости как отдельных траекторий, так и всего предельного множества целиком, и могут свидетельствовать об исчезновении исследуемого предельного множества в результате его слияния с другим предельным множеством. Все перечисленные вы-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ше явления могут быть обнаружены в рамках линейного анализа устойчивости. Например, смена знака одного из ляпуновских показателей траектории на предельном множестве свидетельствует о локальной бифуркации предельного множества. *Нелокальные бифуркации* [12] связаны с поведением многообразий предельных седловых множеств, в частности, с образованием сепаратрисных петель, гомоклинических и гетероклинических кривых, а также с возникновением касания аттрактора и сепаратрисной кривой или поверхности. Перечисленные эффекты не могут быть обнаружены в рамках линейного приближения. В такой ситуации необходимо учитывать нелинейные свойства изучаемой системы.

Бифуркации могут происходить с любыми предельными множествами, но наибольший интерес представляют бифуркации аттракторов, поскольку они приводят к изменениям экспериментально наблюдаемых режимов. Бифуркации аттракторов обычно подразделяются на *внутренние* (*мягкие*) бифуркации и *кризисы* (*жесткие*) бифуркации [7, 13]. *Внутренние бифуркации* связаны с топологическими изменениями самих притягивающих предельных множеств, но не затрагивают их бассейнов притяжения. *Кризисы* аттракторов сопровождаются качественной перестройкой границ бассейнов притяжения.

Концепция *грубости* (*структурной устойчивости*) ДС тесно связана с бифуркациями. ДС называется *грубой* или *структурно устойчивой*, если малые гладкие возмущения оператора эволюции приводят к топологически эквивалентным решениям [1]. Бифуркацию ДС можно представлять как переход системы от одного структурно устойчивого состояния к другому через структурно неустойчивое состояние в точке бифуркации.

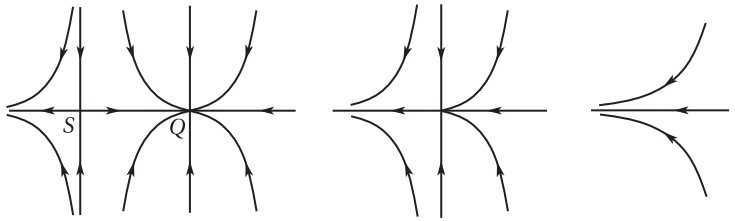
Анализ бифуркаций ДС при изменении параметров системы позволяет построить *бифуркационную диаграмму* системы. *Бифуркационная диаграмма* представляет собой набор точек, линий и поверхностей в пространстве параметров, которые соответствуют различным бифуркациям предельных множеств системы. Если при некоторых значениях параметров существуют несколько предельных множеств, то бифуркационная диаграмма является «многолистной». Сосуществование большого (даже бесконечного) числа предельных множеств типично для систем со сложной динамикой. В этом случае точки бифуркаций могут быть всюду плотны в пространстве параметров. При таких условиях построение полной бифуркационной диаграммы системы становится невозможным, поэтому имеет смысл рассматривать только отдельные ее листы и фрагменты. Помимо бифуркационных диаграмм в пространстве параметров, для наглядного представления часто используются так называемые *фазопараметрические диаграммы*. При построении такой диаграммы значения управляющего параметра откладываются по оси абсцисс, а ось ординат

соответствует одной из динамических переменных, или некоторой величине, связанной с состоянием ДС.

Резкие изменения состояния системы, вызванные гладкими возмущениями оператора эволюции, в частности, малыми вариациями параметров, называются *катастрофами*. Таким образом, кризисы и катастрофы — очень близкие понятия. Теория катастроф [14, 15], вобравшая в себя идеи теории особенностей Уитни [16], была развита топологом Р. Тома [15], который показал, что существует незначительное число элементарных катастроф, с помощью которых можно локально описать поведение системы. Существенный вклад в развитие теории катастроф был внесен В. И. Арнольдом [7, 17].

1.4.1. Бифуркации состояний равновесия

Седло-узловая бифуркация коразмерности один. Бифуркация коразмерности один может быть описана с использованием только одного управляющего параметра α. Предположим, что при $\alpha < \alpha^*$ система имеет два состояния равновесия: устойчивый узел Q и седло S, показанные на рис. 1.9, *а*. При $\alpha = \alpha^*$ узел и седло сливаются, образуя негрубое состояние равновесия, называемое *седло-узлом* (рис. 1.9, *б*). Оно исчезает



а *б* *в*

Рис. 1.9. Качественная иллюстрация седло-узловой бифуркации коразмерности один

при $\alpha > \alpha^*$ (рис. 1.9, *в*). Поскольку аттрактор (узел) в результате бифуркации исчезает, границы бассейнов притяжения качественно меняются. Следовательно, данная бифуркация является кризисом. Простейшей модельной системой для анализа такой бифуркации служит уравнение первого порядка

$$\dot{x} = \alpha - x^2. \tag{1.37}$$

Считается, что оно описывает поведение точки на неустойчивом многообразии седла, а устойчивое направление исключается из рассмотрения. В такой одномерной модели седлу соответствует неустойчивое состояние равновесия. $x^0_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$ — координаты состояний равновесия,

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

а $s_{1,2} = \mp 2\sqrt{\alpha}$ — собственные значения матрицы линеаризации в точках равновесия. Таким образом, x_1^0 — устойчивое, а x_2^0 — неустойчивое состояния равновесия. При достижении параметром бифуркационного значения $\alpha = 0$, состояния равновесия сливаются в одно $x_1^0 = x_2^0 = 0$. Собственное значение в этой точке равно нулю, имеет место седло-узловая бифуркация. Единственное бифуркационное условие есть: $s(\alpha) = 0$.

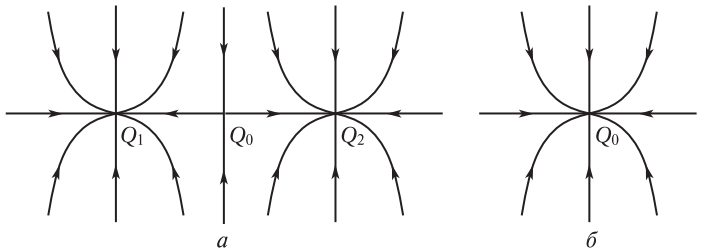


Рис. 1.10. Иллюстрация бифуркации «трехкратное равновесие»: *а* — два устойчивых узла и седло до бифуркации, *б* — один устойчивый узел после бифуркации

Бифуркация коразмерности два — трехкратное равновесие. Эта бифуркация состоит в слиянии трех состояний равновесия: двух узлов Q_1, Q_2 и седла Q_0, расположенного между ними. В результате остается один устойчивый узел в точке Q_0 (иллюстрация на рис. 1.10). Коразмерность бифуркации равна двум, и для ее рассмотрения требуется изменять два параметра. Модельная система для такой бифуркации может быть записана в виде

$$\dot{x} = \alpha_1 + \alpha_2 x + x^3. \tag{1.38}$$

Анализ состояний равновесия показывает, что при $\alpha_2 > 0$ вне зависимости от значения $\alpha_1 > 0$ у системы имеется единственное состояние равновесия Q_0 с собственным значением $s_{Q_0} < 0$, т.е. оно является асимптотически устойчивым. При $\alpha_2 < 0$ существует область значений параметра α_1 (заштрихованная область на бифуркационной диаграмме, изображенной на рис. 1.11, *а*), в которой система имеет три состояния равновесия, Q_0, Q_1 и Q_2. Одно из них, Q_0, является неустойчивым с $s_{Q_0} > 0$, а два других, Q_1 и Q_2, устойчивы с $s_{Q_{1,2}} \leq 0$. Область бистабильности на бифуркационной диаграмме (рис. 1.11) ограничена линиями l_1 и l_2, которые соответствуют седло-узловым бифуркациям узлов $Q_{1,2}$ с седлом Q_0. Линии l_1 и l_2 сходятся к точке A ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), называемой *точкой сборки* или *каспом*. В этой точке одновременно выполняются два бифуркационных условия: $s_{Q_1}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ и $s_{Q_2}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. Поэтому бифуркация трехкратного равновесия имеет коразмерность два. В фазо-

параметрическом пространстве системы (1.38) имеет место структура, называемая сборкой (рис. 1.11, *б*). В области сборки верхний и нижний листы бифуркационной диаграммы соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а центральный — неустойчивому.

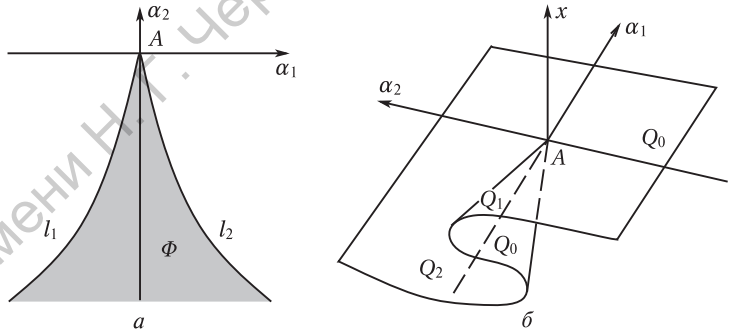


Рис. 1.11. Иллюстрация бифуркации трехкратного равновесия: *а* — бифуркационная диаграмма, *б* — фазо-параметрическая диаграмма

Бифуркация Андронова–Хопфа. В ДС с размерностью $N \geq 2$ возможна такая ситуация, когда пара комплексно-сопряженных собственных значений точки равновесия типа «устойчивый фокус» пересекает мнимую ось. Это означает, что выполнено бифуркационное условие $\operatorname{Re} s_{1,2} = 0$. Пусть при этом $\operatorname{Im} s_{1,2} \neq 0$. Этот случай отвечает *бифуркации Андронова–Хопфа* [1, 18], иначе называемой *бифуркацией рождения* (*исчезновения*) *предельного цикла*. Такая бифуркация была впервые исследована А. А. Андроновым для случая $N = 2$ и затем обобщена Е. Хопфом на системы с произвольным числом измерений N. Существуют два различных вида бифуркаций Андронова–Хопфа: *суперкритическая* или *мягкая* бифуркация, и *субкритическая* или *жесткая* бифуркация. Суперкритическая бифуркация является внутренней, а субкритическая бифуркация соответствует кризису аттрактора. Бифуркация Андронова–Хопфа определяется единственным бифуркационным условием и поэтому имеет коразмерность один.

Суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа проиллюстрирована на рис. 1.12, *а–в* и состоит в следующем. При $\alpha < \alpha^*$ существует устойчивый фокус F, который в точке бифуркации $\alpha = \alpha^*$ превращается в центр и имеет пару чисто мнимых собственных значений $s_{1,2} = \pm \mathrm{j}\omega_0$. При $\alpha > \alpha^*$ фокус F становится неустойчивым ($\operatorname{Re} s_{1,2} > 0$), и вблизи него рождается устойчивый предельный цикл C_0.

Субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа происходит, когда при $\alpha = \alpha^*$ неустойчивый (в общем случае для $N > 2$ седловой) предельный

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

цикл C_0 «стягивается» в точку фокуса F, который был устойчивым при $\alpha < \alpha^*$. В результате цикл исчезает, а фокус становится неустойчивым (рис. 1.12, *г–е*).

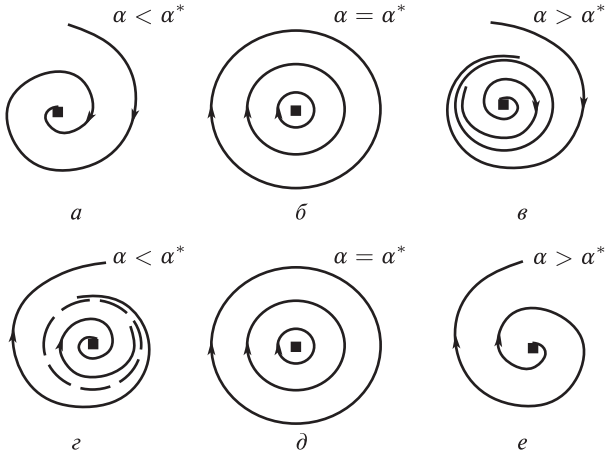


Рис. 1.12. Суперкритическая (*а–в*) и субкритическая (*г–е*) бифуркации Андронова–Хопфа

Модельная система для бифуркации Андронова–Хопфа имеет следующий вид:

$$\dot{a} = (\alpha + \mathrm{j}\omega_0)a + L_1 a|a|^2, \quad \omega_0 \neq 0, \quad L_1 \neq 0, \tag{1.39}$$

где a — мгновенная комплексная амплитуда. Величина L_1 называется *первой ляпуновской величиной* состояния равновесия. Если $L_1 < 0$, бифуркация является суперкритической. Если $L_1 > 0$, то бифуркация — субкритическая[1]). Для вещественной мгновенной амплитуды и мгновенной фазы колебаний из (1.39) получаем

$$\dot{A} = \alpha A + L_1 A^3, \quad \dot{\Phi} = \omega_0, \tag{1.40}$$

где $A = |a|$ и $\Phi = \mathrm{Arg}(a)$. Из уравнения для стационарной амплитуды $\alpha A + L_1 A^3 = 0$ получаем значения, соответствующие фокусу ($A_F = 0$) и предельному циклу ($A_0 = \sqrt{-\alpha/L_1}$). Предельный цикл существует при условии, что $\alpha/L_1 < 0$. Величина ω_0 определяет его период $T = 2\pi/\omega_0$. Анализ линеаризованного уравнения для возмущения амплитуды позволяет найти собственные значения для решений $A = A_F$ и $A = A_0$:

[1]) Характер бифуркации в особом (вырожденном) случае $L_1 = 0$ нуждается в дополнительном анализе с учетом высших степеней a.

$s_{F,0} = \alpha + 3L_1 A_{F,0}^2$. Отсюда видно, что для $L_1 < 0$ цикл существует и устойчив при $\alpha > 0$, а фокус устойчив при $\alpha < 0$ и неустойчив при $\alpha > 0$. В случае $L_1 > 0$ при $\alpha < 0$ существуют неустойчивый цикл и устойчивый фокус, тогда как при $\alpha > 0$ — только неустойчивый фокус.

1.4.2. Бифуркации предельных циклов

Рассмотрим локальные бифуркации коразмерности один невырожденного предельного цикла, у которого имеется только один равный единице мультипликатор. Отбросим единичный мультипликатор и расположим оставшиеся мультипликаторы в порядке убывания абсолютных значений. В этом случае бифуркации предельного цикла связаны с одним действительным или двумя комплексно-сопряженными старшими мультипликаторами $\mu_{1,2}$. Поскольку бифуркация коразмерности один предполагает только одно бифуркационное условие, соответствующее равенству $|\mu_1| = 1$, то возможны лишь три различных типа бифуркаций: $\mu_1(\alpha^*) = +1$, $\mu_1(\alpha^*) = -1$, и $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm \mathrm{j}\varphi)$, где α^* — бифуркационное значение параметра. Для анализа бифуркаций предельного цикла, целесообразно использовать сечение Пуанкаре. Неподвижные точки в отображении последования характеризуются теми же самыми мультипликаторами, что и исходный предельный цикл, а переход к сечению делает анализ более удобным [2].

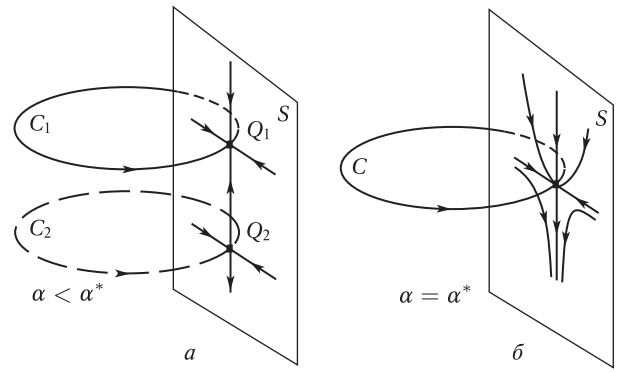


Рис. 1.13. Седло-узловая бифуркация предельных циклов

Седло-узловая бифуркация. При достижении параметром α бифуркационного значения $\alpha = \alpha^*$ мультипликатор μ_1 устойчивого цикла становится равным $+1$. Рисунок 1.13 иллюстрирует эту бифуркацию для случая трехмерного фазового пространства ($N = 3$). При $\alpha < \alpha^*$ существуют два предельных цикла: устойчивый цикл C_1 и седловой цикл C_2

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

(рис. 1.13, *а*). Им отвечают устойчивая Q_1 и неустойчивая Q_2 неподвижные точки в сечении Пуанкаре. Условие $\mu_1 = 1$ определяет бифуркацию, подобную седло-узловой бифуркации состояний равновесия, рассмотренной выше. В бифуркационной точке $\alpha = \alpha^*$ происходит слияние циклов C_1 и C_2, в результате чего возникает негрубая замкнутая траектория C типа седло–узел (рис. 1.13, *б*), которая исчезает при $\alpha > \alpha^*$. Изменение параметра α в обратном направлении приводит к рождению пары циклов C_1 и C_2 из сгущения фазовых траекторий.

Бифуркация удвоения периода. В бифуркационной точке $\alpha = \alpha^*$ мультипликатор $\mu_1(\alpha^*)$ становится равным -1, причем $d\mu/d\alpha|_{\alpha^*} \neq 0$. Бифуркация, определяемая таким условием, называется *бифуркацией удвоения периода*. Эта бифуркация может быть суперкритической (внутренней) или субкритической (кризисом). Суперкритическая бифуркация удвоения происходит следующим образом: пусть при $\alpha < \alpha^*$ существует устойчивый предельный цикл C_0 с периодом T_0. При $\alpha > \alpha^*$ цикл C_0 становится седловым, и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл C с периодом T, близким к удвоенному T_0 ($T \approx 2T_0$). Фазовые траектории C_0 и C, а также их сечение Пуанкаре вблизи точки бифуркации, изображены на рис. 1.14, *а*. Рисунок 1.14, *б* показывает, как меняется форма колебаний одной из динамических переменных при прохождении точки бифуркации.

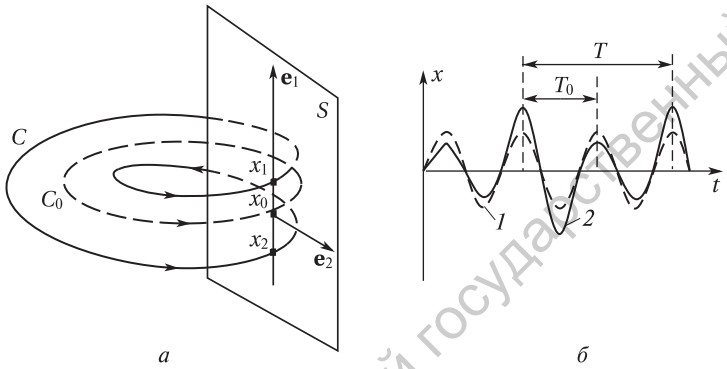


Рис. 1.14. Суперкритическая бифуркация удвоения периода: *а* — циклы C_0 и C и их сечение Пуанкаре; *б* — форма колебаний до (*1*) и после (*2*) бифуркации

Когда происходит субкритическая бифуркация удвоения периода, устойчивый цикл C_0 и седловой цикл C с удвоенным периодом, существующий при $\alpha < \alpha^*$, сливаются в точке бифуркации, после чего в фазовом пространстве остается только цикл C_0, ставший седловым.

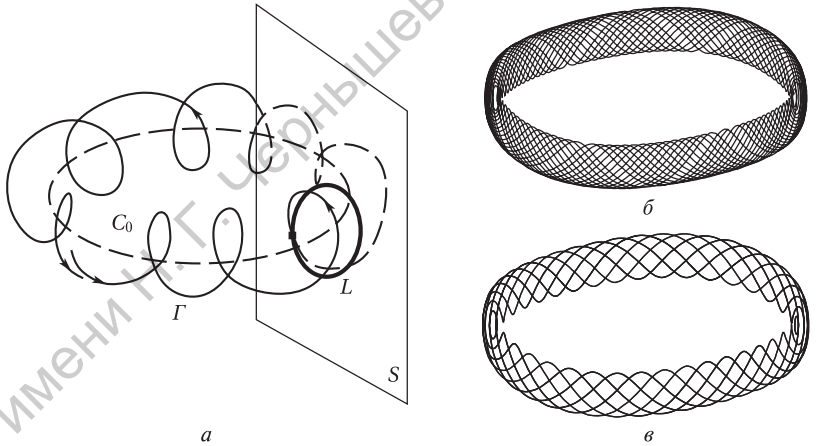


Рис. 1.15. Бифуркация рождения тора из предельного цикла C_0: *а* — траектория Γ на торе в окрестности неустойчивого цикла C_0, *б* — эргодический тор, *в* — резонанс на торе

Бифуркация рождения (исчезновения) двумерного тора (бифуркация Неймарка[1]). Эта бифуркация происходит, когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов предельного цикла выходит на единичную окружность. В бифуркационной точке $\alpha = \alpha^*$ имеет место следующее соотношение: $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm j\varphi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$, и $\varphi(\alpha^*) \neq 0, \pi/2, \pi/3$ (исключены так называемые *сильные резонансы*). Данная бифуркация также может быть суперкритической (внутренней) и субкритической (кризисом). В зависимости от характера бифуркации могут возникать различные ситуации. В случае суперкритической бифуркации из устойчивого предельного цикла C_0 рождается устойчивый двумерный ($2D$) тор T^2. Цикл C_0 в результате бифуркации теряет устойчивость и становится седловым. Субкритическая бифуркация имеет место, когда неустойчивый (седловой) тор T^2 «стягивается» к устойчивому циклу C_0, который в этот момент теряет устойчивость. Рождение тора из предельного цикла изображено на рис. 1.15, *а*. Вблизи точки бифуркации $\alpha = \alpha^*$ вектор малого возмущения $\mathbf{y}$ цикла C_0 вращается вдоль траектории C_0. В то же время, величина возмущения остается неизменной, так как выполняется условие $|\mu_{1,2}(\alpha^*)| = 1$. Таким образом, изображающая точка в сечении Пуанкаре движется вдоль замкнутой кривой L, называемой *инвариантной окружностью*. Величина $\theta(\alpha) = \varphi/2\pi$ называется *числом вращения* на торе T^2 (или на соответствующей инвариантной окружности). Ес-

[1]) Она также называется бифуркацией Неймарка–Сакера.

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

ли число вращения $\theta(\alpha^*)$ принимает иррациональное значение, любая траектория C на торе незамкнута, и возникший тор является *эргодическим* (рис. 1.15, *б*). Если $\theta(\alpha^*) = p/q$, где p и q — любые положительные целые числа, то говорят, что на торе имеет место резонанс порядка p/q. Траектория замыкается, образуя предельный цикл, лежащий на поверхности тора. Пример резонанса на торе показан на рис. 1.15, *в*.

Бифуркации нарушения симметрии. Бифуркации предельных циклов, задаваемые условиями $\mu_1(\alpha^*) = \pm 1$ и $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm \mathrm{j}\varphi)$, могут привести к ситуации, когда предельный цикл теряет свою симметрию. Такие бифуркации типичны, например, для систем, состоящих из двух или более идентичных подсистем. Свойство симметрии связано с существованием в фазовом пространстве системы некоторого инвариантного многообразия U. В качестве примера рассмотрим случай двух связанных идентичных подсистем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}(\mathbf{y}, \alpha) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \tag{1.41}$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^N$ — векторы состояния подсистем, α — вектор параметров, γ — параметр связи. Функция $\mathbf{g}$ задает функцию связи между подсистемами, причем $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. В этом случае подпространство $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ есть инвариантное симметричное многообразие. Пусть устойчивый предельный цикл расположен в U, т. е. является симметричным. Если какой-либо мультипликатор симметричного цикла, соответствующий собственному вектору, не лежащему в U, принимает бифуркационное значение, то имеет место бифуркация нарушения симметрии. В результате возникает несимметричный аттрактор, т. е. аттрактор, не расположенный в U. Говорят, что в результате бифуркации аттрактор теряет симметрию. Бифуркации нарушения симметрии, определенные условиями $\mu_1(\alpha^*) = -1$ и $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm \mathrm{j}\varphi)$ очень похожи на аналогичные бифуркации в системе без симметрии. Бифуркация, определенная условием $\mu_1(\alpha^*) = +1$, представляет особый случай. В результате этой бифуркации симметричный цикл $C_0 \in U$ продолжает существовать, но становится седловым. Это приводит к рождению двух устойчивых циклов с тем же самым периодом. Они не лежат в U, но взаимно симметричны. Такая бифуркация известна под названием *бифуркации вил*. Рисунок 1.16 изображает фазовые портреты после бифуркации вил. Фазо-параметрическая диаграмма этой бифуркации представлена на рис. 1.16, *б*, где по оси ординат отложена разность соответствующих переменных $(x_1^{\mathrm{s}} - y_1^{\mathrm{s}})$ в некотором сечении циклов.

Мы рассмотрели локальные бифуркации состояний равновесия и предельных циклов. Различные бифуркации происходят также и с более сложными множествами (торами, хаотическими аттракторами). Однако,

их изучение зачастую основано на экспериментальных результатах. Теория бифуркаций квазипериодических и хаотических аттракторов еще не завершена и находится в состоянии развития.

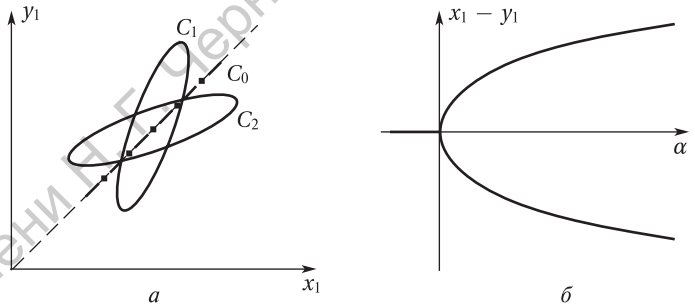


Рис. 1.16. Бифуркация вил в системе с симметрией: *а* — проекция предельных циклов после бифуркации, *б* — качественная иллюстрация фазо-параметрической диаграммы

1.4.3. Нелокальные бифуркации. Гомоклинические траектории и структуры

Нелокальные бифуркации связаны с поведением устойчивых и неустойчивых многообразий седловых предельных множеств в фазовом пространстве. Сами по себе эти бифуркации не являются причиной топологических изменений седловых предельных множеств, но могут существенно влиять на динамику системы. Рассмотрим основные нелокальные бифуркации [2, 11].

Петля сепаратрисы седлового состояния равновесия. Эта бифуркация в простейшей форме может быть реализована уже на фазовой плоскости. Рассмотрим седловое состояние равновесия Q, устойчивая W_Q^{s} и неустойчивая W_Q^{u} сепаратрисы которого сближаются при увеличении параметра α и касаются друг друга при $\alpha = \alpha^*$. В момент касания рождается особая двоякоасимптотическая фазовая траектория Γ_0, называемая *петлей сепаратрисы седла* (рис. 1.17, *а*). Выполнение условия касания соответствует бифуркационному многообразию коразмерности один в пространстве параметров. Сепаратрисная петля в диссипативной системе является негрубой структурой и разрушается при $\alpha \neq \alpha^*$. Что будет происходить после ее разрушения, зависит от поведения сепаратрис после их расщепления и от *седловой величины* σ_Q состояния равновесия в точке бифуркации. Седловая величина определяется как $\sigma_Q(\alpha) = s_1(\alpha) + s_2(\alpha)$, где $s_{1,2}$ — собственные значения матрицы линеаризации в точке Q. Если $\sigma_Q(\alpha^*) < 0$, то при разрушении петли в направлении A, как показано на рис. 1.17, *а*, из нее рождается единственный устойчивый цикл C

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

(рис. 1.17, *б*). При разрушении петли в направлении B рождения цикла не происходит. Если $\sigma_Q(\alpha^*) > 0$, то петля Γ_0 называется *неустойчивой*, и при разрушении Γ_0 может родиться неустойчивый предельный цикл.

Рис. 1.17. Бифуркация образования петли сепаратрисы. Поведение сепаратрис в бифуркационной точке (*а*) и после бифуркации (*б*)

Бифуркация образования сепаратрисной петли, рассматриваемая при движении по параметру в обратном направлении, может интерпретироваться как кризис предельного цикла C, связанный с касанием седла Q. В момент касания возникает петля Γ_0. При приближении к точке бифуркации, период цикла стремится к бесконечности, а мультипликаторы обращаются в нуль [19].

Более сложный вариант нелокальной бифуркации подобного типа возможен в фазовом пространстве с размерностью $N \geq 3$. Рассмотрим его для $N = 3$. Пусть Q является седло-фокусом с одномерным неустойчивым и двумерным устойчивым многообразиями. Он характеризуется так называемой *первой седловой величиной* $\sigma_1(\alpha) = \mathrm{Re}\, s_{1,2}(\alpha) + s_3(\alpha)$, где $s_{1,2} = \mathrm{Re}\, s_{1,2} \pm \mathrm{j}\, \mathrm{Im}\, s_{1,2}$ и s_3 — собственные значения линеаризованной матрицы в точке Q. Пусть при $\alpha = \alpha^*$ существует *петля сепаратрисы седло-фокуса* Γ_0, (рис. 1.18), и $\sigma_1(\alpha^*) \neq 0$. При сделанных предположениям, справедлива теорема Л.П. Шильникова [20], которая утверждает следующее:

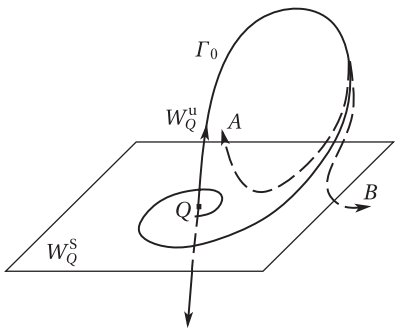


Рис. 1.18. Петля сепаратрисы седло-фокуса и возможные способы ее разрушения

— $\sigma_1(\alpha^*) < 0$ (случай безопасной петли). Если петля разрушается по направлению A, как показано на рис. 1.18, из нее рождается устойчивый цикл Γ. При разрушении петли по направлению B ничего не происходит;

— $\sigma_1(\alpha^*) > 0$ (опасная петля). В момент существования петли Γ_0, и затем, при ее разрушении в направлении A или B, в окрестности петли образуется сложная структура фазовых траекторий. Эта структура состоит из счетного множества периодических аттракторов, репеллеров и седел, а также из подмножества хаотических траекторий, называемого *нетривиальным гиперболическим подмножеством*. Такая структура связана с возникновением в сечении Пуанкаре вблизи петли множества отображений типа подковы Смейла.

Если изучаемая система имеет седло-фокус с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями, теорема Шильникова может быть применена при использовании замены t на $-t$.

Петля сепаратрисы седло-узла. Эта бифуркация также возможна уже для $N = 2$. Предположим, что при $\alpha < \alpha^*$ на фазовой плоскости существуют два состояния равновесия: седло Q_1 и устойчивый узел Q_2. Кроме того, в результате замыкания неустойчивых сепаратрис седла на устойчивый узел образуется петля сепаратрисы седла, как показано на рис. 1.19, *а*. В точке $\alpha = \alpha^*$ происходит седло-узловая бифуркация состояний равновесия и возникает негрубое состояние равновесия типа седло–узел. При этом седло-узел имеет двоякоасимптотическую гомоклиническую траекторию Γ_0, т. е. сепаратрисную петлю (рис. 1.19, *б*). Когда $\alpha > \alpha^*$, седло-узел исчезает и из петли возникает предельный цикл C (рис. 1.19, *в*).

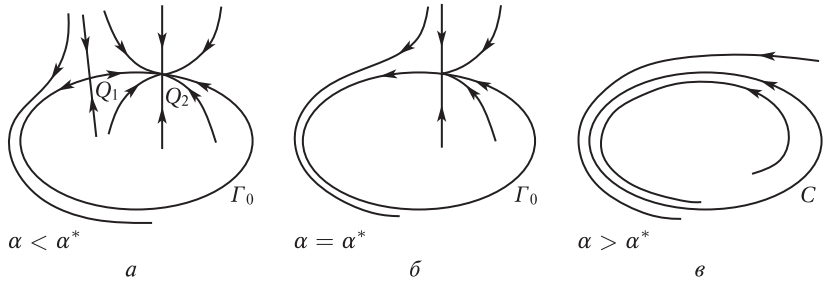


Рис. 1.19. Бифуркация возникновения петли сепаратрисы седло-узла

Эта бифуркация, при рассмотрении ее в обратном порядке, является бифуркацией исчезновения цикла C. Она приводит к возникновению на цикле седло-узловой точки. При $\alpha \to \alpha^*$ период цикла возрастает до бесконечности, а мультипликаторы цикла стремятся к нулю.

Бифуркация, описанная выше, сохраняет границы притягивающей области (бассейна притяжения) и, таким образом, является внутренней бифуркацией.

Возникновение гомоклинической траектории седлового предельного цикла. Такая бифуркация возможна только при $N \geq 3$. Пусть $N = 3$. В этом случае могут существовать седловые предельные циклы с двумерными устойчивыми W^{s} и двумерными неустойчивыми W^{u} многообразиями.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

В секущей плоскости такому циклу соответствует седловая неподвижная точка. Эта неподвижная точка имеет одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия. Предположим, что с ростом параметра α многообразия цикла сближаются, и при $\alpha = \alpha^*$ происходит их касание. Бифуркация коразмерности один состоит в появлении негрубой двояко-асимптотической кривой Γ_0, называемой *гомоклинической кривой Пуанкаре*. При $\alpha > \alpha^*$, многообразия W^{s} и W^{u} пересекаются, при этом возникают две грубых гомоклинических кривых Γ_1^0 и Γ_2^0. В секущей плоскости каждой гомоклинической кривой соответствует бесконечная двояко-асимптотическая последовательность точек пересечения сепаратрис Q_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 1.20). При приближении к седлу точки Q_n уплотняются, но стремятся к седлу только в пределе $n \to \pm\infty$.

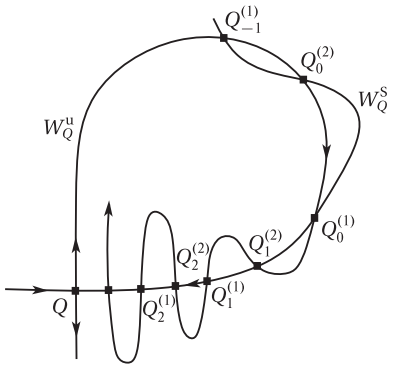


Рис. 1.20. Гомоклиническое пересечение многообразий седлового цикла (представление в секущей плоскости)

В [21, 22] показано, что около гомоклинической кривой седлового цикла возникает сложное множество траекторий. Это множество, называемое *гомоклинической структурой*, подобно множеству траекторий, возникающему в окрестности опасной петли сепаратрисы седло-фокуса и тоже связано с образованием в локальной окрестности петли отображений типа подковы. В окрестности гомоклинической кривой всюду плотны устойчивые, неустойчивые и седловые периодические орбиты. Кроме того, гомоклиническая структура включает подмножество хаотических траекторий, которое, при соответствующих условиях, может стать притягивающим.

Подобная структура характерна и для окрестности *гетероклинических траекторий*, которые появляются, когда неустойчивое многообразие одного седлового цикла касается, а затем пересекает устойчивое многообразие другого седлового цикла.

1.5. АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Как уже указывалось, в диссипативной системе элемент фазового объема сжимается в процессе эволюции во времени. Предельное множество фазовых траекторий диссипативной ДС всегда имеет нулевой

объем. В частности, предельное множество может быть точкой, линией, поверхностью, или совокупностью поверхностей, которые образуют канторову структуру в сечении Пуанкаре.

Хаотические процессы в детерминированных нелинейных диссипативных системах — одна из фундаментальных проблем современного естествознания, являющаяся предметом пристального внимания исследователей [2, 23–27].

Образ динамического хаоса долгое время был связан со *странными аттракторами* [28]. Позднее пришло понимание, что хаотические автоколебания могут быть существенно разными по своим свойствам. Этим обуславливаются различия в структуре соответствующих аттракторов. Оказалось, что странный аттрактор является образом некоторого «идеального» хаоса, удовлетворяющего ряду строгих математических требований. Режим странного аттрактора в смысле строгого математического определения не реализуется в динамических системах, которые моделируются обыкновенными дифференциальными уравнениями. То, что мы обычно наблюдаем в численных экспериментах, соответствует режиму так называемого *квазигиперболического* аттрактора или *негиперболического* аттрактора [11, 29]. Отличительной особенностью странных, квазигиперболических и негиперболических хаотических аттракторов является *экспоненциальная неустойчивость* фазовых траекторий и фрактальная (нецелая) размерность. Экспоненциальная неустойчивость служит критерием хаотического поведения системы во времени. Дробная размерность свидетельствует о том, что аттрактор — сложный геометрический объект.

Эволюция во времени состояний системы с конечным числом степеней свободы описывается некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_N, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \tag{1.42}$$

либо отображений последования

$$x_{n+1}^i = f_i(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^N, \alpha_1, \ldots, \alpha_k), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где $x_i(t)$ (или x_n^i) — переменные, однозначно определяющие состояние системы (его фазовые координаты) и α_l — параметры системы, $f_i(\mathbf{x}, \alpha)$ являются, в общем случае, нелинейными функциями.

В дальнейшем будут рассматриваться только автоколебательные ДС (1.42). Последнее означает, что система демонстрирует установившиеся колебания, чьи характеристики не зависят от выбора начального состояния в пределах некоторой области фазового пространства.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Рассмотрим фазовое пространство $\mathbf{R}^N$ систем (1.42), зафиксировав значения всех параметров α_l. Пусть имеется некоторая конечная (или бесконечная) область G_1, принадлежащая $\mathbf{R}^N$, которая включает множество G_0. G_1 и G_0 удовлетворяют следующим условиям [7, 30–32]:

— для любых начальных условий $x_i(0)$ (или x_0^i) из области G_1 при $t \to \infty$ (или $n \to \infty$) все фазовые траектории рано или поздно достигают G_0;

— G_0 представляет собой минимальное компактное подмножество в фазовом пространстве системы;

— если фазовая траектория принадлежит G_0 в момент времени $t = t_1$ ($n = n_1$), то она будет принадлежать G_0 всегда, т. е. для любого $t \geq t_1$ ($n > n_1$) фазовая траектория будет находиться в G_0.

Если эти условия выполнены, то множество G_0 называется *аттрактором* ДС (1.42). G_1 называется *областью* (*или бассейном*) *притяжения* аттрактора G_0.

1.5.1. Регулярные аттракторы

До открытия детерминированного хаоса было известно всего три типа устойчивых установившихся решений ДС (1.42): состояние равновесия, устойчивое периодическое решение и устойчивое квазипериодическое решение. Соответствующими аттракторами дифференциальной системы в этих случаях являются: точка, предельный цикл и предельный n-мерный тор. Спектр ЛХП фазовой траектории на регулярном аттракторе содержит только нулевые и отрицательные показатели.

Непериодические решения системы (1.42) могут соответствовать хаотическим аттракторам сложной геометрической структуры, которые имеют по крайней мере один положительный ляпуновский показатель и, как следствие, дробную размерность, которую можно оценить, например, по формуле Каплана–Йорка [33]:

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \tag{1.43}$$

где j — наибольшее целое число, для которого $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j \geq 0$. Размерность D_L, вычисляемая по формуле (1.43), соответствует одному из определений фрактальной размерности множества и называется *ляпуновской размерностью*. Ляпуновская размерность служит оценкой снизу для метрической размерности аттрактора [34]. Если применить (1.43) к трем указанным типам аттракторов, то получим $D_L = 0$ для состояния равновесия, $D_L = 1$ для предельного цикла и $D_L = n$ для n-мерного тора. Во всех случаях фрактальная размерность D_L равна метрической

размерности аттракторов. То, что траектории на аттракторе асимптотически устойчивы, а размерность D_L принимает целое значение, строго совпадающие с метрической размерностью, позволяет назвать указанные типы аттракторов регулярными. Нарушение одного из сформулированных условий исключает аттрактор из класса регулярных.

1.5.2. Грубые гиперболические хаотические аттракторы

В 1971 г. Рюэль и Такенс строго доказали существование апериодических решений системы (1.42). Они также ввели понятие странного аттрактора как образа детерминированного хаоса [28]. С тех пор явление детерминированного хаоса и понятие странного аттрактора во многих работах практически однозначно связывают друг с другом. Однако при более детальном рассмотрении это оказывается не всегда справедливым и требует пояснений.

Доказательство существования странного аттрактора было дано при жестком требовании, что ДС (1.42) является грубой и гиперболической [11, 28, 31, 35]. Система с гиперболическим (странным) аттрактором является грубой и гиперболической, если все ее фазовые траектории являются седловыми и сохраняют свои свойства при малых возмущениях. Любая точка, как образ траектории в сечении Пуанкаре, в гиперболической системе всегда является седлом. Грубость означает, что при малом возмущении правых частей (1.42), например, при небольшом изменении параметров системы, все траектории на аттракторе остаются седловыми.

Гиперболические хаотические аттракторы должны удовлетворять следующим условиям [31]:

— гиперболический аттрактор состоит из континуума «неустойчивых листов» или кривых, всюду плотных в аттракторе, вдоль которых близкие траектории экспоненциально расходятся;

— в окрестности любой точки гиперболический аттрактор имеет одну и ту же геометрию, определяемую произведением канторова множества на интервал;

— гиперболический аттрактор имеет окрестность в виде расщепленных устойчивых слоев, вдоль которых близкие траектории сходятся к аттрактору.

Грубость означает, что эти свойства не меняются при возмущениях.

Неустойчивые многообразия W^{u} седловых траекторий не могут покинуть области аттрактора. Они концентрируются в области G_0 и должны пересекаться с устойчивыми многообразиями W^{s}, вдоль которых траектории приближаются к аттрактору. Это ведет к появлению гомоклинических точек (поверхностей) и формированию гомоклинических

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

структур, которые должны быть грубыми в грубых гиперболических системах. Качественная картина грубого пересечения W^s и W^u изображена на рис. 1.21, *а*. Случаи, показанные на рис. 1.21, *б* и *в*, исключаются, так как они соответствуют негрубым ситуациям: замыканию многообразий с образованием петли (рис. 1.21, *б*) и касанию устойчивого и неустойчивого многообразий (рис. 1.21, *в*). Если нелокальные свойства многообразий приводят к негрубым ситуациям, изображенным на рис. 1.21, *б* и *в*, то при возмущении ДС возможны бифуркации [11]. Однако, в грубых гиперболических системах никаких бифуркаций происходить не должно.

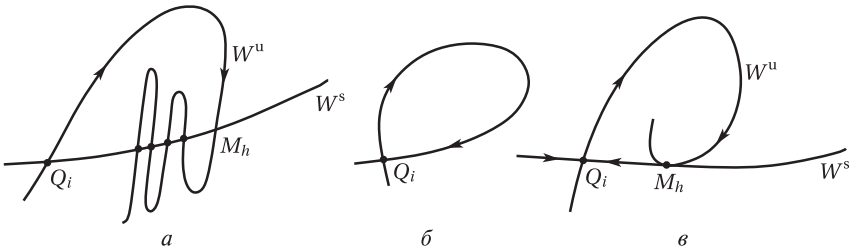


Рис. 1.21. Возможные случаи пересечения устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловой точки Q_i в сечении Пуанкаре

Странный (согласно Рюэлю–Такенсу) аттрактор является всегда грубым гиперболическим предельным множеством. Главная особенность, которая отличает странные хаотические аттракторы от регулярных, — экспоненциальная неустойчивость фазовых траекторий на аттракторе. В этом случае спектр ЛХП содержит, по крайней мере, один положительный показатель. Фрактальная размерность аттрактора дифференциальной системы всегда больше двух и, в общем случае, не является целым числом. Минимальная размерность фазового пространства, в которое может быть «вложен» странный аттрактор равна 3.

В математике известны по крайней мере два примера грубых гиперболических аттракторов. Это аттрактор Смейла–Вильямса [36] и аттрактор Плыкина [37]. К сожалению, до сих пор режим грубого гиперболического хаоса в реальных системах не был найден[1]). «Истинно» странный аттрактор — это идеальная, но все же пока недостижимая модель детерминированного хаоса.

[1]) Попытка построить математическую модель системы с грубым гиперболическим хаотическим аттрактором в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений предпринимается в [38]. Однако строгое доказательство того, что аттрактор системы является грубым гиперболическим, пока отсутствует.

1.5.3. Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Лоренца

Условия гиперболичности, отмеченные выше, не выполняются для реальных ДС. Тем не менее, существуют ДС, аттракторы которых очень близки по структуре и свойствам к гиперболическим. Такие аттракторы являются хаотическими, не включают устойчивых регулярных траекторий и сохраняют эти свойства при малых возмущениях. Теоретически, квазигиперболические аттракторы не являются структурно устойчивыми. Точнее, ДС с квазигиперболическими аттракторами являются структурно неустойчивыми. Для них нарушается по крайней мере одно из трех условий грубой гиперболичности, сформулированных выше. Однако изменения в структуре аттрактора при этом настолько незначительны, что они не отражаются в экспериментально измеряемых характеристиках.

Следуя определению, данному в [31], назовем почти гиперболические аттракторы *квазигиперболическими*. Известны квазигиперболические аттракторы Лози, Белых и аттракторы типа Лоренца.

1.5.4. Негиперболические хаотические аттракторы

Эти аттракторы наиболее типичны и соответствуют экспериментально наблюдаемому хаосу [11]. Системы с негиперболическими аттракторами демонстрируют режимы детерминированного хаоса, которые характеризуются экспоненциальной неустойчивостью фазовых траекторий и фрактальной структурой аттрактора. С этой точки зрения, характеристики негиперболических аттракторов идентичны основным характеристикам грубых гиперболических и квазигиперболических аттракторов. Однако, есть очень существенная разница. Отличительная особенность негиперболических аттракторов состоит в сосуществовании счетного множества различных хаотических и регулярных притягивающих подмножеств в ограниченной области фазового пространства системы при фиксированных значениях ее параметров. Эта совокупность всех сосуществующих предельных подмножеств траекторий в ограниченной области G_0, в которую попадают все или почти все траектории из области G_1, называется *негиперболическим аттрактором* или *квазиаттрактором* ДС. Следовательно, негиперболические аттракторы имеют очень сложную структуру вложенных бассейнов притяжения. Но сложность негиперболических аттракторов этим не ограничивается. При изменении параметров системы в любой ограниченной области значений в системе с квазиаттрактором происходит множество различных бифуркаций как регулярных, так и хаотических предельных множеств. Когда параметры системы меняются в некотором конечном диапазоне, как регулярные,

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

так и хаотические аттракторы претерпевают целые каскады различных бифуркаций.

ДС с негиперболическими аттракторами структурно неустойчивы. Фундаментальная причина негиперболичности квазиаттрактора состоит в существовании структурно неустойчивых гомоклинических траекторий, показанных на рис. 1.21, *б* и *в*. Для такой ситуации Ньюхаусом были получены следующие строгие результаты [22].

Теорема 1 (Ньюхауса). *В любой окрестности C^r-гладкого ($r \geq 2$) двумерного диффеоморфизма, имеющего седловую неподвижную точку со структурно неустойчивой гомоклинической траекторией, существуют области, где всюду плотны системы со структурно неустойчивыми гомоклиническими траекториями.*

Эти области называются *областями Ньюхауса*. При изменении управляющего параметра в структурно неустойчивой ДС, наблюдается счетное множество областей Ньюхауса.

Теорема 2 (Ньюхауса). *Любой сколь угодно малый интервал $(-\alpha_0, \alpha_0)$ изменения некоторого параметра $|\alpha_0| > 0$ системы содержит счетное множество областей Ньюхауса, где $\alpha_0 = 0$ соответствует случаю гомоклинического касания.*

Эти результаты особенно важны для решения многих проблем нелинейной динамики. Отметим, что результаты Ньюхауса обобщены на многомерный случай в [39].

1.5.5. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы

Хаотические аттракторы, описанные выше, характеризуются двумя фундаментальными свойствами: имеют сложную геометрическую структуру и демонстрируют экспоненциальную неустойчивость индивидуальных траекторий. Именно эти свойства используются исследователями в качестве критерия для диагностики режимов детерминированного хаоса.

Однако, как уже упоминалось, хаотическое поведение в смысле перемешивания может не сопровождаться «странностью» аттрактора и наоборот, странные аттракторы с фрактальной геометрической структурой могут быть нехаотическими из-за отсутствия экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий [40, 41]. С другой стороны, имеются примеры перемешивающих диссипативных систем, аттракторы которых не являются странными в смысле их геометрической структуры, т. е. они имеют целочисленную размерность [29, 42].

Другими словами, существуют примеры конкретных диссипативных ДС, аттрактор которых характеризуется следующими свойствами:

— аттрактор обладает регулярной геометрической структурой и целой метрической размерностью, но индивидуальные фазовые траектории на аттракторе экспоненциально неустойчивы;

— аттрактор имеет сложную геометрическую структуру, но траектории на нем устойчивы по Ляпунову. Перемешивание отсутствует.

Первый тип называется *хаотическим нестранным аттрактором* (ХНА). Второй известен как *странный нехаотический аттрактор* (СНА). Более детальное описание и анализ ХНА и СНА не входит в нашу задачу, так как исследование указанных типов аттракторов выходит за рамки учебника.

1.6. ВЫВОДЫ

В данном разделе рассмотрены элементы теории динамических систем, являющиеся очень важными для изучения процессов возбуждения автоколебаний, анализа их характеристик и свойств, особенно при изменении управляющих параметров. Достаточно подробно описаны типы аттракторов ДС, являющиеся математическими образами автоколебаний в фазовом пространстве системы. Автоколебания могут быть периодическими (предельный цикл), квазипериодическими (n-мерный тор) или хаотическими (странный аттрактор). Если следовать определению А. А. Андронова, то требование грубости не выполняется в отношении негиперболических хаотических аттракторов, но в рамках настоящей книги мы будем использовать любой тип хаотического аттрактора как образ хаотических автоколебаний. Насколько такое предположение яаляется математически обоснованным, на сегодняшний день пока неизвестно.

Литература

1. *Andronov A. A., Vitt E. A., Khaikin S. E.* // Theory of Oscillations. — Oxford: Pergamon Press, 1966.
2. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990 (2-е изд. — М.: УРСС, 2009).
3. *Кузнецов С. П., Кузнецов А. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания. — М.: Физматгиз, 2002.
4. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1972.
5. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. Т. 1, 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1954–1956.
6. *Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. E., Maier A. G.* The Theory of Dynamical Systems on a Plane. — Israel Program of Scientific Translations, 1973.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

7. *Afraimovich V. S., Arnold V. I., Il'yashenko Yu. S., Shilnikov L. P.* // In: Dynamical Systems V. Encyclopedia of Mathematical Sciences. — Berlin: Springer, 1989.
8. *Haken H.* Advanced Synergetics. — Berlin: Springer, 1985.
9. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
10. *Smale S.* Differentiable Dynamical Systems // Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — V. 73. — P. 747–817.
11. *Shilnikov L. P.* Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: a Tutorial // Int. J. Bifurc. Chaos. — 1997. — V. 7(9). — P. 1953–2001.
12. *Ильяшенко Ю. С., Ли В.* Нелокальные бифуркации. — М.: МЦНМО, 1999.
13. *Grebogi C., Ott E., Yorke J. A.* Chaotic Attractors in Crisis // Phys. Rev. Lett. — 1982. — V. 48. — P. 1507–1510.
14. *Poston T., Steward I.* Catastrophe Theory and its Applications. — London: Pitman, 1978.
15. *Thom R.* Structural Stability and Morphogenesis. — Benjamin-Addison Wesley, 1975.
16. *Whitney H.* The Singularities of a Smooth n-manifold in $(2n-1)$-space // Ann. of Math. — 1944. — V. 45. — P. 247–293.
17. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн–Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. — М.: Наука, 1982.
18. *Marsden L. E., McCraken M.* The Hopf Bifurcation and its Applications. — N.Y.: Springer, 1976.
19. *Шильников Л. П.* О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Матем. сб. — 1963. — Т. 61(104). — С. 443–466.
20. *Шильников Л. П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокуса // Матем. сб. — 1970. — Т. 81(123). — С. 92–103.
21. *Гаврилов Н. К., Шильников Л. П.* О трехмерных динамических системах, близких к негрубой гомоклинической кривой // Матем. сб. — 1972. — Т. 88(130), №8. — С. 475–492; Матем. сб. — 1973. — Т. 90(132), №1. — С. 139–156.
22. *Newhouse S. E.* The Abundance of Wild Hyperbolic Sets and Non-smooth Stable Sets for Diffeomorphisms // Publ. Math. IHES. — 1979. — V. 50. — P. 101–151.
23. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. — М.: Физматгиз, 2001.
24. *Мун Ф.* Хаотические колебания. — М.: Мир, 1990.
25. *Анищенко В. С.* Знакомство с нелинейной динамикой. — М.–Ижевск: Институт комп. иссл., 2002.
26. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.
27. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987.
28. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности // В кн.: Странные аттракторы / Под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова. — М.: Мир, 1981. — С. 117–151.

29. *Anishchenko V. S., Strelkova G. I.* Irregular Attractors // Discrete Dyn. Nat. Soc. — 1998. — V. 2. — P. 53–72.
30. *Afraimovich V. S., Shilnikov L. P.* Strange Attractors and Quasiattractors // In: Nonlinear Dynamics and Turbulence / Ed. by G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. — Boston: Pitman, 1983. — P. 1–34.
31. *Afraimovich V. S.* Attractors // In: Nonlinear Waves / Ed. by A. V. Gaponov, M. I. Rabinovich, J. Engelbrechet. — Berlin: Springer, 1989. — P. 6–28.
32. *Shilnikov L. P.* Strange Attractors and Dynamical Models // J. of Circuits, Systems and Comput. — 1993. — V. 3(1). — P. 1–10.
33. *Kaplan J. L., Yorke J. A.* Chaotic Behavior of Multi-Dimensional Difference Equations // Lect. Notes Math. — 1970. — V. 730. — P. 204–227.
34. *Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A.* The dimension of chaotic attractors // Physica D. — 1983. — V. 7, No. 1–3. — P. 153–180.
35. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
36. *Williams R.* Expanding Attractors // Publ. Math. IHES. — 1974. — V. 43. — P. 169–203.
37. *Плыкин Р. В.* О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов // Успехи матем. наук, 1980. — Т. 35, №3. — С. 94–104.
38. *Кузнецов С. П., Селезнев Е. П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттракторов типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ, 2006. — Т. 123. — С. 1–13.
39. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О моделях с негрубыми гомоклиническими кривыми Пуанкаре // ДАН СССР. — 1991. — Т. 320. — С. 269–272.
40. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Sosnovtseva O. V.* Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractors // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 53(5). — P. 4451–4457.
41. *Heagy J. F., Hammel S. M.* The Birth of Strange Nonchaotic Attractors // Physica. D. — 1994. — V. 70. — P. 140–153.
42. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J. A.* Strange attractors that are not chaotic // Physica D. — 1984. — V. 13. — P. 261–268.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ГЛАВА 2 АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ: ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ, ГЕНЕРАТОР С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

2.1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе рассматриваются автоколебательные системы с одной степенью свободы. Представлены различные примеры механических и радиотехнических систем, которые при определенных предположениях описываются уравнением осциллятора с нелинейной диссипацией, в частности, проведен вывод уравнений осциллятора Ван дер Поля, осциллятора Рэлея и генератора с жестким возбуждением. Данные системы относятся к числу базовых моделей нелинейной теории колебаний, и являются носителями наиболее типичных свойств автоколебательных систем на фазовой плоскости. Аналитическими методами исследуется динамика генератора Ван дер Поля и генератора с жестким возбуждением. Описаны фазовые портреты и бифуркации рождения цикла. Обсуждаются условия возбуждения и характеристики квазигармонических автоколебаний.

2.2. ПРИМЕРЫ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

2.2.1. Маятник Фроуда

Примером простой механической автоколебательной системы может служить маятник на вращающемся валу (рис. 2.1, *а*), так называемый маятник Фроуда [1, 2, 4, 11, 12].

На равномерно вращающемся с угловой скоростью Ω валу подвешен обычный маятник. Между муфтой маятника и валом существует некоторая сила трения. Силы трения муфты маятника о вращающийся вал действуют на маятник и создают определенный момент M. Предполагается, что скорость вращения вала всегда больше по абсолютной величине скорости вращения маятника при колебаниях. Рассмотрим работу, ко-

торую совершает этот момент при периодических колебаниях маятника. За одну половину периода работа момента сил трения M равна энергии, отнятой у маятника, когда вал и маятник вращаются в противоположных направлениях. За вторую половину периода, наоборот, когда маятник и вал вращаются в одинаковом направлении, работа момента сил трения M добавляет энергию маятнику. Момент силы трения вала о муфту зависит от относительной угловой скорости вращения вала и муфты. Допустим, что сила трения растет со скоростью скольжения. Момент сил трения, когда вал и маятник вращаются в противоположном направлении, будет больше, чем в состоянии, когда вал и маятник вращаются в одном направлении так как в первом случае скорость скольжения больше, чем во втором. Следовательно, действие сил трения отнимает энергию у маятника за период и колебания маятника будет сильнее затухать. Энергия колебаний маятника расходуется в подвесе, и трение о вращающийся вал только увеличивает затухание колебаний.

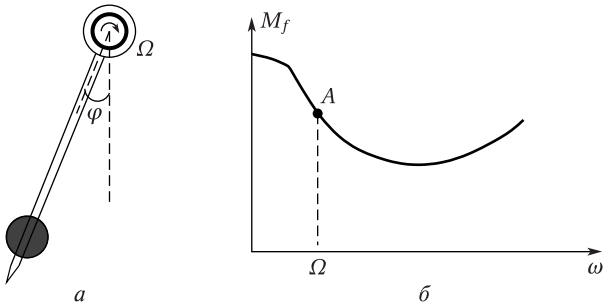


Рис. 2.1. Маятник на вращающемся валу. График зависимости момента силы трения от скорости вращения вала

Картина явления может принципиально измениться, если сила трения падает с увеличением скорости скольжения. При небольшой смазке в определенном диапазоне изменения скорости скольжения такие условия можно осуществить. Типичная кривая зависимости момента силы трения при неподвижном маятнике от скорости вращения вала показана на рис. 2.1, *б*.

Пусть скорость вращения вала соответствует абсциссе точки А. Тогда энергия колебаний маятника за период будет возрастать На этапе торможения относительная скорость вращения больше, сила трения меньше, а значит меньше и рассеиваемая энергия, чем на этапе ускорения, поскольку относительная скорость вращения здесь меньше, сила трения больше и на «подталкивание» маятника идет больше энергии. Колеблющийся маятник будет получать от вала определенную порцию энергии

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

за период, и если она больше энергии, идущей на трение о воздух, то амплитуда колебаний маятника со временем будет нарастать.

С ростом амплитуды колебаний маятника амплитуда момента силы трения о вал возрастает медленнее амплитуды момента силы трения о воздух, и при некотором значении амплитуды колебаний маятника они сравняются. Маятник будет совершать стационарные незатухающие колебания — автоколебания.

Вращающийся вал мотора сообщает маятнику энергию, необходимую на покрытие потерь энергии на тепло при стационарных автоколебаниях. Энергия передается от мотора к маятнику силой трения скольжения. Частота автоколебаний определяется собственной частотой колебаний маятника.

Уравнение движения маятника Фроуда будет отличаться от уравнения движения обычного маятника только тем, что в этом уравнении должен быть учтен момент силы трения вращающегося вала о подшипник, на котором подвешен маятник. Так как сила трения зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, т. е. от относительной угловой скорости вала и маятника $(\Omega - \dot{\varphi})$, то момент силы трения можно представить как $M(\Omega - \dot{\varphi})$. Если ограничиться малыми углами φ, заменить $\sin(\varphi)$ через φ, и учесть сопротивление воздуха, считая, что оно пропорционально угловой скорости, то уравнение движения маятника будет иметь вид:

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + mga\varphi = M(\Omega - \dot{\varphi}), \tag{2.1}$$

где I — момент инерции, m — масса маятника, h — коэффициент трения (исключая трение между муфтой и валом), a — расстояние от центра масс маятника до оси, Ω — угловая скорость вращения вала, φ — угол отклонения маятника от вертикали.

Разложим функцию $M(\Omega - \dot{\varphi})$ в ряд вблизи значения Ω

$$M(\Omega-\dot{\varphi}) = M(\Omega)+M^{(1)}(\Omega)(-\dot{\varphi})+\frac{1}{2}M^{(2)}(\Omega)(-\dot{\varphi})^2+\frac{1}{6}M^{(3)}(\Omega)(-\dot{\varphi})^3+\ldots, \tag{2.2}$$

(где $M^{(k)}$ — производная k-го порядка) и подставим (2.2) в (2.1), ограничиваясь членами ряда не выше третьей степени,

$$\ddot{z} + \frac{h}{I}\dot{z} + \frac{mga}{I}z = -\frac{M^{(1)}(\Omega)}{I}\dot{z} + \frac{M^{(2)}(\Omega)}{2I}\dot{z}^2 - \frac{M^{(3)}(\Omega)}{6I}\dot{z}^3, \tag{2.3}$$

где $z = \varphi - 1/(mga)\cdot M(\Omega)$. Выберем угловую скорость вращения вала так, чтобы она являлась абсциссой точки перегиба на «падающем» участке функции $M(\Omega)$, тогда $M^{(1)}(\Omega) < 0$ и $M^{(2)}(\Omega) = 0$. Кроме того, допустим, что $M^{(3)}(\Omega) > 0$. Уравнение (2.3) примет вид

$$\ddot{z} - (\mu - \beta\dot{z}^2)\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \tag{2.4}$$

где

$$\mu = -\frac{M^{(1)}(\Omega)}{I} - \frac{h}{I}, \quad \beta = \frac{M^3(\Omega)}{6I}, \quad \omega_0^2 = \frac{mga}{I}.$$

Переходя к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$ и делая замену переменных и параметров $\varepsilon = \mu/\omega_0$, $y = \sqrt{\beta\omega_0}z$, получим уравнение

$$\ddot{y} - (\varepsilon - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0. \tag{2.5}$$

Таким образом, при определенных предположениях маятник Фроуда описывается уравнением Рэлея, которое при замене $x = \sqrt{3}\dot{y}$ сводится к уравнению Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \tag{2.6}$$

2.2.2. Закрепленный грузик на движущейся ленте

В качестве еще одного примера механической автоколебательной системы рассмотрим устройство [4], изображенное на рис. 2.2.

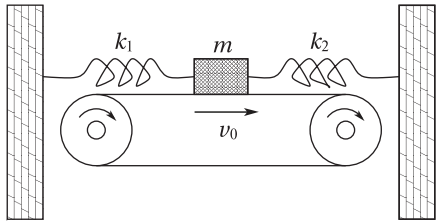


Рис. 2.2. Простейший пример механической автоколебательной системы: закрепленный пружинами грузик на движущейся ленте

На движущейся равномерно со скоростью v_0 ленте лежит грузик массой m, который закреплен с двух сторон пружинками с коэффициентами упругости k_1 и k_2. Обозначим смещение груза от состояния равновесия через x, а его скорость через $\dot{x}$. Силу трения ленты о груз обозначим через $F(v_0 - \dot{x})$, которая представляет собой некоторую функцию относительно скорости ленты и тела $(v_0 - \dot{x})$. «Результирующий» коэффициент упругости двух пружин обозначим через k, и будем считать пропорциональными первой степени скорости все остальные силы трения, действующие в этой системе (например сопротивление воздуха или внутреннее трение в пружинах). Запишем уравнение движения грузика

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0 - \dot{x}). \tag{2.7}$$

Будем полагать, что постоянная скорость движения ленты v_0 много больше скорости движения грузика. В таком рассмотрении, раскладывая функ-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

цию F в ряд вблизи значений v_0 ограничимся несколькими первыми членами ряда

$$F(v_0 - \dot{x}) = F(v_0) + F^{(1)}(v_0)(-\dot{x}) + \frac{1}{2}F^{(2)}(v_0)(-\dot{x})^2 + \frac{1}{6}F^{(3)}(v_0)(-\dot{x})^3 + \ldots, \tag{2.8}$$

где $F^{(k)}(v_0)$ — производная k-го порядка в точке v_0. Уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0) - F^{(1)}(v_0)\dot{x} + \frac{1}{2}F^{(2)}(v_0)(\dot{x})^2 - \frac{1}{6}F^{(3)}(v_0)(\dot{x})^3. \tag{2.9}$$

Значения коэффициентов $F^{(1)}(v_0)$, $F^{(2)}(v_0)$, $F^{(3)}(v_0)$ зависят от вида характеристики трения. Пусть функция $F(v_0 - \dot{x})$ имеет «падающий» участок ($F^{(1)}(v_0) < 0$), точку перегиба на падающем участке и $F^{(3)}(v_0) > 0$. Выберем постоянную скорость движения ленты такой, чтобы ее значение являлось абсциссой точки перегиба на «падающем» участке функции $F(v_0 - \dot{x})$. Тогда $F''(v_0) = 0$ и уравнение (2.7) можно переписать в виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0) + \alpha\dot{x} - \beta(x)^3, \tag{2.10}$$

где $\alpha = -F^{(1)}(v_0)$, $\beta = (1/6)F'''(v_0)$. Переходя к новому времени $\tau = \sqrt{k/m}t$ и производя следующую замену переменных и параметров в уравнении (2.10),

$$y = \sqrt{\frac{\beta}{m}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(x - \frac{f(v_0)}{k}\right)}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha - b}{\sqrt{mk}},$$

получим уравнение осциллятора:

$$\ddot{y} - (\varepsilon - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0.$$

Рассмотренная механическая автоколебательная система, представляющая собой закрепленный пружинами грузик на ленте, движущейся с постоянной скоростью, описывается уравнением Рэлея (2.5), которое сводится к уравнению Ван дер Поля, как показано ранее.

2.2.3. Ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки

Упрощенная схема радиотехнического генератора с колебательным контуром в цепи сетки и индуктивной обратной связью изображена на рис. 2.3. Используя законы Кирхгофа, можно записать дифференциальные уравнения для колебательного контура относительно напряжения u на конденсаторе C:

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = M\frac{dI_a}{dt}, \tag{2.11}$$

где L, R, C — индуктивность, сопротивление и емкость колебательного контура, M — коэффициент взаимной индукции, I_a — анодный ток лампы.

Предположим, что анодный ток зависит лишь от напряжения на сетки лампы, и анодно-сеточную характеристику можно аппроксимировать в окрестности рабочей точки полиномом

$$I_a = I_0 + S_0u - S_2u^3.$$

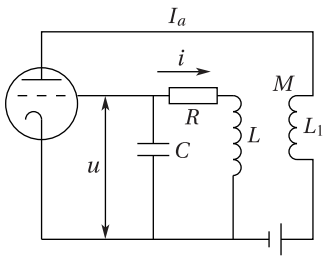


Рис. 2.3. Ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки

Тогда уравнение (2.11) можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \left[\frac{MS_0 - RC}{LC} - \frac{3MS_2}{LC}u^2\right]\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0. \tag{2.12}$$

Это уравнение можно представить следующим образом:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \alpha(1 - \beta u^2)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \tag{2.13}$$

где

$$\alpha = \frac{MS_0 - RC}{LC}, \quad \beta = \frac{3MS_2}{MS_0 - RC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$. Тогда уравнение (2.13) примет вид

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \frac{\alpha}{\omega_0}(1 - \beta u^2)\frac{du}{d\tau} + u = 0. \tag{2.14}$$

Сделав замену переменных и параметров $x = \sqrt{\beta}u$ и $\varepsilon = \alpha/\omega_0$, получим уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \tag{2.15}$$

где $\dot{x} = dx/dt$. Во многих случаях его удобно представлять в виде

$$\ddot{y} - (\varepsilon - y^2)\dot{y} + y = 0, \tag{2.16}$$

которое получается из уравнения (2.15) при замене $y = \sqrt{\varepsilon}x$.

2.2.4. *RC*-генератор с мостом Вина

Генератор с мостом Вина — наиболее распространенный тип RC-генератора. Он представляет собой последовательно-параллель-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ную RC-цепочку, включенную в цепь обратной связи усилителя [14]. Упрощенная схема RC-генератора изображена на рис. 2.4.

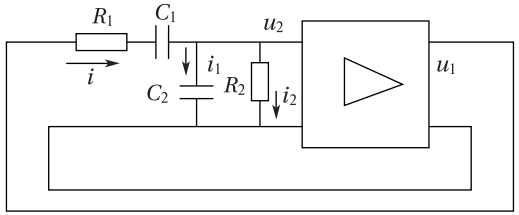


Рис. 2.4. Схема RC-генератора с мостом Вина

Используя для этой цепи законы Кирхгофа и учитывая, что $u_1 = f(u_2)$, запишем уравнение относительно напряжения u_2:

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + \left[\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_1C_2} - \frac{1}{R_1C_2}\frac{df(u_2)}{du_2}\right]\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}u_2 = 0.$$

Будем рассматривать симметричный мост Вина, когда $R_1 = R_2 = R$ и $C_1 = C_2 = C$. В этом случае уравнение примет вид

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + \left[\frac{3}{RC} - \frac{1}{RC}\frac{df(u_2)}{du_2}\right]\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}u_2 = 0. \qquad (2.17)$$

Введем обозначение $\omega_0 = 1/RC$ и предположим, что зависимость выходного напряжения u_1 усилителя от входного u_2 можно аппроксимировать функцией

$$f(u_2) = ku_2 - k_1u_2^3. \qquad (2.18)$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} - \left[\frac{k-3}{RC} - \frac{3k_1}{RC}u_2^2\right]\frac{du_2}{dt} + \omega_0^2u_2 = 0. \qquad (2.19)$$

Перейдем к безразмерному времени и сделаем замену переменных и параметров:

$$\tau = \omega_0 t, \quad x = u_2\sqrt{3k_1}, \quad \varepsilon = k - 3.$$

В результате получим уравнение

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Таким образом, для генератора с симметричным мостом Вина при условии, что характеристика усилителя может быть апроксимирована функцией (2.18), получили уравнение Ван дер Поля (2.16).

2.2.5. Колебательный контур с активным нелинейным элементом

В данном примере автоколебательная система представляет собой линейный колебательный контур, в который включен элемент, обладающий нелинейной проводимостью с падающим участком на вольт-амперной характеристике. Автогенераторы подобного типа называются в радиотехнике генераторами с отрицательным сопротивлением [13]. В них в качестве активного нелинейного элемента могут быть использованы, например, туннельный диод, диод Чуа[1]), некоторые типы вакуумных ламп и другие приборы.

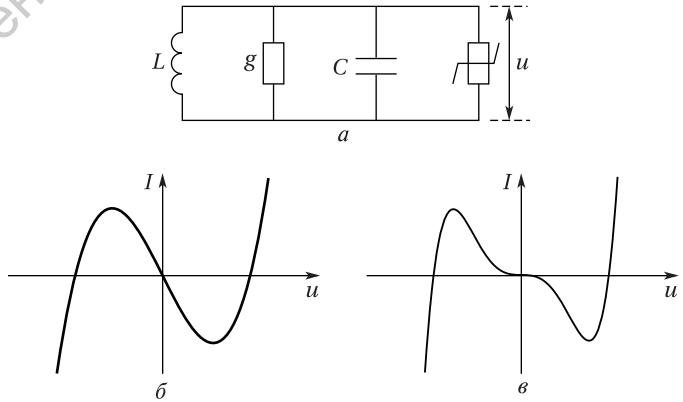


Рис. 2.5. Схема генератора и вольт-амперные характеристики нелинейного элемента

Выведем уравнение генератора, схема которого представлена на рис. 2.5, *а* с нелинейным элементом, вольт-амперную характеристику которого (рис. 2.5, *б*) можно аппроксимировать функцией

$$I = -\alpha u + \beta u^3. \qquad (2.20)$$

Используя законы Кирхгофа, получим уравнения для тока i через индуктивность L и напряжения u на емкости C

$$C\frac{du}{dt} + gu - \alpha u + \beta u^3 + i = 0, \qquad L\frac{di}{dt} = u. \qquad (2.21)$$

[1]) Генератор Чуа, в котором используется указанный нелинейный элемент, будет рассмотрен в следующем разделе, при описании автоколебательных систем с полутора степенями свободы.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Дифференциальное уравнение относительно напряжения u на нелинейном элементе имеет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{\alpha - g}{C}\left[1 - \frac{3\beta}{\alpha - g}u^2\right]\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0.$$

Если введем безразмерное время и сделаем замену переменных и параметров

$$\tau = \omega_0 t, \quad \left(\omega_0^2 = \frac{1}{LC}\right), \quad x = \sqrt{\frac{3\beta}{\alpha - g}}u, \quad \varepsilon = \frac{\alpha - g}{\omega_0 C},$$

получим уравнение

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Для колебательного контура с активным нелинейным элементом, вольт-амперная характеристика которого задана функцией (2.20), получили уравнение Ван дер Поля. Если для контура записать дифференциальное уравнение относительно тока i, протекающего через индуктивность L, то получим уравнение Рэлея (2.5).

Осциллятор Ван дер Поля и осциллятор Рэлея представляют собой автоколебательные системы с мягким возбуждением. Применительно к рассматриваемому примеру генератора (рис. 2.5, *а*) характер возбуждения автоколебаний определяется видом вольт-амперной характеристики нелинейного элемента. Так, если вместо зависимости в виде кубического полинома (2.20) использовать нелинейный элемент с вольт-амперной характеристикой, график которой изображен на рис. 2.5, *в* мы придем к автоколебательной системе с жестким возбуждением. Проделаем детальный вывод уравнения для такого генератора.

Вольт-амперную характеристику нелинейного элемента (рис. 2.5, *в*) аппроксимируем функцией

$$I = -g_0 u - g_1 u^3 + g_2 u^5. \tag{2.22}$$

Здесь коэффициенты имеют положительные значения ($g_0, g_1, g_2 > 0$). Используя законы Кирхгофа, для колебательного контура можно записать следующие уравнения относительно тока через индуктивность i_L и напряжения u на каждом из элементов контура:

$$L\frac{di_L}{dt} = u; \tag{2.23}$$

$$C\frac{du}{dt} + gu + I + i_L = 0, \tag{2.24}$$

из которых следует уравнение

$$C\frac{du}{dt} + gu - g_0 u - g_1 u^3 + g_2 u^5 + \frac{1}{L}\int u\,dt = 0. \tag{2.25}$$

Дифференцируя (2.25) по времени, запишем уравнение в осцилляторной форме:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \left[\frac{g_0 - g}{C} + \frac{3g_1}{C}u^2 - \frac{5g_2}{C}u^4\right]\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \tag{2.26}$$

где $\omega_0^2 = 1/LC$. Если введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, получим уравнение

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \left[(g_0 - g)\sqrt{\frac{L}{C}} + 3g_1\sqrt{\frac{L}{C}}u^2 - 5g_2\sqrt{\frac{L}{C}}u^4\right]\frac{du}{d\tau} + u = 0. \tag{2.27}$$

Если сделать следующую замену переменных и параметров

$$x = u\left(5g_2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^{1/4}, \quad \varepsilon_0 = (g_0 - g)\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{3g_1\sqrt{L/C}}{\sqrt{5g_2\sqrt{L/C}}}, \tag{2.28}$$

то получим уравнение в безразмерной форме

$$\ddot{x} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0. \tag{2.29}$$

Уравнение (2.29) описывает динамику генератора с жестким возбуждением автоколебаний. В отличие от осцилляторов Ван дер Поля и Рэлея поведение данного осциллятора с нелинейной диссипацией зависит от двух управляющих параметров ε_0 и ε_1. Из выражений (2.28) видно, что параметр возбуждения ε_0 может принимать как отрицательные, так и положительные значения, а другой параметр нелинейной диссипации (ε_1) — только положительные значения, с учетом того, что $g_0, g_1, g_2 > 0$.

2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ

Как уже было показано, уравнение осциллятора Ван дер Поля можно записать в разных формах, что зависит от задания нормировок динамических переменных и параметров системы. Обычно уравнения Ван дер Поля представляют в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \alpha(1 - \beta u^2)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \tag{2.30}$$

или

$$\ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, \tag{2.31}$$

или

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \tag{2.32}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Здесь u, y, x — динамические переменные; α, β, ε — параметры, управляющие возбуждением автоколебаний; ω_0 — коэффициент, характеризующий собственную частоту генератора.

Если в уравнении (2.30) перейти к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, то получим уравнение (2.31), в котором $y = \sqrt{\beta}u$, $\dot{y} = dy/d\tau$, $\varepsilon = \alpha/\omega_0$. В таком осцилляторе собственная частота ω_0 равна единице. Уравнение (2.32) связано с уравнением (2.31) следующей заменой: $x = \sqrt{\varepsilon}y$.

К уравнению Ван дер Поля сводится и упомянутое ранее уравнение Рэлея:

$$\ddot{z} - (\varepsilon - \dot{z}^2)\dot{z} + z = 0. \tag{2.33}$$

Если уравнение (2.33) продифференцировать и ввести замену $\dot{z} = (1/\sqrt{3})x$, то получится уравнение (2.32).

2.3.1. Состояния равновесия и анализ устойчивости

При определении условий возникновения автоколебаний важно знать какие состояния равновесия существуют в системе и как меняется характер их устойчивости в зависимости от управляющих параметров. Используя материалы гл. 1, определим точки равновесия и характер их устойчивости в осцилляторе Ван дер Поля, взяв за основу уравнение (2.32)

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Перепишем (2.32) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = f_1(x, y, \varepsilon); \tag{2.34}$$

$$\dot{y} = f_2(x, y, \varepsilon), \tag{2.35}$$

где

$$f_1(x, y, \varepsilon) = y,$$

$$f_2(x, y, \varepsilon) = (\varepsilon - x^2)y - x.$$

Система имеет две динамические переменные x и y, т. е. размерность фазового пространства осциллятора Ван дер Поля равна двум.

Запишем уравнения для состояний равновесия, приравняв нулю функции f_1 и f_2:

$$y = 0,$$

$$(\varepsilon - x^2)y - x = 0.$$

Видно, что существует единственная особая точка, расположенная на фазовой плоскости в начале координат: $x^0 = 0$, $y^0 = 0$.

Как было показано в разд. 1.3, для определения устойчивости состояния равновесия следует линеаризовать систему в окрестности неподвижной точки, построить матрицу линеаризации (или матрицу Якоби). Для системы (2.34), (2.35) получим следующую матрицу

$$\widehat{A}(x^0, y^0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^0, y^0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x^0, y^0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x^0, y^0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x^0, y^0)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Собственные значения матрицы (2.36) определяют устойчивость состояния равновесия осцилятора Ван дер Поля. Их легко получить из характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 0 - s & 1 \\ -1 & \varepsilon - s \end{bmatrix} = 0$$

или

$$s^2 - \varepsilon s + 1 = 0. \tag{2.37}$$

В результате имеем два собственных значения

$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - 1}. \tag{2.38}$$

Проследим за устойчивостью состояния равновесия ($x^0 = 0$, $y^0 = 0$) осциллятора Ван дер Поля в зависимости от управляющего параметра ε.

1. При $\varepsilon < -2$ собственные значения s_1 и s_2 — действительные и отрицательные числа. В этом случае состояние равновесия представляет собой устойчивый узел (см. разд. 1.3, рис. 1.6).

2. При $-2 < \varepsilon < 0$ собственные значения s_1 и s_2 — комплексно-сопряженные числа и $\mathrm{Re}[s_{1,2}] < 0$. Состояние равновесия — устойчивый фокус (рис. 1.6).

3. При $0 < \varepsilon < 2$ собственные значения s_1 и s_2 — комплексно-сопряженные числа и $\mathrm{Re}[s_{1,2}] > 0$. Состояние равновесия является неустойчивым фокусом (см. рис. 1.6).

4. При $\varepsilon > 2$ собственные значения s_1 и s_2 являются действительными положительными числами. Состояние равновесия представляет собой неустойчивый узел (рис. 1.6).

Известны несколько классических методов получения квазигармонического приближенного решения уравнения Ван дер Поля. Мы рассмотрим два из них: энергетический метод Теодорчика и метод усреднения Ван дер Поля.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

2.3.2. Квазигармонические автоколебания. Энергетический метод Теодорчика

При потери устойчивости состояния равновесия вблизи бифуркационной точки в осцилляторе Ван дер Поля возбуждаются квазигармонические автоколебания. Для их исследования воспользуемся энергетическим методом Теодорчика.

Запишем уравнение Ван дер Поля в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt}. \tag{2.39}$$

Будем рассматривать случай малых значений параметра ε. Решение уравнения (2.39) будем искать в виде квазигармонических колебаний с медленно меняющейся амплитудой $\rho(t)$ и постоянной частотой ω, которая может отличаться от собственной частоты $\omega_0 = 1$:

$$x(t) = \rho(t)\cos\omega t. \tag{2.40}$$

Для того чтобы определить значение частоты автоколебаний, величину стационарной амплитуды и закон ее установления, представим исходное уравнение (2.39) в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = (\omega^2 - 1)x + \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt}. \tag{2.41}$$

Правую часть этого уравнения будем рассматривать как сумму сил, действующих на консервативную колебательную систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F, \tag{2.42}$$

где

$$F = (\omega^2 - 1)x + \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt}.$$

Запишем силу F с учетом заданного движения (2.40)

$$F = (\omega^2 - 1)x + \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} =$$
$$= (\omega^2 - 1)\rho(t)\cos\omega t + \varepsilon(1 - \rho^2\cos^2\omega t)\left[\frac{d\rho}{dt}\cos\omega t - \omega\rho\sin\omega t\right].$$

Поскольку $\rho(t)$ — медленно меняющаяся величина, то $d\rho/dt$ — малая величина (величина первого порядка малости). Слагаемые, которые содержат произведение $\varepsilon \cdot d\rho/dt$, в преобразованиях учитывать не будем, поскольку они являются величинами второго порядка малости. В результате получим

$$F(t) = (\omega^2 - 1)\rho\cos\omega t - \varepsilon\omega\rho\sin\omega t + \varepsilon\omega\rho^3\cos^2\omega t\sin\omega t.$$

Разложим функцию F в ряд Фурье и выделим резонансные члены. Все высшие гармоники в разложении должны слабо влиять на консервативную колебательную систему, поэтому их можно отбросить.

$$F(t) = A_0 + A_1\sin\omega t + B_1\cos\omega t + \text{высшие гармоники},$$

где

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt,$$

$$A_1 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin\omega t\,dt,$$

$$B_1 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos\omega t\,dt.$$

Здесь T — период функции $F(t)$ и $T = 2\pi/\omega$. Вычислим коэффициенты A_0, A_1, B_1

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}(\omega^2\rho - \rho)\cos\omega t\,dt - \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\varepsilon\omega\rho\sin\omega t\,dt +$$
$$+ \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\varepsilon\omega\rho^3\cos^2\omega t\sin\omega t\,dt = 0.$$

$$A_1 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin\omega t\,dt = \frac{\omega}{\pi}(\omega^2\rho - \rho)\int_0^{2\pi/\omega}\cos\omega t\sin\omega t\,dt -$$
$$- \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\omega\rho\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t\,dt + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\omega\rho^3\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2\omega t\sin^2\omega t\,dt = -\varepsilon\omega\rho + \frac{\varepsilon\omega\rho^3}{4},$$

$$B_1 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos\omega t\,dt = \frac{\omega}{\pi}(\omega^2\rho - \rho)\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2\omega t\,dt -$$
$$- \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\omega\rho\int_0^{2\pi/\omega}\sin\omega t\cos\omega t\,dt + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\omega\rho^3\int_0^{2\pi/\omega}\cos^3\omega t\sin\omega t\,dt = \omega^2\rho - \rho.$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Таким образом, выражение для $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \left[-\varepsilon\omega\rho + \frac{\varepsilon\omega\rho^3}{4}\right]\sin\omega t + [\omega^2\rho - \rho]\cos\omega t. \qquad (2.43)$$

Теперь выражение (2.43) и решение (2.40) подставим в уравнение (2.42). Отметим, что вторая производная медленно меняющейся функции $\rho(t)$ является величиной второго порядка малости, учитывать которую не будем. В результате получим уравнение

$$-2\omega\frac{d\rho}{dt}\sin\omega t = \left[-\varepsilon\omega\rho + \frac{\varepsilon\omega\rho^3}{4}\right]\sin\omega t + [\omega^2\rho - \rho]\cos\omega t. \qquad (2.44)$$

Приравнивая в уравнении (2.44) коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$, находим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\varepsilon\rho}{2} - \frac{\varepsilon\rho^3}{8}, \qquad (2.45)$$

$$\rho(\omega^2 - 1) = 0. \qquad (2.46)$$

Выражение (2.46) определяет зависимость частоты автоколебаний от амплитуды, а уравнение (2.45) описывает процесс установления амплитуды.

Стационарные значения амплитуды колебаний задает уравнение

$$\frac{\varepsilon\rho}{2} - \frac{\varepsilon\rho^3}{8} = 0,$$

из которого получаем $\rho = 0$ и $\rho = 2$. Значение $\rho = 0$ соответствует состоянию равновесия. Стационарному значению амплитуды автоколебаний отвечает $\rho = 2$, которое не зависит от величины параметра ε. Это обусловлено выбором формы уравнения Ван дер Поля в виде (2.31), в котором амплитуда колебаний нормируется на $\sqrt{\varepsilon}$. В результате амплитуда колебаний оказывается постоянной и равной 2. В данном приближении частота стационарных автоколебаний всегда равна 1 и полностью совпадает с собственной частотой генератора Ван дер Поля, что видно из уравнения (2.46).

Рассмотрим переходные процессы в генераторе, анализируя уравнения (2.45). Разделим обе части этого уравнения на ρ^3 и сделаем замену переменных $X = 1/\rho^2 - 1/4$. В результате получим

$$\frac{dX}{dt} = -\varepsilon X,$$

решение которого

$$X = C\exp[-\varepsilon t].$$

Возвращаясь к исходной переменной $\rho(t)$ получим

$$\frac{1}{\rho^2} = C\exp[-\varepsilon t] + \frac{1}{4}.$$

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ амплитуда колебаний $\rho(t) = \rho_0$. Учитывая начальные условия, определим постоянную интегрирования

$$C = \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{4}.$$

В результате получим решение:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left[\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{4}\right]\exp[-\varepsilon t] + \frac{1}{4},$$

или

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + (\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{4})\exp(-\varepsilon t)}}. \qquad (2.47)$$

Из выражения (2.47) видно, что при $t \to \infty$ амплитуда колебаний $\rho(t)$ стремится к стационарной амплитуде $\overline{\rho} = 2$. Выражение (2.47) можно переписать в виде

$$\rho(t) = \frac{\rho_0\exp(\varepsilon t/2)}{\sqrt{(\rho_0/\overline{\rho})^2[\exp(\varepsilon t/2) - 1] + 1}}. \qquad (2.48)$$

С помощью данного метода мы описали переходной процесс установления амплитуды автоколебаний к стационарному значению. В данном приближении частота стационарных автоколебаний равна единице и не зависит от управляющего параметра.

2.3.3. Квазигармонические автоколебания. Метод усреднения Ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля в форме (2.32):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\varepsilon - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Будем считать, что при малых положительных значениях ε решение уравнения близко к гармоническим колебаниям. Запишем его в виде гармонической функции с медленно меняющимися параметрами:

$$x(t) = \mathrm{Re}[a(t)\exp(jt)] = \frac{1}{2}\left[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)\right], \qquad (2.49)$$

где $a(t)$ — комплексная амплитуда, $\mathrm{Re}[\ldots]$ — действительная часть комплексной величины, a^* — комплексно-сопряженная величина. Посколь-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ку вместо действительной функции $x(t)$ мы ввели новую комплексную функцию $a(t)$ и она недостаточно определена, введем дополнительное условие. Потребуем, чтобы функция $a(t)$ удовлетворяла условию

$$\frac{da}{dt}\exp(jt) + \frac{da^*}{dt}\exp(-jt) = 0. \tag{2.50}$$

Подставим решение (2.49) в уравнение Ван дер Поля, предварительно вычислив первую и вторую производные с учетом дополнительного условия (2.50).

Первая производная имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\Big[\frac{da}{dt}\exp(jt) + \frac{da^*}{dt}\exp(-jt) + ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)\Big] = \\ = \frac{1}{2}\big[ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)\big]. \tag{2.51}$$

Вторая производная —

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\Big[j\frac{da}{dt}\exp(jt) - j\frac{da^*}{dt}\exp(-jt) - a\exp(jt) - a^*\exp(-jt)\Big] = \\ = j\frac{da}{dt}\exp(jt) - \frac{1}{2}\big[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)\big]. \tag{2.52}$$

При подстановке (2.52), (2.51) и (2.49) в уравнение Ван дер Поля получим следующее выражение

$$j\frac{da}{dt}\exp(jt) = \\ = \left[\varepsilon - \frac{a^2\exp(2jt) + 2|a|^2 + (a^*)^2\exp(-2jt)}{4}\right]\frac{ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)}{2}.$$

Раскроем скобки и разделим обе части уравнения на $j\exp(jt)$:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon a - \frac{1}{8}|a|^2a - \frac{1}{2}\varepsilon a^*\exp(-2jt) - \frac{1}{8}a^3\exp(2jt) + \\ + \frac{1}{4}|a|^2a^*\exp(-2jt) - \frac{1}{8}|a|^2a^*\exp(-2jt) + \frac{1}{8}(a^*)^3\exp(-4jt). \tag{2.53}$$

Мы предположили, что $a(t)$ — медленно меняющаяся функция времени и ее изменением за один период колебаний системы можно пренебречь. Также считаем, что производная da/dt в течение одного периода постоянна. Умножая обе части уравнения (2.53) на $1/2\pi$ и интегрируя по времени от 0 до 2π, получим

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon a - \frac{1}{8}|a|^2a. \tag{2.54}$$

Уравнение (2.54) называется «укороченным» уравнением Ван дер Поля в комплексной форме. Запишем его в действительных переменных, представив комплексную величину в полярных координатах:

$$a(t) = \rho(t)\exp(j\varphi(t)),$$

где $\rho(t)$ — вещественная амплитуда, $\varphi(t)$ — вещественная фаза колебаний. В результате из (2.54) получается система укороченных уравнений для амплитуды и фазы:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3, \tag{2.55}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{2.56}$$

Из (2.55), (2.56) легко определить стационарные состояния системы. Приравнивая производные нулю, находим два возможных состояния:

$$\rho^0(t) = 0, \tag{2.57}$$

$$\varphi^0(t) = \varphi_0, \tag{2.58}$$

и

$$\rho^0(t) = 2\sqrt{\varepsilon}, \tag{2.59}$$

$$\varphi^0(t) = \varphi_0. \tag{2.60}$$

Первое из стационарных решений соответствует отсутствию колебаний, состоянию рановесия в осцилляторе Ван дер Поля (2.32). Второе соответствует квазигармоническим автоколебаниям в осцилляторе Ван дер Поля (2.32), которые в данном приближении выражаются в виде:

$$x(t) = 2\sqrt{\varepsilon}\cos(t + \varphi_0), \tag{2.61}$$

где φ_0 — начальная фаза колебаний (она может быть произвольной).

Рассмотрим устойчивость стационарных состояний. Поскольку уравнения (2.55) и (2.56) независимы, то их можно рассматривать по отдельности. Для уравнения первого порядка (2.55) собственное значение матрицы линеаризации имеет следующий вид:

$$s_\rho = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{8}(\rho^0)^2.$$

Для стационарного значения $\rho^0 = 2\sqrt{\varepsilon}$, получим $s_\rho = -\varepsilon$. Оно отрицательно при положительных значениях параметра ε и, следовательно, ненулевое стационарное состояние уравнения для вещественной амплитуды (2.55) устойчиво. Стационарное решение для фазы — нейтрально

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

устойчиво: любое возмущение начальной фазы не возрастает и не убывает со временем.

Таким образом, периодические колебания вида (2.61) возникают при переходе параметра ε к положительным значениям. При этом амплитуда автоколебаний нарастает от нуля пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$.

Для того чтобы описать переходной процесс к установившимся колебаниям необходимо найти решение системы (2.55), (2.56) в зависимости от начальных условий. Решение уравнения для фазы очевидно. Уравнение для амплитуды (2.55) также может быть решено аналитически. Для этого разделим его на ρ^3:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = -\varepsilon\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{4}.$$

Сделав замену переменных $y = 1/\rho^2 - 1/4\varepsilon$, перейдем к уравнению:

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon y,$$

которое легко решается. Для исходной переменной $\rho(t)$ решение может быть выражено следующим образом:

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 - \frac{1}{4\varepsilon}\right]\exp(-\varepsilon t) + \frac{1}{4\varepsilon}}}, \qquad (2.62)$$

где $\rho_0 = \rho(0)$ — начальная амплитуда колебаний (по условиям решения $\rho_0 \neq 0$). Выражение (2.62) определяет процесс установления колебаний в осцилляторе Ван дер Поля. При возрастании времени решение (2.62) стремится к стационарному состоянию $\rho^0 = 2\sqrt{\varepsilon}$. В отличие от (2.48) стационарное значение амплитуды ρ^0 зависит от параметра ε ($\rho^0 = 2\sqrt{\varepsilon}$). Это обусловлено выбором уравнения Ван дер Поля в форме (2.32), более предпочтительной с точки зрения анализа бифуркации рождения предельного цикла в сравнении с (2.31).

2.3.4. Релаксационные автоколебания

В генераторе Ван дер Поля, описываемом уравнением (2.32)

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

как мы уже установили, при переходе управляющего параметра от отрицательных значений к положительным на фазовой плоскости в окрестности особой точки, расположенной в начале координат, рождается устойчивый предельный цикл по форме близкий к окружности, что соответствует квазигармоническим автоколебаниям. Вблизи точки бифуркации с ростом управляющего параметра радиус предельного цикла (или амплитуда автоколебаний) увеличивается пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$. Однако, по мере ухода от точки бифуркации рождения цикла квазигармонические автоколебания превращаются в ангармонические. Временные реализации меняют форму, предельный цикл искажается, в спектре колебаний увеличиваются амплитуды гармоник. Дальнейший рост управляющего параметра приводит к релаксационным автоколебаниям. Для этого режима характерно наличие на фазовых портретах и временных реализациях чередующихся участков медленных и быстрых движений, т. е. сравнительно медленные изменения состояния системы, чередуются с очень быстрыми («скачкообразными») изменениями.

Для автоколебательных систем на фазовой плоскости типа осциллятора Ван дер Поля аналитические количественные методы исследования разработаны для случая малого параметра нелинейности, когда система близка к гармоническому осциллятору, и для случая очень больших значений параметра нелинейности, или для так называемых систем с малым параметром при старшей производной. То есть возможно аналитическое приближенное количественное описание только крайних ситуаций: режима квазигармонических автоколебаний и режима релаксационных автоколебаний. Термин «релаксационные колебания» был введен Ван дер Полем и закрепился в современной литературе. Описание релаксционных автоколебаний и методов их исследования можно найти, например, в следующих монографиях [3, 11].

При аналитическом исследовании релаксационных колебаний в динамических системах на фазовой плоскости, как правило, поступают следующим образом. Вначале проводят преобразование исходной системы к системе уранений с малым параметром при старшей производной

$$\begin{aligned} \varepsilon_r\dot{x} &= F(x, y), \\ \dot{y} &= G(x, y), \end{aligned} \qquad (2.63)$$

где ε_r — малый параметр. Динамику системы (2.63) можно приближенно отобразить уравнениями «вырожденной» системы с $\varepsilon_r = 0$. С помощью вырожденной системы на фазовой плоскости исходной системы можно построить разрывной предельный цикл C_0. Существует доказательство, что разрывной предельный цикл является предельным положением только одного и притом устойчивого предельного цикла системы (2.63) при $\varepsilon_r \to +0$. Это в свою очередь позволяет использовать разрывной предельный цикл в качестве исходного приближения для вычисления тех или иных характеристик автоколебаний в системе (2.63) при небольших значениях параметра ε_r. Так, например, период релаксационных

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

автоколебаний системы (2.63) в нулевом приближении (при $\varepsilon_r \to +0$) определяется как

$$T_0 = \int\limits_{C_0} \frac{dy}{G}. \tag{2.64}$$

Выражение для периода автоколебаний в более высоком приближении имеет следующий вид

$$T = T_0 + A\varepsilon_r^{2/3} + B\varepsilon_r \ln\frac{1}{\varepsilon_r} + C\varepsilon_r + O(\varepsilon_r^{4/3}), \tag{2.65}$$

где A, B, C — числа, определяемые значениями функций $F(x, y)$ и $G(x, y)$ на разрывном предельном цикле.

Рассмотрим более детально релаксационные колебания в генераторе Ван дер Поля при больших значениях параметра ε. При построении разрывного предельного цикла C_0 удобнее записать уравнение (2.32) в виде

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} - \varepsilon\frac{dz}{d\tau} + \varepsilon\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^3 + z = 0, \tag{2.66}$$

т. е. сделать переход к уравнению Рэлея, что подробно обсуждалось вначале данного раздела. Уравнение (2.66) связано с (2.32) следующей заменой:

$$x = \sqrt{3\varepsilon}\,\frac{dz}{d\tau}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}.$$

Преобразуем уравнение (2.66) таким образом, чтобы перед старшей производной стоял малый параметр. Разделим обе части уравнения (2.66) на ε и сделаем замену переменной, параметра и времени:

$$y = \frac{1}{\varepsilon}z, \quad \tau_1 = \frac{1}{\varepsilon}\tau, \quad \varepsilon_r = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

В результате получим уравнение с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon_r\frac{d^2y}{d\tau_1^2} - \frac{dy}{d\tau_1} + \left(\frac{dy}{d\tau_1}\right)^3 + y = 0. \tag{2.67}$$

Поведение данной системы (2.67) отображается фазовым портретом на фазовой плоскости $(y, dy/d\tau_1)$ также как и при любых других значениях управляющего параметра осциллятора Ван дер Поля (или осциллятора Рэлея). Однако при $\varepsilon_r \to 0$ приближенный характер движения изображающей точки на фазовой плоскости $(y, dy/d\tau_1)$ можно исследовать с помощью приближенной зависимости

$$y = \frac{dy}{d\tau_1} - \left(\frac{dy}{d\tau_1}\right)^3, \tag{2.68}$$

которая получается из (2.67), если пренебречь первым слагаемым уравнения при $\varepsilon_r \to 0$. Данная зависимость определяет подпространство медленных движений фазового пространства системы.

Уравнение (2.67) можно представить в виде

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{y' - (y')^3 - y}{\varepsilon_r y'}, \tag{2.69}$$

где $y' = dy/d\tau_1$ и ε_r — малый параметр.

Данное уравнение описывает фазовые траектории на плоскости (y, y'). Качественный анализ этого уравнения позволяет построить приближенный фазовый портрет.

Построим на фазовой плоскости линию медленных движений S: $y = y' - (y')^3$ (рис. 2.6). Поскольку на этой линии $dy'/dy = 0$, вектор фазовой скорости направлен горизонтально. В остальных точках фазовой плоскости $dy'/dy \to \infty$ при $\varepsilon_r \to 0$, фазовые траектории проходят вертикально. Получается следующий фазовый портрет. Стартуя с произвольных начальных условий из точки s_0 вне линии медленных движений (рис. 2.6), изображающая точка по вертикальной прямой достигнет точки s_1 на линии S. Далее изображающа точка пройдет вдоль линии медленных движений до точки s_2, после чего пойдет вертикально вверх, пока вновь не достигнет линии медленных движений S. Вдоль нее изображающая точка пройдет от s_3 до s_4. Затем из точки s_4 вновь пойдет вертикально вниз до точки s_5. В результате образуется разрывной предельный цикл C_0, состоящий из отрезков линий s_2s_3, s_3s_4, s_4s_5 и s_5s_2. Такой фазовый портрет получается вследствие того, что верхний и нижний участки линии медленных движений являются притягивающими, а средний отрезок s_2s_4 является неустойчивым, что и показано стрелками на рис. 2.6.

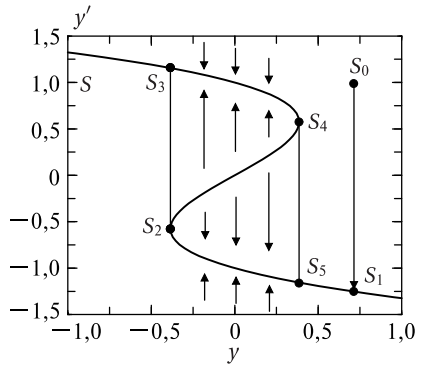


Рис. 2.6. Фазовый портрет генератора Ван дер Поля в режиме релаксационных автоколебаний

Используя уравнения линии медленных движений (2.68), можно сделать приближенную оценку периода релаксационных колебаний. Учитывая, что $y' = dy/d\tau_1$, можно записать

$$d\tau_1 = \frac{dy}{y'}, \quad d\tau_1 = \frac{d\left(y' - (y')^3\right)}{y'}, \quad T_1 = \int\limits_{C_0} \frac{d\left(y' - (y')^3\right)}{y'}.$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Поскольку вертикальные участки цикла изображающая точка проходит мгновенно, получаем

$$T_1 = 2\int\limits_{y_4'}^{y_3'} \frac{d\left(y' - (y')^3\right)}{y'}.$$

С учетом того, что $\tau_1 = \tau/\varepsilon$, получаем приближенное выражение для периода релаксационных автоколебаний

$$T = \varepsilon T_1 = 2\varepsilon \int\limits_{y_4'}^{y_3'} \frac{d\left(y' - (y')^3\right)}{y'} = 2\varepsilon\left[\ln(y') - \frac{3}{2}(y')^2\right]_{y_4'}^{y_3'}.$$

Период релаксационных автоколебаний увеличивается с ростом параметра возбуждения автоколебательной системы ε.

Представленный на примере генератора Ван дер Поля приближенный аналитический подход позволяет исследовать релаксационные автоколебания и в других различных конкретных колебательных системах, «медленные» и «быстрые» движения которых отображаются уравнениями второго порядка. Например, мультивибратор с одним RC-звеном, некоторые тормозные устройства (тело малой массы, испытывающее большое трение), блокинг-генераторы, генераторы на неоновой лампе, динатронные генераторы и ряд других автоколебательных систем различной природы [3, 11].

2.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГЕНЕРАТОРА С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

В данном разделе рассмотрим типы состояний равновесия в зависимости от управляющих параметров, проделаем вывод укороченных уравнений для амплитуды и фазы генератора с жестким возбуждением, рассмотрим характерные фазовые портреты осциллятора, исследуем бифуркационные переходы и построим бифуркационные диаграммы.

2.4.1. Типы состояний равновесия

Определим точки равновесия и характер их устойчивости в генераторе с жестким возбуждением, заданном уравнением вида (2.29):

$$\ddot{x} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0.$$

Перепишем (2.29) в виде системы уравнений первого пордка:

$$\dot{x} = f_1(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1), \tag{2.70}$$

$$\dot{y} = f_2(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1), \tag{2.71}$$

где

$$f_1(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = y,$$

$$f_2(x, y, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)y - x.$$

Система (2.70)–(2.71) имеет две динамические переменные x и y, т. е. размерность фазового пространства генератора с жестким возбуждением равна двум.

Особые точки на фазовой плоскости определим из уравнений:

$$y = 0,$$

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)y - x = 0.$$

Видно, что на фазовой плоскости существует одна особая точка с координатами $x^0 = 0$, $y^0 = 0$. Матрица линеаризации в окрестности данного состояния равновесия системы (2.70)–(2.71) имеет следующий вид:

$$\widehat{A}(x^0, y^0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^0, y^0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x^0, y^0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x^0, y^0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x^0, y^0)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}. \tag{2.72}$$

Собственные значения матрицы (2.72) определяют устойчивость состояния равновесия генератора с жестким возбуждением. Записав характеристическое уравнение

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 0 - s & 1 \\ -1 & \varepsilon_0 - s \end{bmatrix} = 0,$$

или

$$s^2 - \varepsilon_0 s + 1 = 0, \tag{2.73}$$

получим следующие собственные значения

$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{4} - 1}. \tag{2.74}$$

Из представленных результатов видно, что в генераторе с жестким возбуждением (2.29) также как в осцилляторе Ван дер Поля существует единственное состояние равновесия также расположенное на фазовой плоскости в начале координат: $x^0 = 0$, $y^0 = 0$. Кроме того, характер этой особой точки зависит только от одного управляющего параметра ε_0 и полностью совпадает с поведением состояния равновесия в зависимости от параметра ε в осцилляторе Ван дер Поля, а именно:

1) при $\varepsilon_0 < 2$ состояние равновесия представляет собой устойчивый узел;

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

2) при $-2 < \varepsilon_0 < 0$ состояние равновесия является устойчивым фокусом;
3) при $0 < \varepsilon_0 < 2$ состояние равновесия — неустойчивый фокус;
4) при $\varepsilon > 2$ состояние равновесия — неустойчивый узел.

Продолжим исследование динамики генератора с жестким возбуждением (2.29) в квазигармоническом приближении. Проделаем для системы (2.29) вывод укороченных уравнений для амплитуды и фазы.

2.4.2. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы генератора с жестким возбуждением

В уравнении генератора с жестким возбуждением (2.29):

$$\ddot{x} + x = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)\dot{x}$$

будем полагать, что параметры ε_0 и ε_1 близки к нулю и система представляет собой квазигармонический осциллятор (правая часть уравнения рассматривается как слабое возмущение гармонического осциллятора). В этом случае решение можно искать в виде гармонической функции с медленно меняющимися во времени амплитудой и фазой, а именно

$$x(t) = \mathrm{Re}\big[a(t)\exp(jt)\big] = \frac{1}{2}\big[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)\big]. \qquad (2.75)$$

Для комплексной функции $a(t)$ введем дополнительное условие

$$\dot{a}\exp(jt) + \dot{a}^*\exp(-jt) = 0. \qquad (2.76)$$

Вычислим для решения $x(t)$ в виде (2.75) первую и вторую производные по времени с учетом дополнительного условия (2.76).

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\big[\dot{a}\exp(jt) + \dot{a}^*\exp(-jt) + ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)\big] = \\ = \frac{1}{2}\big[ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)\big]. \qquad (2.77)$$

Вторая производная имеет следующий вид:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\big[j\dot{a}\exp(jt) - j\dot{a}^*\exp(-jt) - a\exp(jt) - a^*\exp(-jt)\big] = \\ = j\dot{a}\exp(jt) - \frac{1}{2}\big[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)\big]. \qquad (2.78)$$

Подставим (2.78), (2.77) и (2.75) в уравнение генератора с жестким возбуждением (2.29):

$$j\dot{a}\exp(jt) = \left[\varepsilon_0 + \varepsilon_1\frac{\big[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)\big]^2}{4} - \frac{\big[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)\big]^4}{16}\right] \times \\ \times \frac{1}{2}\big[ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)\big]. \qquad (2.79)$$

Разделим обе части уравнения (2.79) на $j\exp(jt)$ и проведем усреднение за период, учитывая, что $a(t)$ и $\dot{a}(t)$ являются медленно меняющимися во времени функциями и на периоде колебаний 2π они остаются практически постоянными. В результате получим укороченное уравнение для комплексной амплитуды:

$$\dot{a} = \left[\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}|a|^2 - \frac{1}{16}|a|^4\right]a. \qquad (2.80)$$

Представляя комплексную величину $a(t)$ в полярных координатах

$$a(t) = \rho(t)\exp[j\varphi(t)],$$

перепишем (2.80) в виде системы уравнений для амплитуды и фазы:

$$\dot{\rho} = \left[\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4\right]\rho, \qquad (2.81)$$

$$\dot{\varphi} = 0. \qquad (2.82)$$

Из системы (2.81)–(2.82) видно, что в рассматриваемом приближении уравнение для амплитуды и уравнение для фазы полностью разделены: первое не зависит от фазы, второе не зависит от амплитуды. Фаза $\varphi(t)$ не меняется во времени, она равна константе, величина которой задается начальными условиями. Таким образом задача о существовании периодических движений, их устойчивости и возможных бифуркациях в генераторе с жестким возбуждением (2.29) в квазигармоническом приближении сводится к изучению амплитудного уравнения (2.81).

2.4.3. Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением

Как уже отмечалось, данная задача сводится к исследованию состояний равновесия, их устойчивости и их бифуркаций при вариации управляющих параметров системы, заданной дифференциальным уравнением для амплитуды (2.81):

$$\dot{\rho} = \left[\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4\right]\rho.$$

Из уравнения

$$\rho\left[\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4\right] = 0 \qquad (2.83)$$

получаем три состояния равновесия с координатами

$$\rho_1^0 = 0, \qquad (2.84)$$

$$\rho_2^0 = \sqrt{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}}, \qquad (2.85)$$

$$\rho_3^0 = \sqrt{\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}}. \qquad (2.86)$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Из выражений (2.84)–(2.86) видно, что для управляющего параметра ε_0 можно выделить три характерных интервала.

1. Если $\varepsilon_0 < -(\varepsilon_1^2/8)$, то в системе существует одна точка равновесия ρ_1^0.

2. Если $-(\varepsilon_1^2/8) < \varepsilon_0 < 0$, то существуют три точки равновесия ρ_1^0, ρ_2^0 и ρ_3^0. Следует отметить, что при $\varepsilon_0 = -(\varepsilon_1^2/8)$ две точки равновесия сливаются ($\rho_2^0 = \rho_3^0 = \sqrt{\varepsilon_1}$) и ниже указанного значения ε_0 исчезают.

3. Если $\varepsilon_0 > 0$, то существуют два состояния равновесия ρ_1^0 и ρ_2^0. Из выражений (2.84)–(2.86) видно, что при стремлении ε_0 к нулю со стороны отрицательных значений неподвижная точка ρ_3^0 перемещается к точке ρ_1^0 и при $\varepsilon_0 = 0$ сливается с ней. Выше этого значения остаются две точки.

Устойчивость состояний равновесия ρ_1^0, ρ_2^0, ρ_3^0 определяется собственным значением

$$s_i = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\rho + \frac{\varepsilon_1}{8}\rho^3 - \frac{1}{16}\rho^5\right)\Big|_{\rho=\rho_i^0} = \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{3\varepsilon_1}{8}(\rho_i^0)^2 - \frac{5}{16}(\rho_i^0)^4, \qquad (2.87)$$

где индекс $i = 1, 2, 3$ указывает на одно из трех состояний равновесия.

Для состояния равновесия ρ_1^0 получаем собственное значение $s_1 = \varepsilon_0/2$. Следовательно, при $\varepsilon_0 < 0$ точка является устойчивой, а при положительных значениях ε_0 становится неустойчивым состоянием равновесия.

Рассмотрим собственное значение для неподвижной точки ρ_2^0. Подставим (2.85) в выражение (2.87):

$$s_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{3\varepsilon_1}{8}\left[\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\right] - \frac{5}{16}\left[\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\right]^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим выражение

$$s_2 = -2\varepsilon_0 - \frac{1}{4}\varepsilon_1^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0},$$

которое можно записать в виде:

$$s_2 = -\frac{1}{4}\left[\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0\right] - \frac{1}{4}\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}.$$

Вынося общий множитель, получим окончательное выражение для собственного значения в виде:

$$s_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\left[\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\right]. \qquad (2.88)$$

Прежде чем исследовать устойчивость состояния равновесия ρ_2^0 в зависимости от параметров, напомним, что по физическому смыслу ε_0 может принимать как отрицательные, так и положительные значения, в то время как ε_1 может принимать только положительные значения (см. п. 2.2.5).

По мере увеличения ε_0 в области отрицательных значений, состояние равновесия ρ_2^0 появляется при $\varepsilon_0 = -(\varepsilon_1^2/8)$, где собственное значение $s_2 = 0$, что соответствует точке бифуркации. При $\varepsilon_0 > -(\varepsilon_1^2/8)$ все три множителя в выражении (2.88) положительные, следовательно собственное значение $s_2 < 0$ и состояние равновесия ρ_2^0 является устойчивым.

Подставляя (2.86) в выражение (2.87) и проделывая такие же преобразования как для s_2, получим выражение для собственного значения s_3 в виде:

$$s_3 = \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\left[\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}\right]. \qquad (2.89)$$

Состояние равновесия ρ_3^0 существует при $-(\varepsilon_1^2/8) < \varepsilon_0 < 0$. В этой области значений параметра собственное значение $s_3 > 0$, следовательно точка ρ_3^0 является неустойчивой.

Таким образом, в результате для генератора с жестким возбуждением получается бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 2.7. Динамика системы зависит от управляющего параметра ε_0, значения которого отложены на оси абсцисс. По оси ординат отложены стационарные значения амплитуды $\rho(t)$. Для исходного уравнения генератора с жестким возбуждением (2.29) точки $\rho = 0$ на бифуркационной диаграмме рис. 2.7 соответствуют неподвижной точке на фазовой плоскости (x, y), расположенной в начале координат. Точки с ординатой $\rho > 0$ на бифуркационной диаграмме рис. 2.7 соответствуют предельному циклу радиуса ρ на фазовой плоскости (x, y) с центром в начале координат.

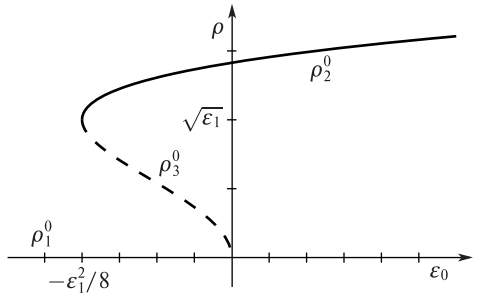


Рис. 2.7. Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением

В генераторе с жестким возбуждением (2.29) при $\varepsilon_0 < -(\varepsilon_1^2/8)$ существует единственный аттрактор на фазовой плоскости — устойчивая особая точка в начале координат. С увеличением параметра ε_0 при переходе значения $\varepsilon_0 = -(\varepsilon_1^2/8)$ происходит бифуркация рождения пары циклов —

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

устойчивого с радиусом ρ_2^0 и неустойчивого с радиусом ρ_3^0. С ростом параметра радиус устойчивого предельного цикла увеличивается, а неустойчивого — уменьшается. При достижении значения $\varepsilon_0 = 0$ неустойчивый предельный цикл стягивается в неподвижную точку в начале координат ($\rho_1^0 = 0$), происходит субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, состояние равновесия $\rho_1^0 = 0$ становится неустойчивым. При $\varepsilon_0 > 0$ на фазовой плоскости имеется неустойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл. При значениях параметров $(\varepsilon_1^2/8) < \varepsilon_0 < 0$ в генераторе с жестким возбуждением наблюдается явление бистабильности. На фазовой плоскости сосуществуют два аттрактора: устойчивая неподвижная точка и устойчивый предельный цикл. Границей их бассейнов притяжения является неустойчивый предельный цикл. В генераторе с жестким возбуждением также наблюдается явление гистерезиса. С ростом управляющего параметра переход из состояния равновесия на устойчивый предельный цикл происходит при $\varepsilon_0 = 0$, а при обратном движении по параметру переход от устойчивого предельного цикла к устойчивому состоянию равновесия происходит при $\varepsilon_0 = -(\varepsilon_1^2/8)$.

2.5. ВЫВОДЫ

В данном разделе рассмотрены два наиболее типичных примера автоколебательных систем на фазовой плоскости — генератор Ван дер Поля и генератор с жестким возбуждением автоколебаний. Проведено исследование динамики систем в квазигармоническом приближении. Получены укороченные уравнения для амплитуды и фазы, с помощью которых построены бифуркационные диаграммы и описаны условия возбуждения и характеристики автоколебаний.

Литература

1. *Стрелков С. П.* Маятник Фроуда // Журнал технической физики. — 1933. — Т. III.
2. *Стрелков С. П.* Механика. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1975. — 560 с.
3. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. — 917 с.
4. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981. — 586 с.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958.
6. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.–Ижевск: Институт комп. иссл., 2002.

7. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильященко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1986.
8. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания. — М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2002.
9. *Магнус К.* Колебания. Введение в исследование колебательных систем. — М.: Мир, 1982.
10. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. — НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 560 с.
11. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1980. — 360 с.
12. *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1970. — 447 с.
13. *Калинин В. И., Герштейн Г. М.* Введение в радиофизику. — М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1957. — 660 с.
14. *Харкевич А. А.* Нелинейные и парамерические явления в радиотехнике. — М.: Гостехиздат, 1956. — 184 с.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ГЛАВА 3 АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОЛУТОРА И ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

3.1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотренные выше автоколебательные системы с одной степенью свободы представляют собой ДС, фазовое пространство которых — плоскость. В общем виде автоколебательные системы на плоскости описываются уравнением:

$$\ddot{x} + \Phi(x, \alpha)\dot{x} + \Psi(x, \alpha) = 0, \tag{3.1}$$

где x — переменная, совершающая периодические колебания, α — вектор параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\Phi(x, \alpha)$ и $\Psi(x, \alpha)$ — нелинейные функции, характеризующие действие сил, обеспечивающих возможность периодических автоколебаний. Так в случае генератора Ван дер Поля (2.22) мы имеем два управляющих параметра $\alpha_1 = \varepsilon$ и $\alpha_2 = \omega_0^2$ и функции $\Phi(x, \alpha)$ и $\Psi(x, \alpha)$ имеют вид

$$\Phi(x, \varepsilon) = -(\varepsilon - x^2), \quad \Psi(x, \omega_0^2) = \omega_0^2 x. \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1) можно обобщить на определенный класс ДС с полутора степенями свободы следующим образом [1]:

$$\begin{gathered} \ddot{x} + F_1(x, z, \alpha)\dot{x} + F_2(x, z, \alpha) = 0, \\ \dot{z} = F_3(x, \dot{x}, z, \alpha), \end{gathered} \tag{3.3}$$

где F_i $(i = 1, 2, 3)$ — в общем случае нелинейные функции. Фазовая переменная $z(t)$ в (3.3) связана с переменной $x(t)$ посредством дифференциального оператора. Это означает, что z зависит от x инерционным образом. Если взаимосвязь переменной $z(t)$ с переменной $x(t)$ безынерционна и описывается алгебраическим соотношением

$$z(t) = \sum_{n=0}^{K} C_n x^n(t) = \varphi(x), \tag{3.4}$$

то уравнения (3.3) сводятся к уравнению генератора на фазовой плоскости (3.1). В случае инерционной зависимости этих переменных уравнения (3.3) описывают автоколебания в трехмерном фазовом пространстве и являются обобщением (3.1) на этот случай.

Следуя К. Ф. Теодорчику [2], обобщенные уравнения (3.3) будем называть ДС с инерционной нелинейностью. Действительно, как видно из уравнений (3.3), они описывают системы, параметры которых инерционным образом зависят от переменных, совершающих колебания. Например, функция нелинейной диссипации в (3.3) есть $F_1(x, z, \alpha)$, которая может быть записана как $F_1[x, \alpha(x)]$, где $\alpha(x)$ есть параметр, инерционным образом зависящий от переменной x. А именно это свойство было положено К. Ф. Теодорчиком в основу определения автоколебательных систем с инерционной нелинейностью [2].

Генераторы с инерционной нелинейностью весьма интересны по двум причинам. Во-первых. это есть обобщение модели автоколебательной системы на трехмерное фазовое пространство. Как мы увидим в дальнейшем, здесь возможен новый механизм нелинейного ограничения амплитуды колебаний — инерционный. Во-вторых, генераторы с полутора степенями свободы способны реализовать режимы квазипериодических и хаотических автоколебаний. Поэтому генераторы с инерционной нелинейностью представляют собой простейшие модели квазипериодических и хаотических автоколебаний. Если в системах типа (3.1) аттрактором является предельный цикл, то в системах типа (3.3) помимо предельного цикла могут быть реализованы автоколебания, образом которых служат двумерный тор и хаотический (странный) аттрактор.

3.2. ГЕНЕРАТОР ТЕОДОРЧИКА

Классический генератор с инерционной нелинейностью был предложен и описан *К.Ф. Теодорчиком* [2]. Автоколебания в системе обеспечиваются введением в колебательный контур термосопротивления $R(T)$, свойства которого нелинейным и инерционным образом зависят от протекающего через него тока. Схема генератора с инерционной нелинейностью К. Ф. Теодорчика изображена на рис. 3.1.

Уравнение для тока $i(t)$ в контуре имеет вид

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left[\frac{R(T)}{L} - \frac{MS_0}{LC}\right]\frac{di}{dt} + \left[(LC)^{-1} + L^{-1}\frac{\partial R(T)}{\partial T}\frac{dT}{dt}\right] i = 0, \tag{3.5}$$

где S_0 — крутизна характеристики усилителя, котоый предполагается линейным, M — взаимная индуктивность цепи обратной связи, $R(T)$ —

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

сопротивление термистора, зависящее от температуры T, L и C — индуктивность и емкость в колебательном контуре.

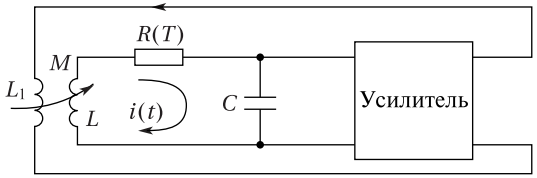


Рис. 3.1. Классическая схема генератора с инерционной нелинейностью Теодорчика

Полагая зависимость $R(T)$ линейной:

$$R(T) = R_0 + LbT, \quad b = \text{const}, \tag{3.6}$$

и считая, что процесс теплообмена подчиняется закону Ньютона:

$$\rho q \frac{dT}{dt} + kT = R(T)i^2,$$

где q — удельная теплоемкость нити термистора, ρ — ее масса, k — коэффициент теплоотдачи, получаем замкнутую систему уравнений вида

$$\begin{gathered} \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = (\mu - bT)\frac{di}{dt} - bi\frac{dT}{dt}, \\ \frac{dT}{dt} + \gamma T = \alpha(T) i^2, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{gathered} \mu = \omega_0^2 S_0 M - \frac{R_0}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \gamma = \frac{k}{\rho q}, \\ \alpha(T) = \alpha_0 + \frac{bLT}{\rho q}, \quad \alpha_0^2 = \frac{R_0}{\rho q}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

В безразмерных переменных

$$x = ai, \quad \dot{y} = -x, \quad z = \frac{bT}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad a = \left(\frac{\alpha b \rho q}{\omega_0 k}\right)^{1/2} \tag{3.9}$$

уравнения (3.7) принимают вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = mx + y - xz, && m = \frac{\mu}{\omega_0} = \omega_0 S_0 M - \frac{R_0}{\omega_0 L}, \\ &\dot{y} = -x, && g = \frac{\gamma}{\omega_0}, \\ &\dot{z} = -gz + gx^2, && \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

В трехмерной двупараметрической системе (3.10) параметр m пропорционален разности вносимой и рассеиваемой в контуре энергий, g — параметр, характеризующий относительное время релаксации термистора. В дальнейшем m будем называть параметром возбуждения, а g — параметром инерционности генератора.

Обратим внимание на следующее. Как видно из первого уравнения системы (3.10), в силу линейности характеристики усилителя ограничение роста переменной x происходит инерционным образом за счет члена xz. Таким образом, возможность возникновения устойчивых автоколебаний в генераторе Теодорчика обеспечивается за счет инерционной нелинейности. При этом усилитель генератора характеризуется линейной зависимостью сигнала на выходе от сигнала на входе. Крутизна характеристики усилителя S_0 является постоянной величиной

$$i_{\text{out}} = S_0 U_{\text{in}}, \quad \frac{di_{\text{out}}}{dU_{\text{in}}} = S_0, \tag{3.11}$$

где U_{in} — входное напряжение, i_{out} — ток на выходе усилителя.

Схема генератора Теодорчика (рис. 3.1) не совсем удобна при проведении экспериментов. Она включает термистр и не позволяет варьировать параметр g в модели (3.10), который для конкретного термистора является некоторой константой. Этого неудобства можно избежать, используя иную схему генератора.

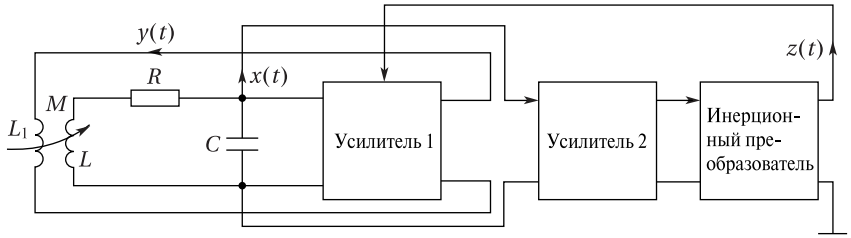


Рис. 3.2. Модифицированная схема генератора с инерционной нелинейностью

Рассмотрим схему, представленную на рис. 3.2. Колебательный контур в этой схеме в отличие от классического случая (рис. 3.1) не содержит нелинейных элементов. Усилитель 1 управляется дополнительной цепью обратной связи, содержащей линейный усилитель 2 и инерционный преобразователь. Дифференциальные уравнения генератора можно записать в явном виде, конкретизировав зависимость крутизны усилителя 1 $S(x, z)$. Сигнал с выхода инерционного преобразователя управляет крутизной основного усилителя 1 следующим образом:

$$S(x) = S_0 - bz, \tag{3.12}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

где b — некоторая константа, z — нормированное напряжение на выходе инерционного каскада. Предположим, что инерционный каскад можно описать уравнением:

$$\dot{z} = -\gamma z + \gamma x^2. \tag{3.13}$$

Схема, реализующая такое преобразование, включает двуполупериодный квадратичный детектор и RC-фильтр [1, 3].

Напряжение x на входе усилителя 1 связано с током y, протекающим через катушку L_1, следующим уравнением

$$\ddot{x} + \frac{R}{L}\dot{x} + \omega_0^2 x = M\omega_0^2 \dot{y}. \tag{3.14}$$

Будем считать, что ток y линейно зависит от напряжения x, т. е.

$$y = S \cdot x. \tag{3.15}$$

В случае (3.12) зависимость (3.15) становится более сложной

$$y = S_0 x - bxz. \tag{3.16}$$

Совокупность уравнений (3.14), (3.16) и (3.13) после несложных преобразований дает нам замкнутую систему уравнений, строго совпадающую с уравнениями генератора Теодорчика (3.10):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, & m &= \omega_0 S_0 M - \frac{R_0}{\omega_0 L}, \\ \dot{y} &= -x, & g &= \frac{\gamma}{\omega_0}, \\ \dot{z} &= -gz + gx^2, & \tau &= \omega_0 t. \end{aligned} \tag{3.17}$$

В уравнениях (3.17) параметр g уже допускает вариацию в эксперименте, так как зависит от постоянной времени фильтра детектора (3.17).

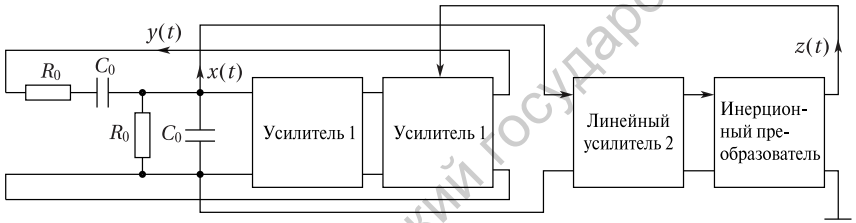


Рис. 3.3. Схема RC-генератора с инерционной нелинейностью

Схема генератора (рис. 3.2), включающая колебательный контур, также оказывается не совсем удобной в экспериментальном плане. Как показали исследования, гораздо более предпочтительней является схема с использованием в качестве эквивалента колебательного контура моста Вина (рис. 3.3).

Вид уравнений (3.17) не изменится, если в качестве селективного элемента использовать RC-цепочку в виде моста Вина [3]. Для обеспечения условий генерации в этом случае нужно применить два каскада усиления, как это показано на рис. 3.3. Для симметричного моста Вина управляющие параметры m и g в уравнениях (3.17) просто и с точки зрения эксперимента удобным образом выражаются через параметры схемы:

$$m = K_0 - 3, \quad g = \frac{R_0 C_0}{\tau_\mathrm{f}}, \quad \tau_\mathrm{f} = R_\mathrm{f} C_\mathrm{f},$$

где K_0 — коэффициент усиления двухкаскадного усилителя, $R_0 C_0$ и τ_f — постоянные времени моста Вина и фильтра детектора. В физическом эксперименте параметры m и g легко менять и измерять, варьируя коэффициент усиления и постоянную времени фильтра.

Таким образом, генератор Теодорчика с радиотехнической точки зрения может быть реализован несколькими способами, которые приводят к одной и той же математической модели — трехмерной двупараметрической ДС (3.17). Проведем анализ этой ДС.

Нетрудно убедиться, что система (3.17) характеризуется одним состоянием равновесия в нуле координат. Линеаризация системы (3.17) в точке равновесия приводит к характеристическому полиному

$$(g + s)(s^2 - ms + 1) = 0, \tag{3.18}$$

собственные числа (корни) которого есть

$$s_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}, \quad s_3 = -g. \tag{3.19}$$

Состояние равновесия характеризуется устойчивым (неустойчивым) двумерным многообразием и устойчивым одномерным (так как с физической точки зрения параметр $g > 0$). Если $g > 0$ и $0 < m < 2$, особая точка есть седло-фокус и является неустойчивой. Она устойчива лишь для $m < 0$. Точка $m = 2$ является бифуркационной: для $0 < m < 2$ мы имеем седло-фокус, для $m > 2$ — седло-узел.

Есть еще одно бифуркационное значение параметра m, это $m = 0$. В этой точке $s_{1,2}$ принимают чисто мнимые значения $s_{1,2} = \pm\mathrm{j}$. При этом

$$\left.\frac{\partial \operatorname{Re} s_{1,2}}{\partial m}\right|_{m=0} = \frac{1}{2},$$

т. е. собственные значения пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью. Реализуется классическая бифуркация рождения предельного цикла, бифуркация Андронова–Хопфа. Расчеты и эксперименты сви-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

детельствуют, что в результате этой бифуркации в системе (3.17) мягко рождается устойчивый предельный цикл, амплитуда которого растет пропорционально $\sqrt{m}$, а период равен $T_0 \simeq 2\pi$. Линия $m = 0$ на плоскости параметров m и g является бифуркационной линией рождения предельного цикла.

Численный анализ системы (3.17) показал, что динамика генератора Теодорчика во многом сходна с генератором Ван дер Поля: из устойчивого состояния равновесия мягко рождается предельный цикл. который является единственным аттрактором системы при $m > 0$ и $g > 0$. Однако подчеркнем важные особенности ДС (3.17): режим устойчивости автоколебаний достигается за счет инерционной нелинейности в условиях, когда основной усилитель генератора имеет линейную характеристику. И вторая особенность — состояние равновесия в нуле координат является седло-фокусом (или седло-узлом). Как мы увидим из дальнейшего, эти особенности могут стать причиной более сложной динамики.

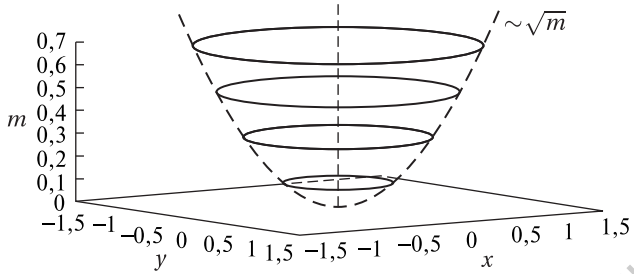


Рис. 3.4. Эволюция предельного цикла в системе (3.17) с ростом параметра m для фиксированного значения $g = 0{,}3$

На рис. 3.4 представлены результаты численного расчета эволюции предельного цикла в системе (3.17) с ростом параметра m для фиксированного значения $g = 0{,}3$. Как видно из рисунка, проекции предельного цикла на плоскость переменных (x, y) напоминают предельный цикл в генераторе Ван дер Поля. Амплитуда цикла возрастает пропорционально $\sqrt{m}$ в области значений $m \lesssim 0{,}7$. Для больших значений $m > 1$ цикл искажается и в спектре колебаний возрастает число и интенсивность гармоник на частотах $n\omega_0$ $(n = 2, 3, \ldots)$, что также характерно и для генератора Ван дер Поля.

Отметим, что простым преобразованием уравнения генератора Теодорчика (3.10) и (3.17) легко можно свести к общей форме (3.3)

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (m - z)\dot{x} + (1 - gz)x + gx^3 = 0; \\ &\dot{z} = -gz + gx^2, \end{aligned} \tag{3.20}$$

где $F_1 = z - m$, $F_2 = (1 - gz + gx^2)x$, $F_3 = g(x^2 - z)$. Первое уравнение по форме соответствует уравнению нелинейного осциллятора типа Дуффинга, в котором диссипация и частота инерционным образом зависят от переменной x. Вид этой зависимости задает второе уравнение системы (3.20).

3.3. МОДИФИКАЦИЯ ГЕНЕРАТОРА С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. ГЕНЕРАТОР АНИЩЕНКО–АСТАХОВА

Вернемся к схеме генератора Теодорчика, представленной на рис. 3.2. Предположим более общий случай, когда основной усилитель 1 генератора является нелинейным. Крутизна его характеристики (без учета дополнительной инерционной обратной связи) пусть будет:

$$S^1(x) = S_0 - S_1 x^2. \tag{3.21}$$

Мы полагаем, что основной генератор по сути идентичен генератору Ван дер Поля (2.22). Теперь учтем воздействие инерционной обратной связи. Пусть механизм управления крутизной $S^1(x)$ такой же, как и в генераторе Теодорчика (3.12):

$$S(x) = S^1(x) - bV = S_0 - S_1 x^2 - bV, \tag{3.22}$$

где $V = V(x)$ — напряжение на выходе инерционного преобразователя, b — параметр. Пусть инерционное преобразование осуществляется в соответствии с уравнением

$$\dot{V} = -\gamma V + \varphi(x), \tag{3.23}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая нелинейная функция. Уравнение для тока в колебательном контуре генератора (рис. 3.2) будет:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t \left(i - MS\frac{di}{dt}\right)dt = 0. \tag{3.24}$$

Уравнения (3.22)–(3.24) позволяют получить замкнутую систему, которая в безразмерных переменных имеет вид [1]

$$\begin{aligned} &\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, && m = \omega_0 S_0 M - \frac{R_0}{\omega_0 L}, \\ &\dot{y} = -x, && g = \frac{\gamma}{\omega_0}, \\ &\dot{z} = -gz + g\Phi(x), && \tau = \omega_0 t. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

где $d = d(S_1)$ — параметр, отвечающий степени влияния безынерционной нелинейности характеристики основного усилителя (3.21), $\Phi(x)$ — нелинейная функция инерционного преобразователя, определяемая видом функции $\varphi(x)$ в (3.23).

Исключая переменную y из системы (3.25), запишем ее в виде (3.3):

$$\begin{gathered}\ddot{x} + (m - z - 3dx^2)\dot{x} + (1 - gz + g\Phi(x))x = 0,\\ \dot{z} = -gz + g\Phi(x),\end{gathered} \tag{3.26}$$

Нелинейный осциллятор (3.26) характеризуется инерционный зависимостью как диссипации, так и частоты от переменной x. В случае сильной инерционности системы ($\tau_\text{ф} \gg T_0$), когда $g \to 0$, система (3.26) сводится к уравнению генератора Ван дер Поля (2.22):

$$\ddot{x} - \alpha(1 - \beta x^2)\dot{x} + x = 0, \tag{3.27}$$

где $\alpha = m$, $\beta = 3d/m$. Причем, соответствие с уравнением Ван дер Поля будет иметь место при любых зависимостях $\Phi(x)$.

Как следует из исходной системы уравнений (3.25), при $d = 0$ и $\Phi(x) = x^2$ она полностью идентична уравнениям генератора Теодорчика (3.17). Интересен и другой предельный случай — безынерционный генератор, отвечающий условию $g \to \infty$. Как видно из (3.25), при этом условии $z = -\Phi(x)$, и мы получаем уравнение:

$$\ddot{x} - \left(m - \Phi(x) - 3dx^2\right)\dot{x} + x = 0, \tag{3.28}$$

которое будет совпадать с уравнением Ван дер Поля только в случае, когда

$$\Phi(x) = x^2. \tag{3.29}$$

Исследования показали, что в генераторе Анищенко–Астахова (3.25) могут быть реализованы не только периодические, и хаотические режимы автоколебаний, что зависит от вида функции $\Phi(x)$, которая должна отличаться от (3.29), и от степени инерционности (параметр g должен принимать значения в некотором интервале $g_1 \leqslant g \leqslant g_2$).

Перейдем к более детальному анализу режимов колебаний в генераторе (3.25).

3.3.1. Периодические режимы автоколебаний и их бифуркации

Исследования показали, что ДС (3.25) при специальном задании вида нелинейности $\Phi(x)$ способна генерировать различные типы как периодических, так и хаотических колебаний, которые с изменением

параметров претерпевают бифуркации. Бифуркационный анализ системы (3.25) становится просто необходимым.

Сформулируем в общих чертах цель бифуркационного исследования и алгоритм его проведения. Из множества возможных режимов колебаний в системе попытаемся описать характерные колебания и их перестройки с изменением параметров. Для этого с применением компьютера выясним *структуру разбиения* плоскости параметров на области качественно различных типов движения, укажем их *фазовые портреты* и конкретизируем *типы бифуркаций* режимов на границах областей. Для двупараметрических систем общий алгоритм построения бифуркационных диаграмм состоит в следующем.

1. Необходимо найти особые точки системы, исследовать их устойчивость и выявить характерные бифуркации потери устойчивости, в частности бифуркацию рождения периодического движения (цикла).

2. Исследовать характер бифуркации рождения цикла, определяющий его устойчивость.

3. Провести однопараметрическое исследование эволюции циклов по параметрам и найти точки характерных бифуркаций.

4. Провести двупараметрическое исследование циклов, заключающееся в построении бифуркационных линий, отвечающих различным типам бифуркаций коразмерности 1, и найти на них точки дополнительных вырождений — точки бифуркаций коразмерности 2.

В системах с тремя параметрами повторяется двупараметрический анализ для выборочных значений 3-го параметра и исследуются бифуркационные ситуации более высокой коразмерности.

Математическая модель модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (3.25) есть нелинейная трехмерная диссипативная система с тремя независимыми параметрами, задающая поток в R^3,

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 \leqslant z < \infty,$$

где переменная z определена на положительной полуоси, так как с физической точки зрения представляет собой продетектированное напряжение $x(t)$ на выходе фильтра. Дивергенция векторного поля скоростей потока (3.25) зависит от параметров и фазовых координат:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = m - g - 3dx^2 - z. \tag{3.30}$$

Анализ в квазилинейном приближении $m < g \ll 1$ свидетельствуют о том, что система глобально диссипативна и для любых начальных данных из области определения фазовых переменных всегда справедливо

$$\operatorname{div}\mathbf{F} < 0.$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Система (3.25) характеризуется единственной особой точкой в начале координат. Если функция $\Phi(x)$ не содержит линейных по x членов, линеаризация системы в особой точке приводит к характеристическому полиному, который совпадает с (3.18)

$$(g+s)(s^2-ms+1)=0, \tag{3.31}$$

собственные значения (корни) которого есть

$$s_{1,2}=\frac{m}{2}\pm\frac{\mathrm{i}}{2}(4-m^2)^{1/2}, \quad s_3=-g. \tag{3.32}$$

В области плоскости параметров $g>0$, $-2<m<0$ действительные части всех собственных значений отрицательны и особая точка устойчива. С физической точки зрения параметр g всегда положителен как отношение характерных времен системы (периода колебаний ко времени релаксации фильтра). Параметр m может быть как меньше нуля (генератор недовозбужден), так и больше нуля в режимах генерации, которые собственно и представляют интерес. В области $0<m<2$ *особая точка есть седло-фокус* с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (3.32). Линия $m=2$ — бифуркационная и отвечает смене седло-фокуса на седло-узел.

В бифуркационной точке $m=0$, как видно из (3.32), собственные значения $s_{1,2}$ пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью

$$\left.\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,s_{1,2}(m)}{\partial m}\right|_{m=0}=\frac{1}{2}.$$

При этом третье собственное значение $s_3=-g$ отделено от мнимой оси. Реализуется классическая бифуркация Андронова–Хопфа: бифуркация рождения цикла из седло-фокуса. Линейный анализ бифуркации рождения цикла не чувствителен как к наличию диссипативной нелинейности (собственные значения от коэффициента d не зависят), так и к виду функции $\Phi(x)$, которая не должна лишь включать линейный по x член. Таким образом, в физически реализуемой области управляющих параметров системы, представляющей собой положительный квадрант плоскости $m\geqslant 0$, $g>0$, линия $g>0$, $m=0$ есть бифуркационная линия рождения цикла.

Вначале обсудим динамику системы (3.25) для случая $d=0$:

$$\begin{aligned}&\dot x=mx+y-xz,\\&\dot y=-x,\\&\dot z=-gz+gI(x)x^2, \quad I(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x\le 0,\end{cases}\end{aligned} \tag{3.33}$$

ограничившись двупараметрическим анализом. Влияние безынерционной диссипативной нелинейности оценим особо.

Расчет устойчивости неподвижной точки в линейном приближении — практически единственная задача, которую в отношении изучаемой системы удается решить аналитически. Последующие расчеты проведем с использованием компьютера, а экспериментальные — на радиофизическом генераторе.

Для решения вопроса об устойчивости рождающегося цикла нужно проанализировать характер бифуркации Андронова–Хопфа. Расчеты показали, что *первая ляпуновская величина* $L_1(g)$ в особой точке всюду вдоль линии рождения цикла *отрицательна*; рождающийся предельный цикл системы устойчив (*суперкритическая* бифуркация). Вычисление первой ляпуновской величины приближенно можно провести аналитически, используя алгоритм Н. Н. Баутина[1]) [4]. Приближенные аналитические и численные результаты качественно совпадают. Таким образом, в системах (3.25) и (3.33) на линии $m=0$, $g>0$ мягко рождается *устойчивый предельный цикл*, радиус которого растет пропорционально $\sqrt{m}$, а период, согласно теореме, равен

$$T_0\approx\frac{2\pi}{|s_{1,2}(0)|}=2\pi.$$

Интегрированием системы (3.33) установлено, что для значений $0<m<2$, $0<g<2$ решением задачи Коши с начальными условиями вблизи особой точки в нуле являются устойчивые периодические колебания с амплитудой, пропорциональной $\sqrt{m}$, и периодом $T_0\approx 2\pi$. Для значений $m<0{,}5$ соответствие с теоремой о рождении цикла в пределах точности компьютерных расчетов практически полное. С увеличением $m>0{,}5$ появляются малые отклонения в зависимостях амплитуды и периода цикла $\Gamma_0(m)$ от теоретически предсказываемых.

Проведем более детальный однопараметрический анализ эволюции родившегося семества циклов $\Gamma_0(m,g)$ с целью нахождения точек характерных бифуркаций. Рассмотрим различные сечения плоскости параметров m и g, фиксируя первый из них и осуществляя расчет цикла и его мультипликаторов при вариации второго.

Расчеты показывают, что исследуемому семейству циклов $\Gamma_0(m,g)$ присущи следующие бифуркации: а) наибольший по модулю мультипли-

[1]) Из-за разрыва второй произвожной $\Phi(x)=I(x)x^2$ в (3.25) возникают сложности в применении указанного алгоритма. Если аппроксимировать $\Phi(x)$ экспонентой $(\exp(x)-1)$ и ограничиться первыми тремя членами ее тейлоровского разложения, то вычисления можно довести до конца и показать, что $L_1(g)<0$ для любых $g>0$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

катор μ_1 в бифуркационной точке обращается в -1, что соответствует бифуркации *удвоения периода* колебаний; б) мультипликатор μ_1 цикла Γ_0 принимает значение $+1$, что соответствует слиянию и исчезновению (или рождению) устойчивого и неустойчивого циклов; в) имеют место случаи, когда произведение мультипликатора цикла с изменением параметра удовлетворяет условию $|\mu_1\mu_2| = 1$.

Последнее условие назовем *условием нейтральности*, так как оно отвечает обращению в нуль суммы ляпуновских показателей цикла Γ_0: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Если при этом мультипликаторы комлексно-сопряженные, то реализуется *бифуркация рождения* двумерного *тора*. Для действительных мультипликаторов μ_1 и μ_2 бифуркационной ситуации здесь нет, цикл седловой. Для семейства циклов $\Gamma_0(m, g)$ отмечены оба случая, т. е. бифуркация рождения тора в системе (3.33) имеет место!

Определив особые точки по параметрам, отвечающие интересующим нас бифуркациям циклов $\Gamma_0(m, g)$, приступим к двупараметрическому анализу — построению бифуркационных линий в пространстве параметров.

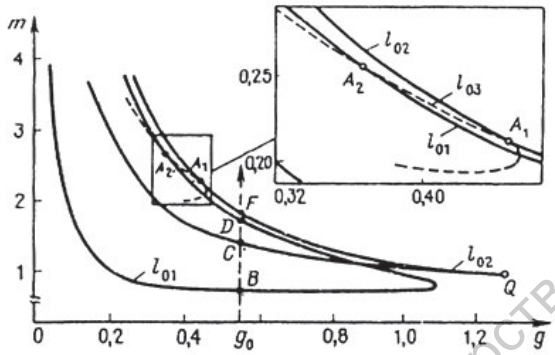


Рис. 3.5. Бифуркационная диаграмма для семейства 1-тактных циклов системы (3.33); l_{01} — линия удвоения периода, l_{02} — линия кратности, l_{03} — линия нейтральности, A_1, A_2 и Q — точки бифуркаций коразмерности 2

На рис. 3.5 приведена *бифуркационная диаграмма* для семейства 1-тактных циклов Γ_0, рождающихся в результате бифуркации Андронова–Хопфа. На линии l_{01} один из мультипликаторов цикла обращается в -1 (*линия бифуркации удвоения* периода). Внутри области, ограниченной линией l_{01}, цикл Γ_0 седловой, вне линии l_{01} он устойчив, так как оба его мультипликатора принадлежат внутренности единичного круга. На линии l_{02} $\mu_1 = +1$. Здесь происходит слияние и последующее исчезновение устойчивого и седлового циклов. Либо, если двигаться по параметрам в противоположном направлении, из сгущения траекторий рождается пара

циклов. Линию l_{02} далее будем называть линией кратных циклов или *линией кратности*. Внутри области, ограниченной линией кратности, существует всегда три 1-тактных цикла: седловой Γ_0'' и два цикла Γ_0 и Γ_0', которые могут быть устойчивыми или седловыми.

Ситуацию поясняет рис. 3.6, где качественно изображена рассчитанная зависимость наибольшего мультипликаторов цикла μ_1 при движении по параметру m для фиксированного g_0, указанного на рис. 3.5. В точке C рождается пара циклов Γ_0' и Γ_0'', в точке F сливаются и исчезают циклы Γ_0 и Γ_0'', в точке B цикл Γ_0 претерпевает бифуркацию удвоения периода, становится седловым, но в точке D он вновь обретает устойчивость[1]). Ситуация описана при условии движения по параметру m в сторону его увеличения. Характерные точки бифуркаций B, C, D и F нанесены на рис. 3.5.

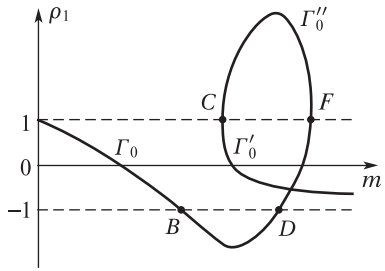


Рис. 3.6. Качественный вид зависимости мультипликатора $\mu_1(m)$ для цикла Γ_0 в сечении $g = g_0$. Критические точки B, C, D и F соответствуют указанным на рис. 3.5

Линия кратности l_{02} образует характерный уголок с вершиной в точке Q, где сливаются в один все три цикла Γ_0, Γ_0' и Γ_0''. Точка Q является бифуркационной и имеет коразмерность 2. В теории катастроф эту точку называют *точкой сборки*. Наличие сборки отвечает простейшей и наиболее часто встречающейся катастрофе в многопараметрических системах и единственно возможной катастрофе в двупараметрических системах общего положения. Взаимосвязь катастрофы сборки и динамики исследуемой системы обсудим ниже.

На рис. 3.5 изображен участок бифуркационной линии l_{03}, на котором выполняется условие нейтральности цикла Γ_0: $|\mu_1\mu_2| = 1$. Строго бифуркационной линия l_{03} является на участке от точки A_1 до A_2, где мультипликаторы цикла комплексно-сопряженные и выходят на единичный круг. В точках A_1 и A_2 оба мультипликатора равны либо -1 (точка A_2), либо $+1$ (точка A_1), что отвечает резонансам $1/1$ (A_1) и $1/2$ (A_2). Как и точка Q, бифуркационные точки A_1 и A_2 имеют коразмерность 2. В них, помимо условия выхода пары мультипликаторов на единичный круг, удовлетворяются условия резонансов. Как показали

[1]) Подобные расчеты, требующие переходов в точках C и F на неустойчивые циклы, нетривиальны, но возможны при соответствующей модификации алгоритмов вычисления мультипликаторов циклов. Обычное интегрирование приводит здесь к потере цикла и жесткой смене режимов [1].

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

расчеты, бифуркация рождения тора из цикла Γ_0 приводит к режиму неустойчивых биений. В автономной системы (3.33) режим устойчивых двухчастотных колебаний нами не обнаружен. Двупараметрический анализ характера устойчивости однотактных циклов системы можно на этом закончить, так как определены типичные бифуркации и построена соответствующая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров m и g.

При подходе к линии удвоения l_{01} снизу цикл Γ_0 устойчив не в малом (первая ляпуновская величина в особой точке строго отрицательна). Значит, пересечение линии l_{01} приведет к мягкому рождению устойчивого цикла Γ_1, период которого в линейном приближении вдвое больше ($T_1 \simeq 2T_0$). Взяв в качестве начального приближения точку на цикле Γ_0 вблизи точки бифуркации удвоения, будем искать цикл Γ_1, который характеризуется двупериодической неподвижной точкой в отображении Пуанкаре. Сместившись по параметру за бифуркационную линию l_{01}, численным интегрированием определим цикл Γ_1, который действительно устойчив, имеет близкий к удвоенному период и в фазовом пространстве дважды обходит 1-тактный цикл, потерявший устойчивость.

Рисунок 3.7 иллюстрирует сказанное для значения $g = 0{,}2$. Ниже точки бифуркации $m^* = 0{,}966\ldots$ в системе устойчив цикл Γ_0. Выше по параметру ($m > m^*$) устойчивым является цикл удвоенного периода Γ_1; цикл Γ_0 становится седловым.

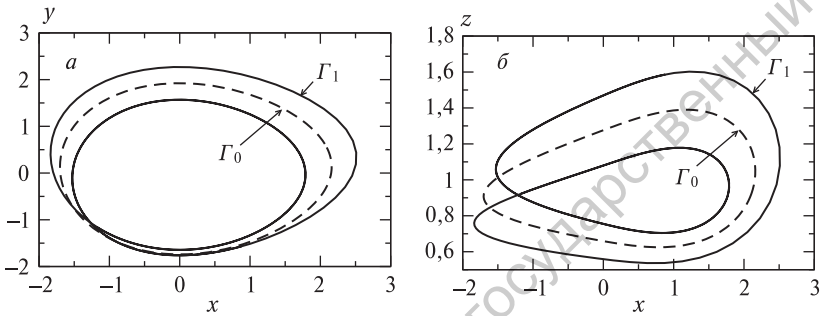


Рис. 3.7. Бифуркация удвоения 1-тактного цикла. Проекции фазовых траекторий на плоскости переменных x, y (*а*) и x, z (*б*). Γ_0 — цикл периода 1, Γ_1 — цикл удвоенного периода

Проведем аналогичным образом однопараметрический, а затем и двупараметрический анализ семейства *2-тактных* циклов $\Gamma_1(m, g)$. Бифуркационный анализ показывает, что характер бифуркаций и структура взаиморасположения соответствующих бифуркационных линий на плоскости параметров для циклов Γ_1 удвоенного периода качественно повторяет картину для 1-тактных циклов с той лишь разницей, что обнаруживаются два самостоятельных семейства 2-тактных циклов Γ_1^1 и Γ_1^2 [1].

На рис. 3.8 изображена бифуркационная диаграмма одного из семейств циклов $\Gamma_1^1(m, g)$, подтверждающая сказанное выше. Наличию двух семейств 2-тактных циклов отвечает зависимость мультипликаторов от параметра m в виде двух петель в отличие от одной петли для циклов периода T_0. Расчеты свидетельствуют, что внутри каждой из областей, ограничиваемых бифуркационными линиями удвоения периода циклов $\Gamma_1^1(m, g)$ и $\Gamma_1^2(m, g)$, имеются по два самостоятельных семейства 4-тактных циклов. Можно полагать, что иерархия размножения семейств циклов продолжается до бесконечности, их бифуркационные диаграммы являют собой систему топологически эквивалентных *вложенных структур*, которым отвечают универсальные свойства, обобщающие закономерности подобия типа Фейгенбаума на случай двух параметров. Для циклов Γ_k периода $T_k \simeq 2^k T_0$, $k = 0, 1, 2$ и частично для $k = 3$, это проверялось экспериментально и качественно подтвердилось. Количественные закономерности установить трудно, так как с этой целью необходимо численно анализировать циклы достаточно больших периодов и с высокой степенью точности. Эту задачу удобнее рассматривать применительно к двупараметрическим двумерным модельным отображениям.

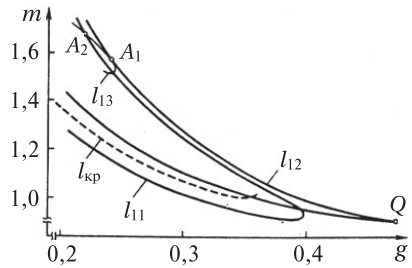


Рис. 3.8. Бифуркационная диаграмма для семейства 2-тактных циклов $\Gamma_1^1(m, g)$; $l_{кр}$ — линия критических значений параметров, пересечению которой отвечает переход к хаосу

Наглядное представление о сложности разбиения фазового пространства на различные типы траекторий в относительно простой системе (3.33) дает геометрическое изображение полученных результатов. Введем в рассмотрение комбинированное трехмерное пространство, в котором изобразим графически зависимость $\xi = \xi(m, g)$, где под ξ будем понимать одну из координат неподвижной точки в сечении Пуанкаре для цикла. К примеру, если ввести в R^3 системы (3.33) секущую плоскость $x = 0$, то под ξ можно понимать координату z двумерного отображения на секущей.

Расчеты показывают, что геометрическим местом точек, отвечающим устойчивым и неустойчивым циклам $\Gamma_0(m, g)$ системы, является сложная двумерная поверхность S^0 в указанном пространстве, изображенная на рис. 3.9. Поверхность S^0 для $\xi \geqslant 0$ выходит из линии рождения цикла Γ_0 и имеет две складки и сборку. На рис. 3.9 для наглядности

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

дан разрез поверхности S^0 плоскостью $g = g_0$. Внутри области между точками C и F имеются три листа поверхности, которые соответствуют циклам Γ_0 (верхний лист), Γ_0' (нижний лист) и Γ_0'' (внутренний лист). Проецирование сложной поверхности на плоскость параметров m и g благодаря наличию складок дает линию особенности l_{02}, состоящую из верхней и нижней ветвей, пересекающихся в точке Q. С движением по параметру m ($g = g_0$) неизбежно связано явление *гистерезиса*, обусловленного «перескоками» в точках F (если двигаться по m снизу) и C (при движении по m сверху). В теории катастроф эти *жесткие переключения* хорошо известны и составляют, собственно, сам эффект катастрофы сборки. В двупараметрических семействах, кроме складки и сборки, никаких особенностей при проецировании поверхности на плоскость быть не может.

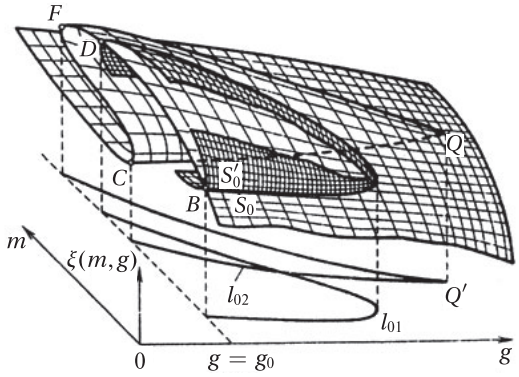


Рис. 3.9. Геометрическая трактовка критических явлений в системе (3.33); точки особенностей те же, что и на рис. 3.5 и 3.6

Таким образом, бифуркационная линия кратности l_{02} на диаграмме рис. 3.5 обязана своим происхождением наличию складок и сборки у поверхности S^0. Каково происхождение бифуркационной линии удвоения l_{01}? Если анализировать только однотактные циклы Γ_0, то эта линия соответствует проекции соответствующей линии на поверхности S^0, отвечающей критическим значениям амплитуд цикла, когда мультипликатор принимает значение -1. Учитывая, что при этом мягко рождается цикл удвоенного периода Γ_1, на рис. 3.9 намечена поверхность S_0^1, которая пересекает поверхность S^0 по линии удвоения. Проекция линии пересечения поверхности S_0^1 с S^0 на плоскость параметров m и g даст бифуркационную линию l_{01}. Катастрофы в окрестности этой линии не происходит, так как переход от одного устойчивого режима к другому устойчивому *происходит мягко.*

3.3.2. Бифуркации удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума

Как следует из анализа бифуркационных диаграмм рис. 3.5 и рис. 3.8, в генераторе Анищенко–Астахова реализуется бифуркация удвоения периода циклов периода 1 и 2 при движении как по параметру m ($g = \text{const}$), так и по параметру g ($m = \text{const}$). Детальное изучение закономерностей бифуркаций удвоения периода в системе (3.33) были проведены как в численном, так и в физическом эксперименте и подробно описаны в монографии [1].

Рассмотрим кратко результаты указанных экспериментов. На рис. 3.10 представлены данные расчетов эволюции предельных циклов в системе (3.33), полученные при движении по параметру m при фиксированном значении $g = 0{,}3$. На рисунке приведены проекции фазовых траекторий на плоскость переменных (x, y), отрезки реализации $x(t)$ и соответствующие спектры мощности $S_x(f)$, рассчитанные для временных реализаций переменной $x(t)$. Данные рис. 3.10 иллюстрируют наличие каскада бифуркаций удвоений периода, завершающихся переходом к режиму хаотического аттрактора. Расчеты бифуркационных значений параметров m_k и g_k, при которых мультипликаторы соответствующих циклов μ_k обращаются в «-1», приведены в табл. 3.1. Универсальная постоянная Фейгенбаума δ оценивалась по выражению:

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \delta_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}}, \tag{3.34}$$

где $\alpha_k = m_k$ ($g = \text{const}$) или $\alpha_k = g_k$ ($m = \text{const}$).

Таблица 3.1. Бифуркационные значения параметров m_k, g_k, постоянная Фейгенбаума δ_k и критические точки при удвоениях в системе (3.33) (численный расчет)

	$g = 0{,}3$			$m = 1{,}45$		
	m_k	δ_k	m^*	g_k	δ_k	g^*
0	0,7700	—	—	0,1200	—	—
1	1,0200	—	1,0880	0,16898	—	0,18233
2	1,0713	4,873	1,0853	0,18162	3,876	0,18506
3	1,08216	4,724	1,08511	0,18438	4,582	0,18513
4	1,08449	4,66896	1,08512	0,18497	4,66836	0,18513

Расчеты проводились для значений $k = 1, 2, 3, 4$, т. е. до точки бифуркации удвоения цикла периода $16T_0$. Как показали эксперименты, разумная точность оценки универсальной постоянной Фейгенбаума δ

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

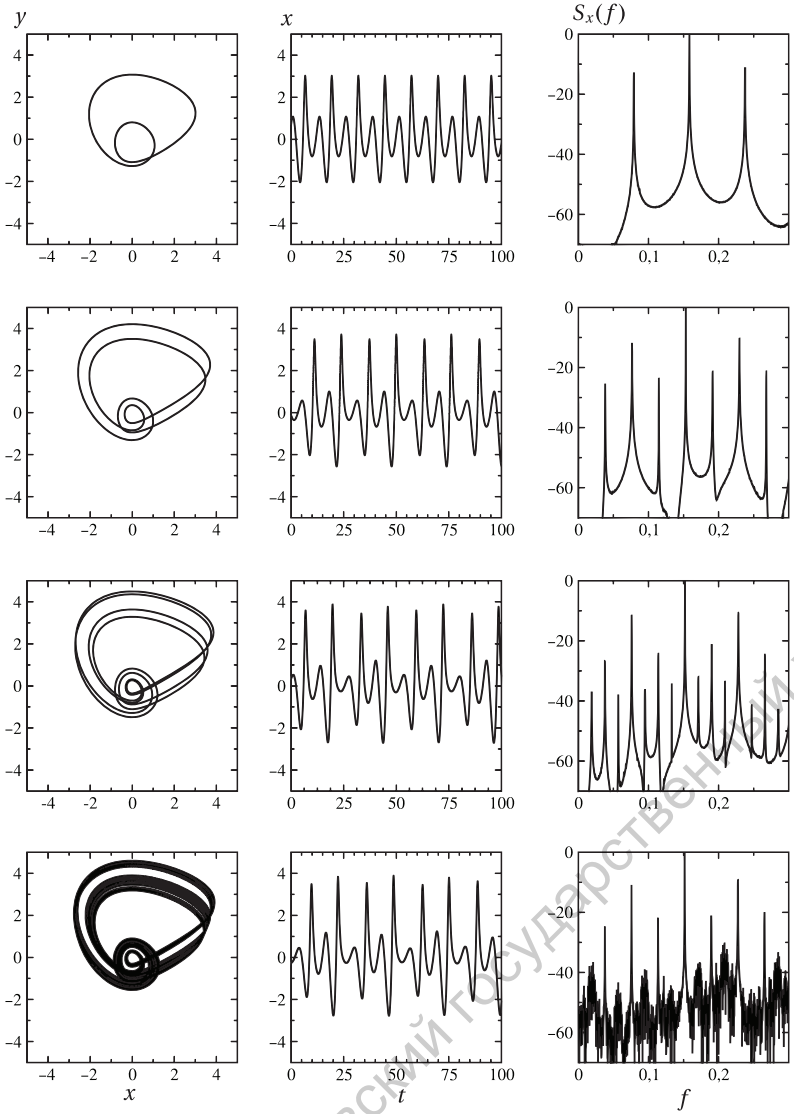


Рис. 3.10. Результаты расчетов проекций фазовых портретов траекторий на плоскость переменных (x, y), отрезков временных реализаций $x(t)$ и соответствующих им спектров мощности $S_x(f)$ в системе (3.33) для значения параметра $g = 0{,}3$ и возрастающих (сверху вниз) значений параметра m в интервале $0{,}8 < m < 1{,}09$

достигается уже в этом случае, хотя соотношение (3.34) справедливо лишь в пределе $k \to \infty$.

Критические значения параметров m^* (или g^*), отвечающие точке бифуркации рождения хаотического аттрактора, оценивались по формуле [1]:

$$\alpha^* = \frac{\alpha_k \delta - \alpha_{k-1}}{\delta - 1}, \tag{3.35}$$

где k отвечало значению $k = 4$.

Данные расчетов сопоставлялись с результатами физического эксперимента на радиотехнической модели генератора. На рис. 3.11 приведены проекции фазовых портретов циклов и соответствующих спектров мощности, иллюстрирующие эволюцию режимов колебаний при вариации параметра m ($g = 0{,}3$) в эксперименте. Нетрудно убедиться, что данные эксперимента рис. 3.11 соответствуют результатам расчетов (рис. 3.10). Более детальную информацию можно получить из сравнения расчетных и экспериментальных данных для бифуркационнных значений параметра m_k, представленных в табл. 3.2.

Таблица 3.2. Сравнение расчетных и экспериментальных бифуркационных значений параметра m для $g = 0{,}3$

k	m_k (расчет)	m^k (эксперимент)	δ_2
0	$0{,}770 \pm 10^{-6}$	$0{,}77 \pm 0{,}01$	
1	$1{,}020 \pm 10^{-6}$	$1{,}02 \pm 0{,}01$	
2	$1{,}0713 \pm 10^{-6}$	$1{,}07 \pm 0{,}01$	$\delta_2 = 4{,}873$ (расчет)
3	$1{,}08216 \pm 10^{-6}$	$1{,}08 \pm 0{,}01$	
m^*	$1{,}08516 \pm 10^{-6}$	$1{,}09 \pm 0{,}01$	$\delta_2 = 5{,}0 \pm 0{,}12$ (эксперимент)

В эксперименте уверенно можно было измерить бифуркационные значения m_k вплоть до $k = 3$, отвечающего бифуркации удвоения цикла периода $8T_0$. Как видно из таблицы, для определения константы Фейгенбаума этого недостаточно как в физическом ($\delta_2 = 5{,}0 \pm 0{,}12$), так и в численном ($\delta_2 = 4{,}873$) экспериментах. В то же время соотношение расчетных и экспериментальных значений m_k вплоть до $k = 3$ свидетельствует о том, что в динамической системе (3.33) переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения осуществляется в соответствии с универсальностью Фейгенбаума [7, 8].

В связи с тем, что универсальность перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода была доказана Фейгенбаумом для класса гладких одномерных отображений с квадратичным максимумом, возникает естественный вопрос: почему эти закономерности с высокой степенью точности ввыполняются для трехмерной динамической системы (3.33)?

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

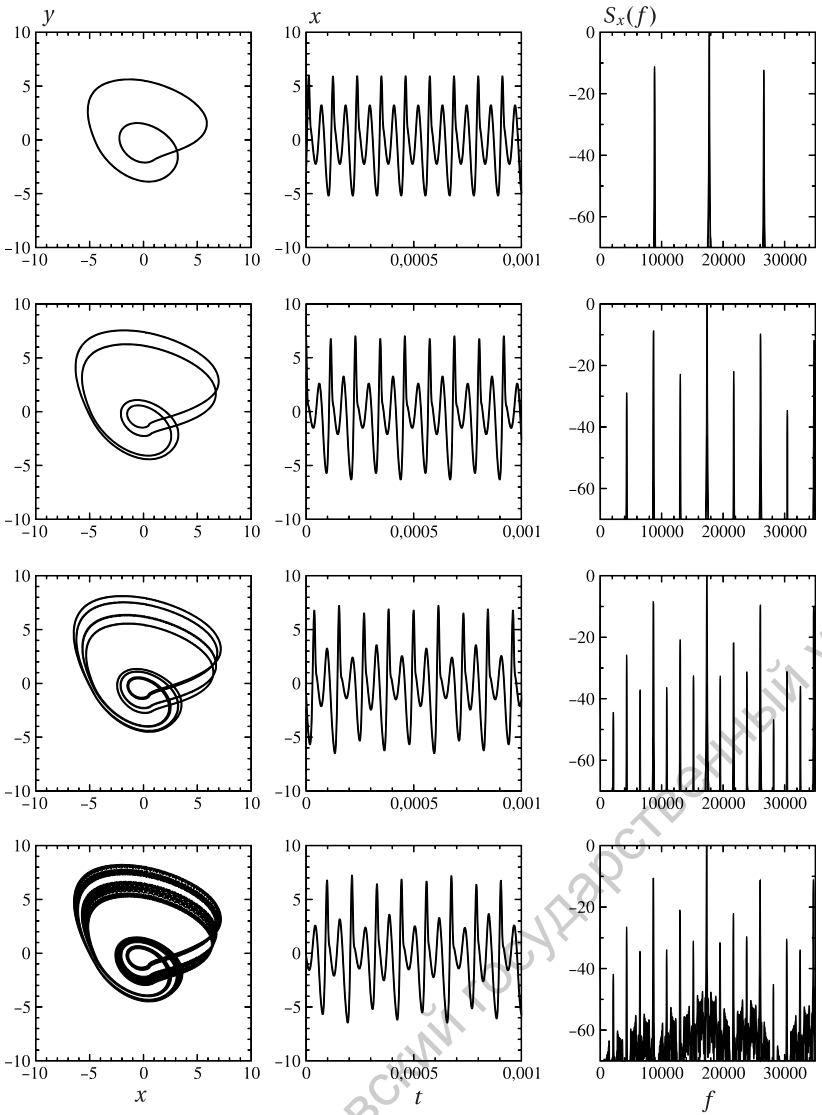


Рис. 3.11. Соответствующие рис. 3.10 данные физического эксперимента на радиотехнической модели генератора (3.33). Результаты получены путем преобразования аналогового сигнала $x(t)$ в цифровой с последующей обработкой сигнала на компьютере

Ответ на этот вопрос безусловно есть и заключается в том. что динамика системы (3.33) с высокой степенью точности может быть охарактеризована одномерным отображением класса Фейгенбаума [1].

Рассмотрим режим хаотического аттрактора в системе (3.33) при значениях параметров $m = 1{,}5$ и $g = 0{,}3$. Введем в фазовом пространстве секущую плоскость условием $x = 0$ и построим двумерное отображение $y_{n+1}, x_{n+1} = F(y_n, x_n)$ на секущей плоскости. Как показали расчеты, полученное отображение близко к одномерному [1]. Чтобы убедиться в этом, используя данные расчета отображения в секущей плоскости $x = 0$, построим численно одномерное отображение $y_{n+1} = f(y_n)$. Результаты представлены на рис. 3.12. Как видно из графика, отображение действительно близко к одномерному и имеет гладкий квадратичный максимум. Более детальное описание соответствия динамики системы (3.33) динамике одномерного отображения класса Фейгенбаума дано в [1].

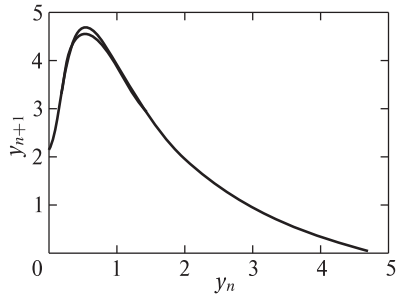


Рис. 3.12. Одномерное отображение $y_{n+1} = f(y_n)$, построенное численно для $m = 1{,}5$ и $g = 0{,}3$

3.3.3. Хаотический аттрактор и гомоклинические траектории в генераторе

Гомоклинические траектории (точки) как результат грубого пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов (устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых неподвижных точек) со времени открытия и изучения их А. Пуанкаре, Г. Биркгофом и С. Смейлом служат своего рода сигналом бедствия, предвещающим возможность сложного апериодического движения системы. Из существования гомоклинических траекторий при некоторых дополнительных предположениях следует наличие в их окрестности счетного множества устойчивых и неустойчивых периодических траекторий различных периодов, включая континуум траекторий, устойчивых по Пуассону.

Одним их фундаментальных результатов в теории динамического хаоса является теорема Шильникова о седло-фокусе [5]. Суть теоремы в том, что если в динамической системе существует двояко-асимптотическая траектория в виде петли сепаратрисы седло-фокуса, то в ее окрестности возникает нетривиальное гиперболическое подмножество траекторий. Это подмножество может оказаться притягивающим, и то-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

гда в эксперименте будет наблюдаться хаотический аттрактор как образ детерминированного хаоса.

Многосторонний экспериментальный анализ механизмов возникновения и топологической структуры хаотических притягивающих множеств в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью обоснованно привел к мысли о существовании в автономной динамической системе гомоклинической траектории типа *петли сепаратрисы состояния равновесия «седло–фокус»*.

Первые попытки найти петлю сепаратрисы в уравнениях генератора (3.25) к успеху не привели. Более того, выяснилось, что такого решения эти уравнения точно не имеют. Покажем, что это так. Особая точка системы характеризуется двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Заменим время в (3.25) на обратное и зададим начальные условия $x(0) = y(0) = 0$, $z(0) > 0$ на одномерном неустойчивом многообразии. Интегрирование системы подтвердит уход траектории на бесконечность вдоль оси z. Из уравнений (3.25) следует, что $z(\tau) = z(0)\exp(g\tau)$. Траектория при $\tau \to \infty$ в особую точку не возвращается!

Возникла гипотеза, которая оказалась весьма успешной. Петля сепаратрисы седло-фокуса существует в некоторой возмущенной системе. Снятие возмущения приводит к исчезновению самой петли, но структура разбиения фазового пространства на траектории остается. Чтобы подтвердить эти соображения, нужно определить вид слабо возмущенной системы, доказать наличие в ней петли сепаратрисы седло-фокуса, выяснить структуру аттракторов и изучить их эволюцию при снятии возмущения. Решение указанной задачи неоднозначно, но в силу свойства грубости конкретный вид малого возмущения не должен иметь принципиального значения.

Добавим во второе уравнение исходной системы (3.25) постоянный положительный член γ и рассмотрим возмущенную таким способом систему [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x + \gamma, \\ \dot{z} &= -gz + gI(x)\,x^2. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Особая точка потока (3.36) по-прежнему единственная, слегка смещена относительно начала координат и представляет собой седло-фокус. Ее координаты: $x^0 = \gamma$, $y^0 = \gamma(\gamma^2 - m)$, $z^0 = \gamma^2$. Состояние равновесия в возмущенной системе (3.36) для $m > 0$ характеризуется двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Для нахождения петли Γ_0^1 в уравнениях системы произведем замену времени на обратное и с начальными условиями на одномерном неустойчивом многообразии решим многократно задачу Коши для фиксированного $g = 0{,}3$ и различных m и γ. Выбрав малое значение $\gamma = 0{,}1$, найдем бифуркационную точку $m^* = 1{,}176\ldots$, в которой реализуется однообходная петля седло-фокуса Γ_0^1. Трехмерное изображение двояко-асимптотической траектории Γ_0^1 приведено на рис. 3.13, и при отклонении любого из управляющих параметров системы (3.36) она, естественно, разрушается. Детальные расчеты бифуркационных диаграмм для системы (3.25) и возмущенной системы (3.36) подтвердили их качественную эквивалентность. На основании этого можно утверждать, что структура и свойства хаоса в системе (3.25) полностью определяются фактом существования петли сепаратрисы седло-фокуса в системе (3.36).

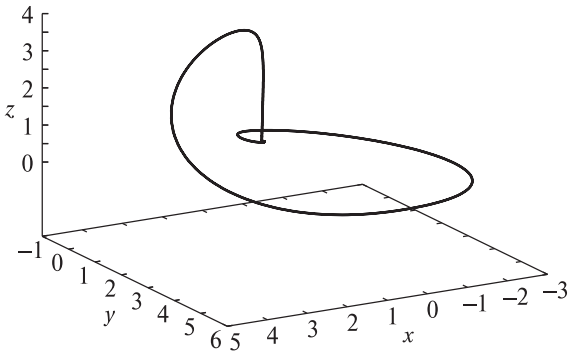


Рис. 3.13. Петля сепаратрисы седло-фокуса в возмущенной системе (3.36) для $m = 1{,}176$ и $g = 0{,}3$

Экспериментальные и численные исследования убедительно доказали возможность генерации хаотических автоколебаний различной структуры и взаимосвязь эффекта детерминированного хаоса с петлей сепаратрисы седло-фокуса в системе (3.25). В качестве примера на рис. 3.14 приведены проекции хаотических траекторий на плоскость (x, y), отвечающие так называемому *спиральному типу* аттрактора. Пример *винтового аттрактора* приведен на рис. 3.15. На этом же рисунке представлена петля сепаратрисы седло-фокуса Γ_0. Указанные результаты были получены численно. Однако они воспроизводятся и в физическом эксперименте. При этом имеет место удивительно хорошее соответствие экспериментальных и численных результатов. В качестве примера на рис. 3.16 приведены фотографии аттрактора, полученного в эксперименте.

Можно сделать следующий принципиально важный вывод. Для реализации простейшего типа генератора хаотических автоколебаний необходимо и достаточно:

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

— создать усилительный каскад с резонансным контуром на входе, обеспечивающий амплитудную характеристику типа перевернутой параболы с управляемой крутизной падающего участка;

— ввести положительную обратную связь, удовлетворяющую всем условиям возбуждения автоколебаний.

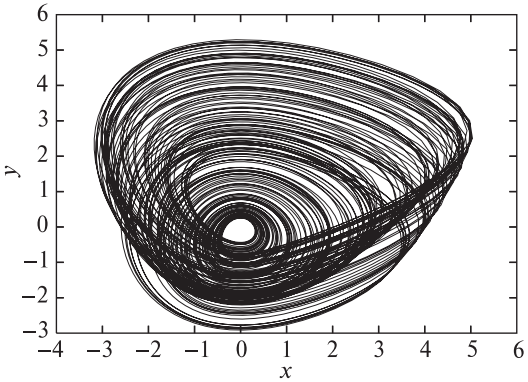


Рис. 3.14. Проекция хаотического аттрактора спирального типа на плоскость (x, y) в системе (3.25) при $d = 0$, $m = 1{,}563$, $g = 0{,}17$

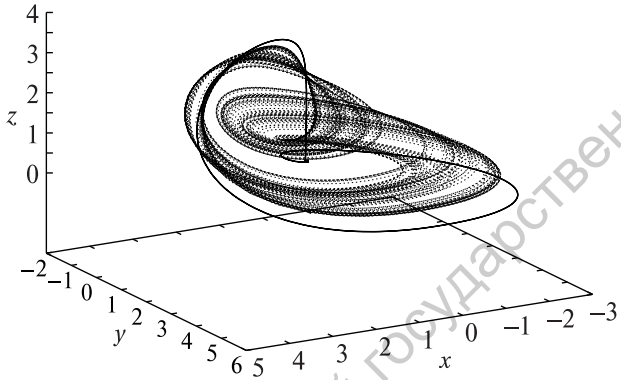


Рис. 3.15. Хаотический аттрактор винтового типа и петля сепаратрисы седло-фокуса в системе (3.25) и (3.36) соответственно

В генераторе Анищенко–Астахова необходимая характеристика усилителя реализована за счет инерционной обратной связи с использованием однополупериодного детектора в качестве нелинейности. Мы уверены, что это далеко не единственный практический способ достижения результата, существуют и другие пути.

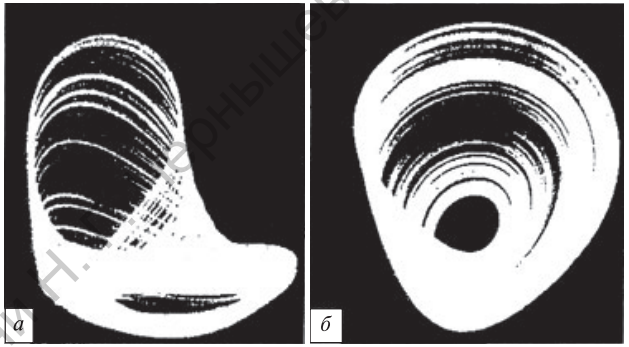


Рис. 3.16. Проекции фазовой траектории спирального аттрактора на плоскости переменных (x, z) (*а*) и (x, y) (*б*) (физический эксперимент, $m = 1{,}5$, $g = 0{,}2$)

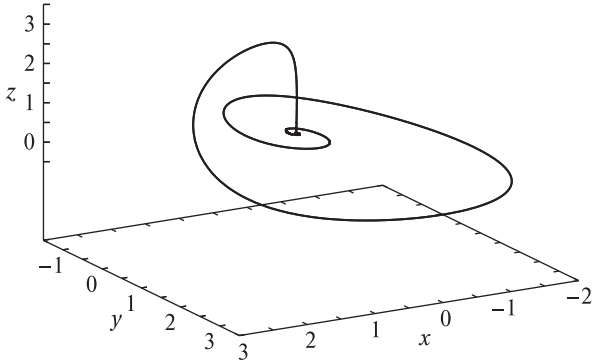


Рис. 3.17. Петля сепаратрисы седло-фокуса, реализующаяся в возмущенной системе (3.36) с $\Phi(x) = \exp(x) - 1$

В заключение данного параграфа отметим следующий важный факт. Большинство результатов, полученных с использованием генератора, относится к модели (3.33). С точки зрения физического и численного экспериментов это оправдано. Однако в математическом плане есть некоторая особенность. Функция $\Phi(x) = I(x)\,x^2$ в нуле терпит разрыв производной, т. е. является негладкой. Это обстоятельство приводит к ряду математических сложностей. Было установлено, что основные свойства генератора слабо зависят от таких математических тонкостей. В частности, генератор демонстрирует весь спектр свойств, если представить функцию $\Phi(x)$ в виде экспоненты [6]

$$\Phi(x) = \exp(x) - 1. \tag{3.37}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Эта функция является гладкой, аналитической и может с успехом быть использована при теоретическом анализе свойств системы (3.25).

Вычисления показали, что в возмущенной системе (3.25) с $\Phi(x) = \exp(x) - 1$ также реализуется особое решение в виде петли сепаратрисы седло-фокуса. Результаты расчетов представлены на рис. 3.17. Таким образом, генератор Анищенко–Астахова реализует режим детерминированного хаоса и в случае задания характеристики нелинейного детектора в соответствии с (3.37).

В заключение этого раздела отметим, что генератора Анищенко–Астахова (3.33) явился первой в мировой литературе трехмерной автономной дифференциальной системой, для которой численно и экспериментально были установлены универсальность Фейгенбаума и подтвержден сценарий Шильникова [5]. Кроме того, применительно к системе (3.33) впервые был проведен двупараметрический бифуркационный анализ, подробно изложенный в монографии [1].

3.4. ГЕНЕРАТОР ЧУА

Одной из наиболее популярных и детально исследованных трехмерных динамических систем с хаотическим аттрактором является так называемая *цепь Чуа* [9, 10]. Рассмотрим схему генератора, представленную на рис. 3.18. Схема включает четыре линейных элемента (емкости C_1, C_2, индуктивность L, омическое сопротивление $R = 1/G$) и один нелинейный элемент — N_R.

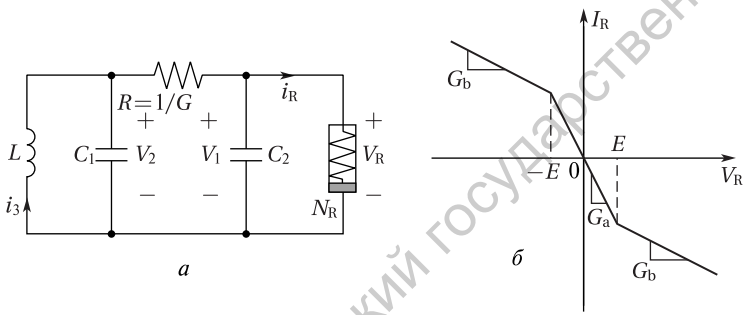


Рис. 3.18. Цепь Чуа (*а*) и вольт-амперная характеристика нелинейного элемента N_R (*б*)

Как видно из рис. 3.18, *б*, нелинейный элемент N_R, называемый в литературе диодом Чуа, характеризуется тремя падающими линейными участками с отрицательной проводимостью: $-G_a$ для $|V_R| < E$ и $-G_b$ для $|V_R| > E$.

Наличие отрицательной проводимости обеспечивает возможность автоколебаний в цепи Чуа.

На основе законов Кирхгофа для схемы на рис. 3.18, *а* запишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{G_1}\big[G(V_2 - V_1) - f(V_1)\big], \\ \dot{V}_2 &= \frac{1}{G_2}\big[G(V_1 - V_2) + i_3\big], \\ \dot{i}_3 &= -\frac{1}{L}V_2, \end{aligned} \tag{3.38}$$

где функция $f(V_1)$ определяется нелинейной характеристикой (рис. 3.18, *б*).

Подставляя следующие переменные и параметры

$$\begin{aligned} &x = \frac{V_1}{E}, && y = \frac{V_2}{E}, && z = \frac{i_3}{EG}, \\ &\tau = t\frac{G}{C_2}, && a = 1 + \frac{G_a}{G}, && b = 1 + \frac{G_b}{G}, \\ &\alpha = \frac{C_2}{C_1}, && \beta = \frac{C_2}{LG^2} \end{aligned} \tag{3.39}$$

в уравнения (3.38), получаем систему уравнений в нормированной (безразмерной) форме, которая является более удобной для проведения аналитических и численных исследований:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{3.40}$$

где

$$h(x) = \begin{cases} bx + a - b, & x \geqslant 1, \\ ax, & |x| \leqslant 1, \\ bx - a + b, & x \leqslant -1. \end{cases} \tag{3.41}$$

Преобразуем уравнения (3.40) к осцилляторной форме (3.3) путем исключения переменной y:

$$\begin{aligned} &\ddot{z} + \dot{z} + \beta z = -\beta x, \\ &\dot{x} = -\frac{\alpha}{\beta}\dot{z} - \alpha h(x). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Из уравнений (3.42) следует, что генератор Чуа с физической точки зрения представляет собой диссипативный осциллятор с самосогласованным инерционным возбуждением.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Динамическая система (3.40) задает векторное поле в трехмерном пространстве R^3, которое инвариантно относительно преобразования симметрии

$$(x, y, z) \to (-x, -y, -z). \tag{3.43}$$

Симметрия системы обусловлена формой характеристики $h(x)$ нелинейного элемента, которая делит фазовое пространство на три области плоскостями $x = \pm 1$:

$$\begin{aligned} D_1 &= (x, y, z): \quad x \geqslant 1; \\ D_0 &= (x, y, z): \quad |x| \leqslant 1; \\ D_{-1} &= (x, y, z,): \quad x \leqslant -1, \end{aligned} \tag{3.44}$$

при условии, что параметры a и b отличны от нуля. В каждой из областей D_0, $D_{\pm 1}$, система является линейной. Эта важная особенность цепи Чуа позволяет получить ряд результатов аналитическим путем.

Рассмотрим дивергенцию векторного поля F системы (3.40):

$$\operatorname{div} F = -\alpha h_x - 1, \quad h'_x = \frac{dh(x)}{dx}, \tag{3.45}$$

где $h'_x = b$ для $x \in D_{\pm 1}$ и $h'_x = a$ для $x \in D_0$. Выберем следующие значения параметров для характеристики $h(x)$: $a = -0{,}143$, $b = 0{,}286$. Как видно из (3.39), условие $a < 0$ означает, что $|G_{\mathrm{a}}| > G$. В этом случае отрицательная проводимость источника оказывается больше, чем активная проводимость цепи! Условие $b > 0$ означает, что $|G_{\mathrm{b}}| < G$, и что активные потери в RLC-цепи больше, чем вносимые источником. Для установления незатухающих колебаний необходим усредненный баланс между положительными и отрицательными потерями. Таким образом, можно сделать следующий важный вывод: *любая фазовая траектория системы* (3.40) *не может находиться в области* D_0 *или* $D_{\pm 1}$. Фазовые траектории должны посещать либо все три области D_0 и $D_{\pm 1}$, либо две из них: D_0 и D_{+1} или D_0 и D_{-1}. В последнем случае будет наблюдаться пара взаимно симметричных аттракторов. Рассмотренные выше факты оказываются весьма полезными для понимания некоторых бифуркационных свойств системы (3.40) [11].

3.4.1. Состояния равновесия системы Чуа

Приравнивая правые части уравнений (3.40) нулю и решая алгебраические уравнения, получаем координаты трех состояний равновесия:

$$\begin{aligned} &P^+ = (K, 0, -K) \in D_1, \\ &P^0 = (0, 0, 0) \in D_0, \quad K = \frac{b-a}{a} = 1{,}5, \\ &P^- = (-K, 0, K) \in D_{-1}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Устойчивость состояний равновесия определяется собственными значениями s_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\det \begin{bmatrix} \alpha C - s & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - s & 1 \\ 0 & \beta & -s \end{bmatrix} = 0, \tag{3.47}$$

где $C = a$ (для P^0), $C = b$ (для $P^{\pm}$).

Из (3.47) получаем *характеристическое уравнение* для собственных значений:

$$s^3 + (1 + \alpha C)s^2 + (\beta - \alpha + \alpha C)s + \alpha C \beta = 0. \tag{3.48}$$

Зафиксируем значение параметра $\beta = 14{,}286$ и исследуем устойчивость состояний равновесий в зависимости от значения параметра $0 < \alpha < 15$ путем решения уравнения (3.48).

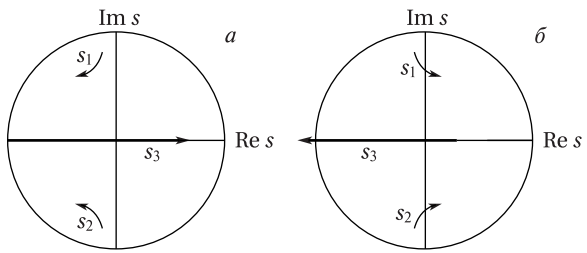


Рис. 3.19. Собственные значения для состояний равновесия P^0 (*а*) и $P^{\pm}$ (*б*) как функция параметра α

Состояние равновесия в нуле координат P^0 представляет собой *седло-фокус* с одномерным неустойчивым и двумерным устойчивым многообразиями. Они соответствуют одному положительному собственному значению $s_3 > 0$ и паре комплексно-сопряженных собственных значений (см. рис. 3.19, *а*):

$$s_{1,2} = \operatorname{Re} s_{1,2} \pm i \operatorname{Im} s_{1,2}, \quad \operatorname{Re} s_{1,2} < 0. \tag{3.49}$$

Отметим, что седловая величина $\sigma(\alpha) = 2 \operatorname{Re} s_{1,2} + s_3$ состояния равновесия P^0 отрицательна для $\alpha < 7{,}2$. При $\alpha_0 \cong 7{,}2$ $\sigma(\alpha_0) \cong 0$ и для всех $\alpha > 7{,}2$ седловая величина $\sigma(\alpha) > 0$.

Зависимость собственных значений состояний равновесия $P^{\pm}$ от параметра α приведена на рис. 3.19, *б*. Как видно из рис. 3.19, *б*, состояния равновесия $P^{\pm}$ также относятся к *седло-фокусному типу*. Для $\alpha < 6{,}8$, седло-фокус является устойчивым, $\operatorname{Re} s_{1,2} < 0$, $s_3 < 0$. Для $\alpha > 6{,}8$, седло-фокус $P^{\pm}$ имеет одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия. В точке $\alpha = 6{,}8$ пара собственных значений $s_{1,2}$ *пересекает мнимую ось с ненулевой скоростью*. Третье собственное значение отделено

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

от мнимой оси ($s_3 < 0$). Для гладких динамических систем данная ситуация соответствует *бифуркации Андронова–Хопфа* и приводит к рождению предельного цикла. Устойчивость предельного цикла будет зависеть от знака первой ляпуновской величины L_1 (см. гл. 1).

Система (3.40) обладает следующими особенностями: 1) уравнения системы (3.40) отвечают непрерывному потоку, но с разрывной первой производной в точках перегиба характеристики рис. 3.18, *б*; 2) система (3.40) является *линейной* в каждой из областей D_0, D_{-1} и D_{+1}. В силу линейности *все ляпуновские величины*, которые определяются нелинейными членами, *равны нулю*. В этом случае ничего нельзя сказать об устойчивости (неустойчивости) предельного цикла. Более того, в силу нарушения непрерывности производной невозможно говорить в строгом смысле о бифуркации Андронова–Хопфа в системе (3.40).

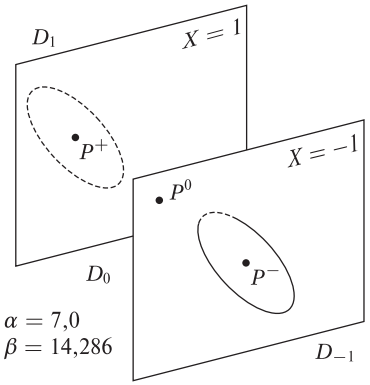


Рис. 3.20. Два симметричных предельных цикла вблизи точки бифуркации их рождения

Тем не менее, если приближаться к бифуркационному значению $\alpha \approx 6{,}8$ при изменении параметра α, в системе (3.40) *возникают устойчивые периодические колебания*. Предельный цикл появляется *резко* с конечной амплитудой, как и было предсказано анализом дивергенции (3.45). На рис. 3.20 представлены фазовые портреты двух симметричных предельных циклов в окрестности точки бифуркации $\alpha \geqslant \alpha_0 = 6{,}8$.

3.4.2. Гомоклинические траектории и аттракторы системы Чуа

Особенностью системы (3.40) является существование *гомоклинической траектории*, которая имеет форму *петли сепаратрисы седло-фокуса* состояния равновесия P^0, вместе с *гетероклинической траекторией*, соединяющей два разнесенных состояния равновесия P^+ и P^-. Действительно, в данной простой кусочно-линейной системе в R^3 реализуются *две* нечетно-симметричные *гомоклинические траектории* в начале координат, которые и отвечают за сложную динамику системы.

На рис. 3.21 изображена двойная (в силу симметрии системы) петля сепаратрисы Γ_0 седло-фокуса P^0, расположенного в начале координат. На рис. 3.22 показана гетероклиническая траектория Γ, которая соединяет состояния равновесия P^+ и P^-. Петля сепаратрисы Γ_0 имеет *положительную седловую величину* $\sigma > 0$, которая определяет условия существования в ее окрестности гиперболического подмножества траекторий. Таким образом, существует *вероятность реализовать динамической хаос* в смысле *Шильникова* [5]. Действительно, данный факт был полностью подтвержден теоретическими, численными и экспериментальными исследованиями [10].

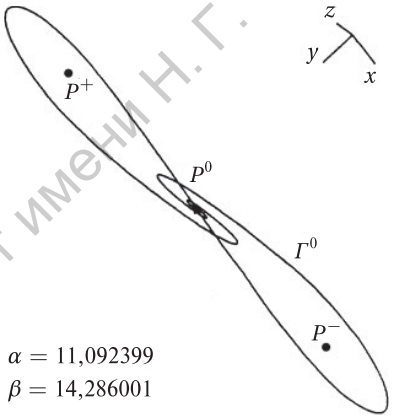


Рис. 3.21. Петля сепаратрисы седло-фокуса для состояния равновесия P^0

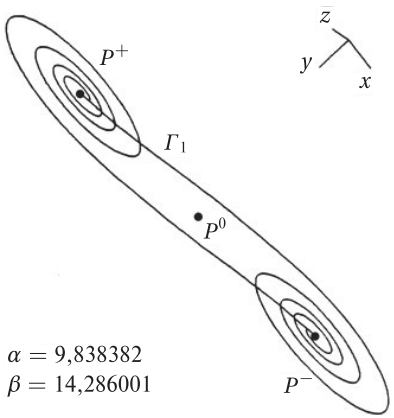


Рис. 3.22. Гетероклиническая траектория состояний равновесия $P^{\pm}$

Проиллюстрируем основные результаты. На рис. 3.23 приведен фрагмент бифуркационной диаграммы системы на плоскости параметров (α, β) для фиксированных значений $a = -0{,}143$, $b = 0{,}286$. Данная диаграмма может быть построена численно и экспериментально с использованием электронной цепи, приведенной на рис. 3.18. Определенные бифуркационные линии можно получить строго в *аналитической* форме. Проанализируем динамику системы при вариации параметра α вдоль прямой линии $\beta = 14{,}286$ (рис. 3.23).

При пересечении линий бифуркации Андронова–Хопфа устойчивые состояния равновесия $P^{\pm}$ теряют свою устойчивость и в системе жестко рождаются два симметрично расположенных устойчивых предельных цикла конечной амплитуды. При увеличении параметра α предельные циклы претерпевают каскад бифуркаций удвоения периода в полном соответствии с *универсальным законом Фейгенбаума*[1]). В результате при

[1]) В полном соответствии с результатами п. 3.3.2 для генератора Анищенко–Астахова, последовательность точек бифуркаций удвоения периода в системе Чуа сходится к критической линии в геометрической прогрессии с постоянной Фейгенбаума.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

пересечении линии $l_{кр}$ критических значений параметра рождается пара симметричных *хаотических* спиральных *аттракторов*. С увеличением параметра α структура и эволюция аттракторов качественно эквивалентна структуре аттрактора в генераторе Анищенко–Астахова во всех деталях. На рис. 3.24 приведены два хаотических аттрактора $SA_1^{\pm}$ при $\alpha = 8{,}5$. Введем секущую плоскость, определяемую условием $y = 0$, и построим численно сечение Пуанкаре для аттракторов $SA_1^{\pm}$.

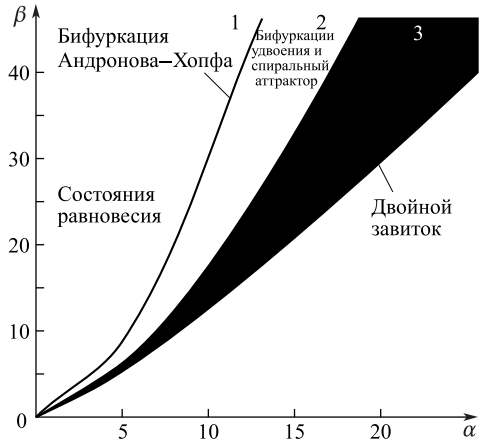


Рис. 3.23. Бифуркационная диаграмма системы (3.40)

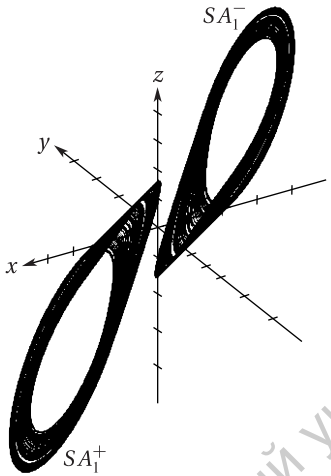


Рис. 3.24. Спиральные аттракторы ($SA_1^{\pm}$) в системе (3.40)

В иллюстративных целях в сечении Пуанкаре, показанном на рис. 3.25, *а*, нанесены все точки фазовых траекторий $SA_1^{\pm}$, которые пересекают плоскость $y = 0$, независимо от направлений пересечения. Каждое из четырех подмножеств вблизи одномерных кривых в сечении Пуанкаре может использоваться для построения *одномерного отображения* $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Результаты расчетов представлены на рис. 3.25, *б*. Они подтверждают, что модельные отображения последования имеют форму параболы с гладким квадратичным максимумом. Следовательно, они удовлетворяют требованиям к *отображениям класса Фейгенбаума* (или типа Фейгенбаума). Становится понятными как механизм формирования аттракторов $SA_1^{\pm}$, так и процесс их эволюции (от спирального к винтовому типу аттракторов и появление соответствующих окон устойчивости).

С дальнейшим увеличением параметра α фазовые траектории спиральных аттракторов начинают приближаться к состояниям равновесия P^0 в области D_0. В результате они сливаются и образуют новый аттрактор SA_0 в форме *«двойного завитка»* (*«double scroll»*). Фазовый портрет этого

аттрактора SA_0 представлен на рис. 3.26 для значения $\alpha = 9{,}0$. Данный тип аттрактора реализуется в интервале $8{,}8 < \alpha < 10{,}0$ и эволюционирует по сценарию, *типичному* для *квазиаттракторов*. Топология аттрактора SA_0 определяется существованием петли сепаратрисы Γ_0 и гетероклинической траектории Γ. В этом можно наглядно убедиться, если сравнить формы фазовых портретов аттракторов SA_0 (рис. 3.26 и 3.27) и соответствующих гомоклинических орбит Γ_0 и Γ (см. рис. 3.21 и 3.22).

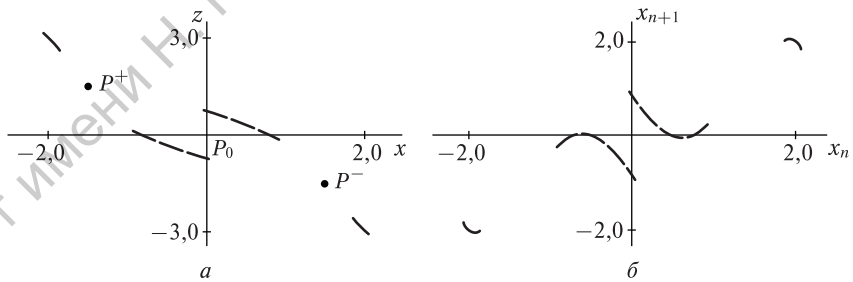


Рис. 3.25. Сечения Пуанкаре (*а*) и одномерные отображения последования для аттракторов $SA_1^{\pm}$) (*б*)

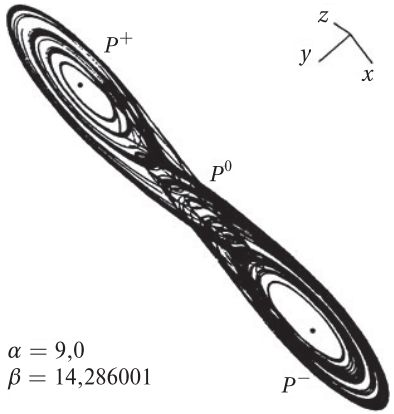


Рис. 3.26. Аттрактор SA_0 типа «двойного завитка»

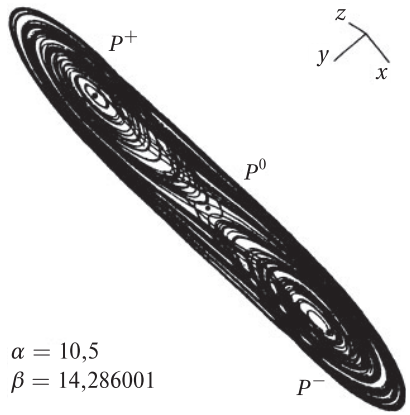


Рис. 3.27. Аттрактор SA_0 более сложного типа

Хаотические аттракторы в системе Чуа, а также в генераторе Анищенко–Астахова являются негиперболическими. Причиной служит структурная неустойчивость ДС (3.25) и (3.40), обусловленная наличием эффектов гомоклинического касания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых состояний равновесия. В силу этого обстоятельства хаотические аттракторы могут включать счетное множество не только сед-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ловых, но и устойчивых периодических траекторий. Устойчивые циклы как правило имеют большие периоды и очень малые бассейны притяжения, что делает их наблюдение в экспериментах практически невозможным.

Структурная неустойчивость является основной причиной, затрудняющей детальный теоретический анализ свойств хаотических аттракторов в системах (3.25) и (3.40).

3.5. ГЕНЕРАТОРЫ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ. ЦЕПЬ ЧУА

Квазипериодические колебания широко распространены в природе и являются важным предметом исследований в естествознании. Особенностью квазипериодических колебаний является то, что они содержат две и более независимых частоты в спектре колебаний:

$$x(t) = x\big[\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_p(t)\big],$$

где $\phi_i(t) = \omega_i t$, $i = 1, 2, \ldots, p$. В результате $x(t)$ имеет период 2π по каждому из аргументов $\phi_i(t)$, а сам квазипериодический процесс в общем случае не является периодическим, т. е. $x(t) \neq x(t + T_0)$. Спектр мощности колебаний $x(t)$ в общем случае включает все независимые частоты ω_i, их гармоники $n\omega_i$ $(n = 2, 3, \ldots)$ и комбинационные частоты типа $n\omega_i \pm m\omega_k$, где n и m — целые положительные числа, а $i, k = 1, 2, \ldots, p$.

Примером простых квазипериодических колебаний может служить движение любой фиксированной точки на поверхности Земли. Эта точка совершает периодическое движение, связанное с суточным вращением Земли вокруг своей оси. В то же время эта точка участвует в периодическом движении Земли вокруг Солнца с периодом 1 год. Квазипериодические (многочастотные) колебания возникают при модуляции несущих электромагнитных колебаний информационным сигналом (радиотехника, техника связи), сопровождают переход к турбулентному течению жидкости в гидродинамике, в также описывают сложные колебательные процессы в живых организмах (биофизика, электрофизиология) и т. д.

В фазовом пространстве динамической системы квазипериодическим колебаниям с n независимыми частотами будет отвечать n-мерный тор. Анализ проблем устойчивости, бифуркаций и переходов к хаосу применительно к квазипериодическим колебаниям связан с изучением бифуркаций n-мерных торов. Эти задачи на протяжении многих лет остаются предметом исследований специалистов по нелинейной динамике и турбулентности. После публикации работ Рюэля и Такенса [12], интерес к исследованиям квазипериодических колебаний с числом ω_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $n \geq 4$, в определенной степени уменьшился. Это связано с доказательством структурной неустойчивости движений на трех и четырехмерных торах. В то же время ряд работ свидетельствует о существовании устойчивых колебаний с четырьмя и шестью независимыми частотами. Этот факт не позволяет исключать из рассмотрения гипотезу Ландау [13] о переходе к хаосу через режим торов высокой размерности. Более того, ряд нерешенных до конца проблем остается до сих пор и применительно к двумерному тору. Отметим, например, бифуркацию удвоения двумерного тора, впервые описанную в работах [14, 1] и затем во многих работах других авторов. До сих пор вопрос о бифуркационном механизме удвоения одного из периодов двумерного тора остается не полностью ясным. Можно привести и другой пример. До сих пор остается открытым ряд проблем, связанных с эффектом синхронизации квазипериодических колебаний.

Для решения указанных и ряда других возможных задач необходимо иметь в распоряжении простые базовые модели генераторов двухчастотных колебаний. Как это принято в теории колебаний, необходимо ввести в рассмотрение автономную динамическую систему, имеющую решение в виде устойчивых квазипериодических колебаний. Она является такой же необходимой, как, например, уравнения генератора Ван дер Поля для изучения предельных циклов. В настоящем разделе вводятся в рассмотрение две базовые модели генераторов квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами. Обсуждение начнем с модели Чуа.

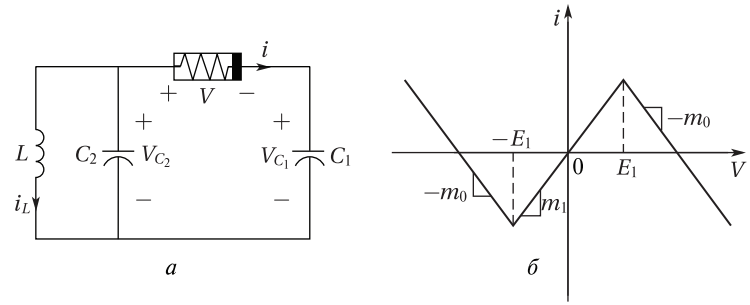


Рис. 3.28. Схема генератора (*а*) и вольт-амперная характеристика нелинейного резистора (*б*)

Двухчастотные колебания являются наиболее простым видом квазипериодических колебаний. В фазовом пространстве системы их образом является двумерный тор. Из чисто геометрических соображений ясно, что двумерный тор можно реализовать в фазовом пространстве, имеющим

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

размерность $N \geqslant 3$. Поэтому простейшие ДС, в которых возможны устойчивые двухчастотные колебания, должны быть минимум трехмерными.

Одной из первых радиотехнических моделей генераторов двухчастотных колебаний является цепь Чуа, предложенная в работе [15]. Схема генератора представлена на рис. 3.28.

Схема включает четыре элемента, из которых лишь один нелинейный: кусочно-линейный резистор с характеристикой, представленной на рис. 3.28, *б*. На основе схемы, используя законы Кирхгофа, сформулируем динамические уравнения генератора:

$$\begin{aligned} C_1\frac{dV_{C_1}}{dt} &= -g(V_{C_2} - V_{C_1}),\\ C_2\frac{dV_{C_2}}{dt} &= -g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_L,\\ L\frac{di_L}{dt} &= V_{C_2}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

где через V_{C_1}, V_{C_2} и i_L обозначены соответственно напряжение на конденсаторе C_1, напряжение на конденсаторе C_2 и ток через индуктивность L. Функция $g(\cdot)$ описывает вольт-амперную характеристику нелинейного резистора и имеет вид

$$g(V) = -m_0V + 0{,}5(m_0 + m_1)\big[|V + E_1| - |V - E_1|\big]. \tag{3.51}$$

Преобразуем уравнения (3.50) к безразмерному виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha f(y - x),\\ \dot{y} &= -f(y - x) - z,\\ \dot{z} &= \beta y, \end{aligned} \tag{3.52}$$

где

$$\begin{gathered} x = \frac{V_{C_1}}{E_1}, \quad y = \frac{V_{C_2}}{E_1}, \quad z = \frac{i_L}{C_2E_1},\\ \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{1}{LC_2}, \quad a = \frac{m_0}{C_2},\\ b = \frac{m_1}{C_2}, \end{gathered} \tag{3.53}$$

$$f(x) = -ax + 0{,}5(a + b)\big[|x + 1| - |x - 1|\big]. \tag{3.54}$$

При заданных параметрах a и b характеристики (3.54), динамическая система (3.52) представляет собой нелинейную трехмерную автономную диссипативную систему с двумя управляющими параметрами α и β. При вариации параметров и начальных условий система (3.52) реализует широкий спектр колебательных режимов, основой которых являются эргодические и резонансные двухчастотные колебания, их бифуркации и переходы к хаосу, обусловленные разрушением двумерного тора. Наиболее полную картину можно себе представить, анализируя двупараметрическую бифуркационную диаграмму системы (3.52), представленную на рис. 3.29.

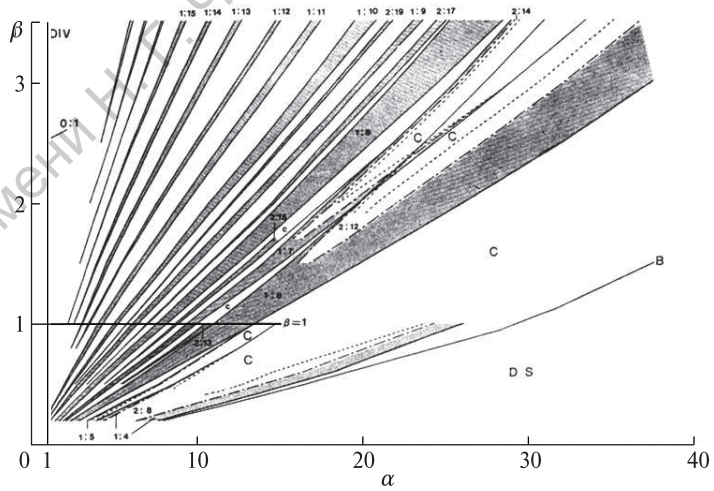


Рис. 3.29. Бифуркационная диаграмма системы (3.52) на плоскости параметров α и β для фиксированных значений $a = 0{,}07$ и $b = 0{,}1$ характеристики (3.54)

Вертикальная линия $\alpha = 1{,}0$ (линия DIV) является бифуркационной линией рождения двумерного тора из цикла (бифуркация Неймарка). Слева от этой линии для $0 < \alpha < 1$ имеет место режим устойчивого предельного цикла, справа ($\alpha > 1$) — режим устойчивого двумерного тора. На линию DIV опираются области резонансов на торе с рациональным числом вращения $\Theta = p : q$, где p и q — целые числа. Внутри резонансных областей, окрашенных в серый цвет, реализуются соответствующие резонансные предельные циклы, лежащие на поверхности тора, которые демонстрируют бифуркации удвоения периода. Бифуркационные линии первых удвоений показаны на диаграмме штрих-пунктирными линиями. Каскады удвоений завершаются переходами к хаосу (границы областей хаоса показаны пунктирными линиями). Области хаоса отмечены на диаграмме символом C. Выход из областей резонансов в области, соответствующие белому цвету на диаграмме рис. 3.29, отвечает переходам в режим эргодических двухчастотных колебаний с иррациональным числом вращения.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

В качестве примера на рис. 3.30 приведены результаты расчетов, иллюстрирующие режим устойчивых двухчастотных эргодических колебаний в системе (3.52): аттрактор в виде двумерного тора вместе с сечением Пуанкаре (рис. 3.30, *а*), отрезок реализации $y(t)$ (рис. 3.30, *б*) и спектр мощности $S(\omega)$, рассчитанный для переменной $y(t)$ (рис. 3.30, *в*). Как видно из рисунка, сечение Пуанкаре представляет собой инвариантную замкнутую кривую. Это свидетельствует о том, что аттрактор (рис. 3.30, *а*) действительно является двумерным тором. О наличии двух независимых частот свидетельствуют временная реализация колебаний $y(t)$ и ее спектр (рис. 3.30, *б* и *в*).

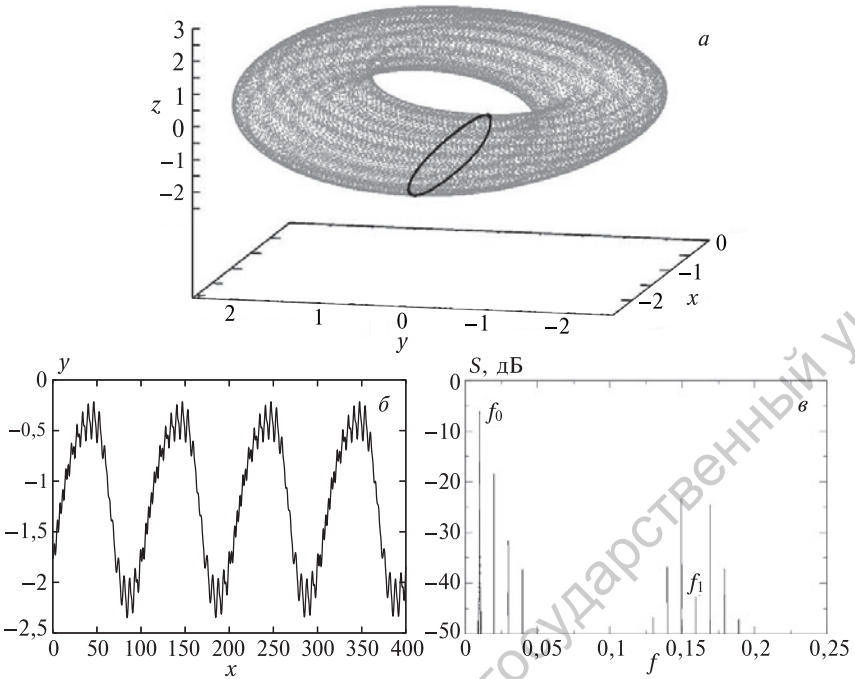


Рис. 3.30. Устойчивые двухчастотные колебания в системе (3.52): *а* — двумерный тор и сечение Пуанкаре, *б* — реализация $y(t)$, *в* — спектр мощности $S(f)$ колебаний $y(t)$

Если двигаться в пространстве параметров системы (3.52) по параметру α или β, зафиксировав значение другого, мы будем последовательно пересекать зоны резонансов и эргодических биений. Число вращения при этом будет изменяться характерным образом, демонстрируя зависимость, называемую в литературе «чертовой» или «дьявольской» лестницей. На рис. 3.31 представлена зависимость $\Theta(\alpha)$, расчитанная для фиксированного $\beta = 1$ (см. также рис. 3.29). «Полочки» в зависимости $\Theta(\alpha)$, где число вращения рационально и постоянно, отвечают соответствующим резонансам. Монотонно-возрастающие участки зависимости $\Theta(\alpha)$ отвечают областям эргодических двухчастотных колебаний. Следует отметить, что эта зависимость является типичной фрактальной кривой: в каждом конечном интервале $\Delta\alpha$ теоретически содержится бесконечное количество «полочек», которые имеют исчезающе малую длину. Эти «полочки» отвечают резонансам $\Theta = p : q$ при p и $q \gg 1$. Слабые резонансы практически невозможно наблюдать в экспериментах за счет ограниченной точности и шумов.

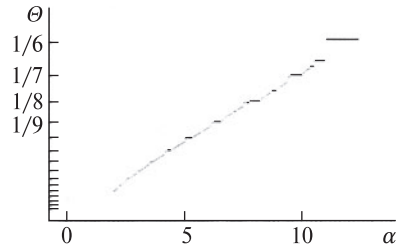


Рис. 3.31. Зависимость числа вращения Θ от параметра α, рассчитанная для системы (3.52) при фиксированном $\beta = 1$

Следует отметить, что цепь Чуа является одной из первых автономных динамических систем размерности $N = 3$, реализующих режим устойчивых двухчастотных колебаний. Однако, как показали многочисленные эксперименты, система (3.52) является не совсем удобной для исследований в силу ряда специфических особенностей и свойств.

3.6. ГЕНЕРАТОР КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ЧАСТОТАМИ. БИФУРКАЦИЯ УДВОЕНИЯ ТОРА

Вернемся к модели генератора Анищенко–Астахова (см. разд. 3.3), схема которого представлена на рис. 3.3. Он включает классический генератор Ван дер Поля, в котором введена дополнительная инерционная обратная связь. Уравнения генератора представляют собой трехмерную динамическую систему с тремя параметрами (3.25):

$$\dot{x} = mx + y - xz - dx^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + g\Phi(x). \qquad (3.55)$$

Первые два уравнения системы (3.55) описывают генератор Ван дер Поля. В этом легко убедиться, положив $\dot{z} = 0$ и используя $\Phi(x) = x^2$. Как было показано, система (3.55) реализует переход к хаосу в соответствии с теоремой Шильникова при условии, что нелинейная функция $\Phi(x)$ является асимметричной относительно переменной x и задается в виде:

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \Phi(x) = \exp(x) - 1. \qquad (3.56)$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Условия асимметрии (3.56) обеспечивают существование в системе (3.55) особого решения в виде петли сепаратрисы седло-фокуса и, как следствие, реализацию режима спирального хаоса. С физической точки зрения это достигается за счет самосогласованного воздействия на основной усилитель со стороны обратной связи, заданной третьим уравнением в системе (3.55). При малых амплитудах сигнала $x(t)$ это воздействие незначительно, и система (3.55) генерирует предельный цикл. С ростом параметра возбуждения m интенсивность колебаний $x(t)$ растет, сигнал обратной связи $z(t)$ нарастает тоже и более активно начинает влиять на коэффициент усиления основного усилителя. Система реализует последовательность бифуркаций удвоения периодов циклов и переход к хаосу.

С целью обеспечения незатухающих двухчастотных колебаний в систему (3.55) необходимо ввести элемент, характеризуемый собственной частотой, отличающейся от резонансной частоты контура генератора. Одним из возможных способов является использование колебательного контура в цепи дополнительной обратной связи. Необходимо сделать так, чтобы сигнал обратной связи $z(t)$ представлял собой колебания независимой частоты, которые будут модулировать коэффициент усиления и обеспечивать квазипериодические автоколебания.

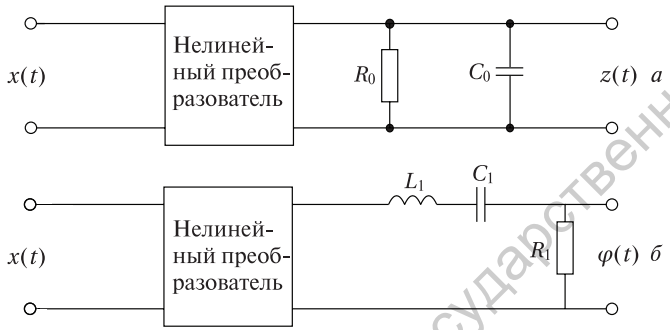


Рис. 3.32. Схема инерционного каскада дополнительной обратной связи в генераторе Анищенко–Астахова (*а*) и в генераторе квазипериодических колебаний (*б*)

Рассмотрим схемы, представленные на рис. 3.32. На рис. 3.32, *а* показана схема инерционного каскада дополнительной обратной связи, которая использовалась в генераторе Анищенко–Астахова. Каскад представляет собой RC-цепочку, описываемую одномерным дифференциальным уравнением (третье уравнение в системе (3.55)). На рис. 3.32, *б* представлена схема нового инерционного каскада, который включает колебательный контур некоторой резонансной частоты. Уравнения, описывающие схему на рис. 3.32, *б*, имеют вид

$$\dot{z} = \phi, \quad \dot{\phi} = -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz, \tag{3.57}$$

где γ — параметр затухания, а g — параметр, представляющий нормированную резонансную частоту нового фильтра. Нетрудно убедиться, что уравнения (3.57) описывают диссипативный колебательный контур в режиме вынужденных колебаний:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + gz = \gamma\Phi(x). \tag{3.58}$$

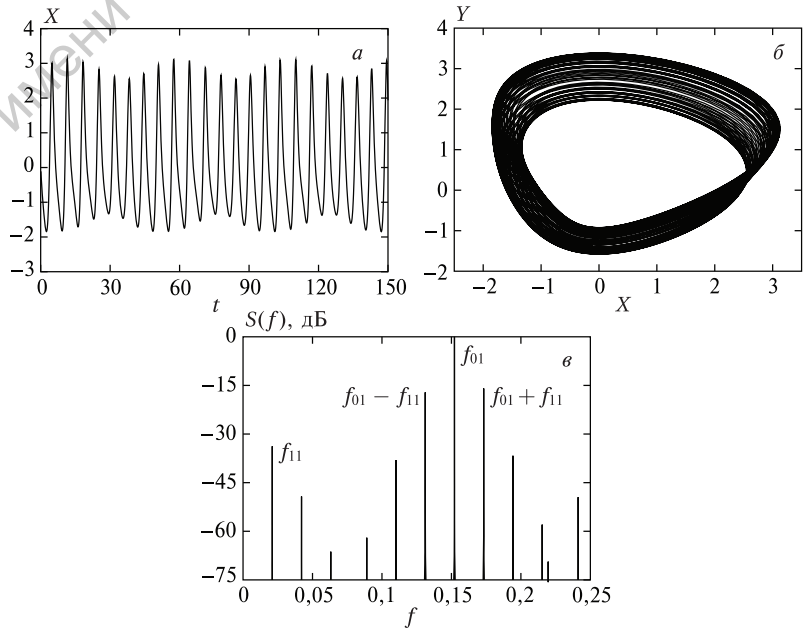


Рис. 3.33. Режим квазипериодических двухчастотных колебаний: *а* — временная реализация, *б* — проекция фазового портрета, *в* — спектр мощности. Значения параметров: $m = 0{,}06$, $g = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}2$, $d = 0{,}001$

Введем новую обратную связь в генератор (рис. 3.32) так, чтобы управляющий сигнал обратной связи представлял собой $\dot{z}(t) = \phi(t)$. Уравнения нового генератора будут иметь вид [16]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - x\phi - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \phi. \\ \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Система (3.59) является нелинейной диссипативной динамической системой размерности $N = 4$ и характеризуется четырьмя управляющими параметрами: m — параметр возбуждения, d — параметр нелинейной диссипации, γ — параметр затухания и g — параметр инерционности фильтра. Существенными параметрами системы (3.59) являются два: параметр возбуждения генератора m и параметр инерционности g, характеризующий резонансную частоту фильтра.

При задании $\Phi(x)$ в соответствии с (3.56) система (3.59) имеет решения в виде устойчивых двухчастотных колебаний. Пример указанного режима иллюстрирует рис. 3.33.

3.6.1. Бифуркационная диаграмма системы

На рис. 3.34 представлен фрагмент бифуркационной диаграммы системы (3.59) на плоскости основных управляющих параметров m и g для фиксированных значений $\gamma = 0{,}2$ и $d = 0{,}001$. Функция $\Phi(x)$ в (3.59) задавалась в виде $I(x)x^2$ (3.56).

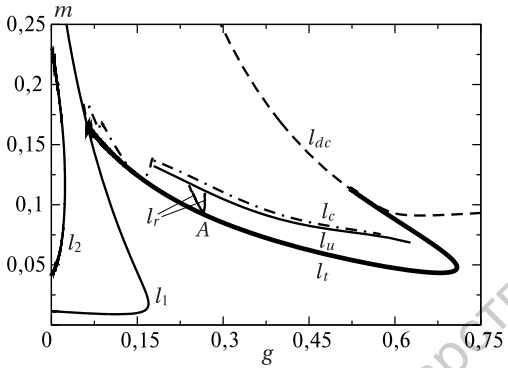


Рис. 3.34. Бифуркационная диаграмма режимов генератора ($\gamma = 0{,}2$, $d = 0{,}001$): $l_{1,2}$ — линии бифуркаций удвоения периода циклов, l_t — линия рождения тора, l_u — линия разрушения тора, l_c — линия разрушения хаотического аттрактора, l_r — линии, ограничивающие область резонанса на торе 1 : 4, l_{dc} — линии кратных циклов, A — точка коразмерности 2, отвечающая условию $\Theta = 1 : 4$

На линии $m = 0$ в соответствии с мягкой бифуркацией Андронова–Хопфа рождается устойчивый предельный цикл T_0, который при пересечении бифуркационной линии l_1 претерпевает бифуркацию удвоения периода. На линии l_2 бифуркацию удвоения периода претерпевает цикл, возникший на линии l_1 (рис. 3.34). Бифуркационная линия l_t отвечает условию выхода на единичную окружность пары комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла T_0 и мягкому рождению двумерного тора ($\mu_{1,2} = \exp(\pm j\theta)$, бифуркация Неймарка). Естественно, при движении вдоль линии l_t, угол Θ будет пробегать множество рациональных значений, отвечающих резонансам на торе. Если провести расчет числа вращения Θ, двигаясь по плоскости параметров вдоль линии l_t (в области существования тора), то получим результат, качественно воспроизводящий данные рис. 3.31. В качестве примера на рис. 3.34 нанесена область резонанса $\Theta = 1 : 4$, ограниченная линиями седло-узловых бифуркаций резонансного цикла на торе l_r, опирающаяся на точку A коразмерности 2. Выше линии рождения тора l_t показана линия l_u, при пересечении которой снизу вверх наблюдается переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний. На линии l_c имеет место кризис (разрушение) возникшего на линии l_u хаотического аттрактора. Линия l_{dc} отвечает бифуркации слияния и последующего исчезновения пары седловых циклов.

3.6.2. Бифуркация удвоения двумерного тора

Зафиксируем значения параметров $g = 0{,}5$, $d = 0{,}001$ и $\gamma = 0{,}2$ и рассмотрим эволюцию режима тора в области значений параметра m между указанными линиями l_t и l_u. На рис. 3.35, *а–г* представлены проекции аттракторов на плоскость при прохождении точек бифуркаций удвоения двумерного тора. Об удвоении четко свидетельствует структура сечения Пуанкаре, а также анализ временных реализаций и их спектров мощности. Бифуркации удвоения периода тора здесь соответствует бифуркация удвоения периода модуляции (бифуркация удвоения периода цикла в отображении Пуанкаре).

С точки зрения теории бифуркаций важным является ответ на вопрос, удваивается ли эргодический тор или вблизи точки бифуркации сначала имеет место резонанс на торе, затем удвоение резонансного цикла, из которого рождается удвоенный тор? Для ответа на этот вопрос производился расчет полного спектра показателей Ляпунова при прохождении точек бифуркаций удвоения тора.

Как видно из рис. 3.36, в точках бифуркаций (точки B, C, D) в ноль обращаются сразу три старших показателя Ляпунова ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$). Бифуркационный переход характеризуется следующем изменением сигнатуры спектра Ляпуновских характеристических показателей:

$$0, 0, -, - \Longrightarrow 0, 0, 0, - \Longrightarrow 0, 0, -, -.$$

Расчеты проводились с очень малым шагом по параметру m ($\Delta m = 3 \cdot 10^{-6}$) и свидетельствуют о том, что при прохождении точки бифуркации рождение предельного цикла (спектр показателей Ляпунова:

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

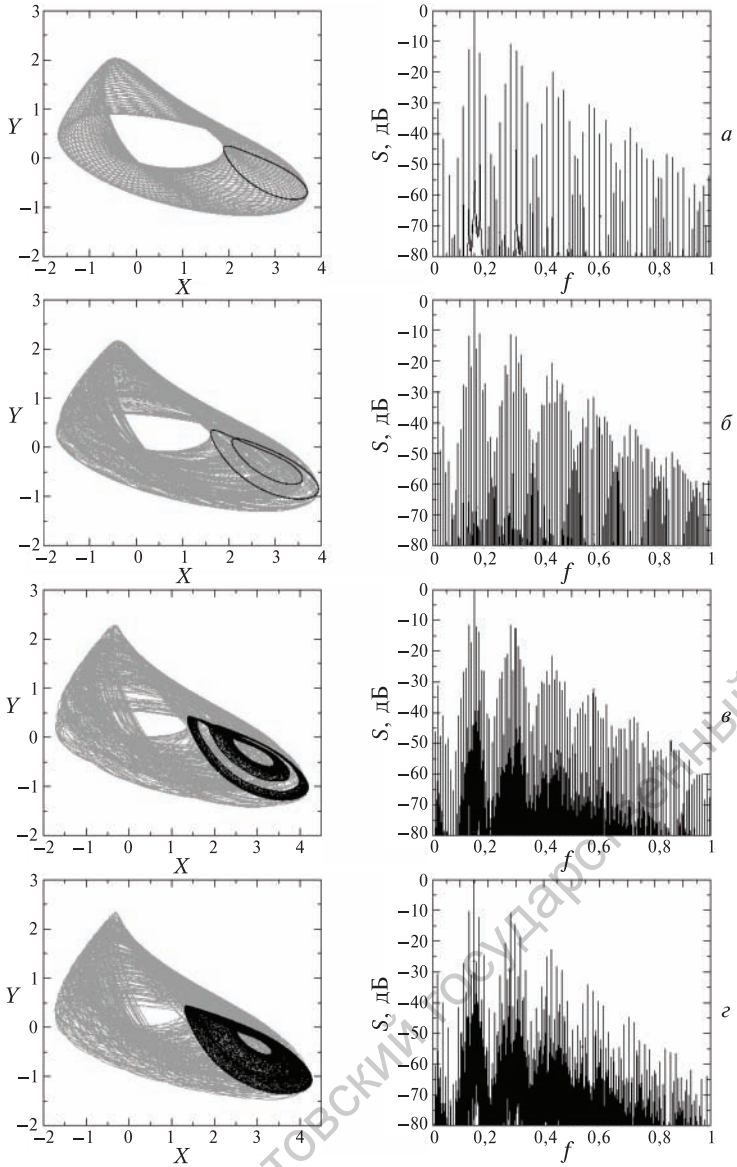


Рис. 3.35. Проекции аттракторов системы (3.59) и соответствующих сечений Пуанкаре на плоскость, а также их спектры мощности, при изменении параметра m для значений $d = 0{,}001$, $\gamma = 0{,}2$, $g = 0{,}5$

0, –, –, –) не наблюдается! Бифуркацию удвоения периода претерпевает эргодический тор; резонансных циклов в численном эксперименте не обнаружено.

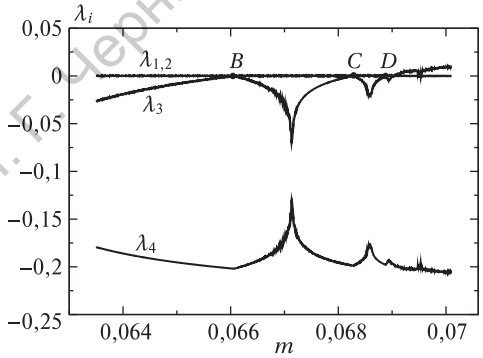


Рис. 3.36. График зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра m ($d = 0{,}001$, $\gamma = 0{,}2$, $g = 0{,}5$) в области значений параметров между линиями l_t и l_u (B, C, D — точки бифуркаций удвоения тора)

Введенную модель генератора двухчастотных квазипериодических автоколебаний (3.59) можно рассматривать как одну из базовых моделей теории нелинейных колебаний. Модель представляет автономную систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений с четырьмя параметрами. Система реализует устойчивые квазипериодические колебания, которые с изменением параметра демонстрируют бифуркации удвоения тора и переходы к хаосу при разрушении двумерного тора. Предложенная модель может быть использована для детального изучения нелинейных свойств двухчастотных автоколебаний, таких, например, как синхронизация.

3.7. ВЫВОДЫ

В настоящем разделе представлены генераторы периодических, квазипериодических и хаотических колебаний, математические модели которых задаются дифференциальными уравнениями 3–4-го порядка, т. е. имеют малую размерность. Это характерно для теории колебаний, которая оперирует моделями минимальной размерности, демонстрирующими тот или иной принципиальный физический эффект. Система на фазовой плоскости (генератор Ван дер Поля) является наиболее простой для изучения устойчивых автоколебаний и их образа — предельного цикла. Модели с 1,5 степенями свободы (с трехмерным фазовым пространством) представляются в качестве простейших для изу-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

чения квазипериодических и хаотических автоколебаний и их образов — двумерного тора и странного (хаотического) аттрактора. Для реализации бифуркации удвоения двумерного тора требуется увеличение размерности фазового пространства до четырех. Дальнейший рост размерности дифференциальной системы может привести к усложнению ее динамики и появлению новых принципиальных эффектов, которые во многом остаются пока неисследованными.

Безусловно, описанные в настоящей главе маломерные динамические системы с хаотической динамикой не исчерпывают всего многообразия генераторов, реализующих сложные типы автоколебаний. Однако рассмотренные нами системы позволяют в достаточной степени проиллюстрировать наиболее общие и принципиальные особенности квазипериодических двухчастотных колебаний и хаотических автоколебаний минимальной размерности.

Среди хаотических систем с 1,5 степенями свободы отметим наиболее популярные системы, используемые многими авторами для исследования различных аспектов хаотической динамики. В первую очередь следует указать систему Лоренца [17], исследования которой послужили фундаментальной основой современных представлений о детерминированном хаосе. Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{3.60}$$

где σ, b и r — управляющие параметры.

Уравнения (3.60) были получены на основе приближенного рассмотрения задачи о конвекции жидкости в подогреваемом снизу слое. Однако было установлено, что уравнения (3.60) описывают динамику одномодового лазера, конвекцию в трубке с жидкостью, модель водяного колеса и др. [18]. С точки зреия теории колебаний интересно следующее. Заменой переменных уравнения (3.60) можно свести к уравнениям диссипативного осциллятора с инерционной нелинейностью [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \varepsilon h \dot{y} + (z - 1)y + y^3 &= 0, \\ \dot{z} &= -\varepsilon \alpha z + \varepsilon \beta y^2, \end{aligned} \tag{3.61}$$

где параметры ε, h, α и β связаны с параметрами модели (3.60) следующими соотношениями:

$$h = \frac{1 + \sigma}{\sqrt{\sigma}}, \quad \alpha = \frac{b}{\sqrt{\sigma}}, \quad \beta = \frac{2\sigma - b}{\sqrt{\sigma}}. \tag{3.62}$$

Из уравнений (3.61) видно, что модель Лоренца соответствует модели нелинейного диссипативного осциллятора, в котором свойства колебательного контура (частота) инерционным и нелинейным образом зависят от переменной y, совершающей колебания. Действительно, коэффициент перед y задан функцией $(z - 1)$, а переменная z связана с переменной y посредством нелинейного дифференциального уравнения первого порядка (3.61). Отметим, что уравнения (3.61) удовлетворяют общей форме уравнений (3.3).

Главными особенностями модели Лоренца (3.60), которые определяют неослабевающий и сегодня интерес к этой системе со стороны исследователей, являются следующие:

1. В отличие от всех известных дифференецциальных моделей с хаотической динамикой, для модели Лоренца В. С. Афаймовичем и др. [19] теоретически был установлен бифуркационный механизм рождения аттрактора Лоренца.

2. Было установлено, что аттрактор Лоренца является почти гиперболическим (квазигиперболическим), не включает устойчивых периодических траекторий и реализуется в конечной области значений управляющих параметров.

На рис. 3.37 представлена бифуркационная диаграмма системы (3.60), где указана область существования аттрактора Лоренца и линия перехода от аттрактора Лоренца к квазиаттрактору. В области квазиаттрактора динамика системы Лоренца качественно эквивалентна динамике генераторов Анищенко–Астахова, генератора Чуа и других систем с петлей сепаратрисы седло-фокуса.

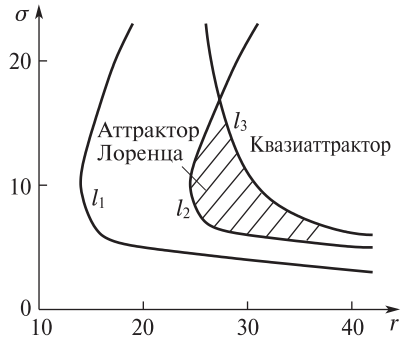


Рис. 3.37. Бифуркационная диаграмма системы Лоренца на плоскости параметров r и σ для $b = 8/3$

Отметим, что в настоящее время продолжаются исследования возможности создания экспериментальных динамических систем, реализующих гиперболический или квазигиперболический аттрактор, который не включает устойчивых периодических движений [20].

Другой не менее популярной моделью, иллюстрирующей простейший тип хаотического аттрактора, является модель Ресслера [21]. Уравнения модели были искусственно сконструированы Ресслером и имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= bx - cz + xz. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Дифференцируя по времени первое уравнение системы (3.63) и исключая переменную y, используя (3.63), получаем уравнения в форме (3.3):

$$\begin{gathered}\ddot{x} - a\dot{x} + (1 + b + z)x - (a + c)z = 0,\\ \dot{z} = bx - cz + xz.\end{gathered} \tag{3.64}$$

Модель Ресслера в форме (3.64) также представляет собой уравнения диссипативного осциллятора с инерционной нелинейностью.

Уравнения Ресслера на протяжении более 25 лет используются многими авторами для компьютерного моделирования хаотической динамики. Модель Ресслера характеризуется наличием петли сепаратрисы седло-фокуса и демонстрирует все особенности и свойства так называемого спирального (или фазокогерентного) хаоса в полном соответствии с теоремой Шильникова.

Наконец, приведем еще один пример генератора хаотических колебаний. В работе [22] А. С. Дмитриевым и В. Я. Кисловым был предложен так называемый кольцевой генератор хаотических колебаний. Название связано с тем, что реальная радиотехническая схема генератора представляет собой замкнутую в кольцо цепочку из нелинейного усилителя, фильтра и инерционного элемента. Уравнения модели генератора следующие:

$$\begin{gathered}T\dot{x} + x = Mz\exp(-z^2),\\ \dot{y} = x - z,\\ \dot{z} = y - \frac{z}{Q},\end{gathered} \tag{3.65}$$

где T, M и Q — параметры модели.

Динамика модели (3.65) качественно сходна с динамикой генератора Чуа. Можно реализовать аттрактор типа аттрактора Ресслера, а также аттрактор вида «двойного завитка». Все зависит от выбора значений управляющих параметров системы (3.65).

Уравнения (3.65) можно переписать в форме (3.3):

$$\begin{gathered}\ddot{y} + \frac{1}{T}\dot{y} + y = z\left[\frac{M}{T}\exp(-z^2) - \frac{1}{T} + \frac{1}{Q}\right],\\ \dot{z} = y - \frac{z}{Q}.\end{gathered} \tag{3.66}$$

Как видно из (3.66), уравнения кольцевого генератора описывают автоколебания в диссипативном колебательном контуре с инерционным самовозбуждением (сравни с (3.42).

Более детальное описание особенностей динамики системы Лоренца, системы Ресслера и кольцевого генератора Дмитриева–Кислова можно найти в книге [18].

Литература

1. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990 (2-е изд. — М.: УРСС, 2009).
2. *Теодорчик К. Ф.* Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью // ЖТФ. — 1946. — Т. 16, вып. 7. — С. 845–854.
3. *Анищенко В. С., Астахов В. В.* Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. — 1983. — Т. 28, № 6. — С. 1109–1115.
4. *Баутин Н. Н., Шильников Л. П.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений // В кн.: *Марсден Д., МакКракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — С. 295–316.
5. *Шильников Л. П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокуса // Матем. сб. — 1970. — Т. 81, № 123. — С. 82–103.
6. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е.* Генератор Анищенко–Астахова как одна из базовых моделей детерминированного хаоса // Известия СГУ. Сер. «Физика». — 2005. — Т. 5, № 1. — С. 54–67.
7. *Feigenbaum M. J.* Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformation // Stat. Phys. — 1979. — V. 19, No. 1. — P. 25–52.
8. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. — 1983. — Т. 141, № 2. — С. 343–374.
9. *Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T.* The double scroll family // IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-33. — 1986. — Parts 1, 2. — P. 1073–1118.
10. Chua's circuit: A paradigm for chaos / Ed. by R. N. Madan. — Singapore: World Scientific, 1993.
11. *Anishchenko V. S.* Dynamical Chaos — Models and Experiments. — Singapore: World Scientific, 1995.
12. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности // В кн.: Странные аттракторы / Ред. Я. Г. Синай, Л. П. Шильников. — М.: Мир, 1981. — С. 88–166.
13. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. — 1944. — Т. 44, № 8. — С. 339–342.
14. *Анищенко В. С.* Индуцированные внешним воздействием фазвые переходы в системе со странным аттрактром // III Всесоюзная конференция «Флуктуационные явления в физических системах», г. Вильнюс, 1982. — Вильнюс: Изд-во АН Лит. ССР, 1983. — С. 24–26.
15. *Matsumoto T.* Chaos in Electronic Circuit // IEEE Trans. and Circuits. — 1987. — V. 76, No. 8. — P. 66–87.
16. *Анищенко В. С., Николаев С. М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. — 2005. — Т. 31, вып. 19. — С. 88–94.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

17. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение // В кн.: Странные аттракторы / Ред. Я. Г. Синай, Л. П. Шильников. — М.: Мир, 1981. — С. 88–116.
18. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001.
19. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР. — 1977. — Т. 234, № 2. — С. 336–339.
20. *Кузнецов С. П., Селезнев Е. П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттракторов типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. — 2006. — Т. 123. — С. 1–13.
21. *Rossler O. E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. — 1976. — V. 57, No. 5. — P. 397–398.
22. *Дмитриев А. С., Кислов В. Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. — М.: Наука, 1989.

ГЛАВА 4 СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Синхронизация — одно из фундаментальных свойств нелинейных систем, которое заключается в установлении определенных соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия. Эффект синхронизации, открытый Гюйгенсом [1] в XVII в. играет огромную роль в природе и технике, что отражено в ряде монографий [2–17]. Большое влияние на создание теории синхронизации оказало развитие электронных средств связи в первой половине XX в. В связи с чем можно отметить известную работу Ван дер Поля [18]. В дальнейшем была детально разработана ставшая классической теория синхронизации периодических автоколебаний [2–5, 9, 10, 13, 19–27], в том числе в присутствии шума [28–32]. Имеются работы (хотя и не в столь значительном количестве), посвященные синхронизации квазипериодических колебаний [33–36].

В рамках классической теории различают *вынужденную синхронизацию*, т. е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и *взаимную синхронизацию*, наблюдающуюся при взаимодействии двух автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты, связанные с двумя классическими механизмами синхронизации: захватом собственных частот (и, соответственно, фаз) колебаний или же подавлением одной из двух независимых частот.

Пусть $\Phi_1(t)$ и ω_1 — фаза и частота одного квазигармонического автогенератора, а $\Phi_2(t)$ и ω_2 — фаза и частота другого, связанного с ним автогенератора. Условия синхронизации формулируются как

$$m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t) = \text{const} \tag{4.1}$$

и

$$m\omega_1 = n\omega_2, \tag{4.2}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

где m и n — целые числа. Условия (4.1), (4.2) определяют эффект захвата фаз и частот, который должен выполняться в некоторой области значений управляющих параметров, называемой областью синхронизации. Простейший случай $1:1$ ($m = n = 1$) соответствует основной области синхронизации или области синхронизации на основном тоне.

Явление синхронизации автоколебаний в рамках хорошо разработанной теории синхронизации периодических колебаний уже многие годы привлекает особое внимание исследователей. Отчасти это обусловлено важностью данного явления с точки зрения практических приложений. В качестве примера можно привести синхронизацию электронных часов внешним воздействием высокостабильного генератора, в результате которой обеспечивается высокая точность времени в системе транспорта. Синхронизация мощных генераторов периодических колебаний с помощью слабого воздействия от внешнего высокостабильного генератора позволяет существенно улучшить их характеристики, такие как стабильность частоты, флуктуации амплитуды и фазы и другие.

В последние годы интерес к эффекту синхронизации проявляют биологи, химики и даже представители социальных и экономических наук. Отмечено синхронное поведение взаимодействующих клеток живой ткани, ансамблей нейронов, биологических популяций и т. д. Однако весьма существенно при исследовании этих проблем то, что анализируемые колебательные процессы здесь не всегда являются строго периодическими. Естественно, возникают многие вопросы о применимости классической теории синхронизации к такого рода колебательным процессам.

С открытием и доказательством возможности существования хаотических (непериодических) колебаний как особых решений дифференциальных уравнений естественно возникла проблема синхронизации таких колебаний. Появилось большое количество публикаций по этой теме [37–47], однако более или менее общей теории синхронизации хаотических колебаний пока не создано. Этому есть весомые причины, обусловленные широким спектром различных характеристик хаотических колебаний, отсутствием единого понимания сути эффекта и наличием неопределенности понятий фазы и частоты хаотических колебаний.

В четвертой главе данной книги делается попытка дать ответ на вопрос: возможно ли использовать и, если необходимо, в некотором смысле обобщить классические представления о синхронизации периодических колебаний на случай более сложных, квазипериодических и хаотических колебаний? Если да, то нужно четко сформулировать границы применимости идей классической теории синхронизации к более сложным типам автоколебаний и выделить те конкретные типы колебательных процессов, для которых можно конструктивно использовать классические представления. В первом разделе главы последовательно

излагается классическая теория синхронизации квазигармонических колебаний на примере синхронизации генератора Ван дер Поля. Описаны важные аспекты теории, которые используются в качестве основы при рассмотрении синхронизации более сложных колебаний. Во втором разделе приведены результаты исследований синхронизации квазипериодических колебаний на примере колебаний с двумя независимыми частотами. Обсуждаются особенности применимости идей и выводов классической теории к случаю автогенератора квазипериодических колебаний. Третий раздел главы посвящен анализу эффектов синхронизации хаотических колебаний. Показано, что наиболее конструктивно идеи классической теории можно использовать применительно лишь к особому типу хаотических автоколебаний, отвечающих режиму фазокогерентного хаотического аттрактора.

При изложении классической теории синхронизации большее, чем обычно принято в учебных пособиях, внимание уделено анализу бифуркаций устойчивых и неустойчивых синхронных движений в моделях различного уровня сложности (фазовое уравнение, укороченные уравнения для амплитуды и фазы, уравнение неавтономного осциллятора Ван дер Поля); все представленные в работе графические иллюстрации получены авторами специально для этой книги или взяты из оригинальных публикаций авторов. При расчетах использовались компьютерные программы, созданные на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского госуниверситета, а также специальные программные комплексы [48].

4.2. СИНХРОНИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ

В данном разделе рассматривается явление синхронизации периодических автоколебаний внешним гармоническим воздействием. Описание явления, возможные методы исследования, бифуркационные механизмы возникновения режимов синхронизации представлены на примере неавтономного генератора Ван дер Поля, который является одной из базовых и наиболее популярных моделей теории колебаний и нелинейной динамики.

Генератор Ван дер Поля представляет собой осциллятор с нелинейной диссипацией. При малой амплитуде колебаний он имеет отрицательную диссипацию (происходит подкачка энергии), а при большой — положительную (энергия рассеивается системой). Благодаря такой нелинейности, возможна ситуация, когда наступает динамический баланс между энергией, поступившей в систему, и энергией, рассеянной системой, в

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

среднем за некоторый характерный интервал времени. При этом система генерирует самоподдерживающиеся колебания, характеристики которых не зависят от начальных условий, а определяются параметрами системы. Подобные колебания были названы А. А. Андроновым автоколебаниями, а системы, способные их демонстрировать, — автоколебательными системами. Первоначально осциллятор Ван дер Поля представлял собой радиотехническое устройство на электронной лампе. В дальнейшем было установлено, что уравнение осциллятора Ван дер Поля имеет гораздо более общий характер, и при определенных упрощающих предположениях оно описывает автоколебательные процессы в системах самой различной природы.

Явление синхронизации периодических автоколебаний внешним гармоническим воздействием проявляется в том, что при определенных условиях генератор подстраивает свой ритм под частоту воздействия. При этом амплитуда воздействия может быть достаточно малой величиной, существенно меньше амплитуды колебаний автономного генератора. В простейшем случае генератор совершает колебания на частоте внешней силы, когда она меняется в конечной окрестности собственной частоты автономного генератора, так называемая основная область синхронизации.

В данной главе мы ограничимся описанием только основной области синхронизации неавтономного осциллятора Ван дер Поля, используя фазовое уравнение, укороченные уравнения для амплитуды и фазы и полное неавтономное уравнение Ван дер Поля. Чтобы чрезмерно не усложнять изложение бифуркационных переходов на плоскости управляющих параметров, мы не останавливаемся на описании динамики системы в окрестности точки Богданова–Такенса (окрестность, где сходятся линии, разграничивающие области захвата, подавления и квазипериодических движений). Заинтересованному читателю рекомендуем монографию [49]. Теория синхронизации периодических автоколебаний излагается в [19, 18, 20, 13, 9, 10, 49–59].

4.2.1. Внешняя синхронизация генератора Ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы

Рассмотрим уравнение генератора Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = b\sin\omega t, \tag{4.3}$$

где ε — управляющий параметр автономного генератора, b, ω — амплитуда и частота внешнего воздействия.

Перепишем уравнение (4.3) в следующем виде:

$$\begin{gathered}\ddot{x} + x = (\varepsilon - x^2)\dot{x} + b\sin\omega t,\\ \ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - 1)x + (\varepsilon - x^2)\dot{x} + b\sin\omega t.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Если частота внешнего воздействия близка к собственной частоте автономного генератора ($\omega \sim 1$), параметр возбуждения ε является малой положительной величиной, и внешнее воздействие слабое (амплитуда b — малая величина), то правая часть уравнения (4.4) представляет собой малое возмущение гармонического осциллятора с частотой ω и неавтономный генератор является квазигармонической или слабонелинейной системой. В этом случае решение уравнения (4.4) можно искать в виде[1]):

$$x(t) = \mathrm{Re}(a(t)\exp(\mathrm{i}\omega t)) = \frac{1}{2}\big(a\exp(\mathrm{i}\omega t) + a^*\exp(-\mathrm{i}\omega t)\big) \tag{4.5}$$

с дополнительным условием

$$\dot{a}\exp(\mathrm{i}\omega t) + \dot{a}^*\exp(-\mathrm{i}\omega t) = 0. \tag{4.6}$$

С учетом дополнительного условия запишем первую и вторую производную:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}\big[\dot{a}\exp(\mathrm{i}\omega t) + \dot{a}^*\exp(-\mathrm{i}\omega t) + \mathrm{i}\omega a\exp(\mathrm{i}\omega t) - \mathrm{i}\omega a^*\exp(-\mathrm{i}\omega t)\big] =\\ &= \frac{1}{2}\big[\mathrm{i}\omega a\exp(\mathrm{i}\omega t) - \mathrm{i}\omega a^*\exp(-\mathrm{i}\omega t)\big],\\ \ddot{x} &= \frac{1}{2}\big[\mathrm{i}\omega\dot{a}\exp(\mathrm{i}\omega t) - \mathrm{i}\omega\dot{a}^*\exp(-\mathrm{i}\omega t) - \omega^2 a\exp(\mathrm{i}\omega t) - \omega^2 a^*\exp(-\mathrm{i}\omega t)\big] =\\ &= \mathrm{i}\omega\dot{a}\exp(\mathrm{i}\omega t) - \frac{\omega^2}{2}\big[a\exp(\mathrm{i}\omega t + a^*\exp(-\mathrm{i}\omega t)\big].\end{aligned}$$

Подставив $\ddot{x}, \dot{x}, x$ в уравнение (4.4) и выразив $\sin(\omega t)$ через экспоненты, получим

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\omega\dot{a}\exp(\mathrm{i}\omega t) &= \frac{\omega^2 - 1}{2}\big[a\exp(\mathrm{i}\omega t) + a^*\exp(-\mathrm{i}\omega t)\big] +\\ &+ \frac{\mathrm{i}\omega}{2}\Big[\varepsilon - \frac{1}{4}\big(a^2\exp(2\mathrm{i}\omega t) + 2|a|^2 + (a^*)^2\exp(-2\mathrm{i}\omega t)\big)\Big] \times\\ &\times \big(a\exp(\mathrm{i}\omega t) - a^*\exp(-\mathrm{i}\omega t)\big) + \frac{b}{2\mathrm{i}}\big(\exp(\mathrm{i}\omega t) - \exp(-\mathrm{i}\omega t)\big),\end{aligned}$$

[1]) Такое представление аналогично замене переменных $x = \rho(t)\cos(\omega t + \varphi(t))$, $\dot{x} = -\omega\rho(t)\sin(\omega t + \varphi(t))$, где $\rho(t) = |a(t)|$, $\varphi(t) = \mathrm{Arg}\, a(t)$, которую также широко используют в методе усреднения Ван дер Поля.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$$\dot{a} = \frac{\omega^2 - 1}{2\mathrm{i}\omega}\left[a + a^* \exp(-2\mathrm{i}\omega t)\right] + \\ + \left[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{8}\left(a^2 \exp(2\mathrm{i}\omega t) + 2|a|^2 + (a^*)^2 \exp(-2\mathrm{i}\omega t)\right)\right] \times \\ \times \left(a - a^* \exp(-2\mathrm{i}\omega t)\right) - \frac{b}{2\omega}\left(1 - \exp(-2\mathrm{i}\omega t)\right).$$

Далее, раскрывая скобки и усредняя за период $T = 2\pi/\omega$ правую и левую части уравнения, получим укороченное уравнение для комплексной амплитуды

$$\dot{a} = -\mathrm{i}\frac{\omega^2 - 1}{2\omega}a + \frac{\varepsilon}{2}a - \frac{1}{8}|a|^2 a - \frac{b}{2\omega}. \tag{4.7}$$

Представляя комплексную величину в полярных координатах

$$a(t) = \rho(t)\exp(\mathrm{i}\varphi(t)), \tag{4.8}$$

получим укороченные уравнения для амплитуды и фазы

$$\dot{\rho} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 - \beta\cos\varphi, \tag{4.9}$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \frac{\beta}{\rho}\sin\varphi, \tag{4.10}$$

где $\Delta = (\omega^2 - 1)/(2\omega)$ характеризует расстройку между частотой внешнего воздействия и собственной частотой генератора, а $\beta = b/(2\omega)$ — интенсивность внешнего воздействия.

Напомним, что решение для исходного уравнения генератора Ван дер Поля имеет вид

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[a(t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\right] = \mathrm{Re}\left[\rho(t)\exp\left(\mathrm{i}\omega t + i\varphi(t)\right)\right] = \rho(t)\cos\left[\omega t + \varphi(t)\right].$$

То есть генератор совершает колебания на частоте внешнего воздействия ω, когда $\varphi(t) = \mathrm{const}$. Возможны также двухчастотные колебания или так называемые биения, когда амплитуда и фаза медленно меняются во времени.

Синхронизация — подстройка частоты генератора к частоте внешней силы — возможна и при очень слабом воздействии. В этом случае возмущение амплитуды является малым, а существенным является возмущение фазы. Процесс синхронизации может быть описан в фазовом приближении.

Предположим, что в системе укороченных уравнений для амплитуды и фазы (4.9), (4.10) амплитуда внешнего воздействия β является малой

величиной. Амплитуда колебаний $\rho(t)$ под внешним воздействием существенно не изменилась по сравнению с амплитудой автоколебаний автономного генератора. То есть амплитуда $\rho(t)$ практически соответствует радиусу предельного цикла автономного генератора и может быть найдена из уравнения

$$\dot{\rho} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3. \tag{4.11}$$

Стационарным значениям амплитуды ($\dot{\rho} = 0$) соответствуют состояния равновесия (особые точки или неподвижные точки) уравнения (4.11). Интегрируя дифференциальное уравнение (4.11) можно получить функцию $\rho(t)$, соответствующую переходному процессу из некоторого начального состояния $\rho(0)$ к стационарному состоянию $\rho_{\text{ст}}$.

Определим состояния равновесия и их устойчивость. В состоянии равновесия (или в неподвижной точке) производная $\dot{\rho} = 0$. Тогда правая часть дифференциального уравнения (4.11) равна нулю, и получаем алгебраическое уравнение для неподвижных точек

$$\frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 = 0, \tag{4.12}$$

из которого находим три неподвижные точки P_1, P_2, P_3 с координатами

$$\rho_1 = 0, \tag{4.13}$$

$$\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}, \tag{4.14}$$

соответственно.

Первая неподвижная точка $P_1[\rho_1 = 0]$ существует при любых значениях параметра ε, а две других $P_{2,3}[\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}]$ — только при $\varepsilon \geq 0$. При $\varepsilon = 0$ все три точки сливаются в одну. В автономном осцилляторе Ван дер Поля на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ решение $\rho_1 = 0$ отвечает неподвижной точке, расположенной в начале координат. Решения $\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}$ отвечают радиусу предельного цикла, который возникает при переходе через бифуркационное значение $\varepsilon = 0$ и растет пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$.

Устойчивость неподвижных точек P_1, P_2, P_3 системы (4.11) определяется собственным значением

$$\mu = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3\right)_{\rho=\rho_i}, \tag{4.15}$$

которое представляет собой производную по динамической переменной от правой части уравнения (4.11), вычисленную в неподвижной точке P_i с координатой ρ_i $(i = 1, 2, 3)$. Для неподвижной точки $P_1[\rho_1 = 0]$ получаем

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$\mu_1 = \varepsilon/2$. Следовательно, при $\varepsilon < 0$ собственное значение μ_1 отрицательное и точка P_1 устойчива. При $\varepsilon > 0$ собственное значение μ_1 положительное и точка P_1 неустойчива. Для неподвижных точек $P_{2,3}[\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}]$ собственные значения одинаковые и равны

$$\mu_{2,3} = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{8}\rho_i^2 = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon = -\varepsilon.$$

Следовательно, при $\varepsilon > 0$ рождаются устойчивые неподвижные точки $P_{2,3}[\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}]$.

Непосредственно для системы (4.11) изложенное выше соответствует бифуркации вил, и уравнение (4.11) представляет собой нормальную форму суперкритической «бифуркации вил».

Бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 4.1, показывает, что при $\varepsilon < 0$ существует одна устойчивая неподвижная точка $P_1[\rho_1 = 0]$. При переходе через бифуркационное значение $\varepsilon = 0$ точка P_1 теряет устойчивость и в ее окрестности рождается пара устойчивых симметричных друг другу неподвижных точек P_2, P_3, координаты которых меняются с ростом управляющего параметра пропорционально корню из надкритичности:

$$\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\varepsilon}.$$

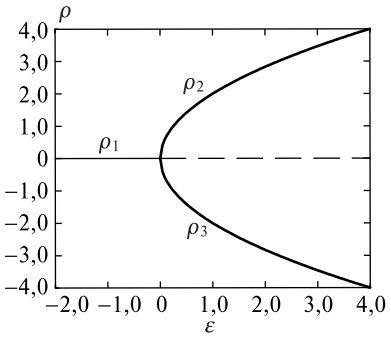


Рис. 4.1. Диаграмма суперкритической бифуркации вил

Уравнение типа (4.11) в комплексном виде представляет собой нормальную форму суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа[1]).

В автономном генераторе Ван дер Поля на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ при вариации упраляющего параметра ε будут наблюдаться следующие перестройки фазовых портретов. При $\varepsilon < 0$ имеется одна устойчивая точка равновесия, расположенная в начале координат. С увеличением параметра ε при переходе через ноль состояние равновесия теряет устойчивость. В его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого растет пропорционально корню из надкритичности $\rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$ (где $\rho_{\text{ст}}$ — радиус предельного цикла или стационарное значение амплитуды автоколебаний).

[1]) Строго говоря, нормальная форма суперкритической бифуркации вил и суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа имеют следующий вид: $\dot{x} = mx - x^3$ и $\dot{z} = (m + i\omega)z - z|z|^2$, соответственно.

Для того чтобы описать процесс установления стационарной амплитуды автоколебаний, проинтегрируем дифференциальное уравнение (4.11). Разделим обе части уравнения на ρ^3 и умножим на -2

$$\frac{-2}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt} = -\varepsilon\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{4}. \tag{4.16}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = -\varepsilon\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\varepsilon}\right). \tag{4.17}$$

Сделав замену переменных

$$r = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\varepsilon}, \tag{4.18}$$

получим

$$\frac{dr}{dt} = -\varepsilon r. \tag{4.19}$$

Решение уравнения имеет вид

$$r(t) = C\exp(-\varepsilon t). \tag{4.20}$$

Константу C определим из начальных условий. При $t = 0$ получим $r(0) = r_0 = C$ или

$$C = r_0 = \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{4\varepsilon},$$

где ρ_0 — значение амплитуды автоколебаний в начальный момент времени.

Перепишем решение для исходной переменной ρ

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\varepsilon} = \left[\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{4\varepsilon}\right]\exp(-\varepsilon t). \tag{4.21}$$

Напомним, что стационарное значение амплитуды автоколебаний равно $\rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$. С учетом этого перепишем решение в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_{\text{ст}}^2} = \left[\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_{\text{ст}}^2}\right]\exp(-\varepsilon t),\\ \frac{\rho_{\text{ст}}^2}{\rho^2} - 1 = \left[\frac{\rho_{\text{ст}}^2}{\rho_0^2} - 1\right]\exp(-\varepsilon t),\\ \rho(t) = \frac{\rho_{\text{ст}}}{\sqrt{\left[\frac{\rho_{\text{ст}}^2}{\rho_0^2} - 1\right]\exp(-\varepsilon t) + 1}}.\end{gathered} \tag{4.22}$$

Данное выражение определяет процесс установления амплитуды автоколебаний в автономном генераторе Ван дер Поля. При возрастании времени в системе устанавливается стационарное значение $\rho(t) \to \rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

На рис. 4.2 проиллюстрирован процесс установления стационарной амплитуды автоколебаний при различных начальных значениях ρ_0.

Вернемся к укороченным уравнениям для амплитуды и фазы (4.9), (4.10). При слабом внешнем гармоническом воздействии полагаем, что амплитуда $\rho(t)$ соответствует радиусу предельного цикла автономного генератора $\rho(t) = \rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$, и процесс синхронизации может быть описан в фазовом приближении

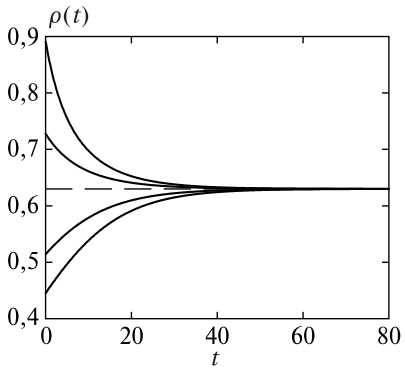


Рис. 4.2. Процесс установления стационарного значения амплитуды автоколебаний при различных начальных значениях ρ_0, в случае $\varepsilon = 0{,}1$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\sin(\varphi). \qquad (4.23)$$

Уравнение (4.23) описывает одну динамическую переменную φ и, соответственно, размерность фазового пространства равна единице. Динамику системы можно представлять либо на действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$, либо на окружности радиуса $\rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$, учитывая периодичность функции $\sin\varphi$. Поведение системы зависит от параметров Δ, β, ε, которые характеризуют расстройку между частотой внешнего воздействия и частотой автономного генератора (Δ), амплитуду внешнего воздействия (β) и поведение автономного генератора (ε).

Рассмотрим динамику фазы в зависимости от расстройки Δ и амплитуды внешнего воздействия β при фиксированном значении параметра ε, отвечающим квазигармоническим колебаниям автономного генератора.

На рис. 4.3 построены зависимости фазы φ от времени t при $\varepsilon = 0{,}1$, $\beta = 0{,}01$ и различных значениях параметра расстройки. Из рисунка видно, что при малых значениях расстройки фаза не меняется во времени, остается постоянной величиной (линии *5* и *6* при $\Delta = \mp 0{,}03$). С увеличением расстройки по частоте, когда $|\Delta|$ превышает некоторое критическое значение $|\Delta_c|$, происходит качественное изменение в поведении фазы $\varphi(t)$. Ее величина начинает меняться во времени. В зависимости от знака параметра Δ (если частота внешнего воздействия больше (меньше) собственной частоты генератора, то $\Delta > 0$ ($\Delta < 0$)) величина фазы $\varphi(t)$ либо уменьшается, либо нарастает во времени. При малой надкритичности $|\Delta - \Delta_c|$ во временной реализации $\varphi(t)$ можно выделить продолжительные интервалы, в течение которых фаза остается практически постоянной, чередующихся с короткими интервалами, во время которых происходит изменение фазы на 2π. С ростом надкритичности

$|\Delta - \Delta_c|$ интервалы постоянства фазы уменьшаются, средняя скорость изменения фазы увеличивается.

Таким образом, существует интервал значений расстройки $|\Delta| < \Delta_c$, где фаза не меняется ($\varphi(t) = \text{const}$), ее производная (скорость изменения фазы) равна нулю. Это означает, что генератор совершает периодические колебания на частоте внешнего воздействия, наблюдается явление синхронизации. За пределами интервала синхронизации фаза меняется во времени, колебания становятся квазипериодическими. Средняя скорость изменения фазы $\langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ определяет вторую независимую частоту — частоту биений. Из рис. 4.3 видно, что при малой надкритичности средняя скорость изменения фазы очень низкая, что соответствует очень малой частоте биений. С ростом надкритичности происходит увеличение частоты биений.

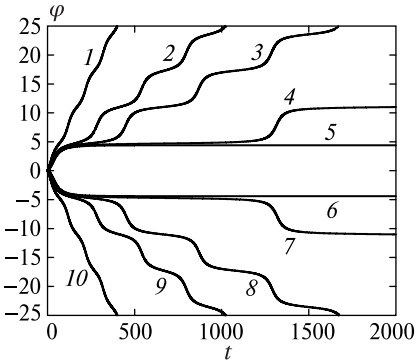


Рис. 4.3. Графики зависимости фазы φ от времени t при $\varepsilon = 0{,}1$, $\beta = 0{,}01$ и различных значениях параметра расстройки. Линии *1* и *10* соответствуют $\Delta = \mp 0{,}07$; *2* и *9* — $\Delta = \mp 0{,}04$; *3* и *8* — $\Delta = \mp 0{,}035$; *4* и *7* — $\Delta = \mp 0{,}032$; *5* и *6* — $\Delta = \mp 0{,}03$

При фазовом описании синхронным движениям отвечают состояния равновесия или неподвижные точки динамической системы (4.23). Режимы синхронизации должны соответствовать устойчивым состояниям равновесия. Для системы (4.23) найдем состояния равновесия, определим их область существования по параметрам, исследуем устойчивость и бифуркации неподвижных точек при изменении параметров системы.

Неподвижные точки системы (4.23) будем представлять в одномерном фазовом пространстве на окружности радиуса $\rho_{\text{ст}} = \sqrt{4\varepsilon}$, построенной на плоскости с координатами $\rho\sin(\varphi)$, $\rho\cos(\varphi)$ (рис. 4.4).

Условием существования состояний равновесия является равенство нулю правой части уравнения (4.23)

$$-\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}}\sin(\varphi) = 0. \qquad (4.24)$$

Из (4.24) находим две неподвижные точки с координатами

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{\Delta\sqrt{4\varepsilon}}{\beta}, \qquad (4.25)$$

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin\frac{\Delta\sqrt{4\varepsilon}}{\beta}. \qquad (4.26)$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Они существуют, если $|\Delta\sqrt{4\varepsilon}/\beta| \le 1$ или $|\Delta| \le \beta/\sqrt{4\varepsilon}$. Следовательно, при фиксированном ε границы области существования неподвижных точек на плоскости параметров (β, Δ) определяет линия, заданная уравнением

$$\beta = \sqrt{4\varepsilon}|\Delta|. \tag{4.27}$$

Область синхронизации, границы которой определяет уравнение (4.27), построены на рис. 4.5.

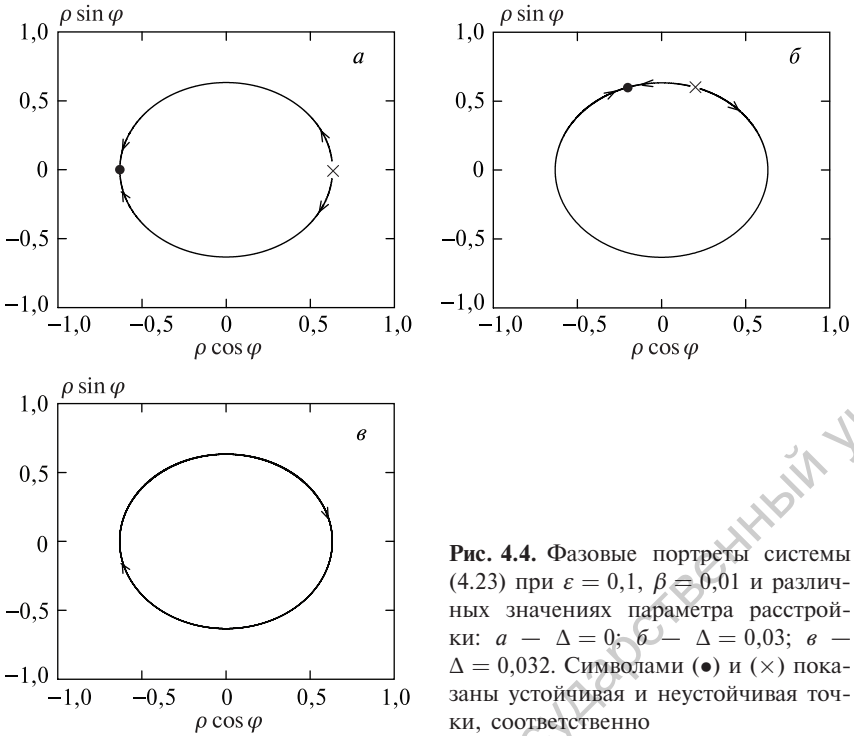


Рис. 4.4. Фазовые портреты системы (4.23) при $\varepsilon = 0{,}1$, $\beta = 0{,}01$ и различных значениях параметра расстройки: *а* — $\Delta = 0$; *б* — $\Delta = 0{,}03$; *в* — $\Delta = 0{,}032$. Символами (•) и (×) показаны устойчивая и неустойчивая точки, соответственно

Исследуем устойчивость неподвижных точек. Рассмотрим поведение системы (4.23) в окрестности неподвижных точек φ_i $(i = 1, 2)$ в линейном приближении. Представим динамическую переменную в виде $\varphi(t) = \varphi_i + \widetilde{\varphi}(t)$, где $\widetilde{\varphi}(t)$ характеризует малое отклонение от состояния равновесия φ_i. Перепишем уравнение (4.23) следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_i + \widetilde{\varphi}) = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\sin(\varphi_i + \widetilde{\varphi}),$$

$$\frac{d\widetilde{\varphi}}{dt} = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}(\sin\varphi_i\cos\widetilde{\varphi} + \sin\widetilde{\varphi}\cos\varphi_i).$$

Раскладывая $\cos\widetilde{\varphi}$ и $\sin\widetilde{\varphi}$ в ряд Тейлора и учитывая слагаемые не выше первого порядка малости по $\widetilde{\varphi}$, получим следующее линеаризованное уравнение

$$\frac{d\widetilde{\varphi}}{dt} = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}(\sin\varphi_i + \widetilde{\varphi}\cos\varphi_i).$$

Из определения неподвижной точки следует, что

$$-\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\sin\varphi_i = 0.$$

В результате получаем уравнения

$$\frac{d\widetilde{\varphi}}{dt} = \left(\frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\cos\varphi_i\right)\widetilde{\varphi}, \tag{4.28}$$

решение которого имеет вид

$$\widetilde{\varphi}(t) \sim \exp\left[\left(\frac{\beta}{\sqrt{4\varepsilon}}\cos(\varphi_i)\right) \times t\right]. \tag{4.29}$$

Таким образом, устойчивость состояний равновесия зависит от знака $\cos\varphi_i$. Если $\cos\varphi_i > 0$, то малое отклонение $\widetilde{\varphi}(t)$ нарастает во времени, и состояние равновесия φ_i является неустойчивым. Если $\cos\varphi_i < 0$, то малое отклонение затухает во времени, и состояние равновесия является устойчивым. Из выражения для координат неподвижных точек (4.25), (4.26) следует, что $\cos\varphi_1 > 0$ и неподвижная точка φ_1 неустойчивая. Точка φ_2 является устойчивой, поскольку $\cos\varphi_2 < 0$.

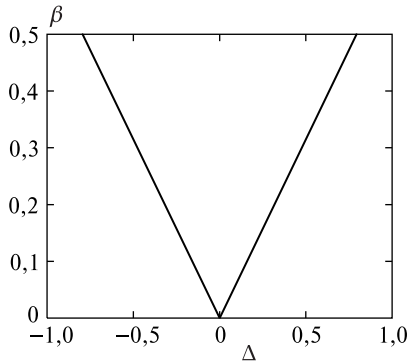


Рис. 4.5. Область синхронизации на плоскости управляющих параметров при $\varepsilon = 0{,}1$

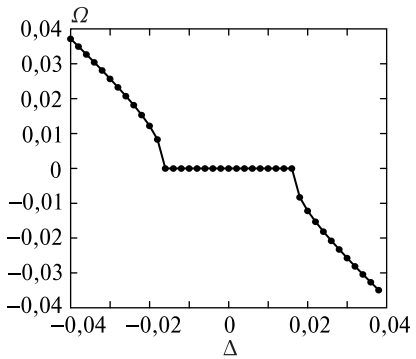


Рис. 4.6. График зависимости $\Omega = \langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ от расстройки по частоте Δ системы (4.23) при $\beta = 0{,}01$ и $\varepsilon = 0{,}1$

На рис. 4.4, *а* и *б* показана устойчивая и неустойчивая неподвижные точки в фазовом пространстве системы при различных значениях параметра Δ. Как видно из выражений (4.25) и (4.26), при $\Delta = 0$ координата

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

неустойчивой точки равна $\varphi_1 = 0$, а координата устойчивой точки равна $\varphi_2 = \pi$ (рис. 4.4, *а*). При увеличении расстройки, когда $\Delta\sqrt{4\varepsilon}/\beta$ стремится к единице, неустойчивая и устойчивая неподвижные точки перемещаются по окружности навстречу друг другу: неустойчивая — против часовой стрелки, устойчивая — по часовой. При $\varphi = \pi/2$ они сливаются, и затем исчезают, когда $\Delta\sqrt{4\varepsilon}/\beta$ превышает единицу (рис. 4.4, *в*). Исчезновение неподвижных точек происходит при выходе из области синхронизации. Изображающая точка совершает вращательное движение по окружности, средняя скорость которого $\langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ определяет частоту биений.

На рис. 4.6 построена зависимость $\Omega = \langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ от расстройки по частоте Δ системы (4.23) при $\beta = 0{,}01$ и $\varepsilon = 0{,}1$. Интервал значений Δ, где $\Omega = 0$, соответствует области синхронизации, за пределами которой наблюдаются биения с частотой Ω.

Бифуркационный анализ системы укороченных уравнений

Фазовое описание явления синхронизации с помощью уравнения (4.23) допустимо только при очень слабом внешнем воздействии, когда возмущением амплитуды колебаний автономного генератора можно пренебречь. Появление или исчезновение синхронизации связано с бифуркацией рождения или исчезновения устойчивой и неустойчивой неподвижных точек в одномерном фазовом пространстве. На плоскости управляющих параметров (β, Δ) имеется «язык» синхронизации, границы которого заданы прямыми линиями $\beta = \sqrt{4\varepsilon}|\Delta|$, на которых и происходит указанная единственная бифуркация для двух неподвижных точек. Учет амплитудного уравнения, т. е. рассмотрение системы укороченных уравнений для амплитуды и фазы (4.9), (4.10) приводит к более сложным бифуркационным явлениям на плоскости управляющих параметров (β, Δ).

Для системы укороченных уравнений (4.9), (4.10) режимам синхронизации также отвечают состояния равновесия $\varphi(t) = \text{const}$ и $\rho(t) = \text{const}$, но уже на фазовой плоскости с координатами $\rho\sin\varphi$ и $\rho\cos\varphi$. На рис. 4.7 на плоскости управляющих параметров (β, Δ) при фиксированном $\varepsilon = 0{,}1$ построены области синхронизации и линии различных бифуркаций синхронных движений.

Режим синхронизации существует при значениях параметров из области A и области B, которые окружает область C квазипериодических движений. В области A на фазовой плоскости имеется три неподвижных точки: устойчивый узел P_N (именно эта точка отвечает режиму синхронизации), седловая точка P_S и неустойчивая точка P_R, которая в зависимости от значений β и Δ может быть либо неустойчивым узлом (репеллером), либо неустойчивым фокусом. На рис. 4.8, *а* представлен

фазовый портрет, характерный для области синхронизации A. В области B режиму синхронизации также отвечает устойчивая неподвижная точка P_N, однако структура фазового пространства стала принципиально иной (рис. 4.8, *б*). Здесь отсутствуют неустойчивые точки P_R и P_S. Область C соответствует квазипериодическим режимам, которым в системе укороченных уравнений (4.9), (4.10) отвечает устойчивый предельный цикл C (рис. 4.8, *в*). На фазовом портрете системы помимо устойчивого предельного цикла C имеется неустойчивый фокус P_R.

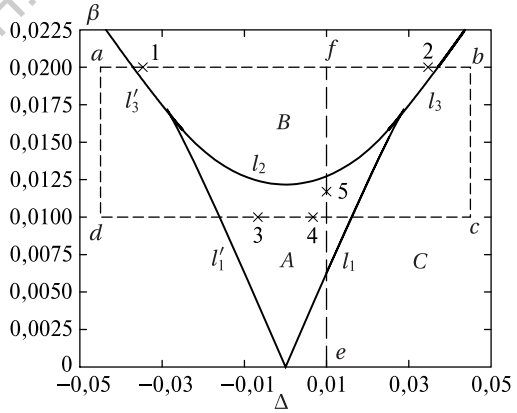


Рис. 4.7. Линии бифуркационных значений устойчивых и неустойчивых состояний равновесия системы укороченных уравнений (4.9), (4.10) на плоскости управляющих параметров (β, Δ) при фиксированном значении $\varepsilon = 0{,}1$

Рассмотрим бифуркации характерных режимов системы при движении по плосокости параметров (β, Δ).

На рис. 4.9 построена бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра расстройки Δ при фиксированном $\beta = 0{,}01$. На плоскости параметров (β, Δ) это соответствует перемещению вдоль линии cd. При малой расстройке Δ (в интервале между точками 3 и 4, отмеченных символами «×» на рис. 4.7 и 4.9) неподвижная точка P_R является неустойчивым узлом (репеллером). Фазовый портрет системы для рассматриваемой ситуации показан на рис. 4.8, *а*. С увеличением или уменьшением Δ при переходе через точки 3 и 4 репеллер превращается в неустойчивый фокус. При дальнейшем изменении Δ, включая и выход из области A при пересечении линий l_1 и l_1', неустойчивый фокус P_R никаких бифуркаций не претерпевает. Нарушение режима синхронизации определяет поведение неподвижных точек P_N и P_S. На фазовом портрете неустойчивые многообразия седла P_S замыкаются на устойчивый

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

узел P_N. С увеличением Δ седло и устойчивый узел сближаются и на границе l_1 сливаются в седло-узел. Далее происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла при исчезновении сложной особой точки седло-узел. Предельный цикл возникает «жестко» и сразу же за бифуркационной точкой имеет конечный радиус (рис. 4.8, *в*). Вблизи бифуркационной точки соответствующие колебания конечной амплитуды имеют очень большой период. В исходной системе для переменной $x(t)$ это будет соответствовать жесткому возникновению медленных биений. Рассмотренные бифуркации на границе областей A и C определяют как механизм синхронизации через захват. Область A языка синхронизации также называют областью захвата.

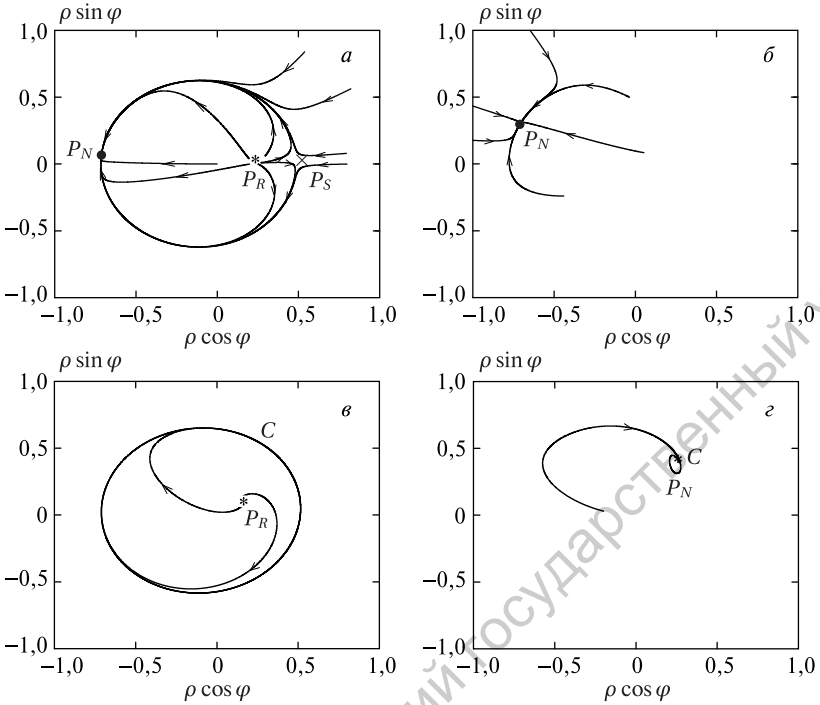


Рис. 4.8. Характерные фазовые портреты системы (4.9)–(4.10) при $\varepsilon = 0{,}1$ и параметрах внешнего воздействия β и Δ из областей A, B и C на рис. 4.1: *а* — $\beta = 0{,}01$, $\Delta = 0{,}001$ (область A); *б* — $\beta = 0{,}02$, $\Delta = 0{,}01$ (область B); *в* — $\beta = 0{,}01$, $\Delta = 0{,}03$ (область C); *г* — $\beta = 0{,}02$, $\Delta = 0{,}037$ (область C)

На рис. 4.10 построена бифуркационная диаграмма для неподвижных точек системы (уравнения (4.9) и (4.10)) при изменении параметра β

и фиксированном значении $\Delta = 0{,}01$. На плоскости параметров (β, Δ) (рис. 4.7) это соответствует перемещению вдоль линии ef. В области C ниже линии l_1 на фазовой плоскости имеется устойчивый предельный цикл C и расположенный внутри него неустойчивый фокус P_R. С ростом амплитуды внешнего воздействия β неустойчивый фокус P_R перемещается по фазовой плоскости. При пересечении линии l_1 с ним никаких бифуркаций не происходит. На границе области синхронизации предельный цикл C исчезает, рождается сложная особая точка седло-узел. Выше линии l_1 устойчивый узел P_N и седло P_S расходятся на фазовой плоскости. С увеличением β за точкой, отмеченной символом «×», неустойчивый фокус P_R превращается в неустойчивый узел и сближается с седлом P_S. При пересечении линии l_2 происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой неустойчивый узел P_R и седло P_S сливаются и исчезают. На фазовой плоскости остается одна особая точка — устойчивый узел P_N, который в области B на рис. 4.7 продолжает отвечать режиму вынужденной синхронизации генератора Ван дер Поля. Область B языка синхронизации называется областью подавления. Механизм нарушения (или возникновения) синхронизации здесь иной, чем на границе областей A и C.

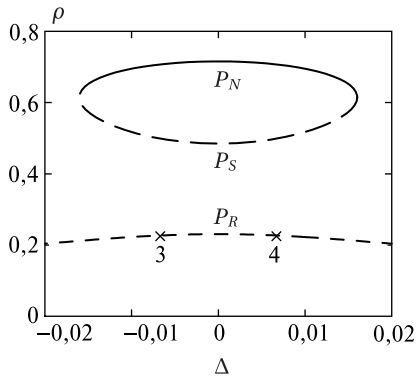


Рис. 4.9. Бифуркационная диаграмма для неподвижных точек P_N, P_S и P_R системы (4.9)–(4.10) при изменении параметра расстройки Δ и фиксированных значениях $\beta = 0{,}01$ и $\varepsilon = 0{,}1$

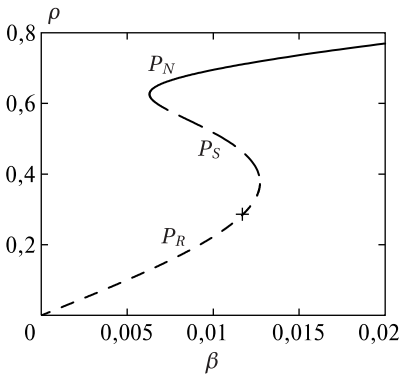


Рис. 4.10. Бифуркационная диаграмма для неподвижных точек системы (4.9)–(4.10) при изменении параметра β и фиксированных значениях $\Delta = 0{,}01$ и $\varepsilon = 0{,}1$

На рис. 4.11 построена бифуркационная диаграмма неподвижной точки P_N при изменении параметра Δ и фиксированном значении $\beta = 0{,}02$. На плоскости параметров (β, Δ) (рис. 4.7) это соответствует перемещению вдоль линии ab. В интервале значений расстройки, ограниченном

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

точками 1 и 2 состояние равновесия P_N является устойчивым узлом. За точкой 2 до пересечения линии l_3 устойчивый узел превращается в устойчивый фокус. При пересечении линии l_3 происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. Точка P_N теряет устойчивость. Из неустойчивого фокуса в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого увеличивается пропорционально корню из надкритичности. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 4.8, *г*. Во временной реализации $x(t)$ генератора Ван дер Поля при внешнем воздействии это соответствует мягкому возникновению биений. Вторая независимая мода квазипериодических движений нарастает плавно от нуля. При обратном движении по параметру при входе в область B происходит полное подавление автоколебательной моды и система совершает колебания на частоте внешнего воздействия, что возможно только при больших амплитудах внешней силы.

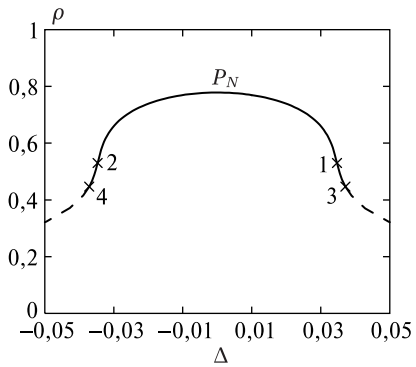


Рис. 4.11. Бифуркационная диаграмма состояния равновесия P_N системы (4.9), (4.10) при изменении параметра расстройки Δ и фиксированных значениях $\beta = 0{,}02$ и $\varepsilon = 0{,}1$

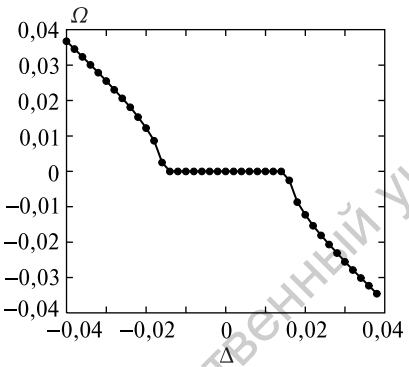


Рис. 4.12. График зависимости $\Omega = \langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ от расстройки по частоте Δ системы уравнений для амплитуды и фазы (4.9)–(4.10) при $\varepsilon = 0{,}1$ и $\beta = 0{,}01$

На рис. 4.12 построена зависимость $\Omega = \langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ от расстройки по частоте Δ для системы укороченных уравнений (4.9)–(4.10) при $\varepsilon = 0{,}1$ и $\beta = 0{,}01$. Горизонтальный участок соответствует области синхронизации, когда $\Omega = 0$ и колебания $x(t)$ происходят на частоте внешнего воздействия ω. Ширина полки на графике зависит от параметра β. По мере его увеличения область синхронизации расширяется. Выбранные значения $\beta = 0{,}01$ и $\varepsilon = 0{,}1$ соответствуют области захвата (область A на рис. 4.7), при выходе из которой возникают биения с частотой Ω.

Бифуркационный анализ неавтономного генератора Ван дер Поля

Вернемся к полным уравнениям (4.3) генератора Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = b\sin\omega t,$$

и исследуем поведение этой системы в зависимости от амплитуды и частоты внешнего гармонического воздействия при фиксированном значении управляющего параметра автономного генератора ε.

Напомним, что для автономного генератора (при $b = 0$) размерность фазового пространства равна двум и его поведение зависит только от значений параметра ε. При $\varepsilon < 0$ автоколебания в генераторе не возбуждаются. На фазовой плоскости имеется единственная особая точка, расположенная в начале координат, которая является устойчивой, и при $\varepsilon < -2$ представляет собой устойчивый узел, при $-2 < \varepsilon < 0$ — устойчивый фокус. Если $0 < \varepsilon < 2$, состояние равновесия является неустойчивым фокусом. Если $\varepsilon > 2$, то неустойчивым узлом. При переходе ε через ноль происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой из неустойчивого фокуса рождается устойчивый предельный цикл. При малых значениях управляющего параметра генератор демонстрирует квазигармонические колебания, которые с ростом ε превращаются в релаксационные.

Размерность фазового пространства неавтономного генератора Ван дер Поля равна трем, и здесь помимо неподвижных точек и предельных циклов может существовать двумерный тор. Запишем уравнение неавтономного генератора (4.3) в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon - x^2)y - x + b\sin(z), \\ \dot{z} &= \omega. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, которые и определяют размерность фазового пространства. В широкой области значений параметров динамика данной системы является довольно сложной и разнообразной. Мы ограничимся исследованием режимов синхронизации и их бифуркаций в окрестности так называемого основного языка синхронизации, когда частота синхронных колебаний совпадает с частотой внешнего воздействия. Будем рассматривать только квазигармонические режимы автономного генератора, когда параметр ε имеет небольшие значения.

Режиму синхронизации отвечает устойчивый предельный цикл C_N. Он и седловой предельный цикл C_S лежат на поверхности двумерного тора, который образован замыканием неустойчивых многоообразий сед-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

лового цикла C_S на устойчивый цикл C_N. Рассмотрим бифуркации этих предельных циклов при движении по плоскости управляющих параметров (b, ω) и фиксированном $\varepsilon = 0{,}1$.

На рис. 4.13 на плоскости амплитуда — частота внешнего воздействия построены линии бифуркационных значений синхронных движений при фиксированном значении параметра ε. В областях A и B система демонстрирует режимы синхронизации, а в области C — режим квазипериодических колебаний. Следует отметить, что в отличие от укороченных уравнений для амплитуды и фазы в системе (4.30) устойчивым и неустойчивым синхронным движениям отвечают устойчивые и неустойчивые предельные циклы, а квазипериодическим колебаниям соответствует двумерный эргодический тор в трехмерном фазовом пространстве системы. При значениях параметров из области A в фазовом пространстве системы имеется три предельных цикла: устойчивый C_N, седловой C_S и абсолютно неустойчивый C_R. Проекции предельных циклов на плоскость (x, y) показаны на рис. 4.14.

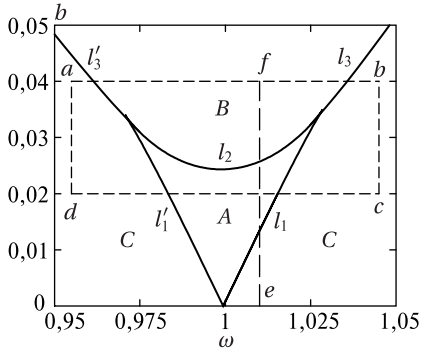


Рис. 4.13. Основной язык синхронизации на плоскости параметров амплитуда b — частота ω внешнего воздействия системы (4.30) при $\varepsilon = 0{,}1$

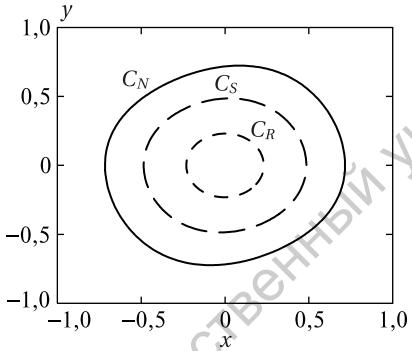


Рис. 4.14. Проекции предельных циклов на плоскость (x, y) системы (4.30) при значениях параметров $b = 0{,}02$, $\omega = 1{,}01$, $\varepsilon = 0{,}1$. C_N — устойчивый, C_S — седловой и C_R — абсолютно неустойчивый предельные циклы

На рис. 4.15 построена бифуркационная диаграмма в зависимости от частоты внешнего воздействия ω при фиксированной амплитуде $b = 0{,}02$, что соответствует перемещению вдоль линии cd на рис. 4.13. На оси ординат бифуркационной диаграммы (рис. 4.15) отложены максимальные значения динамической переменной $x(t)$ соответствующих предельных циклов C_N, C_S, C_R. При изменении частоты внешнего воздействия ω при пересечении границ области синхронизации l_1 и l_1' неустойчивый предельный цикл C_R никаких бифуркаций не претерпевает. Переход от синхронных колебаний к квазипериодическим связан с бифуркациями двух других предельных циклов. Из диаграммы видно, что с увеличением или уменьшением ω с приближением к бифуркационным линиям l_1 или l_1' устойчивый цикл C_N сближается с седловым C_S. На границе они сливаются в особый седло-узловой цикл (один из мультипликаторов цикла принимает значение $+1$), и при переходе через бифуркационную линию исчезают. Данная седло-узловая бифуркация слияния и исчезновения предельных циклов C_N и C_S происходит на поверхности двумерного тора. Вне области синхронизации фазовая траектория покрывает поверхность тора нигде не замыкаясь, что соответствует квазипериодическим колебаниям. Проекция фазового портрета двумерного тора показана на рис. 4.16. При пересечении границ l_1 и l_1' квазипериодические колебания возникают жестким образом, амплитуда модуляции («толщина» тора на фазовом портрете) сразу же за точкой бифуркации принимает конечную достаточно большую величину. Здесь помимо притягивающего тора T в фазовом пространстве системы имеется еще неустойчивый предельный цикл C_R. Рассмотренные перестройки фазового портрета системы на границе областей A и C определяют как бифуркационный механизм синхронизации через захват. Область A языка синхронизации называют областью захвата.

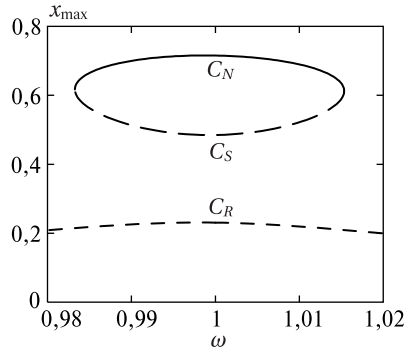


Рис. 4.15. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов C_N, C_S, C_R системы (4.30) при изменении частоты внешнего воздействия ω и фиксированных значениях $b = 0{,}02$ и $\varepsilon = 0{,}1$. По оси ординат отложены максимальные значения динамической переменной x перечисленных предельных циклов

На рис. 4.17 построена бифуркационная диаграмма для устойчивого C_N, неустойчивого C_R и седлового C_S предельных циклов системы (4.30) в зависимости от амплитуды внешнего воздействия b при фиксированных значениях $\omega = 1{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, что соответствует перемещению вдоль линии ef на плоскости параметров амплитуда — частота внешнего воздействия рис. 4.13.

При малых амплитудах внешнего воздействия b ниже линии l_1, помимо притягивающего тора, существует неустойчивый предельный цикл C_R, родившийся из состояния равновесия в начале координат. С ростом b амплитуда этого неустойчивого цикла растет. При пересечении линии l_1

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

с ним ничего не происходит, в то время как на притягивающем двумерном торе в результате седло-узловой бифуркации рождается пара предельных циклов — устойчивый C_N и седловой C_S. При дальнейшем увеличении b седловой цикл C_S сближается с неустойчивым циклом C_R. При пересечении линии l_2 происходит седло-репеллерная бифуркация, эти два цикла сливаются и исчезают. Исчезновение седлового цикла C_S приводит к разрушению резонансного тора. В фазовом пространстве остается только устойчивый предельный цикл C_N, отвечающий режиму синхронизации. Область синхронизации B, расположенную выше линии l_2 на рис. 4.13, называют областью подавления. В отличие от области захвата A при выходе из области подавления с изменением частоты внешнего воздействия квазипериодические колебания возникают мягким образом, амплитуда модуляции нарастает постепенно от нуля, что обусловлено характером бифуркаций предельного цикла C_N.

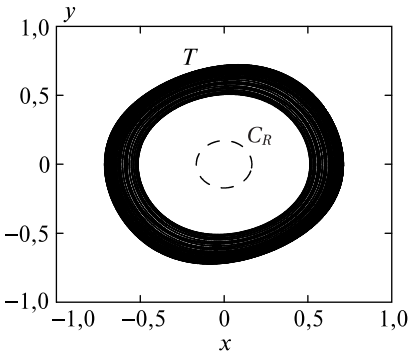


Рис. 4.16. Фазовый портрет (притягивающий двумерный тор T и неустойчивый предельный цикл C_R), системы (4.30) после седло-узловой бифуркации предельных циклов C_N и C_S при значениях параметров $\varepsilon = 0{,}1$, $b = 0{,}02$, $\omega = 1{,}017$

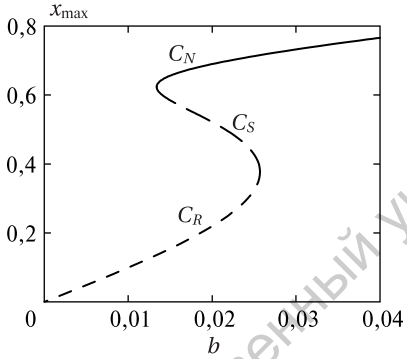


Рис. 4.17. Бифуркационная диаграмма предельных циклов системы (4.30) при изменении амплитуды внешнего воздействия b и фиксированных значениях $\omega = 1{,}01$, $\varepsilon = 0{,}1$

На рис. 4.18 представлена бифуркационная диаграмма предельного цикла C_N при изменении частоты внешнего воздействия ω и фиксированных значениях $b = 0{,}04$, $\varepsilon = 0{,}1$, что соответствует перемещению вдоль линии ab по плоскости параметров амплитуда — частота внешнего воздействия на рис. 4.13. В интервале значений, ограниченных линиями l_3 и l_3', предельный цикл является устойчивым (сплошная линия бифуркационной диаграммы на рис. 4.18). Для предельного цикла один из мультипликаторов всегда равен единице. Два оставшихся мультипликатора по модулю меньше единицы в этом интервале значений. При пересечении бифуркационных линий l_3 и l_3' два мультипликатора являются комплексно-сопряженными и по модулю становятся больше единицы. Предельный цикл теряет устойчивость и из него рождается притягивающий двумерный тор, проекция которого на плоскость (x, y) представлена на рис. 4.19. «Толщина» тора плавно увеличивается с ростом надкритичности. Такая перестройка фазового потрета называется бифуркацией Неймарка–Сакера и она определяет механизм синхронизации через подавление[1]).

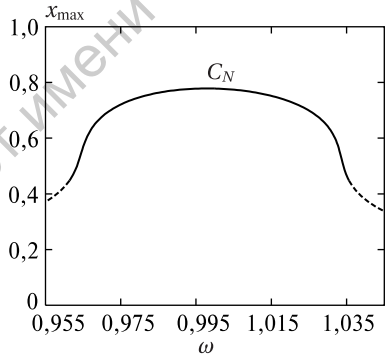


Рис. 4.18. Бифуркационная диаграмма предельного цикла системы (4.30) при изменении частоты внешнего воздействия ω и фиксированных значениях $b = 0{,}04$, $\varepsilon = 0{,}1$. Сплошная линия соответствует устойчивому состоянию, штриховая — неустойчивому состоянию предельного цикла C_N

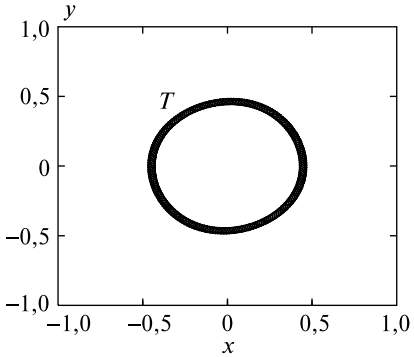


Рис. 4.19. Проекция двумерного тора при значениях параметров $\varepsilon = 0{,}1$, $b = 0{,}04$, $\omega = 1{,}0357$ (вблизи линии l_3 на рис. 4.13), родившегося в результате вторичной прямой бифуркации Андронова–Хопфа (или бифуркации Неймарка–Сакера)

В области синхронизации B генератор совершает колебания на частоте внешнего воздействия. Однако в отличие от случая слабого внешнего воздействия, здесь собственная автоколебательная мода не подстраивается к ритму внешнего воздействия, а является полностью подавлен-

[1]) Здесь следует отметить, что границы l_3 и l_3' на плоскости параметров (β, ω) представляют собой линии рождения тора, на которые опираются языки синхронизации с различными числами вращения, которые определяются отношением частоты биения к частоте внешнего воздействия. Частота биений характеризуется разностью частот автоколебательной моды и внешнего воздействия. Однако в рамках данной главы мы не рассматриваем структуру пространства управляющих параметров в широкой области значений.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ной им. И только с увеличением расстройки по частоте, при переходе границ l_3 и l_3' области синхронизации (см. рис. 4.13) возбуждается автоколебательная мода и начинает плавно нарастать. При небольшой надкритичности в спектре квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами продолжают превалировать спектральные составляющие соответствующие внешней силе. По этой причине такой режим слабо модулированных колебаний часто также относят к режиму синхронизации.

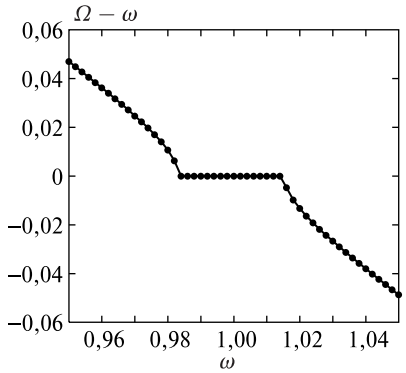


Рис. 4.20. График зависимости $\Omega - \omega$ (разности между средней частотой автоколебаний и частотой внешнего воздействия) от частоты внешнего воздействия ω системы (4.30) при $\varepsilon = 0{,}1$ и $b = 0{,}02$

На рис. 4.20 построена зависимость разности между средней частотой автоколебаний и частотой внешнего воздействия системы (4.30) при $\varepsilon = 0{,}1$ и $b = 0{,}02$. Горизонтальный участок соответствует области синхронизации, когда генератор совершает колебания на частоте внешнего воздействия ω. Ширина горизонтального участка зависит от амплитуды внешнего воздействия b. Данное значение $b = 0{,}02$ при $\varepsilon = 0{,}1$ соответствует области захвата.

4.2.2. Взаимная синхронизация. Бифуркационные механизмы эффектов синхронизации и гашения в диссипативно связанных генераторах Ван дер Поля

В данном разделе представлены результаты бифуркационного анализа динамики двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля в виде полной системы обыкновенных дифференциальных уравнений без квазигармонического приближения. Рассмотрено влияние слабой неидентичности генераторов на бифуркационные механизмы эффекта гашения колебаний и взаимной синхронизации как в области захвата, так и в области подавления.

Исследованию динамики двух связанных осцилляторов Ван дер Поля посвящено большое количество работ. К наиболее представительным можно отнести следующие статьи и монографии [21, 22, 60–73]. Эта система является носителем типичных феноменов и бифуркационных механизмов, встречающихся в разнообразных связанных автоколебательных системах с предельными циклами. Спектр наблюдаемых явлений,

особенности бифуркационных переходов между колебательными режимами во многом определяются видом связи между взаимодействующими осцилляторами. Так, в случае взаимной диссипативной связи в системе двух осцилляторов Ван дер Поля помимо явления синхронизации наблюдается эффект гашения колебаний, когда увеличение связи и расстройки по собственным частотам приводит к подавлению автоколебаний в каждом из генераторов. Исследования этих явлений и анализ бифуркационных механизмов их возникновения были представлены в работах [64–69]. Описание динамики двух связанных генераторов было проведено в квазигармоническом приближении, т. е. для систем вблизи точки бифуркации Андронова–Хопфа при переходе к укороченным уравнениям для амплитуд и фаз. В данном разделе представлены результаты бифуркационного анализа динамики двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля в виде полной системы обыкновенных дифференциальных уравнений без квазигармонического приближения, что позволяет использовать их для сопоставления теоретических и экспериментальных данных. Рассмотрено влияние слабой неидентичности генераторов на бифуркационные механизмы эффекта гашения колебаний и взаимной синхронизации как в области захвата, так и в области подавления. При проведении бифуркационного анализа динамики связанных осцилляторов также использовался пакет AUTO-2000 [48].

Бифуркационный анализ устойчивых и неустойчивых предельных циклов и состояний равновесия, определяющих механизмы эффектов синхронизации и гашения колебаний, рассмотрим на примере двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля в форме

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 - (\varepsilon_1 - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ &\ddot{x}_2 - (\varepsilon_2 - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \end{aligned} \tag{4.31}$$

где $x_{1,2}$ — динамические переменные первой и второй подсистемы; $\varepsilon_{1,2}$ — параметры, управляющие возбуждением автоколебаний в парциальных генераторах; $\omega_{1,2}$ — собственные частоты парциальных генераторов; γ — коэффициент связи.

Вводя замену переменных $\dot{x}_{1,2} = y_{1,2}$, перепишем (4.31) в виде системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = y_1, \\ &\dot{y}_1 = (\varepsilon_1 - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma(y_2 - y_1), \\ &\dot{x}_2 = y_2, \\ &\dot{y}_2 = (\varepsilon_2 - x_2^2)y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma(y_1 - y_2). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Система (4.32) имеет размерность фазового пространства, равную четырем. В отсутствие взаимодействия ($\gamma = 0$) в парциальном генераторе при отрицательных значениях управляющего параметра ε автоколебания отсутствуют. Они мягко возбуждаются при переходе ε через ноль, что соответствует суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа — из неустойчивого фокуса рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого растет пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$. При малой надкритичности наблюдаются квазигармонические автоколебания, которые при больших значениях ε превращаются в релаксационные.

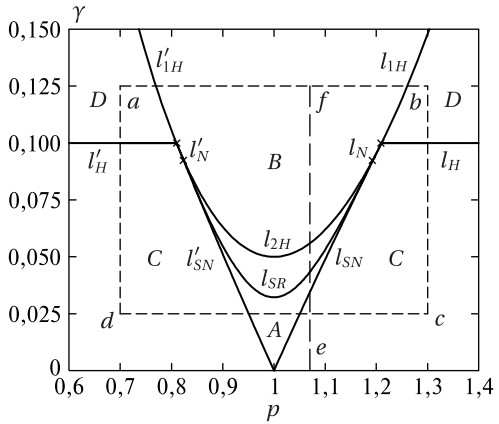


Рис. 4.21. Линии бифуркационных значений основной области синхронизации на плоскости управляющих параметров γ, p (коэффициент связи — расстройка по собственным частотам) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$

При введении связи ($\gamma > 0$) и положительных значениях управляющих параметров ε_1 и ε_2 взаимодействующие генераторы могут демонстрировать режим квазипериодических колебаний и явление синхронизации, что зависит от величины связи и расстройки между собственными частотами ω_1 и ω_2. В данном случае диссипативной связи система способна демонстрировать еще один эффект — гашение колебаний. Увеличение силы связи и величины расстройки по собственным частотам приводит к подавлению автоколебаний в каждом из парциальных генераторов. При положительных ε существуют области значений связи и расстройки, где состояние равновесия системы вновь становится устойчивым.

Рассмотрим динамику взаимодействующих осцилляторов при фиксированных и одинаковых значениях управляющих параметров $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 0{,}1$ в зависимости от величины связи γ и расстройки $p = \omega_2/\omega_1$. На рис. 4.21 построены бифуркационные линии для основной области синхронизации на плоскости параметров ($\gamma - p$). Синхронные автоколебания наблюдаются в областях A и B, которые окружают области квазипериодических колебаний C и области гашения автоколебаний D (или «амплитудной смерти»).

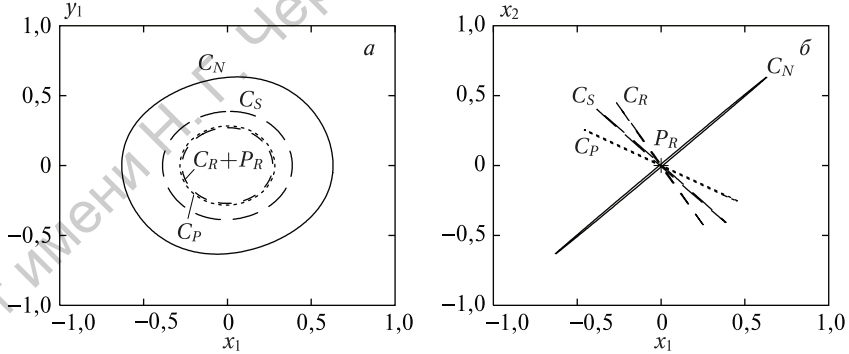


Рис. 4.22. Проекции фазового портрета на плоскость $y_1 - x_1$ (*а*) и на плоскость $x_2 - x_1$ (*б*) при значениях параметров $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}03$, $p = 1{,}001$. В фазовом пространстве существуют неустойчивая неподвижная точка P_R, седловые предельные циклы C_S, C_P, C_R и устойчивый предельный цикл C_N

При значениях параметров из области A, ограниченной бифуркационными линиями l_{SN}, l'_{SN} и l_{SR}, в фазовом пространстве системы существуют неустойчивая неподвижная точка P_R, три седловых предельных цикла C_S, C_P, C_R и устойчивый предельный цикл C_N. Характерный для области A фазовый портрет представлен на рис. 4.22, *а* и *б*. Предельные циклы соответствуют синхронным движениям с разными сдвигами фаз между временными реализациями в парциальных генераторах. Естественно, что реализуемым в эксперименте режимам синхронизации могут соответствовать только устойчивые предельные циклы. Устойчивый цикл C_N отвечает режиму синфазной синхронизации периодических автоколебаний (строго синфазные колебания наблюдаются при $p = 1$). Седловой цикл C_S соответствует неустойчивым противофазным синхронным движениям. При эволюции изображающей точки на седловых циклах C_R и C_P парциальные системы совершают синхронные колебания, сдвиг фаз между которыми лежит в пределах от 0 до π для C_R, и от π до 2π для C_P. Следует отметить, что седловые циклы C_P и C_R располагаются в фазовом пространстве симметрично друг другу относительно цикла C_S, что хорошо иллюстрирует рис. 4.22, *б*. Вычисление собственных значений неподвижной точки P_R показывает, что она неустойчива по всем направлениям (имеет две пары комплексно-сопряженных соб-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ственных значений с положительными действительными частями). Из анализа мультипликаторов циклов следует, что седловые циклы C_P и C_R имеют одномерные устойчивые многообразия и трехмерные неустойчивые многообразия, а седловой цикл C_S — двумерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразие. Неустойчивые многообразия седлового цикла C_S замыкаются на устойчивый цикл C_N, образуя притягивающий тор. Другими словами, резонансные циклы C_N и C_S лежат на двумерном торе. Проследим за бифуркациями предельных циклов и неподвижной точки при движении по плоскости параметров $(\gamma - p)$.

На рис. 4.23 представлена бифуркационная диаграмма для предельных циклов и неподвижной точки в зависимости от параметра расстройки p при фиксированном значении коэффициента связи $\gamma = 0{,}025$, что соответствует перемещению вдоль линии cd на плоскости параметров $(\gamma - p)$ на рис. 4.21. На диаграмме по оси ординат отложены максимальные значения динамической переменной $(x = x_{\max})$ соответствующих предельных циклов и неподвижной точки (для точки P_R динамические переменные равны нулю). При выходе из области синхронизации A с изменением расстройки p на линиях l_{SN} и l'_{SN} происходят седло-узловые бифуркации. Лежащие на торе устойчивый предельный цикл C_N и седловой цикл C_S сближаются друг с другом по мере приближения управляющего параметра p к бифуркационным линиям l_{SN} и l'_{SN}. На этих линиях они сливаются, превращаясь в негрубый седло-узловой цикл, и за точкой бифуркации (в области C на рис. 4.21) исчезают. Теперь в фазовом пространстве имеется притягивающий эргодический двумерный тор. Фазовые траектории покрывают его, нигде не замыкаясь. При движении изображающей точки на этом двумерном торе, в системе наблюдается режим квазипериодических колебаний с двумя несоизмеримыми частотами. Седловые циклы C_R, C_P и неподвижная точка P_R при выходе из области синхронизации A с изменением расстройки p никаких бифуркаций не претерпевают. Таким образом, в области квазипериодических колебаний C фазовый портрет системы образуют притягивающий эргодический тор, седловые предельные циклы C_R и C_P и, расположенная

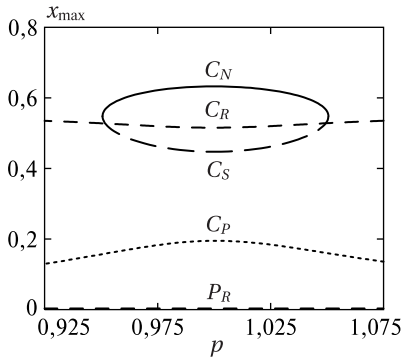


Рис. 4.23. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от параметра расстройки p при фиксированных значениях параметров $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}025$

в начале координат, неустойчивая неподвижная точка P_R. Бифуркации этих предельных множеств с ростом коэффициента связи γ зависят от величины расстройки p. Например, бифуркационные переходы, происходящие в системе при перемещении вдоль линии ef и вдоль линии cb по плоскости параметров $(\gamma - p)$ на рис. 4.21, различаются существенным образом.

На рис. 4.24 представлена бифуркационная диаграмма для предельных циклов и неподвижной точки с ростом коэффициента связи γ при фиксированных значениях $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$, $p = 1{,}07$, что соответствует перемещению вдоль линии ef на рис. 4.21. При слабой связи в фазовом пространстве имеется притягивающий тор, седловые циклы C_P и C_R, неустойчивая неподвижная точка P_R. С увеличением γ при пересечении линии l_{SN} (см. рис. 4.21) в результате седло-узловой бифуркации на торе рождается устойчивый предельный цикл C_N и седловой цикл C_S. На бифуркационной диаграмме (рис. 4.24) это соответствует точке b_{SN}, из которой выходят две ветви. Сплошная линия образована значениями динамической переменной на устойчивом цикле C_N, а линия из длинных штрихов — значениями на седловом цикле C_S. При дальнейшем увеличении связи на линии l_{SR} плоскости параметров $(\gamma - p)$ (рис. 4.21) происходит субкритическая бифуркация вил. Седловые циклы C_P и C_R приближаются к седловому циклу C_S и на линии l_{SR} влипают в него. Выше точки бифуркации остается седловой предельный цикл C_S уже с другим характером устойчивости. Анализ мультипликаторов циклов показывает, что до точки бифуркации седловые циклы C_P и C_R имеют одномерные устойчивые многообразия и трехмерные неустойчивые многообразия. Седловой цикл C_S имеет двумерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия, которые замыкаются на устойчивый предельный цикл, образуя двумерный тор. За точкой субкритической бифуркации вил седловой цикл C_S превращается в седловой предельный цикл с одномерным устойчивым и трехмерным неустойчивым многообразиями, что приводит к разрушению двумерного тора, на котором лежали резонансные циклы. На бифуркационной диаграмме рис. 4.24 точка бифуркации вил обозначена символами b_p.

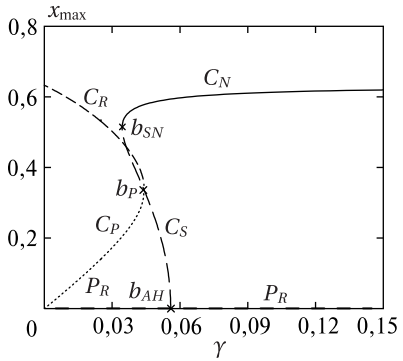


Рис. 4.24. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи γ при фиксированных значениях параметров $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$, $p = 1{,}07$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

При значениях коэффициента связи из области, ограниченной линиями l_{SR} и l_{2H} (рис. 4.21), фазовый портрет системы образуют неустойчивая неподвижная точка P_R, седловой цикл C_S и устойчивый цикл C_N. Двумерного тора выше линии l_{SR} уже нет, он был разрушен в результате субкритической бифуркации вил седлового цикла C_S. При дальнейшем увеличении γ радиус седлового предельного цикла C_S уменьшается, и на линии l_{2H} он стягивается в неустойчивую неподвижную точку P_R, происходит бифуркация Андронова–Хопфа. До бифуркации неподвижная точка имела две пары комплексно сопряженных собственных значений с положительными действительными частями. После бифуркации она имеет пару с положительными действительными частями и пару с отрицательными. При сильной связи в области синхронизации B в фазовом пространстве системы имеется устойчивый предельный цикл C_N и неустойчивый фокус P_R. В случае сильной связи увеличение расстройки p приводит к эффекту гашения автоколебаний (или так называемой амплитудной смерти). По мере увеличения расстройки по собственным частотам ω_1 и ω_2 амплитуда автоколебаний в каждом из генераторов плавно уменьшается до нуля.

На рис. 4.25 представлена бифуркационная диаграмма для предельного цикла и неподвижной точки в зависимости от расстройки p при фиксированных значениях $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$ и $\gamma = 0{,}125$, что соответствует перемещению вдоль линии ab по плоскости параметров $(\gamma - p)$ на рис. 4.21. При совпадении собственных частот парциальных генераторов ($p = 1$) радиус устойчивого предельного цикла C_N, отвечающий режиму синхронизации, имеет максимальное значение. С увеличением или уменьшением параметра расстройки p радиус предельного цикла плавно уменьшается, и на бифуркационных линиях l_{1H} и l'_{1H} (рис. 4.21) цикл стягивается в точку равновесия в начале координат. При переходе из области B в область D неподвижная точка P_S превращается из неустойчивого в устойчивый фокус. Здесь имеет место суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. В области D в фазовом пространстве системы имеется только устойчивая неподвижная точка P_S. Автоколебания в системе отсутствуют, взаимодействие привело к гашению колебаний, хотя

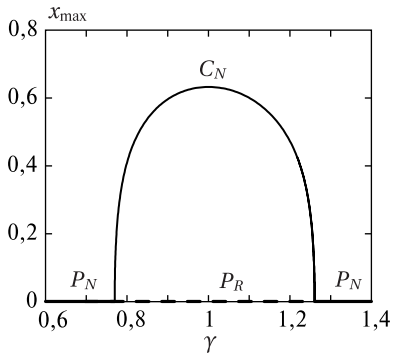


Рис. 4.25. Бифуркационная диаграмма для предельного цикла и точки равновесия в зависимости от расстройки p при фиксированных значениях $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$ и $\gamma = 0{,}125$

каждый из парциальных генераторов при выключенной связи находится в возбужденном состоянии.

При переходе из области D в область B (рис. 4.21), например, при фиксированной связи γ с изменением расстроки p плавно возбуждаются периодические синхронные автоколебания. Однако при переходе из области D в область C, например, с уменьшением величины связи при фиксированной расстройке p режима взаимной синхронизации генераторов не возникает. В системе мягко возбуждаются квазипериодические автоколебания. Границей перехода от режима гашения к режиму квазипериодических колебаний является бифуркационная линия l_H. В области D перед линией l_H неподвижная точка P_R имеет две пары комплексно-сопряженных собственных значений с отрицательными действительными частями, которые на линии l_H обращаются в ноль (две пары чисто мнимых собственных значений), а ниже линии становятся положительными. В результате, в окрестности неподвижной точки P_R мягким образом рождаются притягивающий тор T и седловые циклы C_P и C_R. С уменьшением связи эти предельные множества (неподвижная точка, два предельных цикла и притягивающий тор) расходятся друг от друга. На рис. 4.26 представлена проекция характерного фазового портрета при значениях параметров $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}075$, $p = 1{,}3$, что соответствует точке на линии bc плоскости параметров $(\gamma - p)$ на рис. 4.21.

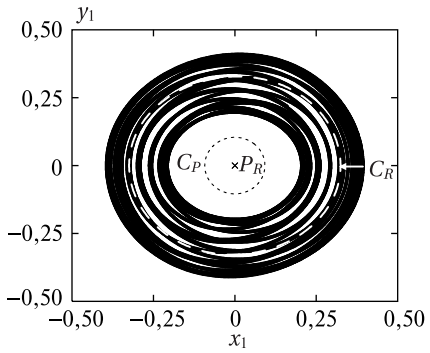


Рис. 4.26. Проекция фазового портрета на плоскость $(y_1 - x_1)$ при значениях параметров $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}075$, $p = 1{,}3$. T — притягивающий тор, C_R, C_P — седловые предельные циклы, P_R — неустойчивое состояние равновесия

Описанный бифуркационный переход рождения из неподвижной точки притягивающего тора и двух седловых циклов относится к числу вырожденных. Обусловлено это идентичностью парциальных генераторов: полагали, что параметры возбуждения равны ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$). Идентичность по параметрам, управляющим бифуркацией рождения цикла в несвязанных генераторах, приводит не только к этой вырожденной ситуации, но и к бифуркации вил, которая происходит на линии l_{SR} основного языка синхронизации (рис. 4.21), и в которой участвуют седловые циклы C_S, C_P, C_R (см. бифуркационную диаграмму на рис. 4.24). Введение неидентичности генераторов по параметру ε устраняет эти вырождения вполне определенным образом и

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

приводит к типичным бифуркационным переходам. Рассмотрим динамику слабо неидентичных связанных генераторов более подробно.

На рис. 4.27 на плоскости параметров $(\gamma - p)$ построены линии бифуркационных значений основной области синхронизации для слабо неидентичных генераторов ($\varepsilon_1 = 0{,}103$, $\varepsilon_2 = 0{,}1$). Здесь также как в идентичном случае, область синхронизации через захват обозначена буквой A, область синхронизации через подавление — B, область квазипериодических колебаний — C, область гашения колебаний — D. Видно, что слабая неидентичность приводит к существенному изменению структуры пространства параметров. На границе перехода между областями C и D появился канал, в котором существует устойчивый предельный цикл, отвечающий режиму синхронизации, в широком интервале расстроек по собственным частотам. Произошло частичное изменение характера бифуркационных переходов. Проанализируем эти изменения более детально.

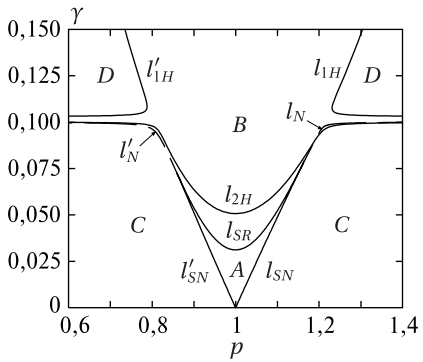


Рис. 4.27. Линии бифуркационных значений основной области синхронизации на плоскости управляющих параметров $(\gamma - p)$ (коэффициент связи — расстройка по собственным частотам) при $\varepsilon_1 = 0{,}103$, $\varepsilon_2 = 0{,}1$

В области A фазовый портрет системы, по-прежнему, как и в идентичном случае (рис. 4.22), образуют неустойчивая неподвижная точка P_R, седловые циклы C_P, C_R и резонансные циклы на торе — седловой C_S и устойчивый C_N. При выходе из этой области с изменением расстройки p на линиях l_{SN} и l'_{SN} происходят седло-узловые бифуркации. Устойчивый цикл C_N и седловой C_S сливаются и исчезают. Изображающая точка эволюционирует на притягивающем эргодическом торе T, что соответствует квазипериодическому режиму автоколебаний. Здесь в фазовых портретах и бифуркационных переходах никаких изменений не произошло.

На рис. 4.28 представлена бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия с ростом коэффициента связи γ при малой фиксированной расстройке по частотам ($p = 1{,}07$). При слабой связи, ниже линии l_{SN} имеется неустойчивая неподвижная точка P_R, два седловых цикла C_P, C_R и притягивающий двумерный тор. С увеличением γ при пересечении линии l_{SN} в результате седло-узловой бифуркации на торе рождается пара циклов C_N и C_S. С дальнейшим ростом связи седловой цикл C_S с двумерным неустойчивым и двумерным устойчивым

многообразиями сближается с другим седловым циклом C_R, у которого одномерное устойчивое и трехмерное неустойчивое многообразия. На линии l_{SR} они сливаются и исчезают за бифуркационной точкой, что приводит к разрушению тора, на котором лежали резонансные циклы — устойчивый C_N и седловой C_S. Далее по параметру происходит еще одна бифуркация на линии l_{2H}. Из рис. 4.28 видно, что с увеличением связи седловой цикл C_P вначале увеличивается в размере. Это происходит примерно до значения $\gamma \approx 0{,}045$, при котором в идентичном случае наблюдалась бифуркация вил. Теперь, из-за неидентичности подсистем эта бифуркация устранена, и далее по параметру седловой цикл плавно уменьшается в размере. На линии l_{2H} он стягивается в неподвижную точку, происходит бифуркация Андронова–Хопфа. Состояние равновесия P_R из неустойчивого фокуса с двумя парами комплексно-сопряженных собственных значений с положительными действительными частями превращается в неустойчивый фокус, у которого одна пара комплексно-сопряженных собственных значений с отрицательными действительными частями и одна с положительными. В области синхронизации B в фазовом пространстве имеется неустойчивый фокус P_R и устойчивый предельный цикл C_N. Таким образом, небольшая асимметрия системы привела к устранению бифуркации вил. Разрушение тора при переходе из области синхронизации через захват в область синхронизации через подавление происходит теперь в результате седло-седло бифуркации двух циклов C_S и C_R.

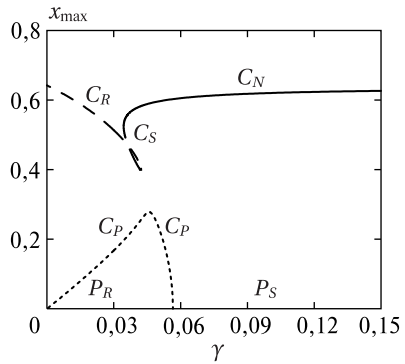


Рис. 4.28. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи γ в случае расстройки генераторов по параметру возбуждения ($\varepsilon_1 = 0{,}103$, $\varepsilon_2 = 0{,}1$) и при фиксированном значении $p = 1{,}07$

На рис. 4.29 представлена еще одна бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи, но при большем значении параметра расстройки $p = 1{,}25$. Она наглядно описывает бифуркационный механизм эффекта гашения колебаний при переходе из области квазипериодических колебаний C в область гашения колебаний (или амплитудной смерти) D. При слабой связи в фазовом пространстве существует двумерный притягивающий тор (единственный аттрактор системы, отвечающий режиму квазипери-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

одических колебаний), седловые предельные циклы C_P, C_R и неустойчивое состояние равновесия P_R в начале координат. С ростом γ радиус седлового цикла C_P вначале нарастает, затем уменьшается и стягивается в неподвижную точку P_R. На бифуркационной диаграмме в точке b_{2H} происходит бифуркация Андронова–Хопфа. На плоскости параметров ($\gamma - p$) рис. 4.27 это соответствует бифуркационной линии l_{2H}. После этой бифуркации собственные значения неподвижной точки имеют пару комплексно-сопряженных значений с положительными и пару с отрицательными действительными частями. В тоже время с ростом γ размер седлового цикла C_R уменьшается, и после точки b_N на бифуркационной диаграмме рис. 4.29 превращается из седлового в устойчивый предельный цикл. Это происходит в результате бифуркации Неймарка–Сакера. Притягивающий двумерный тор стягивается в седловой предельный цикл C_R после чего он становится устойчивым. На рис. 4.27 это соответствует бифуркационной линии l_N. При ее пересечении режим квазипериодических колебаний сменяется режимом периодических автоколебаний. При дальнейшем увеличении связи радиус устойчивого предельного цикла уменьшается до нуля. Он стягивается в неустойчивый фокус P_R, происходит бифуркация Андронова–Хопфа (точка b_{1H} на рис. 4.29), после которой состояние равновесия становится устойчивым. В системе наблюдается полное гашение автоколебаний. Таким образом, при обратном переходе из области D в область C на плоскости параметров ($\gamma - p$) (рис. 4.27) будет наблюдаться следующая последовательность бифуркаций. Устойчивый фокус P_R на линии l_{1H} превращается в неустойчивый, из которого в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого растет пропорционально корню из надкритичности. Далее на линии l_N этот цикл претерпевает бифуркацию Неймарка–Сакера. Предельный цикл становится неустойчивым (пара комплексно-сопряженных мультипликаторов выходит за единичную окружность) и из него рождается притягивающий двумерный тор. Далее

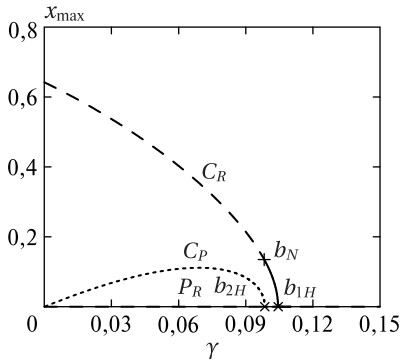


Рис. 4.29. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи γ в случае расстройки генераторов по параметру возбуждения ($\varepsilon_1 = 0{,}103$, $\varepsilon_2 = 0{,}1$) и при фиксированном значении $p = 1{,}25$

по параметрам на линии l_{2H} происходит еще одна бифуркация Андронова–Хопфа, точка P_R становится дважды неустойчивой и в ее окрестности рождается седловой предельный цикл C_P. Приходим к характерному для области C фазовому портрету, состоящему из притягивающего тора, двух седловых предельных циклов и неустойчивого состояния равновесия.

В данном разделе главы рассмотрено явление синхронизации периодических автоколебаний внешней гармонической силой на примере неавтономного генератора Ван дер Поля. Представлено описание основной области синхронизации на плоскости управляющих параметров амплитуда — частота внешнего воздействия, используя фазовое уравнение, укороченные уравнения для амплитуды и фазы и полное неавтономное уравнение Ван дер Поля.

Для случая малого параметра возбуждения автономного генератора, малой амплитуды внешней силы и частоты внешней силы близкой к собственной частоте генератора, систему можно рассматривать как слабо возмущенный гармонический осциллятор. Для него методом усреднения Ван дер Поля получены укороченные уравнения для амплитуды и фазы.

Фазовое уравнение позволяет описать область захвата. В одномерном фазовом пространстве динамической системы синхронным движениям отвечают устойчивая и неусточивая неподвижные точки. При выходе из области синхронизации происходит их слияние и исчезновение, возникает дрейф фазы.

Фазовое описание допустимо только при очень слабом внешнем воздействии, когда возмущением амплитуды автономного генератора можно пренебречь. Учет амплитудного уравнения приводит к более сложным бифуркационным явлениям на плоскости управляющих параметров. Язык синхронизации содержит область захвата и область подавления. Синхронным движениям отвечают неподвижные точки на фазовой плоскости, квазипериодическим колебаниям — предельный цикл. При выходе из области захвата с увеличением расстройки по частоте происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла при исчезновении сложной особой точки седло-узел. При переходе из области захвата в область подавления с увеличением амплитуды внешнего воздействия происходит седло-репеллерная бифуркация: седло и неустойчивый узел сливаются и исчезают. Выход из области захвата с увеличением расстройки по частоте сопровождается суперкритической бифуркацией Андронова–Хопфа: происходит рождение устойчивого предельного цикла из неустойчивого фокуса.

Анализ полного неавтономного уравнения Ван дер Поля при небольших значениях параметра возбуждения приводит к аналогичным результатам в устройстве основной области синхронизации на плосокости управ-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ляющих параметров. При этом следует учитывать, что размерность фазового пространства неавтономного осциллятора равна трем. Синхронным движениям отвечают предельные циклы. Квазипериодическим колебаниям — притягивающий двумерный эргодический тор. При выходе из области захвата квазипериодические колебания возникают жестким образом в результате седло-узловой бифуркации предельных циклов на резонансном торе. При переходе из области захвата в область подавления с увеличением амплитуды внешнего воздействия происходит седло-репеллерная бифуркация предельных циклов, что приводит к разрушению резонансного тора. При выходе из области захвата с увеличением расстройки по частоте квазипериодические колебания возникают мягким образом: предельный цикл теряет устойчивость и из него рождается притягивающий двумерный тор.

В данном разделе также представлены результаты анализа динамики двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля. Описаны бифуркационные переходы к режимам синхронизации и бифуркационный механизм эффекта гашения колебаний в полной системе обыкновенных дифференциальных уравнений без квазигармонического приближения как в случае идентичных генераторов, так и с расстройкой по параметру возбуждения. Сравнение полученных результатов с результатами работ [64, 69] показывает, что бифуркационный анализ динамики системы укороченных уравнений для амплитуд и фаз и полной системы уравнений дает практически одинаковые результаты, когда параметры возбуждения осцилляторов принимают конечные значения, соответствующие не только квазигармоническим, но и ангармоническим режимам.

4.3. СИНХРОНИЗАЦИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

После детального рассмотрения фундаментальной задачи о синхронизации периодических автоколебаний естественно перейти к следующей по уровню сложности задаче: исследованию закономерностей синхронизации квазипериодических колебаний. Будем рассматривать наиболее простой случай двухчастотных колебаний, образом которых в фазовом пространстве является двумерный тор. Речь пойдет о синхронизации устойчивых фазовых траекторий динамической системы на двумерном торе. Как известно, на двумерном торе возможны две структуры траекторий. Первая — это резонансная структура, отвечающая «языкам Арнольда» с рациональным числом вращения $\Theta = p : q$, где p, q — целые числа. Притягивающее предельное множество фазовых траекторий в случае резонансов на двумерном торе есть ни что иное как

устойчивый предельный цикл, спектр мощности которого формально содержит лишь одну независимую частоту ω_0 и ее гармоники $n\omega_0$. Вторая структура отвечает так называемым эргодическим колебаниям с двумя рационально несвязанными частотами ω_0 и ω_1. Число вращения Θ в этом случае выражается иррациональным числом. Спектр мощности колебаний в эргодическом случае включает две рационально несвязанные частоты и набор комбинационных частот $n\omega_0 \pm m\omega_1$, n и m — целые числа $\pm 1, \pm 2, \ldots$. Сечения Пуанкаре резонансного и эргодического двумерного торов существенно отличаются. В первом случае это конечное число неподвижных точек, зависящее от величины числа вращения Θ, во втором — замкнутая инвариантная кривая.

Анализ проблемы синхронизации квазипериодических колебаний начнем с резонансного случая, а затем перейдем к случаю эргодических колебаний.

4.3.1. Резонансный предельный цикл на двумерном торе

Рассмотрим синхронизацию двух связанных генераторов периодических колебаний. В качестве парциальной автоколебательной системы выберем модель генератора Ван дер Поля в режиме предельного цикла как образа устойчивых почти гармонических колебаний:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (\varepsilon - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Здесь ε — параметр возбуждения, $\omega_1^2 = (2\pi f_1)^2$, $f_1 = 1/T_0$, где f_1 — частота, T_0 — период колебаний. Как хорошо известно, автоколебания в системе (4.33) возникают вследствие бифуркации Андронова–Хопфа в точке $\varepsilon^* = 0$, их амплитуда при $\varepsilon > \varepsilon^*$ растет пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$ (см. гл. 2).

В качестве второй системы рассмотрим тот же генератор Ван дер Поля (4.33), введя расстройку по частоте ($\omega_2 \neq \omega_1$). Будем исследовать режим автоколебаний в случае симметричной связи между генераторами[1]):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (\varepsilon - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (\varepsilon - x_2^2)y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{4.34}$$

[1]) Связь генераторов через переменные x_1 и x_2 (4.34) соответствует случаю инерционной связи генераторов через емкость в отличии от диссипативной связи в (4.32).

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Здесь параметр γ характеризует степень внутренней связи между генераторами, параметр ε будет одинаковым для обоих генераторов, а частоты ω_1 и ω_2 выберем различными, но достаточно близкими друг к другу.

Рассмотрим режимы автоколебаний в системе (4.34) при значениях параметров $\varepsilon = 0{,}1$, $\omega_1 = 1$, $\gamma = 0{,}02$. Параметр ω_2 будем изменять в пределах $0{,}98 < \omega_2 < 1{,}02$, исследуя влияние расстройки парциальных частот f_1 и f_2 на динамику системы.

На рис. 4.30 представлен результат расчета области синхронизации, которая соответствует эффекту захвата частоты на основном тоне. Первый генератор ($\omega_1 = 1$) захватывает частоту второго и в результате в области синхронизации (область I на рис. 4.30) частоты взаимодействующих генераторов равны: $f_1 = f_2$. При этом частота $f_2 = f_1$ в области I не совпадает с парциальной частотой второго генератора в отсутствии связи ($\gamma = 0$). Рисунок 4.30 иллюстрирует эффект взаимной синхронизации двух генераторов путем захвата частоты. Область синхронизации I на плоскости параметров связь (γ) — расстройка (ω_2) представляет собой «язык» Арнольда с числом вращения Пуанкаре $\Theta = 1 : 1$, что отвечает синхронизации на основном тоне.

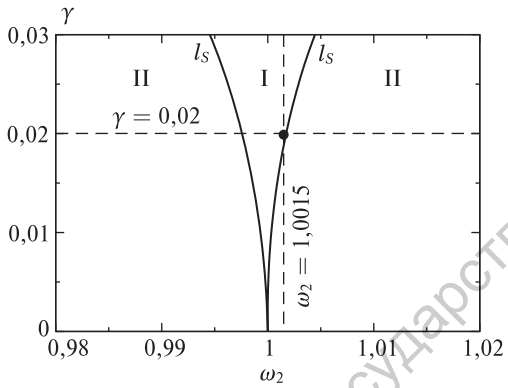


Рис. 4.30. Область взаимной синхронизации генераторов (4.34) при $\varepsilon = 0{,}1$, $\omega_1 = 1$: I — область существования резонансного предельного цикла с числом вращения $\Theta = 1 : 1$; II — область квазипериодических колебаний

Вне области синхронизации (на рис. 4.30 это области II) наблюдаются режимы двухчастотных колебаний или биений, при которых частоты парциальных генераторов не совпадают ($f_1 \neq f_2$). В области II образом автоколебательного режима является нерезонансный (в общем случае) эргодический двумерный тор, отвечающий режиму двухчастотных квазипериодических колебаний.

При входе в область I из области II (с пересечением бифуркационных линий l_s (рис. 4.30)) на двумерном торе рождается структура в виде устойчивого и седлового предельных циклов, лежащих на поверхности тора. Устойчивый цикл отвечает режиму взаимной синхронизации двух генераторов, характеризуя устойчивое периодическое движение с частотой $f_1 = f_2$ в режиме захвата частоты.

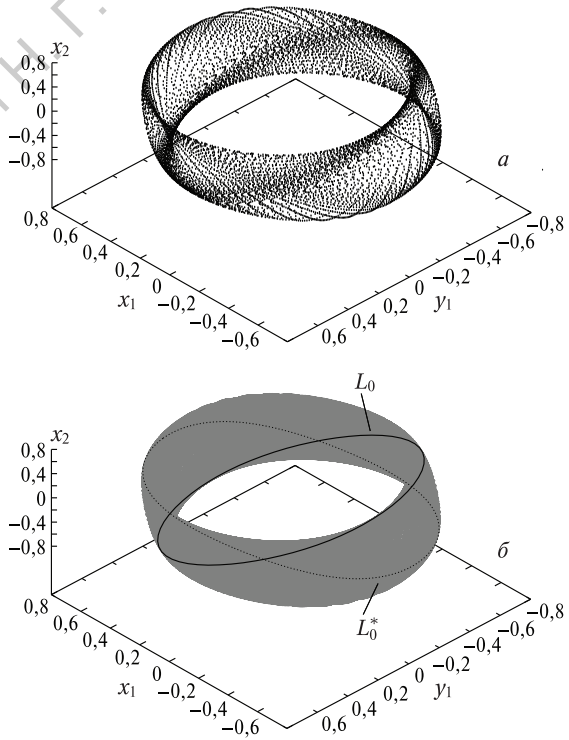


Рис. 4.31. Проекции фазовых траекторий на плоскость переменных (x_1, y_1, x_2) системы (4.34) для значений параметров $\varepsilon = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}02$, $\omega_1 = 1$: *а* — для области II ($\omega_2 = 1{,}003$), *б* — для области I ($\omega_2 = 1{,}0015$). Проекция двумерного тора вне резонанса изображена серым, устойчивый L_0 и седловой L_0^* циклы на торе в области резонанса изображены жирными линиями

Вышесказанное иллюстрирует рис. 4.31, где представлены проекции фазовых портретов двумерного тора T^2 (рис. 4.31, *а*), и устойчивого (L_0) и седлового (L_0^*) резонансных предельных циклов на нем (рис. 4.31, *б*). Отметим весьма важное обстоятельство: тор T^2 существует как в области II

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

так и в области I! В физическом эксперименте в области I мы видим только устойчивый предельный цикл L_0. Однако этот цикл лежит на поверхности двумерного тора, и мы это покажем. С этой целью рассмотрим сечение Пуанкаре плоскостью $x_1 = 0$ как для режима рис. 4.31, *а*, так и рис. 4.31, *б*. Результаты представлены на рис. 4.32. Рисунок 4.32, *а* иллюстрирует замкнутую инвариантную кривую l как образ T^2 в сечении Пуанкаре. Рисунок 4.32, *б* необходимо пояснить более детально. В области синхронизации I (рис. 4.30) на торе существуют два предельных цикла: устойчивый и седловой (рис. 4.31, *б*). В сечении Пуанкаре (рис. 4.32, *б*) им отвечают устойчивая неподвижная точка P и седловая Q. Неустойчивые сепаратрисы седла Q замыкаются на устойчивый узел P, образуя замкнутую инвариантную кривую. Эта кривая и есть образ резонансного двумерного тора в области синхронизации. Если двигаться в плоскости параметров области I в направлении к бифуркационным линиям l_s (рис. 4.30), то имеет место следующая картина: седло Q и узел P идут на сближение, на бифуркационных линиях l_s они сливаются и с входом в область II они исчезают в результате седло-узловой бифуркации. Таким образом режиму синхронизации отвечает область существования устойчивого и седлового предельных циклов на двумерном торе, а разрушению режима синхронизации — седло-узловая бифуркация этих циклов.

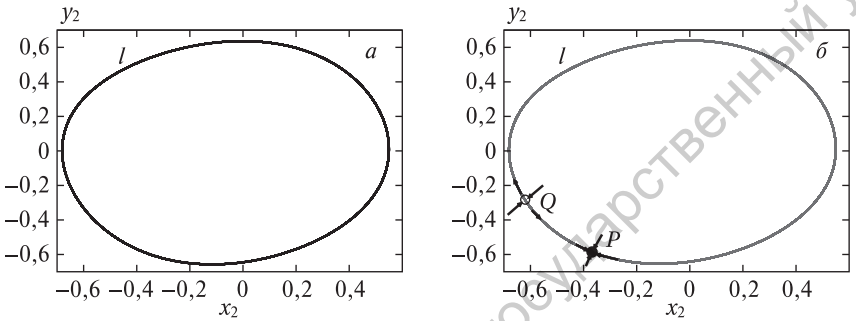


Рис. 4.32. Сечения эргодического тора (*а*) и резонансных циклов на нем (*б*) для случаев (*а*) и (*б*) рис. 4.31, соответственно

Изложеннные результаты получены для системы двух инерционно связанных генераторов (4.34). Однако эффект синхронизации здесь полностью идентичен рассмотреному в п. 4.2.2 для случая диссипативной связи (4.32). Отметим, что это соответствие является качественным и имеет место лишь при условии малости значений расстройки ии коэффициента связи γ.

4.3.2. Воздействие внешней периодической силы на резонансный предельный цикл в системе связанных генераторов

Нашей задачей будет изучение особенностей синхронизации устойчивого резонансного предельного цикла на торе, показанного на рис. 4.31, *б*, внешним гармоническим сигналом. С этой целью исследуем реакцию системы (4.34) на внешний периодический сигнал, введя источник гармонического воздействия $b\sin[(2\pi f_e)t]$ во второе уравнение системы (4.34) [74]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (\varepsilon - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma(x_2 - x_1) + b\sin[(2\pi f_e)t], \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (\varepsilon - x_2^2)y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Выберем режим колебаний автономной системы (4.35) ($b = 0$), соответствующий области резонанса I (рис. 4.30), задав значения параметров $\varepsilon = 0{,}1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1{,}0015$, $\gamma = 0{,}02$. Этому режиму отвечает указанная точка на плоскости параметров рис. 4.30. Автономная система будет реализовывать режим устойчивых периодических автоколебаний. Ему соответствует устойчивый предельный цикл L_0. Отметим, что с точки зрения экспериментатора, наблюдающего режим периодических колебаний, это обычное устойчивое периодическое движение с частотой f_1 и спектром, включающим нечетные гармоники $f_n = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) в силу характера нелинейности. Тот факт, что предельный цикл L_0 лежит на поверхности двумерного тора никак не сказывается в физическом эксперименте. Однако, более детальные исследования показали, что этот факт является принципиальным и приводит к весьма существенным отличиям при анализе эффекта внешней синхронизации, если речь идет о синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе.

На рис. 4.33, *а* и *б* представлены зависимости частот генераторов f_1 и f_2 от частоты внешнего сигнала f_e. Амплитуда сигнала воздействия была выбрана $b = 0{,}025$, частоты f_1 и f_2 нормировались на частоту внешнего сигнала f_e. Рисунок 4.33,в иллюстрирует зависимость числа вращения $\Theta = f_1 : f_2$ от частоты внешнего воздействия. Как видно из графиков, на рис. 4.33 целесообразно выделить области A, B, C и D, в которых динамика системы качественно различна. Используем для анализа результаты расчета спектра ляпуновских характеристических показателей, представленные на рис. 4.34.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

В области A частота внешнего сигнала достаточно удалена от частоты предельного цикла $f_1 = f_2 \approx 0{,}158$. В системе реализуются квазипериодические колебания с частотами f_e и $f_1 = f_2$. Им отвечает существование в фазовом пространстве двумерного тора, что подтверждается наличием двух нулевых показателей Ляпунова в спектре ЛХП (рис. 4.34). Условие резонанса $f_1 = f_2$ в области A еще не нарушается.

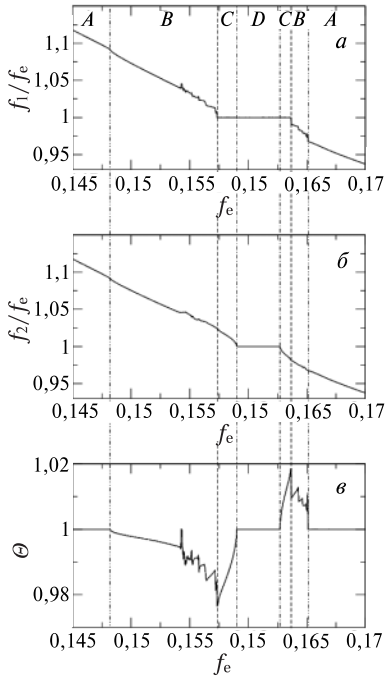


Рис. 4.33. Зависимости отношений частот генераторов f_1 (*а*) и f_2 (*б*) к частоте внешнего воздействия f_e и числа вращения $\Theta = f_1 : f_2$ (*в*) от частоты внешнего воздействия f_e при $b = 0{,}025$

В области B режим взаимной синхронизации (см. рис. 4.30 и 4.31) разрушается. Частоты f_1 и f_2 становятся различными, о чем свидетельствует график зависимости числа вращения Θ (рис. 4.33, *в*). Рождается режим квазипериодических колебаний с тремя независимыми частотами f_1, f_2 и f_e. Ему отвечает аттрактор в виде трехмерного тора и наличие трех нулевых показателей в спектре ЛХП (рис. 4.34). Динамика системы в области B достаточно сложна. На трехмерном торе с изменением частоты f_e могут возникать частичные резонансы в виде T^2 и даже хаотические режимы.

В области C реализуется первое из явлений, представляющих особый интерес: имеет место захват базовой частоты первого генератора внешним сигналом, при котором $f_e = f_1$, но $f_1 \neq f_2$. На трехмерном торе возникает резонансная структура в виде двумерного тора, что доказывается наличием двух нулевых показателей в спектре ЛХП (рис. 4.34). Расчеты показали, что сечение Пуанкаре в этом режиме имеет вид замкнутой инвариантной кривой.

Наконец, в области D реализуется режим полной синхронизации: внешний сигнал захватывает обе частоты взаимодействующих генераторов, и выполняется условие $f_e = f_1 = f_2$. В области D в спектре ЛХП лишь один показатель является нулевым, на фазовом портрете можно видеть аттрактор в виде предельного цикла.

Изложенные выше результаты свидетельствуют о весьма важном отличии эффекта синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе от классического случая. Это отличие заключается в том, что при уменьшении расстройки частот $f_e - f_1$ внешнее воздействие вначале разрушает режим исходной взаимной синхронизации, а затем осуществляется последовательный захват вначале одной базовой частоты, потом второй. В итоге реализуется эффект полной синхронизации, которому отвечает эффект захвата числа вращения (область D на рис. 4.33, *в*).

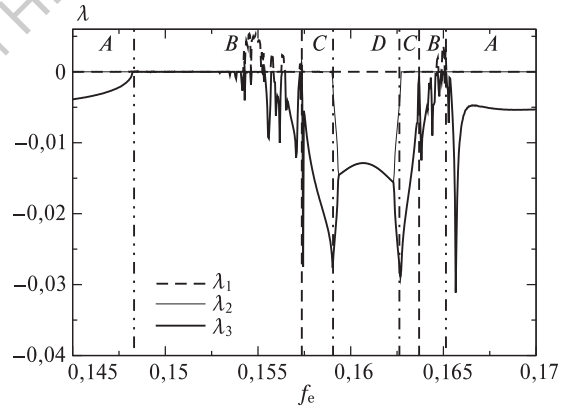


Рис. 4.34. Зависимости трех старших показателей Ляпунова от частоты внешнего воздействия f_e при $b = 0{,}025$

4.3.3. Основные бифуркации квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла

С целью более детального понимания механизмов перестройки режимов колебаний в системе (4.35) при вариации частоты внешнего воздействия была построена бифуркационная диаграмма системы на плоскости параметров «амплитуда–частота» внешней силы (рис. 4.35). Графики, представленные на рис. 4.33 и 4.34, соответствуют движению по прямой $b = 0{,}025$ диаграммы рис. 4.35. Переходам из областей A в области B отвечают бифуркационные линии l_{T^3}, из областей B в области C — линии l_p, из областей C в область D — линии l_f. Как видно из диаграммы, переходы в область D (полная синхронизация резонансного цикла) могут осуществляться из областей A или B через бифуркационные линии l_f. Рассмотрим более детально бифуркационные явления, которым отвечают вышеуказанные бифуркационные линии l_{T^3}, l_p и l_f.

Как показали исследования, основным колебательным режимом системы (4.35) является режим трехчастотных квазипериодических коле-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

баний с частотами $f_e \neq f_1 \neq f_2$. Соответствующим аттрактором является трехмерный тор T^3, область существования которого на диаграмме рис. 4.35 обозначена символом B. Все основные бифуркации в системе (4.35), ведущие к синхронизации исходного резонансного цикла, связаны с бифуркациями именно режима T^3.

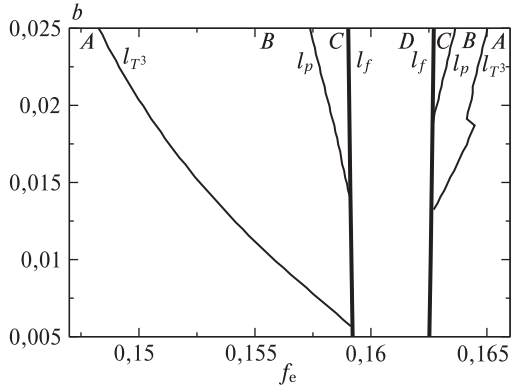


Рис. 4.35. Бифуркационная диаграмма системы (4.35) на плоскости параметров (f_e, b), построена для фиксированных значений $\varepsilon = 0{,}1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1{,}0015$, $\gamma = 0{,}02$

Рассмотрим область B, где существует устойчивый трехмерный тор T^3. С целью более наглядного представления бифуркаций трехмерного тора будем использовать двойное сечение Пуанкаре. Для получения двойного сечения Пуанкаре сначала производился расчет обычного сечения Пуанкаре, а затем в полученную последовательность точек вводилась дополнительная секущая плоскость. Далее, так как вероятность того, что полученные точки окажутся близки к дополнительной секущей плоскости, мала, производилась линейная аппроксимация решений в ее окрестности. Обычное сечение Пуанкаре для T^3 даст нам двумерный тор T_{T^3}. Двойное сечение Пуанкаре будет представлять собой инвариантную замкнутую кривую L_{T^3}. Неподвижная точка на этой инвариантной кривой будет являться образом резонансного двумерного тора, лежащего на T^3.

Исследуем переход из области B в область A диаграммы рис. 4.35 через бифуркационную линию l_{T^3}. На рис. 4.36 представлены результаты соответствующих расчетов с использованием двойного сечения Пуанкаре. Образом T^3 здесь является кривая L_{T^3}, отвечающая режиму T^3 в области B. При достижении бифуркационной точки (точки пересечения линии l_{T^3} из области B в направлении области A) на кривой L_{T^3} рождается неподвижная точка типа «седло–узел». Смещение по параметрам

в область A приводит к расщеплению седло-узла на устойчивый узел и седло. В представлении двойного сечения Пуанкаре реализуется классическая седло-узловая бифуркация.

В полном фазовом пространстве системы (4.35) картина, представленная на рис. 4.36, отвечает рождению (исчезновению) пары двумерных торов на трехмерном торе T^3. Один из этих торов устойчивый (T_n^2), другой — седловой (T_{ns}^2).

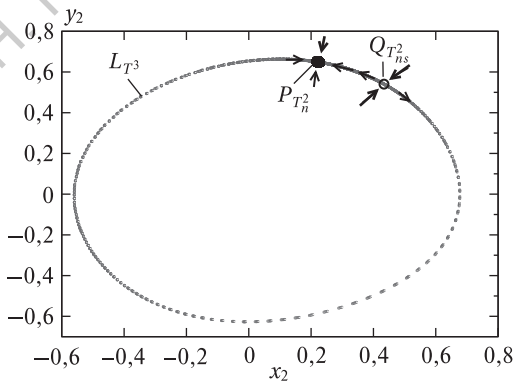


Рис. 4.36. Седло-узловая бифуркация в двойном сечении Пуанкаре, соответствующая пересечению линии l_{T^3} из области B в область A. L_{T^3} — инвариантная кривая, $P_{T_n^2}$ — устойчивый узел, $Q_{T_{ns}^2}$ — седло. Расчеты представлены для значений параметров: $f_e = 1{,}482$, $b = 0{,}025$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1{,}0015$, $\gamma = 0{,}02$

Исследуем бифуркационный переход из области B в область C, которому отвечает пересечение бифуркационных линий l_p на диаграмме рис. 4.35. Расчеты показали, что на линии l_p реализуется также седло-узловая бифуркация и в области C рождаются также устойчивый и седловой резонансные[1]) двумерные торы, лежащие на трехмерном торе T^3. Результаты расчетов иллюстрирует рис. 4.37. Режиму колебаний в области B отвечает трехмерный тор T^3, сечение Пуанкаре которого обозначено T_{T^3} на рис. 4.37. Резонансному устойчивому двумерному тору в области C отвечает инвариантная замкнутая кривая, обозначенная на рис. 4.37 $L_{T_p^2}$. Для сравнения на рис. 4.37 представлен и образ устойчивого двумерного резонансного тора $L_{T_n^2}$ в области A. Седловые торы на рис. 4.37 не приведены.

[1]) Под резонансным двумерным тором здесь понимается частичный резонанс на трехмерном торе, когда две из трех независимых частот становятся равными. При этом двумерный тор на трехмерном торе является эргодическим.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Торы T_n^2 и T_p^2 различные, так как с физической точки зрения отвечают разным условиям частичной синхронизации. В области A — $f_1 = f_2$ и $f_e \neq f_1$, а в области C — $f_e = f_1$, и $f_1 \neq f_2$.

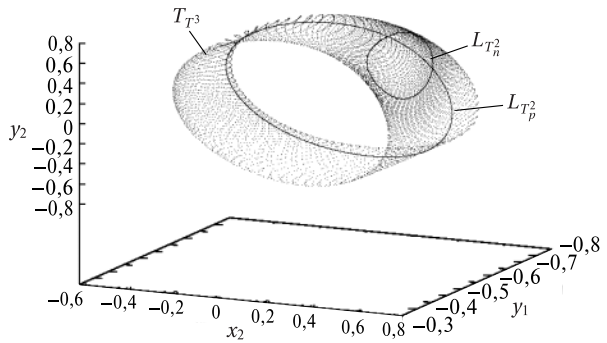


Рис. 4.37. Проекции сечений Пуанкаре трехмерного тора T_{T^3} ($f_e = 0{,}15$) и резонансных двумерных торов $L_{T_n^2}$ ($f_e = 0{,}1482$) и $L_{T_p^2}$ ($f_e = 0{,}158$)

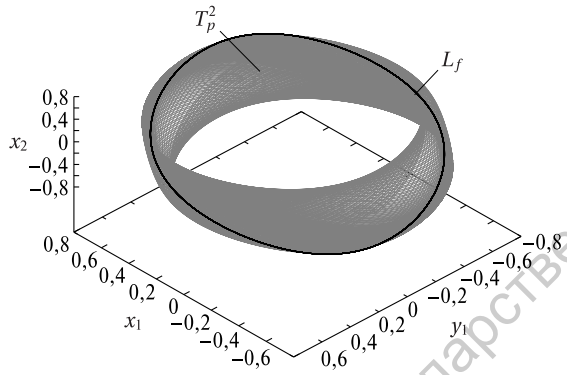


Рис. 4.38. Проекции фазовых портретов двумерного тора T_p^2 (серый) и резонансного предельного цикла L_f (черный) на нем, рассчитанные для значений частоты $f_e = 0{,}1587$ (T_p^2) и $f_e = 0{,}1592$ (L_f)

Наконец, рассмотрим бифуркационный переход из области C в область D путем пересечения линии l_f. Этому переходу отвечает эффект захвата второй частоты $f_2 = f_e$ и возникновение режима полной синхронизации $f_1 = f_2 = f_e$. Исследования показали, что линия l_f отвечает классической седло-узловой бифуркации резонансных циклов, лежащих на двумерном торе T_p^2. На двумерном торе T_p^2, который существует в области C и является резонансной структурой на T^3, в бифуркационной точке (на линии l_f) рождается устойчивый и седловой циклы. При

пересечении линии l_f в направлении области D возникает устойчивое периодическое движение, отвечающее режиму полной синхронизации. Результаты иллюстрирует рис. 4.38, где представлены фазовые проекции двумерного тора T_p^2 (в области C) и устойчивого резонансного предельного цикла L_f на нем (область D).

Особенности синхронизации резонансных предельных циклов

Изучение эффектов синхронизации, представленных выше, показало, что рассмотренный случай резонанса с числом вращения $\Theta = 1:1$ является наиболее общим и достаточно сложным с точки зрения теории бифуркаций. Представляется важным изучение эффектов синхронизации при других значениях числа вращения, отвечающих резонансам $\Theta = m:n$, где $m, n = 1, 2, \ldots$. Кроме того, эффекты синхронизации в системе (4.35) должны зависеть от коэффициента связи генераторов γ. Эта зависимость важна для понимания механизмов синхронизации генераторов квазипериодических колебаний, в которых параметр связи может не входить явным образом в динамическую модель или в силу конструктивных особенностей системы не являться независимым параметром. В связи с вышесказанным представляется интересным исследовать особенности бифуркационных свойств системы (4.35) при различных значениях параметра связи γ.

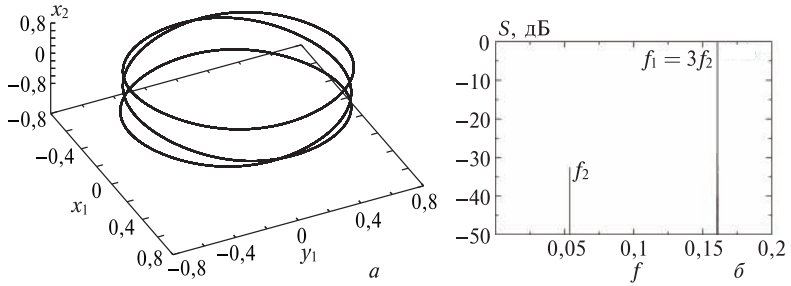


Рис. 4.39. Предельный цикл в системе (4.34) в условиях резонанса $\Theta = 1:3$ (*а*) и соответствующий спектр мощности колебаний (*б*), рассчитанные для $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0{,}328$, $\varepsilon = 0{,}1$ и $\gamma = 0{,}005$

Рассмотрим режим резонансного предельного цикла в системе (4.34) с числом вращения $\Theta = 1:3$ и попытаемся осуществить его синхронизацию внешним периодическим сигналом (4.35).

В автономной системе (4.35) при значениях параметров $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0{,}328$, $\varepsilon = 0{,}1$ и $\gamma = 0{,}005$ реализуется эффект взаимной синхронизации, и существует устойчивый резонансный цикл на двумерном торе с числом вращения $\Theta = 1:3$. Фазовый портрет этого цикла и спектр мощности

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

показаны на рис. 4.39. Введем внешнее воздействие (4.35) и будем изменять f_e вблизи частоты f_2.

Результаты внешнего воздействия представлены на рис. 4.40. Главное отличие результатов от случая $\Theta = 1:1$ (см. рис. 4.33) заключается в том, что эффект полной синхронизации здесь не реализуется. Наблюдается эффект захвата второй частоты ($f_e = f_2$), но при этом частота f_1 не изменяется под действием внешней силы. Как и в случае резонанса 1 : 1 при условии, что частота f_e далека от f_2, существует область A, в которой существует резонансный двумерный тор $T^2_{n1:3}$ на поверхности трехмерного тора T^3. Также имеется область B, в которой ввиду разрушения резонанса 1 : 3 существует трехмерный тор T^3. Далее, происходит переход из области B в область C, при котором возникает резонансный двумерный тор $T^2_{p1:3}$, отвечающий режиму частичной синхронизации $f_e = f_2$, $f_1 \neq 3f_2$. Область D в данном случае отсутствует. Для полной синхронизации резонансного цикла в рассматриваемом случае необходимо использовать дополнительный внешний сигнал по частоте близкий к f_1. На рис. 4.41 представлены в виде циклов L проекции сечений Пуанкаре двумерных торов, отвечающих областям A ($T^2_{n1:3}$) и C ($T^2_{p1:3}$) рис. 4.40, лежащие на трехмерном торе T^3, представленном в сечении Пуанкаре в виде двумерного тора T_{T^3}.

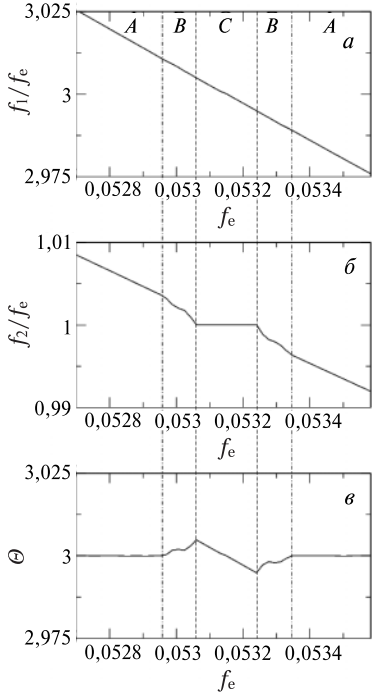


Рис. 4.40. Зависимость отношений частот генераторов f_1 и f_2 к частоте f_e и числа вращения Θ от частоты внешнего воздействия f_e при $b = 0{,}005$ для резонанса 1 : 3

Результаты рис. 4.40 получены для относительно малой величины коэффициента связи $\gamma = 0{,}005$. Интересно выяснить, как повлияет увеличение степени взаимосвязи генераторов на эффекты синхронизации? С этой целью были проведены расчеты для значения $\gamma = 0{,}02$, результаты которых представлены на рис. 4.42. Как видно из рис. 4.42, с увеличением связи появляется область D — область полной синхронизации резонансного цикла на торе. Исследования показали, что с ростом $k > 0{,}02$ ширина области D увеличивается и реализуется картина, качественно повторяющая случай резонанса 1 : 1 (см. рис. 4.33).

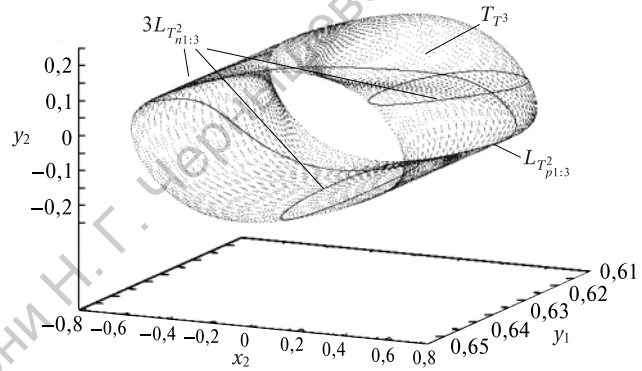


Рис. 4.41. Проекции сечений Пуанкаре двумерных торов в виде циклов: $3L_{T^2_{n1:3}}$, отвечающего области A (рис. 4.40) ($f_e = 0{,}0527$), и $L_{T^2_{p1:3}}$ отвечающего области C (рис. 4.40) ($f_e = 0{,}0531$), лежащих на поверхности трехмерного тора T_{T^3}

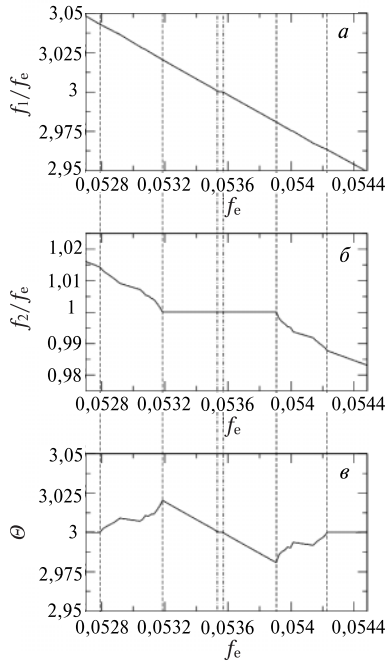


Рис. 4.42. Зависимость отношений частот генераторов f_1 и f_2 к частоте f_e и числа вращения Θ от частоты внешнего воздействия f_e при $b = 0{,}005$ и $\gamma = 0{,}02$ для резонанса 1 : 3

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

4.3.4. Фазовая синхронизация системы связанных генераторов Ван дер Поля внешним гармоническим сигналом

Как было показано выше, при определенных условиях эффект синхронизации можно анализировать на основе фазового приближения (см. п. 4.2.1). В настоящем разделе мы рассмотрим задачу о внешней синхронизации автоколебаний в системе связанных генераторов Ван дер Поля (см. п. 4.3.1), используя приближение фазовой динамики. С этой целью вернемся к дифференциальным уравнениям системы:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= (\varepsilon - x_1^2)\dot{x}_1 + \gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + b\cos(\omega_e t), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= (\varepsilon - x_2^2)\dot{x}_2 + \gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{aligned} \tag{4.36}$$

В уравнениях (4.36) ε — параметр возбуждения, одинаковый для первого и второго генераторов в отсутствии связи, $F(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \gamma(\dot{x}_{21} - \dot{x}_{12})$ — функция связи, γ — коэффициент связи, b и ω_e — амплитуда и частота внешнего сигнала.

Как видно из (4.36), взаимодействие генераторов осуществляется через производные $\dot{x}_{1,2}$, что в эксперименте соответствует резистивной связи.

Будем искать решение уравнений (4.36) в виде $x_{1,2} = \rho_{1,2}(t)\cos\Psi_{1,2}(t)$, где $\Psi_{1,2}(t) = \omega_e t + \varphi_{1,2}(t)$, полагая (в полном соответствии с классическим описанием динамики генератора Ван дер Поля в квазипериодическом приближении) $\rho_{1,2}(t)$ и $\varphi_{1,2}(t)$ медленно меняющимися во времени функциями. Это означает, что $\dot{\rho}_{1,2}(t) \ll \rho_{1,2}(t)$ и $\dot{\varphi}_{1,2}(t) \ll \varphi_{1,2}(t)$.

Перепишем уравнения (4.36) в виде динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = (\varepsilon - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma(y_2 - y_1) + b\cos(\omega_e t), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = (\varepsilon - x_2^2)y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma(y_1 - y_2) \end{cases} \tag{4.37}$$

и, в соответствии с вышесказанным, введем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1(t)\cos(\omega_e t + \varphi_1(t)), \\ y_1 = \dot{\rho}_1(t)\cos(\omega_e t + \varphi_1(t)) - \rho_1(t)\dot{\varphi}_1(t)\sin(\omega_e t + \varphi_1(t)) - \\ \qquad - \rho_1(t)\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi_1(t)), \\ x_2 = \rho_2(t)\cos(\omega_e t + \varphi_2(t)), \\ y_1 = \dot{\rho}_2(t)\cos(\omega_e t + \varphi_2(t)) - \rho_2(t)\dot{\varphi}_2(t)\sin(\omega_e t + \varphi_2(t)) - \\ \qquad - \rho_2(t)\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi_2(t)). \end{cases} \tag{4.38}$$

Используя стандартное условие

$$\dot{\rho}_{1,2}\cos(\omega_e t + \varphi_{1,2}(t)) - \rho_{1,2}(t)\dot{\varphi}_{1,2}(t)\sin(\omega_e t + \varphi_{1,2}(t)) = 0, \tag{4.39}$$

и произведя усреднение за период внешней силы, получим уравнения первого приближения для амплитуд колебаний $\rho_{1,2}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \rho_1\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho_1^2}{8}\right) + \frac{\gamma}{2}\left[\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \rho_1\right] - \frac{b}{2\omega_e}\sin\varphi_1, \\ \dot{\rho}_2 &= \rho_2\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho_2^2}{8}\right) + \frac{\gamma}{2}\left[\rho_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \rho_2\right] \end{aligned} \tag{4.40}$$

и фаз колебаний в первом и втором генераторах $\varphi_{1,2}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Delta_1 + \frac{\gamma}{2}\frac{\rho_2}{\rho_1}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{b}{2\rho_1\omega_e}\cos\varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta_2 - \frac{\gamma}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \tag{4.41}$$

где $\Delta_{1,2} = (\omega_{1,2}^2 - \omega_e^2)/(2\omega_e)$.

Будем предполагать, что расстройка базовых частот генераторов $\omega_2 - \omega_1 = \delta \ll 1$, а также близость частоты внешнего воздействия к значениям базовых частот $\omega_{1,2}$, т. е. $\Delta_{1,2} \simeq \omega_{1,2} - \omega_e$. В этом приближении справедливо:

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \delta. \tag{4.42}$$

Из уравнений для амплитуд (4.40) следует, что при малой связи $\gamma \ll 1$ и малой амплитуде воздействия $b \ll 1$ можно считать, что

$$\rho_1 = \rho_2 = 2\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.43}$$

Амплитуды предельных циклов в генераторах будут постоянными и равными друг другу. В этом приближении динамика системы может быть исследована на основе уравнений для фаз колебаний $\varphi_{1,2}(t)$ (4.41):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Delta_1 + g\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1 - \Delta_1}\cos\varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta_1 + \delta - g\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \tag{4.44}$$

где $g = \gamma/2$, $C = b/(4\sqrt{\varepsilon})$, $\Delta_1 = (\omega_1^2 - \omega_e^2)/(2\omega_e) \simeq \omega_1 - \omega_e$, $\delta = \omega_2 - \omega_1$, $\omega_1 = 1$.

Уравнения (4.44) описывают фазовую динамику исходной системы (4.36) и дают возможность бифуркационного анализа эффектов фазовой синхронизации при вариации амплитуды C и частоты ω_e внешней силы для выбранных значений связи g и расстройки генераторов по частотам δ.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Бифуркации состояния равновесия. Координаты состояния равновесия системы (4.44) определяются из условий $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, т. е. из уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_1 + g\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1}\cos\varphi_1, \\ 0 &= \Delta_1 + \delta - g\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Условия существования действительных решений имеют вид

$$\begin{gathered} \left|\frac{\Delta_1 + \delta}{g}\right| \le 1, \\ \left|\frac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1 + \delta)}{C}\right| \le 1. \end{gathered} \tag{4.46}$$

При этих условиях уравнения (4.45) имеют четыре решения, которым отвечают следующие четыре пары координат неподвижных точек:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \varphi_1^{(1)} = \arccos\left(\dfrac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)} + \arcsin\left(\dfrac{\Delta_1+\delta}{g}\right), \end{cases} \\ &\begin{cases} \varphi_1^{(2)} = -\arccos\left(\dfrac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(2)} = \varphi_1^{(2)} + \arcsin\left(\dfrac{\Delta_1+\delta}{g}\right), \end{cases} \\ &\begin{cases} \varphi_1^{(3)} = \arccos\left(\dfrac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(3)} = \varphi_1^{(3)} - \arcsin\left(\dfrac{\Delta_1+\delta}{g}\right) + \pi, \end{cases} \\ &\begin{cases} \varphi_1^{(4)} = -\arccos\left(\dfrac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(4)} = \varphi_1^{(4)} - \arcsin\left(\dfrac{\Delta_1+\delta}{g}\right) + \pi. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.47}$$

Система (4.44) характеризуется четырьмя состояниями равновесия, устойчивость и бифуркации которых необходимо исследовать. Решение характеристического уравнения матрицы линеаризации системы (4.44) дает следующие собственные значения для состояний равновесия

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}\Bigg\{ &-\left[2g\cos(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1}\sin\varphi_1\right] \pm \\ &\pm\left[2g\cos(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1}\sin\varphi_1\right]^2 + 4g\frac{C}{1-\Delta_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)\sin\varphi_1\Bigg]^{1/2}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

На рис. 4.43 представлена бифуркационная диаграмма системы (4.44).

В области D, ограниченной бифуркационными линиями L_{T_1} и L_{T_2}, существует четыре состояния равновесия, из которых одно является устойчивым узлом, два — седла и одно — неустойчивый узел (репеллер). При выходе из области D с пересечением линий L_{T_1} и L_{T_2} имеют место седло-узловые бифуркации состояний равновесия. Обсудим это более детально. На рис. 4.44 представлены фазовые портреты состояний равновесия на 2π-периодической фазовой плоскости координат φ_1, φ_2 до пересечения линий L_{T_1} (рис. 4.44, *а*) и на бифуркационной линии L_{T_1} (рис. 4.44, *б*). Как видно из рис. 4.44, *б*, на линии L_{T_1} состояния равновесия попарно сливаются в негрубые состояния равновесия типа седло–узел и затем исчезают. В момент бифуркации (на линии L_{T_1}) собственные значения соответствующих пар неподвижных точек $\varepsilon_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_2^{(3)}$, $\lambda_2^{(4)}$ обращаются в нуль, свидетельствуя о седло-узловой бифуркации.

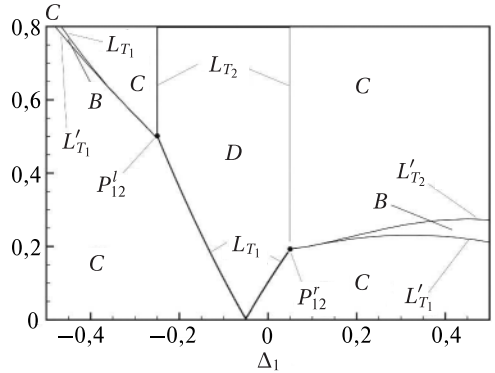


Рис. 4.43. Линии бифуркаций коразмерности 1 системы (4.44) на плоскости параметров (Δ_1, C) при фиксированных значениях $g = 0{,}15$, $\delta = 0{,}1$. L_{T_1} — линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия $\varphi^{(1)} \rightleftarrows \varphi^{(2)}$ и $\varphi^{(3)} \rightleftarrows \varphi^{(4)}$; L_{T_2} — линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия $\varphi^{(1)} \rightleftarrows \varphi^{(3)}$ и $\varphi^{(2)} \rightleftarrows \varphi^{(4)}$; L'_{T_1} и L'_{T_2} — линии касательных бифуркаций устойчивых и седловых инвариантных замкнутых кривых

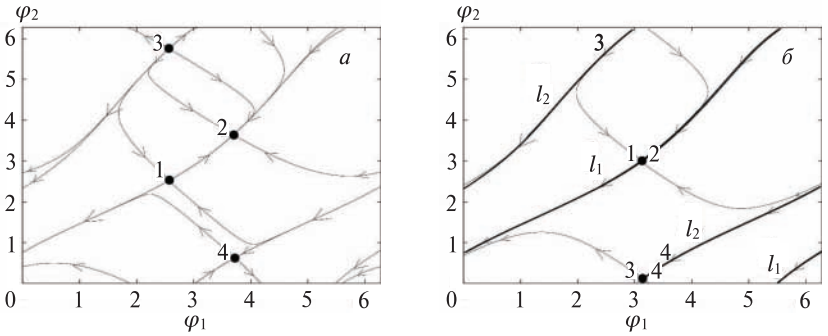
Качественно эквивалентная картина реализуется при пересечении бифуркационных линий L_{T_2}, что иллюстрирует рис. 4.45.

Отличия рис. 4.44 и 4.45 в том, что в первом случае седло-узловая бифуркация реализуется для точек 1, 2 и 3, 4, а во втором — для точек 3, 1 и 4, 2.

Как видно из рис. 4.44 и 4.45, в результате седло-узловых бифуркаций состояния равновесия исчезают и вне области D (в областях C) рождаются соответствующие пары устойчивых (l_1) и неустойчивых (l_2) инвариантных кривых.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

С точки зрения полной системы уравнений (4.36) область D на рис. 4.43, в которой существует одна устойчивая неподвижная точка, отвечает устойчивому предельному циклу режима полной синхронизации. При этом обе частоты генераторов ω_1 и ω_2 захвачены сигналом внешнего воздействия и выполняется равенство $\omega_1 = \omega_2 = \omega_e$. При выходе из области D возникают биения, т. е. двухчастотные колебания, образом которых является устойчивая инвариантная кривая l_1.



$\lambda_1^{(1)} = 0{,}041$ $\lambda_1^{(2)} = -0{,}032$ $\lambda_1^{(1)} = 0$ $\lambda_1^{(2)} = 0$

$\lambda_2^{(1)} = -0{,}268$ $\lambda_2^{(2)} = -0{,}34$ $\lambda_2^{(1)} = -0{,}297$ $\lambda_2^{(2)} = -0{,}299$

$\lambda_1^{(3)} = 0{,}34$ $\lambda_1^{(4)} = 0{,}268$ $\lambda_1^{(3)} = 0{,}299$ $\lambda_1^{(4)} = 0{,}297$

$\lambda_2^{(3)} = 0{,}032$ $\lambda_2^{(4)} = -0{,}041$ $\lambda_2^{(3)} = 0$ $\lambda_2^{(4)} = -0$

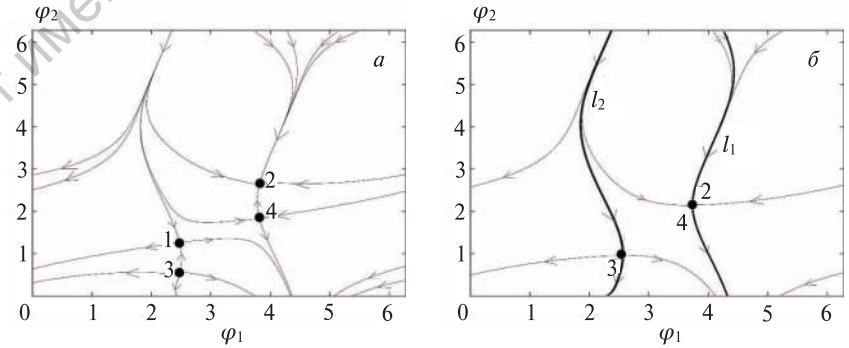
$\Delta_1 = -0{,}10713$ $\Delta_1 = -0{,}11713$

Рис. 4.44. Седло-узловые бифуркации состояний равновесия при пересечении кривой L_{T_1} на плоскости параметров (рис. 4.43): *а* — состояния равновесия и их инвариантные многообразия до бифуркации; *б* — негрубое состояние «седло–узел» в момент бифуркации. $\lambda_i^{(j)}$ — i-е собственное значение j-го состояния равновесия. Параметры $g = 0{,}15$, $\delta = 0{,}1$, $C = 0{,}15$

Бифуркации инвариантных замкнутых кривых. Бифуркации состояний равновесия при выходе из области D в области C исследованы аналитически с использованием выражений (4.47) и (4.48). Для анализа бифуркаций инвариантных кривых l_1, l_2 применим метод численного моделирования. Результаты расчетов представлены на рис. 4.46 (для инвариантных кривых рис. 4.44, *б*).

Если двигаться в пространстве параметров диаграммы рис. 4.43 из области C в область B, то наблюдается следующая картина. Инвариантные кривые l_1 и l_2 приближаются друг к другу, на бифуркационных линиях L'_{T_1} они сливаются в единую седло-узловую инвариантную кривую, а с

пересечением линии L'_{T_1} кривые $l_{1,2}$ исчезают. В результате в областях B траектории всюду плотно покрывают всю фазовую плоскость, что иллюстрирует рис. 4.46, *в*. Таким образом имеет место бифуркация, которую можно называть седло-узловой бифуркацией инвариантных замкнутых кривых по аналогии с седло-узловой бифуркацией состояний равновесия. Для инвариантных кривых рис. 4.45, *б* аналогичная бифуркация реализуется при пересечении линий L_{T_2} из областей C в область B. С точки зрения динамики исходной дифференциальной системы (4.36), описанной бифуркации отвечает переход от режима двухчастотных колебаний к режиму трехчастотных колебаний, когда все три частоты системы не кратны и не равны друг другу ($\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_e$) (см. п. 4.3.1).



$\lambda_1^{(1)} = 0{,}255$ $\lambda_1^{(2)} = -0{,}045$ $\lambda_1^{(1)} = 0{,}265$ $\lambda_1^{(2)} = 0$

$\lambda_2^{(1)} = -0{,}064$ $\lambda_2^{(2)} = -0{,}363$ $\lambda_2^{(1)} = 0$ $\lambda_2^{(2)} = 0{,}266$

$\lambda_1^{(3)} = 0{,}363$ $\lambda_1^{(4)} = 0{,}064$ $\lambda_1^{(3)} = 0{,}266$ $\lambda_1^{(4)} = 0$

$\lambda_2^{(3)} = 0{,}045$ $\lambda_2^{(4)} = -0{,}255$ $\lambda_2^{(3)} = 0$ $\lambda_2^{(4)} = -0{,}265$

$\Delta_1 = -0{,}2399$ $\Delta_1 = -0{,}249999$

Рис. 4.45. Седло-узловые бифуркации состояний равновесия при пересечении кривой L_{T_2} на плоскости параметров (рис. 4.43): *а* — состояния равновесия и их инвариантные многообразия до бифуркации; *б* — негрубое состояние «седло–узел» в момент бифуркации. $\lambda_i^{(j)}$ — i-е собственное значение j-го состояния равновесия. Параметры $g = 0{,}15$, $\delta = 0{,}1$, $C = 0{,}6$

Седло-узловую бифуркацию инвариантных кривых удобно иллюстрировать следующим образом. Введем определение средней частоты фазовых осцилляторов (4.44):

$$\langle \omega_{1,2} \rangle = \langle \dot{\varphi}_{1,2} \rangle = \lim_{T \to \infty} \int_0^T \dot{\varphi}_{1,2}(t)\, dt. \qquad (4.49)$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Используя систему уравнений (4.44), произведем расчет зависимости средних частот $\langle\omega_{1,2}\rangle$ от параметров. Зафиксируем значения параметров $C = 0{,}25$, $\delta = 0{,}1$, $g = 0{,}15$ и будем двигаться по плоскости бифуркационной диаграммы рис. 4.43, изменяя параметр Δ_1. С увеличением Δ_1 мы последовательно пересечем области D, C и B бифуркационной диаграммы рис. 4.43. Результаты представлены на рис. 4.47.

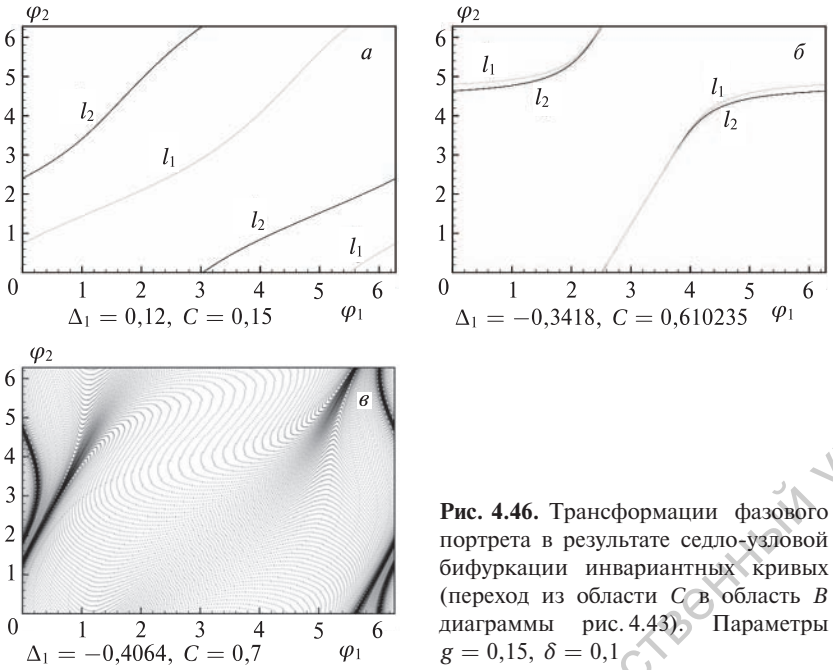


Рис. 4.46. Трансформации фазового портрета в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых (переход из области C в область B диаграммы рис. 4.43). Параметры $g = 0{,}15$, $\delta = 0{,}1$

В области D ($\Delta_1 \le 0{,}05$) имеем $\langle\omega_1\rangle = \langle\omega_2\rangle = 0$, что соответствует устойчивой неподвижной точке в области синхронизации D. С пересечением линии L_{T_2} (переход из области D в область C) имеет место бифуркация рождения инвариантных кривых l_1 и l_2. На рис. 4.47 этой бифуркации отвечает появление отличной от нуля частоты $\langle\omega_2\rangle \ne 0$. При этом другая частота $\langle\omega_1\rangle = 0$. Далее, при пересечении бифуркационной линии L'_{T_2} (переход в область B), имеет место седло-узловая бифуркация инвариантных кривых l_1 и l_2, в результате которой рождается двумерный тор. На рис. 4.47 этой бифуркации отвечает появление отличной от нуля второй частоты $\langle\omega_1\rangle$ при $\Delta_1 = 0{,}27$. Таким образом в области B диаграммы рис. 4.43 имеют место колебания с двумя независимыми частотами $\langle\omega_1\rangle \ne 0$ и $\langle\omega_2\rangle \ne 0$, которые возникают в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых l_1, l_2.

Отметим важный результат. Существование в системе (4.44) четырех состояний равновесия является следствием того, что система (4.44) описывает фазовую динамику двух взаимодействующих осцилляторов (4.36). Попарное слияние неподвижных точек 1, 2 и 2, 4 (рис. 4.45) в результате седло-узловой бифуркации порождает две инвариантные замкнутые кривые (устойчивую l_1 и неустойчивую l_2 соответственно). В результате становится возможной седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, представляющая собой следующий по уровню сложности тип бифуркации в сравнении с классической седло-узловой бифуркацией состояний равновесия.

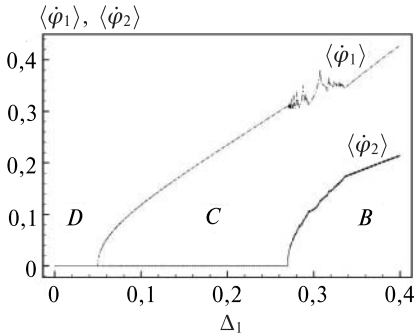


Рис. 4.47. Зависимости средних частот $\langle\omega_{1,2}\rangle$ от параметра Δ_1, рассчитанные по уравнениям (4.44) при значениях $C = 0{,}25$, $\delta = 0{,}1$, $g = 0{,}15$

Представленный бифуркационный анализ динамики системы фазового приближения (4.44) показал следующее. При наличии расстройки частот генераторов $\delta \ne 0$ и расстройки между частотой внешней силы и частотой первого генератора $\Delta_1 \ne 0$ в системе реализуются эргодические квазипериодические колебания с двумя независимыми частотами (области B на диаграмме рис. 4.43). Их образом на фазовом портрете является двумерный тор. Выход из области B в область C приводит к возникновению пары инвариантных кривых, устойчивой l_1 и седловой l_2. Далее, переходу из областей C в область D отвечает классическая седло-узловая бифуркация, в результате которой в области D появляются четыре неподвижные точки, одна из которых является устойчивой.

В исходной дифференциальной системе (4.36) описанным бифуркационным переходам отвечают следующие перестройки режимов. В области B система (4.36) характеризуется квазипериодическими колебаниями с тремя независимыми частотами ω_e, ω_1 и ω_2. Выход из областей B в области C характеризует возникновение двумерного тора как частичного резонанса на трехмерном торе. Частичный резонанс отвечает эффекту захвата одной из парциальных частот системы (4.36). Здесь возможны случаи: $\omega_e = \omega_1$ и $\omega_2 \ne \omega_1$, либо $\omega_e = \omega_2$, но $\omega_1 \ne \omega_2$. Имеет место частичная синхронизация. Переходу из областей C в область D отвечает режим установления устойчивых периодических движений. Рождается устойчивый предельный цикл, лежащий на поверхности двумерного тора. Этому предельному циклу отвечает режим полной синхронизации,

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

при котором внешний сигнал захватывает обе частоты парциальных генераторов ($\omega_e = \omega_1 = \omega_2$).

Отметим, что представленные результаты анализа динамики уравнений фазового приближения (4.44) находятся в полном качественном соответствии с результатами, представленными в п. 4.3.1.

4.3.5. Синхронизация двухчастотных колебаний в автогенераторе квазипериодических колебаний

Представленные результаты свидетельствуют о следующем: резонансный цикл на двумерном торе в общем случае невозможно синхронизовать внешним периодическим сигналом. Основной причиной является то, что под действием внешнего сигнала режим резонанса разрушается. Колебания становятся квазипериодическими с тремя независимыми частотами. При вариации параметров происходит частичная синхронизация, состоящая в захвате одной из базовых частот системы внешней силой. Эффект частичной синхронизации реализуется через седло-узловую бифуркацию рождения резонансных двумерных торов на трехмерном торе. После чего возможен захват второй базовой частоты, который осуществляется классическим образом через седло-узловую бифуркацию предельных циклов на двумерном торе.

Наблюдаемые эффекты зависят от расстройки базовых частот (от числа вращения) и от степени взаимосвязи двух генераторов. Большая расстройка, когда исходные базовые частоты отличаются в несколько раз, приводит к тому, что синхронизуется лишь одна из базовых частот системы. При очень сильной связи двух генераторов внешняя сила не разрушает их взаимной синхронизации, а синхронизует оба генератора одновременно. В этом случае реализуется вынужденная синхронизация резонансного цикла на торе по классическому сценарию. Таковы основные выводы. Являются ли они в достаточной степени общими? С целью ответа на поставленный вопрос проведем исследования синхронизации квазипериодических колебаний с использованием генератора двухчастотных колебаний, описанного в работе [75].

Рассмотрим уравнения генератора:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - x\phi - px^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \phi, \\ \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Используя бифуркационную диаграмму системы (4.50), выберем значения управляющих параметров так, чтобы реализовать режим резонансных колебаний с числом вращения $\Theta = 1:4$ и эргодических колебаний

с близким, но иррациональным значением числа вращения. Параметры имеют следующие значения: $m = 0{,}096$, $\gamma = 0{,}2$, $p = 0{,}001$; функция $\Phi(x) = I(x)x^2$. Для значения $g = 0{,}257$ получаем режим эргодического двумерного тора, для $g = 0{,}263$ — резонансный[1]) тор с числом вращения $\Theta = 1:4$. Результаты расчетов иллюстрирует рис. 4.48.

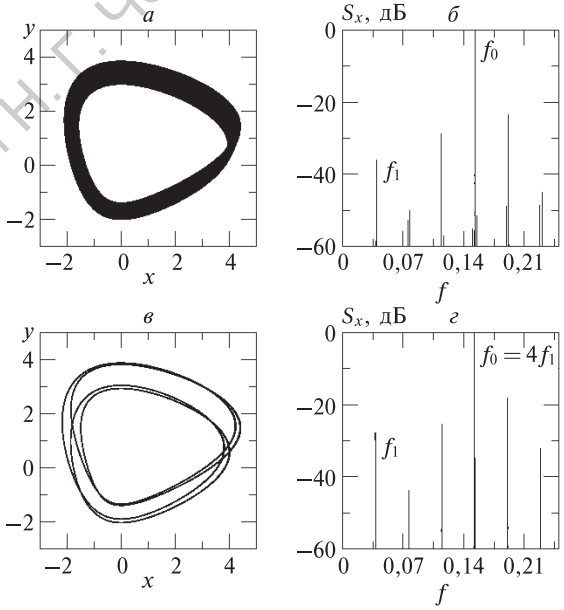


Рис. 4.48. Режимы эргодических (*а, б*) и резонансных (*в, г*) квазипериодических колебаний с двумя частотами (f_1 — частота модуляции, f_0 — частота несущей): *а* — проекция эргодического тора на плоскость (x, y), *б* — соответствующий спектр мощности колебаний $x(t)$, *в* — предельный цикл на торе в случае резонанса $f_1 : f_0 = 1:4$, *г* — спектр мощности резонансного цикла на торе

Теперь исследуем динамику системы (4.50) в указанных на рис. 4.48 режимах при внешнем гармоническом воздействии [76]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - x\phi - px^3 + b\sin(2\pi f_e), \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \phi, \\ \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz. \end{aligned} \tag{4.51}$$

[1]) Здесь термин «резонансный тор» используется в классическом смысле и характеризует режим устойчивого предельного цикла на торе.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Проведем численные расчеты спктра колебаний переменной $x(t)$ при изменении частоты внешнего сигнала f_e. Результаты представлены на рис. 4.49. Как видно из рис. 4.49, *а*, в области $f_e \simeq 0{,}0381 \div 0{,}0385$ имеет место захват частоты f_1, т. е. синхронизация. В области синхронизации (рис. 4.49, *а*) частота модуляции f_1 захвачена внешней силой и выполняется условие $f_1/f_e = 1$. Результаты рис. 4.49, *б* свидетельствуют, что при этом частота f_0 не синхронизуется внешней силой. Как видно из графика, частота f_0 как вне области синхронизации частоты f_1, так и внутри нее, практически не меняется, т. е. не реагирует на изменение частоты внешнего воздействия f_e.

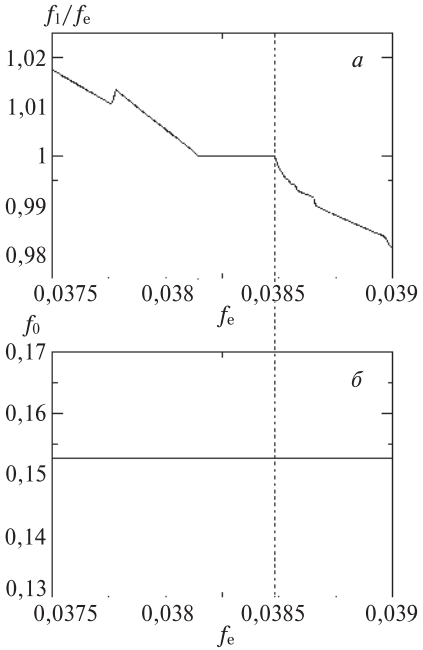


Рис. 4.49. Результаты расчета зависимости отношения частот f_1/f_e (*а*) и частоты f_0 (*б*) от частоты воздействия в неавтономной системе (4.51) для значений параметров $m = 0{,}096$, $g = 0{,}263$, $\gamma = 0{,}2$, $p = 0{,}001$, $b = 0{,}01$

Полностью аналогичные результаты получаются в случае воздействия внешнего сигнала на генератор в режиме эргодических биений (рис. 4.49). И это понятно. Как установлено при исследовании системы двух связанных генераторов Ван дер Поля (4.35), внешнее воздействие вначале разрушает режим резонанса. Именно это и наблюдается. Резонанс 1 : 4 вначале разрушается, затем синхронизуется одна из базовых частот (рис. 4.49). Если мы разрушим резонанс, выйдя из области синхронизации $\Theta = 1 : 4$ (рис. 4.48, *а*), то при внешнем воздействии будет синхронизоваться только одна из базовых частот. В случае, показанном на рис. 4.49, *а*, таковой является f_1, так как частота внешнего сигнала близка именно к f_1. Изменив частоту внешнего сигнала, приблизив ее к f_0, будем наблюдать эффект захвата частоты $f_0 = f_e$, при этом f_1 останется незахваченной.

Приведенные результаты подтвержают общий характер выводов, к которым мы пришли при исследовании системы двух связанных генераторов Ван дер Поля. Действительно, вблизи резонанса $\Theta = 1 : 4$, когда f_1 в четыре раза меньше f_0 (расстройка между базовыми частотами велика),

внешнее воздействие приводит к эффекту захвата лишь одной из двух базовых частот. Синхронизовать обе частоты не представляется возможным. Причиной является не только их большое различие, но и тот факт, что генератор (4.50) не позволяет увеличить степень взаимосвязи между двумя автоколебательными модами системы. Эта взаимосвязь задается внутренними свойствами системы (4.50).

Изложенные выше результаты численного моделирования эффекта синхронизации подтверждаются данными физического эксперимента, полученными на электронной модели генератора двухчастотных колебаний (4.50).

В эксперименте исследовалась синхронизация предельного цикла, отвечающего резонансу 1 : 3 (рис. 4.50, *а*). На рис. 4.50, *б* представлена экспериментальная проекция двумерного тора, который появляется при внешнем воздействии на цикл (рис. 4.50, *а*) сигналом частоты 2,9 кГц (вне области синхронизации). Рисунок 4.50, *в* соответствует проекции тора в области синхронизации частоты f_1 ($f_e = 3{,}4$ кГц). На рис. 4.51, *а* и *б* представлены результаты измерений, аналогичных расчетам рис. 4.44. Рисунок 4.51, *а* иллюстрирует эффект внешней синхронизации частоты f_1, а рис. 4.46, *б* подтверждает независимость частоты f_0 генератора от частоты внешнего сигнала f_e [76].

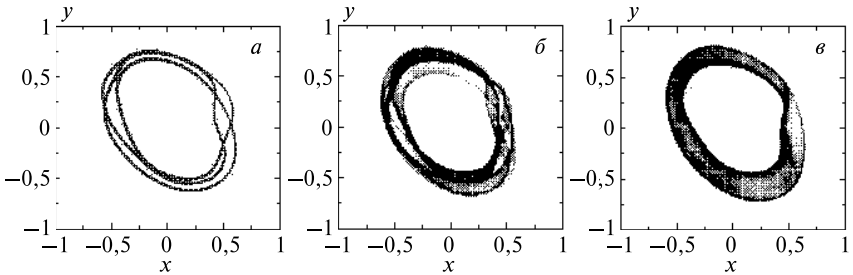


Рис. 4.50. Результаты физического эксперимента: *а* — проекция фазового портрета автономного предельного цикла на торе в резонансе 1 : 3, *б* — двумерный тор при внешнем воздействии на цикл, вне области синхронизации ($f_e = 2{,}9$ кГц), *в* — проекция двумерного тора в области синхронизации частоты f_1 ($f_e = 3{,}4$ кГц)

Представленные выше результаты свидетельствуют о том, что синхронизация двухчастотных колебаний внешним гармоническим сигналом вне зависимости от условий резонанса проявляется в захвате сначала одной и затем (возможно) второй базовой частоты генератора квазипериодических колебаний. При некоторых особых условиях (большой коэффициент связи парциальных подсистем или близость базовых частот) возможно реализовать эффект захвата двух базовых частот. Однако в об-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

щем случае это не достигается. Естественно предположить, что эффект захвата двух базовых частот генератора можно обеспечить при внешнем двухчастотном воздействии, если число вращения внешнего генератора будет близко к числу вращения синхронизуемого генератора [35].

Рассмотрим случай однонаправленного воздействия квазипериодических колебаний одного генератора на второй, работающий также в режиме квазипериодических колебаний. Уравнения системы двух взаимодействующих генераторов (4.50) при однонаправленной связи имеют вид

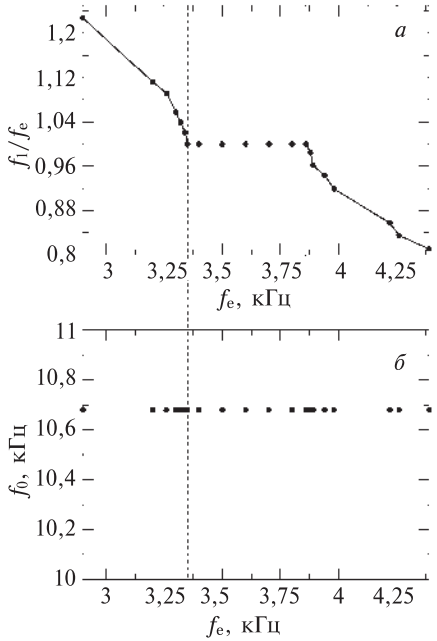


Рис. 4.51. Результаты физического эксперимента: *а* — зависимость отношения частот f_1/f_e, *б* — зависимость частоты f_0 от частоты внешнего воздействия f_e

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= mx_1 + y_1 - x_1\phi_1 - px_1^3 + bx_2,\\
\dot{y}_1 &= -x_1,\\
\dot{z}_1 &= \phi_1,\\
\dot{\phi}_1 &= -\gamma\phi_1 + \gamma\Phi(x_1) - g_1 z_1,\\
\dot{x}_2 &= mx_2 + y_2 - x_2\phi_2 - px_2^3,\\
\dot{y}_2 &= -x_2,\\
\dot{z}_2 &= \phi_2,\\
\dot{\phi}_2 &= -\gamma\phi_2 + \gamma\Phi(x_2) - g_2 z_2.
\end{aligned}
\qquad (4.52)
$$

Данная системы описывает случай воздействия второго генератора на первый (слагаемое bx_2 в первом уравнении), интенсивность которого определяет величина параметра b. Зафиксируем значения параметров $m = 0{,}06$, $d = 0{,}001$, $\gamma = 0{,}2$, $g_1 = 0{,}55$. При фиксированном параметре $g_1 = 0{,}55$ первый генератор в автономном режиме реализует квазипериодические колебания с числом вращения $\Theta_1 = f_{11}/f_{01}$ (первая цифра «0» соответствует частоте несущей, первая цифра «1» — частоте модуляции, вторая цифра — номер генератора). Число вращения второго генератора Θ_2 управляется с помощью параметра g_2. В случае нулевой связи при $g_1 \neq g_2$ числа вращения будут отличаться: $\Theta_1 \neq \Theta_2$. По аналогии с синхронизацией предельного цикла, когда вводится расстройка частот $\Delta f = f_1 - f_2$, мы будем рассматривать расстройку числа вращения $\Delta\Theta \sim g_1 - g_2$. Задача анализа синхронизации в этом случае состоит в анализе режимов колебаний на

плоскости двух управляющих параметров b и g_2. Численное решение этой задачи иллюстрирует рис. 4.52, представляющий структуру областей синхронизации.

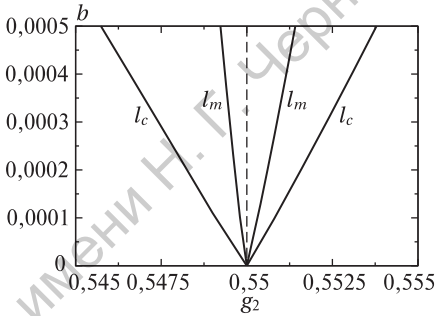


Рис. 4.52. Области синхронизации несущей (l_c) и огибающей (l_m) ($m = 0{,}06$, $\gamma = 0{,}2$, $g_1 = 0{,}55$, $p = 0{,}001$

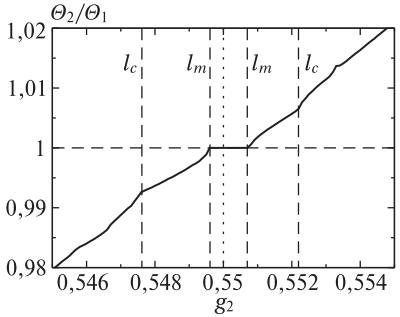


Рис. 4.53. Эффект захвата числа вращения ($m = 0{,}06$, $\gamma = 0{,}2$, $g_1 = 0{,}55$, $p = 0{,}001$, $b = 0{,}0003$

Внутри большого «клюва» синхронизации, ограниченного бифуркационными линиями l_c, имеет место эффект захвата базовых частот квазипериодических колебаний, $f_{01} = f_{02}$, т. е. происходит синхронизация несущих частот. При этом частоты модуляции остаются различными, $f_{11} \neq f_{12}$. Наблюдается эффект частичной синхронизации квазипериодических колебаний. Внутри области, ограниченной бифуркационными линиями l_m, реализуется захват частот модуляции и, соответственно, числа вращения $\Theta_1 = \Theta_2$. Этот эффект иллюстрирует рис. 4.53. Как видно из рисунка, существует конечная область расстройки по числу вращения Δg_2, в которой $\Theta_2/\Theta_1 = 1$. Число вращения генератора 2 захватывает число вращения генератора 1. Как и в случае предельного цикла, ширина области захвата числа вращения растет с увеличением интенсивности воздействия b.

Описанные численные эксперименты по внешней синхронизации двух генераторов квазипериодических колебаний показали, что область захвата частот модуляции генераторов лежит внутри клюва синхронизации несущих частот. Сближая значения управляющих параметров генераторов, в колебаниях системы сначала присутствуют четыре независимых частоты, затем, после захвата несущих частот, остаются три независимых частоты, а затем захватываются частоты модуляции и, соответственно, числа вращения.

Исследуем эффекты воздействия двухчастотных колебаний в физическом эксперименте. Выберем в качестве синхронизуемого генератор квазипериодических колебаний, описываемый уравнениями (4.50). Внеш-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ним сигналом $F(t)$ будут служить амплитудно-модулируемые колебания, которые получались с использованием двух генераторов стандартных сигналов и модулятора [36]:

$$F(t) = b\big[1 + K_{\text{mod}} \sin(2\pi f_{1\text{e}} t)\big] \sin(2\pi f_{0\text{e}} t),$$

где b — амплитудный множитель, K_{mod} — коэффициент модуляции, $f_{1\text{e}}$ — частота модуляции, $f_{0\text{e}}$ — частота несущей. Параметры генератора квазипериодических колебаний были выбраны следующими: $f_{1\text{g}} = 2{,}82$ кГц, $f_{0\text{g}} = 10{,}69$ кГц, а коэффициент модуляции был равен $\simeq 0{,}3$.

Зададим параметры внешнего сигнала $F(t)$ следующими: $f_{1\text{e}} = 3{,}06$ кГц, $f_{0\text{e}} = 10{,}69$ кГц, $K_{\text{mod}} = 0{,}5$ и будем изменять в эксперименте несущую частоту $f_{0\text{e}}$ в пределах $10{,}0 \le f_{0\text{e}} \le 11{,}0$ кГц. Так как высокочастотная часть спектра сигнала $F(t)$ будет состоять из трех спектральных линий $f_{0\text{e}}$ и $f_{0\text{e}} \pm f_{1\text{e}}$, то изменяя $f_{0\text{e}}$, мы будем изменять число вращения внешнего квазипериодического сигнала $\Theta = f_{1\text{e}}/f_{0\text{e}}$.

Результаты представлены на рис. 4.54. На графиках изображены зависимости нормированных частот $f_{0\text{e}}/f_{0\text{g}}$ (обозначено черными кружочками) и $f_{1\text{g}}/f_{1\text{e}}$ (треугольники) от частоты несущей $f_{0\text{e}}$.

Как видно из графиков, вначале осуществляется захват несущей частоты генератора ($f_{0\text{g}}$) несущей частотой внешнего сигнала ($f_{0\text{e}}$). Появляется область в интервале частот $10{,}5 < f_{0\text{e}} < 10{,}85$, в которой $f_{0\text{g}} = f_{0\text{e}}$. Затем имеет место эффект захвата частоты модуляции, которому отвечает заметно меньший интервал частот ($10{,}65 < f_{0\text{e}} < 10{,}77$). Именно в этой области обе частоты генератора $f_{0\text{g}}$ и $f_{1\text{g}}$ оказываются захвачены внешним сигналом $F(t)$. Реализуется эффект захвата числа вращения.

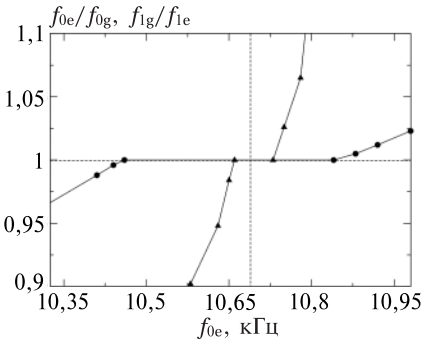


Рис. 4.54. Зависимость нормированных частот модуляции и несущей генератора от несущей частоты сигнала внешнего возмущения

Представленные результаты анализа синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний позволяют обоснованно сделать следующие выводы. Квазипериодические автоколебания с двумя независимыми частотами можно представить как результат взаимодействия двух нелинейных активных осцилляторов, каждый из которых характеризуется собственной независимой базовой частотой автоколебаний. Случаи резонансов, отвечающие «языкам Арнольда», соответствуют эффектам взаимной синхронизации, когда осуществляется взаимозахват базовых частот. Несмотря на тот факт, что формально резонансам отвечают режимы устойчивых периодических колебаний с некоторой частотой синхронизации, с физической точки зрения в системе продолжают существовать две базовые моды колебаний. При попытке синхронизовать резонансный предельный цикл системы внешним гармоническим сигналом, режимы резонансов разрушаются и в системе возникают трехчастотные колебания. Эффект синхронизации в этом случае будет наблюдаться для каждой из существующих мод независимо. Вначале реализуется эффект захвата одной из двух независимых частот, затем второй. Конкретные условия синхронизации будут зависеть от числа вращения (от первоначальной расстройки базовых частот взаимодействующих осцилляторов) и от степени их взаимосвязи.

Отметим, что после публикации результатов, представленных в разд. 4.3, появилась работа сотрудников Гумбольдтского университета [77], в которой все описанные закономерности синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний были подтверждены экспериментально на лазерной системе в режиме автомодуляции.

4.4. СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОСА

Периодические и квазипериодические колебания составляют лишь небольшую долю возможных колебательных режимов динамических систем с размерностью фазового пространства $N \ge 3$. В связи с развитием нелинейной динамики и теории динамического хаоса неизбежно встал вопрос о синхронизации хаотических автоколебаний. Будучи фундаментальным свойством автоколебательных систем, синхронизация должна в той или иной форме наблюдаться и в режиме динамического хаоса. Хаотические автоколебания отличаются от периодических и квазипериодических прежде всего тем, что имеют сплошной спектр, напоминающий по форме спектр цветного шума. По этой причине для хаотических колебаний невозможно ввести строгий период и однозначно определить фазу колебаний, а спектральные линии (если они выделяются в спектре мощности хаоса на фоне сплошной компаненты) имеют конечную ширину.

Известно несколько определений синхронизации хаоса. Одной из первых была концепция, согласно которой синхронизация хаоса понималась как явление установления периодического режима под влиянием внешнего гармонического воздействия на систему в режиме хаотических автоколебаний. Переход от хаотических к регулярным колебаниям при этом наблюдается при достаточно высокой интенсивности воздействия, т. е. имеется некий порог синхронизации [40, 78, 79].

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Другой тип синхронизации хаоса имеет место при взаимодействии двух одинаковых хаотических систем. С увеличением коэффициента связи колебания в двух взаимодействующих системах становятся полностью идентичными: временные реализации соответствующих динамических переменных обоих подсистем полностью повторяют друг друга [37, 80, 41, 81, 42]. Этот тип синхронизации принято называть *полной синхронизацией*.

Кроме того, классические представления о синхронизации как об эффектах захвата или подавления частоты допускают обобщение на случай хаотических колебаний. Такой подход к проблеме синхронизации хаоса, на наш взгляд, является наиболее последовательным. Соответствующий тип синхронизации получил название *частотно-фазовой* синхронизации хаоса. Концепция частотно-фазовой синхронизации хаотических автоколебаний отражена в ряде статей: [39, 43–45, 82, 83] и др., а также в монографиях [13, 14]. Однако частотно-фазовая синхронизация наблюдается не для любых хаотических автогенераторов, а только для автогенераторов в режиме так называемого спирального аттрактора [13, 84–86].

Помимо указанных выше типов синхронизации хаоса рассматриваются и некоторые другие эффекты частичной синхронизации, возникающие при взаимодействии неидентичных хаотических систем: к ним относятся *запаздывающая синхронизация* (lag-synchronization) и *обобщенная синхронизация*. Запаздывающая синхронизация наблюдается при сильном взаимодействии хаотических систем с незначительной расстройкой параметров. По своим характеристикам она близка к полной синхронизации: временные реализации соответствующих динамических переменных двух систем повторяют друг друга с некоторым запаздыванием во времени [46]. Обобщенная синхронизация хаоса означает возникновение функциональной взаимосвязи между мгновенными состояниями взаимодействующих хаотических систем [47, 87, 88].

4.4.1. Частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний

Режим спирального аттрактора можно назвать фазо-когерентным хаосом [13]. Действительно, хаотические автоколебания в этом случае характеризуются наличием ярко выраженной спектральной линии на некоторой базовой частоте ω_0, которая соответствует средней частоте вращения фазовых траекторий вокруг состояния равновесия в подходящим образом выбранной проекции. Базовая частота хаотических автоколебаний может быть захвачена или подавлена при взаимодействии генераторов, подобно частоте квазигармонических автоколебаний. Кроме того, можно определенным образом ввести мгновенную фазу хаотических автоколебаний и наблюдать эффект фазового захвата. Синхронизация хаоса в таком понимании наблюдается в широком классе динамических систем, в которых имеет место режим спирального аттрактора. Возможна как взаимная, так и вынужденная синхронизация фазо-когерентного хаоса, в том числе при периодическом воздействии. Хотя спиральный аттрактор является частным случаем хаотического аттрактора, он реализуется во многих динамических системах, в которых имеется петля сепаратрисы состояния равновесия типа седло–фокус. Поэтому частотно-фазовая синхронизация хаоса не является чем-то исключительным, а представляет собой широко распространенное явление.

Рассмотрим режим спирального аттрактора в хорошо известной динамической системе Ресслер [89]:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \tag{4.53}$$

Проекция фазовой траектории на плоскость переменных (x, y) и спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$ колебаний $x(t)$ представлены на рис. 4.55. Как видно из рисунка, в проекции (рис. 4.55, *а*) траектория совершает вращательные движения вокруг нуля координат, а спектр $S_x(\omega)$ на фоне сплошного пьедестала имеет достаточно узкополосный пик на некоторой частоте $\omega = \omega_0$ (рис. 4.55, *б*).

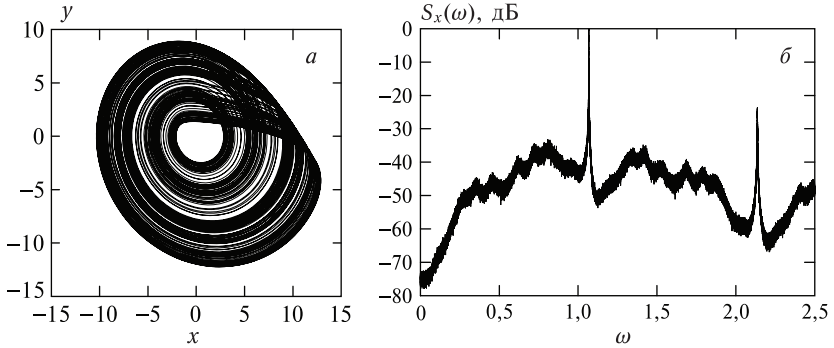


Рис. 4.55. Проекция спирального аттрактора на плоскость переменных (x, y) (*а*) и нормированный спектр мощности $S_x(\omega)$ колебаний $x(t)$ (*б*) в системе (4.53) при $\alpha = \beta = 0{,}2$, $\mu = 6{,}5$

Спиральные аттракторы типа рис. 4.55, *а* возникают в результате последовательности бифуркаций удвоения периода предельного цикла. Исходный устойчивый предельный цикл становится неустойчивым (седловым), но траектории на спиральном аттракторе вращаются вблизи этого седлового цикла с высокой степенью регулярности. Если в фазовом пространстве ввести секущую поверхность, которую траектория пересекает всюду трансверсально (например, плоскость $y = 0$), и рассчитать после-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

довательность интервалов времени T_i между пересечениями траекторией этой поверхности в одном и том же направлении, то можно убедиться в следующем. Распределение интервалов времени $p(T)$ (рис. 4.56) имеет ярко выраженный максимум при $T = T_0$, что свидетельствует о близком к регулярному вращении с почти постоянным периодом. По этой причине данный тип хаоса называют фазокогерентным. Следствием регулярности вращения фазовых траекторий является наличие в спектре мощности узкой спектральной линии с максимумом на частоте $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Ширина этой линии конечна, но мала: $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Таким образом, без учета широкого, но низкого пьедестала (на уровне -50 дБ) генератор спирального хаоса подобен зашумленному генератору периодических колебаний.

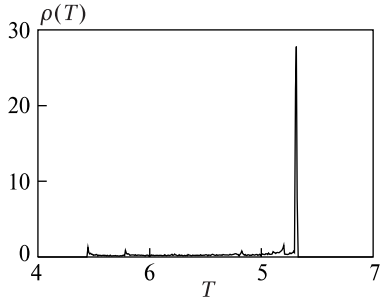


Рис. 4.56. Распределение интервалов времени между последовательными пересечениями фазовой траекторией секущей плоскости $y = 0$ в одном направлении, рассчитанное для аттрактора Ресслер, представленного на рис. 4.55, *а*

В работах [43, 44, 83] впервые был установлен эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний и показано существование области захвата (области синхронного хаоса) в пространстве параметров. Эти результаты положили начало формированию представлений о синхронизации хаоса на основе классической теории колебаний. В указанных работах явление синхронизации хаоса исследовалось для генератора с инерционной нелинейностью (ГИН) Анищенко–Астахова. Здесь мы проиллюстрируем их на примере аттрактора Ресслер. Введем внешнее гармоническое воздействие в систему (4.53)

$$\dot{x} = -y - z + b\sin(\omega_1 t), \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \qquad (4.54)$$

Здесь b, ω_1 — амплитуда и круговая частота внешнего воздействия. Зафиксируем значения параметров $\alpha = \beta = 0{,}2$, $\mu = 6{,}5$. В этом случае значение базовой частоты спирального аттрактора в отсутствии внешней силы будет $\omega_0 = 1{,}0683 \pm 10^{-4}$ (рис. 4.55, *б*). Выберем значение амплитуды $b = 0{,}05$ и будем исследовать эволюцию спектра мощности $S_x(\omega)$ переменной $x(t)$ при изменении частоты воздействия ω_1 в интервале $1{,}060 \le \omega_1 \le 1{,}065$. Результаты расчета спектров для трех значений ω_1 представлены на рис. 4.57.

Как видно из данных, приведенных на рис. 4.57, для относительно большой расстройки частоты воздействия и базовой частоты автономной

системы в спектре колебаний (кривая *1*) присутствуют линия сигнала воздействия ω_1 и линия базовой частоты ω_0. С уменьшением расстройки эти линии сближаются (кривая *2*) и, наконец, происходит захват базовой частоты хаотических автоколебаний внешним сигналом: $\omega_0 = \omega_1$ (кривая *3*). Моменту захвата отвечает значение частоты воздействия $\omega_1 = 1{,}065$, не равное исходной величине $\omega_0 = 1{,}0683$. Таким образом, в результате захвата спектральная линия базовой частоты хаотических автоколебаний сместилась и стала равной частоте внешнего воздействия. Имеет место полная аналогия с эффектом захвата частоты в классической теории синхронизации предельного цикла. Дальнейшие исследования показали, что эта аналогия имеет фундаментальный характер. Для спирального хаоса, как и для предельного цикла, можно говорить об эффектах захвата частоты и фазы. Однако, чтобы применить фазовый подход требуется корректно определить мгновенную фазу хаотических автоколебаний.

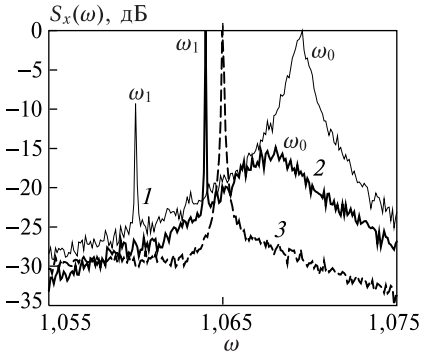


Рис. 4.57. Эффект захвата базовой частоты ω_0 в системе (4.54). Нормированный спектр мощности колебаний $x(t)$ при $\omega_1 = 1{,}06$ (*1*), $\omega_1 = 1{,}064$ (*2*) и $\omega_1 = 1{,}065$ (*3*)

Высокая степень регулярности вращения фазовой траектории аттрактора Ресслер, позволяет представить колебания $x(t)$ и $y(t)$ в том же виде, который использовался ранее при анализе синхронизации генератора Ван дер Поля:

$$x(t) = \rho(t)\cos\Phi(t), \quad y(t) = \rho(t)\sin\Phi(t). \qquad (4.55)$$

Замена переменных (4.55) означает следующее. На плоскости переменных (x, y) (рис. 4.55, *а*) изображающей точке на траектории сопоставляется вектор с началом в состоянии равновесия. Для системы Ресслер при значениях параметров, соответствующих спиральному аттрактору, состояние равновесия расположено практически в начале координат. Таким образом, начало рассматриваемого вектора можно совместить с точкой $(0, 0)$. Длина вектора представляет собой мгновенную амплитуду колебаний $\rho(t)$, а угол поворота вектора относительно оси абсцисс — мгновенную фазу $\Phi(t)$. Положительный угол соответствует вращению против часовой стрелки. Именно так вращается изображающая точка в плоскости (x, y) в системе Ресслер. В случае, когда вращение изображаю-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

щей точки в рассматриваемой проекции происходит по часовой стрелке (как, например, в ГИН), следует во втором уравнении (4.55) перед синусом поставить знак «−». Замена переменных (4.55) означает переход на плоскости динамических переменных (x, y) к полярной системе отсчета. Таким образом, зная текущие значения x и y, легко найти мгновенные значения амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \\ \Phi(t) &= \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{4.56}$$

Добавление или вычитание целого числа поворотов на угол π необходимо, чтобы «достроить» фазу до полного угла вращения. При этом значение целочисленной переменной k определяется из условия непрерывности функции $\Phi(t)$. Полученная таким образом мгновенная фаза $\Phi(t)$ является полной фазой, определенной в бесконечном интервале: $\Phi(t) \in (-\infty, +\infty)$. Кроме того, иногда возникает необходимость рассмотреть фазу, определенную в ограниченном интервале: $\widetilde{\Phi}(t) \in [-\pi, +\pi]$ или $\widetilde{\Phi}(t) \in [0, 2\pi]$. Очевидно, что $\Phi(t) = \widetilde{\Phi}(t) \pm 2m\pi$, где m — некоторое целое число.

Рассмотренное нами определение мгновенных амплитуды и фазы не является единственным [13, 91, 90]. Вместо динамических переменных $x(t)$ и $y(t)$ в (4.55) могут быть использованы и другие пары переменных. При выборе таких переменных главное — обеспечить регулярное вращение проекции фазовой траектории вокруг некоторой точки, которая берется за начало радиус-вектора. Подходящими переменными могут быть производные dx/dt и dy/dt [92] или переменные $x(t)$ и $x_{\text{H}}(t)$, где $x_{\text{H}}(t)$ — сопряженный по Гильберту процесс $x_{\text{H}}(t)$ [13, 45]:

$$x_{\text{H}}(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\theta)}{t - \theta}\, d\theta. \tag{4.57}$$

Кроме того, можно ввести фазу, используя последовательность моментов времени t_i, соответствующих пересечениям траекторией секущей плоскости [13] в заданном направлении. При кусочно линейной аппроксимации фаза в произвольный момент времени определяется как

$$\Phi(t) = 2\pi \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \pm 2\pi i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.58}$$

Здесь i — число пересечений в заданном направлении за время наблюдения $t - t_0$.

Из любого определения мгновенной фазы $\Phi(t)$ следует определение мгновенной и средней частот колебаний:

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}, \quad \omega_{\text{c}} = \left\langle \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\rangle = \langle \omega(t) \rangle. \tag{4.59}$$

Здесь скобки $\langle \ldots \rangle$ могут означать как усреднение по ансамблю, так и усреднение по времени, поскольку процесс $\omega(t)$, как правило обладает свойством эргодичности. Рассматривая усреднение по времени, легко получить

$$\omega_{\text{c}} = \lim_{T \to \infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}. \tag{4.60}$$

Очевидно, что мгновенные значения амплитуды, фазы и частоты при различных способах введения амплитуды и фазы будут различны. Однако, чтобы амплитудно-фазовое представление динамики хаотической системы имело смысл, необходимо, чтобы статистические характеристики (по крайней мере те, которые связаны с наблюдаемыми величинами и явлениями) не зависели от принятого за основу определения фазы. Необходимо отметить следующее: при исследовании фазовой синхронизации хаотических автоколебаний очень важно, чтобы мгновенная фаза была определена корректно. Критерием корректности определения мгновенной фазы в режиме спирального аттрактора служит совпадение средней частоты ω_{c} (4.60) с базовой частотой колебаний ω_0 [90, 91].

Произведя замену переменных (4.55) в уравнениях (4.54), получим уравнения системы Ресслер в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{1}{2}\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\rho\cos 2\Phi - z\cos\Phi + b\cos\Phi\sin(\omega_1 t), \\ \dot{\Phi} &= 1 + \frac{1}{2}\alpha\sin 2\Phi + \frac{1}{\rho}z\sin\Phi - \frac{1}{\rho}b\sin\Phi\sin(\omega_1 t), \\ \dot{z} &= \beta + z(\rho\cos\Phi - \mu). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Зафиксировав значения параметров $\alpha = \beta = 0{,}2$, $\mu = 6{,}5$ и $b = 0{,}05$, проинтегрируем систему (4.61) численно, изменяя частоту внешнего воздействия ω_1. Используя полученные данные для $\Phi(t)$, вычислим соответствующие значения средней частоты ω_{c} (4.60). На рис. 4.58 представлены зависимости отношений частот $\Theta_{\text{c}} = \omega_{\text{c}}/\omega_1$ (кривая *1*) и $\Theta_0 = \omega_0/\omega_1$ (кривая *2*) от частоты сигнала воздействия ω_1.

Как видно из графиков, имеет место захват средней частоты ω_{c} внешним сигналом в конечной области частот $1{,}065 \le \omega_1 \le 1{,}078$. При этом рассчитанные значения средней частоты ω_{c} и базовой частоты ω_0 совпадают в пределах ошибки вычислений.

Используя данные расчетов мгновенной фазы $\Phi(t)$, построим графики зависимости мгновенной разности фаз автоколебаний и воздействия

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$ от времени. На рис. 4.59 представлены такие зависимости, полученные для трех значений частоты внешнего сигнала.

Как видно из графика, в области синхронизации (кривая *3*) имеет место эффект захвата фазы генератора Ресслера внешним сигналом: абсолютная величина разности фаз $|\Delta\Phi|$ не растет во времени, а остается ограниченной вблизи некоторого постоянного значения.

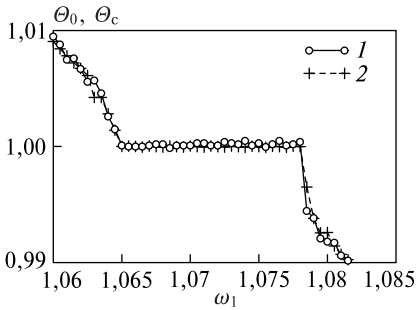


Рис. 4.58. Зависимости отношений частот $\Theta_c = \omega_c/\omega_1$ (кривая *1*) и $\Theta_0 = \omega_0/\omega_1$ (кривая *2*) от частоты воздействия ω_1, рассчитанные для системы (4.61)

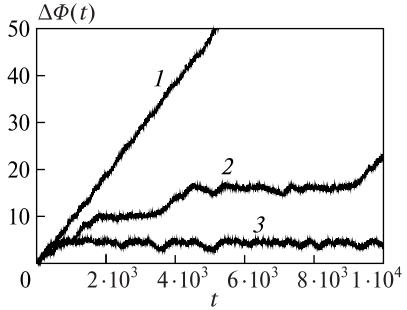


Рис. 4.59. Мгновенная разность фаз $\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$ в зависимости от времени в системе (4.61) для трех значений частоты внешнего сигнала: *1* — $\omega_1 = 1{,}06$, *2* — $\omega_1 = 1{,}064$, *3* — $\omega_1 = 1{,}065$

Идея фазового описания синхронизации когерентного хаоса впервые была предложена в работе [45]. Согласно концепции фазовой синхронизации хаотических автоколебаний [13, 45] классическое определение эффекта фазового захвата (4.1) должно быть преобразовано следующим образом:

$$|m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t)| \le K, \tag{4.62}$$

где K — ограниченная константа, зависящая от начальной разности фаз, m и n — целые числа. В отличие от синхронизации периодических колебаний, в случае захвата фаз хаотических автогенераторов, разность фаз не является константой. Она флуктуирует во времени, но ее отклонения от некоторого постоянного значения строго ограничены. Абсолютная величина таких отклонений не должна превышать π. Легко видеть, что из условия фазового захвата (4.62) следует рациональное соотношение средних частот:

$$m\omega_{c1} = n\omega_{c2}, \quad \text{где} \quad \omega_{c1} = \left\langle \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \right\rangle, \quad \omega_{c2} = \left\langle \frac{d\Phi_2(t)}{dt} \right\rangle. \tag{4.63}$$

Поскольку в режиме спирального аттрактора базовые частоты спектров парциальных генераторов совпадают с соответствующими средними частотами, то равенство (4.63) должно выполняться и для базовых частот. Таким образом, частотная и фазовая синхронизация хаоса не являются двумя различными эффектами, а так же как и в классическом случае, представляют собой две стороны одного явления — частотно-фазовой синхронизации.

Синхронизация хаотического автогенератора наблюдается в некоторой области значений управляющих параметров, называемой *областью синхронизации*. Рассмотрим системы (4.54), (4.61) при $\alpha = \beta = 0{,}2$, $\mu = 6{,}5$. Будем менять параметры внешнего воздействия: ω_1 и b и построим область синхронных режимов на плоскости (ω_1, b), используя для диагностики синхронизации хаоса рассмотренные выше критерии. Результаты расчетов приведены на рис. 4.60.

Область, помеченная на диаграмме цифрой 1, отвечает режиму синхронного хаоса. В этой области имеет место эффект захвата базовой частоты хаотического аттрактора ω_0 внешним сигналом на основном тоне, $\omega_c = \omega_1$. Одновременно в этой области происходит захват фазы с условием $|\Delta\Phi| = |\Phi(t) - \omega_1 t| \le K$. Переход из области 1 в область 2 означает переход от синхронного хаоса к несинхроннму хаосу, чему соответствует нарушение режима захвата частоты и фазы. Поскольку в спектре несинхронного хаоса (область 2), кроме широкополосного пьедестала, присутствуют спектральные линии двух базовых частот: ω_0 и ω_1, его называют *тороидальным хаосом* или *тор-хаосом*. В области 3 существуют устойчивые периодические колебания (предельный цикл) периода $T = 8\pi/\omega_0$ с захваченной основной частотой: $\omega_0 = \omega_1$ и субгармониками $\omega_1/2$ и $\omega_1/4$. Таким образом, область синхронизации, представленная на рис. 4.60, состоит из двух областей с различным характером синхронных колебаний:области синхронного хаоса (1) и области синхронных периодических колебаний (3). В общем случае устройство области синхронизации хаотических автоколебаний может быть очень сложным и включать множество областей, соответствующих различным хаотическим и периодическим аттракторам [83, 44, 93, 94].

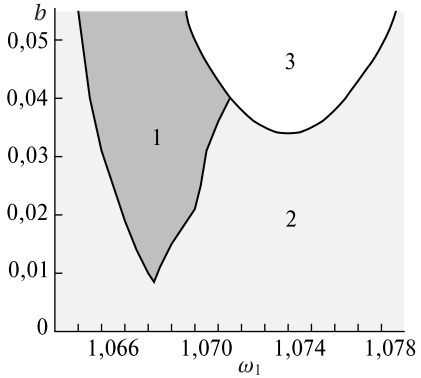


Рис. 4.60. Диаграмма режимов системы (4.54) на плоскости параметров (ω_1, b): 1 — область синхронного хаоса; 2 — область несинхронного хаоса; 3 — область синхронных периодических колебаний

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Если ограничиться малыми значениями амплитуды воздействия (в рассматриваемом случае $b \leq 0{,}34$), то картина будет сравнительно простой: имеет место характерная область синхронизации хаоса в виде «клюва», как и для случая периодических автоколебаний. Отличие в том, что клюв синхронизации хаоса не опирается на ось абсцисс, соответствующую нулевой амплитуде воздействия. Для того, чтобы фазовый захват хаотических автоколебаний стал возможен, необходимо, чтобы амплитуда воздействия (или связь, при взаимной синхронизации) превысила некоторое пороговое значение [13, 82, 95]. Причина существования порога тесно связана с бифуркационным механизмом частотно-фазовой синхронизации хаоса. Этот механизм все еще не достаточно изучен, однако ясно, что принципиальную роль в нем играют седловые предельные циклы, встроенные в хаотический аттрактор. Так в [83, 44] было показано, что на плоскости управляющих параметров линии касательных бифуркаций седловых циклов различных периодов накапливаются к границе синхронизации хаоса. Сама граница хаотической синхронизации представляет собой критическую линию, к которой сходятся точки касательных бифуркаций для циклов с возрастающими периодами.

Аналогичная интерпретация механизма синхронизации хаоса развивается в работах [82, 95]. Для анализа данной проблемы вводится некоторое искусственно сконструированное двумерное необратимое отображение, моделирующее синхронизацию хаотического генератора периодической внешней силой. Седловые циклы, являющиеся как бы «скелетом» синхронного хаотического аттрактора, претерпевают касательные бифуркации в паре с соответствующими периодическими репеллерами. Последние составляют скелет хаотического репеллера, который касается хаотического аттрактора в отдельных точках, а именно, в точках седловых и репеллерных циклов в момент их слияния[1]). Каждая пара скелетных циклов принадлежит неустойчивой инвариантной кривой (соответствующей седловому тору потоковой системы). В результате касательной бифуркации движение на инвариантной кривой становится эргодическим, т. е. возникает направление, по которому изображающая точка уходит от синхронного аттрактора и, сделав оборот вдоль инвариантной кривой, вновь возвращается. При этом наблюдается скачок разности фаз на 2π.

В соответствии с концепцией, изложенной в [82, 95], существование порога синхронизации хаоса имеет очевидное объяснение: скелетные

[1]) В моделируемой потоковой системе роль репеллерных циклов очевидно играют седловые циклы, но с большей размерностью неустойчивого многообразия, чем скелетные циклы аттрактора, а вместо хаотического репеллера существует хаотическое седло.

циклы хаотического аттрактора имеют близкие, но все же несколько различающиеся основные частоты (т. е. их периоды не являются строго кратными). Каждый такой цикл имеет свой клюв синхронизации, границами которого служат линии седло-репеллерных бифуркаций. Клювы синхронизации различных циклов опираются на различные точки оси абсцисс, соответствующей нулевой амплитуде воздействия. Таким образом, область синхронизации хаоса, представляющая собой пересечение клювов синхронизации всевозможных скелетных циклов, уже не может иметь общую точку с осью абсцисс. Ее нижняя граница отстоит от оси абсцисс на некоторое расстояние, равное пороговому значению амплитуды воздействия (рис. 4.61).

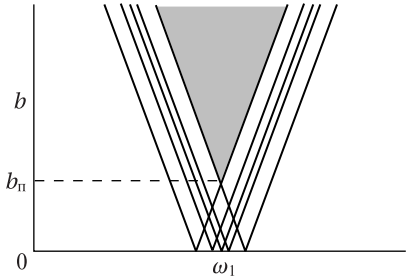


Рис. 4.61. Качественная иллюстрация возникновения амплитудного порога при синхронизации хаоса: сплошными тонкими линиями обозначены границы клювов синхронизации седловых скелетных циклов; закрашенная область соответствует синхронизации хаоса; пунктиром отмечен порог синхронизации $b_п$

Численные эксперименты с автогенераторами когерентного хаоса, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями (например [96], в целом подтверждают предполагаемый бифуркационный механизм фазового захвата хаотических колебаний.

В классической теории синхронизации периодических автоколебаний различают два механизма синхронизации: захват фаз и подавление автоколебаний в одной из взаимодействующих систем. Переход в область синхронизации через подавление автоколебаний наблюдается при больших значениях частотной расстройки и сильном взаимодействии систем (см. разд. 4.1). Подавление может иметь место и в случае хаотических автоколебаний. Как показывают результаты исследований (например, представленные в [43, 83, 44, 93, 94]) при взаимной синхронизации хаотических автогенераторов или при вынужденной синхронизации хаоса гармоническим сигналом эффекту подавления автоколебаний предшествует переход от несинхронного хаоса к квазипериодическому режиму. В области синхронизации в этом случае наблюдаются периодические колебания, а ее граница соответствует бифуркации рождения тора (бифуркации Неймарка–Сакера)[1]). Для того, чтобы наблюдать пере-

[1]) Область периодических колебаний на рис. 4.60 не связана с эффектом подавления. Об этом свидетельствует характер границы между областями 2 и 3, которая связана с седло-узловой бифуркацией циклов.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ход «несинхронный хаос» → «синхронный хаос», реализуемый через механизм подавления, нужно рассмотреть однонаправленное воздействие одного хаотического генератора на другой. При соответствующем выборе параметра частотной расстройки и коэффициента однонаправленной связи в такой системе в области хаотической динамики можно наблюдать оба классических механизма синхронизации, связанные с захватом и с подавлением автоколебаний.

Обобщенная синхронизация хаоса, наблюдаемая в системах с однонаправленной связью (связь типа *«master–slave»*) [47, 87, 88], есть ни что иное как подавление автоколебаний вынуждаемой системы. Состояние вынуждаемой системы в этом случае полностью определяется состоянием воздействующей системы. Такое явление можно наблюдать при взаимодействии хаотических систем, не только с близким типом поведения, но и с совершенно различной структурой хаоса. Возможно также подавление хаоса периодическим сигналом (о чем говорилось выше) и даже случайной силой [97–101].

Исследование вынужденной синхронизации генератора спирального хаоса в натурном эксперименте

Для проведения экспериментов была создана установка, включающая радиотехнический генератор с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова (ГИН) [102], генератор гармонического сигнала, подаваемого на ГИН в качестве внешнего воздействия, и компьютер с быстродействующим АЦП. Блок-схема ГИН приведена на рис. 4.62, а его математическая модель в безразмерных переменных представляет собой следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = mx + y - xz - px^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2,$$
$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \tag{4.64}$$

При определенных значениях параметров в генераторе реализуется спиральный хаотический аттрактор, наблюдаемый экспериментально. Соответствующая проекция аттрактора в плоскости x, y и спектр процесса $x(t)$ представлены на рис. 4.63, *а* и *б*.[1])

Исследуемый спиральный аттрактор является двухсвязанным, т. е. имеет вид двухобходной ленты Мебиуса. Соответственно, в спектре мощности

[1]) В действительности экспериментально снимаются не безразмерные переменные x и y, а напряжения в определенных точках установки, пропорциональные данным величинам.

присутствует субгармоника на частоте $f_0/2$ и линии на кратных частотах. Этот факт не является принципиальным для исследования эффекта синхронизации. Если внешнее воздействие приводит к захвату базовой частоты f_0, то захваченными оказываются все ее гармоники и субгармоники. Выбор данного режима в эксперименте обусловлен тем обстоятельством, что развитый (односвязанный) спиральный аттрактор в ГИН оказывается слишком чувствительным к слабому шуму, неизбежно присутствующему в экспериментальной установке.

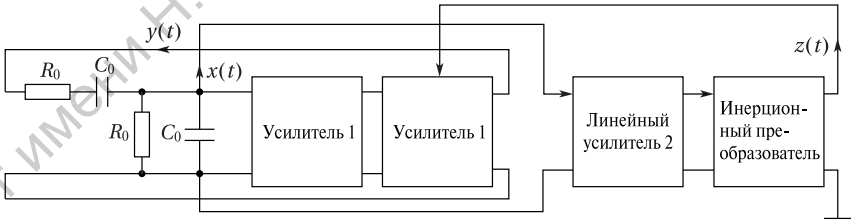


Рис. 4.62. Схема RC-генератора с инерционной нелинейностью

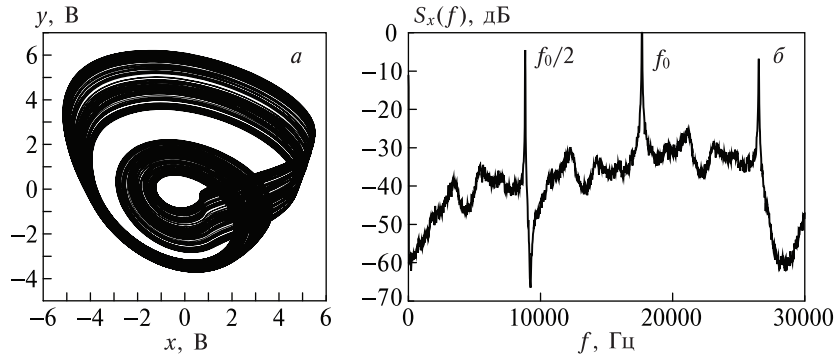


Рис. 4.63. Проекция спирального аттрактора (*а*) и нормированный спектр мощности $S_x(f)$ колебаний $x(t)$ (*б*) в режиме спирального хаоса, полученные экспериментально для радиотехнического генератора Анищенко–Астахова

Экспериментально исследовалась вынужденная синхронизация генератора гармоническим воздействием с частотой f_1, близкой к базовой частоте хаотических автоколебаний. Данные, полученные экспериментально для ГИН, находятся в полном соответствии с результатами численного моделирования вынужденной синхронизации хаоса в осцилляторе Ресслер, которые были представлены в предыдущем разделе. На рис. 4.64 приведены фрагменты спектров колебаний, иллюстрирующие эффект захвата базовой частоты f_0.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Экспериментально измерялось отношение частот $\Theta_0 = f_0/f_1$ и была построена зависимость Θ_0 от частоты воздействия f_1 (рис. 4.65). Она свидетельствует о существовании конечной области захвата частоты.

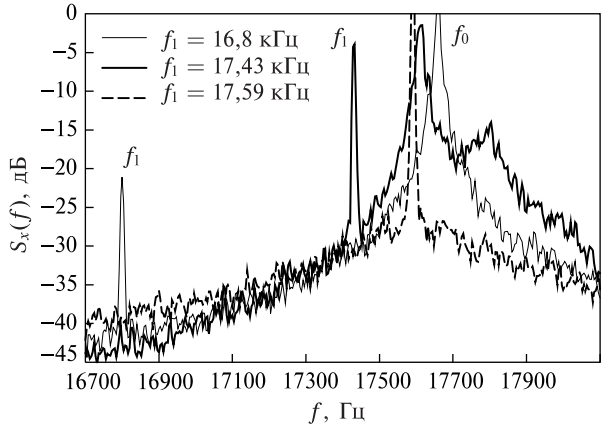


Рис. 4.64. Эффект захвата базовой частоты f_0 в хаотическом генераторе Анищенко–Астахова при изменении частоты гармонического воздействия (физический эксперимент)

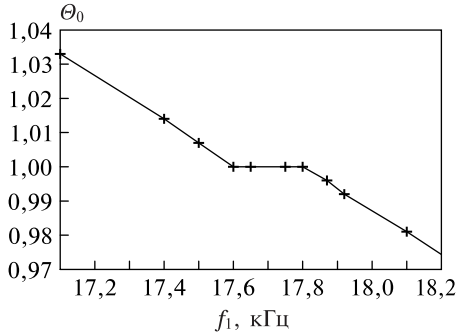


Рис. 4.65. Зависимость отношения частот $\Theta_0 = f_0/f_1$ от частоты воздействия f_1 в хаотическом генераторе Анищенко–Астахова (физический эксперимент)

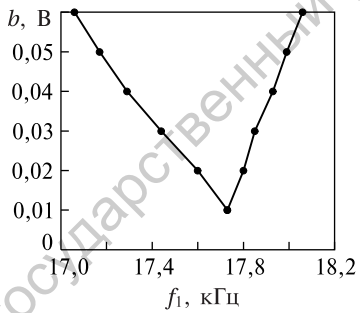


Рис. 4.66. Область синхронизации системы хаотического генератора Анищенко–Астахова на плоскости параметров (f_1, b) (физический эксперимент)

На рис. 4.66 представлен фрагмент области вынужденной синхронизации хаотического радиотехнического генератора на плоскости управляющих параметров: частота воздействия f_1, амплитуда внешней силы b.

4.4.2. Полная синхронизация взаимодействующих хаотических систем

При взаимодействии двух совершенно идентичных хаотических автогенераторов, можно наблюдать явление полной синхронизации хаоса: начиная с некоторого значения параметра связи, колебания парциальных систем становятся полностью идентичными.

Рассмотрим в общем виде некоторую систему двух взаимодействующих полностью идентичных хаотических подсистем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \alpha_1) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_2, \alpha_2) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Здесь $\mathbf{x}_{1,2}$ — векторы состояния, а $\alpha_{1,2}$ — векторные параметры подсистем. Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то парциальные элементы полностью идентичны. Векторная функция $\mathbf{g}(\ldots)$ определяет характер связи, причем $\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = 0$. В случае полной идентичности парциальных подсистем в фазовом пространстве полной системы (4.65) существует инвариантное многообразие $\mathbf{U}$ $(\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2)$, называемое *симметричным подпространством*. Фазовые траектории, лежащие в $\mathbf{U}$, соответствуют полностью синхронным колебаниям. Если предельное множество $\mathbf{U}$ является притягивающим в фазовом пространстве системы (4.65), т. е. является аттрактором, то реализуется *эффект полной синхронизации*.

Проиллюстрируем эффект полной синхронизации на примере двух симметрично связанных идентичных осцилляторов Ресслер. Уравнения системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \alpha y_1, \\ \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu), \\ \dot{x}_2 &= -y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= x_2 + \alpha y_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta + z_2(x_2 - \mu). \end{aligned} \tag{4.66}$$

Выберем режим спирального хаоса в каждой их взаимодействующих подсистем, положив $\alpha = \beta = 0{,}2$ и $\mu = 6{,}5$ и проследим эволюцию предельного множества фазовых траекторий системы (4.66) с увеличением параметра связи. С этой целью будем строить проекцию аттрактора на плоскость однотипных переменных (x_1, x_2) или (y_1, y_2). Режиму полной синхронизации при этом отвечает аттрактор, расположенный в симметричном подпространстве $\mathbf{U}$. Соответственно, проекции траекторий на аттракторе лежат на диагонали $x_1 = x_2$ (или $y_1 = y_2$).

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

На рис. 4.67 представлены результаты вычислений, проведенных для значения коэффициента связи $\gamma = 0{,}2$. Видно, что фазовая траектория, стартующая из начальной точки, не принадлежащей **U**, после некоторого переходного процесса достигает инвариантного подпространства **U** и там остается. Таким образом, при выбранном значении параметра связи в системе реализуется режим полной хаотической синхронизации: для любого момента времени $t > t_п$ ($t_п$ — время переходного процесса) $x_1(t) \equiv x_2(t)$, $y_1(t) \equiv y_2(t)$ и $z_1(t) \equiv z_2(t)$.

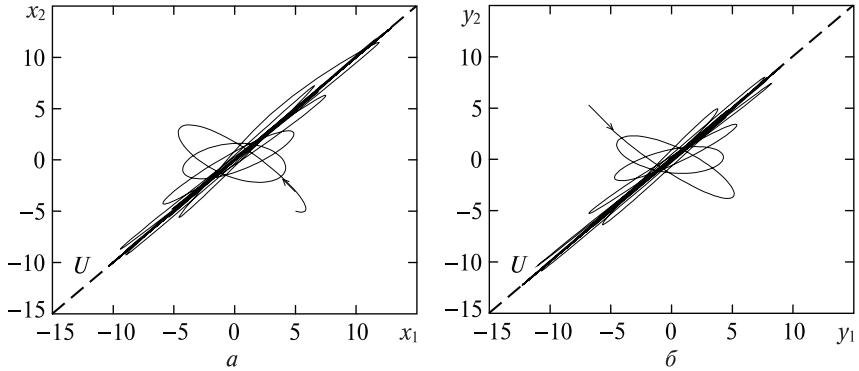


Рис. 4.67. Проекции фазовой траектории аттрактора системы (4.66) на плоскость переменных (x_1, x_2) (*а*) (y_1, y_2) (*б*)

Многочисленные исследования показали, что полная синхронизация (в отличие от частотно-фазовой) может наблюдаться не только для спирального хаоса, но и в случае более сложных хаотических автоколебаний, таких как квазигиперболический хаос в системе Лоренца [42] или режим двойной спирали в генераторе Чуа [103, 94]. Полная хаотическая синхронизация возможна не только для автогенераторов, но также и для взаимодействующих нелинейных хаотических осцилляторов [104], находящихся под воздействием одной и той же внешней силы, и модельных отображений последования [80, 37, 105, 106].

Механизм возникновения и разрушения полной синхронизации, так же как и в случае частотно-фазовой синхронизации, связан с бифуркациями седловых и репеллерных циклов в хаотическом предельном множестве. В отличие от механизма частотно-фазовой синхронизации он достаточно полно исследован в целом ряде работ [107, 42, 80, 108–113]. В этих и многих других работах показывается, каким образом инвариантное многообразие **U** системы (4.65) в котором располагается «синфазный» хаотический аттрактор, перестает быть притягивающим при уменьшении параметра связи.

Для простоты, вместо системы (4.65) рассмотрим модельное отображение последования, представляющие собой связанные одномерные необратимые отображения:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma g(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma g(x_n - y_n). \end{aligned} \tag{4.67}$$

Устойчивость траекторий системы (4.67), принадлежащих инвариантному многообразию **U** (биссектрисе $x = y$), в этом случае определяется двумя ляпуновскими показателями, λ_{tn} и λ_{tr}. Показатель λ_{tn} характеризуют эволюцию возмущений, лежащих в **U**, а λ_{tr} — трансверсальных к нему. Таким образом, разрушение режима полной хаотической синхронизации в (4.67) диагностируется по знаку *трансверсального показателя*, определяемого выражением

$$\lambda_{tr} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n}. \tag{4.68}$$

Если показатель λ_{tr} становится положительным, это означает, что предельное множество, лежащее в **U**, теряет устойчивость в трансверсальном направлении и траектория при сколь угодно малом нарушении симметрии в начальных условиях уходит от инвариантного многообразия **U** на какой-либо аттрактор, не лежащий в **U**. В многомерном случае эволюция возмущения, трансверсального к **U**, описывается N ляпуновскими показателями (где N — размерность фазового пространства парциальной системы). Если хотя бы один из них становится положительным, то инвариантное многообразие перестает быть устойчивым. В результате происходит разрушение режима полной синхронизации хаоса, называемое *бифуркацией прорыва* (*blowout bifurcation*). Оно обычно сопровождается явлением переходной (на конечных временах) или «истинной» перемежаемости (*перемежаемость Ямады–Фуджисаки* или *on-off-перемежаемость* [107, 109]).

Однако ляпуновские показатели — это усредненные по аттрактору характеристики, которые не диагностируют всех локальных изменений в структуре предельного множества. В [80, 109, 112, 113] было показано, что еще до того, как λ_{tr} становится положительным, возможно появление счетного множества точек инвариантного многообразия, в которых имеет место трансверсальная неустойчивость. Эти точки принадлежат неустойчивым циклам, лежащим в инвариантном подпространстве. Для двумерного отображения (4.67) эти циклы являются репеллерами, в общем случае — седлами. Попав в окрестность такого цикла, изображающая точка (если она не лежит строго в **U**) удаляется от инвариантного многообразия. Если в системе при тех же значениях параметров нет

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

другого аттрактора, кроме «синфазного» (лежащего в **U**), то через некоторое время траектория вновь вернется в окрестность инвариантного многообразия и в конечном счете попадет на него. Однако если число встроенных в «синфазный» хаотический аттрактор неустойчивых циклов велико, может наблюдаться длительный переходный процесс on-off-перемежаемости. Воздействие малого шума на «синфазный» хаос приводит к постоянному возобновлению процесса перемежаемости. Наблюдаемый экспериментально хаотический аттрактор в результате действия шума уже не лежит в инвариантном многообразии, а как бы разбухает. Это явление получило название *баблинга* или *пузырения* аттрактора[1]) [109, 113].

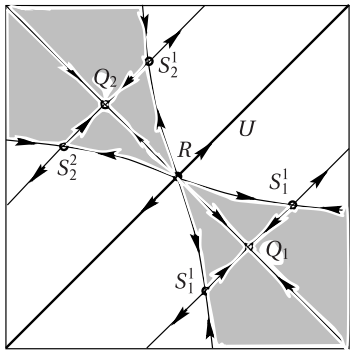


Рис. 4.68. Возникновение языка бассейна «несинфазного» цикла периода 2 (точки $Q_{1,2}$), опирающегося на репеллер R в инвариантном многообразии **U** (биссектриса). $S^1_{1,2}$ и $S^2_{1,2}$ — точки седловых циклов периода 2

Если в системе имеется какой-либо регулярный или хаотический аттрактор, не лежащий в **U**, то возникновение неустойчивых циклов в «синфазном» аттракторе приводит к образованию «языков» бассейна притяжения «несинфазного» аттрактора, опирающихся на точки этих циклов [109, 112]. Подобный «язык» на фазовой плоскости качественно изображен на рис. 4.68. Границы языка образованы устойчивыми многообразиями «несинфазных» седловых циклов $S^{1,2}$.

Возникновение счетного множества языков, принадлежащих аттрактору, не лежащему в **U**, приводит к «изрешечиванию» локальной окрестности инвариантного многообразия, так что сколь угодно близко от любой точки «синфазного» аттрактора найдется точка, принадлежащая бассейну другого аттрактора. Такое явление получило название *ридлинга* или *изрешечивания*[2]) [109, 110, 113]. В результате изрешечивания хаотический аттрактор в **U** перестает быть аттрактором в обычном смысле. Он превращается в так называемый *слабый аттрактор* или *аттрактор Милнора* [114, 115].

На рис. 4.69 представлен вид изрешеченной окрестности хаотического аттрактора, лежащего в многообразии **U** (на биссектрисе) для системы связанных логистических отображений. Рисунок соответствует случаю,

[1]) От *англ.* bubling — пузырение.

[2]) От *англ.* riddling — изрешечивание.

когда трансверсальный ляпуновский показатель еще отрицателен, т. е. бифуркация прорыва еще не произошла.

После того, как трансверсальное направление становится неустойчивым в среднем на аттракторе, лежащий в инвариантном многообразии аттрактор перестают быть аттрактором даже в смысле Милнора, что и соответствует бифуркации прорыва.

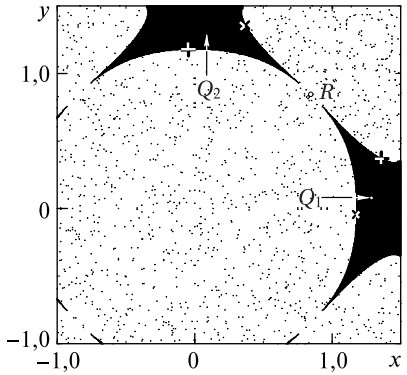


Рис. 4.69. Бистабильность и ридлинг в системе связанных логистических отображений. Помимо хаотического «синфазного» аттрактора, расположенного на биссектрисе $x = y$, имеется «несинфазный» устойчивый цикл периода 2 (ему принадлежат точки $Q_{1,2}$). Бассейн притяжения «несинфазного» аттрактора обозначен темными точками

Подчеркнем еще раз, что полная синхронизация хаоса возможна только для полностью идентичных взаимодействующих систем. При расстройке парциальных систем по параметрам симметричное подпространство **U** перестают существовать, и соответственно, при конечном значении параметра связи полная синхронизация невозможна. Однако если различие взаимодействующих систем незначительно, то при достаточно сильной связи наблюдается эффект, близкий к полной синхронизации. Он состоит в том, что колебания парциальных систем полностью повторяют друг друга с некоторой задержкой τ_d во времени: $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t + \tau_d)$. Этот эффект, впервые описанный в [46], был назван *lag-синхронизацией* (*запаздывающей синхронизацией*)[1]). Хотя инвариантного подпространства **U** в случае запаздывающей синхронизации не существует, хаотический аттрактор топологически эквивалентен аттрактору при полной синхронизации. Таким образом, запаздывающую синхронизацию можно рассматривать как обобщение понятия полной синхронизации на случай систем со слабой частотной расстройкой.

4.4.3. Количественные характеристики степени синхронности хаотических автоколебаний

Для взаимодействующих хаотических автогенераторов одного типа, но характеризующихся частотной расстройкой, можно выделить три степени синхронизации хаоса. Граница области синхронизации

[1]) По английски «lag» означает «отставание», «запаздывание».

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

на плоскости параметров, управляющих связью и расстройкой, соответствует частотно-фазовой синхронизации парциальных систем. С уменьшением расстройки и ростом параметра связи может возникнуть более сильный эффект синхронизации — запаздывающая синхронизация. Переход от частотно-фазовой синхронизации к запаздывающей синхронизации является сложным процессом, бифуркационный механизм которого еще не в достаточной степени изучен, но, по-видимому, аналогичен механизму возникновения-разрушения полной синхронизации. При нулевой расстройке, начиная с некоторого значения параметра связи, может наблюдаться полная синхронизация: хаотическое предельное множество в симметричном подпространстве становится притягивающим в полном фазовом пространстве системы. В научной литературе можно встретить много различных количественных характеристик степени синхронности взаимодействующих хаотических автогенераторов. Одни из них позволяют определить границу частотно-фазового захвата, другие диагностируют запаздывающую или полную синхронизацию.

Взаимная частотно-фазовая синхронизация хаотических автогенераторов, так же как и рассмотренная ранее вынужденная синхронизация, легко диагностируется с помощью отношения характерных частот (базовых или средних частот взаимодействующих автогенераторов) Θ. В основной области синхронизации выполняется равенство $\Theta = 1$. Кроме того, фазовый захват можно определить с помощью коэффициента эффективной диффузии разности фаз $B_{\text{эф}\Delta\Phi}$, который дает оценку скорости линейного роста дисперсии разности фаз во времени. В случае строгого фазового захвата он должен быть равен нулю, что связано с выполнением условия (4.62). В численных экспериментах из-за ограниченной точности вычислений добиться нулевого значения коэффициента эффективной диффузии разности фаз не удается, однако $B_{\text{эф}\Delta\Phi}$ резко (на несколько порядков) уменьшается на границе области захвата.

Иногда для оценки степени синхронности используют характеристики, типа следующей:

$$\nu = \frac{\sigma^2_{x_1+x_2}}{2(\sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2})}, \tag{4.69}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — однотипные динамические переменные автогенераторов, $\sigma^2_{x_1}$ и $\sigma^2_{x_2}$ — дисперсии переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а $\sigma^2_{x_1+x_2}$ — дисперсия их суммы. Очевидно $\nu \in [0{,}5; 1]$, причем $\nu = 1$ соответствует случаю полной синхронизации, а при полной независимости процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ получаем $\nu = 0{,}5$. Однако данная характеристика не позволяет четко диагностировать ни фазового захвата, ни запаздывающей синхронизации.

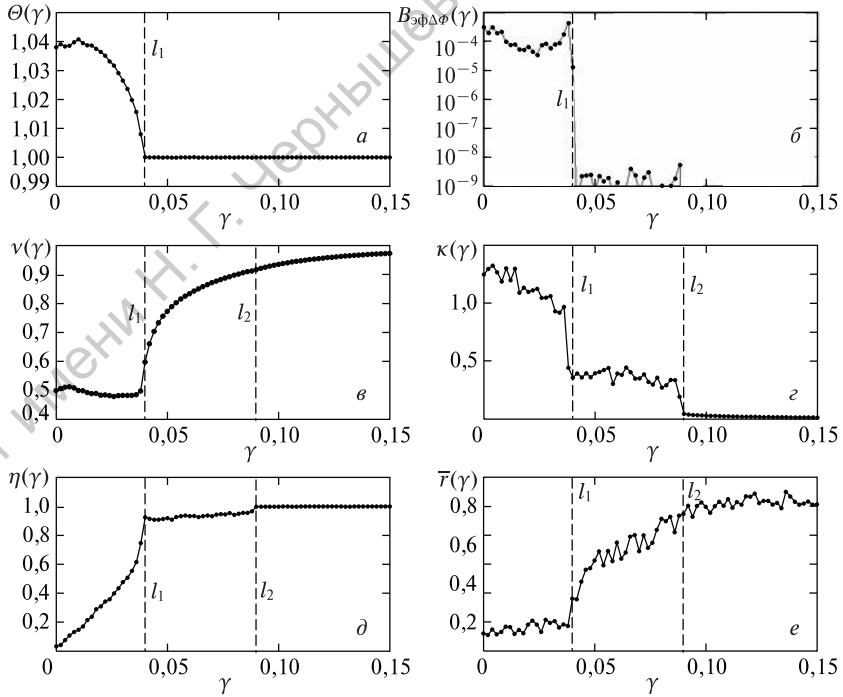


Рис. 4.70. Зависимость различных количественных характеристик степени синхронности взаимодействующих хаотических генераторов от параметра связи γ для модели (4.74) при $\alpha = \beta = 0{,}2$; $\mu = 6{,}5$; $\Delta = 0{,}02$: *а* — отношение средних частот $\Theta = \Omega_2/\Omega_1$; *б* — коэффициент эффективной диффузии $B_{\text{эф}\Delta\Phi}$ мгновенной разности фаз; *в* — величина ν, задаваемая выражением (4.69); *г* — минимальное значение функции подобия κ; *д* — минимальное значение коэффициента взаимной корреляции η; *е* — среднее значение коэффициента когерентности $\overline{r}$. Пунктирными линиями l_1, l_2 отмечены границы фазовой и lag-синхронизации, соответственно

В [46] предлагается характеристика, позволяющая обнаруживать не только полную, но и запаздывающую синхронизацию взаимодействующих хаотических систем:

$$\kappa = \min_{\tau} G(\tau), \tag{4.70}$$

где $G(\tau)$ — функция подобия:

$$G^2(\tau) = \frac{\langle \left(x_2(t+\tau) - x_1(t)\right)^2 \rangle}{\sqrt{\left(\langle x_1^2(t)\rangle \langle x_2^2(t)\rangle\right)}}, \tag{4.71}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — однотипные динамические переменные двух парциальных систем. В случае полной и запаздывающей синхронизации $\kappa = 0$. С ростом расстройки и с уменьшением связи κ растет.

Чтобы охарактеризовать степень синхронности можно использовать также взаимную нормированную корреляционную функцию (коэффициент взаимной корреляции):

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{\langle x_1(t)x_2(t+\tau)\rangle - \langle x_1(t)\rangle\langle x_2(t+\tau)\rangle}{\sqrt{\left(\langle x_1^2(t)\rangle - \langle x_1(t)\rangle^2\right)\left(\langle x_2^2(t+\tau)\rangle - \langle x_2(t+\tau)\rangle^2\right)}}. \tag{4.72}$$

Величина $\eta = \max\limits_{\tau} R_{x_1x_2}(\tau)$ будет равна единице в случае запаздывающей синхронизации (и, разумеется, полной синхронизации) и стремится к нулю при потере колебаниями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ статистической взаимосвязи.

Степень синхронности хаотических колебаний можно оценить и в рамках спектрального подхода. С этой целью можно использовать функцию когерентности [44, 116]

$$r_{x_1x_2}(\omega) = \frac{|S_{x_1x_2}(\omega)|}{\sqrt{S_{x_1}(\omega)S_{x_2}(\omega)}}, \tag{4.73}$$

где S_{x_1}, S_{x_2} — спектры мощности флуктуаций $x_1(t) - \langle x_1\rangle$ и $x_2(t) - \langle x_2\rangle$; $S_{x_1x_2}$ — взаимный спектр флуктуаций. Для статистически независимых процессов $r_{x_1x_2} \equiv 0$, а в случае линейной взаимосвязи $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеем $r_{x_1x_2} \equiv 1$. Чтобы ввести не зависящую от частоты количественную характеристику, можно рассматривать среднее значение коэффициента когерентности в исследуемом частотном интервале $\overline{r}$.

На рис. 4.70 в качестве примера приведены зависимости рассмотренных выше характеристик степени синхронности хаотических колебаний от параметра связи, полученные для системы двух связанных осцилляторов Ресслер с небольшой частотной расстройкой:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1),\\
\dot{y}_1 &= x_1 + \alpha y_1,\\
\dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu),\\
\dot{x}_2 &= -(1-\Delta)y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2),\\
\dot{y}_2 &= (1-\Delta)x_2 + \alpha y_2,\\
\dot{z}_2 &= \beta + z_2(x_2 - \mu),
\end{aligned} \tag{4.74}$$

где Δ — параметр, задающий расстройку парциальных автогенераторов; γ — параметр связи.

Как можно видеть из графиков, представленных на рис. 4.70, различные характеристики по-разному реагируют на пересечение границ l_1 и l_2 и, соответственно, должны применяться с учетом того, какой именно эффект синхронизации изучается. Кроме выше рассмотренных, применяются и другие характеристики степени синхронизации, например, основанные на расчете взаимной или условной информации [117].

4.5. ВЫВОДЫ

Эффекты, рассмотренные в данной главе, позволяют утверждать, что способность к синхронизации в той или иной мере присуща всем автоколебательным системам, как бы ни была сложна их динамика. Однако, как именно проявится фундаментальное свойство синхронизации, какие именно эффекты, связанные с синхронизацией, возможно наблюдать для той или иной системы, зависит от характеристик хаотического аттрактора.

Основой классического подхода к описанию явления синхронизации служит эффект захвата амплитуды и фазы (частоты) периодических автоколебаний, для которых указанные параметры колебательного проецсса строго определены. Как было показано, анализ эффекта синхронизации более сложных хаотических и стохастических автоколебаний можно проводить, используя понятия мгновенных амплитуды и фазы колебаний, так как последние принципиально зависят от времени. Детальные исследования, обсуждаемые в этой главе, убедительно свидетельствуют о следующем. От эффекта захвата амплитуды колебаний приходится отказаться, исключая случай полной синхронизации взаимодействующих систем. Остается единственная возможность: диагностировать эффект синхронизации на основе явления захвата мгновенной фазы колебаний. Другими словами, можно говорить лишь об эффекте фазовой синхронизации. И здесь вскрываются принципиальные особенности, обусловленные неоднозначностью введения определения мгновенной фазы с одной стороны, и необходимостью использования усредненных по ансамблю характеристик (среднее значение фазы и частоты) с другой. Возникает ряд вопросов, связанных с трактовкой получаемых результатов. В частности, наиболее понятным с физической точки зрения эффект фазовой синхронизации сложных непериодических автоколебаний, проявляется в виде захвата средней частоты (среднего характерного времени). При этом характеристики синхронного режима (спектр, время переключений) могут быть измерены экспериментально и соответствуют расчетным значениям.

Наиболее последовательно классическая теория фазовой синхронизации применима к автогенераторам в режиме спирального аттрактора. Для них возможна частотно-фазовая синхронизация. По своим спек-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

трально-корреляционным характеристикам такие хаотические автогенераторы подобны периодическим генераторам, находящимся под действием шума [118, 119]. В то же время, в отличие от зашумленных генераторов, частотно фазовая синхранизация в детерминированном режиме спирального хаоса является строгой (т. е. среднее значение мгновенной фазы остается захваченным сколь угодно долго и эффективная диффузия разности фаз в области синхронизации строго равна нулю).

Для других типов хаотических аттракторов (винтового аттрактора, аттрактора Лоренца, двойной спирали Чуа и иных аттракторов переключательного типа) строгая частотно-фазовая синхронизация не наблюдается, но возможны тругие эффекты, такие как частичная фазовая синхронизация, синхронизация переключений, полная или обобщенная синхронизация. Исследование каждого из эффектов синхронизации хаоса требует своих методов проведения численных и натурных экспериментов и своих, наиболее подходящих для рассматриваемого случая средств диагностики и характеристик степени синхронизации.

Литература

1. *Гюйгенс Х.* Три мемуара по механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1951.
2. *Андронов А. А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Теодорчик К. Ф.* Автоколебательные системы. — М.: Гостехиздат, 1952.
4. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. — М.: Мир, 1968.
5. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. — М.: Наука, 1971.
6. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математические модели в биофизике. — М.: Наука, 1975.
7. *Демьянченко А. Г.* Синхронизация генераторов гармонических колебаний. — М.: Энергия, 1976.
8. *Winfree A. T.* The geometry of biological time. — N.Y.: Springer, 1980.
9. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. — М.: Наука, 1980.
10. *Блехман И. И.* Синхронизация в природе и технике. — М.: Наука, 1981.
11. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations Waves and Turbulence. — Berlin: Springer, 1984.
12. *Ланда П. С.* Нелинейные колебания и волны. — М.: Наука, 1997.
13. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003.
14. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский–Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — М.–Ижевск: Институт комп. иссл., 2003.
15. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems. — Singapore: World Scientific, 2002.

16. *Матросов В. В., Шалфеев В. Д.* Динамический хаос в фазовых системах. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.
17. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: From Simple to Complex. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
18. *Van-der-Poll B.* Theory of the amplitude of free and forced triod vibration // Radio Rev. — 1920. — V. 1. — P. 701–710.
19. *Appleton E. V.* The automatic synchronization of triode oscillator Proc. of the Cambridge Philosophical Society // Math. and Phys. Sciences. — 1922. — V. 21. — P. 231–248.
20. *Андронов А. А., Витт А. А.* К математической теории захватывания // Журнал прикладной физики. — 1930. — Т. 7. — С. 3–11.
21. *Майер А. Г.* К теории связанных колебаний двух самовозбужденных генераторов // Уч. зап. ГГУ. — 1935. — Т. 2(5). — С. 3–11.
22. *Гапонов В. И.* Два связанных генератора с мягким возбуждением // ЖТФ. — 1936. — Т. 6, вып. 6. — С. 801.
23. *Теодорчик К. Ф.* К теории синхронизации релаксационных автоколебаний // ДАН СССР. — 1943. — Т. 40, вып. 2. — С. 63–66.
24. *Хохлов Р. В.* К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы // ДАН СССР. — 1954. — Т. 97, вып. 3. — С. 411–414.
25. *Минакова И. И., Теодорчик К. Ф.* К теории синхронизации автоколебаний произвольной формы ДАН СССР. — 1956. — Т. 106, вып. 4. — С. 658–660.
26. *Парыгин В. Н.* Взаимная синхронизация трех связанных автоколебательных генераторов в случае слабой связи // Радиотехника и электроника. — 1956. — Т. 1, вып. 2. — С. 197–204.
27. *Уткин Г. М.* Взаимная синхронизация генераторов на кратных частотах // Радиотехника и электроника. — 1957. — Т. 2, вып. 1. — С. 44–56.
28. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
29. *Малахов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
30. *Акопян И. Г., Ланда П. С.* Синхронизация автоколебаний на обертонах при наличии шума // Радиотехника и электроника. — 1962. — Т. 7, вып. 8. — С. 1285–1293.
31. *Костин И. К., Романовский Ю. М.* Флуктуации в системах многих связанных генераторов // Вестник МГУ. Сер. физ. и астр. — 1972. — Т. 13, вып. 6. — С. 698–705.
32. *Костин И. К., Романовский Ю. М.* Взаимная синхронизация релаксационных генераторов в присутствии шума // Изв. вузов. Радиофизика. — 1975. — Т. 18, вып. 1. — С. 36–42.
33. *Ланда П. С., Таранкова Н. Д.* Синхронизация генератора при модуляции его собственной частоты // Радиотехника и электроника. — 1976. — Т. 21, вып. 2. — С. 260–265.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

34. *Скупой В. Ф., Копылов В. П.* О синхронизации ЧМ-автогенератора // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24, вып. 7. — С. 1374–1379.
35. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. — 2006. — V. 73. — P. 056202.
36. *Анищенко В. С., Николаев С. М.* Экспериментальное исследование синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2007. — Т. 15, вып. 6. — С. 93–101.
37. *Fujisaka H., Yamada Y.* Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory syatems // Progr. Theor. Phys. — 1983. — V. 69. — P. 32–46.
38. *Pikovsky A. S.* On the interaction of starange attractors // Z. Phys. B. — 1984. — V. 55. — P. 149–154.
39. *Пиковский А. С.* Синхронизация фазы стохастических автоколебаний периодическим внешним сигналом // Радиотехника и электроника. — 1985. — Т. 1. — С. 1970–1974.
40. *Кузнецов Ю. А., Ланда П. С., Ольховой А. Ф., Перминов С. М.* Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. — 1985. — Т. 281, вып. 2. — С. 1164–1169.
41. *Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. — 1986. — Т. 29, вып. 9. — С. 1050–1060.
42. *Pecora L., Carroll T.* Synchronization of chaotic systems // Phys. Rev. Lett. — 1990. — V. 64. — P. 821–823.
43. *Анищенко В. С., Постнов Д. Э.* Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. — 1988. — Т. 14, вып. 6. — С. 569–573.
44. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Postnov D. E., Safonova M. A.* Synchronization of chaos // Int. J. of Bif. and Chaos. — 1992. — V. 2, No. 3. — P. 633–644.
45. *Rosenblum M. G., Pikovsky A., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillations // Phys. Rev. Lett. — 1996. — V. 76(11). — P. 1804–1807.
46. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. — 1997. — V. 78. — P. 4193–4196.
47. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I.* Generalized synchronization of chaos in unidirectorally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. — 1995. — V. 51. — P. 980–995.
48. *Doedel E., Paffenroth R. C., Fairgrieve T. F., Kuznetsov Y. A., Oldeman B. E., Sandstede B., Wang X.* // AUTO2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HOMCONT): Technical report. — Concordia University, 2002.
49. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.–Ижевск: Институт комп. иссл., 2002. — 560 с.

50. *Van der Pol B.* Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. (Reception with reactive triode) // Phil. Mag. — 1927. — V. 3. — P. 64–80.
51. *Van der Pol B., Van der Mark.* Frquency demultiplication // Nature. — 1927. — V. 120. — P. 363–364.
52. *Andronov A. A., Vitt A. A.* Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol // Archiv fur Elektrotechnik. — 1930. — V. 24(1). — P. 99–110. (Русский перевод: *Андронов А. А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 70–84.
53. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Уч. зап. Горьковского ун-та. — 1939. — Т. 6. — С. 3–24.
54. *Cartwright M. L., Littlewood J. E.* On nonlinear differential equations of the second order, I: The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a), k$ large // J. Lond. Math. Soc. — 1945. — V. 20. — P. 180–189.
55. *Holmes P., Rand D. R.* Bifurcations of the forced van der Pol oscillator // Quart. Appl. Math. — 1978. — V. 35. — P. 495–509.
56. *Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Phase synchronization in regular and chaotic systems // Int. J. Bif. and Chaos. — 2000. — V. 10(1). — P. 2291–2306.
57. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания: Учебное пособие для вузов. — М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2002. — 292 с.
58. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
59. *Тураев Д. В., Шильников А. Л., Шильников Л. П.* Некоторые математические проблемы классической синхронизации // В сб.: Нелинейные волны 2004 / Отв. ред. А.В. Гапонов–Грехов, В. И. Некоркин. — Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005.
60. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. — М.: Наука, 1971.
61. *Rand R. H., Holmes P. J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mech. — 1980. — V. 15. — P. 387.
62. *Storti D. W., Rand R. H.* Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mech. — 1982. — V. 17(3). — P. 143.
63. *Chacraborty T., Rand R. H.* The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mech. — 1988. — V. 23. — P. 369.
64. *Aronson D. G., Ermentrout G. B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators // Physica. D. — 1990. — V. 41. — P. 403.
65. *Pastor I., Perez-Garsia V. M., Encinas-Sanz F., Guerra J. M.* Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. — 1993. — V. 48, No. 1. — P. 171–182.
66. *Pastor-Diaz I., Lopez-Fraguas A.* Dynamics of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. — 1995. — V. 52, No. 2. — P. 1480–1489.
67. *Wirkus S., Rand R.* The Dynamics of Two Coupled van der Pol Oscillators with Delay Coupling // Nonlinear Dynamics. — 2002. — V. 30. — P. 205–221.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

68. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003. — 496 с.

69. *Ivanchenko M. V., Osipov G. V., Shalfeev V. D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica. D. — 2004. — V. 189. — P. 8–30.

70. *Camacho E., Rand R., Howland H.* Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // International Journal of Solids and Structures. — 2004. — V. 41. — P. 2133–2143.

71. *Balanov A. G., Janson N. B., Astakhov V. V., McClintock P. V. E.* Role of saddle tori in the mutual synchronization of periodic oscillations // Phys. Rev. E. — 2005. — V. 72. — P. 2005.

72. *Кузнецов А. П., Паксютов В. И., Роман Ю. П.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов Ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // Письма в ЖТФ. — 2007. — Т. 33, вып. 15. — С. 15–21.

73. *Ramana Reddy D.V., Sen A., Johnston G. L.* Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation // Physica. D. — 1999. — V. 129. — P. 15–34.

74. *Анищенко В. С., Николаев С. М., Kurths J.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. — 2008. — Т. 4, вып. 1. — С. 39–56.

75. *Анищенко В. С., Николаев С. М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. — 2005. — Т. 31, вып. 19. — С. 88–94.

76. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. — 2007. — V. 76. — P. 046216.

77. *Loose A., Wunsche H.-J., Henneberger F.* Synchronization of a two-frequency oscillation in a semiconductor laser // Phys. Rev. E. — 2009 (in press).

78. *Ланда П. С., Рендель Ю. С., Шер В. Ф.* Синхронизация колебаний в системе Лоренца // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. — 1989. — Т. 32, вып. 9. — С. 1172–1174.

79. *Dykman G., Landa P., Neimark Yu.* Synchronization of chaotic oscillations by external force // Chaos, Solitons and Fractals. — 1992. — V. 1(4). — P. 339–345.

80. *Pikovsky A., Grassberger P.* Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — V. 24. — P. 4587–4597.

81. *Волковский А. Р., Рульков Н. Ф.* Экспериментальное исследование бифуркаций на пороге стохастической синхронизации // Письма в ЖТФ. — 1989. — Т. 15, вып. 7. — С. 5–10.

82. *Pikovsky A., Rosenblum M., Osipov G., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica. D. — 1997. — V. 104. — P. 219–238.

83. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Постнов Д. Э., Сафонова М. А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. — 1991. — Т. 36, вып. 2. — С. 338–351.

84. *Arneodo A., Collet P., Tresser C.* Possible new strange attractors with spiral structure // Commun. Math. Phys. — 1981. — V. 79. — P. 573–579.

85. *Farmer L. D.* Spectral broadening of period--dubling bifurcation sequences // Phys. Rev. Lett. — 1981. — V. 47(5). — P. 179–182.

86. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990.

87. *Kocarev L., Parlitz U.* Generalizedsynchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. — 1996. — V. 76(11). — P. 1816–1819.

88. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 54(5). — P. R4508–R4511.

89. *Rossler O. E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. — 1976. — V. 57. — P. 397–398.

90. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Strelkova G. I.* Instantaneous phase method in studing chaotic and stochastic oscillations and its limitations // Fluct. and Noise Lett. — 2004. — V. 4(1). — P. L219–L227.

91. *Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С.* Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // Радиотехника и электроника. — 2004. — Т. 49, вып. 1. — С. 1–7.

92. *Osipov G. V., Hu B., Zhou C., Ivanchenko M. V., Kurths J.* Tree types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillations // Phys. Rev. Lett. — 2003. — V. 91(2). — P. 024101.

93. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V., Wu C. W., Chua L. O.* Dinamics of the nonautonomous Chua's circuit // Int. J. of Bif. and Chaos. — 1995. — V. 5(6). — P. 1525–1540.

94. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Vadivasova T. E., Sosnovtseva O. V., Wu C. W., Chua L. O.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. of Bif. and Chaos. — 1995. — V. 5(6). — P. 1677–1699.

95. *Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J.* Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // Phys. Rev. Lett. — 1997. — V. 79. — P. 47–50.

96. *Rosa E., Ott E., Hess M. H.* Transition to phase synchronization of chaos // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 80(8). — P. 1642–1645.

97. *Пиковский А. С.* Синхронизация и стохастизация ансамбля автогенераторов внешним шумом // Изв. вузов. Радиофизика. — 1984. — Т. 27, вып. 5. — С. 576–581.

98. *Sanchez E., Matias M.A., Perez-Munuzuri V.* Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study // Phys. Rev. E. — 1997. — V. 56(4). — P. 4068–4071.

99. *Goldobin D. S., Pikovsky A. S.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // Phys. Rev. E. — 2005. — V. 71. — P. 045201(R).

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

100. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем // ДАН. — 2006. — Т. 407, вып. 6. — С. 761–765.

101. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // Phys. Lett. A. — 2006. — V. 354(5-6). — P. 423–427.

102. *Anishchenko V. S.* Dynamical chaos — Models and Experiments. — Singapore: World Scientific, 1995.

103. *Belykh V. N., Verichev N. N., Kocarev L. J., Chua L. O.* On chaotic synchronization in a linear array of Chua's circuits // Int. J. of Bif. and Chaos. — 1993. — V. 3(2). — P. 579–589.

104. *Астахов В. В., Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Селезнев Е. П.* Квазиоднородные стохастические движения и их разрушение в системе связанных нелинейных осцилляторов // Изв. вузов. Радиофизика. — 1988. — Т. 31, вып. 5. — С. 627–630.

105. *Кузнецов С. П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. — 1985. — Т. 28, вып. 8. — С. 991–1007.

106. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. — 1991. — Т. 34, вып. 10–12. — С. 1079–1115.

107. *Fujisaka H., Yamada T.* A new intermittency in coupled dynamical systems // Progr. Theor. Phys. — 1985. — V. 74(4). — P. 918–921.

108. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V.* The effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // Phys. Rev. E. — 1998. — V. 58(5). — P. 5620–5628.

109. *Ashwin P., Boescu J., Stewart I.* From attractor to chaotic saddle: tale of transverse instability // Nonlinearity. — 1994. — V. 9. — P. 703–737.

110. *Ott E., Sommerer J. C.* Blowout bifurcation in chaotic dynamical systems // Phys. Lett. A. — 1994. — V. 188. — P. 39–47.

111. *Sushchik M., Rulkov N. F., Abarbanel H. D. I.* Robustness and stability of synchronized chaos: an illustrative model // IEEE Trans. on Circuits and Systems. Fundamental Theory and Applications. — 1997. — V. 44(10). — P. 867–873.

112. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // Phys. Rev. Lett. — 1997. — V. 79(6). — P. 1014–1017.

113. *Hasler M., Maistrenko Y.* An introduction to the synchronization of chaotic systems: coupled skew tent maps // IEEE Trans. on Circuits and Systems. Fundamental Theory and Applications. — 1997. — V. 44(10). — P. 856–866.

114. *Milnor J.* On the concept of attractor // Commun. Math. Phys. — 1985. — V. 99. — P. 177–195.

115. *Maistrenko Y., Kapitaniak T.* Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 54. — P. 3285–3292.

116. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // Phys. Rev. E. — 2005. — V. 72. — P. 016218.

117. *Shabunin A., Demidov V., Astakhov V., Anishchenko V.* Information approach to quantify complete and phase synchronization of chaos // Phys. Rev. E. — 2002. — V. 65. — P. 056215.

118. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Окрокверцхов Г. А., Стрелкова Г. И.* Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса // Радиотехника и электроника. — 2003. — Т. 48, вып. 7. — С. 824–835.

119. *Anishchenko V. S., Okrokvertskhov G. A., Vadivasova T. E.* Mixing and spectral-correlation properties of chaotic and stochastic systems: numerical and physical experiments // New J. of Physics. — 2005. — V. 7. — P. 76–106.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ГЛАВА 5 ФЛУКТУАЦИИ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

5.1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование влияния случайных воздействий на поведение нелинейных динамических систем (к которым относятся и автоколебательные системы) представляет собой важную задачу, как с точки зрения фундаментальной теории, так и в свете практических приложений [1–6]. Важность данной задачи определяется тем, что процессы, протекающие в реальных системах любой природы, в большинстве случаев нельзя рассматривать как чисто случайные (стохастические) или чисто детерминированные (динамические). Они, как правило, являются результатом совместного действия детерминированных и случайных сил. В радиофизических задачах флуктуации, вызванные действием случайных сил, традиционно называют шумом. В настоящее время этот термин получил общенаучное употребление. В радиофизике шум всегда играл особенно заметную, хотя в основном негативную роль. Вопросы генерации, усиления, передачи и приема сигналов при наличии шума, а также исследование природы и статистических характеристик источников шума в радиофизических системах традиционно составляют предмет статистической радиофизики. Именно в статистической радиофизике впервые встал вопрос исследования влияния шума на процессы в нелинейных динамических в том числе автоколебательных системах [7]. В классических трудах представителей радиофизической школы: Р. И. Стратоновича, А. Н. Малахова, С. М. Рытова и др. была развита теория автогенератора с источниками шума, исследовано явление синхронизации в присутствии шума, рассмотрен ряд других нелинейных стохастических задач [8–13]. Однако, также как и нелинейная теория колебаний, по своему происхождению тесно связанная с радиофизикой, теория флуктуаций в нелинейных системах все больше уходит за рамки радиофизических или каких-то иных узко-дисциплинарных задач и становится во все большей степени самостоятельной фундаментальной научной дисциплиной.

Какова же природа шума в динамических системах? В самых общих чертах можно выделить два типа источников шума. Во-первых в любой системе всегда присутствуют внутренние, принципиально неустранимые источники шума. Внутренний или естественный шум — это флуктуации макропеременных, задающих состояние системы, состоящей из большого числа микрочастиц. Множество возможных микросостояний очень велико, а макропараметры являются усредненными на множестве микросостояний характеристиками. Однако усредненные переменные не дают точного описания системы и возникает необходимость ввести источник шума. Микросостояние системы не может быть строго определено, как в силу огромного числа микропараметров, так и вследствие квантового характера поведения микрочастиц. В радиоаппаратуре к естественным шумам относят тепловой шум, связанный с тепловым движением носителей заряда, дробовой шум, вызванный случайным характером перехода носителей через потенциальный барьер, шум генерации-рекомбинации, возникающий в результате случайных процессов перехода носителей между зоной проводимости и валентной зоной и т. д. Как правило, соответствующие флуктуации макропараметров системы очень малы, однако они принципиально неустранимы. Кроме того естественные флуктуации имеют малое (по сравнению с какими-либо динамическими масштабами) время корреляции и, соответственно, широкий спектр. Во многих задачах естественный шум можно заменить идеализированной математической моделью — гауссовым белым шумом.

Во-вторых любая система в действительности не является строго замкнутой и испытывает воздействия со стороны окружающей среды и других систем. Такое воздействие не поддается строго детерминированному описанию и задается в виде внешнего шума. В радиофизике такой шум называют техническим. Его величина может значительно превосходить величину естественного шума, однако при необходимости влияние внешнего шума может быть существенно снижено с помощью различных технических средств.

Влияние внутренних и внешних источников шума на динамическую систему даже при незначительной интенсивности может оказаться весьма существенным и приводить к несколько неожиданным результатам. Так при увеличении интенсивности шума может наблюдаться переход нелинейной системы к более упорядоченному поведению, как это имеет место в явлениях стохастического и когерентного резонанса [14–18]. Шум в нелинейных системах может приводить к качественным изменениям динамической компоненты поведения системы, т. е. является причиной бифуркационных переходов [4–6, 19–23]. Результат шумового воздействия на динамическую систему определяется не только характеристиками шума, но в значительной степени зависти также от особен-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ностей детерминированной компоненты поведения системы. Наиболее заметным влияние шума может оказаться в случае структурной неустойчивости динамической системы, например в точках бифуркаций или в режиме негиперболического хаоса [24–30]. Все вышесказанное в полной мере относится и к автоколебательным системам.

Как известно кроме нерегулярного поведения, вызванного действием шума, автоколебательная система и сама, в силу свойств детерминированного оператора эволюции, может порождать шумоподобные (хаотические) колебания. Возникает вопрос о сходстве и различиях зашумленных автоколебаний и детерминированного хаоса. Важнейшей общей чертой, присущей большинству стохастических систем и всем (по определению) хаотическим системам, является свойство перемешивания. Для системы с перемешиванием изначально разные части фазового пространства со временем преобразуются таким образом, что становится невозможно их разделить. Перемешивание в системе ведет к потере памяти о начальном состоянии, эргодичности, существованию инвариантной вероятностной меры и убыванию во времени корреляционных функций [31–36]. Случайные силы неизбежно присутствуют в любой реальной системе, порождая стохастическую компоненту оператора эволюции. С другой стороны детерминированный хаос очень характерен для большинства нелинейных систем с размерностью фазового пространства ≥ 3. Таким образом, свойство перемешивания в системе может быть связано как со случайной, так и с детерминированной компонентой оператора эволюции. Вопрос о том, какая именно компонента играет главную роль в эффекте перемешивания требует специального рассмотрения в каждом конкретном случае.

Хаотическая динамика, как известно, непосредственно связана с экспоненциальной неустойчивостью фазовых траекторий на аттракторе. Количественной мерой неустойчивости динамического хаоса служит сумма положительных ляпуновских показателей, дающая верхнюю оценку энтропии Колмогорова–Синая [37–39]. Ляпуновские показатели характеризуют растяжение элемента фазового пространства по одним направлениям вдоль фазовой траектории и сжатие по другим. Растяжение элемента объема является первопричиной динамического перемешивания. Однако, перемешивание определяется не только растяжением элемента фазового пространства, но также и его «складыванием». Это последнее свойство не может быть проанализировано в рамках линейной теории устойчивости. Таким образом, недостаточно знать энтропию Колмогорова–Синая или спектр ляпуновских показателей хаотической системы, для описания свойства перемешивания. Геометрическая структура хаотического аттрактора и особенности поведения фазовых траекторий на аттракторе могут играть очень существенную роль в определении

скорости перемешивания. В данной главе мы ограничимся рассмотрением хаотических аттракторов, так называемого спирального типа [40]. Причиной этому служит сходство хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора с периодическими автоколебаниями в присутствии шума. Такое сходство отмечалось многими авторами, например в [41–44], и стало предметом специального исследования в ряде работ авторов данной книги [35, 36, 45–48].

Задачи, связанные с исследованием влияния шума на автоколебательные режимы структурно-неустойчивых систем со сложной динамикой, проблемы диагностики и анализа индуцированных шумом переходов привлекают все большее внимание исследователей в последние годы, в связи с бурным развитием нелинейной динамики и методов компьютерного моделирования. Однако в целом теория стохастических процессов в нелинейных системах со сложной динамикой находится только в начале своего развития. Имеется много работ, посвященных этой проблеме, но целостная концепция на сегодняшний день отсутствует. По этой причине в этой книге мы в основном коснемся лишь ограниченного круга вопросов, связанных с флуктуациями в автоколебательных системах. В разд. 5.2 кратко излагаются основные представления теории случайных процессов. В разд. 5.3 приводится классическая теория флуктуаций в автономном квазигармоническом генераторе с источником шума. Методы измерения амплитудных и частотных флуктуаций в автогенераторе рассмотрены в разд. 5.4. В разд. 5.5 анализируются статистические характеристики спирального хаотического аттрактора, позволяющие сопоставлять данный вид хаотических автоколебаний с колебаниями в зашумленном периодическом автогенераторе и рассмотрено влияние шума на спиральный хаос. В разд. 5.6 излагается классическая теория синхронизации автогенератора в присутствии шума, а также приведены результаты недавних исследований влияния шума на синхронизацию хаотических автоколебаний в системах со спиральным аттрактором.

5.2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

5.2.1. Основные характеристики случайных процессов

Случайный (*стохастический*) *процесс* — это процесс изменения состояния системы во времени, протекающий по вероятностным (статистическим) законам. Пусть множество M значений переменной X есть пространство состояний системы. Величина X может быть векторной, скалярной, вещественной или комплексной. Случайный процесс описывается случайной функцией $X(t)$, принимающей значения во мно-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

жестве M, где аргумент t обычно имеет смысл времени. Для любого фиксированного t_0 значение $X_0 = X(t_0)$ — случайная величина. Множество состояний M может быть дискретным (конечным или счетным) или непрерывным. Время t может принимать непрерывное или счетное множество значений. В последнем случае говорят о *случайной последовательности* $X(n)$. В результате проведенных наблюдений, измерений или численного моделирования можно получить ту или иную *реализацию случайного процесса*. Она представляет собой детерминированную (неслучайную) функцию времени $x(t)$[1]. Случайный процесс характеризуется бесконечным множеством возможных реализаций, составляющих *статистический ансамбль* с заданными на нем вероятностными характеристиками.

Приведем методы описания и основные характеристики случайных процессов, ограничившись вещественными скалярными непрерывнозначными процессами.

Случайный процесс $X(t)$ характеризуется *n-мерной плотностью вероятности* $p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots x_n, t_n)$, которая является вещественной функцией n текущих значений случайной переменной X в n произвольных момента времени и может быть задана следующим равенством:

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \\ = P\{X(t_1) \in [x_1; x_1 + dx_1] \wedge \dots \wedge X(t_n) \in [x_n; x_n + dx_n]\}, \quad (5.1)$$

или

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \\ = \lim_{\Delta x_i \to 0, i=1,2,\dots n} \frac{P\{X(t_1) \in [x_1;\ x_1 + \Delta x_1] \wedge \dots \wedge X(t_n) \in [x_n;\ x_n + \Delta x_n]\}}{\Delta x_1 \dots \Delta x_n}, \quad (5.2)$$

где $P\{\dots\}$ — вероятность события, обозначенного в фигурных скобках.

Плотность вероятности должна удовлетворять следующим требованиям:

1) $p_n(\dots) \geq 0$ (неотрицательность);

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$ (нормировка);

3) для любого $k < n$

$$p_k(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_k, t_k) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)\, dx_{k+1}\, dx_{k+2} \dots dx_n$$

(согласование);

[1] Случайные величины и случайные функции будем, где возможно, обозначать заглавными буквами, а принимаемые ими значения — прописными буквами.

4) для любых i и j

$$p_n(x_1, t_1, \dots, x_i, t_i, \dots, x_j, t_j, \dots, x_n, t_n) = \\ = p_n(x_1, t_1, \dots, x_j, t_j, \dots, x_i, t_i, \dots, x_n, t_n)$$

(инвариантность относительно перестановки пар аргументов);

5) если значения случайного процесса в некоторые моменты времени t_i^0 статистически независимы, то

$$p_n(x_1, t_1^0, x_2, t_2^0, \dots, x_n, t_n^0) = p_1(x_1, t_1^0)\, p_1(x_2, t_2^0) \dots p_1(x_n, t_n^0).$$

Кроме плотности вероятности случайный процесс можно описать с помощью n-мерной функции распределения $F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$ и n-мерной характеристической функции $\Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \dots, u_n, t_n)$, которые связаны с плотностью вероятности следующими соотношениями:

$$F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \\ = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_n(x_1', t_1, x_2', t_2, \dots, x_n', t_n)\, dx_1'\, dx_2' \dots dx_n'; \quad (5.3)$$

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}; \quad (5.4)$$

$$\Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \dots, u_n, t_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) \exp\Big(j \sum_{i=1}^{n} u_i x_i\Big)\, dx_1 \dots dx_n; \quad (5.5)$$

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_X(u_1, t_1, \dots, u_n, t_n) \exp\Big(-j \sum_{i=1}^{n} u_i x_i\Big)\, du_1 \dots du_n, \quad (5.6)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Случайный процесс $X(t)$ считается *полностью заданным*, если для любого n известна одна из функций: $p_n(\dots)$; $F_n(\dots)$ или $\Theta_X(\dots)$. В этом случае можно найти любые статистические характеристики процесса.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — некоторая детерминированная функция своих аргументов. Пусть аргументы функции f есть значения случайного процесса $X(t)$ в n моментов времени: $X(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. *Статистическим средним* (математическим ожиданием) функции $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ на ансамбле реализаций случайного процесса $X(t)$ называется следующая детерминированная функция аргументов t_i:

$$\overline{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n. \quad (5.7)$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Далее будем обозначать операцию статистического усреднения с помощью угловых скобок $\langle \ldots \rangle$:

$$\overline{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \langle f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \rangle.$$

Моментными функциями (моментами) случайного процесса называют следующие статистические средние от степенных функций:

$$\langle X_1^{r_1} X_2^{r_2} \ldots X_k^{r_k} \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \ldots, x_k, t_k)\, x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}\, dx_1 \ldots dx_k \tag{5.8}$$

либо

$$\langle \widetilde{X}_1^{r_1} \widetilde{X}_2^{r_2} \ldots \widetilde{X}_k^{r_k} \rangle = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \ldots x_k, t_k)(x_1 - \overline{X}(t_1))^{r_1} \ldots (x_k - \overline{X}(t_k))^{r_k}\, dx_1 \ldots dx_k, \tag{5.9}$$

где $X_i = X(t_i)$ — значения случайного процесса в моменты времени t_i; а $\widetilde{X}_i = X(t_i) - \overline{X}(t_i)$ — значения флуктуации (отклонения от среднего); $\overline{X}(t) = \langle X(t) \rangle$ — среднее значение случайного процесса. Моменты вида (5.8) называют *начальными*, а вида (5.9) — *центральными*. Число рассматриваемых отсчетов времени k называют *размерностью момента*, а сумму показателей степеней $\sum_{i=1}^{k} r_i = r$ — *порядком момента*. Моменты случайного процесса представляют собой детерминированные функции аргументов t_i или константы.

Наиболее важны моменты первого и второго порядка. К ним относятся следующие:

1) *среднее значение* случайного процесса (одномерный начальный момент порядка $r = 1$)

$$\overline{X}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x, t)\, x\, dx; \tag{5.10}$$

2) *средний квадрат* (одномерный начальный момент порядка $r = 2$)

$$\overline{X^2}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x, t)\, x^2\, dx; \tag{5.11}$$

3) *дисперсия* (одномерный центральный момент порядка $r = 2$)

$$\sigma_X^2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x, t)(x - \overline{X}(t))^2\, dx = \overline{X^2} - \overline{X}^2; \tag{5.12}$$

4) *ковариационная* (или автоковариационная) функция (двумерный начальный момент порядка $r = 2$)

$$K_X(t_1, t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, t_1, x_2, t_2)\, x_1 x_2\, dx_1\, dx_2; \tag{5.13}$$

5) *корреляционная* (или автокорреляционная) функция (двумерный центральный момент порядка $r = 2$)

$$\psi_X(t_1, t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, t_1, x_2, t_2)(x_1 - \overline{X}(t_1))(x_2 - \overline{X}(t_2))\, dx_1\, dx_2 = \\ = K_X(t_1, t_2) - \overline{X}(t_1)\overline{X}(t_2). \tag{5.14}$$

Как видно из (5.13) и (5.14), для процессов с нулевым средним значением $\overline{X}(t) \equiv 0$ ковариационная и корреляционная функции совпадают. Нормированную автокорреляционную функцию

$$\Psi_X(t_1, t_2) = \frac{\psi_X(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_X^2(t_1)\sigma_X^2(t_2)}} \tag{5.15}$$

называют *коэффициентом корреляции*.

Автокорреляционная функция случайного процесса обладает следующими свойствами:

1) $\psi_X^2(t_1, t_2) \le \sigma_X^2(t_1)\sigma_X^2(t_2)$ (соответственно $|\Psi_X(t_1, t_2)| \le 1$);
2) $\psi_X(t, t) = \sigma_X^2(t)$;
3) $\psi_X(t_1, t_2) = \psi_X(t_2, t_1)$;
4) если значения случайного процесса в некоторые моменты времени t_1' и t_2' статистически независимы, то они *некоррелированы*, т. е. $\psi_X(t_1', t_2') = 0$. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Начальные моменты случайного процесса являются коэффициентами в разложении n-мерной характеристической функции в ряд Маклорена:

$$\Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \ldots, u_n, t_n) = \\ = \sum_{r_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{r_n=0}^{\infty} \frac{\langle X^{r_1}(t_1) X^{r_2}(t_2) \ldots X^{r_n}(t_n) \rangle}{r_1! r_2! \ldots r_n!} (ju_1)^{r_1} (ju_2)^{r_2} \ldots (ju_n)^{r_n} \tag{5.16}$$

и соответственно могут быть найдены по формуле

$$\langle X^{r_1}(t_1) \ldots X^{r_n}(t_n) \rangle = (-j)^r \left. \frac{\partial^r \Theta_X(u_1, t_1, \ldots, u_n, t_n)}{\partial u_1^{r_1} \ldots \partial u_n^{r_n}} \right|_{u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0}, \tag{5.17}$$

где $j = \sqrt{-1}$; $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Аналогично (5.16) можно представить разложение натурального логарифма от характеристической функции:

$$\ln \Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \ldots, u_n, t_n) =$$
$$= \sum_{r_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{r_n=0}^{\infty} \frac{\langle\langle X^{r_1}(t_1) X^{r_2}(t_2) \ldots X^{r_n}(t_n)\rangle\rangle}{r_1! r_2! \ldots r_n!} (ju_1)^{r_1} (ju_2)^{r_2} \ldots (ju_n^{r_n}). \quad (5.18)$$

Коэффициенты в разложении, обозначенные в выражении (5.18) как $\langle\langle X^{r_1}(t_1) X^{r_2}(t_2) \ldots X^{r_n}(t_n)\rangle\rangle$, называются *кумулянтными функциями* (*кумулянтами*) случайного процесса $X(t)$.

Среди множества случайных процессов выделяют *стационарные процессы*. Стационарность случайного процесса означает, что стохастическая система находится в установившемся состоянии и ее статистические характеристики не зависят от сдвига во времени. Различают стационарность в узком (строгом) смысле и стационарность в широком смысле.

Случайный процесс $X(t)$ называют *стационарным в узком* (*строгом*) *смысле*, если для любого целого положительного n, любой константы T и любых моментов времени t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место равенство

$$p_n(x_1, t_1 \pm T, x_2, t_2 \pm T, \ldots, x_n, t_n \pm T) = p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n), \quad (5.19)$$

что означает инвариантность плотности вероятности (и, следовательно, всех статистических характеристик) относительно сдвига во времени. При этом одномерная плотность вероятности не зависит от времени ($p_1(x, t) \equiv p_1(x)$) и одномерные моменты являются константами. Двумерная плотность вероятности зависит только от разности моментов времени $\tau = t_2 - t_1$ ($p_2(x_1, t_1, x_2, t_2) \equiv p_2(x_1, x_2, \tau)$). Соответственно двумерные моменты являются функциями только τ.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если выполняются условия

$$\langle X(t)\rangle \equiv \text{const}; \quad \psi_X(t_1, t_2) = \psi_X(t_2 - t_1); \quad \langle X^2(t)\rangle < \infty. \quad (5.20)$$

Для процессов с конечной «мощностью» (т.е. процессов, для которых $\langle X^2(t)\rangle < \infty$) из строгой стационарности следует стационарность в широком смысле. Из стационарности в широком смысле в общем случае не следует строгой стационарности.

Автокорреляционная функция стационарного процесса обладает следующими свойствами:

1) $|\psi_X(\tau)| \le \sigma_X^2$, где $\tau = t_2 - t_1$;
2) $\psi_X(0) = \sigma_X^2$;
3) $\psi_X(\tau) = \psi_X(\tau)$ (четная функция);
4) если автокорреляционная функция непрерывна при $\tau = 0$, то она непрерывна для любого значения τ.

Стационарный в строгом смысле случайный процесс, для которого выполняется условие $\lim\limits_{\tau\to\infty} \psi_X(\tau) = 0$, называется *процессом с перемешиванием*. Для него справедливо равенство

$$\lim_{\tau\to\infty} p_2(x_1, x_2, \tau) = p_1(x_1)\, p_1(x_2), \quad \text{(расцепление корреляций)}.$$

Скорость перемешивания (расцепления корреляций) характеризуют *временем корреляции* $\tau_{\text{кор}}$. Чаще всего используют следующие два определения времени корреляции.

1. Время корреляции определяется как интервал, на котором огибающая автокорреляционной функции $\gamma_X(\tau)$ убывает в e раз (где e — основание натурального логарифма):

$$\gamma_X(\tau_{\text{кор}}) = \frac{\sigma_X^2}{e}.$$

2. Время корреляции определяется по формуле

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{1}{\sigma_X^2} \int_0^{\infty} \gamma_X(\tau)\, d\tau.$$

Кроме свойства стационарности случайный процесс может обладать важным свойством *эргодичности*. Эргодичность случайного процесса означает, что можно получить определенные статистические характеристики процесса, заменяя статистическое усреднение (по ансамблю реализаций) усреднением по времени вдоль одной реализации. Можно выделить эргодичность относительно отдельных моментных функций, эргодичность 1-, 2-, …, k-го порядка и, наконец, строгую эргодичность.

Пусть $X(t)$ — стационарный в строгом смысле случайный процесс. Среднее по времени значение детерминированной функции случайных аргументов $f[X(t_1), \ldots, X(t_k)]$ вдоль некоторой реализации $x(t)$ случайного процесса определяется как

$$\langle f[x(t_1), \ldots, x(t_k)]\rangle_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f\big[x(t_1), x(t_1 + \tau_1), \ldots, x(t_1 + \tau_{k-1})\big]\, dt_1, \quad (5.21)$$

где $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Символом $\langle \ldots \rangle_t$ будем обозначать операцию усреднения по времени.

Эргодичность относительно среднего значения означает выполнение следующего равенства:

$$\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) x\, dx, \quad (5.22)$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

где символом l.i.m. обозначен среднеквадратический предел случайной функции. Если процесс $X(t)$ является эргодическим относительно среднего значения, то среднее по времени значение $\langle x(t)\rangle_t$ для почти любой реализации $x(t)$ равно среднему по ансамблю значению $\langle X(t)\rangle$:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)x\,dx.$$

Аналогично можно ввести эргодичность относительно среднего квадрата, эргодичность относительно дисперсии и т. д.

Эргодичность первого порядка означает выполнение следующего равенства:

$$\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\frac{1}{T}\int_0^T f[X(t)]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)f(x)\,dx, \tag{5.23}$$

где $f(\dots)$ — любая детерминированная функция своего аргумента.

Если процесс $X(t)$ является эргодическим 1-го порядка, то он также является эргодическим относительно всех одномерных моментов. В этом случае все одномерные моменты можно найти, используя усреднение по времени вдоль почти любой реализации случайного процесса. Достаточным условием эргодичности 1-го порядка является свойство перемешивания.

Аналогично определяется *эргодичность второго порядка.* В этом случае должно выполняться равенство:

$$\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\frac{1}{T}\int_0^T f[X(t), X(t+\tau)]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2, \tau)f(x)\,dx_1\,dx_2, \tag{5.24}$$

где $f(\dots)$ — любая детерминированная функция своих аргументов.

Если процесс $X(t)$ является эргодическим 2-го порядка, то он обладает свойством эргодичности относительно всех двумерных моментов. В этом случае все двумерные моменты можно найти используя усреднение по времени вдоль почти любой реализации случайного процесса. Подобным образом можно определить эргодичность 3-го, и т. д. k-го порядка. *Строгая эргодичность* случайного процесса означает, что все статистические характеристики случайного процесса можно найти используя усреднение по времени.

По форме вероятностного распределения выделяют класс *нормальных процессов. Нормальным* (*гауссовым*) случайным процессом называется

такой процесс $X(t)$, для которого любая совокупность значений $X(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ распределена по совместному нормальному (гауссову) закону:

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \operatorname{Det}\widehat{B}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{b}_{ik}(t_i, t_k)(x_i - \overline{X}(t_i))(x_k - \overline{X}(t_k))\right], \tag{5.25}$$

где $\widehat{B}$ — матрица корреляций с элементами

$$b_{ik} = \langle (X(t_i) - \overline{X}(t_i))(X(t_k) - \overline{X}(t_k))\rangle,$$

а $\widetilde{b}_{ik}$ — элементы обратной матрицы $\widehat{B}^{-1}$.

Одномерная гауссова плотность вероятности выражается формулой

$$p_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2(t)}}\exp\left[-\frac{(x - \overline{X}(t))^2}{2\sigma_X^2(t)}\right], \tag{5.26}$$

где $\overline{X}(t)$ — среднее значение; $\sigma_X^2(t)$ — дисперсия случайного процесса. Гауссово распределение со средним $\overline{X}(t) \equiv 0$ и дисперсией $\sigma_X^2(t) \equiv 1$ называется *стандартным.*

Нормальные случайные процессы обладают следующими важными свойствами.

1. Нормальный случайный процесс полностью задан, если известны функции $\overline{X}(t)$ и $\psi_X(t_1, t_2)$.

2. Некоррелированные значения нормального случайного процесса статистически независимы.

3. Для нормальных случайных процессов с ограниченной дисперсией свойства стационарности в строгом смысле и в широком смысле совпадают.

4. Если $X_1(t), X_2(t), \dots X_m(t)$ — совместно нормальные случайные процессы, то их линейная комбинация $X(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)X_i(t)$, где $a_i(t)$ — детерминированные множители, также является нормальным случайным процессом.

5. Случайный процесс, получаемый в результате линейного преобразования нормального случайного процесса, также является нормальным.

Во многих задачах используется *спектральное представление* случайных процессов. Пусть $X(t)$ — стационарный в широком смысле скалярный вещественный случайный процесс с ограниченным средним квадратом $\langle X^2(t)\rangle$. *Случайным спектром* процесса $X(t)$ на интервале $t \in [-T/2, T/2]$ называется преобразование Фурье от случайной функции:

$$X_T(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} X(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{5.27}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$X_T(j\omega)$ — это комплексная случайная функция аргумента ω. Статистической спектральной характеристикой стационарного случайного процесса служит *спектральная плотность мощности* (или просто *спектральная плотность*). Она может быть введена как

$$W_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\langle |X_T(j\omega)|^2\rangle. \tag{5.28}$$

Можно показать, что для процесса с нулевым средним значением и достаточно быстро спадающей ковариационной функцией $K_X(\tau)$ из определения (5.28) следует, что спектральная плотность мощности есть прямое преобразование Фурье от ковариационной функции:

$$W_X(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{5.29}$$

Обратное преобразование Фурье дает ковариационную функцию:

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_X(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega. \tag{5.30}$$

Можно определить спектральную плотность для любого стационарного случайного процесса, воспользовавшись следующей *теоремой Винера–Хинчина*. Пусть $K_X(\tau)$ — ковариационная функция стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$. Она всегда может быть представлена в виде интеграла Фурье–Стильтьеса:

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}\, dZ_X(\omega), \tag{5.31}$$

где $Z_X(\tau)$ — монотонно неубывающая вещественная неотрицательная ограниченная функция (интегральный спектр стационарного случайного процесса). Спектральная плотность соответственно есть

$$W_X(\omega) = \frac{dZ_X(\omega)}{d\omega} \tag{5.32}$$

Определенная таким образом функция $W_X(\omega)$ связана с ковариационной функцией преобразованиями Фурье (5.29)–(5.30). Однако при этом для некоторых частот она может принимать бесконечные значения.

Спектральная плотность $W_X(\omega)$ вещественного стационарного случайного процесса $X(t)$ обладает следующими свойствами.

1. $W_X(\omega)$ — вещественная неотрицательная функция[1]).

[1]) Это утверждение справедливо и для комплексного стационарного случайного процесса.

2. $W_X(\omega) = W_X(-\omega)$ (четная функция).

3. В силу четности функций $K_X(\tau)$ и $W_X(\omega)$ можно переписать (5.29)–(5.30) в виде

$$W_X(\omega) = 2\int\limits_{0}^{\infty} K_X(\tau)\cos(\omega\tau)\, d\tau, \tag{5.33}$$

$$K_X(\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} W_X(\omega)\cos(\omega\tau)\, d\omega. \tag{5.34}$$

4. Функция $W_X(\omega)$ при некоторых значениях аргумента может иметь особенности в виде δ-функции (т. е. спектр в общем случае является смешанным), что связано с отсутствием требования интегрируемости ковариационной функции. Например, если среднее значение процесса $\overline{X}$ отлично от нуля, то

$$W_X(\omega) = W_{\widetilde{X}}(\omega) + 2\pi\delta(\omega)\overline{X}^2, \tag{5.35}$$

где

$$W_{\widetilde{X}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_X(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau. \tag{5.36}$$

— спектр флуктуаций.

5. Средний квадрат и дисперсию процесса $X(t)$ можно найти интегрируя спектральную плотность $W_X(\omega)$ или $W_{\widetilde{X}}(\omega)$ соответственно по всем частотам:

$$\begin{aligned} \overline{X^2} = K_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_X(\omega)\, d\omega, \\ \sigma_X^2 = \psi_X(0) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{\widetilde{X}}(\omega)\, d\omega. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Кроме спектральной плотности $W_X(\omega)$, определенной как для положительных, так и для отрицательных значений аргумента, часто используют так называемую *одностороннюю* (*физическую*) *спектральную плотность* случайного процесса, которая отлична от нуля только для положительных частот и определяется следующим образом:

$$G_X(\omega) = 2W_X(\omega) \quad \text{при} \quad \omega \geq 0 \quad \text{и} \quad G_X(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad \omega < 0. \tag{5.38}$$

Часто рассматривают такую характеристику, как *ширина спектра* стационарного случайного процесса. Если спектральная плотность случай-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ного процесса имеет один хорошо выраженный максимум, то используются следующие два определения ширины спектра.

1. Эффективная ширина спектра

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{W_{\widetilde{X}}(\omega_0)} \int\limits_0^\infty W_{\widetilde{X}}(\omega)\, d\omega = \frac{\pi\sigma_X^2}{W_{\widetilde{X}}(\omega_0)}, \tag{5.39}$$

где ω_0 — частота спектрального максимума.

2. Ширина спектра на уровне половинной мощности

$$\Delta\omega_{1/2} = \omega_2 - \omega_1, \quad \text{где} \quad W_{\widetilde{X}}(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2} W_{\widetilde{X}}(\omega_0). \tag{5.40}$$

Для ширины спектра и времени корреляции стационарного случайного процесса справедливы следующие соотношения (*соотношение неопределенности*): чем шире энергетический спектр случайного процесса, тем меньше время корреляции и, наоборот, чем уже спектр, тем больше время корреляции.

По спектральным свойствам различают широкополосные и узкополосные случайные процессы. Идеализированной моделью случайного процесса с бесконечно широким спектром является *белый шум* — абсолютно случайный, стационарный в строгом смысле процесс, обладающий постоянной спектральной плотностью на всех частотах: $W_{\text{БШ}} \equiv W_0 \equiv \text{const}$. Легко видеть, что корреляционная функция такого процесса задается функцией Дирака ($\psi_{\text{БШ}}(\tau) = W_0\delta(\tau)$), а дисперсия — бесконечна.

5.2.2. Основы теории марковских процессов

Для любого случайного процесса $X(t)$ n-мерная плотность вероятности может быть представлена в виде

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots x_n, t_n) = \\ = p_{n-1}(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot \upsilon(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}, \ldots x_1, t_1), \tag{5.41}$$

где $\upsilon(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}, \ldots x_1, t_1)$ — условная плотность вероятности, учитывающая $n-1$ предшествующее состояние процесса. Условная плотность вероятности — неотрицательна и нормирована на единицу:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \upsilon(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}, \ldots x_1, t_1)\, dx_n \equiv 1. \tag{5.42}$$

Случайный процесс $X(t)$, для которого условная плотность вероятности зависит только от одного условия, т. е.

$$\upsilon(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}, \ldots x_1, t_1) = \upsilon(x_n, t_n/x_{n-1}, t_{n-1}), \tag{5.43}$$

называется *марковским* (*простейшим марковским*) случайным процессом[1]). Условная плотность вероятности в этом случае называется *плотностью вероятности перехода* из предшествующего состояния в последующее. Марковский процесс называется *однородным*, если $\upsilon(x_2, t_2/x_1, t_1) = \upsilon(x_2, \tau/x_1)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Марковский процесс обладает следующими свойствами.

1. Если точно известно состояние системы в момент времени t_1, то любое состояние в момент $t_2 > t_1$ не зависит от состояний системы в моменты времени $t < t_1$ (т. е. от предыстории процесса).

2. Для марковского процесса $X(t)$ справедливо равенство

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots x_n, t_n) = p_1(x_1, t_1) \prod_{i=2}^{n} \upsilon(x_i, t_i/x_{i-1}, t_{i-1}) \tag{5.44}$$

и, следовательно, он полностью задан, если известны функции $p_1(x, t)$ и $\upsilon(x_2, t_2/x_1, t_1)$.

3. Плотность вероятности перехода определяет эволюцию одномерной плотности вероятности во времени:

$$p_1(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \upsilon(x, t/x_0, t_0)\, p_1(x_0, t_0)\, dx_0. \tag{5.45}$$

Для любого марковского процесса плотности вероятности перехода между состояниями в три последовательных момента времени $t_1 < t_2 < t_3$ должны удовлетворять следующему уравнению

$$\upsilon(x_3, t_3/x_1, t_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \upsilon(x_2, t_2/x_1, t_1)\upsilon(x_3, t_3/x_2, t_2)\, dx_2, \tag{5.46}$$

называемому *уравнением Чепмена–Колмогорова*, *уравнением Смолуховского* или *обобщенным уравнением Маркова*.

В зависимости от дискретности или непрерывности множества состояний и множества моментов времени, различают дискретные марковские последовательности (*марковские цепи*), непрерывные марковские последовательности, дискретные марковские процессы и непрерывнозначные марковские процессы. Далее мы ограничимся кратким описанием только одного класса марковских процессов, а именно диффузионных процессов, которые наиболее часто встречаются в физических и радиофизических задачах.

[1]) Если условная плотность вероятности зависит от k предшествующих состояний, то процесс называется *k-связанным марковским* процессом.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Скалярный вещественный непрерывнозначный марковский процесс $X(t)$ называется *диффузионным*, если существуют следующие ограниченные пределы:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x'-x)\,v(x',t+\Delta t/x,t)\,dx'=A(x,t); \tag{5.47}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x'-x)^2\,v(x',t+\Delta t/x,t)\,dx'=2B(x,t)\not\equiv 0; \tag{5.48}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x'-x)^k\,v(x',t+\Delta t/x,t)\,dx'=C_k(x,t)\equiv 0 \tag{5.49}$$

для любого $k>2$.

Величина $A(x,t)$ представляет собой среднее значение локальной скорости изменения состояния и называется *коэффициентом сноса* или *дрейфа*. Величина $B(x,t)$ характеризует локальную скорость роста дисперсии приращения процесса и называется *коэффициентом диффузии*[1]).

Условия (5.48)–(5.49) означают локальный рост дисперсии приращения $\Delta X=X(t')-x(t)$ по линейному закону, т. е. для малых $\Delta t=t'-t$ справедливо

$$\sigma^2_{\Delta X}(t+\Delta t)=2B(x,t)\Delta t. \tag{5.50}$$

Условие (5.49) исключает большие приращения процесса на малых временах. Хотя допускаются быстрые изменения значений процесса, но в противоположных направлениях. Конечные скачки появляются с нулевой вероятностью, а реализации процесса непрерывны с вероятностью единица. Примером диффузионного процесса может служить скорость броуновской частицы.

Плотность вероятности перехода $v(x,t/x_0,t_0)$ диффузионного процесса $X(t)$ удовлетворят некоторым уравнениям в частных производных, которые можно получить из уравнения Чепмена–Колмогорова и условий (5.47)–(5.49). Эти уравнения называются *прямым и обратным уравнениями Колмогорова*. Прямое уравнение определяет эволюцию распределения в прямом времени и называется также *уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова* (ФПК). Оно имеет вид

$$\frac{\partial v(x,t/x_0,t_0)}{\partial t}=-\frac{\partial A(x,t)\,v(x,t/x_0,t_0)}{\partial x}+\frac{\partial^2 B(x,t)\,v(x,t/x_0,t_0)}{\partial x^2} \tag{5.51}$$

и должно быть дополнено начальным условием: $v(x,t_0/x_0,t_0)=\delta(x-x_0)$. Умножая обе части этого уравнения на $p_1(x_0,t_0)$ и интегрируя по x_0, получаем аналогичное уравнение ФПК для безусловной одномерной плотности вероятности:

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial A(x,t)\,p_1(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial^2 B(x,t)\,p_1(x,t)}{\partial x^2}, \tag{5.52}$$

с начальным условием $p_1(x,t_0)=p_1(x_0,t_0)$. Таким образом, диффузионный процесс $X(t)$ полностью определяется своими коэффициентами сноса и диффузии при заданных начальных и граничных условиях для уравнений (5.51)–(5.52).

Пусть $X(t)$ — стационарный (в строгом смысле) диффузионный процесс. Тогда для него $A(x,t)\equiv A(x)$; $B(x,t)\equiv B(x)$ и $p_1(x,t)\equiv p_1^{\text{ст}}(x)$. Налагая граничные условия

$$p_1^{\text{ст}}(x)|_{x=\pm\infty}\equiv 0,\quad \left.\frac{dp_1^{\text{ст}}(x)}{dx}\right|_{x=\pm\infty}\equiv 0, \tag{5.53}$$

находим решение уравнения ФПК в виде

$$p_1^{\text{ст}}(x)=\frac{C}{B(x)}\exp\Big(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{A(x')}{B(x')}\,dx'\Big), \tag{5.54}$$

где x_0 — произвольно выбранное значение случайной переменной; C — нормировочная константа.

Диффузионный процесс $X(t)$ с заданным начальным состоянием $X(t_0)=x_0$, для которого $A(x,t)\equiv 0$, а $B(x,t)\equiv\text{const}$, называется *винеровским процессом*. Винеровский процесс обладает следующими свойствами.

1. Он является гауссовым процессом.
2. Его среднее значение определяется начальным состоянием ($\langle X(t)\rangle=x_0$).
3. Винеровский процесс является нестационарным и его дисперсия растет линейно во времени со скоростью, равной удвоенному коэффициенту диффузии, т. е. $\sigma^2_X(t)=2B\cdot(t-t_0)$.
4. Винеровский процесс — это *процесс с независимыми приращениями* на неперекрывающихся интервалах времени.

Понятие диффузионного процесса может быть обобщено и на векторный марковский процесс $\mathbf{X}(t)$, для которого текущее состояние задается вектором $\mathbf{x}$ с компонентами x_j, $j=1,2,\ldots N$. Векторный диффузионный процесс характеризуется вектором сноса $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ с компонентами

$$A_j(\mathbf{x},t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int(x'_j-x_j)\,v(\mathbf{x}',t+\Delta t/\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}',\quad j=1,2,\ldots N, \tag{5.55}$$

и матрицей диффузии $\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$ с элементами

$$B_{jk}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int(x'_j-x_j)(x'_k-x_k)\,v(\mathbf{x}',t+\Delta t/\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}',\quad j,k=1,2,\ldots N. \tag{5.56}$$

[1]) Иногда коэффициентом диффузии называют величину $2B(x,t)$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Интегралы в этих выражениях берутся по всем возможным значениям векторной переменной $\mathbf{x}'$. Уравнение ФПК для векторного диффузионного процесса $\mathbf{X}(t)$, записанное относительно одномерной плотности вероятности $p_1(\mathbf{x}, t)$, принимает вид

$$\frac{\partial p_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_j(\mathbf{x}, t)\, p_1(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 B_{jk}(\mathbf{x}, t)\, p_1(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k}. \qquad (5.57)$$

5.2.3. Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)

Пусть поведение некоторой системы описывается дифференциальным уравнением первого порядка (его часто называют *уравнением Ланжевена*), имеющим вид

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t) + g(X, t)\, n(t), \qquad (5.58)$$

где f и g — детерминированные гладкие функции своих аргументов; $n(t)$ — нормированный белый гауссов шум ($\langle n(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n(t)\, n(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$). Множитель g характеризует интенсивность шума. Если g не зависит от состояния X, а является детерминированной функцией времени или константой, то шум, воздействующий на систему, называется *аддитивным*, если же интенсивность шумового воздействия зависит от X, то — *мультипликативным*.

Простейшее СДУ вида

$$\frac{dW}{dt} = g n(t), \quad W(t_0) = W_0, \quad g = \text{const} \qquad (5.59)$$

описывает винеровский процесс $W(t)$ с коэффициентом диффузии $B_W = g^2/2$.

СДУ (5.58) можно переписать в интегральном представлении:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(X(\theta), \theta)\, d\theta + \int_{t_0}^{t} g(X(\theta), \theta)\, dW(\theta), \qquad (5.60)$$

где $W(t)$ — винеровский процесс с нулевым начальным значением и коэффициентом диффузии 1/2. Второй интеграл в этом выражении в случае мультипликативного шума является так называемым *стохастическим интегралом* по винеровскому процессу. Соответствующий среднеквадратический предел от интегральной суммы

$$\int_{t_0}^{t} g(X(\theta), \theta)\, dW(\theta) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=0}^{m-1} g(X(\theta_i'), \theta_i)\big[W(\theta_{i+1}) - W(\theta_i)\big] \qquad (5.61)$$

зависит от выбора точек $\theta_i' \in [\theta_i, \theta_{i+1})$. Соответственно, стохастический интеграл (5.61) может быть определен по-разному. Пусть $\theta_i' = (1-\nu)\theta_i + \nu\theta_{i+1}$, где $\nu \in [0, 1)$. При произвольном значении ν стохастический интеграл (5.61) называется *обобщенным стохастическим интегралом*, а уравнение (5.58) *обобщенным СДУ*. Если положить $\nu = 0$, то получаем *стохастический интеграл Ито* и *СДУ Ито*. В случае $\nu = 1/2$ приходим к *стохастическому интегралу Стратоновича* и *СДУ Стратоновича*.

Случайный процесс $X(t)$, являющийся решением обобщенного СДУ (5.58) и удовлетворяющий детерминированному начальному условию $X(t_0) = x_0$, представляет собой диффузионный марковский процесс с коэффициентом сноса

$$A(x, t) = f(x, t) + \nu g(x, t)\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \qquad (5.62)$$

и коэффициентом диффузии

$$B(x, t) = \frac{1}{2} g^2(x, t). \qquad (5.63)$$

Второе слагаемое в выражении (5.62) появляется только в случае мультипликативного шума. Оно называется *ложным сносом*. Если процесс $X(t)$ описывается СДУ Ито, то ложный снос отсутствует.

Пусть имеется система N обобщенных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dX_j}{dt} = f_j(X_1, \ldots, X_N, t) + \sum_{k=1}^{N} g_{jk}(X_1, \ldots, X_N, t)\, n_k(t), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \qquad (5.64)$$

где $n_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots N$ — статистически независимые нормированные источники нормального белого шума. При заданных начальных условиях $X_j(t_0) = x_j^0$, $j = 1, 2, \ldots N$ система (5.64) описывает векторный диффузионный процесс $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_N(t))$, который характеризуется вектором сноса с компонентами

$$A_j(\mathbf{x}, t) = f_j(\mathbf{x}, t) + \nu \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} g_{ik}(x, t)\frac{\partial g_{jk}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, \ldots, N \qquad (5.65)$$

и матрицей диффузии с элементами

$$B_{jk}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} g_{ji}(x, t)\, g_{ki}(x, t), \quad j, k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (5.66)$$

Зная вектор сноса и матрицу диффузии диффузионного процесса $\mathbf{X}(t)$ можно записать уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (5.57)

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

для одномерной плотности вероятности $p_1(\mathbf{x}, t)$ и аналогичное уравнение для плотности вероятности перехода $\nu(\mathbf{x}, t/\mathbf{x}_0, t_0)$. Решив эти уравнения и найдя функции $p_1(\mathbf{x}, t)$ и $\nu(\mathbf{x}, t/\mathbf{x}_0, t_0)$, мы могли бы определить все статистические характеристики процесса.

Таким образом, система, находящаяся под воздействием независимых источников белого гауссова шума, может быть описана как стохастическими дифференциальными уравнениями, так и уравнением ФПК. Оба способа описания полностью эквивалентны. Если система исследуется теоретическими методами, то это предполагает переход к уравнению ФПК и его строгое или приближенное решение. Решить уравнение ФПК аналитически удается только в наиболее простых случаях или с помощью каких-то существенно упрощающих задачу предположений. При проведении численных экспериментов более простым и удобным оказывается метод непосредственного интегрирования СДУ и определения тех или иных статистических характеристик процесса по результатам интегрирования. Численное решение уравнения ФПК уже для двумерных нелинейных систем связано с рядом трудностей и требует значительно больших затрат вычислительного времени.

5.3. ФЛУКТУАЦИИ В АВТОНОМНОМ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ

5.3.1. Стохастические уравнения квазигармонического автогенератора

Теория флуктуаций в автоколебательной системе с источником шума была развита в классических работах по статистической радиофизике [8–10] на примере низкочастотного радиофизического генератора. Ряд вопросов, связанных с флуктуациями в автогенераторе изложен также в [11–13, 44, 15]. Основные теоретические результаты касаются квазигармонического режима и получены в условиях ряда упрощающих предположений. Рассматривается аддитивный гауссов δ-коррелированный (белый) шум. Флуктуации фазы и амплитуды во времени предполагаются «медленными» по сравнению с периодом автоколебаний. В рамках спектрально-корреляционного анализа делается предположение о слабом шуме и развитой генерации. В этом случае можно пренебречь флуктуациями амплитуды по сравнению с ее невозмущенным значением.

Эквивалентная схема низкочастотного радиогенератора приведена на рис. 5.1. Она может быть описана следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2U}{dt_1^2} + \omega_0^2 U = \left(\frac{G_0 - G}{C} - \frac{3bU^2}{C}\right)\frac{dU}{dt_1} - \frac{1}{C}\frac{dI_{\text{ш}}(t_1)}{dt_1}, \qquad (5.67)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — частота квазигармонических автоколебаний. Переходя к безразмерной переменной $X = U/U_0$ ($U_0 = 1/\sqrt{3bL\omega_0}$) и безразмерному времени $t = \omega_0 t_1$, получаем следующее стохастическое дифференциальное уравнение автогенератора[1]):

$$\ddot{X} + X = (\varepsilon - X^2)\dot{X} + \sqrt{2D}n(t), \qquad (5.68)$$

где точками обозначены производные по безразмерному времени t. Безразмерный параметр возбуждения $\varepsilon = (G_0 - G)/C\omega_0$ управляет режимом генерации. Реальная случайная сила $-\omega_0 L/U_0 \cdot dI_{\text{ш}}(t)/dt$ заменяется на эквивалентный гауссов белый шум: $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$, где $\langle n(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n(t+\tau)\xi(t)\rangle = \delta(\tau)$, D — константа, задающая интенсивность шума. Скобки $\langle\ldots\rangle$ означают статистическое усреднение.

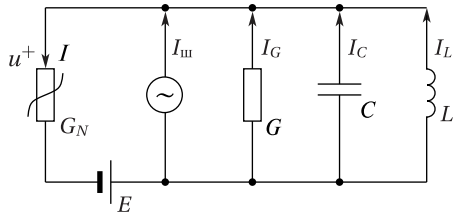


Рис. 5.1. Эквивалентная схема низкочастотного радиофизического генератора с источниками шума: $G_N(U)$ — нелинейная проводимость с вольт-амперной характеристикой $I = -G_0U + bU^3$; G, C, L — постоянные проводимость, емкость и индуктивность, соответственно; $I_{\text{ш}}$ — эквивалентный шумовой ток, учитывающий все источники внутренних шумов системы, E — постоянное питание

Уравнение (5.68) описывает случайный процесс $X(t)$, представляющий собой «зашумленные» автоколебания. Статистические характеристики этого процесса определяются как режимом системы (параметром ε), так и характеристиками шума. В случае гауссова белого шума $X(t)$ является диффузионным марковским процессом [1, 3, 4, 11, 15]. В результате случайных толчков фазовая траектория на фазовой плоскости $X(t)$, $\dot{X}(t)$ постоянно «выталкивается» с предельного цикла и снова стремиться приблизиться к нему за счет действия детерминированной силы. Если цикл достаточно сильно притягивает траектории (обладает большой жестко-

[1]) Колебания в системах с шумом описываются случайными функциями времени. Будем, по-возможности, обозначать их заглавными буквами, чтобы отличить от колебаний детерминированных систем, которые по-прежнему будем обозначать прописными буквами.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

стью), а интенсивность шума мала, то траектория будет преимущественно вращаться в близкой окрестности предельного цикла (рис. 5.2).

Считая интенсивность шума малой (что справедливо для внутренних источников) и учитывая частотные свойства автогенератора приходим к модели автоколебаний в виде узкополосного стохастического процесса, называемого гармоническим шумом. Иначе говоря, мы рассматриваем колебания автогенератора близкими к гармоническим, что справедливо при $\varepsilon \le 0{,}1$ и $D \ll \varepsilon$) и ищем решение (5.68) в виде

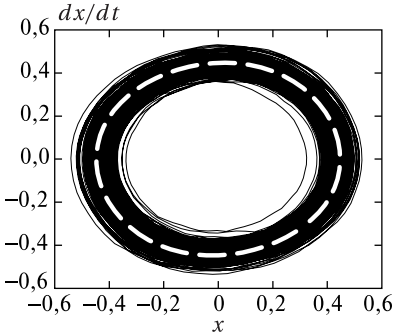


Рис. 5.2. Фазовый портрет «зашумленного» предельного цикла в системе (5.68) при $\varepsilon = 0{,}05$, $D = 0{,}0001$. Белой пунктирной линией показан невозмущенный предельный цикл

$$\begin{aligned} X(t) &= \rho(t)\cos(t+\varphi(t)), \\ \dot{X}(t) &= -\rho(t)\sin(t+\varphi(t)), \end{aligned} \tag{5.69}$$

где мгновенная амплитуда $\rho(t)$ и случайная компонента фазы $\varphi(t)$ предполагаются медленно меняющимися функциями по сравнению с периодом колебаний $T_0 = 2\pi$. Подставляя выражения (5.69) в (5.68) и производя усреднение за период $T_0 = 2\pi$ получаем следующую систему стохастических уравнений для амплитуды и фазы колебаний

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8}\right)\rho - \sqrt{2D}\frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\sin(\theta+\varphi)\,d\theta, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\sqrt{2D}}{\rho}\frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\cos(\theta+\varphi)\,d\theta. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Производя усреднение слагаемых, содержащих источник шума $n(t)$, можно получить следующие приближенные выражения (см. приложение П.1):

$$\begin{aligned} \xi_1(t,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\sin(\theta+\varphi)\,d\theta = -\frac{\sqrt{2D}}{4\rho} - \frac{1}{\sqrt{2}}n_1(t), \\ \xi_2(t,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\cos(\theta+\varphi)\,d\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}n_2(t), \end{aligned} \tag{5.71}$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые источники нормированного гауссова белого шума: $\langle n_{1,2}(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n_i(t+\tau)n_j(t)\rangle = \delta_{i,j}\delta(\tau)$, $i, j = 1, 2$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронеккера. Подставляя преобразованные источники шума в (5.70) приходим к классической стохастической модели квазигармонического автогенератора [8–13]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8}\right)\rho + \frac{D}{2\rho} + \sqrt{D}n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{D}}{\rho}n_2(t). \end{aligned} \tag{5.72}$$

Уравнения (5.72) можно рассматривать как универсальную, хотя и сильно упрощенную модель, описывающую поведение квазигармонического генератора, находящегося под действием белого гауссова шума постоянной интенсивности. Под универсальностью мы понимаем применимость данной модели к квазигармонической автоколебательной системе любой природы с собственной частотой в любом диапазоне. Это может быть как одномодовый лазер [12] так и модель, описывающая химическую реакцию, живую клетку или организм [49, 50].

5.3.2. Флуктуации амплитуды автоколебаний

Первое уравнение системы (5.72) не содержит фазы колебаний и его можно рассматривать независимо от фазового уравнения. Его решение есть одномерный диффузионный процесс $\rho(t)$ с плотностью вероятности $p_\rho(\rho, t)$, удовлетворяющей следующему уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова [1, 3, 4, 10, 11, 15]:

$$\frac{\partial p_\rho(\rho,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{\rho^2}{8}\right)\rho + \frac{D}{2\rho}\right)p_\rho(\rho,t)\right] + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 p_\rho(\rho,t)}{\partial\rho^2}. \tag{5.73}$$

Стационарное решение уравнения (5.73) имеет вид

$$p_\rho^{\text{ст}}(\rho) = C\rho\exp\left[-\frac{1}{16D}(\rho^2 - \rho_0^2)^2\right], \tag{5.74}$$

где $\rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$ — невозмущенное (в отсутствии шума) значение амплитуды колебаний, C — нормировочная константа, определяемая из условия

$$\int\limits_0^\infty p_\rho^{\text{ст}}(\rho)\,d\rho = 1. \tag{5.75}$$

На рис. 5.3 приведены распределения амплитуды, полученные для различных значений интенсивности шума D.

При слабом шуме плотность вероятности $p_\rho^{\text{ст}}$ существенно отлична от нуля только в окрестности невозмущенного значения амплитуды ρ_0. Наи-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

вероятное значение амплитуды ρ_m, соответствующее максимуму плотности вероятности, практически совпадает с невозмущенным значением ρ_0 и только при больших интенсивностях шума начинает смещаться вправо от ρ_0. Кроме того, для слабого шума (кривая *1*) график плотности вероятности $p_\rho^{\text{ст}}(\rho)$ почти симметричен относительно ρ_0. Это означает, что среднее значение амплитуды также близко к невозмущенному значению: $\overline{\rho} = \langle \rho(t) \rangle \approx \rho_0$.

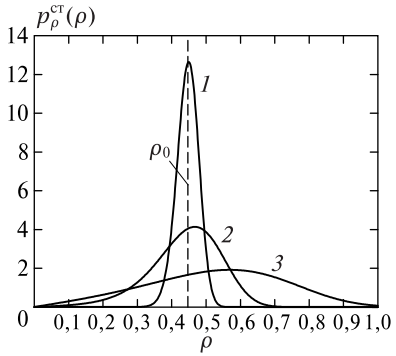


Рис. 5.3. Стационарные распределения амплитуды, рассчитанные по формуле (5.74) при $D = 0{,}0001$ (*1*), $D = 0{,}001$ (*2*), $D = 0{,}01$ (*3*). Пунктирной линией отмечено невозмущенное значение амплитуды

При условии слабого шума и достаточно развитой генерации ($D \ll \varepsilon$) флуктуации амплитуды $\widetilde{\rho}(t) = \rho(t) - \rho_0$ малы и могут быть описаны следующим линейным СДУ:

$$\dot{\widetilde{\rho}} + \varepsilon \widetilde{\rho} = \sqrt{D} n_1(t). \tag{5.76}$$

Оно задает так называемый одномерный процесс Орнштейна–Уленбека [1, 3, 4, 11]. Это — гауссов диффузионный процесс. Так как в сделанных предположениях $\overline{\rho} \approx \rho_0$, то можно положить $\langle \widetilde{\rho}(t) \rangle \equiv 0$. В пределе $t \to \infty$ процесс, задаваемый СДУ (5.76), является стационарным процессом с дисперсией

$$\sigma_\rho^2 = \langle \widetilde{\rho}^{\,2}(t) \rangle = \frac{D}{2\varepsilon} \tag{5.77}$$

и экспоненциальной автокорреляционной функцией

$$\psi_\rho(\tau) = \langle \widetilde{\rho}(t) \widetilde{\rho}(t+\tau) \rangle = \sigma_\rho^2 e^{-\varepsilon|\tau|}, \quad \tau = t_2 - t_1. \tag{5.78}$$

5.3.3. Случайная фаза автоколебаний

Случайная компонента фазы автоколебаний φ задается вторым уравнением системы (5.72), правая часть которого зависит от мгновенной амплитуды $\rho(t)$. Однако в случае слабого шума и развитой генерации мы можем пренебречь амплитудными флуктуациями по сравнению с невозмущенным значением ρ_0 и заменить переменную величину $\rho(t)$ на константу ρ_0. В таком приближении приходим к модели винеровского процесса для флуктуаций фазы $\varphi(t)$:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2B_\varphi} n_2(t), \tag{5.79}$$

где $B_\varphi = \text{const}$ — коэффициентом диффузии фазы, определяемый выражением [1]):

$$B_\varphi = \frac{1}{2}\frac{D}{\rho_0^2} = \frac{D}{8\varepsilon}. \tag{5.80}$$

Таким образом, $\varphi(t)$ — это нестационарный гауссов процесс со средним значением, определяемым начальным состоянием $\langle \varphi(t) \rangle = \varphi(t_0)$ и линейно растущей во времени дисперсией

$$\sigma_\varphi^2(t) = \frac{1}{2} B_\varphi \cdot (t - t_0). \tag{5.81}$$

Очевидно дисперсия полной фазы автоколебаний $\Phi(t) = t + \varphi(t)$ совпадает с $\sigma_\varphi^2(t)$. Из замены (5.69) следует, что фаза $\Phi(t)$ автогенератора (5.68) в любой момент времени может быть вычислена как

$$\Phi(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\dot{X}(t)}{X(t)}\right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{5.82}$$

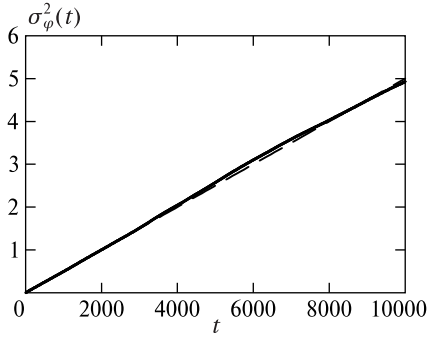


Рис. 5.4. Зависимость дисперсии мгновенной фазы Φ от времени, полученная численно для системы (5.68) при $\varepsilon = 0{,}05$, $D = 0{,}0001$ (серые точки) и по формуле (5.81) (пунктир)

Выбор целого k определяется условием непрерывности функции $\Phi(t)$. Результат численного расчета дисперсии мгновенной фазы $\Phi(t)$ автогенератора (5.68) представлен на рис. 5.4. Угловой коэффициент численно полученной линейной зависимости полностью совпадает с теоретическим значением $2B_\varphi = D/4\varepsilon = 0{,}0005$.

Кроме переменной $\varphi(t) \in (-\infty; \infty)$ часто рассматривают случайную фазу, принимающую значения в ограниченном интервале $[-\pi; \pi]$ или $[0; 2\pi]$:

$$\phi(t) = \varphi(t) + 2\pi\nu, \tag{5.83}$$

где ν — некоторая целочисленная случайная функция. Представляя колебания в виде $X(t) = \rho(t)\cos(t + \varphi(t))$ можно заменить переменную $\varphi(t)$ на переменную $\phi(t)$. В силу 2π-периодичности косинуса процесс $X(t)$ от этого не измениться, однако использовать ограниченную переменную $\phi(t)$ в некоторых случаях оказывается удобнее, поскольку она имеет в пределе $t \to \infty$ стационарное равномерное распределение [8, 10, 11].

[1]) Часто в литературе за коэффициент диффузии принимают величину в два раза больше указанной.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

5.3.4. Автокорреляционная функция и спектр автоколебаний в присутствии шума

В рамках квазигармонического приближения легко получить известное выражение для автокорреляционной функции (АКФ) колебаний в зашумленном автогенераторе, задаваемом укороченными СДУ (5.72) (см. приложение П.2):

$$\psi_X(\tau) = \frac{1}{2}(\psi_\rho(\tau) + \rho_0^2)e^{-B_\varphi|\tau|}\cos\tau, \qquad \tau = t_2 - t_1, \tag{5.84}$$

При выводе выражений (5.84), флуктуации амплитуды относительно невозмущенного значения ρ_0 предполагаются малыми, так, что в фазовом уравнении можно положить $\rho(t) = \rho_0$. Тем самым мы пренебрегаем статистической зависимостью мгновенной фазы от мгновенной амплитуды и приходим к модели винеровского процесса для фазы φ. При малой интенсивности шума $D \ll \varepsilon$ такое приближение является вполне приемлемым. На рис. 5.5 представлена нормированная АКФ колебаний генератора (5.68) $\Psi_X(\tau) = \psi_X(\tau)/\psi_X(0)$, полученная численно непосредственно из определения АКФ процесса $X(t)$:

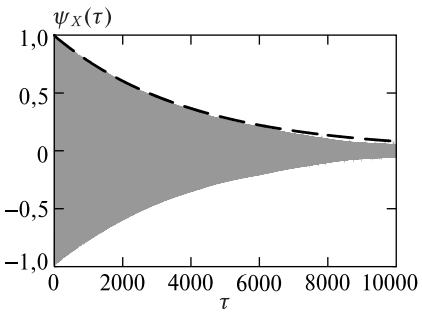


Рис. 5.5. Нормированная АКФ колебаний $X(t)$ в системе (5.68) при $\varepsilon = 0{,}05$, $D = 0{,}0001$, рассчитанная по формуле (5.85) (серый цвет) и нормированная огибающая, соответствующая теоретическому выражению (5.84) (пунктир)

$$\psi_X(\tau) = \langle X(t)X(t+\tau)\rangle - \langle X(t)\rangle\langle X(t+\tau)\rangle, \tag{5.85}$$

где в предположении эргодичности процесса $X(t)$ статистическое усреднение $\langle\ldots\rangle$ заменялось усреднением по времени. Для сравнения на том же графике пунктиром нанесена нормированная огибающая теоретической автокорреляционной функции, рассчитанная при тех же значениях параметров ε и D по формуле (5.84). Можно видеть, что приближенная теория и численный результат находятся в полном соответствии. С ростом интенсивности шума флуктуации амплитуды будут возрастать и их влияние на поведение мгновенной фазы станет существенным. В этом случае результаты вычислений по формуле (5.84) и данные численного моделирования могут заметно отличаться.

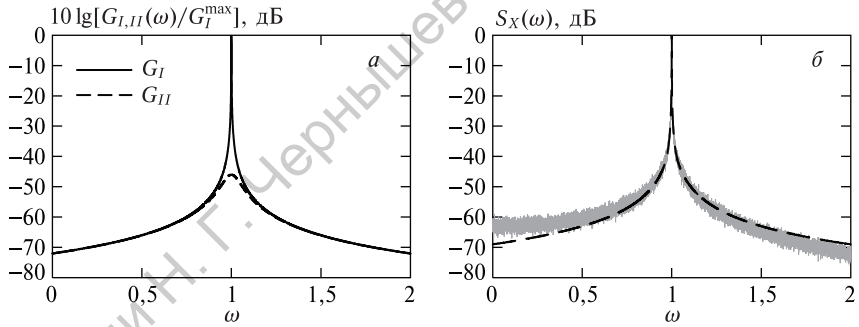


Рис. 5.6. Спектральные характеристики автогенератора при $\varepsilon = 0{,}05$, $D = 0{,}0001$: *а* — нормированные функции $G_I(\omega)$ и $G_{II}(\omega)$, рассчитанные по формулам (5.87), в децибелах; *б* — нормированный спектр колебаний $X(t)$, полученный численно для системы (5.68) (серая сплошная линия) и теоретически по формулам (5.87) (пунктир)

Спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ связана с АКФ следующим соотношением[1]):

$$G_X(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\psi_X(\tau)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau + 4\pi\overline{X}^2\delta(\omega), \quad j = \sqrt{-1}, \quad \omega \geq 0. \tag{5.86}$$

Учитывая, что среднее значение $\overline{X}$ равно нулю, получаем спектр в виде суммы двух лоренцианов, со спектральными максимумами на частоте невозмущенных автоколебаний, приведенной к единице:

$$G_X(\omega) = G_I(\omega) + G_{II}(\omega),$$
$$G_I(\omega) = \frac{\rho_0^2 B_\varphi}{B_\varphi^2 + (\omega-1)^2}, \tag{5.87}$$
$$G_{II}(\omega) = \frac{\sigma_\rho^2(B_\varphi+\varepsilon)}{(B_\varphi+\varepsilon)^2 + (\omega-1)^2} \approx \frac{\sigma_\rho^2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega-1)^2} \quad (\text{считая } B_\varphi \ll \varepsilon).$$

Слагаемое G_I связано с флуктуациям фазы. Ширина этой компоненты на уровне половинной мощности равна $2B_\varphi$, а значение в максимуме есть ρ_0^2/B_φ. Поскольку при слабом шуме величина B_φ очень мала, то лоренциан G_I является очень узким и высоким. Напротив, слагаемое G_{II} определяется, главным образом, флуктуациями амплитуды. Ширина этой ком-

[1]) Здесь имеется в виду так называемый односторонний («физический») спектр, определенный только для положительных частот.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

поненты на уровне половинной мощность есть примерно 2ε, т. е. относительно велика, а значение в максимуме, приблизительно равное $\sigma_\rho^2/\varepsilon$, мало. Таким образом, при условии слабого шума и развитой квазигармонической генерации спектр автоколебаний состоит из узкой спектральной линии на частоте автогенерации, ширина которой определяется коэффициентом диффузии фазы и широкополосного низкого пьедестала, в основном связанного с амплитудными флуктуациями.

Рассчитанные по формулам (5.87) слагаемые G_I и G_{II}, отнормированные на величину $G_I^{\max} = G_I(1)$, представлены на рис. 5.6, *а*. На рис. 5.6, *б* приведен нормированный спектр колебаний генератора (5.68)

$$S_X(\omega) = 10\lg\left[\frac{G_X(\omega)}{G_X^{\max}}\right], \tag{5.88}$$

полученный численно. Здесь $G_X^{\max} = G_X(1)$. Пунктиром показан теоретический спектр. При выбранных параметрах данные приближенной теории достаточно хорошо соответствуют численному эксперименту. Однако можно заметить и некоторые расхождения, проявляющиеся на частотах, удаленных от частоты максимума. Так теоретический спектр является симметричным относительно частоты автогенерации, а спектр, полученный численно для исходной системы (5.68), характеризуется некоторыми отклонениями от симметрии. Такое различие связано с тем, что при получении формул (5.87) делалось предположение о статистической независимости амплитудных и фазовых флуктуаций, что, вообще говоря, не вполне верно. Однако при слабом шуме отклонения от симметрии в спектре проявляются только на уровне маломощного пьедестала. С ростом интенсивности шума спектральная линия становится существенно несимметричной [9, 13]. В качестве примера на рис. 5.7 приведен спектр колебаний генератора (5.68), полученный численно для $\varepsilon = 0{,}05$, $D = 0{,}01$. Пунктиром изображена теоретическая аппроксимация $G_X(\omega)$ по формулам (5.87). Заметно существенное расхождение теории и численных результатов, проявляющееся в ассиметрии спектральной линии, хотя шум в данном случае можно считать малым.

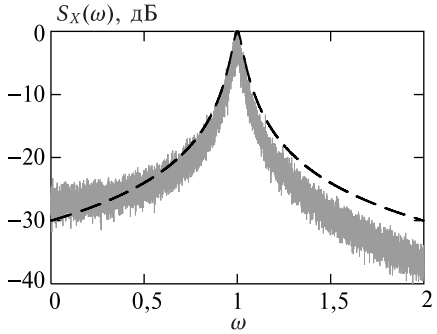


Рис. 5.7. Фрагмент нормированного спектра колебаний $X(t)$ в системе (5.68) при $\varepsilon = 0{,}05$, $D = 0{,}01$ (сплошная линия) и результаты расчета по формулам (5.87) (пунктир)

5.4. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Краткий математический анализ вопроса о флуктуациях в автоколебательных системах, проведенный в предыдущих параграфах, показывает, насколько трудна эта задача, особенно, если пытаться анализировать системы, близкие к реальным. Теоретическому расчету поддаются, как это часто бывает, лишь весьма упрощенные модели автогенераторов. При попытках приблизить математическую модель к реальной системе, как правило, возникают принципиальные и подчас неразрешимые трудности. В таких ситуациях особенно важны становятся экспериментальные методы, позволяющие исследовать флуктуационные процессы в реальных генераторах.

Нашей целью не является систематическое изложение всех особенностей экспериментального исследования шумов автогенераторов — работ в этой области, начиная с классических исследований И. Л. Берштейна [51], было достаточно много [9, 52–56]. Обсудим лишь основные идеи, позволяющие решить в принципе вопрос о возможности экспериментального определения флуктуаций амплитуды и частоты.

Начнем с проблемы измерения амплитудных флуктуаций, так как с принципиальной точки зрения измерение амплитудных флуктуаций является наиболее простым из всех измерений, касающихся анализа флуктуаций в автогенераторах. При наличии амплитудных флуктуаций автоколебания представляют собой колебания со случайной амплитудной модуляцией. Поэтому для анализа амплитудных флуктуаций годятся обычные методы амплитудного детектирования с последующим выводом низкочастотной составляющей на анализатор спектра. Такой метод называют *прямым демодуляционным методом*. Несмотря на кажущуюся простоту идеи данного метода, реальные измерения амплитудных флуктуаций наталкиваются на некоторые трудности, обусловленные в основном собственными шумами измерительной аппаратуры. Влияние этих шумов тем заметнее, чем ниже ниже уровень флуктуаций исследуемого генератора.

Рассмотрим прямой демодуляционный метод более подробно. Зададим автоколебания генератора в виде:

$$X(t) = \rho_0(1 + \alpha(t))\cos(\omega_0 t + \varphi(t)),$$

где $\alpha(t) = \widetilde{\rho}(t)/\rho_0$ — относительные флуктуации амплитуды, $\varphi(t)$ — флуктуации фазы ω_0 — невозмущенная частота автогенератора (в безразмерной модели (5.68) она была равна единице). Функции $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ полагаются «медленными» и практически не изменяющимися за пери-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

од колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Используем какой-либо детектор, характеризующийся нулевой постоянной составляющей в отсутствие внешнего сигнала. При подаче на детектор сигнала $X(t)$ на выходе будем иметь некоторую постоянную составляющую напряжения u_0, зависящую от амплитуды колебаний ρ_0, флуктуационную составляющую, пропорциональную $\widetilde{\rho}(t)$, и высшие гармоники частоты ω_0, обусловленные нелинейным преобразованием сигнала. На практике после детектора, как правило, ставится низкочастотный фильтр и высшие гармоники можно не принимать в расчет. Предположим также, что на частотах $\omega \ll \omega_0$ ни детектор, ни фильтр частотных искажений не вносят. Тогда на выходе фильтра будем иметь постоянную составляющую U_0 и интересующий нас полезный сигнал, обусловленный амплитудными флуктуациями:

$$\widetilde{U}(t) = U_0 l \alpha(t), \tag{5.89}$$

где l — безразмерный коэффициент пропорциональности, в общем случае зависящий от вида характеристики детектора и величины амплитуды сигнала ρ_0. Расмотрим, к примеру, линейный детектор с характеристикой

$$U[X(t)] = \begin{cases} bX(t), & X > 0, \\ 0, & X \le 0. \end{cases}$$

Пренебрегая изменениями функций $(1 + \alpha(t))$ и $\varphi(t)$ за период, получаем напряжение на выходе фильтра

$$U(t) = \frac{2}{T_0} \int\limits_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} \frac{b}{2}(X(t) + |X(t)|)\, dt = \frac{1}{\pi} b\rho_0(1 + \alpha(t)) \int\limits_0^{\pi/2} \cos(\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} b\rho_0(1 + \alpha(t)).$$

Таким образом, для постоянной составляющей и полезного сигнала на выходе фильтра получаем

$$U_0 = \frac{1}{\pi} b\rho_0, \quad l = 1, \quad \widetilde{U}(t) = U(t) - U_0 = \frac{b\rho_0}{\pi}\alpha(t). \tag{5.90}$$

При использовании квадратичного детектора

$$U[X(t)] = aX^2(t)$$

легко убедиться в том, что

$$U_0 = \frac{a}{2}\rho_0^2, \quad l = 2.$$

Для детекторов, характеристика которых задается степенной функцией, l всегда будет постоянной величиной. В случае более сложного характера нелинейности детектора коэффициент l будет зависеть от амплитуды ρ_0. Таким образом выражение (5.89) оказывается справедливым для любого типа детектора.

В силу линейности соотношения (5.89) спектральные плотности и корреляционные функции флуктуаций $\widetilde{U}(t)$ и $\alpha(t)$ будут связаны очевидным образом:

$$G_{\widetilde{U}}(\omega) = U_0^2 l^2 G_\alpha(\omega), \quad \psi_{\widetilde{U}}(\tau) = U_0^2 l^2 \psi_\alpha(\tau), \tag{5.91}$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Измеряя спектрально-корреляционные характеристики выходного сигнала $\widetilde{U}(t)$ с помощью соотношений (5.91) можно легко определить характеристики исследуемого сигнала $\alpha(t)$. Но такая простота, к сожалению, не соответствует действительности, так как соотношения (5.91) не учитывают шумов измерительной аппаратуры (в данном случае детектора, фильтра и анализатора спектра). При измерениях шумов на сверхвысоких частотах из названных источников шумов измерительной аппаратуры преимущественное значение имеют шумы детектора, в качестве которого обычно используется кристаллический диод. Представим в этом случае полное шумовое напряжение на выходе детектора как

$$\widetilde{U}(t) = U_0 l \alpha(t) + U_{\text{шд}}(t). \tag{5.92}$$

В силу того, что шумы детектора и исследуемого генератора статистически не взаимосвязаны, спектральная плотность шумового напряжения на выходе детектора будет равна просто сумме

$$G_{\widetilde{U}}(\omega) = U_0^2 l^2 G_\alpha(\omega) + G_{\text{шд}}(\omega). \tag{5.93}$$

В этом случае естественно принять за минимальный обнаружимый полезный сигнал такой сигнал $\widetilde{U}_{\min}(t)$, спектральная плотность которого равна спектральной плотности шума детектора:

$$G_{\widetilde{U}}^{\min}(\omega) = G_{\text{шд}}(\omega).$$

Принимая во внимание (5.91), для минимальной обнаружимой спектральной плотности относительных амплитудных флуктуаций детектора имеем

$$G_\alpha^{\min}(\omega) = \frac{G_{\text{шд}}(\omega)}{U_0^2 l^2}. \tag{5.94}$$

Если задана спектральная плотность шумов детектора $G_{\text{шд}}(\omega)$, то, как следует из (5.94), для повышения чувствительности измерительной уста-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

новки необходимо применять более «крутое» детектирование (значения величины l должны быть больше). Что касается влияния постоянной составляющей U_0, определяемой амплитудой колебаний ρ_0, то чувствительность измерений можно повысить, увеличивая U_0, лишь в том случае, если шумы детектора не зависят от уровня сигнала. Шумы кристаллических диодов в СВЧ диапазоне существенно зависят от уровня сигнала и поэтому выбор амплитуды ρ_0 здесь должен быть оптимальным (соответствующим минимальному шуму детектора). Для типичных полупроводниковых кристаллических детекторов минимальная спектральная плотность амплитудных флуктуаций, которая еще может быть измерена методом прямой демодуляции, составляет величину, примерно равную

$$G_\alpha^{\min}(\omega) \approx (10^{-7} \div 10^{-10})\omega^{-1}\ \text{В}^2/\text{рад}.$$

При исследовании генератора сантиметрового диапазона измерение спектра амплитудных флуктуаций, особенно на частотах вблизи несущей, с помощью метода прямого детектирования становится практически невозможным из-за большого уровня шума детектора.

При исследовании колебаний с низким уровнем амплитудных флуктуаций метод прямой демодуляции может быть применен, если с достаточной точностью определить собственный шум измерительного устройства. Этого можно достичь различными путями. Идеальный путь — измерить собственный шум экспериментальной установки, подавая на ее вход высокочастотные колебания той же мощности и частоты, что и исследуемые, но не имеющие амплитудных флуктуаций. Этого на практике реализовать невозможно, так как невозможно создать генератор без флуктуаций амплитуды. Однако колебания эталонного генератора можно либо подвергнуть амплитудному ограничению, либо пропустить через высокодобротный фильтр (на СВЧ это может быть резонатор). Тогда амплитудные флуктуации эталонных колебаний могут быть существенно уменьшены. Для определения шума детектора, казалось бы можно вместо высокочастотного сигнала подавать на детектор постоянное напряжение, измеряя при этом его шум. Однако, экспериментальные данные говорят, что шум детектора в этих двух режимах существенно различен.

Вышеперичисленные способы не решают проблемы измерения малых амплитудных флуктуаций. Амплитудное ограничение, снимая входные амплитудные флуктуации, добавляет свои, не меньшие по уровню. Использование резонансного фильтра эффективно лишь в том случае, если его полоса пропускания, как минимум, на два порядка меньше полосы контура автогенератора, что не всегда возможно обеспечить. При подаче на вход детектора постоянного во времени сигнала для калибровки собственных шумов выяснилось, что, во-первых, собственные шумы

детектора в режиме постоянного тока заметно оличаются от шумов в режиме возбуждения диода переменным полем, а, во-вторых, проблема стабилизации постоянного тока при калибровке сама по себе оказывается довольно сложной. Таким образом, при точном измерении спектральной плотности шумов детектора, видимо лучше отказаться от способа, основанного на калибровке детектора с помощью постоянного калибровочного сигнала. Решением проблемы является балансировка или взаимная компенсация амплитудных флуктуаций исследуемых колебаний на выходе детектора.

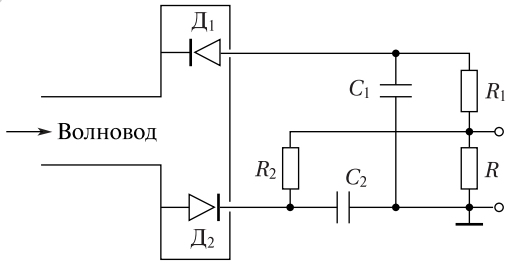


Рис. 5.8. Схема последетекторной компенсации амплитудных флуктуаций исследуемых высокочастотных колебаний

Рассмотрим в качестве примера схему выходного устройства, в котором осуществляется последовательная компенсация амплитудных флуктуаций высокочастотных колебаний, представленную на рис. 5.8. Кристаллические диоды $Д_1$ и $Д_2$ включены противофазно в симметричные плечи волноводного тройника. При этом на сопротивлении R возникают флуктуации напряжения, порождаемые амплитудными флуктуациями исследуемых колебаний в каждом плече моста. Так как эти флуктуации полностью коррелированы и имеют разные знаки, то путем подбора величин R_1 и R_2 их можно быть полностью скомпенсировать. В этом случае на сопротивлении R будут выделяться только некоррелированные шумовые напряжения обоих детекторов. которое могут быть измерены и учтены при дальнейших измерениях. Однако в случае малых амплитудных флуктуаций генератора, когда

$$G_\alpha(\omega) < \frac{G_{\text{шд}}(\omega)}{U_0^2 l^2},$$

возникает задача определения слабых флуктуаций на фоне больших собственных шумов измерительной установки. Для решения этой задачи используется так называемый корреляционный метод, идея которого, по существу, уже содержится в описанном балансном методе.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

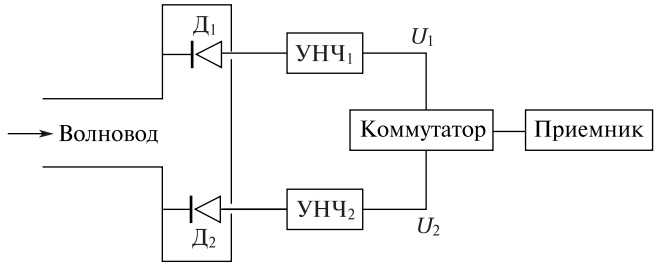


Рис. 5.9. Схема для когерентного метода измерения слабых амплитудных шумов на фоне больших шумов аппаратуры

Рассмотрим схему, представленную на рис. 5.9. Сигнал исследуемого генератора подается на волноводный тройник, в симметричные плечи которого установлены кристаллические детекторы. После синфазного детектирования сигналы поступают на усилители низкой частоты, имеющие по возможности идентичные характеристики(хотя это и не принципиально). На выходе усилителей возникают сигналы:

$$\widetilde{U}_1 = K_1(U_{01} l_1 \alpha(t) + U_{ш1}); \quad \widetilde{U}_2 = K_2(U_{02} l_2 \alpha(t) + U_{ш2}).$$

K_1 и K_2 — коэффициенты усиления усилителей, не зависящие от частоты в интересующем нас частотном диапазоне, $U_{ш1}$ и $U_{ш2}$ — некоррелированные шумы детекторов и усилителей, приведенные ко входу усилителей, U_{01} и U_{02} — постоянные составляющие сигналов, которые могут различаться из-за неидентичности характеристик детекторов и усилителей. С выхода усилителей сигналы поступают на коммутатор, который создает их сумму

$$\widetilde{U}_\Sigma = \widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2 = (K_1 l_1 U_{01} + K_2 l_2 U_{02})\,\alpha(t) + K_1 U_{ш1} + K_2 U_{ш2}.$$

или разность

$$\widetilde{U}_\Delta = \widetilde{U}_1 - \widetilde{U}_2 = (K_1 l_1 U_{01} - K_2 l_2 U_{02})\,\alpha(t) + K_1 U_{ш1} - K_2 U_{ш2}.$$

Спектранализатор измеряет соответствующие спектральные плотности сигналов на выходе коммутатора:

$$G_\Sigma(\omega) = (K_1 l_1 U_{01} + K_2 l_2 U_{02})^2 G_\alpha(\omega) + K_1^2 G_{ш1}(\omega) + K_2^2 G_{ш2}(\omega);$$
$$G_\Delta(\omega) = (K_1 l_1 U_{01} - K_2 l_2 U_{02})^2 G_\alpha(\omega) + K_1^2 G_{ш1}(\omega) + K_2^2 G_{ш2}(\omega).$$

Далее система балансируется так, чтобы выполнялось равенство

$$K_1 l_1 U_{01} = K_2 l_2 U_{02}.$$

При идентичности характеристик детекторов и усилителей это условие выполняется автоматически. Если характеристики отличаются, то балансировка выполняется с помощью внешней амплитудной модуляции сигнала генератора. Модулируя колебания исследуемого генератора внешним низкочастотным сигналом и подбирая режим работы усилителей, добиваются, чтобы в сигнале $\widetilde{U}_\Delta$ отсутствовала спектральная линия модулирующего сигнала. При выполнении условий баланса G_Δ есть уровень собственных шумов аппаратуры. В этом случае легко получаем

$$G_\alpha = \frac{G_\Sigma(\omega) - G_\Delta(\omega)}{(2K_1 l_1 U_{01})^2}. \tag{5.95}$$

Если сигнал разности $\widetilde{U}_\Delta$ представляет собой достаточно малую величину, то используются модуляционные методы измерения слабых сигналов.

Мы кратко рассмотрели идею метода измерения слабых амплитудных флуктуаций колебаний автогенератора. Методы измерения флуктуаций частоты, связанных с флуктуациями фазы ($\widetilde{\nu}(t) = \dot{\varphi}(t)$), по сути представляют собой методы измерения слабой частотной модуляции исследуемых колебаний. В отличии от измерения амплитудных флуктуаций по-видимому не существует способа непосредственной демодуляции флуктуаций частоты. Все известные методы демодуляции частоты используют так называемый частотный дискриминатор. Он представляет собой линейный четырехполюсник, частотная характеристика которого позволяет преобразовывать частотные флуктуации в амплитудные. Полученные амплитудные флуктуации, однозначно связанные с исходными флуктуациями частоты, измеряются методами, описанными выше. Одной из принципиальных сложностей такого метода является то, что выходной сигнал дискриминатора содержит компоненту, обусловленную как флуктуациями частоты исследуемых колебаний, так и их амплитудными флуктуациями, всегда имеющими место. Трудность состоит в том, чтобы, после измерения суммарных флуктуаций на выходе дискриминатора, разделить флуктуации, порождаемые амплитудными и частотными флуктуациями исходных колебаний генератора. Задача усложняется, если амплитудные и частотные флуктуации автоколебаний генератора статистически взаимосвязаны (коррелированы). Разделение флуктуаций обычно достигается изменением параметров дискриминатора, влияющих на соотношение между собственными амплитудными и преобразованными частотными флуктуациями.

В качестве дискриминатора можно в принципе использовать любой линейный четырехполюсник, обладающий неравномерной частотной характеристикой, благодаря которой амплитуда выходного сигнала становится зависящей от частоты, что и позволяет осуществить демодуляцию

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

частотных флуктуаций путем преобразования их в амплитудные. Поэтому можно осуществить множество различных способов измерения флуктуаций частоты, соответствующих различным способам реализации самого дискриминатора. Можно сформулировать некоторые общие требования к используемым дискриминаторам вне зависимости от их конкретного устройства позволяющие обеспечить наилучшую чувствительность измерений.

Рассмотрим некоторый частотный дискриминатор, коэффициент передачи которого $K(\omega)$ имеет вид, изображенный на рис. 5.10. Будем предполагать, что в указанных на рис. 5.10 точках a, b, c, и d абсолютное значение производной $dK(\omega)/d\omega$ является одинаковым. Как в этом случае выбрать рабочий режим дискриминатора?

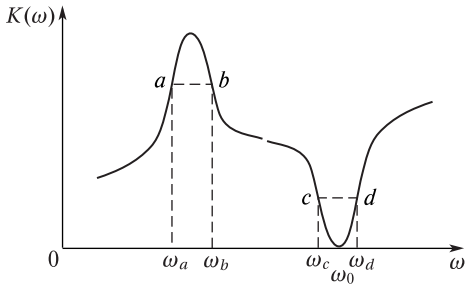


Рис. 5.10. Частотная характеристика дискриминатора (к вопросу об оптимальном выборе рабочей точки при измерении частотных флуктуаций

Рассмотрим колебания, обладающие флуктуациями амплитуды и частоты. В силу линейности дискриминатора амплитуды сигналов на его входе и выходе связаны соотношением

$$r(\omega) = K(\omega)\,\rho(\omega),$$

где $r(\omega)$ и $\rho(\omega)$ — спектральные амплитуды входного и выходного сигналов, соответственно.

В квазистатическом приближении для малых флуктуаций выходной амплитуды можем записать

$$\widetilde{r}(\omega) = K(\omega)\,\widetilde{\rho}(\omega) + \rho(\omega)\frac{dK(\omega)}{d\omega}\widetilde{\nu}, \tag{5.96}$$

где $\widetilde{\nu}$ — флуктуация частоты.

Используя приведенные амплитуды $\alpha(\omega) = \widetilde{\rho}(\omega)/\rho(\omega)$ и $\beta(\omega) = \widetilde{r}(\omega)/r(\omega)$, можно переписать соотношение (5.96) в виде

$$\beta(\omega) = \alpha(\omega) + \frac{1}{K(\omega)}\frac{dK(\omega)}{d\omega}\widetilde{\nu}.$$

Эффективность работы частотного дискриминатора следует оценивать по вкладу α (входных амплитудных флуктуаций) в величину β, т. е. в выходные амплитудные флуктуации, которые подаются на вход детектора. Как видно, вклад исходных амплитудных флуктуаций α в β не зависит от частотной характеристики дискриминатора, в то время как вклад частотных флуктуаций существенным образом определяется характером коэффициента передачи $K(\omega)$. Этот факт позволяет сделать по крайней мере два вывода. Во-первых, эффективность работы дискриминатора нужно оценивать по относительному значению производной

$$\frac{1}{K(\omega)}\frac{dK(\omega)}{d\omega}$$

на частоте исследуемых колебаний. Тот дискриминатор, для которого эта величина имеет большее значение, является более эффективным, так как в этом случае чувствительность (вклад частотных флуктуаций в β) будет выше. Следовательно, предпочтение необходимо отдать точкам c и d (рис. 5.10).

Второй вывод заключается в возможности разделения в выходном сигнале дискриминатора компонент, обусловленных амплитудными и частотными флуктуациями входного сигнала, по крайней мере в случае их статистической независимости. Действительно, произведем измерения величины β для двух близлежащих точек характеристики дискриминатора:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha + \frac{1}{K(\omega_1)}\frac{dK(\omega)}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_1}\widetilde{\nu}; \\ \beta_2 &= \alpha + \frac{1}{K(\omega_2)}\frac{dK(\omega)}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_2}\widetilde{\nu}. \end{aligned} \tag{5.97}$$

Соотношения (5.97) доказывают возможность разделения при условии, что зависимость $K(\omega)$ задана. Именно независимость вклада собственных амплитудных флуктуаций в β от положения рабочей точки на характеристике дискриминатора предоставляет такую возможность.

5.5. ОБОБЩЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ НА СЛУЧАЙ ГЕНЕРАТОРОВ СПИРАЛЬНОГО ХАОСА

Спиральный хаотический аттрактор детально изучен и представляет собой очень распространенный пример негиперболического хаотического аттрактора, типичный для широкого класса динамических систем. Для спирального хаотического аттрактора характерно почти регу-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

лярное вращение фазовой траектории вокруг состояния равновесия седло-фокусного типа и наличие четко выраженного спектрального максимума на частоте, соответствующей средней частоте вращения [41, 44, 57–59]. По указанным причинам к спиральному аттрактору можно успешно применить амплитудно-фазовое описание. Сам же спиральный аттрактор часто называют фазово-когерентным [44, 43]. Переход к амплитудно-фазовому представлению позволяет не только качественно, но и количественно сопоставить хаотические автоколебания со случайным процессом, протекающем в квазигармоническом автогенераторе с шумом. Недавно полученные нами результаты компьютерного моделирования и натурных экспериментов показывают, что не смотря на сложное поведение мгновенной амплитуды хаотических колебаний в режиме спирального аттрактора, многие их важнейшие характеристики определяются поведением именно мгновенной фазы [35, 36, 47, 45, 48, 58–60]. Мгновенная фаза для спирального аттрактора является медленно меняющейся функцией времени по сравнению со средним периодом колебаний, а ее приращения на достаточно больших (по сравнению с тем же средним периодом) интервалах времени можно считать статистически независимыми, что было предположено еще в [41]. В результате хаотические автоколебания в режиме спирального аттрактора с точки зрения корреляционно-спектральных характеристик могут рассматриваться как гармонический шум. В предыдущем разделе мы уже рассмотрели гармонический шумом как классическую модель автоколебаний квазигармонического генератора под действием шума [8–10].

5.5.1. Численное исследование детерминированных хаотических автоколебаний в режиме спирального хаоса

Классический пример автогенератора хаоса — осциллятор Ресслера. Уравнения осциллятора имеют вид [61]

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \tag{5.98}$$

В (5.98) полагалось, что $\alpha = \beta = 0{,}2$, μ — управляющий параметр. В зависимости от выбора значения μ система может находиться в режиме периодических автоколебаний, спирального или винтового хаотического аттрактора.

Другим примером служит модифицированный генератор с инерционной нелинейностью (генератор Анищенко–Астахова) [62]

$$\dot{x} = mx + y - zx + px^3, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = -gz + gf(x). \tag{5.99}$$

В качестве нелинейной характеристики $f(x)$ может быть выбрана любая положительно определенная при $x > 0$ функция, не являющаяся четной. Мы будем полагать

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|). \tag{5.100}$$

Параметры m и g управляют режимом автогенератора, который, как и в осцилляторе Ресслера, может быть периодическим или хаотическим.

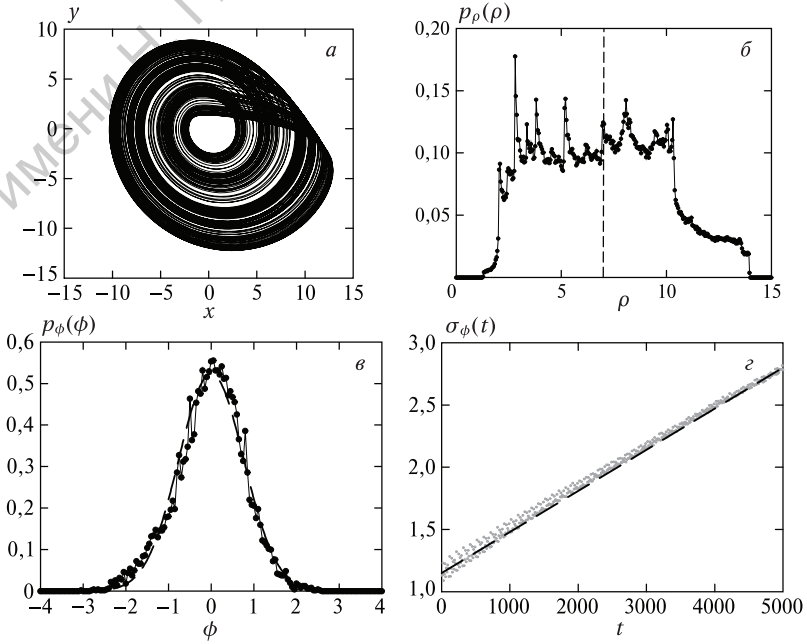


Рис. 5.11. Характеристики спирального аттрактора в модели (5.98) при $\mu = 6{,}5$: *а* — x, y-проекция аттрактора; *б* — распределение амплитуды хаотических колебаний; *в* — распределение флуктуаций мгновенной фазы в момент $t = 1000$ при начальном распределении в пределах интервала $[-\pi/30; \pi/30]$ и его гауссова аппроксимация (пунктир); *г* — Зависимость дисперсии мгновенной фазы от времени (серые точки) и ее линейная аппроксимация (пунктир)

Мгновенная фаза $\Phi(t)$ автогенераторов (5.98) и (5.99) может быть введена аналогично фазе в генераторе Ван дер Поля (5.82) как угол вращения изображающей точки на плоскости динамических переменных x, y [44, 57]:

$$\Phi(t) = \left|\operatorname{arctg}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \pm \pi k\right|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{5.101}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Модуль берется по той причине, что направление вращения радиус-вектора может быть различно (и, действительно, различно в (5.98) и (5.99)), но нас интересует абсолютное значение фазы. Величина $\pm\pi k$ выбирается таким образом, чтобы фаза была непрерывной функцией времени. Мгновенная амплитуда колебаний есть длина радиус-вектора, начало которого помещено в начало координат[1]):

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \qquad (5.102)$$

Рассмотрим режим спирального аттрактора в модели (5.98) при $\mu = 6{,}5$. Вид x, y-проекции (рис. 5.11, *а*) соответствует режиму спирального аттрактора. Распределение амплитуды хаотических колебаний $\rho(t)$ (рис. 5.11, *б*), сильно отличается от аналогичного распределения в зашумленном квазигармоническом генераторе (рис. 5.3) и в окрестности среднего значения амплитуды $\rho_0 = \langle\rho(t)\rangle$ является далеким от гауссова. Разумеется, автоколебания осциллятора Ресслер сильно отличаются от квазигармонических автоколебаний зашумленного осциллятора Ван дер Поля. В то же время, с точки зрения поведения мгновенной фазы и связанных с ней характеристик наблюдается много общего. Хотя поведение мгновенной фазы $\Phi(t)$ хаотических автоколебаний в (5.98) является более сложным по сравнению с квазигармоническим случаем и $\Phi(t)$ нельзя строго считать винеровским процессом, однако распределение флуктуаций мгновенной фазы $\varphi(t) = \Phi(t) - \langle\Phi(t)\rangle$, рассчитанное на ансамбле фазовых траекторий одинаковой длины, достаточно хорошо аппроксимируется гаусианой (рис. 5.11, *в*) Дисперсия мгновенной фазы хаотических автоколебаний растет почти линейно (рис. 5.11, *г*), подобно тому, как она росла в квазигармоническом осцилляторе с шумом (см. рис. 5.4). Можно оценить по методу наименьших квадратов угловой коэффициент линейного роста дисперсии. Половину этого коэффициента называют эффективным коэффициентом диффузии мгновенной фазы хаотических автоколебаний $B_{\text{эф}}$. Эффективный коэффициент диффузии фазы можно рассматривать как коэффициент диффузии фазы некоторого квазигармонического автогенератора с шумом, эквивалентного данному хаотическому автогенератору с точки зрения скорости роста дисперсии фазы во времени и, как будет показано далее, с точки зрения некоторых спектрально-корреляционных характеристик. Для рассматриваемого режима в модели (5.98) было получено значение $B_{\text{эф}} = 0{,}00018 \pm 10^{-5}$.

[1]) Состояние равновесия системы (5.98) на плоскости x, y, вокруг которого происходит вращение траектории, при выбранных значениях параметров очень близко к началу координат. В системе(5.99)) оно при любых значениях параметров находится в начале координат.

Напомним, что в данном случае диффузия фазы связана не с шумом, а только с детерминированной динамикой системы.

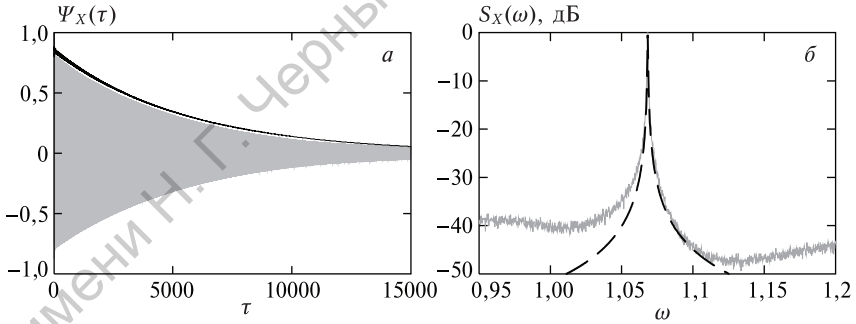


Рис. 5.12. Результаты спектрально-корреляционного исследования хаотических автоколебаний в системе Ресслер (5.98) при $\mu = 6{,}5$: *а* — нормированная АКФ колебаний $x(t)$ в системе (5.98), рассчитанная по формуле (5.85) (серые точки), и нормированная огибающая, соответствующая выражению (5.84) при $B_\varphi = B_{\text{эф}}$ (черные точки); *б* — фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ (сплошная серая кривая) и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (5.103) (черный пунктир). При аппроксимации использовались численно полученные значения коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф}}$ и частоты максимума: $B_{\text{эф}} = 0{,}00018 \pm 10^{-5}$; $\omega_0 = 1{,}0683 \pm 10^{-4}$

Остановимся более подробно на спектрально-корреляционных характеристиках спирального хаоса. Как показывают расчеты, АКФ колебаний $x(t)$ в системе (5.98) в режиме спирального аттрактора очень точно аппроксимируется выражением (5.84), где вместо B_φ следует взять $B_{\text{эф}}$. На рис. 5.12, *а* приведен результат расчета АКФ колебаний $x(t)$ в системе (5.98) по формуле (5.85) с учетом нормировки. Там же изображена нормированная огибающая, соответствующая выражению (5.84) при $B_\varphi = B_{\text{эф}}$ и численно полученных значениях $\psi_\rho(\tau)$. Таким образом, учитывалось поведение не только фазы, но и амплитуды колебаний, так как в рассматриваемом хаотическом режиме флуктуации амплитуды являются существенными. Именно с амплитудными флуктуациями связан спад на начальном участке АКФ, который заметен на приведенном графике [47, 45]. Фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ в том же режиме представлен на рис. 5.12, *б*. Пунктирной линией изображена аппроксимация спектральной линии по формуле

$$S_x(\omega) = 10\lg\left[\frac{G_x(\omega)}{G_x^{\max}}\right] = 10\lg\left[\frac{B_{\text{эф}}^2}{B_{\text{эф}}^2 + (\omega - \omega_0)^2}\right], \qquad (5.103)$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

где $\omega_0 = 1{,}0683 \pm 10^{-4}$ — численно полученная частота главного спектрального максимума, совпадающая в пределах погрешности вычислений со средней частотой хаотических колебаний ω_c, определяемой выражением

$$\omega_c = \lim_{T\to\infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}. \qquad (5.104)$$

Таким образом, основная спектральная линия в режиме спирального аттрактора хорошо аппроксимируется лоренцианом в соответствии с (5.87), причем даже без учета амплитудных флуктуаций. Последние проявляются в спектре в форме широкополосного пьедестала на уровне менее −40 дБ. Ширина основной спектральной линии на уровне половинной мощности определяется коэффициентом эффективной диффузии фазы и, в пределах погрешности численных расчетов, равна $2B_{эф}$.

Аналогичные результаты были получены для генератора с инерционной нелинейностью (5.99) (рис. 5.13) и для других моделей хаотических автогенераторов в режиме спирального аттрактора, что позволяет говорить об их универсальном характере.

Остается вопрос, зависит ли коэффициент эффективной диффузии фазы от способа определения фазы хаотических колебаний. Можно предполагать, что при корректном (в указанном смысле) введении фазы такие величины, как коэффициент эффективной диффузии фазы $B_{эф}$ и средняя частота $\omega_c = \langle\dot{\Phi}(t)\rangle$ должны быть инвариантами (так как они связаны с экспериментально измеряемыми характеристиками). Различные способы определения мгновенной фазы хаотических колебаний были рассмотрены в предыдущей главе. Чтобы выяснить, влияет ли определение фазы на усредненные характеристики, были проведены соответствующие расчеты для хаотического режима в системе (5.98) при $\mu = 6{,}5$, в основу которых положено определение (4.58) и произведено сравнение с результатами, полученными при использовании определения (5.101). Среднее значение частоты, рассчитанное для определения (4.58), есть $\omega_c = 1{,}0683 \pm 10^{-4}$, что соответствует результату, получаемому при использовании определения (5.101). Дисперсия фазы в обоих случаях растет во времени в среднем с одинаковой скоростью. Так оценка коэффициента эффективной диффузии при использовании определения (4.58) дает значение $B_{эф} = 0{,}00018 \pm 10^{-5}$, что совпадает с результатом, полученным для определения (5.101).

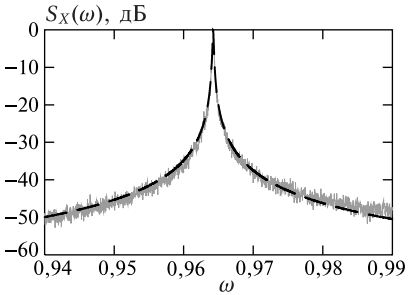


Рис. 5.13. Фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ в (5.99) при $m = 1{,}35$, $g = 0{,}21$, $p = 0{,}0001$ (сплошная серая линия) и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (5.103) с коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{эф} = 0{,}00008 \pm 10^{-5}$ и частотой максимума $\omega_0 = 0{,}9642 \pm 10^{-4}$ (черный пунктир)

5.5.2. Влияние белого шума на хаотические автоколебания в режиме спирального аттрактора

Исследуем, как повлияет аддитивный белый шум на поведение мгновенной фазы хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора. Рассмотрим модель (5.98), добавив в нее белый гауссов шум $n(t)$ ($\langle n(t)\,n(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$):

$$\dot{X} = -Y - Z + \sqrt{2D}n(t), \quad \dot{Y} = X + \alpha Y, \quad \dot{Z} = \beta + Z(X - \mu). \qquad (5.105)$$

D — параметр, управляющий интенсивностью шумового воздействия. Численное исследование модели (5.105) и других моделях спирального хаоса показывает, что воздействие слабого белого шума не приводит к качественным изменениям поведения системы, в частности характера поведения мгновенной фазы, однако может существенно увеличить скорость перемешивания, за счет увеличения коэффициента эффективной диффузии фазы [36, 48, 63, 64]. Исследуем зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{эф}$ от интенсивности белого шума в системе (5.105). Как следует из теории квазигармонического автогенератора диффузия фазы прямо-пропорциональна интенсивности шума D. Можно предположить линейный характер зависимости $B_{эф}(D)$ и в случае хаотического генератора, но при этом необходимо учесть, что хаотические автоколебания в отсутствии шума обладают собственным коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{эф}(0)$. Тогда получим:

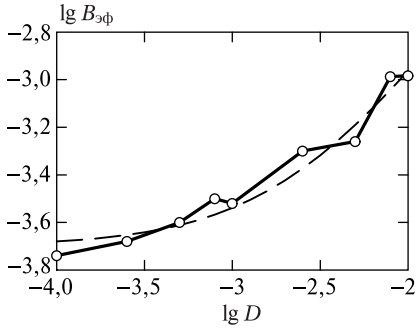


Рис. 5.14. Зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{эф}$ от интенсивности шума D (сплошная кривая) и ее линейная аппроксимация по методу наименьших квадратов (пунктир)

$$B_{эф} = c_1 D + c_2,$$

где c_1 — некоторый коэффициент пропорциональности, определяемый характеристиками хаотических колебаний, а $c_2 = B_{эф}(0)$ — коэффициент

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

эффективной диффузии фазы хаотических автоколебаний при $D = 0$. На рис. 5.14 в логарифмическом масштабе представлена зависимость $B_{эф}$ от интенсивности шума D, полученная численно для модели (5.105). Пунктиром изображена ее линейная аппроксимация (5.5.2). Коэффициенты c_1 и c_2 находились по методу наименьших квадратов. В целом данные численного эксперимента разбросаны в окрестности линейной зависимости, причем полученное в результате линейной аппроксимации значение $c_2 = 0{,}00020$ близко к численно найденному значению коэффициента диффузии: $B_{эф}(0) = 0{,}00018$.

Соответственно с ростом $B_{эф}$ возрастает скорость экспоненциального затухания АКФ хаотических колебаний и ширина основной спектральной линии.

5.5.3. Исследование динамики мгновенной фазы и спектральных характеристик автогенератора со спиральным аттрактором в натурном эксперименте

Статистические характеристики источников шума, неизбежно присутствующих в реальных устройствах, не всегда удается правильно определить. Поэтому, установленные для математической модели закономерности, в реальности могут нарушаться. Чтобы подтвердить наблюдаемость установленных закономерностей в реальных системах были проведены соответствующие натурные эксперименты. В этих целях была создана измерительная установка, включающая исследуемую систему, компьютер, АЦП, и генератор гауссова широкополосного шума с полосой частот от 0 до 100 кГц (рис. 5.15).

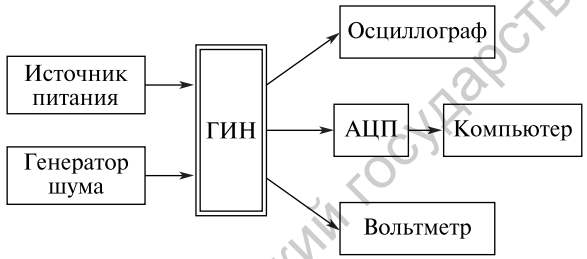


Рис. 5.15. Схема экспериментальной установки

В качестве исследуемой системы был выбран модифицированный генератор с инерционной нелинейностью, представляющий собой реальный радиотехнический автогенератор с мостом Вина и цепочкой инерционной нелинейности, контролирующей коэффициент усиления усилительного каскада [62]. В безразмерных переменных математическая модель ГИН задается системой уравнений (5.99). Значения параметров m и g выбирались соответствующими режиму спирального хаоса. При заданной настройке моста Вина основная частота хаотических колебаний f_0 составляла 18,5 кГц. Частота дискретизации АЦП выбиралась равной 694,44 кГц. Кроме внутренних источников шума на экспериментальный генератор воздействовал широкополосный шум от внешнего генератора, интенсивность которого можно было регулировать.

В ходе эксперимента с помощью АЦП проводилась запись колебаний $x(t)$ исследуемой системы и последующая обработка данных на компьютере. Для последовательности моментов времени вычислялись мгновенная амплитуда $\rho(t)$ и мгновенная фаза $\Phi(t)$ колебаний. В качестве амплитуды бралась длина радиус-вектора, а в качестве фазы — угол поворота радиус-вектора на плоскости переменных $x(t), x_H(t)$, где $x_H(t)$ — преобразование Гильберта от функции $x(t)$. По полученным экспериментальным данным вычислялось зависимость дисперсии фазы от времени и вычислялся коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы $B_{эф}$. При этом использовалось усреднение на ансамбле, составленном из N фрагментов длинной реализации $x(t)$. Рассчитывались также автокорреляционная функция записанных колебаний генератора. Более детально с методикой эксперимента и обработки данных можно ознакомиться в [48]. На рис. 5.16 в логарифмическом масштабе представлены графики огибающих нормированных АКФ, полученные при различных значениях интенсивности внешнего шума. Там же приведены экспоненциальные аппроксимации полученных зависимостей вида $\Psi_{апп}(\tau) = \exp(-B_{эф}\tau)$, где $B_{эф}$ — коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы, найденный по экспериментальным данным (флуктуации амплитуды в ГИН относительно малы, так, что при аппроксимации АКФ их можно не учитывать).

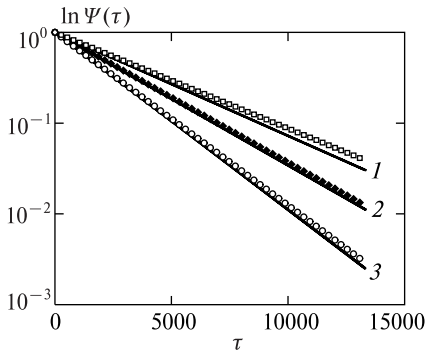


Рис. 5.16. Огибающие автокорреляционных функций (сплошные линии), полученные в эксперименте при различных значениях дисперсии внешнего шума: *1* — $D = 0$, *2* — $D = 0{,}0005$ мВ, *3* — $D = 0{,}001$ мВ, и их экспоненциальные аппроксимации (пунктир) с декрементами затухания: $B_{эф} = 0{,}00024$, $B_{эф} = 0{,}00033$, $B_{эф} = 0{,}000439$, соответственно

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Аналогичные результаты натурных экспериментов, находящиеся в полном соответствии с результатами численных исследований, были получены также для аналоговой модели осциллятора Ресслер [36, 48, 63]. Таким образом, натурные эксперименты показали, что спектрально-корреляционные свойства хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора и их связь с коэффициентом эффективной диффузии фазы являются достаточно грубыми по отношению к характеристикам источников шума и четко наблюдаются в экспериментах.

5.6. СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ПРИСУТСТВИИ ШУМА

5.6.1. Вынужденная синхронизация зашумленных автоколебаний гармонической внешней силой

Синхронизация генераторов типа генератора Ван дер Поля в присутствии источников внутреннего шума впервые была поставлена и решена в работах Р. Л. Стратоновича, А. Н. Малахова и др. [8, 9, 11, 13, 67–69]. Предполагалось, что мощность шума много меньше мощности колебаний и гармонического воздействия и что статистические характеристики шума можно приближенно описать с помощью модели белого гауссова шума. В частности, шум можно считать белым (некоррелированным), если его время корреляции много меньше времени установления стационарных значений амплитуды и фазы колебаний.

Рассмотрим вынужденную синхронизацию на основном тоне, предполагая режим автоколебаний квазигармоническим. Простейшей математической моделью для исследования данного вопроса может служить следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{X} + X = (\varepsilon - X^2)\dot{X} + b\cos(\omega_1 t + \varphi_1^0) + \sqrt{2D}n(t), \tag{5.106}$$

где $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ — гауссов белый шум с постоянной интенсивностью D, b, φ_1^0 и ω_1 — соответственно, амплитуда, начальная фаза и безразмерная частота внешнего воздействия. Применяем замену переменных

$$\begin{aligned} X(t) &= \rho(t)\cos(\omega_1 t + \varphi(t)), \\ \dot{X}(t) &= -\rho(t)\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi(t)) \end{aligned} \tag{5.107}$$

и считая амплитуду $\rho(t)$ и фазу $\varphi(t)$ медленно меняющимися функциями, усредняем правые и левые части равенства за период внешней силы $T_0 = 2\pi/\omega_1$. Далее, преобразовав источники шума, аналогично случаю

автономного генератора (см. приложение П.1), приходим к следующей системе стохастических укороченных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8}\right)\rho - \beta\sin(\varphi - \varphi_1^0) + \frac{D}{2\rho\omega_1^2} + \frac{\sqrt{D}}{\omega_1}n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \Delta - \frac{\beta}{\rho}\cos(\varphi - \varphi_1^0) + \frac{\sqrt{D}}{\omega_1\rho}n_2(t). \end{aligned} \tag{5.108}$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые источники нормированного гауссова белого шума, параметр $\Delta = (1 - \omega_1^2)/2\omega_1 \cong 1 - \omega_1$ характеризует частотную расстройку, а параметр $\beta = b/2\omega_1$ — амплитуду воздействия. Выбор начальной фазы воздействия φ_1^0 не принципиален. Он влияет только на постоянную составляющую переменной φ. В дальнейшем положим $\varphi_1^0 = 0$, тогда переменная φ равна разности фаз генератора и внешнего воздействия. В [28] отмечается, что аналогичная система уравнений может быть получена не только при гармоническом воздействии, но и в случае, когда внешнее воздействие является периодической функцией любой формы, например последовательностью импульсов.

Если выполняются условия $b^2 \ll \varepsilon$, $D \ll \varepsilon$, то отклонения амплитуды от ее невозмущенного значения $\rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$ невелики. Пренебрегая амплитудными флуктуациями, получаем уравнение фазовой динамики в виде

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c\cos\varphi + \sqrt{2B_\varphi}n_2(t), \tag{5.109}$$

где $\Delta_c = \beta/(2\sqrt{\varepsilon})$ — ширина полосы синхронизации в отсутствии шума, а $B_\varphi = D/(8\omega_1^2\varepsilon)$ — интенсивность «фазового шума». Уравнение (5.109) описывает диффузионный процесс, который можно представлять как броуновское движение «частицы» с координатой φ в одномерном наклоненном периодическом потенциале $U(\varphi) = -\Delta\cdot\varphi + \Delta_c\sin\varphi$ (рис. 5.17). При отсутствии шума в случае $\Delta < \Delta_c$ минимумы потенциала $\varphi_k^{\min} = -\arccos(\Delta/\Delta_c) + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ соответствуют синхронизации, так как мгновенная разность фаз автоколебаний и внешней силы остается постоянной во времени. Наличие шума приводит к диффузии разности фаз в потенциале $U(\varphi)$: величина $\varphi(t)$ флуктуирует вблизи минимумов потенциала $\varphi_k^{\min}$, время от времени совершая случайные скачки, соответствующие переходу «частицы» из одной потенциальной ямы в другую.

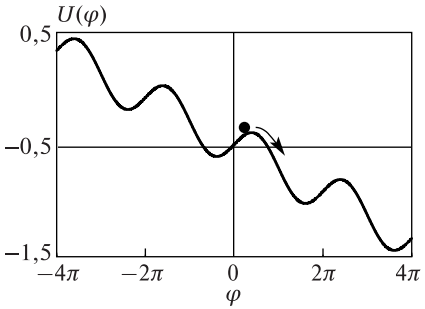


Рис. 5.17. Профиль потенциала $U(\varphi)$ при $\Delta \neq 0$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

На рис. 5.18 показаны реализации разности фаз для различных значений интенсивности шума и, соответственно, различных B_φ, полученные в результате численного интегрирования СДУ (5.109). При малых интенсивностях шума ($B_\varphi = 0{,}02$) мгновенная разность фаз в течение длительного времени остается ограниченной в пределах $\varphi_k^{\min} \pm \pi$, что соответствует захвату фазы. Увеличение интенсивности шума приводит к уменьшению длительности времен пребывания φ в одной из потенциальных ям и становятся видны перескоки мгновенной разности фаз между различными метастабильными состояниями ($B_\varphi = 0{,}05$). Участки приблизительного постоянства мгновенной разности фаз еще достаточно хорошо заметны, однако среднее значение φ возрастает во времени. Чем больше наклон потенциального профиля (расстройка), чем мельче ямы (меньше амплитуда синхронизирующего сигнала) и чем больше интенсивность шума, тем меньше суммарное время, в течение которого фазы генератора и воздействия захвачены. Сильный шум приводит к быстрому неограниченному росту абсолютной величины разности фаз (см. зависимость $\varphi(t)$ для $B_\varphi = 0{,}1$), и существенному изменению средней частоты колебаний.

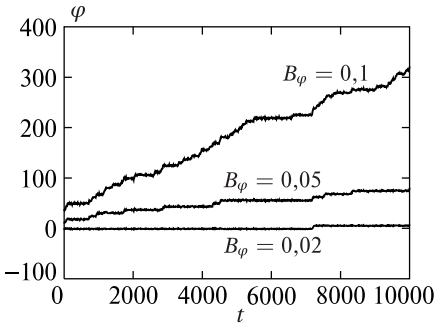


Рис. 5.18. Зависимость мгновенной разности фаз от времени для нескольких значений интенсивности шума. Другие параметры — $\Delta = 0{,}06$ и $\Delta_c = 0{,}15$

Пусть значения параметров соответствуют области фазового захвата в отсутствии шума. Пренебрежем изменениями переменной $\varphi(t)$ в пределах одной потенциальной ямы и будем учитывать только приращения $\pm 2\pi$, возникающие в результате скачков из одной потенциальной ямы в другую. Скачки происходят в случайные моменты времени и их можно считать статистически независимыми. Таким образом, поведение разности фаз подобно случайным блужданиям. Спустя интервал времени $t - t_0$, значительно превосходящий среднее время между скачками, значение $\varphi(t)$ складывается из большого числа независимых случайных приращений. Вследствие центральной предельной теоремы, распределение $\varphi(t)$ становится гауссовым, причем дисперсия распределения растет по линейному закону: $\sigma_\varphi^2(t) = 2B_{\text{эф}} \cdot (t - t_0)$. Величина коэффициента эффективной диффузии $B_{\text{эф}}$ пропорциональна вероятности скачка в единицу времени. Последняя может быть найдена из решения задачи о времени первого достижения границы (так называемая задача Крамерса [8, 3, 65, 11, 10]). В соответствии с изложенными в [8] рассуждениями,

для коэффициента эффективной диффузии разности фаз можно получить следующее приближенное аналитическое выражение:

$$B_{\text{эф}} = \pi\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2}\left[1 + \exp\left(-\frac{2\pi\Delta}{B_\varphi}\right)\right]\exp\left(-\frac{U_0}{B_\varphi}\right), \tag{5.110}$$

где $U_0 = 2\left(\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \arccos(\Delta/\Delta_c)\right)$ — глубина потенциальных ям. Из (5.110) следует, что эффективная диффузия разности фаз быстро растет с ростом интенсивности шума, характеризующейся коэффициентом B_φ, а также с увеличением расстройки Δ. Необходимо отметить, что выражение (5.110) перестает быть справедливым при $\Delta \to \Delta_c$ и вне области синхронизации. По этой причине оно «не работает» и при близких к нулю значениях Δ_c, для которых ширина области синхронизации (без шума) очень мала.

При воздействии на генератор гауссова шума сбои фазы неизбежны для любых значений расстройки и амплитуды синхронизирующего воздействия, т. е. синхронизация не может быть строгой. В этом случае принято говорить об эффективной синхронизации, проявляющейся в захвате фазы на достаточно длительных интервалах времени. Коэффициент $B_{\text{эф}}$ характеризует среднее число фазовых сбоев в единицу времени, а значит может служить критерием эффективной синхронизации.

Поскольку полная фаза автоколебаний есть $\Phi(t) = \omega_1 t + \varphi(t)$, где ω_1 — детерминированная константа, то процессы $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$ характеризуются одним и тем же коэффициентом эффективной диффузии. Таким образом, $B_{\text{эф}}$ определяет полуширину непрерывной компоненты спектра колебаний $X(t)$, которая при небольших расстройках (вдали от границы синхронизации) имеет форму лоренциана.

Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), соответствующее СДУ (5.109), имеет вид

$$\frac{\partial p_\varphi(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[(\Delta - \Delta_c \cos\varphi)\, p_\varphi(\varphi, t) - B_\varphi \frac{\partial p_\varphi(\varphi, t)}{\partial \varphi}\right]. \tag{5.111}$$

Значения фазовой переменной φ при любых Δ и Δ_c неограниченно растут по абсолютной величине, поэтому случайный процесс, описываемый уравнением (5.111), является нестационарным. Однако, поскольку коэффициенты уравнения ФПК — периодические по φ, то можно рассматривать приведенную фазу ϕ, ограниченную в интервале $[-\pi, \pi]$: $\phi(t) = \varphi(t) - 2\pi n$, где $n = \text{Int}[(\varphi(t) + \pi)/2\pi]$. Плотность вероятности приведенной фазы ϕ выражается как:

$$p_\phi(\phi, t) = \sum_n p_\varphi(\varphi, t). \tag{5.112}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Уравнение ФПК для $p_\phi(\phi, t)$ имеет тот же самый вид, что и (5.111), но теперь существует стационарное решение. Стационарную плотность вероятности $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ можно найти с учетом периодичности $p_\phi^{\text{ст}}(\phi + 2\pi) = p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ и условия нормировки $\int_{-\pi}^{\pi} p_\phi^{\text{ст}}(\phi)\, d\phi = 1$ [28]:

$$p_\phi^{\text{ст}}(\phi) = C \exp\left(\frac{\Delta \cdot \phi - \Delta_c \sin\phi}{B_\varphi}\right) \int\limits_{\phi}^{\phi+2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta \cdot \psi - \Delta_c \sin\psi}{B_\varphi}\right) d\psi, \quad -\pi \le \phi \le \pi, \tag{5.113}$$

где C — нормировочная константа. В частном случае, когда $\Delta = 0$, т. е. когда собственная частота осциллятора точно соответствует частоте возбуждения, стационарная плотность вероятности приведенной разности фаз имеет простой вид:

$$p_\phi^{\text{ст}}(\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(\Delta_c/B_\varphi)} \exp\left(\frac{\Delta_c}{B_\varphi}\cos(\phi + \pi/2)\right), \quad -\pi \le \phi \le \pi, \tag{5.114}$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Для большой интенсивности шума, $I_0(\Delta_c/B_\varphi) \approx 1$ и $\exp\left[(\Delta_c/B_\varphi)\cos(\phi + \pi/2))\right] \approx 1$; таким образом, стационарная плотность вероятности с ростом интенсивности шума стремится к однородной, $p_\phi^{\text{ст}}(\phi) = 1/2\pi$. Эта ситуация соответствует отсутствию синхронизации. В противоположном случае очень слабого шума отклонения фазы ϕ от невозмущенного состояния устойчивого равновесия $\phi_0 = -\pi/2$ будут малыми и можно положить $\cos(\phi + \pi/2) \approx \approx 1 - (\phi + \pi/2)^2/2$, $I_0(\Delta_c/B_\varphi) \approx \exp(\Delta_c/B_\varphi)/\sqrt{2\pi\Delta_c/B_\varphi}$. Получаем, что стационарная плотность вероятности имеет гауссову форму:

$$p_\phi^{\text{ст}}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B_\varphi/\Delta_c}} \exp\left(\frac{-(\phi + \pi/2)^2}{2B_\varphi/\Delta_c}\right) \tag{5.115}$$

с максимумом в точке ϕ_0. Хорошо заметный максимум гауссова распределения разности фаз свидетельствует о захвате фазы. В пределе $B_\varphi \to 0$ плотность вероятности становится δ-функцией, т. е. $\lim\limits_{B_\varphi \to 0} p_\phi^{\text{ст}}(\phi) = \delta(\phi + \pi/2)$. При небольшой, но конечной интенсивности шума распределение $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ отклоняется от гауссова, но имеет при этом хорошо заметный максимум.

Введение отличной от нуля расстройки приводит к изменению координаты равновесия ϕ_0 и соответствующему смещению максимума распределения $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$. Дисперсия распределения растет с ростом расстройки. Примеры распределений ϕ, численно полученных для модели (5.109), приведены на рис. 5.19. При $\Delta = \pm\Delta_c$ в системе (5.109) без шума устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сливаются и исчезают, что

соответствует границе фазового захвата. Однако в присутствии шума пересечение границы $\Delta = \pm\Delta_c$ не приводит к изменению характера распределения переменной ϕ (рис. 5.19). Причина этого ясна. Если $|\Delta| < \Delta_c$, то случайные толчки все равно выводят систему из состояния равновесия ϕ_0, приводя к распределению $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ конечной ширины с максимумом в точке ϕ_0. Если $|\Delta| > \Delta_c$, то точки ϕ_0 в системе без шума не существует. Однако, поскольку в окрестности исчезнувшей точки равновесия скорость $\dot{\phi}$ мала, то в течении длительных промежутков времени значения ϕ близки к ϕ_0. На графике зависимости $\varphi(t)$ этому соответствуют почти горизонтальные участки. Соответственно, у распределения $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ сохраняется максимум в точке, близкой к исчезнувшей точке равновесия. При дальнейшем увеличении расстройки стационарное распределение постепенно приближается к равномерному. Таким образом, можно сделать вывод об отсутствии бифуркационного перехода, связанного с качественным изменением стационарного распределения разности фаз и определяющего границы фазовой синхронизации генератора с гауссовым шумом.

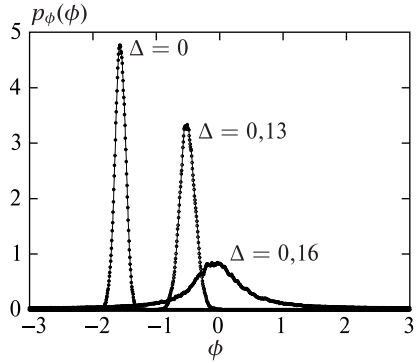


Рис. 5.19. Распределения ограниченной разности фаз $\phi \in [-\pi, \pi]$, численно полученные для модели (5.109) при $B_\varphi = 0{,}001$, $\Delta_c = 0{,}15$ и различных значениях расстройки

Зная стационарную плотность вероятности $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ можно найти среднюю разностную частоту колебаний Ω:

$$\Omega = \omega_c - \omega_1 = \langle\dot{\phi}\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\Delta - \Delta_c \cos\phi) p_\phi^{\text{ст}}(\phi)\, d\phi, \tag{5.116}$$

где ω_c — средняя частота автоколебаний в присутствии воздействия. В области синхронизации в системе с шумом величина Ω отлична от нуля и представляет собой средний сдвиг частоты синхронных колебаний в сторону собственной частоты автогенератора, вызванный флуктуациями фазы. Графики зависимости Ω от расстройки Δ, рассчитанные для модели (5.109), приведены на рис. 5.20. Величина Ω плавно меняется с изменением расстройки, обращаясь в ноль только в точке $\Delta = 0$. Полученные в присутствии шума кривые располагаются между кривой, соответствующей системе без шума, и прямой $\Omega = \Delta$, отражающей полное отсутствие синхронизации (штрих-пунктир). Таким образом, наличие случайных

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

гауссовых возмущений приводит к тому, что средняя частота автоколебаний не совпадает с частотой воздействия, а находится между частотой воздействия и частотой невозмущенных автоколебаний. Однако, если интенсивность шума достаточно мала зависимость $\Omega(\Delta)$ имеет характерную для синхронизации почти горизонтальную «полочку» (рис. 5.20, $B_\phi = 0{,}01$). С ростом интенсивности шума такая «полочка» постепенно исчезает.

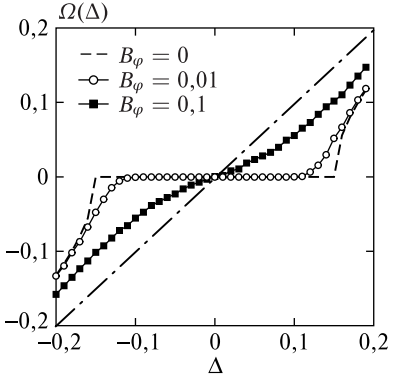


Рис. 5.20. Зависимости средней разностной частоты Ω от параметра расстройки в модели (5.109), полученные при $\Delta_c = 0{,}15$ для двух различных значений интенсивности шума и в отсутствии шума. Штрихпунктиром нанесена прямая $\Omega = \Delta$

При нулевой расстройке средняя частота автоколебаний совпадает с частотой воздействия, но это не означает, что имеет место эффективная синхронизация в смысле захвата фазы на длительных интервалах времени. О захвате фазы можно говорить, если коэффициент эффективной диффузии разности фаз принимает достаточно малые значения. Как следует из (5.110) при $\Delta = 0$ коэффициент $B_{эф}$ убывает с ростом амплитуды воздействия (параметра Δ_c в уравнении (5.109)) и любое его заданное малое значение может быть получено только при определенном значении Δ_c. Иначе говоря, существует амплитудный порог вынужденной синхронизации в системе с шумом.

Наконец, рассмотрим как эволюционирует спектр мощности синхронизируемых автоколебаний в присутствии шума, используя для этого фазовую модель (5.109). Зафиксируем расстройку Δ и интенсивность шума и проследим эволюцию спектральной плотности колебаний $X(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi(t))$ при увеличении Δ_c (т. е. амплитуды воздействия). Результаты расчетов приведены на рис. 5.21. При малом значении Δ_c в спектре (кривая *1*), кроме острого пика на частоте воздействия ω_1 (теоретически — это должна быть δ-функция) хорошо видна спектральная линия с максимумом на некоторой частоте ω_c, соответствующая автоколебаниям. Расстояние между спектральными максимумами равно Ω. С ростом Δ_c спектральная линия автоколебаний смещается в сторону δ-пика и при этом уширяется (кривая *2*). Образуется широкий пьедестал спектра с максимумом, смещенным на величину Ω относительно частоты воздействия ω_1. Смещение может быть очень мало, но всегда отлично от нуля, если $\Delta \neq 0$ и значение Δ_c конечно (кривая *3*).

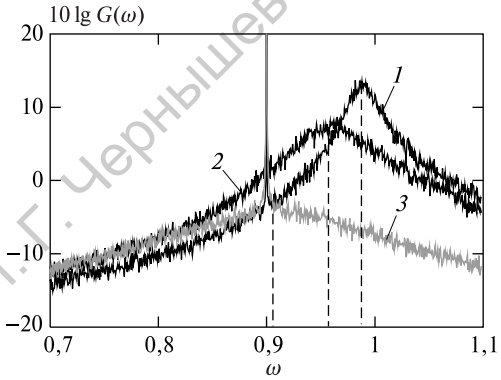


Рис. 5.21. Спектры колебаний $X(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi(t))$, где $\varphi(t)$ задается фазовым уравнением (5.109) при фиксированном значении расстройки $\Delta = 0{,}1$ и различных значениях параметра Δ_c: *1* — 0,05; *2* — 0,1; *3* — 0,15. Интенсивность шума соответствует значению $B_\varphi = 0{,}01$, частота воздействия $\omega_1 = 0{,}9$. Для удобства сравнения спектры не нормированы. Пунктирными линиями отмечены спектральные максимумы на частоте автоколебаний ω_c

5.6.2. Взаимная синхронизация квазигармонических автогенераторов в присутствии шума

Рассмотрим взаимную синхронизацию двух генераторов, содержащих источники шума. Пусть исходная модель имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 &= (\varepsilon_1 - X_1^2)\dot{X}_1 + \gamma_1(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) + \sqrt{2D_1}\,n_1(t), \\ \ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 &= (\varepsilon_2 - X_2^2)\dot{X}_2 + \gamma_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + \sqrt{2D_2}\,n_2(t), \end{aligned} \tag{5.117}$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые источники стандартного гауссова белого шума, D_1 и D_2 — постоянные, задающие интенсивность шума, γ_1 и γ_2 — коэффициенты связи, ω_1 и ω_2 — параметры, управляющие собственными частотами генераторов. Переходя к укороченным стохастическим уравнениям (аналогично разд. 5.2 и п. 5.4.1) и пренебрегая амплитудными возмущениями, получаем следующую систему стохастических уравнений, описывающих динамику фаз парциальных генераторов

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Delta_{c1}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \sqrt{2B_{\varphi 1}}\,n_{12}(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta - \Delta_{c2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \sqrt{2B_{\varphi 2}}\,n_{22}(t). \end{aligned} \tag{5.118}$$

Здесь переменные $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ представляют собой случайные компоненты полных фаз первого и второго генераторов, соответственно, а $n_{12}(t)$ и $n_{22}(t)$ — независимые источники стандартного гауссова белого

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

шума ($\langle n_{12}(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n_{22}(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n_{12}(t)\, n_{22}(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$). Параметры модели (5.118) связаны с параметрами исходной модели (5.117) следующими соотношениями: $\Delta = (\omega_2^2 - \omega_1^2)/(2\omega_1) \approx \omega_2 - \omega_1$; $\Delta_{c1} = (\gamma_1/2)\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$; $\Delta_{c2} = (\gamma_2/2)\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$; $B_{\varphi 1} = D_1/(8\varepsilon_1\omega_1^2)$; $B_{\varphi 2} = D_2/(8\varepsilon_2\omega_1^2)$.

Величина Δ представляет собой частотную расстройку невзаимодействующих генераторов, Δ_{c1} и Δ_{c2} определяют, соответственно, влияние второго генератора на первый и первого на второй, а $B_{\varphi 1}$ и $B_{\varphi 2}$ задают интенсивности фазовых флуктуаций в генераторах при отсутствии связи и, таким образом, характеризуют ширину спектров автоколебаний.

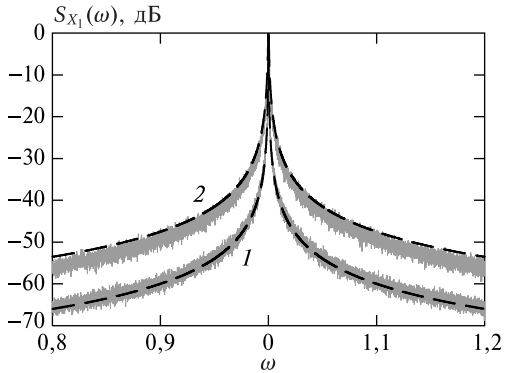


Рис. 5.22. Нормированные спектры мощности колебаний $X_1(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t))$, при использовании модели (5.118), для двух значений параметра Δ_{c1}: *1* — 0,02, *2* — 0,2. Значения других параметров: $B_{\varphi_1} = 0{,}0001$; $B_{\varphi_2} = 0{,}001$; $\Delta = 0$; $\Delta_{c2} = 0{,}1$; $\omega_1 = 1$. Пунктирными линиями нанесены соответствующие аппроксимации спектра в форме лоренциана с полушириной, равной численно найденному значению коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф}1}$

Из уравнений (5.118) следует уравнение для мгновенной разности фаз генераторов $\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$:

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c \sin\varphi + \sqrt{2B_\varphi}\, n(t), \tag{5.119}$$

где $\Delta_c = \Delta_{c1} + \Delta_{c2}$ — параметр, характеризующий глубину связи, а $\sqrt{2B_\varphi}\, n(t)$ — гауссов белый шум с интенсивностью, складывающейся из интенсивностей источников шума каждого из генераторов: $B_\varphi = B_{\varphi 1} + B_{\varphi 2}$ (в силу статистической независимости последних). Уравнение (5.119) аналогично уравнению (5.109), исследованному в предыдущем разделе. Замена косинуса на синус влияет только на постоянную компоненту переменной φ и, соответственно, на координату максимума плотности вероятности. Для модели (5.119) при $\Delta = 0$ максимум распределения ϕ находится в нуле. В общем случае постоянная компонента разности фаз определяется типом связи парциальных генераторов в исходной модели (5.117). Таким образом, в случае взаимодействующих зашумленных генераторов, как и в случае периодического воздействия на зашумленный генератор, имеется конечная область значений расстройки, в которой наблюдается эффективная синхронизация, состоящая в захвате фаз на достаточно длительных интервалах времени. При этом разностная частота генераторов $\Omega = \langle\dot{\varphi}_2(t)\rangle - \langle\dot{\varphi}_1(t)\rangle$ оказывается близка к нулю, хотя строгое равенство $\Omega = 0$ имеет место только при нулевой расстройке. Эффект синхронизации зависит от глубины связи Δ_c и суммарной интенсивности шума обоих генераторов. При слабой связи и большом шуме эффективная синхронизация не наблюдается даже в случае $\Delta = 0$.

Рассмотрим, какова будет ширина спектральной линии синхронизованных автоколебаний. Приближенное аналитическое решение данной задачи можно найти в [9, 13]. Здесь мы ограничимся результатами, полученными численно для модели (5.118). Колебания автогенераторов будем задавать в виде $X_{1,2}(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_{1,2}(t))$, пренебрегая амплитудами, значения которых полагаем постоянными. Пусть $\Delta = 0$ (расстройка отсутствует). Спектры колебаний имеют форму лоренцианов с максимумами на одной и той же частоте $\omega_0 = 1$. Полуширина спектра каждого из генераторов равна соответствующему коэффициенту эффективной диффузии фазы: $B_{\text{эф}1}$ или $B_{\text{эф}2}$. При отсутствии связи ($\Delta_{c1} = \Delta_{c2} = 0$) имеем: $B_{\text{эф}1} = B_{\varphi 1}$; $B_{\text{эф}2} = B_{\varphi 2}$. Выберем $B_{\varphi 1} < B_{\varphi 2}$, т. е. спектр первого генератора уже, чем спектр второго.

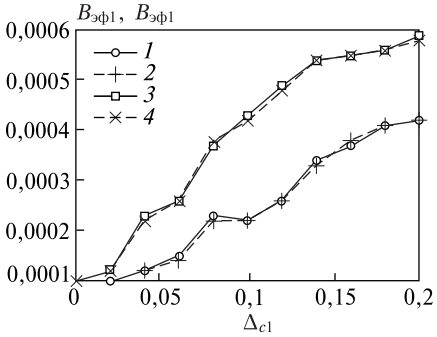


Рис. 5.23. Зависимости парциальных коэффициентов $B_{\text{эф}1}$ и $B_{\text{эф}2}$ от параметра связи Δ_{c1}: при $\Delta_{c2} = 0{,}1$ (*1*, *2*) и при $\Delta_{c2} = 0{,}05$ (*3*, *4*). Интенсивности источников шума задавались параметрами $B_{\varphi_1} = 0{,}0001$ и $B_{\varphi_2} = 0{,}001$

На рис. 5.22 приведены спектры колебаний первого генератора для двух значений Δ_{c1} при фиксированном Δ_{c2}. Оба случая соответствуют эффективной синхронизации, когда значения $B_{\text{эф}1}$ и $B_{\text{эф}2}$ близки между собой. Спектр второго генератора практически не отличается от спектра первого генератора и на рисунке не изображен.

Рисунок 5.23 иллюстрирует зависимости парциальных коэффициентов $B_{\text{эф}1}$ и $B_{\text{эф}2}$ от параметра связи Δ_{c1}.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Результаты, приведенные на рис. 5.22 и 5.23 свидетельствуют, что спектры синхронных колебаний будут уже, если генератор, оказывающий большее воздействие (синхронизующий) является «менее зашумленным» и, наоборот, спектры шире, если синхронизующий генератор «шумит сильнее».

5.6.3. Синхронизация хаотических автоколебаний в присутствии шума

Тот факт, что частотно-фазовая синхронизация хаоса наблюдается в эксперименте (см. гл. 4) означает грубость данного явления по отношению к слабому шумовому воздействию (поскольку в эксперименте всегда присутствует шум). При наличии шума синхронизация хаоса не будет строгой. Также как и в задаче о синхронизации квазигармонических колебаний в присутствии шума, захват фазы на сколь угодно большом интервале времени становится невозможным. Однако, если интенсивность шума мала, то условие ограниченности мгновенной разности фаз в окрестности некоторого постоянного значения K может выполняться достаточно долго. В этом случае возможно говорить об эффективной синхронизации хаотических автоколебаний.

С целью анализа влияния шума на синхронизацию спирального хаоса была численно исследована система Ресслер с внешним гармоническим воздействием, содержащая источник аддитивного белого гауссова шума:

$$\dot{X} = -Y - Z + b\sin(\omega_1 t) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad \dot{Y} = X + \alpha Y, \quad \dot{Z} = \beta + Z(X - \mu). \tag{5.120}$$

где $\xi(t)$ — источник гауссова шума, причем: $\langle\xi(t)\rangle \equiv 0$; $\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$, $\delta(\ldots)$ — функция Дирака. Постоянная D задает интенсивность шума.

На рис. 5.24, *а* представлены зависимости отношения частот Θ_c от частоты воздействия ω_1, полученные для двух различных значений интенсивности шума. Пунктиром изображена кривая, полученная в отсутствии шума (кривая *1*). При воздействии шума с интенсивностью $D = 0{,}01$ еще сохраняется область значений параметра ω_1, в пределах которой Θ_c близко к единице (кривая *2*). В этом случае допустимо говорить о существовании области эффективной синхронизации спирального хаоса. Можно выделить два эффекта, вызванные шумовым воздействием: область синхронизации возмущенной системы слегка сдвигается вправо, что может быть связано с изменением характеристик автоколебательного режима под действием шума; ширина области синхронизации существенно уменьшается. При увеличении интенсивности шума до значения $D = 0{,}02$ область эффективной синхронизации практически исчезает (кривая *3*). Зависимости разности фаз $\Delta\Phi$ от времени при $D = 0$, $D = 0{,}01$ и $D = 0{,}02$ представлены на рис. 5.24, *б*. Пунктиром нанесена зависимость $\Delta\Phi$, полученная без шумового воздействия.

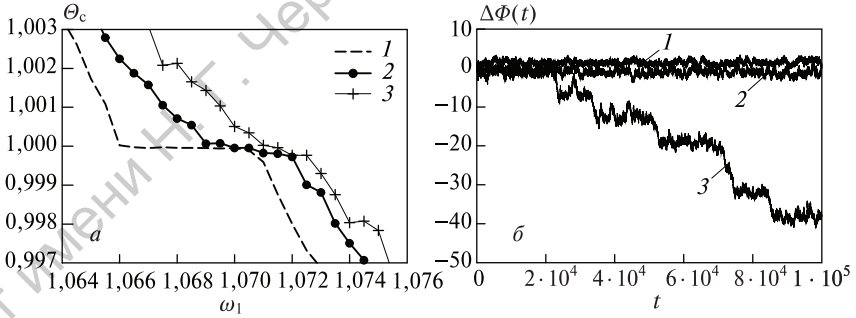


Рис. 5.24. Влияние гауссова белого шума на синхронизацию спирального хаоса в системе (5.120) при $\alpha = \beta = 0{,}2$, $\mu = 6{,}5$, $b = 0{,}03$: *а* — число вращения $\Theta_c = \omega_c/\omega_1$ в зависимости от частоты воздействия ω_1; *б* — поведение разности фаз $\Delta\Phi$ во времени. Кривые *1–3* соответствуют значениям $D = 0$, $D = 0{,}01$ и $D = 0{,}02$. Расчет разности фаз проводился при значении ω_1, обеспечивающем оптимальные условия синхронизации (для $D = 0$; 0,01; 0,02 фиксировались значения $\omega_1 = 1{,}0683$; 1,0705; 1,0720, соответственно). Время системы (5.120) является безразмерным

5.6.4. Синхронизация автоколебаний узкополосным шумом

Пусть на нешумящий генератор подается воздействие, представляющее собой узкополосный шум. В этом случае, как и при периодической синхронизации шумящего генератора, можно наблюдать нестрогий захват фазы [9, 13]. Эффект синхронизации зависит от свойств воздействующего случайного сигнала, причем важны не только его спектральные характеристики, но и вероятностное распределение [9].

Узкополосный случайный сигнал $\xi(t)$ может представлять собой колебания периодического генератора, содержащего внутренний источник шума. В этом случае вероятностное распределение случайной переменной ξ не является гауссовым. К такой ситуации мы приходим, если в системе (5.117) положим $\gamma_1 = 0$ и $D_2 = 0$, в то время, как $\gamma_2 \neq 0$ и $D_1 \neq 0$. Первый, шумящий, генератор синхронизует второй генератор, который является нешумящим. Если интенсивность шума D_1 мала, то флуктуациями амплитуды можно пренебречь и сигнал $\xi(t) = \dot{X}_1(t)$ представляет собой узкополосный случайный процесс, спектр которого имеет форму лоренциана с полушириной $B_{\varphi 1} = D_1/8\varepsilon_1$ и максимумом на

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

собственной частоте генерации (см. разд. 5.1)[1]). В фазовом приближении разность фаз генераторов описывается СДУ (5.119). Надо только положить $\Delta_c = \Delta_{c2}$ и $B_\varphi = B_{\varphi 1}$. С точностью до постоянной компоненты величины φ мы приходим, к той же модели, которая описывает синхронизацию шумящего генератора гармоническим сигналом (см. разд. 5.3).

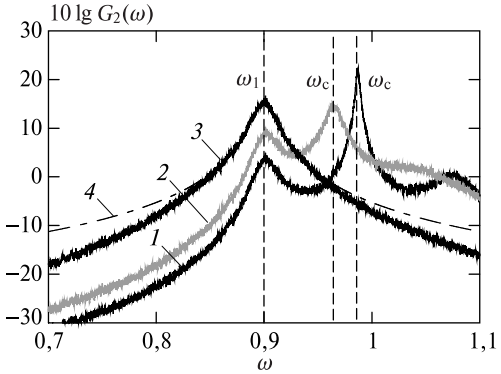


Рис. 5.25. Спектры колебаний $X_2(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_2(t))$, где $\varphi_2(t)$ задается уравнениями (5.118) с параметрами, соответствующими однонаправленному воздействию шумящего первого генератора на нешумящий второй генератор: $\Delta_{c1} = 0$, $B_{\varphi 2} = 0$. Расстройка имеет фиксированное значение $\Delta = 0{,}1$, а параметр связи меняется: Δ_{c2}: 0,05 (кривая *1*); 0,08 (кривая *2*); 0,15 (кривая *3*). Интенсивность шума синхронизующего генератора соответствует значению $B_{\varphi 1} = 0{,}01$, частота воздействия $\omega_1 = 0{,}9$. Для удобства сравнения спектры не нормированы. Линия *4* представляет собой аппроксимацию синхронизованного спектра лоренцианом с полушириной $B_{\varphi 1}$

Таким образом, в рамках фазового приближения не важно, какой из двух генераторов содержит источник шума — синхронизируемый или синхронизующий. Они также могут быть оба шумящими. Модель, задающая поведение разности фаз генераторов в любом случае будет одна и та же. Однако спектры синхронизуемых колебаний будет для указанных случаев различаться. Спектры, полученные численно в случае синхронизации нешумящего генератора сигналом генератора с шумом представлены на рис. 5.25. Они соответствуют фиксированной расстройке и различным значениям параметра связи. Спектральные линии как на частоте воздействия ω_1, так и на собственной частоте ω_c имеют конечную ширину,

[1]) Спектры процессов $X_1(t)$ и $\dot{X}_1(t)$ связаны как $G_{\dot{X}}(\omega) = \omega^2 G_X(\omega)$ а распределения обоих процессов не являются гауссовыми

что не является результатом ограниченной точности вычислений, а соответствует действительности. В остальном эволюция спектра — та же, что и при синхронизации шумящего генератора гармоническим сигналом (рис. 5.21): с ростом интенсивности воздействия пик на частоте ω_c заметно смещается в сторону линии воздействия при этом расширяясь (кривые *2* и *3*). При сильном воздействии он становится незаметен, трансформировавшись в широкополосный пьедестал (кривая *3*). В условиях эффективной (кривая *3*) синхронизации ширина спектра колебаний определяется шириной спектра воздействия. Как видно из рис. 5.25 лоренциан с полушириной $B_{\varphi 1}$, соответствующей полуширине сигнала воздействия, хорошо аппроксимирует спектр синхронных колебаний в окрестности максимума на частоте воздействия (линия *4*).

Узкополосный шум с теми же спектральными характеристиками может быть гауссовым. Такой шум можно получить пропустив белый шум через узкополосный фильтр (например, через высокодобротный колебательный контур). В этом случае, вне зависимости от интенсивности белого шума, амплитудные флуктуации получаемого сигнала оказываются существенными и, чисто фазовая модель синхронизации не применима. Рассмотрим генератор под действием узкополосного гауссова шума $\xi(t)$:

$$\ddot{X} + X = (\varepsilon - X^2)\dot{X} + b\xi(t). \qquad (5.121)$$

Узкополосный стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением ($\langle\xi(t)\rangle \equiv 0$) можно представить в виде [12, 70]: $\xi(t) = U(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_1(t))$, где $\omega_1 = \text{const}$ — частота спектрального максимума, $\langle\varphi_1(t)\rangle = \text{const}$. Случайные функции $U(t)$ и $\varphi_1(t)$ являются «медленными» по сравнению с $\cos(\omega_1 t)$, $\sin(\omega_1 t)$ и называются амплитудой (огибающей) и фазой (точнее случайной компонентой фазы) процесса $\xi(t)$. Из уравнения (5.121) легко получить следующее приближенное уравнение, описывающее поведение случайной компоненты фазы генератора:

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c U(t)\cos(\varphi - \varphi_1), \qquad (5.122)$$

где $\Delta = (1 - \omega_1^2)/2\omega_1 \approx 1 - \omega_1$ — параметр расстройки, $\Delta_c = b/4\omega_1\sqrt{\varepsilon}$ — параметр, характеризующий степень воздействия. В силу «медленности» функции $U(t)$ можно воспользоваться выражением, для частоты биений квазигармонического генератора без шума и, с учетом равенства $\langle\dot{\varphi}_1(t)\rangle = 0$, приближенно представить средний сдвиг частоты автоколебаний в виде [13]

$$\Omega = \left\langle \frac{d(\varphi(t) - \varphi_1(t))}{dt} \right\rangle \approx \Delta \int_0^{U_0} p_U(U)\sqrt{1 - \frac{U^2}{U_0^2}}\, dU, \quad U_0 = \frac{\Delta}{\Delta_c}. \qquad (5.123)$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Усреднение проводится по стационарному распределению $p_U(U)$, которое, в случае гауссова распределения величины ξ, определяется законом Релея [10–13]:

$$p_U(U) = 2\kappa U \exp(-\kappa U^2), \qquad (5.124)$$

где κ — параметр распределения. На рис. 5.26 приведены зависимости Ω от расстройки, полученные в соответствии с (5.123) и (5.124). Для сравнения на том же рисунке приведен аналогичный график, полученный в результате численного моделирования системы (5.121). Полная фаза колебаний определялась по формуле (5.82), а процесс $\xi(t)$ задавался уравнением

$$\ddot{\xi} + 2\alpha\dot{\xi} + \omega_1^2\xi = \sqrt{2D}n(t), \qquad (5.125)$$

где $n(t)$ — стандартный гауссов белый шум. Параметры уравнений (5.121) и (5.125) выбирались в соответствии с параметрами уравнения (5.122) и параметром распределения амплитуды шума $\kappa = 1$. Полученные данные свидетельствуют, что приближенная формула (5.123) находится в хорошем соответствии с поведением исходной модели.

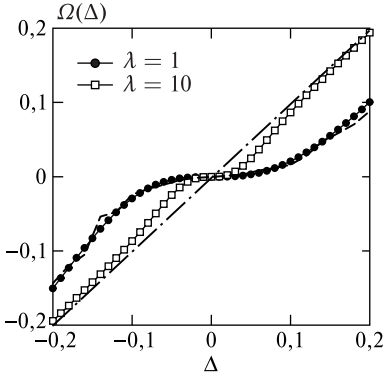


Рис. 5.26. Зависимости Ω от расстройки, полученные в соответствии с (5.123) и (5.124) для $b = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}05$ и двух значений κ. Пунктиром нанесена зависимость, полученная при численном моделировании системы (5.121)–(5.125)

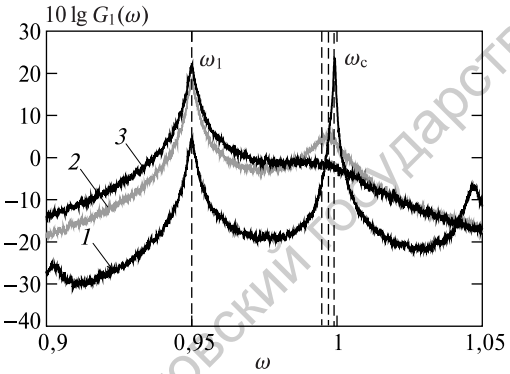


Рис. 5.27. Спектры колебаний $X(t)$ в системе (5.121)–(5.125), полученные при фиксированной расстройке $\Delta = 0{,}05$ и различных значениях интенсивности узкополосного случайного воздействия b: *1* — 0,01; *2* — 0,05; *3* — 0,1). Другие параметры: $\varepsilon = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}001$, $D = 0{,}001$

Спектры колебаний при синхронизации нешумящего генератора гауссовым узкополосным шумом, полученные численно для модели (5.121)–(5.125), приведены на рис. 5.27. Эволюция спектра с ростом интенсивности воздействия существенно отличается от рассмотренного нами выше случая синхронизации узкополосным шумом (рис. 5.25). Теперь с усилением воздействия можно отметить лишь очень незначительное смещение линии автоколебаний (максимум на частоте ω_c) в сторону линии воздействия (максимум на частоте ω_1). То есть частота почти не захватывается, а механизм синхронизации состоит в увеличении ширины линии автоколебаний, мощность которой распределяется в широком частотном диапазоне.

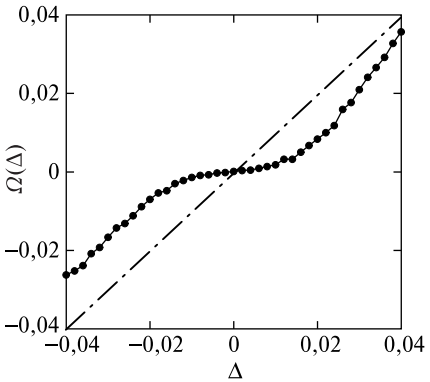


Рис. 5.28. Зависимость смещения средней частоты хаотических колебаний от параметра частотной расстройки при воздействии на осциллятор Ресслера (5.98) узкополосного шума $\nu(t) = \dot{\xi}(t)$, задаваемого уравнением (5.125). Параметры воздействия: ширина спектра $\Delta\omega_\nu = 0{,}001$; дисперсия $\sigma_\nu^2 = 1$; интенсивность воздействия $b^2 = 0{,}02$. Параметры осциллятора Ресслера: $\alpha = \beta = 0{,}2$; $\mu = 6{,}5$

Синхронизация узкополосным шумом наблюдается не только для квазигармонических генераторов, но и для более сложных автоколебательных систем, например для генераторов динамического хаоса в режиме спирального аттрактора [64, 66]. В качестве примера может служить осциллятор Ресслер (5.98), находящийся под воздействием узкополосного шума $\nu(t) = \dot{\xi}(t)$, где $\xi(t)$ задается (5.125). На рис. 5.28 приведена зависимость смещения средней частоты хаотических колебаний от параметра Δ, управляющего частотной расстройкой автоколебаний и узкополосного шумового сигнала. Качественно она аналогична зависимостям, полученным для квазигармонического генератора. Эволюция спектров хаотических автоколебаний при синхронизации узкополосным шумом двух рассмотренных нами типов также качественно повторяет результаты, приведенные на рис. 5.25 и 5.27.

5.7. ВЫВОДЫ

В данной главе мы рассмотрели некоторые классические задачи, связанные с воздействием случайных сил на автогенератор. Было показано, что случайные воздействия приводят к спаду автокорреляци-

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

онной функции и конечной ширине спектральной линии автоколебаний. Шум препятствует синхронизации автоколебательных систем (как вынужденной, так и взаимной), приводя к случайным скачкам разности фаз. Однако, если шум достаточно слабый, можно ввести понятие эффективной (нестрогой) синхронизации. Эффективная синхронизация не связана с бифуркационным переходом и не имеет четкого критерия. Границы эффективной синхронизации устанавливаются условно: либо накладывается требование на абсолютную величину смещения частоты Ω, которая не должна отклоняться от нуля более, чем на заданную величину; либо требуют, чтобы коэффициент эффективной диффузии разности фаз $B_{эф}$ не превосходил некоторого достаточно малого значения. Узкополосный (гармонический) шум сам может синхронизовать автогенератор. Синхронизация в этом случая также будет нестрогой.

При исследовании влияния шума на автоколебательные системы мы в большинстве случаев ограничились квазигармоническими режимами генерации, рассмотрели синхронизацию только на основном тоне и в рамках фазового приближения. Однако исследованные нами на простейших моделях эффекты носят более общий характер и полученные результаты качественно справедливы для более сложных типов автоколебаний (релаксационных, квазипериодических, хаотических). Эффективную синхронизацию можно наблюдать не только на основном тоне, но также на гармониках и субгармониках [13]. Влияние амплитудных флуктуаций на эффективную синхронизацию, особенно при большой амплитуде синхронизующего сигнала также не была рассмотрено в данной книге. Однако этот вопрос до настоящего времени слабо освещен в литературе и нуждается в дополнительных исследованиям.

Много интересных эффектов в автоколебательных системах может быть связано с мультипликативным шумом, т. е. с шумом, интенсивность которого зависит от динамических переменных. Именно мультипликативный шум часто может приводить к бифуркационным перестройкам автоколебательных режимов [4, 6]. Однако этот круг вопросов может составить предмет отдельной книги и мы здесь мы его не затрагиваем.

В данной главе мы также провели некоторую аналогию между «шумящим» квазигармоническим генератором и хаотическим генератором в режиме спирального хаоса. Мы показали, что спектрально-корреляционные характеристики автоколебаний в двух указанных случаях очень похожи. В основе такого сходства лежит однотипное поведение мгновенной фазы генератора с шумом и генератора спирального хаоса, главной чертой которого является практически линейный рост дисперсии во времени, позволяющий говорить об эффективной диффузии фазы. Разница заключается в том, что в периодическом генераторе диффузия

фазы вызвана действием шума, а в хаотическом — собственной детерминированной динамикой. Коэффициент эффективной диффузии фазы, характеризующий скорость линейного роста дисперсии, является главным фактором, ответственным за ширину основной спектральной линии и скорость спада АКФ автоколебаний. Он же играет важную роль при синхронизации автоколебаний. Синхронизация спирального хаоса была рассмотрена в гл. 4 данной книги. Она имеет сходство с синхронизацией в присутствии шума, состоящее в наличии амплитудного порога синхронизации. То есть даже при воздействии на средней частоте автоколебаний синхронизация наблюдается начиная с некоторого, отличного от нуля, значения амплитуды внешней силы. Причина в том, что, как в случае эффективной синхронизации шумящего генератора, так и в случае синхронизации хаоса, эффект синхронизации состоит не только в захвате средней частоты, но и в «подавлении» диффузии фазы, для чего требуется превышение некоторого амплитудного порога. При этом в отличии от генератора с гауссовым шумом, диффузия фазы хаотического автогенератора со спиральным аттрактором подавляется полностью и синхронизация является строгой. Можно также провести ряд аналогий между взаимодействующими хаотическими генераторами и периодическими генераторами с источниками шума. Однако, для краткости мы ограничимся вышесказанным.

Литература

1. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. — М.: Наука, 1979.
2. *Ван Кампен Н. Г.* Стохастические процессы в физике и химии. — М.: Высшая школа, 1990.
3. *Гардинер К. В.* Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986.
4. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. — М.: Мир, 1987.
5. *Graham R.* Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // Noise in Nonlinear Dynamical Systams. V. 1: Theory of continuous Fokker-Planck systems / Ed. by. F. Moss and P. V. E. McClintock. — Cambrige: Cambridge University Press, 1989.
6. *Arnold L.* Random Dynamical System. — Berlin: Springer, 2003.
7. *Понтрягин Л., Андронов А., Витт А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. — 1933. — Т. 3, вып. 3. — С. 165–180.
8. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
9. *Малахов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

10. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1966.
11. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
12. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. А., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
13. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. — М.: Наука, 1980.
14. *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A: Math. Gen. — 1981. — V. 14. — P. L453–L457.
15. *Risken Z.* The Fokker-Planck Equation. — Berlin: Springer, 1989.
16. *Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S.* Stochastic resonance in bistable systems // Phys. Rev. Lett. — 1989. — V. 62. — P. 349–352.
17. *Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский–Гаер Л.* Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // УФН. — 1999. — Т. 42, № 1. — С. 7–36.
18. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system // Phys. Rev. Lett. — 1997. — V. 78. — P. 775–778.
19. *Bulsara A. R., Schieve W. C., Gragg R. F.* Phase transitions induced by white noise in bistable optical system // Phys. Lett. A. — 1978. — V. 68. — P. 294–296.
20. *Анищенко В. С., Сафонова М. А.* Индуцированное шумом экспоненциальное разбегание фазовых траекторий в окрестности регулярных аттракторов // Письма в ЖТФ. — 1986. — Т. 12, вып. 12. — С. 740–744.
21. *Sigeti D., Horsthemke W.* Pseudo-regular oscillations induced by external noise // J. Stat. Phys. — 1989. — V. 54. — P. 1217–1222.
22. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // Journal of Statistical Physiks. — 1993. — V. 70. — P. 141–147.
23. *Armbruster D., Stone E., Kirk V.* Noisy heterodinic networks // Chaos. — 2003. — V. 13. — P. 71–78.
24. *Кравцов Ю. А., Эткин В. С.* К вопросу о роли флуктуационных сил в динамике автостохастических систем: ограниченность времени предсказуемости и разрушение слабых периодических режимов // Изв. вузов. Радиофизика. — 1981. — Т. 24, вып. 8. — С. 992–999.
25. *Пиковский А. С.* О влиянии шумов на статистику хаотических автоколебаний // Изв. вузов. Радиофизика. — 1986. — Т. 15, вып. 9. — С. 1885–1894.
26. *Анищенко В. С., Сафонова М. А.* Бифуркации аттракторов в присутствии флуктуаций // ЖТФ. — 1988. — Т. 58, вып. 4. — С. 64–651.
27. *Jaeger L., Kants H.* Homoclinic tangencies and nonnormal Jacobians — effects of noise in nonhyperbolic chaotic systems // Physica. D. — 1997. — V. 105. — P. 79–96.
28. *Schroer Ch. G., Ott E., Yorke J. A.* Effects of noise on nonhyperbolic chaotic attractors // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 81, No. 7. — P. 1397–1400.
29. *Кравцов Ю. А., Бильчинская С. Г., Бутковский О. Я., Рычка И. А., Суровяткина Е. Д.* Предбифуркационное усиление шума в нелинейных системах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2001. — Т. 120, вып. 6. — С. 15–27.

30. *Kravtsov Yu. A., Suruvyatkina E. D.* Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification // Phys. Lett. A. — 2003. — V. 319, No. 3–4. — P. 348–351.
31. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980.
32. *Синай Я. Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова–Грехова. — М.: Наука, 1979. — С. 192–212.
33. *Eckmann J. P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors // Rev. Mod. Phys. — 1985. — V. 57, No. 3. — P. 617–656.
34. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984.
35. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Окрокверцхов Г. А., Стрелкова Г. И.* Статистические свойства динамического хаоса // Успехи физ. наук. — 2005. — Т. 175, № 2. — С. 163–179.
36. *Anishchenko V. S., Okrokvertskhov G. A., Vadivasova T. E., Strelkova G. I.* Mixing and spectral-correlation properties of chaotic and stochastic systems: numerical and physical experiments // New Journal of Physics. — 2005. — V. 7. — P. 76–106.
37. *Колмогоров А. Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН. — 1959. — Т. 124, вып. 4. — С. 754–755.
38. *Синай Я. Г.* О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124, вып. 4. — С. 768–771.
39. *Песин Я. Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН. — 1977. — Т. 32, вып. 4. — С. 55–112.
40. *Arneodo A., Collet P., Tresser C.* Possible new strange attractors with spiral structure // Commun. Math. Phys. — 1981. — V. 79. — P. 573–579.
41. *Farmer J. D.* Spectral broadening of period-doubling bifurcation sequences // Phys. Rev. Lett. — 1981. — V. 47, No. 5. — P. 179–82.
42. *Пиковский Ф. С.* Синхронизация фазы стохастических автоколебаний периодическим внешним сигналом // Радиотехника и электроника. — 1985. — Вып. 10. — С. 1970–1974.
43. *Rosenblum M. G., Pikovsky M. A., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillations // Phys. Rev. Lett. — 1996. — V. 76, No. 11. — P. 1804–1807.
44. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003.
45. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Kurtz J., Okrokvertskhov G. A., Strelkova G. I.* Correlation analysis of dynamical chaos // Physica. A. — 2003. — V. 325. — P. 199–212.
46. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Kurths J.* Spectral and correlation analysis of spiral chaos // Fluctuation and Noise Letters. — 2003. — V. 3, No. 2. — P. L213–L221.
47. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Окроверцхов Г. А., Стрелкова Г. И.* Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса // Радиотехника и электроника. — 2003. — Т. 48, вып. 7. — С. 824–835.
48. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. T., Kurths J., Okrokvertskhov G. A., Strelkova G. I.* Autocorrelation function and spectral linewidth of spiral chaos in a physical experiment // Phys. Rev. E. — 2004. — V. 69. — P. 036215 (1-4).

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

49. *Huang D., Wang H., Feng J., Zhu Z.* Hopf bifurcation on the stochastic model on HAB nonlinear stochastic dynamics // Chaos, Soliton and Fractals. — 2006. — V. 27. — P. 1072–1079.
50. *Xiao T., Ma J., Hou Zh., Xin H.* Effects of internal noise in mesoscopic chemical systems near Hopf bifurcation // New Jornal of Physics. — 2007. — V. 9. — P. 403–416.
51. *Берштейн И. Л.* Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора // ЖТФ. — 1941. — Т. 11, вып. 4. — С. 305–313.
52. *Берштейн И. Л.* Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора // Изв. АН СССР. Сер. Физич. — 1950. — Т. 14, вып. 2. — С. 145–173
53. *Корнилов С. А., Савшинский В. А., Уман С. Д.* Шумы клистронных генераторов малой мощности. — М.: Сов. радио, 1972.
54. *Корнилов С. А., Овчинников К. Д.* Шумы в генераторах, усилителях и умножителях частоты на лавинно-пролетных диодах // Обзоры по электронной технике. Сер. I. Электроника СВЧ. — 1977. — Вып. 8. — С. 471–487.
55. *Чикин А. И.* Измерение ширины спектральной линии молекулярного генератора // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 42, вып. 3. — С. 649–652.
56. Измерение флуктуаций частоты лазера с нелинейно-поглощающей ячейкой методом Берштейна // Изв. вузов. Радиофизика. — 1998. — Т. 41, вып. 11. — С. 1487–1494.
57. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский–Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — М.–Ижевск: Институт комп. иссл., 2003.
58. *Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С.* Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // Радиотехника и электроника. — 2004. — Т. 49, вып. 1. — С. 77–83.
59. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Strelkova G. I.* Instantaneous phase method in studing chaotic and stochastic oscillations and its limitations // Fluctuation and Noise Letters. — 2004. — V. 4, No. 1. — P. L219–L229.
60. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Kopeikin A. S. et al.* Effect of noise on the relaxation to an invariant probability measure of nonhyperbolic chaotic attractors // Phys. Rew. Lett. — 2001. — V. 87, No. 5. — P. 4101 (1-4).
61. *Rossler O. E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. — 1976. — V. 57. — P. 397–398.
62. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990.
63. *Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С., Окрокверцхов Г. А., Стрелкова Г. И., Захарова А. С.* Статистические свойства мгновенной фазы зашумленных периодических и хаотических автоколебаний // Радиотехника и электроника. — 2006. — Т. 51, вып. 5. — С. 580–592.
64. *Захарова А. С., Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С.* Влияние шума на автогенератор спирального хаоса // Прикладная нелинейная динамика. — 2006. — Т. 14, вып. 5. — С. 44–61.

65. *Hanggi P., Thomas H.* Stochastic processes: time evolution, symmetries and linear response // Phys. Rep. — 1982. — V. 88. — P. 209–319.
66. *Zakharova A. S., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S.* Influence of noise on a self-sustained oscillator producing spiral chaos // Fluctuation and Noise. — 2007. — V. 7, No. 1. — P. L1–L12.
67. *Акопян И. Г., Ланда П. С.* Синхронизация колебаний на обертонах при наличии шумов // Радиотехника и электроника. — 1962. — Т. 7, вып. 8. — С. 1285–1293.
68. *Костин И. К., Романовский Ю. М.* Флуктуации в системах многих связанных автогенераторов // Вестник МГУ. Сер. 3. — 1972. — Т. 13, вып. 6. — С. 698–705.
69. *Костин И. К., Романовский Ю. М.* Взаимная синхронизация релаксационных генераторов в присутствии шумов // Изв. вузов. Радиофизика. — 1975. — Т. 18, вып. 1. — С. 36–42.
70. *Тихонов В. И., Харисов В. Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСТОЧНИКОВ ШУМА В АВТОГЕНЕРАТОРЕ

Получим соотношения (5.71). Пренебрегая изменением медленной случайной функции $\varphi(t)$ за период $T_0 = 2\pi$, представляем левые части равенства (5.71) в виде

$$\xi_1(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\sin[\theta+\varphi(\theta)]d\theta = N_1(t)\cos[\varphi(t)] + N_2(t)\sin[\varphi(t)],$$

$$\xi_2(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\cos[\theta+\varphi(\theta)]d\theta = N_2(t)\cos[\varphi(t)] - N_1(t)\sin[\varphi(t)], \tag{5.126}$$

где

$$N_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

$$N_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_t^{t+2\pi} n(\theta)\cos\theta\, d\theta$$

— гауссовы процессы с нулевыми средними значениями.

Найдем корреляционные функции процессов $N_1(t)$, $N_2(t)$ и их взаимную корреляционную функцию. С учетом, того что $n(t)$ — нормированный белый шум, для корреляционной функции процесса $N_1(t)$ получаем

$$\psi_{N_1}(t,t+\tau) = \langle N_1(t)N(t+\tau)\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_t^{t+2\pi}\int\limits_{t+\tau}^{t+\tau+2\pi} \delta(\theta_2-\theta_1)\sin\theta_1\sin\theta_2\, d\theta_1\, d\theta_2.$$

Обозначив $\tau' = \theta_2 - \theta_1$ и проведя несложные преобразования, приходим к выражению

$$\psi_{N_1}(t,t+\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi)^2}\left[4\pi + 2\tau + \sin 2t - \sin(2t+2\tau)\right] & \text{при} \quad -2\pi < \tau < 0; \\ \frac{1}{(4\pi)^2}\left[4\pi - 2\tau - \sin 2t + \sin(2t+2\tau)\right] & \text{при} \quad 0 < \tau < 2\pi; \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| > 2\pi. \end{cases}$$

Аналогично получаем

$$\psi_{N_2}(t,t+\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi)^2}\left[4\pi + 2\tau - \sin 2t + \sin(2t+2\tau)\right] & \text{при} \quad -2\pi < \tau < 0; \\ \frac{1}{(4\pi)^2}\left[4\pi - 2\tau + \sin 2t - \sin(2t+2\tau)\right] & \text{при} \quad 0 < \tau < 2\pi; \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| > 2\pi \end{cases}$$

и

$$\psi_{N_1N_2}(t,t+\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi)^2}\left[\cos 2t - \cos(2t+2\tau)\right] & \text{при} \quad -2\pi < \tau < 0; \\ \frac{1}{(4\pi)^2}\left[\cos(2t+2\tau) - \cos 2t\right] & \text{при} \quad 0 < \tau < 2\pi; \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| > 2\pi. \end{cases}$$

Интегралы от корреляционных функций по всем возможным значениям τ в любой момент времени t имеют одни и те же значения:

$$\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\psi_{N_1}(t,t+\tau)d\tau \equiv \int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\psi_{N_2}(t,t+\tau)d\tau \equiv \frac{1}{2}, \qquad \int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\psi_{N_1N_2}(t,t+\tau)d\tau \equiv 0.$$

При рассмотрении медленно меняющихся процессов $\varphi(t)$ и $a(t)$, для которых изменения существенны только на интервалах времени, значительно превосходящих период T_0, можно заменить, источники $N_1(t)$ и $N_2(t)$ на эквивалентные гауссовы источники белого шума с тем же значением интеграла от корреляционной функции: $N_1(t) \to N_1^э(t)$ и $N_2(t) \to N_2^э(t)$, где $\langle N_{1,2}^э(t)\rangle \equiv 0$ и $\langle N_i^э(t)N_k^э(t+\tau)\rangle = (1/2)\delta_{i,k}\delta(\tau)$, $i, k = 1, 2$, $\delta_{i,k}$ — символ Кронеккера. Тогда вместо (5.126) можно записать

$$\xi_1(t,\varphi) = N_1^э(t)\cos[\varphi(t)] + N_2^э(t)\sin[\varphi(t)],$$
$$\xi_2(t,\varphi) = N_2^э(t)\cos[\varphi(t)] - N_1^э(t)\sin[\varphi(t)].$$

Чтобы выделить «медленные» и «быстрые» компоненты представим источники $\xi_1(t,\varphi)$ и $\xi_2(t,\varphi)$ в виде

$$\begin{aligned} \xi_1(t,\varphi) &= \langle \xi_1(t,\varphi)/\rho, \varphi\rangle + \widetilde{\xi}_1(t), \\ \xi_2(t,\varphi) &= \langle \xi_2(t,\varphi)/\rho, \varphi\rangle + \widetilde{\xi}_2(t), \end{aligned} \tag{5.127}$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

где $\langle \xi_{1,2}(t,\varphi)/\rho,\varphi\rangle$ — условные средние, полученные при усреднении значений $\xi_{1,2}$ по ансамблю случайных воздействий $N^{э}_{1,2}(t)$ при выбранных значениях $\rho(t)$ и $\varphi(t)$, а $\widetilde{\xi}_{1,2}(t)$ — отклонения от условных средних. Условные средние являются медленно меняющимися случайными функциями, так как их зависимость от времени определяется через медленные функции $\rho(t)$ и $\varphi(t)$. Флуктуации $\widetilde{\xi}_{1,2}(t)$ отражают действие «случайных толчков», отклоняющих фазовую траекторию от заданного направления и представляют собой быстро меняющиеся компоненты случайных воздействий.

Найдем условные средние $\langle \xi_1(t,\varphi)/\rho,\varphi\rangle$ и $\langle \xi_2(t,\varphi)/\rho,\varphi\rangle$. Для этого представим $\varphi(t)$ в виде: $\varphi(t)=\varphi(t')+\Delta\varphi$, где $t'=t-\Delta t$. Интервал времени Δt предполагается малым по сравнению с характерным временем медленных процессов $\rho(t)$ и $\varphi(t)$, так, что $\Delta\varphi$ — малое приращение фазы (при этом на интервале Δt могут укладываться много периодов T_0). Тогда можно представить

$$\begin{aligned}\xi_1(t,\varphi) &= N^{э}_1(t)\cos(\varphi(t')+\Delta\varphi)) + N^{э}_2(t)\sin(\varphi(t')+\Delta\varphi)) \approx \\ &\approx N^{э}_1(t)\cos\varphi(t') - N^{э}_1(t)\,\Delta\varphi\sin\varphi(t') + \\ &\quad + N^{э}_2(t)\sin\varphi(t') + N^{э}_2(t)\,\Delta\varphi\cos\varphi(t').\end{aligned}$$

Здесь $\varphi(t')$ не зависит от $N^{э}_1(t)$ и $N^{э}_2(t)$, так как предшествует им по времени. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}\langle \xi_1(t,\varphi)/a,\varphi\rangle &= \langle N^{э}_1(t)\cos\varphi(t') - \langle N^{э}_1(t)\Delta\varphi/\rho,\varphi\rangle\sin\varphi(t') + \\ &\quad + \langle N^{э}_2(t)\sin\varphi(t') + \langle N^{э}_2(t)\Delta\varphi/\rho,\varphi\rangle\cos\varphi(t') \approx \\ &\approx -\langle N^{э}_1(t)\Delta\varphi/\rho,\varphi\rangle\sin\varphi + \langle N^{э}_2(t)\Delta\varphi/\rho,\varphi\rangle\cos\varphi.\end{aligned}$$

Найдем условные средние $\langle N^{э}_1(t)\Delta\varphi/\rho,\varphi\rangle$ и $\langle N^{э}_2(t)\Delta\varphi/\rho,\varphi\rangle$, используя уравнение для фазы системы (5.70)

$$\dot{\varphi} = -\frac{\sqrt{2D}}{\rho}\xi_2(t,\varphi).$$

Получаем:

$$\Delta\varphi = -\sqrt{2D}\int\limits_{t'}^{t}\frac{\xi_2(\theta,\varphi)}{\rho(\theta)}d\theta = \sqrt{2D}\int\limits_{t'}^{t}\frac{1}{\rho(\theta)}\left[N^{э}_2(\theta)\cos\varphi(\theta) - N^{э}_1(\theta)\sin\varphi(\theta)\right]d\theta;$$

$$\begin{aligned}&\langle N^{э}_1(t)\,\Delta\varphi/\rho,\varphi\rangle \approx \\ &\quad\approx -\sqrt{2D}\int\limits_{t'}^{t}\frac{1}{\rho(\theta)}\left[\langle N^{э}_1(t)\,N^{э}_2(\theta)\rangle\cos\varphi(\theta) - \langle N^{э}_1(t)\,N^{э}_1(\theta)\rangle\sin\varphi(\theta)\right]d\theta = \\ &\qquad = \frac{1}{4}\sqrt{2D}\rho(t)\sin\varphi(t).\end{aligned}$$

Аналогично, легко показать, что

$$\langle N^{э}_2(t)\,\Delta\varphi/\rho,\varphi\rangle \approx -\frac{1}{4}\sqrt{2D}\rho(t)\cos\varphi(t).$$

Получаем условное среднее

$$\langle \xi_1(t,\varphi)/\rho,\varphi\rangle \approx -\frac{1}{4}\sqrt{2D}\,\rho(t)\sin^2\varphi(t) - \frac{1}{4}\sqrt{2D}\,\rho(t)\cos^2\varphi(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{2D}\rho(t).$$

Мы действительно получили «медленную» случайную функцию, так как $\rho(t)$ — «медленная». Аналогично рассуждая, можно показать, что

$$\langle \xi_2(t,\varphi)/\rho,\varphi\rangle \approx 0.$$

Подставляя найденные условные средние в выражения (5.127) и вводя обозначения

$$n_1(t) = -\sqrt{2}\widetilde{\xi}_1(t), \quad n_2(t) = -\sqrt{2}\widetilde{\xi}_2(t),$$

приходим к (5.71). При этом, пренебрегая в первом приближении медленными компанентами шума, можно считать, что $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые источники нормированного гауссова белого шума.

П.2. ПОЛУЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ КОЛЕБАНИЙ ГЕНЕРАТОРА С ШУМОМ

Пусть квазигармонический автогенератор задается укороченными СДУ (5.72). Будем считать, что интенсивность шума достаточно мала, так что распределение амплитуды можно считать гауссовым со средним значением $a_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$, а флуктуациями амплитудны в фазовом уравнении можно пренебречь, полагая флуктуации фазы винеровским процессом. Тогда колебания можно представить в виде:

$$X(t) = (\rho_0 + \widetilde{\rho}(t))\cos(t + \varphi(t)),$$

где флуктуации амплитуды $\widetilde{\rho}(t)$ описываются СДУ (5.76), а флуктуации фазы $\varphi(t)$ — СДУ (5.79).

Решение линейного уравнения (5.76) с детерминированным начальным условием $\widetilde{\rho}(t_0) = \widetilde{\rho}^0$, где $\widetilde{\rho}^0$ — заданная константа, есть

$$\widetilde{\rho}(t) = \widetilde{\rho}^0 e^{-\varepsilon(t-t_0)}\sqrt{D}\int\limits_0^{t-t_0} n_1(t'+t_0)\,e^{\varepsilon t'}\,dt'. \qquad (5.128)$$

Используя (5.128) и учитывая, что $n_1(t)$ — нормированный гаусов белый шум, находим автокорреляционную функцию $\psi_\rho(t_1, t_2)$. В стационарном случае (при $t_0 \to -\infty$) для $\psi_\rho(\tau)$ получаем выражение (5.78).

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Легко убедиться, что в установившемся режиме $\langle X(t)\rangle \equiv 0$. Действительно, в предположении независимости $\widetilde{\rho}(t)$ и $\varphi(t)$ имеем $\langle X(t)\rangle = (\rho_0 + \langle\widetilde{\rho}(t)\rangle)\langle\cos(t+\varphi(t))\rangle$. При этом $\langle\cos(t+\varphi(t))\rangle = \langle\cos(t+\phi(t))\rangle \equiv 0$, поскольку ограниченная фаза $\phi(t)$ имеет равномерное стационарное распределение в интервале $[-\pi,\ \pi]$. Таким образом, автокорреляционную функцию установившихся колебаний в генераторе можно представить как:

$$\psi_X(\tau) = (a_0^2 + \psi_\rho(\tau)) \lim_{t\to\infty} \langle(\cos(t+\varphi(t))\cos(t+\tau+\varphi(t+\tau))\rangle. \quad (5.129)$$

Введем обозначения: $\varphi(t) = \varphi$, $\varphi(t+\tau) = \varphi + \Delta\varphi$. Перемножая косинусы получаем

$$\begin{aligned}\langle(\cos(t+\varphi)\cos(t+\tau+\varphi+\Delta\varphi)\rangle &= \\ &= \frac{1}{2}\big[\langle\cos(2t+2\varphi+\Delta\varphi)\rangle + \langle\cos(\tau+\Delta\varphi)\rangle\big] = \\ &= \frac{1}{2}\big[\cos 2t\langle\cos(2\varphi+\Delta\varphi)\rangle - \sin 2t\langle\sin(2\varphi+\Delta\varphi)\rangle + \\ &\qquad + \cos\tau\langle\cos\Delta\varphi\rangle - \sin\tau\langle\sin\Delta\varphi\rangle\big].\end{aligned}$$

Из свойств винеровского процесса следует, что распределения величин $\Delta\varphi$ и $\theta = 2\varphi + \Delta\varphi$ являются гауссовыми со следующими средними значениями и дисперсиями: $\langle\Delta\varphi\rangle = 0$, $\sigma^2_{\Delta\varphi} = 2B_\varphi|\tau|$, $\langle\theta\rangle = 2\varphi_0$, $\sigma^2_\theta = 8B_\varphi \times (t_m - t_0) + 2B_\varphi|\tau|$. Здесь B_φ — коэффициент диффузии фазы $\varphi(t)$, φ_0 — значение фазы $\varphi(t)$ в начальный момент времени t_0, переменная t_m совпадает с t при $\tau > 0$ и равна $t+\tau$, если $\tau < 0$.

С учетом распределений величин $\Delta\varphi$ и θ, получаем

$$\begin{aligned}\langle\cos(2\varphi+\Delta\varphi)\rangle = \langle\cos\theta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_\theta}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\theta\exp\left[-\frac{(\theta-2\varphi_0)^2}{2\sigma^2_\theta}\right]d\theta = \\ &= \cos 2\varphi_0\exp\big[-4B_\varphi\cdot(t_m-t_0)\big]\exp\big[-2B_\varphi|\tau|\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\sin(2\varphi+\Delta\varphi)\rangle = \langle\sin\theta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_\theta}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\theta\exp\left[-\frac{(\theta-2\varphi_0)^2}{2\sigma^2_\theta}\right]d\theta = \\ &= \sin 2\varphi_0\exp\big[-4B_\varphi\cdot(t_m-t_0)\big]\exp\big[-2B_\varphi|\tau|\big],\end{aligned}$$

$$\langle\cos\Delta\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{\Delta\varphi}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\Delta\varphi\exp\left[-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sigma^2_{\Delta\varphi}}\right]d(\Delta\varphi) = e^{-2B_\varphi|\tau|},$$

$$\langle\sin\Delta\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{\Delta\varphi}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\Delta\varphi\exp\left[-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sigma^2_{\Delta\varphi}}\right]d(\Delta\varphi) \equiv 0.$$

Установившийся режим соответствует пределу $t_m - t_0 \to \infty$. При этом получаем, что $\langle\cos(2\varphi+\Delta\varphi)\rangle \equiv 0$ и $\langle\sin(2\varphi+\Delta\varphi)\rangle \equiv 0$. Таким образом, окончательно приходим к выражению:

$$\lim_{t\to\infty}\langle(\cos(t+\varphi(t))\cos(t+\tau+\varphi(t+\tau)\rangle = e^{-2B_\varphi|\tau|\cos\tau}.$$

Подставляя это выражение в (5.129), получаем формулу (5.84) для автокорреляционной функции стационарных колебаний $X(t)$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского