Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

А.Д.Луньков, А.В.Харламов

Теория случайных процессов

Учебное пособие для студентов дневного отделения механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий

УДК 519.21

Луньков А.Д., Харламов А.В. Теория случайных процессов: Учеб. пособие для студентов дневного отделения механико-математического факультета направления "Прикладная математика и информатика"и факультета компьютерных наук и информационных технологий

Пособие содержит теоретические сведения по основным разделам теории случайных процессов, некоторые примеры.

Для студентов дневного отделения механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий.

УДК 519.21

Содержание

1 Теория случайных процессов.Основные понятия. 4

2 Корреляционная теория(теория процессов 2-го порядка). Интегрирование случайных процессов 10

3 Пуассоновский случайный процесс 17

4 Теория рекуррентных событий 21

5 Цепи Маркова 33

6 Ветвящиеся процессы. 43

Список литературы 48

1 Теория случайных процессов.Основные понятия.

Определение. Отображение $\xi(\omega,t):\Omega\times T\to R$ называется случайным процессом, если $\forall t_0\in T\ \ \xi(\omega,t_0)$ удовлетворяет определению случайной величины. $T\in R$ - измеримо. Если T счетно, то случайный процесс называют случайной последовательностью. Если T более чем счетно, то получаем случайную функцию. Если заменить R на R^n, то получаем случайное поле.

Траектория (реализация) и сечение.

Определение.Траекторией(реализацией) случайного процесса $\xi(\omega,t)$ называется любая функция вида $x(t)=\xi(\omega_o,t),$ где $\omega_0\in\Omega$ (фиксируется исход). Любая конкретная траектория — это одна из возможностей развития процесса во времени.

Определение.Сечением случайного процесса называется любая случайная величина вида $\xi(\omega,t_0)$, где $t_0\in T$ (фиксируется время). Сечение дает информацию о вероятностном распределении для конкретного момента времени.

Семейства конечномерных распределений.

Определение. Конечномерная функция распределения случайного процесса $\xi(\omega,t)$ - это любая функция вида

$F_{t_1\ldots t_n}(x_1\ldots x_n)=P\{\xi(\omega,t_1)<x_1,\ldots,\xi(\omega,t_n)<x_n\}.$

$t_1<\ldots<t_n;t_i\in T;\quad x_i\in R.$

С другой стороны, эта функция является функцией распределения случайного вектора $(\xi(\omega,t_1)\ldots\xi(\omega,t_n))$. Меняя набор $n,t_1\ldots t_n$, получим семейство конечномерных распределений случайного процесса.

Определение. Случайные процессы $\xi(\omega,t)$ и $\eta(\omega,t)$ стохастически эквивалентны, если $\forall t\in T\quad P\{\xi(\omega,t)=\eta(\omega,t)\}=1$. Для случайной последовательности стохастическая эквивалентность может быть определена следующим равенством:

$$\forall n \in N \quad P\{\xi(\omega, t_n) = \eta(\omega, t_n)\} = 1.$$

Определение. Два случайных процессы неразличимы, если

$$P\{\forall t \in T \quad \xi(\omega, t) = \eta(\omega, t)\} = 1.$$

Теорема о стохастически эквивалентных последовательностях. Стохастически эквивалентные последовательности являются неразличимыми.

Доказательство.

$$P\{\xi(\omega, t) \neq \eta(\omega, t)\} = P\{\bigcap_{n=1}^{\infty}(\xi(\omega, t_n) = \eta(\omega, t_n))\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi(\omega, t_n) = \eta(\omega, t_n)\} = 0. \blacksquare$$

Теорема Колмогорова об условиях существования случайного процесса с семейством конечномерных распределений, совпадающим с заданным семейством

Пусть $\{F_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_n)\}$ - семейство распределений со следующими свойствами:

1) Функция $F_{t_1 \dots t_n}$ непрерывна слева по каждой из переменных при фиксации всех остальных переменных.

2) $\forall i \quad \lim\limits_{x_i \to \infty} F_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_n)$=0.

$\forall x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n \quad \lim\limits_{x_1 \to \infty} F_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_n)$=1.... $\lim\limits_{x_n \to \infty} F_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_n)$=1

3) $\forall h_i > 0 \quad \Delta_1(\Delta_2 \dots (\Delta_n(F_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_n)) \dots)) \geq 0$

$\Delta_i F = F(x_1 \dots x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1} \dots x_n) - F(x_1 \dots x_i \dots x_n)$ - оператор конечной разности по i-й переменной.

4) $F_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_n)$ не меняется при любой перестановке пар индексов (t_i, x_i).

5) $\forall n > k \quad F_{t_1 \dots t_k}(x_1 \dots x_k) = F_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_k, +\infty \dots \infty)$

Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нем случайный процесс именно с таким семейством распределений, удовлетворяющим условиям теоремы.

Классификация случайных процессов

Опишем несколько способов классификации случайных процессов.

1)Классификация по распределению.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется гауссовским, если любому его конечномерному распределению соответствует гауссовский случайный вектор.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$,где $t > 0$,называется пуассоновским с параметром $\lambda > 0$, если:

а) Процесс "выходит"из нуля: $P\{\xi(\omega, t) = 0\} = 1$

б) Приращения процесса на неперекрывающихся интервалах независимы: $\xi(\omega, t_1) - \xi(\omega, t_0)$ и $\xi(\omega, t_3) - \xi(\omega, t_2)$ независимы $\forall\, 0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant t_2 < t_3$.

в) Приращения $\xi(\omega, t)$ являются пуассоновскими случайными величинами: $\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1) \in \Pi(\lambda(t_2 - t_1))$,

Таким образом, $P\{\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1) = k\} = \frac{(\lambda(t_2-t_1))^k e^{-\lambda(t_2-t_1)}}{k!} \forall k \in \{0... + \infty\}$.

г) Траектории $\xi(\omega, t)$ непрерывны справа с вероятностью 1.

2) Процессы второго порядка

Необходимо ввести показатели, которые мы будем называть характеристиками процесса по аналогии с числовыми характеристиками, относящимися к случайным величинам.

Определение. Математическим ожиданием случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется функция $m(t) = M\xi(\omega, t) : T \to R$, которая каждому $t \in T$ сопоставляет математическое ожидание соответствующего сечения как случайной величины.

Дисперсия аналогично математическому ожиданию определяется с помощью одноимённого показателя, рассчитываемого для случайной величины: $D(t) = D\xi(\omega, t)$

Определение. Корреляционной функцией случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется функция

$$K_\xi(t_1, t_2) = cov(\xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_2)) = M(\xi(\omega, t_1) - M\xi(\omega, t_1)(\xi(\omega, t_2) - M_\xi(\omega, t_2)).$$

$$t_1, t_2 \in T.$$

Осуществив нормировку $K_\xi(t_1, t_2)$ для приведения случайного процесса к стандартному виду (нулевое среднее и единичная дисперсия) , мы можем получить коэффициент корреляции.

$r_\xi(t_1, t_2) = \frac{K_\xi(t_1, t_2)}{\sqrt{D_\xi(\omega, t_1) D_\xi(\omega, t_2)}}$ - показатель силы линейной связи между значениями случайного процесса для двух моментов времени.

Определение. Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $\xi(\omega, t)$ и $\eta(\omega, t)$ называется функция

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = cov(\xi(\omega, t_1), \eta(\omega, t_2)) = M((\xi(\omega, t_1) - M\xi(\omega, t_1))(\eta(\omega, t_2) - M\eta(\omega, t_2))).$$

Определение.Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $\xi(\omega, t)$ и $\eta(\omega, t)$ называется

$$r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sqrt{D\xi(\omega, t_1) D\eta(\omega, t_2)}}.$$

Функция характеризует силу линейной связи двух случайных процессов в два, вообще говоря, разных момента времени.

Определение.Случайный процесс называется процессом второго порядка, если $\forall t_1, t_2 \in T \quad \exists K_\xi(t_1, t_2)$.

3)Стационарность.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется стационарным в узком смысле, если $\forall n, \forall\ t_1...t_n \in T, h > 0$ распределения векторов $(\xi(\omega, t_1)....\xi(\omega, t_n))$ и $(\xi(\omega, t_1 + h)....\xi(\omega, t_n + h))$ совпадают. Таким образом, распределение процесса не зависит от сдвига по времени.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется стационарным в широком смысле, если $M\xi(\omega, t) = const$ и $K_\xi(t_1, t_2) = f(t_2 - t_1)$.Здесь $f(t)$- некоторая вещественная функция.

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле.

4) Характер связи между значениями процессов в различные моменты времени.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется процессом с независимыми значениями, если $\forall n \quad t_1 < t_2 < ..... < t_n; t_i \in T$ компоненты вектора $(\xi(\omega, t_1)......\xi(\omega, t_n))$ независимы.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется процессом с независимыми приращениями, если $\forall n, t_1 < t_2 < ..... < t_n; t_i \in T$ компоненты вектора $(\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1), ...\xi(\omega, t_n) - \xi(\omega, t_{n-1}))$ независимы.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется процессом с некоррелированными приращениями, если $\forall t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4; t_i \in T$

$cov(\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_4) - \xi(\omega, t_3)) = 0.$

В частности,этому определению удовлетворяет пуассоновский процесс. Заметим, что приращения рассматриваются на неперекрывающихся интервалах.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется процессом с ортогональными приращениями, если

$$\forall t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4; t_i \in T \quad M((\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1))(\xi(\omega, t_4) - \xi(\omega, t_3))) = 0.$$

Если учесть, что рассматривается пространство $L^2(\Omega)$(суммируемые с квадратом случайные величины), то скалярное произведение имеет следующий вид: $(\xi, \eta) = M(\xi\eta)$. Тогда условия ортогональности представимы в виде:

$$(\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_4) - \xi(\omega, t_3)) = 0$$

5) Классификация по отсутствию/наличию памяти процесса

Определение. Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется марковским, если

$$\forall t_1 \cdots t_n \in T, \forall b \in B$$

$$P\{\xi(\omega, t_n) \in b \mid \xi(\omega, t_1) \cdots \xi(\omega, t_{n-1})\} = P\{\xi(\omega, t_n) \in b \mid \xi(\omega, t_{n-1})\}.$$

B-борелевская σ-алгебра.

Если переходить к частным случаям, то P можно рассматривать как вероятность для дискретного распределения и плотность для абсолютно непрерывного.

2 Корреляционная теория(теория процессов 2-го порядка). Интегрирование случайных процессов

Определения и утверждения этого раздела справедливы для процессов 2-го порядка.

Определение. Говорят, что случайный процесс $\xi(\omega, t)$ сходится в среднеквадратичном к случайной величине η в точке t_0,если $\lim\limits_{t\to t_0} M(\xi(\omega,t)-\eta)^2 = 0$.

Скалярное произведение и норма соответственно равны:

$(\xi, \eta) = M(\xi\eta)$; $(\xi, \xi) = M(\xi)^2$; $\|\xi\| = \sqrt{M(\xi)^2}$.

Потому $\|(\xi(\omega,t)-\eta)\|^2 = M(\xi(\omega,t)-\eta)^2$. Обозначим $\eta = \underset{t\to t_0}{l.i.m.}\,\xi(\omega, t)$.

Критерий сходимости процесса в среднеквадратичном

Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ в среднеквадратичном сходится в среднеквадратичном к η при $t \to t_0$ тогда и только тогда, когда:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} M\xi(\omega,t) = M\eta$.

2) $\lim\limits_{t_1\to t_0, t_2\to t_0} K_\xi(t_1,t_2) = D\eta$.

Доказательство.

Необходимость.

$|M\xi(\omega,t)-M\eta| = |M(\xi(\omega,t)-\eta)| \le M(|\xi(\omega,t)-\eta)|) \le \sqrt{M(\xi(\omega,t)-\eta)^2 M(1)}$

(По неравенству Коши-Буняковского $M|\varphi\Theta| \le \sqrt{(M\varphi^2)(M\Theta^2)}$)

Таким образом, $M\xi(\omega,t)) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} M\eta$.

Введем в рассмотрение центрированный случайный процесс:

$\xi^0(\omega, t) = \xi(\omega,t) - M\xi(\omega,t)$.

В силу непрерывности скалярного произведения:

$$K_\xi(t_1,t_2) = (\xi^0(\omega,t_1), \xi^0(\omega,t_2))) \underset{t_1,t_2\to t_0}{\longrightarrow} (\eta - M\eta, \eta - M\eta) = M(\eta - M\eta)^2 = D\eta.$$

Достаточность.

$$||\xi^0(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2)\|^2=(\xi^0(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2),\xi^0(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2))=$$

$$(\xi^0(\omega,t_1),\xi^0(\omega,t_1))-(\xi^0(\omega,t_1),\xi^0(\omega,t_2))-(\xi^0(\omega,t_2),\xi^0(\omega,t_1))+(\xi^0(\omega,t_2),\xi^0(\omega,t_2))=$$

$$=K_\xi(t_1,t_1)+K_\xi(t_2,t_2)-2K_\xi(t_1,t_2)\underset{t_1,t_2\to t_0}{\longrightarrow}D\eta-2D\eta=0.$$

Показана сходимость для центрированного процесса.Теперь докажем сходимость для исходного процесса $\xi(\omega,t)$.

$$\|\xi(\omega,t_1)-\xi(\omega,t_2)\|=\|\xi^0(\omega,t_1)+M\xi(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2)-M\xi(\omega,t_2)\|\leq$$

$$\leq\|\xi^0(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2)\|+\|M\xi(\omega,t_1)-M\xi(\omega,t_2)\|\Rightarrow\|\xi(\omega,t_1)-\xi(\omega,t_2)\|\underset{t_1\to t_2}{\longrightarrow}0$$

В $L^2(\Omega)$ критерий Коши выполняется, потому $\xi(\omega,t)$ сходится.■

Замечание. Доказан сам факт сходимости случайного процесса, но не сформулировано, к какой именно случайной величине он сходится.

Непрерывность случайных процессов

Определение. Говорят, что процесс $\xi(\omega,t)$ непрерывен потраекторно, если $P\{\omega:\xi(\omega,t)-$непрерывная функция времени$\}=1$.

Определение.Говорят, что процесс $\xi(\omega,t)$ непрерывен в среднеквадратичном в точке t_0, если $L.i.m._{t\to t_0}\xi(\omega,t)=\xi(\omega,t_0)$ (допустимо обозначение из анализа: $\xi(\omega,t)\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}\xi(\omega,t_0)$)

Критерий непрерывности процесса в среднеквадратичном в точке. Случайный процесс $\xi(\omega,t)$ непрерывен в среднеквадратичном в точке t_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) $\lim\limits_{t\to t_0}M\xi(\omega,t)=M\xi(\omega,t_0)$;

2) $\lim\limits_{t_1\to t_0,t_2\to t_0}K_\xi(t_1,t_2)=D\xi(\omega,t_0)$

Доказательство. Оно следует непосредственно из критерия сходимости при рассмотрении $\eta = \xi(\omega, t_0)$.■

Критерий непрерывности процесса в среднеквадратичном на отрезке

Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ непрерывен в среднеквадратичном на отрезке $[T_1, T_2]$ тогда и только тогда, когда:

1)$M\xi(\omega, t)$ непрерывно на данном отрезке.

2)$K_\xi(t_1, t_2)$ непрерывна на диагонали квадрата $[T_1, T_2] \times [T_1, T_2]$.

Доказательство следует непосредственно из предыдущего критерия, распространенного на все точки отрезка.

Теорема(необходимое условие непрерывности процесса на отрезке)

Если $\xi(\omega, t)$ непрерывен в среднеквадратичном на отрезке $[T_1, T_2]$, то $K_\xi(t_1, t_2)$ непрерывна на квадрате $[T_1, T_2] \times [T_1, T_2]$.

Доказательство.

$K_\xi(t_1, t_2) = M(\xi(\omega, t_1) - M(\xi(\omega, t_1)))(\xi(\omega, t_2) - M(\xi(\omega, t_1))) =$

$=\mathrm{M}(\xi^0(\omega, t_1)\xi^0(\omega, t_2)) = (\xi^0(\omega, t_1), \xi^0(\omega, t_2)) \to (\xi^0(\omega, {t_1}^0), \xi^0(\omega, {t_2}^0)) =$

$=\mathrm{K}_\xi({t_1}^0, {t_2}^0)$.

Непрерывность показана $\forall({t_1}^0, {t_2}^0)$.■

Пример. Проверка процесса на непрерывность в среднеквадратичном.

$$\xi(\omega, t) = \begin{cases} V_1, t < \frac{1}{2} \\ V_2, t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

V_1, V_2- независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечными положительными математическим ожиданием M и дисперсией D.

$M\xi(\omega, t) = M \Rightarrow M\xi(\omega, t)$ непрерывно.

Пусть $t_1 < \frac{1}{2}, t_2 \geq \frac{1}{2}$.

$K_\xi(t_1, t_2) = M((V_1 - MV_1)(V_2 - MV_2)) = M(V_1 - MV_1)M(V_2 - MV_2) = 0.$

Пусть $t_1 < \frac{1}{2}, t_2 < \frac{1}{2}$.

$\mathrm{K}_\xi(t_1,t_2) = M((V_1 - MV_1)(V_2 - MV_2)) = DV_1 = D$

Аналогично, если обе переменные $\geq \frac{1}{2}, K_\xi(t_1,t_2) = DV_2 = D \Rightarrow K_\xi(t_1,t_2)$ терпит разрыв в точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Если $t_1, t_2 \to \frac{1}{2}$ одновременно слева или справа, то предел = D, а если $t_1, t_2 \to \frac{1}{2}$ с разных сторон, то соответствующий предел корреляционной функции = 0 в силу независимости случайных величин$\Rightarrow$ $\xi(\omega,t)$ не является непрерывным в среднеквадратичном.

Дифференцирование случайных процессов в среднеквадратичном

Определение. Производной в среднеквадратичном случайного процесса $\xi(\omega,t)$ в точке t_0 называется

$\xi'(\omega,t_0) = \underset{t\to t_0}{\text{Ł}.i.m.} \frac{\xi(\omega,t)-\xi(\omega,t_0)}{t-t_0}$.

Очевидно, введенная производная сама является случайным процессом.

Критерий дифференцируемости в среднеквадратичном

Случайный процесс $\xi(\omega,t)$дифференцируем в среднеквадратичном тогда и только тогда, когда $\mathrm{M}\xi(\omega,t)$ дифференцируемо по t и $\exists\frac{\partial^2 K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$, причем справедливы равенства:

1)$M\xi'(\omega,t) = (M\xi(\omega,t))'$;

2)$K_{\xi'}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$

Интегрирование случайных процессов в среднеквадратичном

Рассмотрим $[a,b] \in T$ и введем некоторое разбиение данного отрезка:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Введем интегральную сумму $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi(\omega,\tau_i)(t_i - t_{i-1})$. Для любого i произвольным образом выбирается число $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$.

Определение. Если $\exists \underset{max(t_i - t_{i-1})\to 0, n\to\infty S,}{\text{Ł}.i.m.}$

и предел этот не зависит от разбиения и выбора точек внутри каждого элемента разбиения,то этот предел называется интегралом данного случайного процесса в среднеквадратичном на отрезке $[a, b]$и обозначается как

$$\int_a^b \xi(\omega, t)dt.$$

Интеграл в среднеквадратичном является случайной величиной.

Критерий интегрируемости случайного процесса в среднеквадратичном

Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ интегрируем в среднеквадратичном на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда выполнены условия: 1)$M\xi(\omega, t)$ интегрируемо на $[a, b]$. 2) $K_\xi(t_1, t_2)$ интегрируема на $[a, b] \times [a, b]$. Справедливы равенства:

$$1) M(\int_a^b \xi(\omega, t)dt) = \int_a^b M\xi(\omega, t)dt$$

$$2) D(\int_a^b \xi(\omega, t)dt) = \int_a^b \int_a^b K_\xi(t_1, t_2)dt_1 dt_2$$

Интегрирование случайных процессов по вероятностной мере

Определение. Говорят, что процесс $\xi(\omega, t)$ называется винеровским, если выполняются следующие требования:

1) $M\xi(\omega, t) = 0$; $\xi(\omega, 0) = 0$.

2) Процесс имеет независимые приращения и однороден, т.е.$\forall t, s \geq 0$ распределение $\xi(\omega, t+s) - \xi(\omega, t)$ зависит лишь от s.

3) Процесс является гауссовским.

Винеровский процесс является марковским, почти все его траектории непрерывны, но в то же время не дифференцируемы ни в одной точке. Этот процесс широко используется в моделях, описывающих колебания стоимости финансовых активов. С его помощью, на базе изменений этого процесса, определяется интеграл Ито.

Далее при описании интегралов по распределению для удобства будем опускать в обозначении случайного процесса индекс, соответствующий исходу, ввиду зрительного неудобства, возникающего из-за внешнего сходства w (именно этой буквой принято обозначать винеровский процесс) и ω.

Определение. Система событий $\mathcal{F}_t$ – минимальная σ-алгебра, содержащая все множества вида:

$$\{w(s) \in B\}.$$

называется σ - алгеброй, порожденной $\{w(s), s \leq t\}$.

Определение. Случайный процесс $\{f(t), t \in \Delta\}$ называется неупреждающим относительно {w(t),t $\in \Delta$} на множестве Δ, если $\forall t \in \Delta$ случайная величина $f(t)$ является $\mathcal{F}_t-$измеримой, т.е.$\{f(t) \in B\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall B$ - борелевского множества.

Пусть интервал Δ состоит из непересекающихся промежутков $\Delta_k, k = 1, \cdots n, \Delta_k = [t_k, t_{k+1}], t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

Определение. Случайный процесс $f(t)$ называется простым, если допустимо следующее представление: $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k I_{\Delta_k}(t), t \in \Delta$.

Здесь ξ_k - случайные величины с конечными дисперсиями,$I_{\Delta_k}(t)$- индикатор принадлежности t промежутку Δ_k.

Определение. Стохастическим интегралом от простой неупреждающей функции $f(t)$ по винеровскому процессу $\{w(t), t \in \Delta\}$называется случайная величина следующего вида:

$$I(f) = \int_\Delta f(t)dw(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Delta w_k;$$

$\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)-$ приращение винеровского процесса.

Стохастический интеграл обладает тремя основными свойствами:он линеен относительно любой пары простых неупреждающих слагаемых, его среднее равно нулю, его дисперсия конечна.

Для построения стохастического интеграла в более общем случае необходимо сконструировать некоторые дополнительные величины.

Теорема о конструкции интеграла Ито Пусть $\{f(t), t \in \Delta\}$- непрерывный в среднеквадратичном случайный процесс.

1)Если $f(t)$- неупреждающий случайный процесс, то найдется последовательность неупреждающих простых случайных процессов $f_n(t)$,такая, что

$$\int_\Delta M\{|f(t) - f_n(t)|\}^2 dw(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) Имеет место сходимость в среднеквадратичном последовательности стохастических интегралов $I(f_n)$ к некоторой случайной величине$I(f)$ при $n \to \infty$.

Определение. Случайная величина $I(f) = \int_\Delta f(t) dw(t)$, определенная в предыдущей теореме, называется стохастическим интегралом Ито от неупреждающего случайного процесса $f(t)$. Интеграл общего вида обладает теми же свойствами, что и заданный выше интеграл для простых случайных процессов.Интеграл Ито задан корректно, он не зависит от конкретного вида неупреждающих случайных процессов.

Теорема о достаточных условиях существования интеграла Ито Если $\{f(t), t \in \Delta\}$– непрерывный в среднеквадратичном случайный процесс, заданный на конечном промежутке $\Delta = [0, T]$ и неупреждающий относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, порожденных $\{w(s), 0 \le s \le t\}$, то стохастический интеграл Ито существует и обладает тремя вышеперечисленными свойствами.

3 Пуассоновский случайный процесс

Конечномерные распределения.

Рассмотрим $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ - некоторые моменты времени.Найдем соответствующее этим моментам вероятностное распределение.

$$P\{\xi(\omega, t_1) = k_1, \xi(\omega, t_2) = k_2 \cdots \xi(\omega, t_n) = k_n\} =$$

$$\mathrm{P}\{\xi(\omega, t_1) - \xi(\omega, 0) = k_1 - 0, \cdots \xi(\omega, t_n) - \xi_(\omega, t_n - 1) = k_n - k_{n-1}\} =$$

$$= P\{\xi(\omega, t_1) - \xi(\omega, 0) = k_1\} \cdots P\{\xi(\omega, t_n) - \xi_(\omega, t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}\} =$$

$$= \prod\nolimits_{i=1}^{n} \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} =$$

$$= e^{-\lambda t_n} \lambda^{k_n} \prod\nolimits_{i=1}^{n} \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!}$$

Теорема о значениях пуассоновского процесса Пусть $\xi(\omega, t)$ - пуассоновский случайный процесс с параметром $\lambda > 0$. Пусть $\mathrm{N}^+ = N \cup \{0\}$ Тогда $P\{\omega : \forall t \geq 0 \quad \xi(\omega, t) \in N^+\} = 1$.

Таким образом, почти любая траектория процесса содержит лишь неотрицательные целые числа.

Доказательство.

Введем $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность событий, таких, что $P\{A_n\} = 1 \forall n$. Тогда по свойствам вероятностной меры

$P\{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\} = 1$. Введем $A_t = \{\omega : \xi(\omega, t) \in N^+\}, t \in R$ —фиксировано.

Это событие связано с приращением процесса $\xi(\omega, t) = \xi(\omega, t) - \xi(\omega, 0)$.

По определению пуассоновского случайного процесса $\forall t \in R$ $P\{A_t\} = 1$. Введем событие $B_n = \{\omega : \forall k \in N^+ \quad \xi(\frac{k}{n}) \in N^+\}$.

$B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_{\frac{k}{n}} \Rightarrow \forall n \quad P\{B_n\} = 1$ из непрерывности вероятностной меры.

Введем $A_Q = \bigcap\limits_{t \in Q} A_t = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} B_n \Rightarrow P\{A_Q\} = 1.$

Событие A_Q содержательно означает следующее: исход таков, что во всех рациональных точках значения процесса являются целыми и неотрицательными. Задавая исходы, мы задаем одновременно, таким образом, и множество траекторий.

Рассмотрим так называемую "неправильную"траекторию $\omega_0 \in \Omega : \xi(\omega_0, t_0) \notin N^+$ для некоторого $t_0 \geq 0$. Обозначим $\lambda = \xi(\omega, t_0) - [(\xi(\omega, t_0)]$. Используем тот факт,что траектория процесса непрерывна справа.

$\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0, t_0 + \delta) |\xi(\omega_0, t) - \xi(\omega_0, t_0)| < min(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}).$

Отсюда $\forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$ значение процесса $\xi(\omega_0, t)$ не будет целым. Если бы соответствующая траектория принадлежала A_Q,то значения в рациональных точках были бы целыми. Таким образом, $\omega_0 \in \overline{A_Q}$.

$P\{A_Q\} = 1. \quad P\{\omega_0\} \leq P\{\overline{A_Q}\} \Rightarrow P\{\omega_0\} = 0 \Rightarrow P\{\omega_0 : \exists t_0 \geq 0 \quad \xi(\omega_0, t_0) \notin N^+\} = 0 \Rightarrow P\{\omega_0 : \forall t \geq 0 \quad \xi(\omega_0, t) \in N^+\} = 1$, что и утверждается в тексте теоремы.■

Теорема о монотонном неубывании траекторий пуассоновского случайного процесса

$P\{\omega : \forall t_2 > t_1 \quad \xi(\omega, t_2) \geq \xi(\omega, t_1)\} = 1.$

Таким образом, траектория пуассоновского случайного процесса с вероятностью 1 является монотонно неубывающей .

Доказательство.

Введем для произвольных $t_1, t_2 \in R$ событие $A_{t_1,t_2} = \{\omega : \xi(\omega, t_2) \geq \xi(\omega, t_1)\}.$
$\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1) \in \Pi(\lambda(t_2 - t_1)) \Rightarrow \{P\{A_{t_1,t_2}\}\} = 1.$

Аналогично теореме о значениях введем

$A_Q = \{\omega : \forall t_1 < t_2, t_1, t_2 \in Q \quad \xi(\omega, t_1) \leq \xi(\omega, t_1)\}.$

$\mathrm{A}_Q = \bigcap\limits_{t_1,t_2\in Q} A_{t_1,t_2}, t_1 < t_2$. Q-счетное множество, $P\{A_{t_1,t_2}\} = 1 \Rightarrow P\{A_Q\} = 1$.

Как и в предыдущей теореме, назовем некоторую траекторию "неправильной а именно траекторию следующего вида:

$\{\omega_0 : \exists t_1, t_2 \in R, t_1 < t_2\ \xi(\omega_0, t_2) < \xi(\omega_0, t_1)\}$.

Из непрерывности справа следует:$\exists\delta > 0$

$\forall t \in (t_1, t_1 + \delta)\xi(\omega_0, t) \in (\xi(\omega_0, t_1) - \frac{1}{2}, \xi(\omega_0, t_1) + \frac{1}{2})$.

$\forall t \in (t_2, t_2 + \delta)\xi(\omega_0, t) \in (\xi(\omega_0, t_2) - \frac{1}{2}, \xi(\omega_0, t_2) + \frac{1}{2})$.

По предыдущей теореме почти во всех траекториях процесса значения целые. Потому без потери общности можно рассматривать именно такую траекторию.Значения целые, но в то же время на каждом из двух выделенных интервалов они отличаются менее чем на единицу, поэтому на интервалах наблюдается постоянство значений.

$\forall t \in (t_1, t_1 + \delta)\xi(\omega_0, t) = \xi(\omega_0, t_1), \forall t \in (t_2, t_2 + \delta)\xi(\omega_0, t) = \xi(\omega_0, t_2)$.

Постоянство наблюдается и в рациональных точках $t \in Q$.

Рассмотрим две именно такие точки $q_1 \in (t_1, t_1 + \delta)$ и $q_2 \in (t_2, t_2 + \delta)$.

$\xi(\omega_0, q_1) = \xi(\omega_0, t_1) > \xi(\omega_0, t_2) = \xi(\omega_0, q_2); \xi(\omega_0, q_1) > \xi(\omega_0, q_2)$,
$q_1, q_2 \in Q \Rightarrow \omega_0 \in \overline{A_{q_1,q_2}} \Rightarrow P\{\omega_0\} = 0.\blacksquare$

Теорема о скачках пуассоновского случайного процесса

Скачок траектории пуассоновского случайного процесса $= 1$ почти наверное.

Доказательство.

Введем для произвольных $t \geq 0, \delta \in R$ событие

$A_{t,\delta} = \{\omega_0 : \xi(\omega_0, t + \delta) - \xi(\omega_0, t - \delta) \geq 2\}$.

$\xi(\omega_0, t + \delta) - \xi(\omega_0, t - \delta) \sim \prod(2\lambda\delta)$.

$\mathrm{P}\{\mathrm{A}_{t,\delta}\} = 1 - P\{\xi(\omega_0, t+\delta) - \xi(\omega_0, t-\delta) = 0\} - P\{\xi(\omega_0, t+\delta) - \xi(\omega_0, t-\delta) = 1\} = 1 - \frac{e^{-2\lambda\delta}(2\lambda\delta)^0}{0!} - \frac{e^{-2\lambda\delta}(2\lambda\delta)^1}{1!} = 1 - e^{-2\lambda\delta} - 2\lambda\delta^{-2\lambda\delta} =$

Используем разложение Тейлора $e^{2\lambda\delta} = 1 + 2\lambda\delta + o(2\lambda\delta)$.

$\mathrm{P}\{\mathrm{A}_{t,\delta}\} = \mathrm{e}^{-2\lambda\delta}(e^{2\lambda\delta} - 1 - 2\lambda\delta) = e^{-2\lambda\delta}o(\delta) = o(\delta)$.

Пусть $\exists t_0$, такое, что в этой точке случайный процесс имеет скачок > 1 .

Рассмотрим t,сколь угодно близкое к $t_0, \delta > 0$, сколь угодно малое, причем $\xi(\omega_0, t+\delta)$—на верхней ступеньке траектории(после скачка), $\xi(\omega_0, t-\delta)$—на нижней(до скачка, и других скачков не было).

Таким образом,скачок наблюдается в t_0, и некоторое время до t_0(включая $t-\delta$) ξ сохраняет значение.

Из наличия скачка$>$1 следует истинность события $A_{t,\delta}$.

$P\{$скачок в $\quad t_0 > 1\} \leq P\{\xi(\omega_0, t+\delta) - \xi(\omega_0, t-\delta) \geq 2\} = P\{A_t, \delta\} = o(\delta) \to 0, \delta \to 0.$■

4 Теория рекуррентных событий

Рассмотрим последовательность шагов, или испытаний. Последовательности шагов соответствует последовательность независимых случайных величин. Предполагается, что результаты каждого шага независимы, а испытания проводятся в одних и тех же условиях. Именно по итогам испытания (с учетом предыстории) принимается решение о том, произошло или нет на данном шаге некоторое событие. Предыстория учитывается в следующем смысле: после того, как принято решение о том, что событие произошло в очередной раз, результаты предыдущих шагов можно не учитывать и предыстория, таким образом, забывается. η_n - индикатор того, произошло ли событие на n-м шаге

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{событие произошло на n-м шаге} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Решение принимается по результатам испытаний, начиная со следующего за последним из тех, для которых $\eta_n = 1$. Если $\eta_n = 1$, то $\eta_k\,(k > n)$ не зависит от $\xi_1..\xi n$. Такие события называются рекуррентными.

Пример. Случайное блуждание. Вводится последовательность одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ со значениями -1 и 1.

$\eta_n = 1 \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i = 0$ - так вводится рекуррентное событие (оно соответствует каждому из моментов, когда сумма равна 0). После того, как сумма стала равна 0, для дальнейшего прогнозирования уже несущественно , каким образом это произошло.

Определим понятие рекуррентного события более формально.

Определение.Случайная величина η_n называется рекуррентным событием, построенным на основе последовательности независимых случайных величин $(\xi_1..\xi_n)$, если выполняются следующие условия:

1. $P\{\eta_n = 0\} + P\{\eta_n = 1\} = 1$;

2. $\forall n$ η_n измерима относительно $\mathcal{F}_n$ - минимальной σ - алгебры, порожденной случайными величинами $(\xi_1..\xi_n)$.

   $\mathcal{F}_n$ - минимальная σ-алгебра, содержащая все множества вида:

$$\{\omega\colon \xi_1 < x_1, ..\xi_n < x_n\}.$$

   Меняя $n, x_1..x_n$, получаем новые множества. Заметим, что измеримость в дискретном случае - это постоянство на атомах σ-алгебры. Атом - элемент σ-алгебры, неделимый в том смысле, что никакое его подмножество в σ-алгебру не входит.

3. После наступления рекуррентного события теряется память о предыдущих шагах. Если $\eta_n = 1$, то $\forall k > n$ η_k не зависит от $(\xi_1..\xi_n)$.

Введем в рассмотрение последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $u_n = P\{\eta_n = 1\}$ - вероятность того, что рекуррентное событие произошло на n-м шаге.

$$f_n = P\{\eta_n = 1/\eta_1 \neq 1, \eta_2 \neq 1, ..\eta_{n-1} \neq 1\}$$

- вероятность того,что рекуррентное событие впервые произошло на n-м шаге. В силу вложенности событий $f_n \leq u_n \quad \forall n$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \leq 1$, как сумма вероятностей несовместных событий. На $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ ограничения отсутствуют.

Полагаем,что на 0-м шаге рекуррентное событие происходит и потому $u_0 = 0$.

Определение.Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$, то рекуррентное событие называется возвратным.

Введем для данных последовательностей производящие функции.

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n.$$

Известно, что оба ряда - аналитические внутри единичного круга. Найдем соотношение, связывающее ряды. Для этого необходимо выразить u_n через набор всех пар u_k, f_k, где $k < n$.

$u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{n-i} f_i$.

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} u_{n-i} f_i x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j f_n x^n = 1 + U(x)F(x)$$

$$U(x)(1 - F(x)) = 1$$

$$U(x) = \frac{1}{1 - F(x)}.$$

Получено соотношение между производящими функциями рекуррентного события.

Критерий возвратности событий

Рекуррентное событие возвратно тогда и только тогда, когда $\sum u_k$ расходится.

Доказательство.

$$U(1) = \lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

$$U(1) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k}{1 - F(1)} \Rightarrow F(1) = \begin{cases} 1, & \text{если событие возвратно} \\ < 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Следовательно,

$$U(1) = \begin{cases} \infty, & f(1) = 1, \text{ если событие возвратно} \\ < \infty, & f(1) < 1, \text{ если событие невозвратно} \end{cases}$$

■

Рассмотрим еще один способ классификации событий.

Определение.Рекуррентное событие называется периодическим, если множество $A = \{k\colon f_k > 0\}$ состоит из чисел, кратных некоторому $d > 1$

Пример. Случайные блуждания являются периодическими. Невозможно вернуться из 0 в 0 за нечетное число шагов. Количества значений k, для которых $\xi_k = 1$ и $\xi_k = -1$ в последовательности, предшествующей событию $\eta_n = 1$ должны совпадать. В данном случае

$$f_k = C_k^{k/2}(1-p)^{k/2}p^{k/2}; k = 2, 4, 6...$$

Множитель$C_k^{k/2}$ возникает за счет числа способов выбора шагов, на которых появились эти k единиц.

Некоторые сведения из алгебры

Введем основные обозначения. A^+ - полугруппа,$A^\pm$ - группа.

Минимальная полугруппа, созданная на базе подмножества целых чисел , содержит все возможные суммы элементов A, а минимальная группа, имеющая ту же базу, содержит, кроме того, и разности тех же элементов.

Лемма 1.О наибольшем общем делителе некоторого множества целых чисел. Пусть $A \in N$, d=НОД(A). Тогда допустимо представление:

$$d = a_1 z_1 + ... + a_r z_r; a_i \in A; z_i \in Z \quad (4.1)$$

Доказательство. $A^\pm$ - минимальная группа, образованная на базе A(она содержит все суммы и разности элементов A). Рассмотрим $d^* = \min\{|a|, a \in A^\pm; a \neq 0\}$. Пусть $x \in A^\pm$ - произвольный элемент. Справедливо представление:$x = kd^* + r; 0 \leq r < d^*$

$$r < d^*, r \geq 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow x = kd^*.$$

В качестве x можно взять $d \in A^\pm$. $d = kd^* \Rightarrow d/d^*; d^* \in A^\pm \Rightarrow d^* = a_1 z_1 + ... + a_r z_r$ $z_i \in Z; a_i \in A. a_i/d \Rightarrow d^\pm/d \Rightarrow d = d^\pm$.d=d* справедливо утверждение (4.1)■.

Лемма 2.О наибольшем общем делителе некоторого произвольного множества натуральных чисел. Пусть $A \in \mathbb{N}; d$ =НОД(A). Тогда $\exists k_0 \quad \forall k > k_0\, A^+$ содержит все числа вида kd (A^+-минимальная полугруппа на базеA).

Доказательство.

Используем представление из предыдущей леммы

$d = a_1 z_1 + ... + a_r z_r;$ $a_i \in A; z_i \in Z$. Пусть $s = a_1 + .. + a_r$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in A^+$, делим его на s:

$$x = ks + l;$$

$$0 \leq l < s;$$

$$l = x - ks = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i - ks.$$

Здесь $x = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i b_i . b_i \in A, y_i \in N, k \in \mathbb{N}$.

Используем разложение для элемента A^+. По построению каждое из слагаемых делится на $d \Rightarrow l/d.0 \leq l^* < \frac{s}{d}; l^* d = l$.

$$x = ks + l^* d = k(\sum_{i=1}^{r} a_i) + l^* \Big(\sum_{i=1}^{r} a_i z_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} a_i (z_i l^* + k)$$

Наложим условия на слагаемые в скобках: $l^* < \frac{s}{d}$, z_i может быть отрицательным

$$k > \frac{s}{d} \max\left\{|z_1|, |z_2| ... |z_n|\right\}; c_i = z_i l^* + k$$

x=$\sum_{i=1}^{r} a_i c_i$. (4.2)

Здесь c_iзависит от k.

Для достаточно большого k (или для достаточно большого x, так как $x = ks + l$)справедливо представление (4.2). Пусть x_m - минимальный элемент A^+, для которого справедливо (4.2). Рассмотрим любое $x \in A^{\pm}, x > x_m$. Повторив рассуждения, снова получим (4.2). Данный x будет одновременно принадлежать не только $A^{\pm}$, но и A^+, так как $c_i > 0$. По предыдущей лемме $\forall x \in A^{\pm}$ верно представление $x = kd, k \in N, d =$НОД(A). Ввиду того, что для достаточно больших k факты принадлежности к A^+ и $A^{\pm}$ равносильны, требуемое доказано. ■.

Лемма 3. О вероятностном распределении на множестве натуральных чисел. Пусть $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ - вероятностное распределение на множестве натуральных чисел, $p_k = p\{\xi = k\}; A = \{k \colon p_k > 0\}$, $d =$НОД(A), $x_i \in [0;1]$. Предположим, что верно рекуррентное представление $x_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n-k} p_k; x_0 = 1$. Тогда $\forall n \, x_n = 1$.

Доказательство

$$1 = x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-k} p_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{-k}p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \Rightarrow \forall k x_{-k}p_k = p_k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_k = 0, & k \notin A \\ x_{-k} = 1, & k \in A \end{cases}$$

$\forall k \in A\, x_{-k} = 1$ Рассмотрим произвольное $a \in A$ и применим к нему рекуррентную формулу:

$$1 = x_{-a} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-a-k}p_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

(эти ряды равны)

$$\Rightarrow \forall k\, p_k = x_{-a-k}p_k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_k = 0, & k \notin A \\ x_{-a-k} = 1, & k \in A, a \in A \end{cases}$$

$$\forall l \in A^{+} x_l = 1; l = a + k, a \in A, k \in A.$$

По лемме 2 A^{+} содержит некоторый "хвост"натурального ряда(все элементы$>kd$). d=НОД(A)=1

$\exists k_0 \in N \quad \forall k > k_0, x_{-k} = 1$. Из того же рекуррентного соотношения получаем $x_{-k_0} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-k_0-k}p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ $x_{-k_0} = 1; \quad x_{-k_0+1} = 1; \quad x_{-k_0+2} = 1...$ $\blacksquare$

Лемма 4.О пределе 2-мерной последовательности. Рассмотрим последовательность $q_{i,j}; i \in Z; j \in N; q_{i,j} \in R$. Тогда можно выделить подпоследовательность $i_k; k \in N$ такую, что

$$\forall j \in N \quad \exists \lim_{k\to\infty} q_{i_k,j}$$

.

Теорема о возвращении (о пределе вероятности появления рекуррентного события). Пусть рекуррентное событие возвратно и непериодично. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{M(T)},$$

где T - время между двумя соседними появлениями рекуррентного события.

Замечание. Пусть T_i-время между $i-$ м и $(i+1)$ -м появлением рекуррентного события.Очевидно, что $T_1, T_2, ..$ - содержательно разные случайные величины, но у них одно распределение, потому индекс в выражении, содержащем лишь одну из этих случайных величин, можно опустить.

Доказательство. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ необязательно существует, но $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ должен существовать.

Положим $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = l$. Ввиду ограниченности этой последовательности найдется подпоследовательность $\{a_n\}$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u_{a_n} = l.$$

Построим специальную таблицу.В каждой строке записывается последовательность $\{u_n\}$, притом таким образом, чтобы $u_{a_1}, u_{a_2}, u_{a_3}...$ находились в одном столбце и именно в порядке возрастания номера. Слева каждая строка дополняется по необходимости нулями. Используем лемму 4, положив $q_{i,j}$ равным

Таблица 1:

		0	0	u_1	u_2	...	u_{a_1}	u_{a_1+1}	u_{a_2}	
0	0	u_1	u_2	...	...	u_{a_2}	u_{a_2+1}	u_{a_3}	...	
u_1	u_2	...	...	...	...	u_{a_3}	u_{a_3+1}	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	u_{a_n}	u_{a_n+1}	...	...	

элементу i-й строки, j-го столбца матрицы. Выделение подпоследовательности по первому индексу соответствует удалению определенного числа строк из матрицы. Оставшиеся строки обеспечат сходимость в каждом столбце, а не только в центральном. Новую последовательность обозначим $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, она имеет тот же предел.

$$\lim_{n\to\infty} u_{b_n} = l.$$

Введём единое обозначение для всех элементов таблицы, включая нули.

$$u^*_{b_n+k} = \begin{cases} u_{b_n+k}, & b_n+k>0 \\ 0, & b_n+k \leqslant 0 \end{cases}$$

Здесь u_{b_n+k} - элементы столбца, сдвинутого на k позиций вправо от центрального.

$u_{b_n+k} = \sum\limits_{p=1}^{b_n+k} u_{b_n+k-p} f_p + 0f_{p+1} + 0f_{p+2} + ... = \sum\limits_{p=1}^{\infty} u^*_{b_n+k-p} f_p \leq \sum\limits_{p=1}^{\infty} f_p = 1$, где $u_{b_n+k} = u^*_{b_n+k}$. Ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} f_p$ сходится $\Rightarrow \exists N\ \forall n > N \sum\limits_{p=N+1}^{\infty} f_p < \varepsilon$.

$0 \leq u^*_{b_n+k} - \sum\limits_{p=1}^{N} u^*_{b_n+k-p} f_p = \sum\limits_{p=N+1}^{\infty} \underbrace{u^*_{b_n+k-p}}_{\leq 1} f_p \leq \sum\limits_{p=N-1}^{\infty} f_p < \varepsilon \Rightarrow u^*_{b_n+k}$ сходится.

$\lim\limits_{n\to\infty} u^*_{b_n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{p=1}^{\infty} u^*_{b_n+k-p} f_p) \Rightarrow x_{-k} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} x_{-(k-p)} f_p$. Здесь по определению $x_{-k} = \lim\limits_{n\to\infty} u^*_{b_n+k}$. Таким образом, x_{-k} - предел в столбце матрицы, сдвинутом на k позиций вправо от центрального столбца.

Докажем, что пределы в каждом столбце совпадают. Рассмотрим 2 случая:

1)$l > 0$. Обозначим $\omega_k = x_{-k}$; $\omega_k = \sum\limits_{p=1}^{\infty} f_p \omega_{k-p}$ (4.3)

$\frac{\omega_k}{l} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \omega_{k-p}}{l}$ (4.4).

Рассмотрим последовательность $\{\frac{\omega_k}{l}\}$ применительно к условиям леммы о рекуррентном соотношении. Роль $\{p_k\}$ -вероятностного распределения на множестве N выполняет $\{f_p\}$. Таким образом, все условия леммы выполняются:

$x_k = 1 \Leftrightarrow \frac{\omega_k}{l} = 1 \Rightarrow \omega_k = l \Rightarrow x_{-k} = l$. Пределы во всех столбцах одинаковы.

2) l = 0. $\omega_0 = l = 0 = \sum\limits_{p=1}^{\infty} f_p \omega_{-p}$ (4.5)

Введем множество $A = \{p : f_p > 0\}$. Рассмотрим слагаемые в (4.5). Они неотрицательны, но дают в сумме 0, и потому все они должны быть $= 0$. $p \in A \Rightarrow f_p \neq 0 \Rightarrow \omega_{-p} = 0$. $\omega_{-p} = \sum\limits_{q=1}^{\infty} f_q \omega_{-q-p}$.$p \in A, q \in A \Rightarrow f_q \neq 0 \Rightarrow \omega_{-p-q} = 0 \Rightarrow \forall p \in A^+ \ \omega_{-p} = 0$.

По условию теоремы рекуррентное событие не является периодичным и потому $d =$ НОД$(A) = 1$. По лемме 2 A^+ содержит некоторый "хвост"натурального ряда, то есть все числа больше некоторого $k_0 \Rightarrow \omega_{-k} = 0 \ \forall k > k_0$. $\omega_{-k_0} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} f_p \omega_{-k_0-p}$ (следует из (4.4)) $k_0 + p > k_0 \Rightarrow \omega_{-k_0-p} = 0 \Rightarrow \omega_{-k_0} = 0$.

Аналогично выражаем ω_{-k_0+1} и ω_{-k_0+2} через ω с меньшими номерами $\Rightarrow \omega_{-k} = 0 \ \forall k$.

Итак, в таблице, преобразованной с помощью удаления строк, пределы для каждого столбца не только существуют, но и равны. Осталось доказать, что частичные пределы являются полными и равны $\frac{1}{M(T)}$. Рассмотрим последовательность $\overline{F_k} = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f_i$. Используем формулу $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k} f_k = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}(\overline{F_{k-1}} - \overline{F_k})$,$f_k = \overline{F_{k-1}} - \overline{F_k}$

$$u_n = \underbrace{\overline{F_0} u_{n-1}} - \overbrace{\overline{F_1} u_{n-1}} + \overline{F_1} u_{n-2} - \overbrace{\overline{F_2} u_{n-2}} + ... + \overline{F_{n-1}} u_0 - \overbrace{\overline{F_n} u_0}.$$

$$u_{n-1} = \underbrace{\overline{F_0} u_{n-2}} - \overline{F_1} u_{n-2} + \overline{F_1} u_{n-3} - \overline{F_2} u_{n-3} + ... + \overline{F_{n-2}} u_0 - \overline{F_{n-1}} u_0$$

$$\text{u}_1 = \underbrace{\overline{F_0} u_0} - \overline{F_1} u_0.$$

Если суммировать левые и правые части каждого равенства, то всё, что не помечено, сократится.

$$u_1 + ... + u_n = -\sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} u_{n-k} + \underbrace{\overline{F_0}}_{=1}(u_{n-1} + ... + u_0).$$

$$u_n = u_0 - \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} u_{n-k}.$$

$$u_n \overline{F_0} = u_0 - \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} u_{n-k}.$$

$$\underbrace{u_0}_{=1} = \sum_{k=0}^{n} \overline{F_k} u_{n-k}.$$

$\sum\limits_{k=0}^{n} \overline{F_k} u_{n-k} = 1.(4.6)$

Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{F_k}$ сходится. От противного предполагаем, что он расходится. Заменим n на выражение $b_n + p$. $1 = \sum\limits_{k=0}^{b_n+p} \overline{F_k} u_{b_n+p-k} \geqslant \frac{l}{2} \underbrace{\sum\limits_{k=0}^{b_n+p} \overline{F_k}}_{\to\infty}$

$(u_{b_n+p-k} \to l$ при $n \to \infty \Rightarrow u_{b_n+p-k} > \frac{l}{2}$ для достаточно больших n), $1 \geqslant \infty$ - противоречие.

Найдём сумму этого ряда. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{F_k} = (f_1 + f_2 + ...) + (f_2 + f_3 + ...) + (f_3 ...) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k f_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k P\{T_1 = k\} = M(T_1) = M(T)$.

$\sum \overline{F_k}$ - сходится $\Rightarrow$ остаток $\to 0$. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon\ \forall k > k_\varepsilon\ \sum\limits_{i=k}^{\infty} \overline{F_i} < \varepsilon$.

$1 = \sum\limits_{k=0}^{b_n+m} \overline{F_k} u_{b_n+m-k} = \sum\limits_{k=0}^{k_\varepsilon} \overline{F_k} u_{b_n+m-k} + \sum\limits_{k=k_\varepsilon+1}^{b_n+m} \overline{F_k} u_{b_n+m-k} (4.7)$.Оценим (4.7) сверху.

$$1 = \sum_{k=0}^{k_\varepsilon} \overline{F_k} \underbrace{u_{b_n+m-k}}_{\le l} + \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{b_n+m} \overline{F_k} \underbrace{u_{b_n+m-k}}_{\le 1} \le l \underbrace{\sum_{k=0}^{k_\varepsilon} \overline{F_k}}_{\to M(T)} + \underbrace{\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{b_n+m} F_k}_{<\varepsilon}.$$

$1 \le \sum\limits_{k=0}^{k_\varepsilon} \overline{F_k} M(T) + \varepsilon.$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow k_\varepsilon \to \infty \Rightarrow 1 \le lM(T)$

$1 \ge \sum\limits_{k=0}^{k_\varepsilon} \overline{F_k} u_{b_n+m-k}$ - берём ограничение с другой стороны. $n \to \infty, \varepsilon \to 0 \Rightarrow b_n \to \infty, k_\varepsilon \to \infty \Rightarrow u_{b_n+m-k} \to l \Rightarrow 1 \ge \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{F_k} l = l \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{F_k} = lM(T)$.

$1 \ge lM(T); 1 \le lM(T) \Rightarrow l = \frac{1}{M(T)}$.

Осталось доказать, что l является полным пределом исходной последовательности, а не частичным. Докажем это от противного. Пусть $l_1 = \lim\limits_{r\to\infty} u_{n_r} < l$; здесь $\{u_{n_r}\}$ - некоторая сходящаяся подпоследовательность$\{u_n\}$. Рассмотрим равенство $\sum\limits_{k=0}^{n_r} \overline{F_k} u_{n_r-k} = 1$.

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon\ \forall\ L > k_\varepsilon\ \sum\limits_{k>L} \overline{F_k} < \varepsilon$. ε и r подбираем таким образом, чтобы выполнялась цепочка неравенств $k_\varepsilon < L < n_r$.

$1 = \overline{F_0} u_{n_r} + \sum\limits_{k=1}^{L} \overline{F_k} u_{n_r-k} + \sum\limits_{k=L+1}^{n_r} \overline{F_k} u_{n_r-k} \leq (\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \forall\ n > N\ u_n < l + \varepsilon.$

k $\leq L \Rightarrow$ если $n_r > N + L \Rightarrow n_r - k > N \Rightarrow u_{n_r-k} < l + \varepsilon) < \overline{F_0} u_{n_r} + \sum\limits_{k=1}^{L} \overline{F_k} \underbrace{u_{n_r-k}}_{<l+\varepsilon} + \varepsilon < u_{n_r} + (l+\varepsilon) \sum\limits_{k=1}^{L} \overline{F_k} + \varepsilon = u_{n_r} + (l+\varepsilon)(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{F_k} - \overline{F_0} - \sum\limits_{k=L+1}^{\infty} \overline{F_k}) + \varepsilon =$

$u_{n_r} + l(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{F_k} - \overline{F_0} - \underbrace{\sum_{k=L+1}^{\infty} \overline{F_k}}_{=C}) + \varepsilon(1 + \sum\limits_{k=1}^{l} \overline{F_k}) \leq u_{n_r} + lMT - l - lC + \varepsilon + \varepsilon M(T) \leq$

$u_{n_r} + \varepsilon MT + 1 + \underbrace{lM(T)}_{=1} - l.$

$1 \leq 1 + u_{n_r} + \varepsilon(MT + 1) - l \Rightarrow 0 \leq u_{n_r} - l + \varepsilon(MT + 1); \varepsilon \to 0, r \to \infty \Rightarrow 0 \leq l_1 - l + 0 \Rightarrow l_1 \geq l.$

$l_1 \leq l, l_1 \geq l \Rightarrow l_1 = l \Rightarrow$ l - полный предел.Мы предполагали, что $l \neq 0$. Иначе $0 \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} u_n \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} u_n = l = 0$. $l = \frac{1}{\underbrace{MT}_{\to\infty}} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{M(T)}$.

■

5 Цепи Маркова

Частный случай марковского процесса—дискретная марковская цепь. Мы говорим о такой цепи, если процесс с ненулевой вероятностью принимает не более чем счетное множество значений.

Тогда определение (для дискретного временного диапазона) принимает вид: Последовательность дискретных случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется дискретной марковской цепью, если

$$P\{\xi_n = x_n \mid \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2 \cdots \xi_{n-1} = x_{n-1}\} = P\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}\} \quad (5.1)$$

(Будущее связано с прошлым через настоящее).

Если в (5.1) вероятности зависят лишь от $x_1 \cdots x_n$, но не от n, то цепь называется однородной.Чтобы задать такую цепь, достаточно определить начальное распределение и для каждого шага матрицу, содержащую $P\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}\}$.Для неоднородной же цепи переходную матрицу необходимо задавать на каждом шаге.

Здесь $\forall i \; x_i$ -вещественное число, обеспечивающее корректность задания присутствующих в определении условных вероятностей. Все такие числа образуют множество состояний E. Размерность матрицы соответствует числу состояний.

Соответственно в однородном случае(он и будет рассмотрен в этой части пособия) P— матрица переходных вероятностей. $P_{i,j} = P\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = x_i\}$, $i, j \in E$.

Введем обозначение $P_{i,j}^{(k)} = P\{\xi_n = j \mid \xi_{n-k} = x_i\}$, соответственно $P^{(k)}$-матрица вероятностей перехода за k шагов.

Определение.Состояние марковской цепи $i \in E$ называется несущественным,если $\exists j \in E, j \neq i, \exists k \in \mathbb{N} \; P_{i,j}^{(k)} > 0, \forall r \in N \; P_{i,j}^{(r)} = 0$ Таким образом, из состояния i можно за некоторое число шагов перейти в состояние j, но нельзя ни за какое число шагов вернуться обратно)

Определение. Состояние $i \in E$ называется периодическим с периодом $d>1$, если множество $\{k \in N : P_{i,j}^{(k)} > 0\}$ содержит лишь числа,кратные d, причем d-наибольшее из подходящих чисел. Если такого числа d не существует, состояние называют непериодическим.

Определение.Состояние $i \in E$ называется нулевым, если $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = 0$

Пример. 2 корабля одновременно стреляют друг в друга. $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ - вероятность попадания для 1-го и 2-го корабля соответственно.

Один шаг-это обмен выстрелами.Состояние цепи-число кораблей, оставшихся в строю. Построим переходную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$E = \{0, 1, 2\}$

Введем A и B - события, связанные с попаданием в цель 1-го и 2-го корабля соответственно. $P_{2,0} = P\{A * B\} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4}$; $P_{2,2} = P\{\overline{A * B}\} = \frac{1}{2} * \frac{3}{4}$; Существенными будут состояния будут 0 и 1, т.к. из 0 и 1 нельзя перейти в другие состояния. Состояние 2 - несущественно,т.к. из него можно перейти в другие состояния, а обратно вернуться нельзя(число кораблей не увеличивается). При рассмотрении некоторой последовательности во времени важно ввести точку отсчета. Пусть вектор $p^0 = (p_1^0, p_2^0, ...)$- начальное распределение дискретной однородной цепи Маркова. Размерность вектора определяется числом состояний. Здесь $P_i^0 = P\{\xi_0 = i\}$-вероятность того, что на нулевом шаге система(цепь) находится в i-м состоянии.

Теорема (о вероятностном распределении для цепи на n-ом шаге) Пусть дана переходная матрица и начальное распределение p^0. Тогда вероятностное распределение на n-м шаге определяется следующей формулой:$P\{\xi_n =$

$j\} = \sum\limits_{k\in E} p_k^0 p_{k,j}^{(n)}$

Доказательство.

Используем формулу полной вероятности.

$P\{B\} = \sum\limits_{k} P\{B/A_k\}P\{A_k\}$.

$A_k = P\{\xi_0 = k\} \Rightarrow P\{A_k\} = P_k^0, P\{B/A_k\} = p_{k,j}^{(n)}$. ■

Теорема Колмогорова-Чепмена о матрице перехода за k шагов

$P^{(k)} = P^k$.

Матрица в правой части равенства - k-я степень исходной матрицы.

Доказательство. $P\{\xi_n = j/\xi_{n-k} = i\} = \frac{P\{\xi_n=j,\xi_{n-k}=i\}}{P\{\xi_{n-k}=i\}} = \sum\limits_{l\in E} \frac{P\{\xi_n=j,\xi_{n-1}=l,\xi_{n-k}=i\}}{P\{\xi_{n-k}=i\}} = \sum\limits_{l\in E} \frac{P\{\xi_n=j/\xi_{n-1}=l,\xi_{n-k}=i\}\cdot P\{\xi_{n-1}=l,\xi_{n-k}=i\}}{P\{\xi_{n-k}=i\}}$.

Покажем, что второе условие можно отбросить. $P\{\xi_n = j/\xi_{n-1} = l, \xi_{n-k} = i\} =$

$\frac{P\{\xi_n=j,\xi_{n-1}=l,\xi_{n-k}=i\}}{P\{\xi_{n-1}=l,\xi_{n-k}=i\}} =$

$$\frac{\sum\limits_{i_1\dots i_{n-2}} P\{\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots \xi_{n-k-1} = i_{n-k-1}, \xi_{n-k} = i, \xi_{n-k+1} = i_{n-k+1}, \dots, \xi_n = j\}}{\sum\limits_{i_1\dots i_{n-2}} P\{\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots \xi_{n-k-1} = i_{n-k-1}, \xi_{n-k} = i, \xi_{n-k+1} = i_{n-k+1}, \dots, \xi_{n-1} = l\}}$$

$= \frac{\sum\limits_{i_1\cdots i_{n-2}} P\{\xi_n=j/\xi_1=i_1,\dots\xi_{n-1}=l\}P\{\xi_1=i_1,\dots\xi_{n-1}=l\}}{\sum\limits_{i_1\cdots i_{n-2}} P\{\xi_1=i_1,\dots\xi_{n-1}=l\}} =$

$= \frac{\sum\limits_{i_1\cdots i_{n-2}} P\{\xi_n=j/\xi_{n-1}=l\}P\{\xi_1=i_1,\dots\xi_{n-1}=l\}}{\sum\limits_{i_1\cdots i_{n-2}} P\{\xi_1=i_1,\dots\xi_{n-1}=l\}} =$

$=$

P$\{\xi_n = j/\xi_{n-1} = l\}$.

Подставив в исходную вероятность новое значение, получаем:

$$\frac{\sum\limits_{l\in E} P\{\xi_n = j/\xi_{n-1} = l\} \cdot P\{\xi_{n-1} = l, \xi_{n-k} = i\}}{P\{\xi_{n-k} = i\}} = \sum_{l\in E} \underbrace{P_{l,j} P_{i,l}^{(k-1)}}_{P_{i,j}^{(k)}}$$

$P^{(k)} = P^{(k-1)}P = \dots = PP^{k-1} = P^k$.■

Скалярное равенство Колмогорова-Чепмена: $P_{i,j}^{(n)} = \sum\limits_{l\in E} P_{i,l}^{(m)} P_{l,j}^{(n-m)}$

Из равенства, взяв одно из слагаемых суммы, можно получить неравенство Колмогорова-Чепмена:$P_{i,j}^{(n)} \geq P_{i,l}^{(m)} P_{l,j}^{(n-m)}$

Промежуточных состояний в равенстве может быть и больше, например три:

Тогда, очевидно, справедливо тройное неравенство Колмогорова-Чепмена: $P_{i,j}^{(n)} \geq P_{i,k}^{(m_1)} P_{k,l}^{(m_2)} P_{l,j}^{(n-m_1-m_2)}$

Определение. Состояния цепи Маркова i и j называются сообщающимися, если $\exists k, l \in \mathbb{N} : P_{i,j}^{(k)} > 0, P_{j,i}^{(l)} > 0$ Таким образом, можно перейти из i в j и наоборот).

Теорема (о сообщаемости как отношении эквивалентности)

Отношение сообщаемости является отношением эквивалентности на классе состояний цепи

Доказательство.Рефлексивность и симметричность очевидны, определение симметрично относительно i иj, каждое состояние сообщается с собой. Докажем транзитивность. Пусть i иj,j и k - две пары сообщающихся состояний $\Rightarrow \exists m, l \in \mathbb{N} : P_{i,j}^{(m)} > 0, P_{j,i}^{(l)} > 0$.

По неравенству Колмогорова-Чепмена $P_{i,k}^{(m+l)} \geq \underbrace{P_{i,j}^{(m)}}_{>0} \underbrace{P_{j,k}^{(l)}}_{>0} > 0$. Аналогично в другую сторону $\exists n, t \in \mathbb{N} : P_{k,j}^{(n)} > 0, P_{j,i}^{(t)} > 0. P_{k,i}^{(n+t)} \geq P_{k,j}^{(n)} P_{j,i}^{(t)} > 0 \Rightarrow i$ и k сообщаются. ■

Определение. Цепь Маркова неприводима, если она состоит из одного класса сообщающихся между собой существенных состояний.

Пример: Цепь с такой матрицей не является неприводимой. Имеется два класса состояний, и сообщаемость наблюдается лишь внутри каждого класса.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Определение. Состояние называется возвратным или периодичным, если возвратно или периодично соответствующее рекуррентное событие - возврат в данное состояние.

Теоремы солидарности.

Первая теорема солидарности (о периодичности) Если в неприводимой цепи Маркова есть одно периодичное состояние с периодом d, то остальные состояния периодичны с тем же периодом, а все множество состояний можно разбить на d классов $x_0, ..., x_{d-1}$, причём из класса $x_k, k \neq d-1$ за один шаг можно перейти только в x_{k+1}, а из x_{d-1} только в x_0.

Доказательство. Предположим, состояние $1 \in E$ периодично. Рассмотрим другое состояние $i \neq 1, i \in E$. В силу неприводимости цепи $\exists\, l, m, n \in N : p_{1,i}^{(n)} > 0, p_{i,1}^{(m)} > 0, p_{i,i}^{(l)} > 0. p_{1,1}^{(n+m)} \geq p_{i,1}^{(m)} p_{1,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow$ за $n+m$ шагов можно перейти из 1 в $1 \Rightarrow n+m$ делит d. $p_{1,1}^{(l+n+m)} \geq p_{i,1}^{(m)} p_{i,i}^{(l)} p_{1,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow n+m+l$ тоже делит $d \Rightarrow l$ делит d, а l - произвольное число шагов, за которое можно вернуться из i в i.Состояние i периодично с периодом d_i и d_i/d. В рассуждениях состояния 1 и i можно поменять местами $\Rightarrow d/d_i \Rightarrow d_i = d \Rightarrow$ все события периодичны с одним и тем же периодом.

Зафиксируем 1-е состояние $1 \in E, i \neq 1 \in E. \exists n, p_{1,i}^{(n)} > 0$. Обозначим $r_i = n \; mod \; d$. Покажем, что r_i не зависит от n.

$\exists l \in \mathbb{N}, p_{i,1}^{(l)} > 0, p_{1,1}^{(n+l)} \geq p_{1,i}^{(n)} p_{1,i}^{(l)} > 0 \Rightarrow (n+l)/d$. Рассмотрим другое число шагов $m \neq n$, такое, что $p_{1,i}^{(m)} > 0$ (предположим, что такое число есть). $p_{1,1}^{(m+l)} \geq$

$p_{1,i}^{(m)} p_{i,1}^{(l)} > 0 \Rightarrow (m+l)/d.$

$n \ mod \ d = m \ mod \ d.$

Пусть $x_k = \{i \in E : p_{1,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow k = n \ mod \ d\}$.

Класс x_k содержит такие состояния, что при переходе в них из 1-го используется число шагов, дающее при делении на d остаток k. Рассмотрим j, такое, что $p_{i,j}^{(1)} > 0$ (такое состояние существует, иначе из i нельзя было бы никуда перейти).

$p_{i,j}^{(n+1)} \geq p_{1,i}^{(n)} p_{i,j}^{(1)} > 0$

$$(n+1) \ mod \ d \ = \begin{cases} k+1, & k < n-1 \\ \ \ 0, & k = n-1 \end{cases}$$

Меняя j, мы перебираем состояния, в которые можно перейти из x_k за один шаг, и эти состояния действительно образуют класс с номером $k+1$ или 0. Это $x_{k+1}(k < n-1), x_0(k = n-1)$. ■

Вторая теорема солидарности (о возвратности) Если в неприводимой цепи Маркова одно состояние возвратно, то и остальные тоже возвратны.

Доказательство. Используем критерий возвратности $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k = \infty$. Добавим к обозначению для элементов ряда индекс сверху. Индекс (1), в частности, указывает на 1-е состояние. Предположим, что именно 1-е состояние возвратно. Тогда $u_k^{(1)} = p_{1,1}^{(k)}$. Рассмотрим $i \in$E, $i \neq$1. $\exists n, l \in N$: $p_{i,1}^{(n)} > 0$, $p_{1,i}^{(l)} > 0$. $p_{i,1}^{(n)} p_{1,i}^{(l)} > 0 \Rightarrow u_{n+m+l}^{(i)} \geqslant C u_m^{(1)} \Rightarrow \sum\limits_{m=0}^{\infty} u_{n+m+l}^{(i)} = \infty \Rightarrow i$-е состояние возвратно.■

Случайные блуждания. Критерий возвратности. Случайное блуждание возвратно тогда и только тогда, когда оно симметрично.

Цепь неприводима, так как все состояния существенны и сообщаются между собой. Если $p = \frac{1}{2}$, то блуждания называются симметричными.

$$p_{i,j} = P\{\eta_n = j | \eta_{n-1} = i\} \ = \begin{cases} 1-p, & j = i-1 \\ p, & j = i+1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

■

Доказательство. Так как цепь неприводима, то достаточно рассмотреть одно состояние - 0, соответствующее моменту, когда сумма индикаторов $\sum_{j=1}^{N} \xi_j = 0$. В это состояние можно вернуться лишь за четное число шагов. Рассмотрим сумму:

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{0,0}(2n)$

$p_{0,0}(2n) = C_{2n}^{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n.$

По формуле Стирлинга

$p_{0,0}(2n) \simeq \frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}e^{-n}}{(n)^{2n}2\pi n e^{-n}} p^n (1-p)^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{0,0}(2n) = \begin{cases} \infty, & p = q = 0.5, \text{ ряд расходится} \\ < \infty, & p \neq 0.5, \text{ ряд сходится} \end{cases}$$ ■

Третья теорема солидарности. Если в неприводимой марковской цепи одно из состояний нулевое, то остальные состояния тоже являются нулевыми.

Доказательство: Пусть i-е состояние - нулевое, $i \in E$. Рассмотрим $j \neq i, j \in E$. Цепь неприводима и, следовательно, $\exists k, l \in N : p_{i,j}^{(k)} > 0, p_{j,i}^{(l)} > 0$. По неравенству Колмогорова-Чепмена: $p_{i,i}^{(k+n+l)} \geqslant p_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n)} p_{j,i}^{(l)} \geqslant C p_{j,j}^{(n)}$

$0 = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,i}^{(k+n+l)} \geqslant C \lim\limits_{n\to\infty} p_{j,j}^{(n)} \geqslant 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{j,j}^{(n)} = 0 \Rightarrow j$ - нулевое. ■

Определение. Переходная матрица марковской цепи называется регулярной, если $\exists\, t > 0$, такое, что матрица $P^{(t)}$ не содержит нулевых элементов. Таким образом, есть число шагов, за которое все переходы возможны.

Первая предельная теорема. Рассмотрим конечную (с N состояниями) марковскую цепь с регулярной матрицей. Справедливо утверждение:

$\forall i, j \in \{1...N\} \exists \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = q_j$

Доказательство. Введем два вида последовательностей:

$M_j(n) = \max\limits_{i=1,N} p_{i,j}^{(n)}$; $m_j(n) = \min\limits_{i=1,N} p_{i,j}^{(n)}$. Докажем их монотонность.

$\exists i_0 \in E\, M_j(n+1) = p_{i_0,j}^{(n+1)} = \sum\limits_{k=1}^{N} p_{i_0,k} p_{k,j}^{(n)} \leqslant M_j(n) \sum\limits_{k=1}^{N} p_{i_0,k} \Rightarrow M_j(n+1) \leqslant M_j(n)$.

Последовательности - монотонно невозрастающие. Аналогично все последовательности $m_j(n)$- монотонно неубывающие. $M_j(n)$ и $m_j(n)$ монотонны и ограничены $\Rightarrow \forall j \quad \exists m_j = \lim\limits_{n\to\infty} m_j(n)$, $\exists M_j = \lim\limits_{n\to\infty} M_j(n)$. Надо доказать, что $\forall j$ $m_j = M_j$.

Введем $q_{i,k,j}(n) = p_{i,j}^{(n)} - p_{k,j}^{(n)}$.

$\sum\limits_{j=1}^{N} q_{i,k,j}(n) = \sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)} - \sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j}^{(n)} = 0$. Пусть t - одна из тех степеней, за счет которых достигается регулярность матрицы P.

$$q_{i,k,j}(n) = \sum_{l=1}^{N} p_{i,l}^{(t)} p_{l,j}^{(n-1)} - \sum_{l=1}^{N} p_{k,l}^{(t)} p_{l,j}^{(n-t)} = \sum_{l=1}^{N} (p_{i,l}^{(t)} - p_{k,l}^{(t)}) p_{l,j}^{(n-t)}.$$

$$0 = \sum_{l=1}^{N} q_{i,k,l}(t) = \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t) + \sum_{l:q_{i,k,l}(t)<0} q_{i,k,l}(t) \Rightarrow \sum_{l:q_{i,k,l}(t)<0} q_{i,k,l}(t) =$$

$$= - \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t).$$

$$\begin{aligned} q_{i,k,j}(n) &= \sum_{l:q_{i,k,l}(t)<0} q_{i,k,l}(t) p_{l,j}^{(n-t)} + \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t) p_{l,j}^{(n-t)} \leqslant \\ &\leqslant m_j(n-t) \sum_{l:q_{i,k,l}(t)<0} q_{i,k,l}(t) + M_j(n-t) \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t) = \\ &= (M_j(n-t) - m_j(n-t)) \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t). \end{aligned}$$

$$q_{i,k}(t) = \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t) = \underbrace{\sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} (p_{i,l}^{(t)} - p_{k,l}^{(t)}) < \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} p_{i,l}^{(t)} \leq 1}_{\text{здесь используется регулярность}}$$

$\forall k,l \quad p_{k,l}^{(t)} > 0.$

Обозначим $q = \max\limits_{i,k} q_{i,k}(t) < 1$

Таким образом, $p_{i,j}^{(n)} - p_{k,j}^{(n)} \leqslant q(M_j(n-t) - m_j(n-t))$. Подбираем i,k так, чтобы при фиксированном j $p_{i,j}^{(n)}$ была максимальной из возможных в перечне вероятностей, а $p_{k,j}^{(n)}$ минимальной. $p_{i,j}^{(n)} = M_j(n); p_{k,j}^{(n)} = m_j(n) \Rightarrow M_j(n) - m_j(n) \leqslant q(M_j(n) - m_j(n))$. Переходим к пределу: $M_j - m_j \leqslant q(M_j - m_j), q < 1 \Rightarrow M_j - m_j = 0$.

С другой стороны, $m_j \leqslant p_{i,j}(n) \leqslant M_j \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = M_j = m_j$.■

Вторая предельная теорема. Пусть марковская цепь конечна и имеет N состояний, ее матрица регулярна, тогда $\forall j \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} P\{\xi_n = j\}$.

Доказательство. Справедливо равенство Колмогорова-Чепмена для вероятностей состояний :

$p_k^{(n+m)} = \sum\limits_{j=1}^{N} p_j^{(n)} p_{j,k}^{(m)}$.

Здесь $p_k^{(n+m)} = p\{\xi_{n+m} = k\}$.

Аналогично получаем $p_j^{(n)}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} p_k^{(n+m)} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{j=1}^{N} p_j^{(n)} p_{j,k}^{(m)}) = q_k \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{j=1}^{N} p_j^{(n)}) = q_k$ - совпадает с результатом первой теоремы. Переходные вероятности и вероятности для состояний стремятся к одному и тому же пределу.■

Нахождение предельных вероятностей.

Используем аналоги равенства Колмогорова-Чепмена для вероятностей состояний:

$p_k^{(n+1)} = \sum\limits_{j=1}^{N} p_j^(n) p_{j,k}$.

Перейдем к пределу: $q_k = \sum\limits_{j=1}^{N} q_j p_{j,k}$. Рассмотрим вектор $q = (q_1 ... q_N); qE =$

$qP; q(E-P)=0$ - ноль-вектор. Имеем N уравнений с матрицей системы $E-P$. $\sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j} = 1; \sum\limits_{j=1}^{N} e_{i,j} = 1 \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{N}(e_{i,j} - p_{i,j}) = 0$. Столбцы матрицы – линейно зависимы $\Rightarrow rang(E-P) < N \Rightarrow$ система имеет бесконечное число решений. Чтобы получить единственное решение, нужно добавить условие:

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)}) = \sum\limits_{j=1}^{N} \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{N} q_j; \sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)} = 1 \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{N} q_j = 1.$

Стационарное распределение для цепи Маркова.

Пусть предельное распределение для цепи Маркова известно, оно вычислено, а начальное распределение совпадает с предельным(векторы p_0 и q совпадают).

Используем равенство Колмогорова-Чепмена:

$q_k = \sum\limits_{j=1}^{N} q_i p_{i,j}$.

На это равенство можно смотреть с двух сторон. С одной стороны, это элемент системы,из которой находят предельные вероятность. С другой стороны, слева- вероятность того, что система на 1-ом шаге перейдет в k-е состояние, а справа q_i – предельная вероятность, следовательно, распределение на 1-ом шаге совпадает с начальным и предельным. Далее по аналогии получаем: слева - вероятность на 2-ом шаге, справа - предельная вероятность, она же вероятность на первом шаге, и следовательно, распределение вероятностей на множестве состояний не зависит от шага. Это распределение принято называть стационарным.

6 Ветвящиеся процессы.

Это один из широко распространенных видов марковских дискретных неоднородных цепей. Рассмотрим популяцию, состоящую из однотипных частиц, введем некоторую последовательность моментов времени. На шагах, соответствующих моментам , могут рождаться новые частицы. На нулевом шаге рождается одна частица. Любая частица, рожденная на n-м шаге, на $(n+1)$-м шаге может дать некоторое число потомков. При этом вероятностное распределение количества частиц, порожденных одной частицей, на любом шаге не меняется.

Определение. Последовательность $\{\xi_n\}$, где $\{\xi_n\}$ — число вышеописанных частиц, порожденных на n-м шаге, называется ветвящимся процессом.

Рассмотрим распределение числа частиц на 1-м шаге:

$$\begin{array}{ccccc} \xi_1 & 0 & 1 & 2 & ... \\ p & p_0 & p_1 & p_2 & ... \end{array}$$

Это начальное распределение дает нам возможность построить распределение вероятностей и на всех последующих шагах.

Используем аппарат производящих функций:

$f_\xi(z) = M(z^\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{x_k} p_k = \sum\limits_{k=o}^{\infty} z^k p_k$

Известно следующее свойство этих функций:

Если $\xi_1 ... \xi_n$ -независимы, то $f_{\xi_1+...+\xi_n}(z) = f_{\xi_1}(z)...f_{\xi_n}(z)$; $f_\xi(1) = 1$.

Введем обозначения для числовых характеристик процесса и производящих функций.

$m = m_1 = M(\xi_1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kP\{\xi_1 = k\}$

$m_n = M(\xi_n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kP\{\xi_n = k\}$

$f(z) = f_\xi(z) = f_{\xi_1}(z); f_k(z) = f_{\xi_k}(z)$

Теорема о рекуррентном соотношении для производящих функций

ветвящегося процесса.

Справедливо следующее равенство:$f_n(z) = f(f_{n-1}(z))$

Доказательство.

$p_k(n) = p(\xi_n = k)$; $p_k(n) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p(\xi_1 = j) \cdot p(\xi_n = k|\xi_1 = j)$ Умножаем последнее равенство на z^k и суммируем по k.

$f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(n)z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j \cdot p(\xi_n = k|\xi_1 = j)z^k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j \sum\limits_{k=0}^{\infty} p(\xi_n = k|\xi_1 = j)z^k$.

$\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)} + ... + \xi_n^{(j)}$ - суммарное по каждой из частиц число потомков всех j частиц, полученное за n-1 шаг.

Всем шагам соответствует одно и то же распределение. Используем формулу для производящей функции суммы. Вложенная функция - это производящая функция за n-1 шаг вышеупомянутой суммы j слагаемых .

$f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(n)z^k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j f_{\xi_n^{(1)}+...+\xi_n^{(j)}}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j(f_{n-1}(z))^j = f(f_{n-1}(z))$. ■

Найдем связь между числовыми характеристиками процесса и производящей функцией.

$m_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} kp_k(n)$, $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k p_k(n) \Rightarrow m_n = f_n'(1)$

$f_n(z) = f(f_{n-1}(z)) \Rightarrow f_n'(z) = f'(f_{n-1}(z)) \cdot f_{n-1}'(z)$

$f_n'(1) = f'(1)(f_{n-1}(1))$ $(f_j(1) = 1)$

$f_n'(1) = f'(1) \cdot f_{n-1}(1) \Rightarrow m_n = m \cdot m_{n-1} = m^n$

Определение.Ветвящийся процесс называется докритическим, если m<1, критическим, если m=1, надкритическим, если m>1.

Определение. Вероятностью вырождения процесса называется $\lim\limits_{n\to\infty} p_0(n)$, где $p_0(n) = p\{\xi_n = 0\}$. Другими словами, это предел по числу шагов вероятности того, что на n-м шаге потомков не будет.

$p_0(n)$ - неубывающая и ограниченная последовательность.

$p = \lim\limits_{n\to\infty} p_0(n)$.

p_0=0 $\Rightarrow$ $p = 0$. Механизм появления потомков один и тот же на каждом шаге. Если потомки есть и на первом шаге, то есть и на всех остальных.

Рассмотрим случай: $p_0 > 0$. Возникает вопрос: как находить вероятность вырождения?

Теорема о вероятности вырождения.

Вероятность вырождения ветвящегося процесса - это $p_0 > 0$ -минимальный положительный корень уравнения $f(z) = z$.

Доказательство.

Рассмотрим $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(n)z^k$, соответственно $f_n(0) = p_0(n)$, обозначим это число λ_n.

$\lambda_n = f_n(0) = p_0(n), n \in \mathbb{N}$. $\lambda_1 = f_1(0) = f(0) = p_0 > 0$. $\lambda_1 > 0 \Rightarrow f(\lambda_1) > f(0) = p_0$.

Используем тот факт, что по определению f-монотонно возрастающая функция.

$f(0) > 0 \Rightarrow f(f(0)) > f(0) \Rightarrow$ по теореме о рекуррентном соотношении $f_2(0) > f(0)$ Таким образом, $\lambda_2 > \lambda_1$.

Далее $f(f_2(0)) > f(f(0))$ т.е. $\lambda_3 > \lambda_2$. Построена возрастающая и ограниченная сверху последовательность $\{\lambda_n\}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = p$; $\lambda_{n+1} = f(\lambda_n)$,$f$-непрерывная функция. Перейдем к пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(\lambda_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n) \Rightarrow p = f(p)$ Таким образом, показано, что искомая вероятность действительно корень уравнения $f(z) = z$.

Предположим от противного, что у уравнения есть положительный корень меньшей величины. Пусть $z_0 = f(z_0), z_0 < p$. $f(0) = \lambda_1 \Rightarrow z_o > \lambda_1$ $z_0 = f_2(z_0) > f_2(0) = \lambda_2 \Rightarrow z_o > \lambda_2 \ldots$ Перейдем к пределу: $z_0 \geqslant \lambda_n, \forall n \Rightarrow z_0 \geqslant p \Rightarrow z_0 = p$. Следовательно,этот корень действительно является минимальным из положительных.

Рассмотрим частный вид ветвящегося процесса, задав конкретное распределение для числа потомков одной частицы. Пусть это распределение является геометрическим:

$P\{\xi = k\} = pq^k; \sum_{k=0}^{\infty} pq^k = \frac{p}{1-q} = 1$

p - вероятность того, что потомков нет.

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k q^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} (qz)^k = \frac{p}{1-qz}$

$m = f'(1) = p\frac{q}{(1-qz)^2}|_{z=1} = \frac{q}{p}$

$m = M_\xi = m^n = (\frac{q}{p})^n$

Найдем вероятность вырождения:

$z = f(z)$

$\frac{p}{1-qz} = z$

$p = z - qz^2$

$qz^2 - z + p = 0$

$z = \frac{1\pm\sqrt{1-4pq}}{2q}; pq \leq \frac{1}{2} \to$ при p = 0.5 есть 2 решения.

$m = \frac{q}{p}$.

$q > p$ – процесс надкритический.

$q = p$ – процесс критический.

$q < p$ – процесс докритический

Асимптотика надкритического процесса.

Если предположить, что у надкритического процесса $p(n) \to 1$, то $m_n \to 0$, но $m > 1 \Rightarrow p < 1$.

Исследуем поведение $f(z)$ на отрезке $[0,1] = [0,p]\bigcup(p,1]$. Рассмотрим $[0,p]$. $0 \leqslant z \leqslant p, f(0) \leqslant f(z) \leqslant f(p) = p \Rightarrow \lambda_1 \leqslant f(z) \leqslant p \leqslant\Rightarrow f(\lambda_1) \leqslant f(f(z)) \leqslant f(p) \Rightarrow \lambda_2 \leqslant f_2(z) \leqslant p$. По аналогии: $\lambda_1 \leqslant f_1(z) \leqslant p...\lambda_n \leqslant f_n(z) \leqslant p, p$ - неподвижная точка. Переходим к пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) \leqslant p$.

$p \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = p$

Рассмотрим интервал $(p,1]$. Тогда $f(p) < f(z) \leqslant z \Rightarrow p < f(z) \leqslant z \leqslant f(p) < f_2(z) \leqslant f(z) \Rightarrow p < f_2(z) \leqslant f(z) \leqslant z \Rightarrow p < f_3(z) \leqslant f(z) \leqslant ... < z \Rightarrow \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$

—невозрастающая последовательность и ее предел больше или равен p.

Пусть $\exists z_0 : \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) > p$. $f_n(z_0) = f(f_{n-1}(z_0))$. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(f_{n-1}(z_0)) = \alpha = f(\lim\limits_{n\to\infty} f_{n-1}(z_0)) = f(\alpha)$. Т.е. $\alpha = f(\alpha)$.

Другого корня уравнения $f(z) = z$ на $[p, z]$ быть не может, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = p \quad \forall z \in [0, 1]$.

$\forall k \geq 1 \lim\limits_{n\to\infty} P_n(k) = 0$.Таким образом, для надкритического процесса вероятность порождения любого числа потомков стремится к нулю при $n \to 0$. Здесь используется тот факт, что $f(z) < z$ при $z \in (p, 1)$ ввиду выпуклости.

Список использованных источников

[1] Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Либроком, 2009

[2] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. - М.: Физматлит, 2003

[3] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов.- М.: Физматлит, 1996

[4] Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. - М: Физматлит, 2002.

[5] Розанов Ю.В. Введение в теорию случайных процессов. - М.: Наука, Физматгиз, 1982.