Гудошникова Е.В.

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ПРОГРАММА КУРСА

ВВЕДЕНИЕ

С древних времен человек сталкивался с необходимостью счета, а значит и чисел. Когда-то люди знали только натуральные числа: 1, 2, 3, ... И их вполне хватало для подсчета добытых мамонтов или овец в стаде.

Человечество развивалось, усложнялись расчеты, а значит и числа. Люди отмеряли материю и землю, взвешивали зерно и мясо – появились дроби.

А развитие человечества, возникающих задач, а, значит, математики и чисел продолжалось. Сталкиваясь с необходимостью, вместе с уравнением типа

$$x^2 = 4$$

уметь решать и очень похожее на него уравнение вида

$$x^2 = 5,$$

пришли к понятию иррациональных чисел, сейчас знакомых каждому выпускнику средней школы.

Переходя от уравнения вида

$$x + 2 = 6$$

к похожему на него, например,

$$x + 6 = 2$$

пришли к понятию отрицательного числа.

А как быть с уравнениями

$$x^2 + 1 = 5,$$

решение которого известно каждому школьнику старших классов, и

$$x^2 + 5 = 1,$$

решать которое обычные школьники не умеют? А решение у этого уравнения есть. То есть есть числа, квадрат которых отрицателен. Выпускник средней школы, которому много лет учителя объясняли, что "квадрат числа всегда больше или равен нуля" обычно с трудом это воспринимает. Но вспомните про отрицательные числа. Сейчас даже ребенок знает что значит "-10^o на улице" или "-30 рублей на балансе". А представьте себе первобытного человека. Как ему было объяснить, что такое "-2 мамонта"? Так и с числами, квадрат которых меньше нуля. Они кажутся "странными", их нельзя "пощупать", но сейчас сложно найти высокотехнологичную область, где бы такие числа не применялись при расчетах.

Эти числа получили название *комплексные*, а один из изучающих их разделов математики – *теория функций комплексного переменного.*

§1. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Определение (алгебраическая форма). Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$, где x и y действительные числа, i – число, для которого $i^2 = -1$ (мнимая единица).

x называется действительной частью числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$.

y называется мнимой частью числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$.

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Например:

$$\begin{aligned} &z = 2 - 3i \quad (x = \operatorname{Re} z = 2,\ \ y = \operatorname{Im} z = -3),\\ &z = 2i \qquad\ \ (x = \operatorname{Re} z = 0,\ \ y = \operatorname{Im} z = 2),\\ &z = 4 \qquad\ \ \ (x = \operatorname{Re} z = 4,\ \ y = \operatorname{Im} z = 0). \end{aligned}$$

(Действительное число – частный случай комплексного числа.)

Замечание. Введение комплексных чисел позволяет, например, извлекать корень из отрицательного числа и находить решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.

Например: решить уравнение $z^2 - 2z + 5 = 0$.

$$D = 4 - 20 = -16 = (4i)^2, \quad z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Сложение (вычитание) и умножение комплексных чисел.

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел выполняются по обычным правилам алгебры: надо раскрыть скобки, привести подобные слагаемые, учесть, что $i^2 = -1$.

Например:

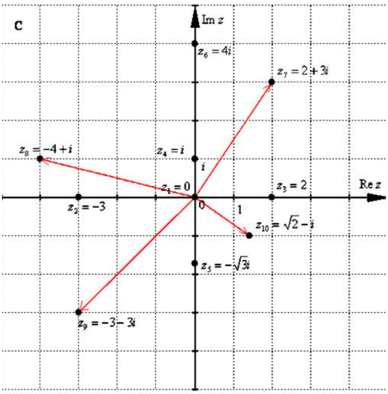
сложение: $(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$,

вычитание: $(2 + 3i) - (4 - i) = -2 + 4i$,

умножение: $(2 + 3i)(4 - i) = 8 + 12i - 2i - 3i^2 =$ (т.к. $i^2 = -1$) $= 11 + 10i$,

возведение в квадрат: $(2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = -5 + 12i$.

Геометрическая интерпретация. Комплексные числа изображаются как точки на координатной плоскости (комплексная плоскость) . Действительная часть z, откладывается по оси OX, мнимая часть z откладывается по оси OY.



Замечание. Для комплексных чисел неравенство вида $z_1 < z_2$ не имеет смысла.

Замечание. На комплексную плоскость $\mathbb{C}$ можно так же смотреть как на сферу бесконечно большого радиуса. И если $z = 0$ – один полюс этой сферы, то диаметрально противоположный полюс – это число $z = \infty$. С этой точки зрения все прямые (в том числе и координатные оси) пересекаются в бесконечно удаленной точке.

Модуль и аргумент комплексного числа. Модулем комплексного числа z называется расстояние от точки, соответствующей числу z, до начала координат. Обозначается r или $|z|$.

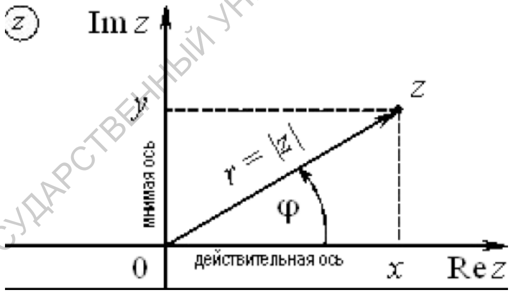
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Аргументом комплексного числа z называется угол от положительной частью оси OX до отрезка Oz. Обозначается φ или $\arg z$.

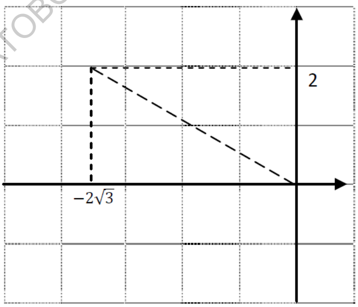
Аргумент z, (с точностью до периода $2\pi k$) находится из условий:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

По сути r и φ – полярные координаты точки:



Например: $z = 2i - 2\sqrt{3}$. Здесь $x = -2\sqrt{3}$, $y = 2$, поэтому



$$r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ z \in \text{II четверти} \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

<u>*Геометрический смысл* $|z_1 - z_2|$</u>. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| =$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \ \text{ – расстояние между точками } z_1 \text{ и } z_2.$$

Поэтому

$|z - z_0| = c$ – множество точек z, удаленных от данной точки z_0 на расстояние c, то есть окружность с центром в z_0 радиуса c. В частности $|z| = c$ – уравнение окружности с центром в начале координат.

$|z - z_1| = |z - z_2|$ – множество точек z, равноудаленных от данных точек z_1 и z_2, то есть серединный перпендикуляр к отрезку $[z_1; z_2]$.

$|z - z_1| + |z - z_2| = c$ – множество точек z, для которых сумма расстояний до данных точек z_1 и z_2 постоянна, то есть эллипс с фокусами в точках z_1 и z_2.

<u>*Сопряженные числа*</u>. Число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным к числу $z = x + iy$.

Например:

$$z = 1 + 4i, \quad \overline{z} = 1 - 4i$$
$$z = 2 - 3i, \quad \overline{z} = 2 + 3i$$
$$z = 2i, \quad \overline{z} = -2i$$
$$z = 3, \quad \overline{z} = 3$$

Сопряженные числа симметричны относительно оси OX.

У сопряженных чисел одинаковые модули, а аргументы противоположны по знаку.

Имеет место равенство: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

<u>*Деление комплексных чисел*</u>. Чтобы выполнить деление двух комплексных чисел, следует выполнить следующие действия:

1) умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю;

2) раскрыть скобки, учитывая, что $i^2 = -1$;

3) привести подобные слагаемые;

4) поделить почленно получившийся числитель на получившийся знаменатель.

Например:

$$\frac{2 + 3i}{4 - i} = \frac{(2 + 3i)(4 + i)}{(4 - i)(4 + i)} = \frac{8 + 12i + 2i + 3i^2}{4^2 - i^2} = \frac{5 + 14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}\, i$$

<u>*Формула Эйлера (определение мнимой степени)*</u>. Для $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Например, $e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

Замечание. Для показательной функции основным определяющим является свойство: $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ Формула Эйлера сохраняет это свойство и для комплексных чисел. В частности

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

<u>*Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.*</u>
Поскольку $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \implies$
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ -тригонометрическая форма комплексного числа
Применяя формулу Эйлера, получаем:
$z = re^{i\varphi}$ - показательная форма комплексного числа

<u>*Возведения комплексного числа в степень.*</u> Для возведения комплексного числа в степень (> 3) часто удобнее использовать показательную форму числа. То есть следует выполнить следующие действия:

1) найти модуль и аргумент числа(период аргумента учитывать не надо),
2) представить число в показательной форме: $z = re^{i\varphi}$,
3) возвести в степень: $z^n = r^n e^{i(\varphi n)}$,
4) применяя формулу Эйлера, перейти к тригонометрической, а затем (если значения тригонометрических функций являются "табличными"), к алгебраической форме числа.

Например: вычислить $(1-i)^{16}$. Здесь $x = 1$, $y = -1$, поэтому

$$r = \sqrt{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{2}, \quad 1 - i \in \text{IV четверти} \implies \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$(1-i)^{16} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{16} = 2^8 e^{-i\,4\pi} = 2^8\Big(\cos(-4\pi) + i\sin(-4\pi)\Big) = 2^8 = 256$$

<u>*Извлечение корня из комплексного числа.*</u> Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа следует выполнить следующие действия:

1) найти модуль и аргумент числа(аргумент записать с периодом $2\pi k$),
2) представить число в показательной форме: $z = re^{i(\varphi+2\pi k)}$,

3) извлечь корень(возвести в степень $1/n$) $z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}$,

4) выписать n значений z_k для $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Для каждого z_k, применяя формулу Эйлера, перейти к тригонометрической, а затем (если имеем "табличные" значения) к алгебраической форме числа.

Например: решить уравнение $z^3 = -8$.
Для числа -8 $r = 8, \varphi = \pi + 2\pi k \implies -8 = 8e^{i(\pi+2\pi k)} \implies$

$$z = \left(8e^{i(\pi+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{3}} = 2e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{3}}$$

$$z_0 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2\big(\cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3})\big) = 2(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$$
$$z_1 = 2e^{\frac{i(\pi+2\pi)}{3}} = 2e^{i\pi} = 2\big(\cos\pi + i\sin\pi\big) = 2(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = -2$$
$$z_2 = 2e^{\frac{i(\pi+4\pi)}{3}} = 2e^{\frac{i5\pi}{3}} = 2\big(\cos(\tfrac{5\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{5\pi}{3})\big) = 2(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3}$$

Замечание. Числа $\sqrt[n]{z}$ являются вершинами правильного n-угольника с центром в начале координат и вписанного в окружность радиуса $|z|$.

Логарифм, синус, косинус комплексного числа. По определению полагают:

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Непосредственным вычислением легко убедится, что приведенные определения сохраняют основные формулы для логарифма, синуса и косинуса (например, для логарифма произведения или частного, логарифма степени, основное тригонометрическое тождество, синус и косинус суммы и разности или двойного угла и т.д.).

Гиперболические синус и косинус определяются так же, как и для действительных чисел:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Пример. Найти z, для которых $e^z = -2$.

Решение. $z = \ln(-2)$. Для числа -2 модуль равен 2, аргумент π. Поэтому $z = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k)$.

Пример. Решить уравнение $\sin z = 2$.

Решение.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \quad \Big/ \cdot 2i \implies e^{iz} - e^{-iz} = 4i \quad \text{замена } e^{iz} = t$$

$$t - \frac{1}{t} = 4i \quad \Big/ \cdot t \quad \implies t^2 - 4it - 1 = 0, \quad \implies t = \frac{4i \pm i2\sqrt{3}}{2} = i(2 \pm \sqrt{3})$$

$$e^{iz} = i(2 \pm \sqrt{3}) \implies iz = \ln\Big(i(2 \pm \sqrt{3})\Big)$$

у чисел $i(2 \pm \sqrt{3})$ модули равны соответственно $2 \pm \sqrt{3}$, аргументы $\frac{\pi}{2}$

$$\implies iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k) \Big/ \cdot (-i)$$

$$z = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + (\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

Задачи к §1. Найти и изобразить на комплексной плоскости числа z, если

1.1) $z^2 + 2z + 4 = 0$;

1.2) $z = \dfrac{(1-i)^{16}(3+2i)}{(2\sqrt{3}+2i)^4} + 4 + 2i$;

1.3) $z^4 + 16 = 0$;

1.4) $e^z = -2i$;

1.5) $\sin z = 3$;

1.6) $|z+1| < |z-3|$;

1.7) $z\overline{z} + i(z - \overline{z}) = 0$;

1.8) $\mathrm{Re}(z - \frac{1}{z}) = 0$.

§2. ПОНЯТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Функция, предел, непрерывность.

Функцией $w = f(z)$ называется правило, по которому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие комплексное число $w = u + iv$. (u и v – действительные функции двух переменных: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$)

Число $w_0 \in \mathbb{C}$ называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0 если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число δ такое, что для всех $z \in \mathbb{C}$ для которых $|z - z_0| < \delta$ будет $|f(z) - w_o| < \varepsilon$

То есть:

$w_0 = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) : \ \ \forall |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_o| < \varepsilon$

Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z)$ непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

<u>*Производная, дифференцируемость, аналитичность*</u>.
Производной функции в точке z называется

$$f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+ \triangle z) - f(z)}{\triangle z}$$

Функция называется дифференцируемой в точке, если в этой точке у нее существует конечная производная.

Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторой области, называется аналитической в этой области.

Замечание. Поскольку определение производной для функции комплексного переменного такое же, как и в действительном анализе, имеют место такие же формулы для нахождения производных:

$$\Big(f(z) + g(z)\Big)' = f'(z) + g'(z)$$

$$\Big(f(z) \cdot g(z)\Big)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

Замечание. Из определения производной следует, что если функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ дифференцируема, то $u(x;y)$ и $v(x;y)$ так же дифференцируемые функции. Однако обратное не верно. Необходимы дополнительные условия (условия Коши-Римана или Даламбера-Эйлера).

<u>*Условия Коши-Римана*</u>. Функция $f(z) = u + iv$ является аналитической тогда и только тогда, когда функции u и v дифференцируемые и удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
(1) Необходимость. Пусть существует

$$f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+ \triangle z) - f(z)}{\triangle z} =$$

$$= \lim_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \frac{u(x+ \triangle x; y+ \triangle y) + iv(x+ \triangle x; y+ \triangle y) - u(x;y) - iv(x;y)}{\triangle x + i \triangle y}$$

Положим в этом равенстве $\triangle y = 0$. Получим:

$$f'(z) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x+ \triangle x; y) + iv(x+ \triangle x; y) - u(x; y) - iv(x; y)}{\triangle x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Положим в равенстве для производной $\triangle x = 0$. Получим:

$$f'(z) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{u(x; y+ \triangle y) + iv(x; y+ \triangle y) - u(x; y) - iv(x; y)}{i \triangle y} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} =$$
$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Приравнивая действительные и мнимые части получившихся выражений, получим условия Коши-Римана.

(2) Достаточность. Пусть выполнены условия Коши-Римана. Значит функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ дифференцируемы, то есть

$$\left.\begin{aligned} \triangle u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\triangle y + o(\triangle x, \triangle y) \\ \triangle v &= \frac{\partial v}{\partial x}\,\triangle x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\triangle y + o(\triangle x, \triangle y) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\triangle f = \triangle u + i\,\triangle v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\triangle x + \left(\underset{-\frac{\partial v}{\partial x}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial u}{\partial y}}} + i\underset{\frac{\partial u}{\partial x}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial v}{\partial y}}}\right)\triangle y + o(\triangle x, \triangle y) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\triangle x + \left(i^2\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\triangle y + o(\triangle x, \triangle y) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\triangle x + i\,\triangle y) + o(\triangle x, \triangle y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\triangle z + o(\triangle z)$$

$$\Longrightarrow \frac{\triangle f}{\triangle z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(\triangle z)}{\triangle z} \Longrightarrow \lim_{\triangle z \to 0}\frac{\triangle f}{\triangle z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

то есть существует $f'(z)$.

<u>*Условия Коши-Римана в полярных координатах*</u>.

Функция $f(z) = u + iv$ является аналитической тогда и только тогда, когда функции u и v дифференцируемые и удовлетворяют условиям

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\varphi \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \underset{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial v}{\partial x}}}(-r\sin\varphi) + \underset{\frac{\partial u}{\partial x}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial v}{\partial y}}}\cdot r\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Longrightarrow r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

Аналогично:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot r\cos\varphi \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \underset{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial v}{\partial x}}}\cdot\cos\varphi + \underset{\frac{\partial u}{\partial x}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial v}{\partial y}}}\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

<u>*Гармонические функции, связь с аналитическими*</u>. Функцией, гармонической в области D называется действительная функция двух действительных переменных $u(x;y)$, имеющая в этой области непрерывные вторые частные производные и удовлетворяющая дифференциальному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Замечание. В математике изучают и гармонические функции трех переменных $u(x;y;z)$, удовлетворяющие уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, но в этом курсе они рассматриваться не будут.

Связь между гармоническими и аналитическими функциями выражается следующими двумя теоремами:

ТЕОРЕМА. Действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ являются в этой области гармоническими функциями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции u и v удовлетворяют условиям Коши-Римана. Продифференцируем первое условие по x, а второе по y, получим:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{matrix} \implies \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} \end{matrix} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

то есть u – гармоническая функция.

Аналогично продифференцируем первое условие Коши-Римана по y, а второе по x, получим:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{matrix} \implies \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{matrix} \implies \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

то есть v – гармоническая функция.

Две гармонические функции u и v, связанные условиями Коши-Римана называются сопряженными.

ТЕОРЕМА. Для любой функции $u(x;y)$, гармонической в односвязной области D можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x;y)$, причем единственную, с точностью до произвольного слагаемого.

(Док-во см., например [1], стр.188-189)

Две приведенные теоремы позволяют сформулировать утверждение:

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы функция $a(x;y)$ являлась действительной или мнимой частью аналитической функции, необходимо и достаточно, чтобы она имела непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяла уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}=0.$$

Восстановление аналитической функции. Условия Коши-Римана позволяют восстановить аналитическую функцию по ее известной действительной или мнимой части. Алгоритм решения этой задачи разберем на примере.

ЗАДАЧА. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по ее мнимой части $v(x;y)=e^x\sin y-2x$, при условии $f(0)=2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Проверим, является ли заданная функция гармонической (удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \Big((e^x \sin y - 2x)'_x \Big)'_x = \Big(e^x \sin y - 2 \Big)'_x = e^x \sin y \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \Big((e^x \sin y - 2x)'_y \Big)'_y = \Big(e^x \cos y \Big)'_y = -e^x \sin y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

2) Подставим заданную функцию в первое условие Коши-Римана и максимально упростим получившееся равенство.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\big(e^x \sin y - 2x\big) \implies$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \implies$$

$$u = \int e^x \cos y \, dx = \cos y \int e^x \, dx = \cos y \cdot e^x + C(y)$$

(По основному свойству первообразной $C(y)$ – некоторое слагаемое, зависящее от y, но не зависящее от переменной интегрирования.)

3) Подставим заданную функцию и результат из предыдущего пункта во второе условие Коши Римана и максимально упростим получившееся равенство.

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(e^x \cos y + C(y)\big) = -\frac{\partial}{\partial x}\big(e^x \sin y - 2x\big) \implies$$

$$-e^x \sin y + C'(y) = -e^x \sin y + 2 \implies$$

$$C'(y) = 2 \implies$$

$$C(y) = \int 2 \, dy = 2y + C$$

4) Запишем функцию $f(z)$ преобразуем получившееся выражение:

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = (e^x \cos y + 2y + C) + i(e^x \sin y - 2x) = \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) - 2(ix - y) + C = e^x e^{iy} - 2(ix + i^2 y) + C = \\ &= e^{x+iy} - 2i(x + iy) + C = e^z - 2iz + C \end{aligned}$$

5) Используем условие $f(0) = 2$ чтобы найти C:

$$f(0) = 1 + C = 2 \implies C = 1$$

ОТВЕТ: $f(z) = e^z - 2iz + 1$.

Задачи к §2. Восстановить аналитическую функцию, если известно:

$$2.1)\ v = x^2 - y^2 + 2xy,\ f(0) = 0$$
$$2.2)\ u = x^2 - y^2 + 2x,\ f(0) = 1$$
$$2.3)\ u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3,\ f(0) = 0$$

Указание. в задачах 2.5 и 2.6 следует воспользоваться условиями Коши-Римана в полярных координатах.

$$2.4)\ v = r(\ln r \sin\varphi + \varphi\cos\varphi),\ f(1) = 0$$
$$2.5)\ u = (r + \tfrac{1}{r})\cos\varphi,\ f(1) = 2$$

Указание. в задачах 2.6 и 2.7 вычисления будут проще, если сделать замену на полярные переменные: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$2.6)\ v = \tfrac{y}{x^2+y^2},\ f(2) = 0$$
$$2.7)\ u = \tfrac{x}{x^2+y^2} - 2y,\ f(1) = 0$$

Указание. В задачах 2.8 – 2.12 следует сначала найти вспомогательную функцию $g(z) = \ln f(z)$, для которой
$u = \operatorname{Re} g(z) = \ln|f(z)|$,
$v = \operatorname{Im} g(z) = \arg f(z)$,
а потом выразить $f(z) = e^{g(z)}$

$$2.8)\ |f| = (x^2 + y^2)e^x,\ f(1) = e$$
$$2.9)\ |f| = r^2\sqrt{2},\ f(0) = 0$$
$$2.10)\ \arg f = xy, f(0) = 1$$
$$2.11)\ |f| = e^{r^2\cos 2\varphi},\ f(0) = 1$$
$$2.12)\ \arg f = \varphi + r\sin\varphi,\ f(1) = e$$

§3. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Понятие интеграла. Пусть Г – некоторая кривая на комплексной плоскости. Разобьем эту кривую на части последовательно расположенными точками точками $z_0,\ z_1,\ z_2, ..., z_n$, причем z_0 совпадает с началом, а z_n с концом кривой. На каждой k-ой части выберем точку ξ_k и составим интегральную сумму:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Если существует конечный

$$\lim_{\max\limits_k |z_{k+1}-z_k| \to 0} S_n,$$

который не зависит ни от способа разбиения кривой, ни от выбора точек ξ_k, то он называется интегралом от функции f по кривой Г и обозначается

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$$

Сведение к криволинейному интегралу. В определении интеграла обозначим

$$z_{k+1} - z_k = \triangle x_k + i\ \triangle y_k$$
$$f(\xi_k) = u_k + iv_k$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n}(u_k + iv_k)(\triangle x_k + i\ \triangle y_k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(u_k\ \triangle x_k - v_k\ \triangle y_k) + i\sum_{k=0}^{n}(u_k\ \triangle y_k + v_k\ \triangle x_k),$$

и по определению криволинейного интеграла второго типа получаем

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \int\limits_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\int\limits_\Gamma u\,dy + v\,dx.$$

Следовательно, свойства интеграла от функции комплексного переменного аналогичны свойствам криволинейного интеграла второго типа. В частности, при изменении направления кривой интеграл меняет знак.

Теорема Коши для односвязной области. Если f аналитическая в односвязной области D, то для любой замкнутой спрямляемой кривой $\Gamma \in D$

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого утверждения достаточно трудоемко (см., например [3].) Но если наложить дополнительное условие, что $f'(z)$ не только существует, но и непрерывна, доказательство становится элементарным. Докажем теорему с этим дополнительным условием.

Воспользуемся представлением интеграла комплексной функции через криволинейные интегралы второго типа:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\Gamma} u\,dy + v\,dx$$

Пусть $\vec{p}$ – векторная функция с координатами $(u; -v)$,

$$\mathrm{rot}\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & -v & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,\frac{\partial v}{\partial z} + \vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \vec{k}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

(Первые два слагаемых равны нулю, так как функции u и v зависят от третьей координаты z, третье слагаемое равно нулю так как f аналитическая, а значит выполнены условия Коши-Римана.)

Аналогично, пусть $\vec{q}$ – векторная функция с координатами $(v; u)$. Тогда

$$\mathrm{rot}\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v & u & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \vec{j}\,\frac{\partial v}{\partial z} + \vec{k}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

Это означает, что функции $\vec{p}$ и $\vec{g}$ задают потенциальные поля. А в потенциальном поле интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю. Следовательно и исходный интеграл так же равен нулю.

<u>*Следствие из теоремы Коши.*</u> Интеграл от аналитической функции не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от его начала и конца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точки A и B соединены кривыми Γ_1 и Γ_2, лежащими в области аналитичности функции f. Рассмотрим замкнутый контур: от A к B по Γ_1, затем от B к A по Γ_2. Тогда

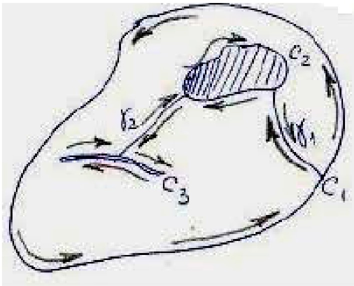
$$\int\limits_{\Gamma_1(\mathrm{AB})+\Gamma_2(\mathrm{BA})} f(z)\,dz = 0 \implies$$

$$\int\limits_{\Gamma_1(\mathrm{AB})} f(z)\,dz + \int\limits_{\Gamma_2(\mathrm{BA})} f(z)\,dz = 0 \implies$$

$$\int\limits_{\Gamma_1(\mathrm{AB})} f(z)\,dz = -\int\limits_{\Gamma_2(\mathrm{BA})} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_2(AB)} f(z)\,dz$$

<u>*Теорема Коши для многосвязной области.*</u> Если функция f аналитична в области D, непрерывна в $\overline{D}$, то ее интеграл по границе области, проходимой так, чтобы область все время оставалась слева, равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граница D состоит из односвязных кусков C_1, C_2, ... C_n. Проведем разрезы γ_1, γ_2, ... , γ_{n-1}, обращающие область D в односвязную область D^* с границей $\Gamma = \mathrm{C}_1 \cup ... \cup \mathrm{C}_n \cup \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_{n-1}$, причем γ_1, γ_2, ... , γ_{n-1} проходятся дважды в противоположных направлениях, а значит интегралы по этим разрезам взаимно уничтожаются. То есть в интеграле по кривой Γ остается только интеграл по границе области D и по теореме Коши для односвязной области (а Γ – граница односвязной области D^*) он равен нулю.



<u>*Формула Коши.*</u> Если функция f аналитична в области D, непрерывна в $\overline{D}$, то в каждой точке области D существуют производные f, причем имеет место формула:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(t)}{t-z} dt$$

Док-во см., например в [1]

Подчеркнем, что из теоремы следует, что если функция имеет производную, то она бесконечно дифференцируема.

Теорема Морера. Если функция f непрерывна в односвязной области D и интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в области D, равен нулю, то функция f аналитична в D.

(Теорема Морера является обратной к теореме Коши.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$$

(Из условия теоремы следует, что интеграл не зависит от пути интегрирования, а только от начальной и конечной точки, то есть при фиксированном z_0 действительно определяет функцию от z.)

$$\frac{F(z+\triangle z) - F(z)}{\triangle z} = \frac{1}{\triangle z}\Bigg[\int\limits_{z_0}^{z+\triangle z} f(t)\,dt - \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt\Bigg] = \frac{1}{\triangle z}\int\limits_{z}^{z+\triangle z} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\triangle z}\int\limits_{z}^{z+\triangle z} f(t) - f(z)\,dt + \frac{1}{\triangle z}\int\limits_{z}^{z+\triangle z} f(z)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\triangle z}\int\limits_{z}^{z+\triangle z} f(t) - f(z)\,dt + \frac{f(z)}{\triangle z}\int\limits_{z}^{z+\triangle z} dt = \frac{1}{\triangle z}\int\limits_{z}^{z+\triangle z} f(t) - f(z)\,dt + f(z)$$

Так как

$$\Big|\frac{1}{\triangle z}\int\limits_{z}^{z+\triangle z} f(t) - f(z)\,dt\Big| \le \frac{\max|f(t) - f(z)|}{|\triangle z|}\ \Big|\int\limits_{z}^{z+\triangle z} dt\Big| =$$

$$= \max|f(t) - f(z)| \to 0 \text{ при } t \to z$$

получаем, что

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{F(z+\triangle z) - F(z)}{\triangle z} = F'(z) = f(z)$$

Таким образом, $F(z)$ – аналитическая функция, $f(z)$ – производная аналитической функции, а так как аналитическая функция бесконечно дифференцируема, существует и $f'(z)$, то есть f аналитическая функция.

§4. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Понятие конформного отображения.

• Функцию комплексного переменного $w = f(z)$ можно рассматривать как отображение плоскости $z = x + iy$ на плоскость $w = u + iv$. Т.е. каждая функция задает некоторое отображение.

• Пусть Γ_1 и Γ_2 – любые кривые, проходящие через точку z_0, а C_1 и C_2 – образы этих кривых при рассматриваемом отображении, которые проходят через точку $w_0 = f(z_0)$. Если угол между Γ_1 и Γ_2 в точке z_0 и по величине, и по направлению равен углу между C_1 и C_2 в точке $w_0 = f(z_0)$, то говорят, что в точке z_0 отображение $w = f(z)$ обладает свойством консерватизма углов.

То есть отображение $w = f(z)$ обладает в точке z_0 свойством консерватизма углов, если угол между любыми двумя кривыми, проходящими через точку z_0, равен и по величине, и по направлению углу между их образами.

• Обозначим $w_0 = f(z_0)$, $w_0 + \triangle w = f(z_0 + \triangle z)$. Тогда $|\triangle z|$ – расстояние между точками z_0 и $z_0 + \triangle z$, а $|\triangle w|$ – расстояние между их образами. Отношение этих расстояний $\frac{|\triangle w|}{|\triangle z|}$ характеризует коэффициент растяжения или сжатия в окрестности точки z_0 при данном отображении.

Говорят, что в точке z_0 отображение $w = f(z)$ обладает свойством постоянства растяжений, если в достаточно малой окрестности z_0 коэффициент $\frac{|\triangle w|}{|\triangle z|}$ равен одному и тому же числу, т.е. не зависит от направления $\triangle z$.

• Взаимно-однозначное (или однолистное) отображение $w = f(z)$, обладающее свойством консерватизма углов и постоянством растяжений называется конформным.

Замечание. Из определения следует, что при конформном отображении область отображается на область, граница области – на границу образа, причем направление обхода границы сохраняется, т.е. если при движении z по границе области область оставалась слева, то и при движении $w = f(z)$ по границе образа область будет оставаться слева.

Связь конформности с аналитичностью.

ТЕОРЕМА. Отображение $w = f(z)$ является конформным тогда и только тогда, когда функция f является однозначной аналитической функцией и $f'(z) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(1) Достаточность. Отображение по условию взаимно однозначно.

Пусть функция f аналитическая. Поскольку

$$f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \left|\frac{\triangle w}{\triangle z}\right| e^{i \arg \frac{\triangle w}{\triangle z}} = \lim_{\triangle z \to 0} \left|\frac{\triangle w}{\triangle z}\right| e^{i(\arg \triangle w - \arg \triangle z)}$$

то из существования производной следует

а) существование $\lim\limits_{\triangle z\to 0}\left|\frac{\triangle w}{\triangle z}\right|$, а значит выполнен принцип постоянства растяжений;

б) существование $\lim\limits_{\triangle z\to 0}(\arg\triangle w-\arg\triangle z)$, а значит выполнение принципа консерватизма углов.

(2) Необходимость. Пусть отображение конформно.

Чтобы выполнялось свойство консерватизма углов, необходимо, чтобы при отображении $w=f(z)$ все кривые поворачивались на один и тот же угол, то есть

$$\lim_{\triangle z\to 0}\arg\triangle w-\lim_{\triangle z\to 0}\arg\triangle z=\mathrm{const}$$

а значит существует $\lim\limits_{\triangle z\to 0}\arg\frac{\triangle w}{\triangle z}$

Чтобы выполнялось свойство постоянства растяжений, необходимо, чтобы существовал $\lim\limits_{\triangle z\to 0}\left|\frac{\triangle w}{\triangle z}\right|$.

Значит должен существовать $\lim\limits_{\triangle z\to 0}\left|\frac{\triangle w}{\triangle z}\right|\,e^{i\arg\frac{\triangle w}{\triangle z}}=f'(z)$.

Чтобы отображение $\begin{cases}u=u(x;y)\\ v=v(x;y)\end{cases}$ было взаимно-однозначным, необходимо, чтобы

$$\frac{D(u;v)}{D(x;y)}\neq 0\implies\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0\implies\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\neq 0$$

с учетом условий Коши-Римана

$$\implies\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\neq 0$$

а так как $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial u}{\partial y}\implies f'(z)\neq 0$.

<u>*Основная задача конформного отображения:*</u> заданы две плоские области. Требуется найти конформное отображение, отображающее первую область на вторую.

Одним из примеров необходимости применения этой задачи может быть следующая ситуация. Предположим, что изучается некоторый процесс, протекающий в плоской пластине D (например, нагревание). Если пластина имеет сложную конфигурацию, то возникают технические сложности для построения математической модели, описывающей этот процесс и ее решение. Проведем замену переменной так, чтобы в новых переменных образ области D имел простую конфигурацию (например, единичная окружность). Решив задачу для этой простой области и выполнив обратную замену, получим решение и для исходной области D.

Чтобы предложенный метод был корректным, необходимо, во-первых, чтоб отображение было взаимно-однозначным, во-вторых, чтобы в окрестности каждой точки не было "глобальных" изменений, то есть "квадратик" отображался на "почти квадратик". То есть отображение должно обладать свойствами консерватизма углов и постоянства растяжений. Следовательно, необходимо конформное отображение.

То, что эта задача имеет решение, доказал Б.Риман (1851 г.):

ТЕОРЕМА РИМАНА. Каковы бы ни были односвязные области D и D^*, границы которых содержат более двух точек, для любых $z_0 \in D$, $w_0 \in D^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ существует единственное конформное отображение $w = f(z)$ области D на D^* такое, что $f(z_0) = w_0$ и $f'(z_0) = \alpha$. (Без док-ва)

4.1. Дробно-линейная функция. $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$.

(Если $ad - bc = 0$, то $w = \text{const}$.)

Аналитичность и конформность.

• Поскольку при разных значениях переменной z получим разные значения функции w, дробно-линейная функция однолистна во всей комплексной плоскости.

• Нетрудно сосчитать $w'(z) = \dfrac{ad - bc}{(cz+d)^2}$ – существует всюду, кроме точки $z = -d/c$ (точка $z = -d/c$ отображается в ∞).

• Можно доказать, что дробно-линейная функция – единственная функция, которая осуществляет конформное отображение всей комплексной плоскости на всю комплексную плоскость.

• Обратной к дробно-линейной функции является так же дробно-линейная функция (для доказательства достаточно выразить z через w).

Представление композицией отображений. Выполнив деление "уголком", можно получить представление

$$w = a^* + \frac{b^*}{cz+d}$$

Значит, дробно-линейная функция является комбинацией более простых отображений:

1) линейной функции $w_1 = cz + d$;

2) отображения $w_2 = \dfrac{1}{w_1}$;

3) линейной функции $w_3 = a^* + b^* w_2$.

<u>*Линейная функция.*</u> Функция $w = az + b$ может рассматриваться как комбинация двух отображений:

• $w = z + b$ – параллельный перенос плоскости на вектор, соответствующий числу b.

• $w = az$. Поскольку $w = |a|e^{i\arg a}|z|e^{i\arg z} = |a||z|e^{i(\arg a + \arg z)}$, получаем увеличение/уменьшение модуля (т.е. растяжение/сжатие относительно нуля) в $|a|$ раз и увеличение/уменьшение аргумента (т.е. поворот относительно начала координат) на угол $\arg a$.

В частности $w = iz$ – поворот на 90^o против часовой стрелки;
$w = -iz$ – поворот на 90^o по часовой стрелке;
$w = -z$ – поворот на 180^o.

<u>*Функция $w = 1/z$.*</u>

• *Действительная и мнимая части отображения.* Пусть, как обычно, $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда

$$w = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \implies$$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}, \text{ причем } u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

• *Алгоритм нахождения образа области при отображении $w = 1/z$*

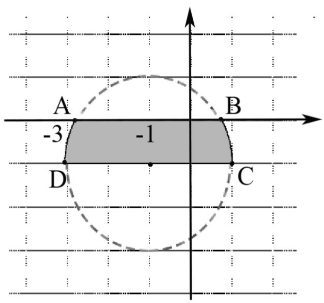
1) Начертить исходную область и записать уравнение границы (или частей границы, если граница состоит из нескольких кривых) через x и y.

2) Поделить полученное уравнение на $x^2 + y^2$.

3) Используя приведенные выше формулы, перейти к переменным u и v – это уравнение границы образа области.

4) Начертить полученную границу и определить с какой стороны от нее находится образ области. Так как при данном отображении $0 \to \infty$, а $\infty \to 0$. Следовательно, если исходная область содержала 0, то ее образ должен содержать ∞, а если исходная область содержала ∞, то ее образ должен содержать 0. Или если при направлении движения от граничной точки A к B область находилась слева, то и при движении от образа A к образу B область должна оставаться справа.

ПРИМЕР. Найти образ области $D : \{|z + 1 + i| < 2,\ -1 < \operatorname{Im} z < 0\}$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$.



РЕШЕНИЕ. Изобразим область D, обозначим A, B, C, D "угловые" точки границы области и рассмотрим отдельно части границы.

• AB – часть прямой $y = 0 \ \Big| : (x^2 + y^2)$

$$\frac{y}{x^2+y^2} = 0 \implies v = 0 \text{ (ось абсцисс).}$$

• CD – часть прямой $y=-1 \,\Big|\, : (x^2+y^2)$

$$\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{x^2+y^2} \implies v = u^2+v^2 \implies u^2+(v-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4} \quad -$$

уравнение окружности с центром $(0;\frac{1}{2})$ радиуса $\frac{1}{2}$ (окр.1).

• AD и BC – часть окружности $(x+1)^2+(y+1)^2=4 \implies$

$$x^2+y^2+2x+2y=2 \,\Big|\, : (x^2+y^2)$$

$$1+\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{2}{x^2+y^2} \implies 1+2u-2v=2(u^2+v^2) \implies$$

$$\frac{1}{2}=u^2-u+v^2+v \implies (u-\tfrac{1}{2})^2+(v+\tfrac{1}{2})^2=1 \;-$$

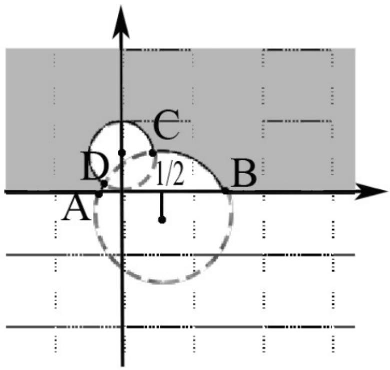
уравнение окружности с центром $(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ радиуса 1 (окр.2).

• Изобразим все полученные линии (прямая $v=0$, окр.1 и окр.2) и расставим "угловые" точки:

$$\begin{array}{ccc} A,B = (\text{окружность}) & \cap & (\text{прямая } y=0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{окр.2} & & v=0 \end{array}$$

$$\implies \text{образы } A,B = (\text{окр.2}) \cap (\text{прямая } v=0),$$

причем A – действительное отрицательное число переходит в отрицательное число, а B – действительное положительное число отображается на положительное число.



$$\begin{array}{ccc} C,D = (\text{окружность}) & \cap & (\text{прямая } y=-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{окр.2} & & \text{окр.1} \end{array}$$

$$\implies \text{образы } C,D = (\text{окр.2}) \cap (\text{окр.1}),$$

D "со стороны" A, а C "со стороны" B.

• Определимся со штриховкой. На исходной области при движении от B к C область оставалась справа, значит и для новой области при движении от B к C область должна быть справа ("раскрашиваем все, пока "не упремся" в границы).

Круговое свойство дробно-линейного отображения.

ТЕОРЕМА. При дробно-линейном отображении окружность или прямая отображается на окружность или прямую.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дробно-линейная функция является комбинацией линейной функции и функции $w = 1/z$. Очевидно, что линейное отображение, сводящееся к повороту и растяжению/сжатию комплексной плоскости окружность переводит в окружность и прямую в прямую.

Изучим отображение $w = 1/z$. Рассмотрим уравнение

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0(a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

Если $a \neq 0$, то это уравнение окружности, если $a = 0$, то уравнение прямой.

Поделив все уравнение на x^2+y^2, и перейдя к переменным u и v, получим уравнение

$$a + bu - cv + d(u^2 + v^2) = 0.$$

Это так же уравнение окружности (если $d \neq 0$) или прямой (если $d = 0$).

Сохранение симметричности. Две точки, симметричные относительно прямой[1] или окружности[2] при дробно-линейном отображении отображаются на точки, симметричные относительно образа этой прямой или окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно из геометрии, если точки симметричны относительно C (C – прямая или окружность). То любая окружность, проходящая через эти точки ортогональна C. А поскольку конформное отображение сохраняет углы между кривыми, то и образы окружностей, проходящие через образы точек, будут ортогональны образу C. А значит симметричные относительно C точки отображаются на точки, симметричные относительно образа C.

Свойство трех точек. Пусть заданы три точки и их образы при некотором отображении: $w_1 = w(z_1)$, $w_2 = w(z_2)$, $w_3 = w(z_3)$. Существует единственная дробно-линейная функция, осуществляющая данное отображение.

[1]Точки A и B называются симметричными относительно прямой, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AB.

[2]Точки A и B называются симметричными относительно окружности с центром в O радиуса R, если они лежат на одном луче с началом в O и $OA \cdot OB = R^2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив заданные условия в выражение для функции $w = \frac{az+b}{cz+d}$, после несложных преобразований получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} az_1 + b - cz_1w_1 - dw_1 = 0 \\ az_2 + b - cz_2w_2 - dw_2 = 0 \\ az_3 + b - cz_3w_3 - dw_3 = 0 \end{cases}$$

Матрица этой системы

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & 1 & -z_1w_1 & -w_1 \\ z_2 & 1 & -z_2w_2 & -w_2 \\ z_3 & 1 & -z_3w_3 & -w_3 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 3, а значит система имеет однопараметрическое решение:

$a = a_0t, \quad b = b_0t, \quad c = c_0t, \quad d = d_0t$

и после подстановки, получаем единственно возможную дробно-линейную функцию $w = \frac{a_0z+b_0}{c_0z+d_0}$, осуществляющую заданное отображение.

Нахождение образа области при дробно-линейном отображении.

1) Представим функцию $w = \frac{az+b}{cz+d}$ в виде $w = a^* + \frac{b^*}{cz+d}$.

2) Запишем последовательную комбинацию отображений:

$$w_1 = cz,$$
$$w_2 = w_1 + d,$$
$$w_3 = 1/w_2,$$
$$w_4 = b^*w_3,$$
$$w_5 = w_4 + a^*.$$

3) Применим к исходной области отображение w_1, к полученной в результате этого отображения области – отображение w_2 и т.д.

ПРИМЕР. Найти образ области $D: \{|z+1| < 2, \; 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ при отображении $w = \dfrac{z-4i}{z-i}$.

РЕШЕНИЕ. Представим функцию в виде композиции простых отображений. Поскольку

$$\begin{array}{r|l} z - 4i & \underline{\;z - i\;} \\ \underline{z - i} & \quad 1 \\ -\,3i & \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad w = 1 - \frac{3i}{z-i},$$

$w_1 = z - i$ – сдвиг на 1 вниз;

$w_2 = 1/w_1$;

$w_3 = -3iw_2$ – растяжение в 3 раза и поворот на 90^o по часовой стрелке;

$w_4 = w_3 + 1$ – сдвиг на 1 вправо.

Отображения w_1, w_3, w_4 элементарные, а w_2 – то же самое отображение, которое было рассмотрено в предыдущем примере.

Изобразим последовательно все отображения:

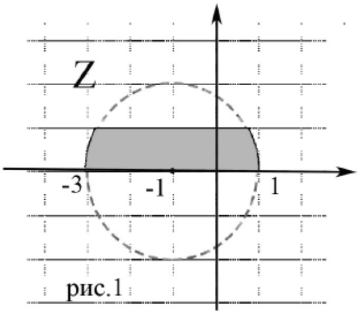


рис.1

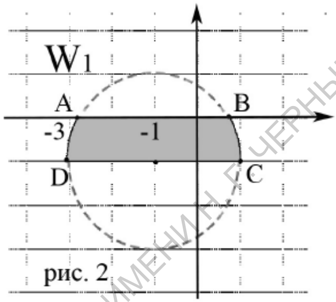


рис. 2

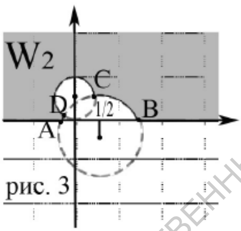


рис. 3

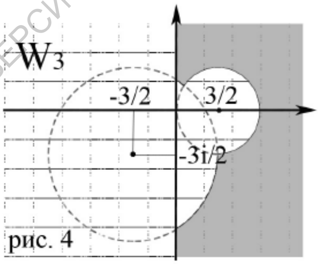


рис. 4

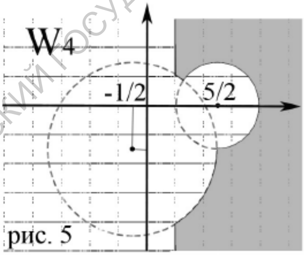


рис. 5

Задачи к п. 4.1 Найти образ области D при отображении функцией $w = f(z)$:

4.1.1. $D : \{|z-1| < 2,\ \operatorname{Re} z > 0\},\ w = \frac{z+1}{z-2}$

4.1.2. $D : \{|z+1| > 2,\ \operatorname{Im} y < 0\},\ w = \frac{z-1}{2z-6}$

4.1.3. $D : \{-1 < \operatorname{Re} z < 1\},\ w = \frac{z}{z-2}$

4.1.4. $D : \{-1 < \operatorname{Im} z < 1\},\ w = \frac{4z}{z+1}$

4.1.5. $D : \{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ w = \frac{1-z}{1+z}$

4.1.6. $D : \{|z-1| < 2,\ |z+1| < 2\},\ w = \frac{z+2}{1-z}$

4.2. Степенная функция $w = z^p$.

Аналитичность и конформность. Функция, очевидно, аналитическая. Рассмотрим условие однолистности: $w_1 \neq w_2$ при $z_1 \neq z_2$.

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то условие однолистности означает $r_1^p e^{i\varphi_1 p} \neq r_2^p e^{i\varphi_2 p} \implies \varphi_1 p \neq \varphi_2 p + 2\pi k \implies \varphi_1 - \varphi_2 \neq \frac{2\pi k}{p}$. Следовательно, областью однолистности может служить угол с вершиной в нуле величиной $\frac{2\pi k}{p}$.

Функция $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда $z^n = r^n e^{in\varphi}$, следовательно, при отображении $w = z^n$

- окружность $|z| = a$ отображается на окружность $|w| = a^n$;
- луч $\arg z = \alpha$ отображается на луч $\arg w = n\alpha$.

Функция $w = z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Функция $w = \sqrt[n]{z}$ является обратной к функции $w = z^n$, следовательно, осуществляет обратные отображения:

- окружность $|z| = a$ отображается на окружность $|w| = \sqrt[n]{a}$;
- луч $\arg z = \alpha + 2\pi k$ отображается на луч $\arg w = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, ... n-1$

(При извлечении корня период надо учитывать обязательно, $w = \sqrt[n]{z}$ – n-значная функция, т.е. получается n образов).

Функция $w = z^2$. (Частный случай функции $w = z^n$.)

Пусть $z = x + iy$. Тогда $w = x^2 + 2ixy - y^2$, то есть $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Следовательно, при этом отображении

- гипербола $x^2 - y^2 = a$ отображается на вертикальную прямую $u = a$;
- гипербола $y = \frac{a}{x}$ отображается на горизонтальную прямую $v = 2a$;
- прямая $x = a$ отображается на параболу с ветвями влево $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$;
- прямая $y = a$ отображается на параболу с ветвями вправо $u = \frac{v^2}{4a^2} - a^2$;

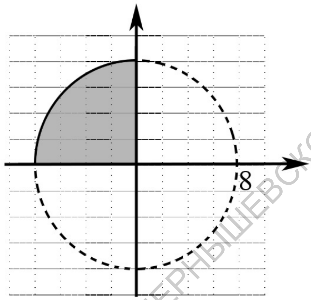
и, как и для общего случая,

- окружность $|z| = a$ отображается на окружность $|w| = a^2$;
- луч $\arg z = \alpha$ отображается на луч $\arg w = 2\alpha$.

<u>*Нахождение образа области.*</u>

ПРИМЕР. Найти образ области $D : \{|z| < 8,\ \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении функцией $w = \sqrt[3]{z}$.

РЕШЕНИЕ. Изобразим область D. Найдем образы частей границы области:



AB – луч $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, отображается на лучи

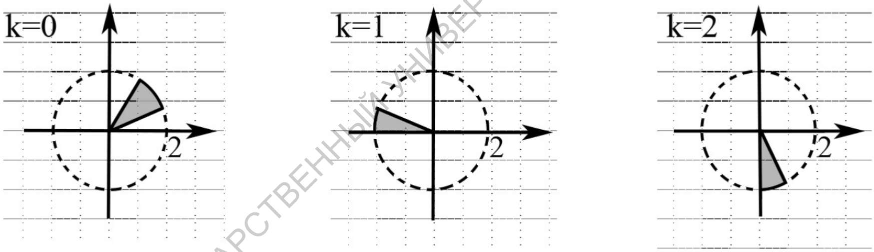
$$\phi = \frac{\varphi}{3} = \frac{\pi/2+2\pi k}{3} = \frac{\pi+4\pi k}{6};$$

AC – луч $\varphi = \pi + 2\pi k$, отображается на лучи

$$\phi = \frac{\varphi}{3} = \frac{\pi+2\pi k}{3};$$

BC – окружность радиуса 8, отображается на окружность радиуса $\sqrt[3]{8} = 2$.

Построим образы всех границ:
для $k = 0$ лучи под углами $\pi/6$ и $\pi/3$,
для $k = 1$ лучи под углами $5\pi/6$ и π,
для $k = 2$ лучи под углами $3\pi/2$ и $5\pi/3$,
(берем три значения, так как корень третьей степени).



Задачи к п. 4.2 Найти образ области D при отображении функцией $w = f(z)$:

4.2.1. $D : \{|z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\},\ w = z^3$

4.2.2. $D : \{|z| > \frac{1}{2},\ \operatorname{Re} z > 0\},\ w = z^2$

4.2.3. $D : \{|z| < 4,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\},\ w = \sqrt{z},\ w(-1) = -i$

4.2.4. $D : \{|z| > 8,\ 0 < \arg z < \pi\},\ w = \sqrt[3]{z}$

4.3. Показательная функция $w = e^z$.

<u>*Действительная и мнимая части.*</u> Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

В частности, отсюда следует, что $w = e^z$ – периодическая функция с периодом $2\pi ki$.

<u>*Аналитичность и конформность.*</u> Легко проверить, что для функций $u = e^x \cos y$ и $v = e^x \sin y$ выполняются условия Коши-Римана, а значит Функция $w = e^z$ аналитическая.

Рассмотрим условие однолистности. Поскольку $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $w_1 \neq w_2$ при $z_1 \neq z_2$ если $z_1 \neq z_2 + 2\pi k$. То есть функция однолистна в горизонтальной полосе шириной 2π.

<u>*Основные отображения.*</u>

• Горизонтальная прямая $y = a$ отображается на луч.
Действительно. Рассмотрим горизонтальную прямую: $y = a$. Тогда

$$\begin{cases} u = e^x \cos a \\ v = e^x \sin a \end{cases} \Longrightarrow \frac{v}{u} = \operatorname{tg} a \Longrightarrow v = u \operatorname{tg} a \text{ – уравнение прямой,}$$

причем u и v совпадают по знаку с $\cos a$ и $\sin a$ соответственно, то есть получим не всю прямую, а только луч, выходящий из начала координат.

• Вертикальная прямая $x = a$ отображается на окружность $u^2 + v^2 = e^{2a}$.
Действительно. Рассмотрим вертикальную прямую $x = a$. Тогда

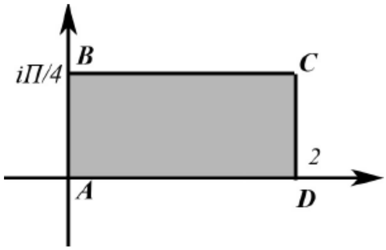
$$\begin{cases} u = e^a \cos y \\ v = e^a \sin y \end{cases} \Longrightarrow u^2 + v^2 = e^{2a} \text{ – окружность с центром (0;0), радиуса } e^a$$

<u>*Нахождение образа области.*</u>

Для нахождения образа области, граница которой состоит из горизонтальных и вертикальных отрезков, следует для каждой части границы записать значения переменных x и y, а затем подставить эти значения в выражения для u и v.

ПРИМЕР. Найти образ области $D : \{0 < \operatorname{Re} z < 2,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi/4\}$ при отображении функцией $w = e^z$.

РЕШЕНИЕ. Изобразим область D. Найдем образы частей границы области:



AD:

$$\begin{cases} x \in (0; 2) \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = e^a \cos 0 = e^a \in (1; e^2) \\ v = e^a \sin 0 = 0 \end{cases}$$

– отрезок действительной оси.

BC:

$$\begin{cases} x \in (0;2) \\ y = \pi/4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = e^a \cos\frac{\pi}{4} = e^a \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \\ v = e^a \sin\frac{\pi}{4} = e^a \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \end{cases}, \quad v = u$$

– луч, лежащий в первой четверти

AB:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \in (0;\pi/4) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = \cos y \\ v = \sin y \end{cases}, \quad u^2 + v^2 = 1$$

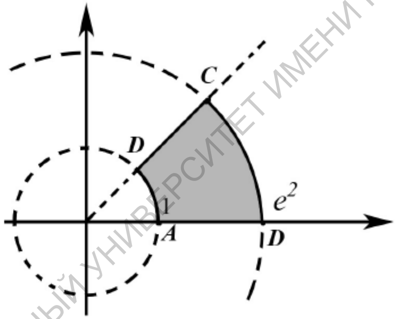
– единичная окружность.

DC:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y \in (0;\pi/4) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = e^2 \cos y \\ v = e^2 \sin y \end{cases}, \quad u^2 + v^2 = e^4$$

– окружность радиуса e^2.

Получили область:



Задачи к п. 4.3. Найти образ области D при отображении функцией $w = f(z)$:

4.3.1. $D : \{-1 < \operatorname{Re} z < 2,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2},\}, w = e^z$

4.3.2. $D : \{\operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2},\},\ w = e^{2z}$

4.3.3 $D : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\},\ w = e^{iz}$

4.4. Логарифмическая функция $w = \ln z$.

Действительная и мнимая части. Пусть $z = re^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$.

Тогда $u = \ln r$, $v = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, $w = \ln z$ – многозначная функция, имеет бесконечно много ветвей, получаемых при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Логарифмическая функция является обратной к показательной (следовательно, выполняет обратные отображения).

<u>*Основные отображения*</u>.

• Отображение окружности $|z| = a$.
В этом случае, т.к.

$$\begin{cases} r = a \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{cases}, \text{ получаем } \begin{cases} u = \ln a \\ v \in [0 + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

– при каждом целом k (то есть одном обороте окружности) это вертикальный отрезок длиной 2π (окружность, пройденная бесконечное количество раз, дает всю вертикальную прямую $u = \ln a$).

• Отображение луча $\arg z = a$.
В этом случае, т.к.

$$\begin{cases} \varphi = a \\ r \in [0; \infty) \end{cases}, \text{ получаем } \begin{cases} u \in (-\infty; +\infty) \\ v = a + 2k\pi \end{cases}$$

– при каждом k это горизонтальная прямая.

Задачи к п. 4.4. Найти образ области D при отображении функцией $w = f(z)$. При помощи указанного условия из бесконечного множества образов выбрать нужный.

4.4.1. $D : \{\mathrm{Im} > 0\},\ w = \ln z,\ w(i) = \frac{\pi i}{2}$
4.4.2. $D : \{z \notin [0; +\infty]\},\ w = \ln z,\ w(-1) = -\pi i$
4.4.3. $D : \{z \notin [-\infty; 0],\ z \notin [1; +\infty]\},\ w = \ln z,\ w(i) = \frac{\pi i}{2}$
4.4.4 $D : \{|z| < 1, \mathrm{Im}\, z > 0\},\ w = \ln z,\ w(i - i0) = -\frac{3\pi i}{2}$

4.5. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

<u>*Действительная и мнимая части*</u>. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$. Тогда

$$w = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}\ e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right) \implies$$

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

<u>*Аналитичность и конформность*</u>. Легко проверить, что для функций $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi$ и $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$ выполняются условия Коши-Римана

в полярных координатах, а значит функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ аналитическая всюду, кроме $z = 0$.

Рассмотрим условие однолистности: $w_1 \neq w_2$ при $z_1 \neq z_2$, то есть

$$\frac{1}{2}\Big(z_1 + \frac{1}{z_1}\Big) \neq \frac{1}{2}\Big(z_2 + \frac{1}{z_2}\Big) \implies (z_1 - z_2) + \Big(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\Big) \neq 0 \implies$$

$$(z_1 - z_2)\Big(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\Big) \neq 0 \implies \left[\begin{array}{l} z_1 = z_2 \\ z_1 z_2 = 1 \end{array}\right.$$

Таким образом, функция Жуковского однолистна в области, для которой $z_1 : z_2 \neq 1$ и $z_1 \cdot z_2 \neq 1$. Примером такой области может служить внешность или внутренность единичной окружности с разрезом по лучу, выходящему из начала координат (чтобы аргумент z определялся однозначно, а не с точностью до периода).

Отображение окружности $|z| = 1$. Единичная окружность отображается на отрезок $[-1; 1]$.

Действительно, в этом случае

$$\text{поскольку} \left\{\begin{array}{l} r = 1 \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array}\right., \text{ получаем} \left\{\begin{array}{l} u = \cos\varphi \\ v = 0 \end{array}\right. \text{ – отрезок } [-1; 1]$$

Внутренность и внешность окружности отображается на плоскость с разрезом по отрезку $[-1; 1]$.

Отображение окружности $|z| = a$ $(a \neq 1)$. Окружность с центром в начале координат, радиуса больше или меньше единицы отображается на эллипс.

Действительно, в этом случае

$$\text{поскольку} \left\{\begin{array}{l} r = a \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array}\right. \text{ получаем} \left\{\begin{array}{l} u = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})\cos\varphi \\ v = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})\sin\varphi \end{array}\right. \implies$$

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})\right)^2} = 1 \text{ – это уравнение эллипса.}$$

Если $a > 1$, то для $\varphi = \overrightarrow{0; \pi/2}$ получаем, что $v > 0$ и увеличивается. То есть, окружность радиуса больше 1, проходимая против часовой стрелки, отображается на эллипс, проходимый против часовой стрелки. Внешность окружности отображается на внешность эллипса, внутренность окружности на внутренность эллипса.

Если $a < 1$, то для $\varphi = \overrightarrow{0; \pi/2}$ получаем, что $v < 0$ и уменьшается. То есть, окружность окружность радиуса меньше 1, проходимая против часовой стрелки, отображается на эллипс, проходимый по часовой стрелки. Внешность окружности отображается на внутренность эллипса, внутренность окружности на внешность эллипса.

<u>*Отображение лучей* $\arg z = a$</u> *($a \neq \frac{k\pi}{2}$).* Лучи, выходящие из начала координат (кроме координатных полуосей) отображаются на ветвь гиперболы.

Действительно, в этом случае,

$$\text{поскольку } \varphi = a, \text{ получаем } \begin{cases} u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos a \\ v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin a \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 a} - \frac{v^2}{\sin^2 a} = 1 \text{ – это уравнение гиперболы,}$$

Причем,

если $a \in$ I четверти, то $u > 0$, v возрастает с ростом r, т.е. получаем правую ветвь гиперболы, проходимую снизу вверх;

если $a \in$ II четверти, то $u < 0$, v возрастает с ростом r, т.е. получаем левую ветвь гиперболы, проходимую снизу вверх;

если $a \in$ III четверти, то $u < 0$, v убывает с ростом r, т.е. получаем левую ветвь гиперболы, проходимую сверху вниз;

если $a \in$ IV четверти, то $u > 0$, v убывает с ростом r, т.е. получаем правую ветвь гиперболы, проходимую сверху вниз.

Так как единичная окружность отображается на $[-1; 1]$, то точки пересечения луча с единичной окружностью отображаются на точки пересечения гиперболы и действительной оси.

<u>*Отображение координатных полуосей*</u>. Выпишем значения, принимаемые r и φ на каждой их координатных осей. Поскольку единичная окружность разбивает комплексную плоскость на две области однолистности, следует выделять точки пересечения этой окружности с координатными осями (точки ± 1 и $\pm i$).

Полуось OX_+:

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ r \in (0; 1] \cup [1; \infty) \end{cases} \to \begin{cases} u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \in (\infty; 1] \cup [1; \infty) \\ v = 0 \end{cases}$$

отображается на луч $[1; +\infty)$, который проходится два раза, при этом точки $z = 0$ и $z = +\infty$ переходят в ∞, точка $z = 1$ переходит сама в себя.

Полуось OX_-:

$$\begin{cases} \varphi = \pi \\ r \in (0; 1] \cup [1; \infty) \end{cases} \to \begin{cases} u = -\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \in (-\infty; -1] \cup [-1; -\infty) \\ v = 0 \end{cases}$$

отображается на луч $[-1; -\infty)$, который проходится два раза, при этом точки $z = 0$ и $z = -\infty$ переходят в ∞, точка $z = -1$ переходит сама в себя.

Полуось OY_+:

$$\begin{cases} \varphi = \pi/2 \\ r \in (0;1] \cup [1;\infty) \end{cases} \to \begin{cases} u = 0 \\ v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \in (-\infty;0] \cup [0;+\infty) \end{cases}$$

отображается на мнимую ось, которая проходится снизу вверх, при этом точки 0 и $+\infty i$ переходят в $w = \infty$, точка $z = i$ переходит в $w = 0$.

Полуось OY_-:

$$\begin{cases} \varphi = -\pi/2 \\ r \in (0;1] \cup [1;\infty) \end{cases} \to \begin{cases} u = 0 \\ v = -\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \in (+\infty;0] \cup [0;-\infty) \end{cases}$$

отображается на мнимую ось, которая проходится сверху вниз, при этом точки 0 и $-\infty i$ переходят в $w = \infty$, точка $z = -i$ переходит в $w = 0$.

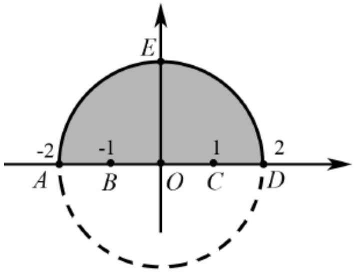
Нахождение образа области.

Для нахождения образа области следует для каждой части границы записать значения переменных r и φ, а затем подставить эти значения в выражения для u и v. В "угловые" точки границы следует так же включать точки, где эта граница пересекает единичную окружность.

ПРИМЕР. Найти образ области $D : \{|z| < 2, \subset \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении функцией Жуковского.

РЕШЕНИЕ. Изобразим область D. Обозначим "угловые" точки границы (так как $\pm 1 \in$ границе области, считаем их тоже "угловыми").

Найдем образы частей границы области:



AED – часть окружности радиуса 2. По доказанному выше отображается на эллипс

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}(2+\frac{1}{2})\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{2}(2-\frac{1}{2})\right)^2} = 1$$

или

$$\frac{u^2}{25} + \frac{v^2}{9} = \frac{1}{16},$$

причем E, то есть $z = 2i$, отображается на $w = \frac{1}{2}\left(2i + \frac{1}{2i}\right) = \frac{3i}{4}$.

AB:

$$\begin{cases} \varphi = \pi \\ r \in [2;1] \end{cases} \to \begin{cases} u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\pi = -\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \in [-\frac{5}{4};-1] \\ v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\pi = 0 \end{cases}$$

BO:

$$\begin{cases} \varphi = \pi \\ r \in [1;0] \end{cases} \to \begin{cases} u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\pi = -\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \in [-1;-\infty] \\ v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\pi = 0 \end{cases}$$

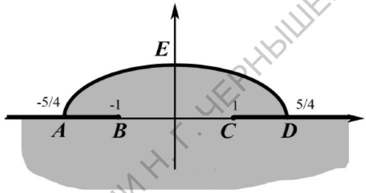
OC:

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ r \in [0;1] \end{cases} \to \begin{cases} u = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos 0 = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r}) \in [+\infty;1] \\ v = \frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin 0 = 0 \end{cases}$$

CD:

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ r \in [1;2] \end{cases} \to \begin{cases} u = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos 0 = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r}) \in [1;\frac{5}{4}] \\ v = \frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin 0 = 0 \end{cases}$$

Изобразим все полученные куски новой границы, расставим соответственно точки и заштрихуем область так, чтобы как и на исходной области, при движении AED... область оставалась справа:



Задачи к п. 4.5. Найти образ области D при отображении функцией Жуковского:

4.5.1.$D : \{\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4},\ z \notin [0;i]\}$
4.5.2.$D : \{|z| < 1,\ z \notin [0;1]\}$
4.5.3.$D : \{|z| > 1,\ z \notin [-2;-1],\ z \notin [1;+\infty]\}$
4.5.4.$D : \{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0,\ z \notin [-i;-\frac{i}{2}]\}$

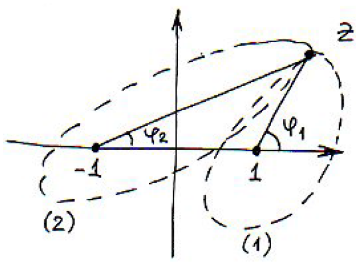
4.6. Функция, обратная к функции Жуковского $w = z \pm \sqrt{z^2-1}$.

Выделение регулярных ветвей. Выразим z из равенства $w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$:
$2wz = z^2 + 1 \implies z^2 - 2wz + 1 = 0 \implies z = w \pm \sqrt{w^2-1}$

Значит обратной к функции Жуковского является двузначная функция $w = z \pm \sqrt{z^2-1}$.

Обозначим $z - 1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z + 1 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{r_1 r_2}\ e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}$.

Рассмотри контур вида (1) (см.рис.), который охватывает точку 1, но не охватывает -1. При прохождении по этому контуру φ_1 изменяется на 2π, а φ_2 не меняется, следовательно $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ изменяется на π, а так как $e^{i\pi} = -1$, значит $\sqrt{z^2-1}$ меняет знак. Аналогично для контура вида (2), который охватывает точку -1, но не охватывает 1.



Таким образом, если в области можно обойти одну из точек ± 1, не обходя при этом другую, то в этой области ветви функции нельзя отделить друг от друга.

Рассмотрим контур, который охватывает обе точки ± 1 или не охватывает ни одну из них. При обходе по такому контуру каждый из углов либо увеличивается на 2π (обход вокруг ± 1 против часовой стрелки), либо уменьшается на 2π (обход вокруг ± 1 по часовой стрелке), либо не меняется. Следовательно $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ или не меняется, или изменяется на 2π, а так как $e^{i2\pi}=1$, значит $\sqrt{z^2-1}$ не меняет знак.

Таким образом, если в области нельзя обойти одну из точек ± 1, не обходя при этом другую, то в этой области можно выделить две ветви функции, обратной к функции Жуковского

Основные отображения. (Отображения, обратные отображениям выполняемым функции Жуковского.)

• Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$ $(a>1)$ отображается на окружность $|w|=R$. Для одной ветви $R=a+\sqrt{a^2-1}>1$, для второй ветви $R=a-\sqrt{a^2-1}<1$.

• Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{1-a^2}=1$ $(0<a<1)$ отображается на лучи $\arg w=\phi$, где $a^2=\cos^2\phi \implies \cos\phi=\pm a$.

Для одной ветви

$$\left[\begin{array}{ll} \phi=\arccos a & \text{(I четверть, получается из правой части гиперболы),} \\ \phi=\pi-\arccos a & \text{(II четверть, получается из левой части гиперболы).} \end{array}\right.$$

Для второй ветви

$$\left[\begin{array}{ll} \phi=\pi+\arccos a & \text{(III четверть, получается из левой части гиперболы),} \\ \phi=2\pi-\arccos a & \text{(IV четверть, получается из правой части гиперболы).} \end{array}\right.$$

Задачи к п. 4.6. Найти образ области D при отображении ветвью обратной функцией Жуковского, выделяемой ее значением в указанной точке:

4.6.1. $D:\{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}>1\},\ w(\infty)=0$

4.6.2. $D:\{z\notin[-\infty;-1],\ z\notin[1;+\infty]\},\ w(0)=i$

4.6.3. $D:\{z\notin[-1;1]\},\ w(\infty)=\infty$

4.6.4. $D:\{\operatorname{Im} z>0\},\ w(+i\infty)=0$

4.7. Гиперболические и тригонометрические функции.

Представление композицией отображений.

• Функция $w=\operatorname{ch} z$ представима в виде $w=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\frac{1}{2}(e^z+\frac{1}{e^z})$, т.е. является композицией отображений:

$w_1 = e^z$ – показательная функция;
$w_2 = \frac{1}{2}(w_1 + \frac{1}{w_1})$ – функция Жуковского.

• Функция $w = \operatorname{sh} z$ представима в виде $w = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\frac{i}{2}(ie^z + \frac{1}{ie^z})$, т.е. является композицией отображений:
$w_1 = e^z$ – показательная функция;
$w_2 = iw_1$ – поворот на $\pi/2$;
$w_3 = \frac{1}{2}(w_2 + \frac{1}{w_2})$ – функция Жуковского;
$w_4 = -iw_3$ – поворот на $-\pi/2$.

• Функция $w = \cos z$ представима в виде $w = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}(e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}})$, т.е. является композицией отображений:
$w_1 = iz$ – поворот на $\pi/2$;
$w_2 = e^{w_1}$ – показательная функция;
$w_3 = \frac{1}{2}(w_2 + \frac{1}{w_2})$ – функция Жуковского.

• Функция $w = \sin z$ представима в виде $w = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2}(-ie^{iz} + \frac{1}{-ie^{iz}})$, т.е. является композицией отображений:
$w_1 = iz$ – поворот на $\pi/2$;
$w_2 = e^{w_1}$ – показательная функция;
$w_3 = -iw_2$ – поворот на $-\pi/2$;
$w_4 = \frac{1}{2}(w_3 + \frac{1}{w_3})$ – функция Жуковского.

• Функция $w = \operatorname{tg} z$ представима в виде $w = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} : \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{2iz} - 1}{ie^{2iz} + i}$, т.е. является композицией отображений:
$w_1 = iz$ – поворот на $\pi/2$;
$w_2 = 2w_1$ – растяжение в 2 раза;
$w_3 = e^{w_2}$ – показательная функция;
$w_4 = \frac{w_3 - 1}{iw_3 + i}$ – дробно-линейная функция.

Соответственно, функции $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ а так же обратные гиперболические функции являются композицией поворотов, сжатий, логарифмической функции, дробно-линейной функции и функции, обратной к функции Жуковского.

Задачи к п. 4.7. Найти образ области D при указанном отображении $w = f(z)$:

4.7.1. $D : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\},\ w = \operatorname{tg} z$

4.7.2. $D : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\},\ w = \operatorname{ch} z$

4.7.3. $D : \{|\operatorname{Im} z| < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\},\ w = \operatorname{sh} z$

4.7.4. $D : \{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ w = \sin z$

4.7.5. $D : \{\operatorname{Re} z > 0,\ -1 < \operatorname{Im} z < 0\},\ w = \operatorname{ch} \pi z$

4.7.6. $D : \{\operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < 1,\ z \notin [\frac{i}{2}; \frac{1+i}{2}]\},\ w = \operatorname{ch} \pi z$

§5. РЯД ЛОРАНА

<u>*Понятия ряда Лорана*</u>. Рядом Лорана по степеням $(z - z_0)$ называется ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} \qquad \text{или} \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Первая сумма ряда называется правильной частью ($\nrightarrow \infty$ при $z \to z_0$), вторая сумма – главной частью (она $\to \infty$ при $z \to z_0$).

<u>*Область и характер сходимости ряда Лорана*</u>. Область сходимости ряда Лорана (если он вообще где-то сходится) есть кольцо $r < |z - z_0| < R$, причем в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри кольца, ряд Лорана сходится равномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ряд Лорана сходится в точке z_1. Тогда для всех z, таких что $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ имеем:

$$|c_k (z - z_0)|^k = |c_k (z_1 - z_0)|^k \cdot \Big|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\Big|^k < |c_k (z_1 - z_0)|^k$$

и по теореме Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ также сходится внутри круга $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причем в любой замкнутой области, лежащей внутри этого круга, правильная часть ряда Лорана сходится равномерно.

Пусть ряд Лорана сходится в точке z_2. Тогда для всех z, таких что $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ имеем:

$$|c_{-k} (z - z_0)|^{-k} = |c_{-k} (z_2 - z_0)|^{-k} \cdot \Big|\frac{z_2 - z_0}{z - z_0}\Big|^k < |c_{-k} (z_2 - z_0)|^{-k}$$

и по теореме Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k}$ также сходится на множестве $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ причем в любой замкнутой области, лежащей в этом множестве, главная часть ряда Лорана сходится равномерно.

Следовательно, весь ряд Лорана сходится на пересечении полученных областей $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ и $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$, причем в любой замкнутой области, лежащей в этом множестве, ряд Лорана сходится равномерно.

Аналитичность ряда Лорана. Сумма ряда Лорана есть аналитическая функция (в области сходимости ряда).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в кольце $D: \ \{r < |z - z_0| < R\}$ ряд Лорана сходится к функции $f(z)$, D^* – любая замкнутая область, целиком лежащая в D, C – граница этой области. Тогда

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k\;dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int\limits_C (z-z_0)^k dz = 0$$

так как $(z-z_0)^k$ аналитическая функция, а по теореме Коши интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции равен нулю. Но тогда по теореме Морера и $f(z)$ аналитическая функция.

Формула для коэффициентов ряда Лорана.

Пусть $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = f(z)$ в кольце $D: \{r < |z - z_0| < R\}$. Тогда

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz, \quad r < \rho < R.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию, для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k-m-1}$$

Проинтегрируем это равенство по контуру C : $|z - z_0| = \rho$:

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int\limits_C (z-z_0)^{k-m-1} dz$$

Выполним замену $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$. Тогда

$$\int\limits_C (z-z_0)^{k-m-1} dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(\rho e^{i\varphi}\right)^{n-m-1} \rho i e^{i\varphi} d\varphi = i\rho^{n-m} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi(n-m)} d\varphi$$

При $n - m \neq 0$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi(n-m)} d\varphi = \left.\frac{e^{i\varphi(n-m)}}{i(n-m)}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

При $n-m=0$

$$i\rho^{n-m}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi(n-m)}d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Следовательно,

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz = 2\pi i c_m \implies c_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz.$$

Представление аналитической функции рядом Лорана. Если функция $f(z)$ является аналитической в кольце $D:\{r<|z-z_0|<R\}$, то в этом кольце она может быть представлена рядом Лорана по степеням $(z-z_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $C_1:|z-z_0|=R$, $C_2:|z-z_0|=r$. Тогда граница области D состоит из окружности C_1, проходимой против часовой стрелки и C_2, проходимой по часовой стрелке (область должна оставаться слева), то есть $(C_1\circlearrowleft)+(C_2\circlearrowright)$. По формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C_1\circlearrowleft)+(C_2\circlearrowright)} \frac{f(t)}{t-z}\,dt,$$

откуда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C_1\circlearrowleft)}\frac{f(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C_2\circlearrowright)}\frac{f(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,$$

где оба контура проходятся против часовой стрелки.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z_0+z_0-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z_0}\,\frac{dt}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} \boxed{=}$$

Так как для $|q|<1$ $\quad \dfrac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ (сумма геометрической прогрессии), а при $t\in C_1$ $\quad \left|\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1$

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt\right)(z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \text{ где } c_n\text{–коэффициенты Лорана.}$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{t-z_0+z_0-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{z_0-z}\,\frac{dt}{1-\frac{t-z_0}{z-z_0}}\boxed{=}$$

Так как при $t\in C_2$ $\quad\left|\dfrac{t-z_0}{z-z_0}\right|<1$

$$\boxed{=}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{z_0-z}\,\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{C_2}f(t)(t-z_0)^n\,dt\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{C_2}f(t)(t-z_0)^{n-1}\,dt\right)\frac{1}{(z-z_0)^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

где c_{-n} – коэффициенты Лорана.

Складывая интегралы, получаем $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.

<u>Разложение дробно-рациональной функции в ряд Лорана</u>. Как известно, дробно-рациональная функция может быть представлена суммой элементарных дробей вида $\dfrac{A}{(z-a)^n}$.

Рассмотрим разложение дроби $\dfrac{1}{z-a}$:

$$\text{для } |z|<a \quad \frac{1}{z-a}=-\frac{1}{a(1-\frac{z}{a})}=-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}},$$

$$\text{для } |z|>a \quad \frac{1}{z-a}=\frac{1}{z(1-\frac{a}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}.$$

Разложение дроби $\dfrac{1}{(z-a)^2}=\left(-\dfrac{1}{z-a}\right)'$ может быть получено как производная соответствующего ряда, и т.д.

Для получения разложения дробно-рациональной функции следует разложить ее на элементарные дроби, выписать разложение в ряд для каждого слагаемого в рассматриваемой области и сложить получившиеся ряды.

ПРИМЕР. Найти разложение в ряд по степеням $(z-1)$ во всех возможных областях функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 7z + 12}.$$

РЕШЕНИЕ. Так как $z_0 = 1 (\neq 0)$, выполним сначала замену $z - 1 = t$:

$$f(z) = \frac{1}{(t+1)^2 - 7(t+1) + 12} = \frac{1}{t^2 - 5t + 6} = g(t).$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, Разложим $g(t)$ на элементарные дроби:

$$g(t) = \frac{1}{(t-3)(t-2)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2) + B(t-3)}{(t-3)(t-2)} =$$
$$= \frac{t(A+B) - 2A - 3B}{(t-3)(t-2)}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - 3B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Longrightarrow g(t) = \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}$$

Рассмотрим разложение дроби $\dfrac{1}{t-3}$:

$$\text{для } |t| < 3 \quad \frac{1}{t-3} = -\frac{1}{3(1-\frac{t}{3})} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^{n+1}},$$

$$\text{для } |t| > 3 \quad \frac{1}{t-3} = \frac{1}{t(1-\frac{3}{t})} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{t}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{t^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{t^n}.$$

Рассмотрим разложение дроби $\dfrac{1}{t-2}$:

$$\text{для } |t| < 2 \quad \frac{1}{t-2} = -\frac{1}{2(1-\frac{t}{2})} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}},$$

$$\text{для } |t| > 2 \quad \frac{1}{t-2} = \frac{1}{t(1-\frac{2}{t})} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{t}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{t^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{t^n}.$$

Выпишем разложения для $g(t)$:

$$\text{для } |t| < 2 \quad g(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) t^n$$

$$\text{для } 2 < |t| < 3 \quad g(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{t^n}$$

$$\text{для } |t| > 3 \quad g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{t^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{t^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(3^{n-1} - 2^{n-1} \right) \frac{1}{t^n}$$

Выполнив обратную замену, впишем разложения для $f(z)$:

$$\text{для } |z-1| < 2 \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (z-1)^n$$

$$\text{для } 2 < |z-1| < 3 \quad f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(z-1)^n}$$

$$\text{для } |z-1| > 3 \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(3^{n-1} - 2^{n-1} \right) \frac{1}{(z-1)^n}$$

Ряд Тейлора как частный случай ряда Лорана. Пусть функция f аналитична в области $|z-z_0| < R$(круг). Рассмотрим ее разложение в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

Пусть $r < \rho < R$.

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad \text{(по формуле Коши)},$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)(z-z_0)^{k-1} dz = 0 \quad \text{(по теореме Коши)}$$

Таким образом, главная часть ряда Лорана равна нулю, и ряд Лорана превращается в ряд Тейлора.

<u>*Примеры степенных рядов*</u>. Как и в действительном анализе, имеют место разложения:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad |z| < \infty$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \qquad |z| < \infty$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad |z| < \infty$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad |z| < \infty$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}, \qquad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad |z| < 1$$

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!} z^k, \qquad |z| < 1$$

<u>*Ряд Лорана в окрестности бесконечности*</u>. Пусть функция f аналитична в области $R < |z| < \infty$ (внешность круга). Тогда $g(z) = f(\frac{1}{z})$, является аналитической в кольце $0 < |z| < R$ и в этом кольце ее можно разложить в ряд Лорана:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k} \implies f(z) = g(\tfrac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k$$

При $z \to \infty$ первая сумма $\not\to \infty$, то есть является правильной частью ряда Лорана, а вторая сумма $\to \infty$, то есть является главной частью ряда Лорана.

Задачи к §5.
Выписать все разложения в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ для функции

$$5.1.\quad f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2},\quad z_0=0$$

$$5.2.\quad f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2},\quad z_0=1$$

$$5.3.\quad f(z)=\frac{z}{(z^2+1)(z+2)},\quad z_0=0$$

$$5.4.\quad f(z)=\frac{1}{6+5z+z^2},\quad z_0=1$$

$$5.5.\quad f(z)=\frac{z}{(1+z)(2-z)},\quad z_0=-2$$

$$5.6.\quad f(z)=\frac{3}{(z-3)^2},\quad z_0=0$$

$$5.7.\quad f(z)=\frac{z}{(z+3)^2},\quad z_0=-1$$

Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)$ по степеням $z-z_0$

5.8. $f(z)=\cos z,\quad z_0=\dfrac{\pi}{4}$

5.9. $f(z)=\cos(z-\dfrac{\pi}{4}),\quad z_0=0$

5.10. $f(z)=\sin^2 z,\quad z_0=0$

5.11. $f(z)=\operatorname{ch} z,\quad z_0=1$

5.12. $f(z)=\ln\dfrac{2-z}{1+z},\quad z_0=0$

5.13. $f(z)=\ln(2-z)(3-z),\quad z_0=0$

5.14. $f(z)=\sin(\dfrac{\pi}{3}+z^2),\quad z_0=0$

5.15. $f(z)=e^{z+3},\quad z_0=-1$

5.16. $f(z)=\cos^2 z,\quad z_0=\dfrac{\pi}{4}$

5.17. $f(z)=\operatorname{sh}^2 z,\quad z_0=0$

5.18. $f(z)=z\operatorname{sh} z,\quad z_0=0$

5.19. $f(z)=\operatorname{ch}^2 z,\quad z_0=0$

5.20. $f(z)=z\operatorname{ch} z,\quad z_0=0$

5.21. $f(z)=(z+1)e^{z-1},\quad z_0=0$

5.22. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}},\quad z_0=0$

5.23. $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3},\quad z_0=0$

§6. НУЛИ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ

Ноль порядка m. Точка z_0 называется нулем порядка m аналитической функции $f(z)$ если $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) = 0$, ... , $f^{(m-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

В этом случае коэффициенты Лорана $c_0 = c_1 = c_2 = ... = c_{m-1} = 0$, а $c_m \neq 0$ и ряд по степеням $(z - z_0)$ функции f имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Отметим очевидные следствия:

• Если z_0 ноль порядка m аналитической функции $f(z)$, то

$$f(z) = (z-z_0)^m \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k-m} = (z-z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* (z-z_0)^k = (z-z_0)^m g(z),$$

где $g(z)$ аналитическая функция, причем $g(z_0) \neq 0$.

• Если z_0 ноль аналитической функции $f(z)$, то существует окрестность z_0, в которой нет других нулей, если только $f(z) \not\equiv 0$.

• Если две аналитические функции совпадают на некоторой части области, то они совпадают на всей области (так как по предыдущему свойству функция $f_1(z) - f_2(z) \equiv 0$).

Устранимая особая точка. Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$ если функция не определена, или не является аналитической в этой точке, но в области $0 < |z - z_0| < R$ представляется рядом Лорана вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

то есть у ряда Лорана отсутствует главная часть.

Очевидно, что в этом случае существует конечный $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

Например, для $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ точка $z = 0$ является устранимой особой точкой.

<u>*Полюс порядка m.*</u> Точка z_0 называется полюсом порядка m аналитической функции $f(z)$ если в области $0 < |z - z_0| < R$ функция представляется рядом Лорана вида

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

причем $c_{-m} \neq 0$. То есть главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых.

Очевидно, что в этом случае $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \infty$.

Если z_0 полюс порядка m функции $f(z)$, то

$$f(z)(z - z_0)^m = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+m} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* (z - z_0)^k \implies f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

где $g(z)$ аналитическая функция.

<u>*Существенно особая точка.*</u> Точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$ если в области $0 < |z - z_0| < R$ функция представляется рядом Лорана вида

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

то есть главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

Очевидно, что в этом случае $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ не существует (так как иначе получили бы устранимую особую точку или полюс).

<u>*Теорема Сохоцкого.*</u> Если z_0 существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого числа a найдется последовательность точек z_k, сходящаяся к z_0 такая, что последовательность $f(z_k)$ сходится к a.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = \infty$. Тогда обязательно существует последовательность $z_k \to z_0$ такая, что $f(z_k) \to \infty$, так как иначе $f(z)$ ограничена в окрестности z_0, то есть z_0 была бы устранимой особой точкой.

Пусть $a \neq \infty$. Возможны два случая:

1) В любой окрестности z_0 существует точка z такая, что $f(z) = a$, но тогда из таких точек можно построить искомую последовательность.

2) В некоторой окрестности z_0 $f(z) \neq a$. Рассмотрим $g(z)\dfrac{1}{f(z) - a}$. Так как $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ не существует, то и $\lim\limits_{z \to 0} g(z)$ не существует, но тогда по доказанному существует последовательность $z_k \to z_0$ такая, что $g(z_k) \to \infty$, а значит $f(z_k) - a \to 0$ или $f(z_k) \to a$.

§7. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Определение вычета и основное свойство. Пусть z_0 конечная изолированная особая точка функции f. Вычетом функции f в точке z_0 называется

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz,$$

где $|z - z_0| = r$ – окружность, внутри которой нет других особых точек, кроме z_0, проходимая против часовой стрелки.

Вычетом функции f в бесконечно удаленной точке называется

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} f(z)\,dz,$$

где $|z| = r$ – окружность, вне которой нет других особых точек, кроме $z = \infty$, проходимая против часовой стрелки.

Сравнив определение вычета с формулой для коэффициентов ряда Лорана, легко видеть, что

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$$

Основные формулы для нахождения вычета.

- Пусть z_0 – конечная устранимая особая точка, тогда $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.
- Пусть $z = \infty$ – устранимая особая точка, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \Big(z\big[\lim_{z\to\infty} f(z) - f(z)\big]\Big).$$

- Пусть z_0 – конечный полюс порядка n для f, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)} \lim_{z\to z_0} \Big[(z - z_0)^n f(z)\Big]^{(n-1)}.$$

- Пусть $z = \infty$ – полюс порядка n, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z\to\infty} \Big[z^{n+2} f^{(n+1)}(z)\Big].$$

Замечание. Если $f(z)$ четная функция, то $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$ и $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Замечание. Если $f(z)$ четная функция, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z)$.

Замечание. Если $f(z)$ нечетная функция, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z)$.

<u>*Вычисление интегралов по замкнутому контуру.*</u> Непосредственно из определения вычета и теоремы Коши следует основная теорема о вычетах:

Пусть f аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы ∂D кроме конечного числа точек $z_1, ..., z_n$. Тогда

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z), \text{ если } \infty \notin D, \\ 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z) + 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z), \text{ если } \infty \in D. \end{cases}$$

Таким образом, для вычисления интеграла по границе области D надо:

1) найти особые точки функции, лежащие в области;
2) найти вычеты в этих особых точках, а если $\infty \in D$ то и вычет в $z = \infty$;
3) сложить все найденные вычеты и умножить результат на $2\pi i$.

Замечание. Частный случай этой формулы может быть получен из формулы Коши:

Пусть f аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы ∂D. Тогда

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), \text{ если } z_0 \in D; \\ 0, \text{ если } z_0 \notin D + \partial D \end{cases}$$

<u>*Вычисление несобственных интегралов.*</u> Применяя основную теорему о вычетах, можно вывести формулы для вычисления несобственных интегралов. Приведем некоторые из них.

• Пусть в верхней полуплоскости функция $f(z)$ аналитична и непрерывна вплоть до границы за исключением полюсов $z_1, ..., z_n$ и $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z).$$

Таким образом, для вычисления интеграла по действительной оси надо:

1) Проверить выполнение условия $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$
2) найти особые точки функции, лежащие в верхней полуплоскости;
3) найти вычеты в этих особых точках;
4) сложить все найденные вычеты и умножить результат на $2\pi i$.

Замечание. Если все особые точки лежат в нижней полуплоскости, то надо сначала сделать замену $z = -t$.

• Пусть функция $f(z)$ аналитична и непрерывна вплоть до границы за исключением полюсов $z_1, ..., z_n$, лежащих в верхней полуплоскости и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{i\lambda z} \qquad (\lambda > 0)$$

Замечание. Если $\lambda < 0$, следует сделать замену $x = -t$.

• Пусть функция $f(z)$ аналитична и непрерывна вплоть до границы за исключением полюсов $z_1, ..., z_n$, лежащих в верхней полуплоскости, при действительных значениях аргумента функция принимает действительные значения и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right] \qquad (\lambda > 0)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right] \qquad (\lambda > 0)$$

Замечание. Если $\lambda < 0$, следует сделать замену $x = -t$.

Задачи к §7.

С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

7.1. $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \sin z\frac{dz}{z+i}$

7.2. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$

7.3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$

7.4. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}$

7.5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)}$

7.6. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$

7.7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3/2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$

7.8. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1/2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы по замкнутому контуру:

7.9. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4},\ D: |z-1|<1$

7.10. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2},\ D: 2<|z|<4$

7.11. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}}\,dz,\ D: |z|>4$

7.12. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)},\ D: |z|<2$

7.13. $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1},\ D: |z|>3$

7.14. $\int\limits_{\partial D} z\sin\frac{z+1}{z-1},\ D: |z|<2$

Применяя теорию вычетов, вычислить несобственные интегралы:

7.15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

7.16. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$

7.17. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$

7.18. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

7.19. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4ix-5)^2}$

7.20. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^3}$

7.21. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}dx$

7.22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2-2ix-2}$

7.23. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+4ix-5)^3}$

7.24. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+109}dx$

7.25. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5}dx$

7.26. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}\,dx}{x^4+8x^2+16}$

7.27. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$

7.28. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$

7.29. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5}dx$

7.30. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx$

7.31. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+1}dx$

7.32. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2}dx$

Ответы: 7.1) $2\pi\,\mathrm{sh}\,1$ 7.2) $2\pi i\,\mathrm{sh}\,1$ 7.3) 0 7.4) $-\pi i/4$ 7.5) $-\pi i/2$ 7.6) $2\pi i$ 7.7) $\pi i(2-e)$ 7.8) $-\pi i e$ 7.9) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$ 7.10) $-\frac{3\pi i}{64}$ 7.11) $\frac{16\pi i}{3}$ 7.12) 0 7.13) $2\pi i\cos 1$ 7.14) $4\pi i(\cos 1-\sin 1)$ 7.15) $\frac{\pi}{4}$ 7.16) $\frac{5\pi}{12}$ 7.17) 0 7.18) $\pi\sqrt{2}$ 7.19) 0 7.20) $\frac{\pi}{2}$ 7.21) $\pi i e^{i-1}$ 7.22) $-\frac{2\pi}{e}\sin 1$ 7.23) 0 7.24) $\pi i e^{3i-10}$ 7.25) $\pi(1-i)e^{-3i-6}$ 7.26) $\frac{3\pi}{32e^2}$ 7.27) $\frac{\pi\cos 2}{e^2}$ 7.28) $\frac{\pi(4-e)}{3e^2}$ 7.29) $\frac{\pi(\cos 4-\sin 4)}{e^2}$ 7.30) $\frac{\pi}{2e^2}$ 7.31) $\frac{\pi}{2e^3}$ 7.32) $\frac{7\pi}{108e^6}$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Комплексная плоскость и действия с комплексными числами.
2. Условия Коши-Римана.
3. Аналитические и гармонические функции.
4. Интеграл по замкнутому контуру и аналитичность.
5. Формула Коши и ее применение к вычислению интегралов.
6. Конформность и аналитичность.
7. Дробно-линейная функция.
8. Степенная функция.
9. Показательная функция.
10. Функция Жуковского.
11. Функции, обратные показательной и функции Жуковского.
12. Ряд Лорана в окрестности конечной и бесконечно удаленной точки. Формула для коэффициентов.
13. Область и характер сходимости ряда Лорана.
14. Связь ряда Лорана с понятием аналитичности.
15. Нули и особые точки функции.
16. Вычеты.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М.А.Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. – Гос.изд-во физ.-мат. лит., Москва 1958г., 678с.

2. И.И.Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. – Гос.изд-во физ.-мат. лит., Москва 1960г., 444с.

3. А.И.Маркушевич. Краткий курс теории аналитических функций. – Гос.изд-во физ.-мат. лит., Москва 1961г., 336с.

4. А.И.Маркушевич. Теория аналитических функций. Т.1. – Изд-во "Наука", Москва, 1967 г., 448с.

5. М.А.Евграфов, К.А. Бежанов, Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин. Сборник задач по теории аналитических функций, под ред. М.А.Евграфова. – Изд-во "Наука", Москва 1972 г., 415с.