Гудошникова Е.В

ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

НЕОБХОДИМЫЙ МИНИМУМ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ СВЕДЕНИЙ

§1. Понятие комплексного переменного

- Комплексное число – это число вида $z = x + iy$, где

  $x \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть z, откладывается по оси OX,

  $y \in \mathbb{R}$, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть z, откладывается по оси OY,

  i – мнимая единица – такое число, квадрат которого равен -1 (т.е. $i^2 = -1$).

  Множество комплексных чисел (комплексная плоскость) обозначается $\mathbb{C}$.

Замечание. Для комплексных чисел неравенство вида $z_1 < z_2$ не имеет смысла.

- Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

  $r = |z|$ – модуль z, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

  $\varphi = \arg z$ – аргумент z, с точностью до периода $2\pi k$находится из условий

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \qquad \text{Т.е. } x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

- Часто встречающиеся множества:
  $|z - z_0| = a$ – уравнение окружности с центром в z_0 радиуса a,
  $\arg z = a$ – луч, выходящий из начала координат и образующий угол a с положительным направлением оси OX.

- Формула Эйлера: для $\varphi \in \mathbb{R}$ $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

  $z = re^{i\varphi}$ – показательная форма комплексного числа.

- Число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным к $z = x + iy$.

- Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел выполняются по обычным правилам алгебры, например:
  Сложение: $(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$,
  Вычитание: $(2 + 3i) - (4 - i) = -2 + 4i$,
  Умножение: $(2 + 3i)(4 - i) = 8 + 12i - 2i - 3i^2 =$ (т.к. $i^2 = -1$) $= 11 + 10i$,
  Деление: $\dfrac{2+3i}{4-i} =$ (умножаем числитель и знаменатель на сопряженное)

$$= \frac{(2+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{8 + 12i + 2i + 3i^2}{4^2 - i^2} = \frac{5 + 14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i,$$

  Возведение в квадрат: $(2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = -5 + 12i$.

- Для возведения комплексного числа в степень (> 3) следует
  1) найти модуль и аргумент числа(период аргумента учитывать не надо),
  2) представить число в показательной форме: $z = re^{i\varphi}$,

3) возвести в степень: $z^n = r^n e^{i(\varphi n)}$,
4) применяя формулу Эйлера, перейти к тригонометрической, а затем (если значения тригонометрических функций являются "табличными"), к алгебраической форме числа.

- Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа следует
1) найти модуль и аргумент числа(аргумент записать с периодом $2\pi k$),
2) представить число в показательной форме: $z = re^{i(\varphi+2\pi k)}$,
3) извлечь корень(возвести в степень $1/n$) $z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}$,
4) выписать n значений z_k для $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Для каждого z_k, применяя формулу Эйлера, перейти к тригонометрической, а затем (если имеем "табличные" значения) к алгебраической форме числа.

Замечание. Числа $\sqrt[n]{z}$ являются вершинами правильного n-угольника с центром в начале координат и вписанного в окружность радиуса $|z|$.

- Определение элементарных функций:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Замечание. Приведенные определения сохраняют основные свойства элементарных функций.

§2. Понятие аналитической функции.

- Функцией $w = f(z)$ называется правило, по которому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие комплексное число $w = u + iv$. (u и v – действительные функции двух переменных: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$)

Замечание. Предел и непрерывность, производная и дифференцируемость, интеграл по кривой для функции комплексного переменного определяются так же, как и для функции действительного переменного.

Замечание. $\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C u\,dy + v\,dx$ – сумма криволинейных интегралов второго типа от действительных функций, следовательно интеграл зависит от направления кривой.

- Дифференцируемые функции комплексного переменного называются аналитическими.

- Теорема Коши. Если f аналитична в односвязной области D, то интеграл по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в D, равен нулю.

- Теорема Морера. Если интеграл от непрерывной функции f по любому замкнутому контуру, лежащему в области D, равен нулю, то функция f аналитична в D.

- Теорема (условия Коши-Римана). Функция $f(z) = u + iv$ является аналитической тогда и только тогда, когда функции u и v дифференцируемые и удовлетворяют условиям $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$ или (в полярных координатах) $$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$
- Для того, чтобы функция $a(x; y)$ являлась действительной или мнимой частью аналитической функции, необходимо и достаточно, чтобы она имела непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяла уравнению Лапласа: $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0$. Такие функции называются гармоническими.

§3. Конформные отображения.

3.1. Понятие конформного отображения.

- Функцию комплексного переменного $w = f(z)$ можно рассматривать как отображение плоскости $z = x + iy$ на плоскость $w = u + iv$. Т.е. каждая функция задает некоторое отображение.
- Углом между пересекающимися кривыми называется угол между касательными к этим кривым, проведенными в точке пересечения.

  Говорят, что в точке z_0 отображение $w = f(z)$ обладает свойством консерватизма углов, если угол между любыми двумя кривыми, проходящими через точку z_0, равен и по величине, и по направлению углу между их образами.
- Обозначим $w_0 = f(z_0)$, $w_0 + \triangle w = f(z_0 + \triangle z)$. Тогда $|\triangle z|$ – расстояние между точками z_0 и $z_0 + \triangle z$, а $|\triangle w|$ – расстояние между их образами. Отношение этих расстояний $\frac{|\triangle w|}{|\triangle z|}$ характеризует коэффициент растяжения или сжатия в окрестности точки z_0 при данном отображении.

  Говорят, что в точке z_0 отображение $w = f(z)$ обладает свойством постоянства растяжений, если в достаточно малой окрестности z_0 коэффициент $\frac{|\triangle w|}{|\triangle z|}$ равен одному и тому же числу, т.е. не зависит от направления $\triangle z$.
- Взаимно-однозначное отображение $w = f(z)$, обладающее свойством консерватизма углов и постоянством растяжений называется конформным.
- Отображение $w = f(z)$ является конформным тогда и только тогда, когда функция f является аналитической и $f'(z) \neq 0$.

Замечание. Из определения следует, что при конформном отображении область отображается на область, граница области – на границу образа, причем направление обхода границы сохраняется, т.е. если при движении z

по границе области область оставалась слева, то и при движении $w = f(z)$ область будет оставаться слева.

3.2. Линейная функция $w = az + b$.

- $w = z + b$ – параллельный перенос плоскости на вектор, соответствующий числу b.
- $w = az$. Поскольку $w = |a|e^{i\arg a}|z|e^{i\arg z} = |a||z|e^{i(\arg a+\arg z)}$, получаем увеличение модуля (т.е. растяжение относительно нуля) в $|a|$ раз и увеличение аргумента (т.е. поворот относительно начала координат) на угол $\arg a$.
  В частности $w = iz$ – поворот на 90^o против часовой стрелки;
  $w = -iz$ – поворот на 90^o по часовой стрелке;
  $w = -z$ – поворот на 180^o.

3.3. Функция $w = \dfrac{1}{z}$.

- Пусть $z = x + iy$. Тогда $\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$, причем $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.
- Окружность или прямая отображается на окружность или прямую.
- Нахождение образа области:
  1) Начертить исходную область и записать уравнение границы (или части границы) через x и y.
  2) Поделить полученное уравнение на $x^2 + y^2$.
  3) Используя приведенные выше формулы, перейти к переменным u и v – это уравнение границы образа области.
  4) Начертить полученную границу и определить с какой стороны от нее находится образ области. Так как при данном отображении $0 \to \infty$, а $\infty \to 0$. Следовательно, если исходная область содержала 0, то ее образ должен содержать ∞, а если исходная область содержала ∞, то ее образ должен содержать 0. Или если при направлении движения от граничной точки A к B область находилась слева, то и при движении от образа A к образу B область должна оставаться справа.

Замечание. Если граница области состоит из частей, то описанные выше действия следует выполнить для каждой части границы.

3.4. Дробно-линейная функция (ДЛФ) $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$.

Замечание. Если $ad - bc = 0$, то $w = \text{const}$.

- Основные свойства:
  ДЛФ может быть представлена как композиция функций (3.2) и (3.3)
  ДЛФ отображает окружность или прямую на окружность или прямую.

ДЛФ однозначно определяется по трем точкам и их образам.

ДЛФ – единственная функция, осуществляющая взаимно-однозначное отображение всей комплексной плоскости на всю комплексную плоскость.

• Нахождение образа области:

1) Представить функцию в виде $w = a^* + \dfrac{b^*}{c^* z + d^*}$.

2) Записать последовательную комбинацию отображений:
$w_1 = c^* z, \quad w_2 = w_1 + d^*, \quad w_3 = 1/w_2, \quad w_4 = b^* w_3, \quad w_5 = w_4 + a^*.$

3) Применить к исходной области отображение w_1, к полученной в результате этого отображения области применить отображение w_2 и т.д.

3.5. Степенная функция $w = z^n$ и $w = z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$.

• Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда $z^n = r^n e^{in\varphi}$, следовательно, при отображении $w = z^n$

◇ окружность $|z| = a$ отображается на окружность $|w| = a^n$;

◇ луч $\arg z = \alpha$ отображается на луч $\arg w = n\alpha$.

• Обратная функция $w = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, осуществляет обратные отображения:

◇ окружность $|z| = a$ отображается на окружность $|w| = \sqrt[n]{a}$;

◇ луч $\arg z = \alpha + 2\pi k$ отображается на луч $\arg w = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, ...n - 1$ (При извлечении корня период надо учитывать обязательно, $w = \sqrt[n]{z}$ – n-значная функция, т.е. получается n образов).

• Частный случай $w = z^2$. Пусть $z = x + iy$. Тогда $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. При этом отображении

◇ окружность $|z| = a$ отображается на окружность $|w| = a^2$;

◇ луч $\arg z = \alpha$ отображается на луч $\arg w = 2\alpha$;

◇ гипербола $x^2 - y^2 = a$ отображается на вертикальную прямую $u = a$;

◇ гипербола $y = \frac{a}{x}$ отображается на горизонтальную прямую $v = 2a$;

◇ прямая $x = a$ отображается на параболу с ветвями влево $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$;

◇ прямая $y = a$ отображается на параболу с ветвями вправо $u = \frac{v^2}{4a^2} - a^2$.

3.6. Показательная функция $w = e^z$.

• Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Замечание. $w = e^z$ – периодическая функция с периодом $2\pi ki$.

• Основные отображения:

◇ вертикальная прямая $x = a$ отображается на окружность $u^2 + v^2 = e^{2a}$;

◇ горизонтальная прямая $y = a$ отображается на луч $v = u \operatorname{tg} a$ (если $\cos a = 0$, то $u = 0$, т.е. в зависимости от знака $\sin a$ получаем верхнюю или нижнюю часть мнимой оси).

3.7. Логарифмическая функция $w = \ln z$.

- Пусть $z = re^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$. Тогда $u = \ln r$, $v = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $w = \ln z$ – многозначная функция, имеет бесконечно много ветвей, получаемых при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
- Отображение окружности $|z| = a$.

  В этом случае, т.к. $\begin{cases} r = a \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{cases}$, получаем $\begin{cases} u = \ln a \\ v \in [0 + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$ – при каждом k это вертикальный отрезок длиной 2π (окружность, пройденная бесконечное количество раз, дает всю вертикальную прямую $v = \ln a$).
- Отображение луча $\arg z = a$.

  В этом случае, т.к. $\begin{cases} \varphi = a \\ r \in [0; \infty) \end{cases}$, получаем $\begin{cases} u \in (-\infty; +\infty) \\ v = a + 2k\pi \end{cases}$ – при каждом k это горизонтальная прямая.

3.8. Функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$.

- Пусть $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$. Тогда $u = \dfrac{1}{2}\Big(r + \dfrac{1}{r}\Big)\cos\varphi$, $v = \dfrac{1}{2}\Big(r - \dfrac{1}{r}\Big)\sin\varphi$.
- Отображение окружности $|z| = 1$.

  В этом случае т.к. $\begin{cases} r = 1 \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{cases}$, получаем $\begin{cases} u = \cos\varphi \\ v = 0 \end{cases}$ – отрезок $[-1; 1]$. Внутренность и внешность окружности отображается на плоскость с разрезом по отрезку $[-1; 1]$.
- Отображение окружности $|z| = a$ $(a \ne 1)$.

  В этом случае т.к. $\begin{cases} r = a \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{cases}$, получаем $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})\cos\varphi \\ v = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})\sin\varphi \end{cases}$

  $$\Longrightarrow \frac{u^2}{\big(\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})\big)^2} + \frac{v^2}{\big(\frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})\big)^2} = 1 \text{ – это уравнение эллипса.}$$

  Если $a > 1$, то для $\varphi = \overrightarrow{0; \pi/2}$ получаем, что $v > 0$ и увеличивается. Т.е. окружность радиуса больше 1, проходимая против часовой стрелки, отображается на эллипс, проходимый против часовой стрелки. Внешность окружности отображается на внешность эллипса, внутренность окружности на внутренность эллипса.

  Если $a < 1$, то для $\varphi = \overrightarrow{0; \pi/2}$ получаем, что $v < 0$ и уменьшается. Т.е. окружность окружность радиуса меньше 1, проходимая против часовой стрелки, отображается на эллипс, проходимый по часовой стрелки. Внешность окружности отображается на внутренность эллипса, внутренность окружности на внешность эллипса.

• Отображение лучей $\arg z = a$ $(a \neq \frac{k\pi}{2})$.

В этом случае, т.к. $\varphi = a$, получаем $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos a \\ v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin a \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{u^2}{\cos^2 a} - \frac{v^2}{\sin^2 a} = 1 \text{ – это уравнение гиперболы.}$$

Если $a \in$ I четверти, то $u > 0$, v возрастает с ростом r, т.е. получаем правую ветвь гиперболы, проходимую снизу вверх.

Если $a \in$ II четверти, то $u < 0$, v возрастает с ростом r, т.е. получаем левую ветвь гиперболы, проходимую снизу вверх.

Если $a \in$ III четверти, то $u < 0$, v убывает с ростом r, т.е. получаем левую ветвь гиперболы, проходимую сверху вниз.

Если $a \in$ IV четверти, то $u > 0$, v убывает с ростом r, т.е. получаем правую ветвь гиперболы, проходимую сверху вниз.

Замечание. Так как единичная окружность отображается на $[-1; 1]$, то точки пересечения луча с единичной окружностью отображаются на точки пересечения гиперболы и действительной оси.

• Отображение координатных полуосей.

Полуось OX_+:

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ r \in (0; 1] \cup [1; \infty) \end{cases} \to \begin{cases} u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \in (\infty; 1] \cup [1; \infty) \\ v = 0 \end{cases}$$

отображается на луч $[1; +\infty)$, который проходится два раза, при этом точки $z = 0$ и $z = +\infty$ переходят в ∞, точка $z = 1$ переходит сама в себя.

Полуось OX_-:

$$\begin{cases} \varphi = \pi \\ r \in (0; 1] \cup [1; \infty) \end{cases} \to \begin{cases} u = -\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \in (-\infty; -1] \cup [-1; -\infty) \\ v = 0 \end{cases}$$

отображается на луч $[-1; -\infty)$, который проходится два раза, при этом точки $z = 0$ и $z = -\infty$ переходят в ∞, точка $z = -1$ переходит сама в себя.

Полуось OY_+:

$$\begin{cases} \varphi = \pi/2 \\ r \in (0; 1] \cup [1; \infty) \end{cases} \to \begin{cases} u = 0 \\ v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \in (-\infty; 0] \cup [0; +\infty) \end{cases}$$

отображается на мнимую ось, которая проходится снизу вверх, при этом точки 0 и $+\infty i$ переходят в $w = \infty$, точка $z = i$ переходит в $w = 0$.

Полуось OY_-:

$$\begin{cases} \varphi = -\pi/2 \\ r \in (0;1] \cup [1;\infty) \end{cases} \to \begin{cases} u = 0 \\ v = -\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \in (+\infty; 0] \cup [0; -\infty) \end{cases}$$

отображается на мнимую ось, которая проходится сверху вниз, при этом точки 0 и $-\infty i$ переходят в $w = \infty$, точка $z = -i$ переходит в $w = 0$.

- Функция, обратная к функции Жуковского, $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – двузначная функция, осуществляет обратные отображения:

◇ Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - 1} = 1$ $(a > 1)$ отображается на окружность $|w| = R$. Для одной ветви $R = a + \sqrt{a^2 - 1} > 1$, для второй ветви $R = a - \sqrt{a^2 - 1} < 1$.

◇ Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{1 - a^2} = 1$ $(0 < a < 1)$ отображается на лучи $\arg w = \alpha$, где $a^2 = \cos^2 \alpha \implies \cos\alpha = \pm a$.

Для одной ветви

$$\left[\begin{array}{ll} \phi = \arccos a & \text{(I четверть, получается из правой части гиперболы),} \\ \phi = \pi - \arccos a & \text{(II четверть, получается из левой части гиперболы).} \end{array}\right.$$

Для второй ветви

$$\left[\begin{array}{ll} \phi = \pi + \arccos a & \text{(III четверть, получается из левой части гиперболы),} \\ \phi = 2\pi - \arccos a & \text{(IV четверть, получается из правой части гиперболы).} \end{array}\right.$$

3.9. Гиперболические и тригонометрические функции.

- Функция $w = \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(e^z + \dfrac{1}{e^z}\right)$, т.е. является композицией отображений:

  $w_1 = e^z$ – показательная функция;

  $w_2 = \dfrac{1}{2}\left(w_1 + \dfrac{1}{w_1}\right)$ – функция Жуковского.

- Функция $w = \operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = -\dfrac{i}{2}\left(ie^z + \dfrac{1}{ie^z}\right)$, т.е. является композицией отображений:

  $w_1 = e^z$ – показательная функция;

  $w_2 = iw_1$ – поворот на $\pi/2$;

  $w_3 = \dfrac{1}{2}\left(w_2 + \dfrac{1}{w_2}\right)$ – функция Жуковского;

  $w_4 = -iw_3$ – поворот на $-\pi/2$.

- Функция $w = \operatorname{th} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} : \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$, т.е. является композицией отображений:
  $w_1 = 2z$ – растяжение в 2 раза;
  $w_2 = e^{w_1}$ – показательная функция;
  $w_3 = \dfrac{w_2 - 1}{w_2 + 1}$ – дробно-линейная функция.
- Функция $w = \operatorname{cth} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} : \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}$, т.е. является композицией отображений:
  $w_1 = 2z$ – растяжение в 2 раза;
  $w_2 = e^{w_1}$ – показательная функция;
  $w_3 = \dfrac{w_2 + 1}{w_2 - 1}$ – дробно-линейная функция.
- Функция $w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + \dfrac{1}{e^{iz}}\right)$, т.е. является композицией отображений:
  $w_1 = iz$ – поворот на $\pi/2$;
  $w_2 = e^{w_1}$ – показательная функция;
  $w_3 = \dfrac{1}{2}\left(w_2 + \dfrac{1}{w_2}\right)$ – функция Жуковского.
- Функция $w = \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{1}{2}\left(-ie^{iz} + \dfrac{1}{-ie^{iz}}\right)$, т.е. является композицией отображений:
  $w_1 = iz$ – поворот на $\pi/2$;
  $w_2 = e^{w_1}$ – показательная функция;
  $w_3 = -iw_2$ – поворот на $-\pi/2$;
  $w_4 = \dfrac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3}\right)$ – функция Жуковского.
- Функция $w = \operatorname{tg} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} : \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \dfrac{e^{2iz} - 1}{ie^{2iz} + i}$, т.е. является композицией отображений:
  $w_1 = iz$ – поворот на $\pi/2$;
  $w_2 = 2w_1$ – растяжение в 2 раза;
  $w_3 = e^{w_2}$ – показательная функция;
  $w_4 = \dfrac{w_3 - 1}{iw_3 + i}$ – дробно-линейная функция.
- Функция $w = \operatorname{ctg} z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} : \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{ie^{2iz} + i}{e^{2iz} - 1}$, т.е. является композицией отображений:
  $w_1 = iz$ – поворот на $\pi/2$;

$w_2 = 2w_1$ – растяжение в 2 раза;
$w_3 = e^{w_2}$ – показательная функция;
$w_4 = \dfrac{iw_3 + i}{w_3 - 1}$ – дробно-линейная функция.

- Соответственно, функции $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arctg} z$, $\mathrm{arcctg} z$ а так же обратные гиперболические функции являются композицией поворотов, сжатий, логарифмической функции, дробно-линейной функции и функции, обратной к функции Жуковского.

§4. Ряд Лорана

- Рядом Лорана по степеням $(z - z_0)$ называется ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} \qquad \text{или} \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Первая сумма ряда называется правильной частью ($\not\to \infty$ при $z \to z_0$), вторая сумма – главной частью (она $\to \infty$ при $z \to z_0$).

- Область сходимости ряда Лорана (если он вообще где-то сходится) есть кольцо $r < |z - z_0| < R$, причем в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри кольца, ряд Лорана сходится равномерно, а его сумма является аналитической функцией.
- Если функция f аналитическая в области $r < |z - z_0| < R$ (кольцо), то она в этой области представима рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \qquad r < \rho < R,$$

причем это представление единственно.

- Если функция f аналитична в области $r < |z|$ (внешность круга), то ее ряд Лорана (ряд Лорана в окрестности ∞) имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k.$$

- Если функция f аналитична в области $|z - z_0| < R$(круг), то главная часть ряда Лорана равна нулю, и ряд Лорана превращается в ряд Тейлора.

• Стандартные разложения в степенные ряды:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < \infty \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |z| < \infty$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}, \quad |z| < 1 \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \infty$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1 \qquad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |z| < \infty$$

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!} z^k, \quad |z| < 1 \qquad \operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \infty$$

§5. Вычеты и их применение к вычислению интегралов

5.1. Особые точки функции.

• Особые точки функции f – точки, в которых $f'(z)$ не существует. Особая точка называется изолированной, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек.

• Изолированные особые точки функции $f(z)$ бывают следующих трех типов:

◇ z_0 – устранимая особая точка, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ равен конечному числу. В этом случае главная часть ряда Лорана функции f по степеням $(z - z_0)$ равна 0.

◇ z_0 – полюс порядка n, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ и для функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ точка z_0 – ноль порядка n. В этом случае главная часть ряда Лорана функции f по степеням $(z - z_0)$ содержит не более,чем n слагаемых, причем $c_{-n} \neq 0$.

◇ z_0 – существенно особая точка, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует. В этом случае главная часть ряда Лорана функции f по степеням $(z - z_0)$ содержит бесконечное число слагаемых.

5.2. Вычет в конечной особой точке.

• Вычетом функции f в конечной изолированной особой точке z_0 называется

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz,$$

где $|z - z_0| = r$ – окружность, внутри которой нет других особых точек, кроме z_0, проходимая против часовой стрелки.

• Пусть $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, тогда $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$.

- Пусть z_0 – устранимая особая точка, тогда $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.
- Пусть z_0 – полюс порядка n, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \Big[(z-z_0)^n f(z)\Big]^{(n-1)}.$$

- Пусть $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, функции φ и ψ аналитические в окрестности z_0, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

5.3. Вычет в бесконечно удаленной точке.

- Вычетом функции f в бесконечно удаленной точке называется

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,dz,$$

где $|z| = r$ – окружность, вне которой нет других особых точек, кроме $z = \infty$, проходимая против часовой стрелки.

- Пусть $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$, тогда $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$.
- Пусть $z = \infty$ – устранимая особая точка, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\Big(z\big[\lim_{z\to\infty} f(z) - f(z)\big]\Big).$$

- Пусть $z = \infty$ – полюс порядка n, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z\to\infty}\Big[z^{n+2} f^{(n+1)}(z)\Big].$$

Замечание. Если $f(z)$ четная функция, то $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$ и $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Замечание. Если $f(z)$ четная функция, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z)$.

Замечание. Если $f(z)$ нечетная функция, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z)$.

5.4. Вычисление интегралов по замкнутому контуру.

- Основная теорема о вычетах: пусть f аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы ∂D кроме конечного числа точек $z_1, ..., z_n$. Тогда

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z), \text{ если } \infty \notin D, \\ 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z) + 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z), \text{ если } \infty \in D. \end{cases}$$

  Таким образом, для вычисления интеграла по границе области D надо:
  1) найти особые точки функции, лежащие в области;
  2) найти вычеты в этих особых точках, а если $\infty \in D$ то и вычет в $z = \infty$;
  3) сложить все найденные вычеты и умножить результат на $2\pi i$.

- Применение формулы Коши. Пусть f аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы ∂D. Тогда

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), \text{ если } z_0 \in D; \\ 0, \text{ если } z_0 \notin D + \partial D \end{cases}$$

  Эта формула является частным случаем основной теоремы о вычетах.

5.5. Вычисление несобственных интегралов.

- Пусть в верхней полуплоскости функция $f(z)$ аналитична и непрерывна вплоть до границы за исключением полюсов $z_1, ..., z_n$ и $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z).$$

  Таким образом, для вычисления интеграла по действительной оси надо:
  1) Проверить выполнение условия $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = 0$
  2) найти особые точки функции, лежащие в верхней полуплоскости;
  3) найти вычеты в этих особых точках;
  4) сложить все найденные вычеты и умножить результат на $2\pi i$.

Замечание. Если все особые точки лежат в нижней полуплоскости, то надо сначала сделать замену $z = -t$.

- Пусть функция $f(z)$ аналитична и непрерывна вплоть до границы за исключением полюсов $z_1, ..., z_n$, лежащих в верхней полуплоскости и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z) e^{i\lambda z} \qquad (\lambda > 0)$$

Замечание. Если $\lambda < 0$, следует сделать замену $x = -t$.

- Пусть функция $f(z)$ аналитична и непрерывна вплоть до границы за исключением полюсов $z_1, ..., z_n$, лежащих в верхней полуплоскости, при действительных значениях аргумента функция принимает действительные значения и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right] \qquad (\lambda > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx = \mathrm{Im}\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right] \qquad (\lambda > 0)$$

Замечание. Если $\lambda < 0$, следует сделать замену $x = -t$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическая работа №1.

Найти и изобразить на комплексной плоскости число z, задаваемое равенством:

1.1. $(2-3i)z=-1-5i$

1.2. $z=\dfrac{4+i}{2-i}+\dfrac{5-3i}{3+i}$

1.3. $z=\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$

1.4. $z=\dfrac{(\sqrt{10}+i)(17+19i)}{19-17i}$

1.5. $z=\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}+\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$

1.6. $z=(\dfrac{1-i}{1+i})^{15}$

1.7. $z=(1+i\sqrt{3})^{18}$

1.8. $z=1+i^{123}$

1.9. $z=(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$

1.10. $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{(1+i)^8-(1-i)^4}$

1.11. $z^2-2z+4=0$

1.12. $z^2-(2+5i)z-6+4i=0$

1.13. $(3+i)z^2+(1-i)z-6i=0$

1.14. $z^3-8=0$

1.15. $z^3+8=0$

1.16. $z^4+1=0$

1.17. $z^4-64=0$

1.18. $z^3-i=0$

1.19. $z^4=-8+i8\sqrt{3}$

1.20. $\cos z=4$

1.21. $\sin z=2$

1.22. $\operatorname{ch} z=0$

1.23. $\operatorname{th} z=2$

1.24. $e^z+i=0$

Ответы:

1.1) $z=1-i$

1.2) $z=2,6-0,2i$

1.3) $z=0,8+0,6i$

1.4) $z=-1+i\sqrt{10}$

1.5) $z=2,8i$

1.6) $z=i$

1.7) $z=218$

1.8) $z=1-i$

1.9) $z=0,25$

1.10) $z=-3,2$

1.11) $z=1\pm\sqrt{3}i$

1.12) $z=\sqrt{3}\pm i$

1.13) $z_1=1+i,\ z_2=-1,2-0,6i$

1.14) $z_{1,3}=-1\pm i\sqrt{3},\ z_2=2$

1.15) $z_{1,3}=1\pm i\sqrt{3},\ z_2=-2$

1.16) $z_{1,2,3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$

1.17) $z_{1,3}=\pm4,\ z_{2,4}=\pm4i$

1.18) $z_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2},\ z_3=i$

1.19) $z_{1,3}=\pm(\sqrt{3}+i),\ z_{2,4}=\pm(-1+i\sqrt{3})$

1.20) $z=2k\pi-i\ln(4\pm\sqrt{15})$

1.21) $z=\pi/2+2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3})$

1.22) $z=i(\pi/2+k\pi)$

1.23) $z=\ln\sqrt{3}+k\pi i$

1.24) $z=(2k-0,5)\pi i$

Практическая работа №2.

По заданным условиям найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$.

Указание. В задачах 2.7-2.10 следует сначала найти функцию $g(z) = \ln f(z)$, для которой $u^* = \operatorname{Re} g = \ln|f|$, $v^* = \operatorname{Im} g = \arg f$.

2.1. $v = x^2 - y^2 + 2xy,\ f(0) = 0$

2.2. $u = x^2 - y^2 + 2x,\ f(0) = 1$

2.3. $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2},\ f(2) = 0$

2.4. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - 2y,\ f(1) = 0$

2.5. $v = r(\ln r \sin\varphi + \varphi\cos\varphi),\ f(1) = 0$

2.6. $u = \left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi,\ f(1) = 2$

2.7. $|f| = r^2\sqrt{2},\ f(0) = 0$

2.8. $\arg f = xy, f(0) = 1$

2.9. $|f| = e^{r^2\cos 2\varphi},\ f(0) = 1$

2.10 $\arg f = \varphi + r\sin\varphi,\ f(1) = e$

Ответы:

2.1) $f(z) = z^2(1+i)$

2.2) $f(z) = z^2 + 2z + 1$

2.3) $f(z) = \dfrac{z-2}{2z}$

2.4) $f(z) = \dfrac{1}{z} + 2iz - 1 - 2i$

2.5) $f(z) = z\ln z$

2.6) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z}$

2.7) $f(z) = z^2(1+i)$

2.8) $f(z) = e^{z^2/2}$

2.9) $f(z) = e^{z^2}$

2.10) $f(z) = ze^z$

Практическая работа №3.

Найти образ области D при отображении дробно-линейной функцией $w = f(z)$:

3.1. $D : \{|z-1| < 2\},\ w = \frac{z+1}{z-2}$

3.2. $D : \{|z-1| < 2\},\ w = \frac{z-1}{2z-6}$

3.3. $D : \{\operatorname{Re} z < 1\},\ w = \frac{z}{z-2}$

3.4. $D : \{\operatorname{Re} z < 1\},\ w = \frac{4z}{z+1}$

3.5. $D : \{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ w = \frac{1-z}{1+z}$

3.6. $D : \{z \notin [-2; 1]\},\ w = \frac{z+2}{1-z}$

Найти образ области D при отображении степенной функцией $w = f(z)$:

3.7. $D: \{|z| > \frac{1}{2},\ \mathrm{Re}\, z > 0\},\ w = z^2$

3.8. $D: \{\arg z = \frac{\pi}{4}\},\ w = z^3$

3.9. $D: \{z \notin [0; +\infty]\},\ w = \sqrt{z},\ w(-1) = -i$

3.10. $D: \{z \notin [-\infty; +1]\},\ w = \sqrt{z},\ w(4) = 2$

Найти образ области D при отображении показательной или логарифмической функцией $w = f(z)$:

3.11. $D: \{0 < \mathrm{Im}\, z < \frac{\pi}{2},\ \mathrm{Re}\, z > 0\},\ w = e^{2z}$

3.12. $D: \{0 < \mathrm{Re}\, z < \pi,\ \mathrm{Im}\, z > 0\},\ w = e^{iz}$

3.13. $D: \{\mathrm{Im} > 0\},\ w = \ln z,\ w(i) = \frac{\pi i}{2}$

3.14. $D: \{z \notin [0; +\infty]\},\ w = \ln z,\ w(-1) = -\pi i$

3.15. $D: \{z \notin [-\infty; 0],\ z \notin [1; +\infty]\},\ w = \ln z,\ w(i) = \frac{\pi i}{2}$

3.16. $D: \{|z| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\},\ w = \ln z,\ w(i - i0) = -\frac{3\pi i}{2}$

Найти образ области D при отображении функцией Жуковского:

3.17. $D: \{\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4},\ z \notin [0; i]\}$

3.18. $D: \{|z| < 1,\ z \notin [0; 1]\}$

3.19. $D: \{|z| > 1,\ z \notin [-2; -1],\ z \notin [1; +\infty]\}$

3.20. $D: \{|z| < 1,\ \mathrm{Im}\, z < 0,\ z \notin [-i; -\frac{i}{2}]\}$

Найти образ области D при отображении ветвью обратной функцией Жуковского, выделяемой ее значением в указанной точке:

3.21. $D: \{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} > 1\},\ w(\infty) = 0$

3.22. $D: \{z \notin [-\infty; -1],\ z \notin [1; +\infty]\},\ w(0) = i$

3.23. $D: \{z \notin [-1; 1]\},\ w(\infty) = \infty$

3.24. $D: \{\mathrm{Im}\, z > 0\},\ w(+i\infty) = 0$

Найти образ области D при указанном отображении $w = f(z)$:

3.25. $D: \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\},\ w = \operatorname{tg} z$

3.26. $D: \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\ \},\ w = \operatorname{ch} z$

3.27. $D: \{|\operatorname{Im} z| < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\},\ w = \operatorname{sh} z$

3.28. $D: \{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ w = \sin z$

3.29. $D: \{\operatorname{Re} z > 0,\ -1 < \operatorname{Im} z < 0\},\ w = \operatorname{ch} \pi z$

3.30. $D: \{\operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < 1,\ z \notin [\frac{i}{2}; \frac{1+i}{2}]\},\ w = \operatorname{ch} \pi z$

Ответы:

3.1) $|w-2| > 4$

3.2) $\operatorname{Re} w < 1/4$

3.3) $|w| < 1$

3.4) $|w-3| > 1$

3.5) $-\frac{\pi}{2} < \arg w < 0$

3.6) $w \notin [0; +\infty]$

3.7) $|w| > \frac{1}{4},\ w \notin [-\infty; -\frac{1}{4}]$

3.8) $\arg w = \frac{3\pi}{4}$

3.9) $\operatorname{Im} w < 0$

3.10) $\operatorname{Re} w > 0,\ w \notin [0; 1]$

3.11) $|w| > 1, \operatorname{Im} w > 0$

3.12) $|w| < 1, \operatorname{Im} w > 0$

3.13) $0 < \operatorname{Im} w < \pi$

3.14) $-2\pi < \operatorname{Im} w < 0$

3.15) $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi,\ w \notin [0; +\infty]$

3.16) $-2\pi < \operatorname{Im} < -\pi,\ \operatorname{Re} w < 0$

3.17) $(\operatorname{Re} w)^2 - (\operatorname{Im} w)^2 < \frac{1}{2},\ w \notin [-i\infty; 0]$

3.18) $w \notin [-1; +\infty]$

3.19) $w \notin [-\frac{5}{4}; +\infty]$

3.20) $\operatorname{Im} w > 0,\ w \notin [0; \frac{3i}{4}]$

3.21) $w < 2 - \sqrt{3}$

3.22) $\operatorname{Im} w > 0$

3.23) $|w| > 1$

3.24) $\operatorname{Im} w < 0,\ |w| < 1$

3.25) $w \notin [-i; i]$

3.26) $w \notin [-\infty; -1],\ w \notin [1; +\infty]$

3.27) $w \notin [-\infty; 0],\ w \notin [-i; i]$

3.28) $w \notin [0; +i\infty],\ w \notin [-1; 1]$

3.29) $\operatorname{Im} w < 0$

3.30) $\operatorname{Im} w > 0,\ w \notin [0; \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}]$

Практическая работа №4.

Выписать все разложения в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ для функции

4.1. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}},\quad z_0 = 0$

4.2. $f(z) = z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z},\quad z_0 = 0$

4.3. $f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^3},\quad z_0 = 0$

4.4. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2},\quad z_0 = 0$

4.5. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2},\quad z_0 = 1$

4.6. $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z+2)},\quad z_0 = 0$

Ответы:

4.1) $f(z) = z^3 + z^2 + \dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{6} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(k+3)!z^k}$ для $0 < |z| < \infty$

4.2) $f(z) = -\pi z - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\dfrac{\pi}{z}\right)^{2k+1}$ для $0 < |z| < \infty$

4.3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{2z} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k z^k}{(k+3)!}$ для $0 < |z| < \infty$

4.4) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^{k+1}}\right) z^k$ для $|z| < 1$;

$f(z) = -\dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{2}\right)^k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{z^k}$ для $1 < |z| < 2$;

$f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^{k-1} - 1}{z^k}$ для $|z| > 2$.

4.5) $f(z) = -\dfrac{1}{z-1} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} (z-1)^k$ для $0 < |z-1| < 1$;

$f(z) = \sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{1}{(z-1)^k}$ для $|z-1| > 1$.

4.6) $f(z) = \dfrac{2}{5} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k+1} + \dfrac{1}{5} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} - \dfrac{1}{5} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\dfrac{z}{2}\right)^k$ для $|z| < 1$;

$f(z) = \dfrac{2}{5} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{z^{2k+1}} - \dfrac{1}{5} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{z^{2k}} - \dfrac{1}{5} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\dfrac{z}{2}\right)^k$ для $1 < |z| < 2$;

$f(z) = \dfrac{2}{5} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{z^{2k+1}} - \dfrac{1}{5} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{z^{2k}} + \dfrac{1}{5} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\dfrac{2}{z}\right)^k$ для $|z| > 2$.

Практическая работа №5.

С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

5.1. $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i}$

5.2. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\, dz$

5.3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\, dz$

5.4. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}$

5.5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)}$

5.6. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz$

5.7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3/2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz$

5.8. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1/2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы по замкнутому контуру:

5.9. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4},\ D: |z-1|<1$

5.10. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2},\ D: 2<|z|<4$

5.11. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}}\, dz,\ D: |z|>4$

5.12. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)},\ D: |z|<2$

5.13. $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1},\ D: |z|>3$

5.14. $\int\limits_{\partial D} z\sin\frac{z+1}{z-1},\ D: |z|<2$

Применяя теорию вычетов, вычислить несобственные интегралы:

5.15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

5.16. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$

5.17. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$

5.18. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

5.19. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+4ix-5)^2}$

5.20. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+4)^3}$

5.21. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2} dx$

5.22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\, dx}{x^2-2ix-2}$

5.23. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\, dx}{(x^2+4ix-5)^3}$

5.24. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+109} dx$

5.25. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5} dx$

5.26. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}\, dx}{x^4+8x^2+16}$

5.27. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2} dx$

5.28. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4} dx$

5.29. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5} dx$

5.30. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4} dx$

5.31. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+1} dx$

5.32. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2} dx$

Ответы:

5.1) $2\pi \operatorname{sh} 1$
5.2) $2\pi i \operatorname{sh} 1$
5.3) 0
5.4) $-\pi i/4$
5.5) $-\pi i/2$
5.6) $2\pi i$
5.7) $\pi i(2-e)$
5.8) $-\pi i e$
5.9) $-\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$
5.10) $-\dfrac{3\pi i}{64}$
5.11) $\dfrac{16\pi i}{3}$
5.12) 0
5.13) $2\pi i \cos 1$
5.14) $4\pi i(\cos 1 - \sin 1)$
5.15) $\dfrac{\pi}{4}$
5.16) $\dfrac{5\pi}{12}$
5.17) 0
5.18) $\pi\sqrt{2}$
5.19) 0
5.20) $\dfrac{\pi}{2}$
5.21) $\pi i e^{i-1}$
5.22) $-\dfrac{2\pi}{e}\sin 1$
5.23) 0
5.24) $\pi i e^{3i-10}$
5.25) $\pi(1-i)e^{-3i-6}$
5.26) $\dfrac{3\pi}{32e^2}$
5.27) $\dfrac{\pi\cos 2}{e^2}$
5.28) $\dfrac{\pi(4-e)}{3e^2}$
5.29) $\dfrac{\pi(\cos 4 - \sin 4)}{e^2}$
5.30) $\dfrac{\pi}{2e^2}$
5.31) $\dfrac{\pi}{2e^3}$
5.32) $\dfrac{7\pi}{108e^6}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Найти и изобразить на комплексной плоскости числа z, если

$a)$ $z = \dfrac{(1-i)^{16}(3+2i)}{(2\sqrt{3}+2i)^4} + 4 + 2i;$

$c)$ $z^4 + 16 = 0;$

$d)$ $e^z = -2;$

$f)$ $|z+1| + |z-3| < 2;$

$g)$ $z\overline{z} + i(z - \overline{z}) = 0;$

$b)$ $z^2 + 2z + 4 = 0;$

$e)$ $\sin z = 3;$

$h)$ $\mathrm{Re}(z - \frac{1}{z}) = 0.$

Задание 2. Восстановить аналитическую функцию, если известно:

$a)$ $\mathrm{Re}\, f = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3,\ f(0) = 0;$

$b)$ $|f| = (x^2+y^2)e^x,\ f(1) = e;$

$c)$ $\arg f = \varphi + r\sin\varphi,\ f(1) = e.$

Задание 3. Найти образ области D при указанном отображении $w = f(z)$

$a)$ $D : \{|z| < 1,\ |z-1| < 1\},\ \ w = \frac{z-1}{z-2}$

$b)$ $D : \{|z| < 8,\ \mathrm{Re}\, z < 0\},\ \ w = \sqrt[3]{z},\ w(-1) = -1$

$c)$ $D : \{0 < \mathrm{Re}\, z < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\, z < 0\},\ \ w = \sin z$

Задание 4. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функцию

$a)$ $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2},\ \ z_0 = 0$

$b)$ $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 5z + 6},\ \ z_0 = 1$

Задание 5. Вычислить интеграл:

$a)$ $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz;$

$b)$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-4)}dz;$

$c)$ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3};$

$d)$ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 10}dx.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Вариант 1.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{2}{2+i}+\dfrac{(1+i)(1+2i)}{(1-i)(1-2i)}$

   (b) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^4-81i=0$

   (b) $\sin z=2,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:
$$|z-2|\le|z+2|.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее действительной части
$$u(x,y)=x^2-y^2+e^x\sin y,\ \ f(0)=1.$$

Вариант 2.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{3}{2-2i}+\dfrac{(1-i)(3+2i)}{(2+i)(2-i)}$

   (b) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{15}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3+64i=0$

   (b) $\cos z=2,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию: $\operatorname{Re} z^2>2$.

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y)=2xy+e^x\cos y,\ f(0)=2$.

Вариант 3.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i}{2+i}+\dfrac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(2-2i)}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-3i}{1-i}\right)^8$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^2-16i=0$

   (b) $\sin z=-2,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$|z-1|\leq|2-z|.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y)=4-x^2+y^2+4xy,\ f(0)=1.$

Вариант 4.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{3-i}{i+3}-\dfrac{(3+i)(1+i)}{1-i}$

   (b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^7$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3-125=0$

   (b) $2\cos z=3$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\frac{-\pi}{4}\leq\arg z\leq\frac{\pi}{4},\quad 1\leq\operatorname{Im}z\leq 3.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее мнимой части $v(x,y)=3x^2y-y^3+x,\ f(0)=1.$

Вариант 5.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{1+i}{2-i}-\dfrac{(i-2)(1-i)}{i(1+i)}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1-i}\right)^9$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^4+81=0$

   (b) $\sin z=3,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\frac{|z|^2-|z|-1}{2+|z|}<3.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y)=4xy+3y$, $f(0)=3$.

Вариант 6.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i-3}{2-2i}-\dfrac{i(1-i)}{2-3i}$

   (b) $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^8$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^4-16=0$

   (b) $\cos z=4,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\operatorname{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=0.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y)=x^2-y^2+xy$, $f(0)=-1$.

Вариант 7.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{2}{1-i} - \dfrac{(1+i)^2}{(1-2i)(1-i)}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1-i}\right)^{16}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^2 - 2 + 2i = 0$

   (b) $\sin z = -3,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\operatorname{Im}(z-i) > 2.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = -2xy + x^3 - 3xy^2$, $f(0) = -2$.

Вариант 8.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{3-2i}{2+3i} - \dfrac{(2+i)(1-i)}{2i+1}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2-2i}\right)^{8}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3 + 8 = 0$

   (b) $\cos z = -2,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$|z-1| + |z+3| < 8.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = 2e^x \cos y - y$, $f(0) = 1$.

Вариант 9.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i-1}{i+1} - \dfrac{(2+i)(1+i)}{(2-i)(1-i)}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3 + i - 1 = 0$

   (b) $\sin z = 4,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$z\bar{z} + z + \bar{z} + i\,(z - \bar{z}) = 0.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее мнимой части $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + y$, $f(0) = -1$.

Вариант 10.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i+1}{i-1} - \dfrac{(1+2i)(1-i)}{(1-2i)(1+i)}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{18}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3 + 8i = 0$

   (b) $\cos z = -3,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\operatorname{Im}\left(z^2 - \bar{z}\right) = 2 - \operatorname{Im}\bar{z}.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее действительной части $u(x, y) = 2e^x \sin y - 2x + y$, $f(0) = 0$.

Вариант 11.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{(2+i)(3+i)}{3-i} - \dfrac{(4+i)(3-i)}{3+i}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^2 + 81i = 0$

   (b) $\sin z = -4,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию: $|z+2| = \bar{z}$.

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = e^y \sin x - 2x + 3y,\ f(0) = 2$.

Вариант 12.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i-1}{2+i} + \dfrac{(2+i)(1+i)}{1-i}$

   (b) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{6}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^4 + 256 = 0$

   (b) $\cos z = -4,5$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$|z-4| \geq |z-1|.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее мнимой части $v(x,y) = y^2 - x^2 - 2y,\ f(0) = 3$.

Вариант 13.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{2}{1+i} - \dfrac{(1+i)(1+2i)}{(1-i)(1-2i)}$

   (b) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{15}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^4 + 81i = 0$

   (b) $\sin z = 2$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$|z-1| \leq |z+1|.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = x^2 - y^2 - e^x \sin y$, $f(0) = 1$.

Вариант 14.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{3}{1+2i} + \dfrac{(1-i)(3+2i)}{(1+i)(2-i)}$

   (b) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3 - 64i = 0$

   (b) $\cos z = 2$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию: $\operatorname{Re} z^2 < 1$.

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = 2xy - e^x \cos y$, $f(0) = 2$.

Вариант 15.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i}{2-i}+\dfrac{(1-i)(1+2i)}{(1+i)(1-2i)}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1-i}\right)^8$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^2+16i=0$

   (b) $\sin z=-2$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$|z+1|\le|2-z|.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y)=4+x^2-y^2+6xy,\ f(0)=1.$

Вариант 16.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{3+2i}{i+3}-\dfrac{(3-i)(1+i)}{i}$

   (b) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^7$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3+125=0$

   (b) $\cos z=3$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\frac{\pi}{4}\le\arg z\le\frac{3\pi}{4},\quad 1\le\operatorname{Im} z\le 2.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее мнимой части $v(x,y)=3x^2y-y^3,\ f(0)=1.$

Вариант 17.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{1+i}{2} - \dfrac{(i+2)(1-i)}{i(1+i)}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^6$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^4 - 81 = 0$

   (b) $\sin z = 3$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 3.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = 4xy - 3y$, $f(0) = 3$.

Вариант 18.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i-3}{2+3i} - \dfrac{i(1+i)}{2-3i}$

   (b) $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+3i}{1-i}\right)^8$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^4 + 16 = 0$

   (b) $\cos z = 4$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = x^2 - y^2 - xy$, $f(0) = -1$.

Вариант 19.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{2}{1+i} - \dfrac{(1+i)^2(1+2i)}{(1-2i)(1-i)^2}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-3i}{1-i}\right)^{12}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^2 - 2 + 2i = 0$

   (b) $\sin z = -3$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\operatorname{Im}(z-i) \geq 2.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = 2xy + x^3 - 3xy^2$, $f(0) = -2$.

Вариант 20.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{3-i}{2+3i} - \dfrac{(3+i)(1-i)}{2i}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2+2i}\right)^{10}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3 - 8 = 0$

   (b) $\cos z = -2$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$1 < |z+1| + |z-3| < 2.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = e^x \cos y$, $f(0) = 1$.

Вариант 21.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i-1}{i+1} - \dfrac{(2-i)(1+i)}{(2+i)(1-i)}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{16}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3 - i + 1 = 0$

   (b) $\sin z = 4$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$z\bar{z} + z + \bar{z} + i\,(z - \bar{z}) = 0.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее мнимой части

$$v(x,y) = x^2 - y^2 + 3x - y,\ f(0) = -1.$$

Вариант 22.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i+1}{i-1} + \dfrac{(1+2i)(1-i)}{(1-2i)(1+i)}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{18}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^3 - 8i = 0$

   (b) $\cos z = -3$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\operatorname{Im}\left(z^2 - \bar{z}\right) = 2 - \operatorname{Im}\bar{z}.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = e^x \sin y + x - 2y,\ f(0) = 0.$

Вариант 23.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{(4+i)(3+i)}{3-i} - \dfrac{(4-i)(3-i)}{3+i}$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{17}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^2 - 81i = 0$

   (b) $\sin z = -4$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию: $|z-2| = \bar{z}$.

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее действительной части $u(x,y) = e^y \sin x + 2x - 3y,\ f(0) = 2$.

Вариант 24.

1. Вычислить значение выражения:

   (a) $\dfrac{i-1}{2+i} - \dfrac{(2-i)(1+i)}{1-i}$

   (b) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+3i}\right)^{12}$

2. Решить уравнение:

   (a) $z^4 - 256 = 0$

   (b) $\cos z = -4$

3. Изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geq -1.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по ее мнимой части

   $v(x,y) = y^2 - x^2 + 3x,\ f(0) = 3.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Вариант 1.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \left\{z:\ 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = \frac{z+1}{z}$;
(2) $D = \left\{z:\ \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi,\ |z| < 8\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ 1 < \operatorname{Re} z < 3,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \{z:\ |z| > 2,\ z \notin [2,\ +\infty)\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < 0\right\}$, $w = \sin z$.

Вариант 2.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \left\{z:\ \frac{1}{2} \le |z| < 1\right\}$, $w = \frac{z}{z+1}$;
(2) $D = \{z:\ 0 < \arg z < \pi,\ |z| < 16\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -1 < \operatorname{Re} z < 2,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3},\ z \notin \{\operatorname{Re} z = 0,\ 0 \le \operatorname{Im} z < 1\}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $w = \sin \pi z$.

Вариант 3.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ \operatorname{Im} z < 2 \operatorname{Re} z,\ |z| < 1\}$, $w = \frac{z-3}{z+3}$;
(2) $D = \left\{z:\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi,\ |z| < 8\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -3 < \operatorname{Re} z < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ \operatorname{Im} z < 0,\ z \notin \left\{|z| = 1,\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < 0\right\}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ \frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $w = \sin z$.

Вариант 4.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z : 1 < |z| < 2\}$, $w = \frac{z}{z-1}$;
(2) $D = \{z:\ -\pi < \arg z < 0,\ |z| < 16\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ \operatorname{Re} z < 3,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ |z| < 1,\ -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{2}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < 0\right\}$, $w = \sin z$.

Вариант 5.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z| < 2,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $w = \frac{z+1}{z-1}$;
(2) $D = \left\{z:\ \pi < \arg z < \frac{3\pi}{2},\ |z| < 8\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ 1 < \operatorname{Re} z,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ \operatorname{Im} z < 0,\ z \notin \left\{|z| = 1, -\frac{\pi}{4} < \arg z < 0\right\}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = \cos z$.

Вариант 6.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = \frac{z+2}{2z+1}$;
(2) $D = \{z:\ 0 < \arg z < \pi,\ |z| > 16\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -2 < \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ |z| < 2,\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ \left|\operatorname{Im} z\right| < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\right\}$, $w = \operatorname{sh} z$.

Вариант 7.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < 2\}$, $w = \frac{z-1}{z+3}$;
(2) $D = \left\{z:\ \frac{3\pi}{2} < \arg z < 2\pi,\ |z| < 8\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < 2,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ |z| < \frac{3}{4},\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = \sin z$.

Вариант 8.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ 1 < |z-1| < 2\}$, $w = \frac{2iz}{z-3}$;
(2) $D = \{z:\ -\pi < \arg z < 0,\ |z| > 16\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ \operatorname{Re} z < 3,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \{z:\ |z| > 1,\ z \notin [-2,\ -1] \cup [1,\ +\infty)\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = \operatorname{ctg} z$.

Вариант 9.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ 1 < \operatorname{Im} z < 2\}$, $w = \frac{iz+2}{z-1}$;
(2) $D = \left\{z:\ \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi,\ |z| > 8\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -2 < \operatorname{Re} z < 2,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \{z:\ \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\right\}$, $w = \sin z$.

Вариант 10.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$, $w = \frac{z}{z-i}$;
(2) $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \frac{2\pi}{3},\ |z| < 16\right\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ 1 < \operatorname{Re} z < 4,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \{z:\ |z| > 2,\ \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $w = \operatorname{ch} z$.

Вариант 11.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \frac{z-1}{z+2}$;
(2) $D = \left\{z:\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi,\ |z| > 8\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -1 < \operatorname{Re} z < 3,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ \frac{1}{3} < |z| < 3,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \operatorname{cth} z$.

Вариант 12.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ 1 < \operatorname{Re} z < 3\}$, $w = (1+i)z + 1$;
(2) $D = \left\{z:\ -\frac{2\pi}{3} < \arg z < 0,\ |z| < 16\right\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ |z| < 1,\ z \notin \left\{\operatorname{Re} z = 0, \frac{1}{2} < \operatorname{Im} z < 1\right\}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < 0\right\}$, $w = \sin z$.

Вариант 13.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ 1 < \operatorname{Im} z < 4\}$, $w = \frac{z+1}{z}$;
(2) $D = \left\{z:\ \pi < \arg z < \frac{3\pi}{2},\ |z| > 8\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ |z| > \frac{3}{2},\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = \operatorname{tg} z$.

Вариант 14.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z+1| < 1,\ \operatorname{Re} z > -1\}$, $w = \frac{2-z}{z+2}$;
(2) $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \frac{2\pi}{3},\ |z| > 16\right\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -1 < \operatorname{Re} z < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ |z| < \frac{1}{2},\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = \operatorname{ch} z$.

Вариант 15.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z-i|>2,\ \operatorname{Im} z<0\}$, $w=\frac{1}{z}$;
(2) $D = \left\{z:\ \frac{3\pi}{2}<\arg z<2\pi,\ |z|<8\right\}$, $w=\sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ 1<\operatorname{Re} z<4,\ 0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{6}\right\}$, $w=e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ |z|<1,\ \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ 0<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z>0\right\}$, $w=\cos z$.

Вариант 16.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z+1+i|<1,\ |z|<1\}$, $w=\frac{z-1}{z+1}$;
(2) $D = \left\{z:\ -\frac{2\pi}{3}<\arg z<0,\ |z|>16\right\}$, $w=\sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -1<\operatorname{Re} z<1,\ 0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{6}\right\}$, $w=e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ \frac{1}{4}<|z|<1,\ z\notin\left[\frac{1}{4},1\right]\right\}$, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ \pi<\operatorname{Re} z<\frac{3\pi}{2}\right\}$, $w=\sin z$.

Вариант 17.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z+1+i|<1,\ |z|>1\}$, $w=\frac{2z+3}{z+i}$;
(2) $D = \left\{z:\ 0<\arg z<\frac{3\pi}{2},\ |z|<8\right\}$, $w=\sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ \operatorname{Re} z<3,\ 0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{3}\right\}$, $w=e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ |z|<\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ -\frac{\pi}{4}<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{4}\right\}$, $w=\operatorname{tg} z$.

Вариант 18.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z-1|<2,\ \operatorname{Im} z\le 0\}$, $w=\frac{z+1}{z-3}$;
(2) $D = \left\{z:\ -\frac{2\pi}{3}<\arg z<\frac{2\pi}{3},\ |z|<16\right\}$, $w=\sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ 1<\operatorname{Re} z<4,\ 0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2}\right\}$, $w=e^z$;
(4) $D = \{z:\ |z|>1,\ z\notin\{\operatorname{Re} z=0,\ 1<\operatorname{Im} z<2\}\}$, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ 0<\operatorname{Re} z<\frac{1}{2}\right\}$, $w=\cos \pi z$.

Вариант 19.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \left\{z:\ |z|<2,\ -\pi<\arg z<-\frac{\pi}{2}\right\}$, $w=\frac{1}{z-2}$;
(2) $D = \left\{z:\ 0<\arg z<\frac{3\pi}{4},\ |z|<8\right\}$, $w=\sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -2<\operatorname{Re} z,\ 0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{4}\right\}$, $w=e^z$;
(4) $D = \{z:\ |z|>1,\ z\notin\{\operatorname{Re} z=0,\ -2<\operatorname{Im} z<-1\}\}$, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re} z<0\right\}$, $w=\sin \pi z$.

Вариант 20.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $w = \frac{z-1}{z}$;
(2) $D = \left\{z:\ -\frac{4\pi}{3} < \arg z < \frac{4\pi}{3},\ |z| < 16\right\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ \operatorname{Re} z < -1,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ \operatorname{Im} z > 0,\ z \notin \left\{|z| = 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{6}\right\}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < 0\right\}$, $w = \operatorname{tg} z$.

Вариант 21.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $\{z:\ |z| < 2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \frac{z-1}{z-2}$;
(2) $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2},\ |z| > 8\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -1 < \operatorname{Re} z,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \{z:\ |z| > 1,\ \operatorname{Re} z > 0,\ z \notin [1,\ 2]\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \{z:\ 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$, $w = z^2 + 1$.

Вариант 22.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z+1| < 2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \frac{z-1}{z+3}$;
(2) $D = \left\{z:\ -\frac{2\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3},\ |z| > 16\right\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ -2 < \operatorname{Re} z,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ |z| > 3,\ -\frac{2\pi}{3} < \arg z < -\frac{\pi}{2}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ |z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = z^3 - i$.

Вариант 23.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \left\{z:\ |z| < 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = \frac{z}{z-1}$;
(2) $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{4},\ |z| > 8\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ \operatorname{Re} z < -1,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{6}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ \frac{1}{2} < |z| < 1,\ z \notin \left[-1, -\frac{1}{2}\right]\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \left\{z:\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = \cos z$.

Вариант 24.

Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

(1) $D = \{z:\ |z| > 1,\ |z - 1 - i| < 1\}$, $w = \frac{z}{z-i}$;
(2) $D = \left\{z:\ -\frac{4\pi}{3} < \arg z < \frac{4\pi}{3},\ |z| > 16\right\}$, $w = \sqrt[4]{z}$;
(3) $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < 2,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = e^z$;
(4) $D = \left\{z:\ 1 < |z| < 2,\ \frac{\pi}{6} < \arg z < \pi\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
(5) $D = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $w = \operatorname{cth} z$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Вариант 1.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = z\cos^2 z,\ \ z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 5z + 6},\ \ z_0 = 1$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z^2 dz}{z^4 - 1},\ \ D = \{z, z \in \mathbb{C}:\ |z| < 2\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 3x}{x^2 - 2x + 5}dx.$

Вариант 2.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \cos z,\ \ z_0 = \frac{\pi}{4}$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 4z + 3},\ \ z_0 = 2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}} dz,\ \ D = \left\{z, z \in \overline{\mathbb{C}}:\ |z| > 4\right\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 5x)\sin x}{x^4 + 2x^2 + 2}dx.$

Вариант 3.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = (z-1)e^z,\ \ z_0 = 2$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z - 2},\ \ z_0 = -1$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz,\ \ D = \{z, z \in \mathbb{C}:\ |z| < 3\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 2x^2 + 2}dx.$

Вариант 4.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \ln(z^2 - 4),\ z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 4},\ z_0 = 1$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z-2}{z^2+1}dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 2\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 10}dx.$

Вариант 5.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \sin 2z \cos 3z,\ z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 5z + 6},\ z_0 = 1$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{1}{z^2(z+1)}dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 2\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx.$

Вариант 6.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = e^z \operatorname{ch} z,\ z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 1},\ z_0 = 2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z^3-1)(z-i)}dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5ix-4)^2}dx.$

Вариант 7.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = z\sin^2 z,\ z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 5z + 6},\ z_0 = -1$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z^3 dz}{z^4 + 1},\ D = \{z, z \in \mathbb{C}:\ |z| < 2\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos 3x}{x^2 - 2x + 5}dx.$

Вариант 8.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \cos z,\ z_0 = \frac{\pi}{3}$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 4z + 3},\ z_0 = 2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z-3}e^{\frac{3}{2z}}dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C}:\ |z| < 4\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+5x)\cos x}{x^4 + 2x^2 + 2}dx.$

Вариант 9.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = (z-1)e^z,\ z_0 = 2$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z - 2},\ z_0 = 3$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z-1)^2}dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C}:\ |z| < 3\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{x^4 + 2x^2 + 2}dx.$

Вариант 10.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \ln(z^2 - 4),\ z_0 = -3$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 4},\ z_0 = -1$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 2\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 10} dx.$

Вариант 11.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \sin z \cos z,\ z_0 = \frac{\pi}{4}$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 5z + 6},\ z_0 = -1$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{1}{(z - 3)(z + 1)^3} dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 2\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx.$

Вариант 12.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = e^z \operatorname{sh} z,\ z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 1},\ z_0 = -2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z^3 - 1)(z - i)^2} dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 5ix - 4)^2} dx.$

Вариант 13.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = (z^2 - 1)\cos z,\ \ z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 5z + 6},\ \ z_0 = -2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z^2 dz}{z^4 + 1},\ \ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 2\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{3ix}}{x^2 - 2x + 5} dx.$

Вариант 14.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \sin z,\ \ z_0 = \frac{\pi}{4}$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 4z + 3},\ \ z_0 = 2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z-2} e^{\frac{1}{z}} dz,\ \ D = \left\{z, z \in \overline{\mathbb{C}} :\ |z| > 3\right\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 5x)e^{x}}{x^4 + 2x^2 + 2} dx.$

Вариант 15.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = (z - 1)e^z,\ \ z_0 = 2$
   (b) $f(z) = \dfrac{z + 1}{z^2 + z - 2},\ \ z_0 = 0$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+2)^3} dz,\ \ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 3\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx.$

Вариант 16.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \ln(z^2 - 9),\ z_0 = 2$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 + 4},\ z_0 = 1$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{e^{2z}}{z^2 - 1} dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 3\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{x^2 - 2x + 10} dx.$

Вариант 17.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \sin z \cos z,\ z_0 = \frac{\pi}{2}$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 5z + 6},\ z_0 = 2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{1}{z(z - 1)^2} dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 2\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 1}{(x^2 + 4)^3} dx.$

Вариант 18.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = e^{2z} \operatorname{ch} z,\ z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 + 1},\ z_0 = 2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z^3 - 1)^2 (z - i)} dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 5ix - 4} dx.$

Вариант 19.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = (z^2 - z)\sin z,\ z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 5z + 6},\ z_0 = -3$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z^3 dz}{z^4 - 1},\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 2\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2 - 2x + 5}dx.$

Вариант 20.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = \sin z,\ z_0 = \frac{\pi}{3}$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 4z + 3},\ z_0 = 2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 3\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 5x)e^{2x}}{x^4 + 2x^2 + 2}dx.$

Вариант 21.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$
   (a) $f(z) = (z-1)e^z,\ z_0 = 2$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z - 2},\ z_0 = 2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z-2)^2} dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ |z| < 3\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2x}}{x^4 + 2x^2 + 2}dx.$

Вариант 22.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$
   (a) $f(z)=\ln(z^2-4),\ z_0=-1$
   (b) $f(z)=\dfrac{2}{z^2+4},\ z_0=1$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{e^z}{z^2+4}dz,\ D=\{z,z\in\mathbb{C}:\ |z|<3\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{2x}}{x^2-2x+10}dx.$

Вариант 23.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$
   (a) $f(z)=\sin z\cos 3z,\ z_0=0$
   (b) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+6},\ z_0=3$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{1}{z^3(z+2)^2}dz,\ D=\{z,z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx.$

Вариант 24.

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$
   (a) $f(z)=e^z\operatorname{ch}2z,\ z_0=0$
   (b) $f(z)=\dfrac{2}{z^2+1},\ z_0=-2$
2. Вычислить интегралы:
   (a) $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{\sin z}{(z^3-1)(z+i)}dz,\ D=\{z,z\in\mathbb{C}:|z-1|<1\};$
   (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{(x^2+5ix-4)^2}dx.$