ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ» КУРСА «МАТЕМАТИКА»

О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки

Саратов 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Учебно-методические материалы для выполнения контрольной работы по теме «Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной» курса «Математика» составлены в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего образования, рабочей программой и фондом оценочных средств курса «Математика» для студентов-бакалавров по направлению подготовки 04.03.01 «Химия» Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение некоторыми численными методами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

В процессе практических занятий по курсу «Математика» студенты учатся применять теоретические знания, полученные на лекциях, к решению конкретных задач математики. Текущий контроль освоения дисциплины «Математика» во втором семестре проводится в виде устного опроса и письменного контроля знаний по разделам: «Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной», «Интегральное исчисление функции одной независимой переменной», «Комплексные числа», «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Цель пособия – помочь студентам подготовиться к выполнению контрольной работы по теме «Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной» курса «Математика».

В пособии даны методические рекомендации по выполнению контрольной работы и критерии ее оценивания, приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала, разбирается решение задач примерных вариантов контрольной работы, приводятся задачи для самостоятельного решения с ответами. Ответы к задачам помогут осуществить контроль за правильностью решения. Для освоения темы приведен необходимый список учебно-методической литературы.

Пособие может быть полезно студентам нематематических специальностей и иных направлений подготовки, изучающих высшую математику.

1. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

В соответствие с рабочей программой курса «Математика» первая контрольная работа во втором семестре проводится по теме: «Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной». На выполнение данной контрольной работы отводится 1 час. Контрольная работа проводится в письменной форме без привлечения какой-либо справочной информации и вспомогательных вычислительных средств (калькулятор, телефон и т.п.).

Для успешного выполнения заданий контрольной работы необходимо повторить основной теоретический материал по теме работы с использованием лекций и списка рекомендованной литературы (см. [1]-[8]) и ответить на контрольные вопросы по теме.

На аудиторном занятии студент получает билет с вариантом контрольной работы. Каждый вариант контрольной работы состоит из нескольких задач. После получения билета необходимо:

– внимательно прочитать условие каждой задачи;

– выбрать алгоритм ее решения;

– провести подробное решение задачи со всеми промежуточными выкладками в соответствии с выбранным методом решения задачи;

– провести анализ полученных результатов и их интерпретацию;

– изложить полученные результаты ясным научным языком, пользуясь научными терминами в соответствии с их смыслом.

Контрольная работа выполняется на отдельном чистом листе, сверху которого обязательно должны быть написаны фамилия студента и номер группы. Для черновых записей используется дополнительный лист.

Задачи контрольной работы можно выполнять в произвольном порядке. Условие каждой задачи должно быть кратко и понятно записано. Результат решения каждой задачи отражается в конечном ответе. Запись решения задач контрольной работы должна быть выполнена аккуратно.

После выполнения, или по окончании времени, отведенном на выполнение, контрольная работа сдается на проверку и оценивается в соответствии с критериями оценивания.

2. Критерии оценивания контрольной работы

Максимально возможное количество баллов, которое может получить студент по теме – 5 баллов.

Каждая задача варианта контрольной работы также оценивается в 5 баллов:

0 баллов – решение задачи отсутствует или выполнено полностью неверно;

1 балл – выбран неоптимальный метод решения; решение не доведено до конца; имеются многочисленные логические и вычислительные ошибки; отсутствуют промежуточные выкладки;

2 балла – выбран неоптимальный метод решения, решение доведено до конца, но с вычислительными ошибками; либо выбран оптимальный метод решения, решение доведено не до конца, но прописан алгоритм решения;

3 балла – выбран оптимальный метод решения, но при решении допущены вычислительные ошибки, или выбран неоптимальный метод решения, но решение получено верно;

4 балла – выбран оптимальный метод решения задачи; решение задач произведено верно, но не совсем подробно, нет обоснований для некоторых действий; получен аналитически и численно верный результат;

5 баллов – выбран оптимальный метод решения поставленной задачи; решение задачи произведено полностью верно, последовательно, подробно; получен аналитически и численно верный результат).

Итоговые баллы за контрольную работу рассчитываются как среднеарифметическое результатов решения каждой задачи.

При получении итоговых баллов от 0 до 2 данная тема определяется как неосвоенная и требуется повторное выполнение контрольной работы.

Повторное выполнение контрольной работы проводится в назначенное дополнительное и свободное от занятий время.

3. Контрольные вопросы к теме: «Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной»

1. Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0?
2. Дать определение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.
3. Каков физический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?
4. Какое движение точки описывается уравнением $y = v_0 x + y_0$ (x – время, v_0 и y_0 – постоянные)?
5. Каков геометрический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?
6. Когда говорят, что функция имеет в точке x_0 бесконечную производную?
7. Привести формулы для производных суммы, разности, произведения и частного двух функций.
8. Сформулировать теорему о производной сложной функции.
9. Дать определение дифференцируемости функции в данной точке.
10. Какова связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной функции?
11. Что такое дифференциал функции в данной точке? От какого аргумента он зависит?
12. Может ли дифференциал функции в данной точке быть постоянной величиной?
13. Для каких функций дифференциал равен приращению функции? Привести примеры.
14. Каков геометрический смысл дифференциала?
15. Каков физический смысл дифференциала?
16. Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала?
17. Как можно использовать дифференциал функции для приближенных вычислений?
18. Дать определение второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.
19. Может ли существовать вторая производная $f''(x_0)$, если не существует первая производная $f'(x_0)$?
20. Дать определение n-ой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.
21. Дать определение дифференциала n-ого порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0.
22. Сформулировать правило Лопиталя раскрытия неопределенностей при вычислении пределов функций.

4. Примерные варианты контрольной работы

Вариант №1

1. Найти производные следующих функций:

$$a)\ y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}};\quad b)\ y=4^{\sin^2 x};\quad c)\ y=\ln\ln x;\quad d)\ y=e^{tgx}-x\cos 2x;$$

$$e)\ y=\frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}.$$

2. Найти y'' функции $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

3. Используя правило Лопиталя, найти предел функции: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

4. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

Р е ш е н и е.

1. Заданные функции являются сложными функциями, поэтому при их дифференцировании будем применять правило дифференцирования сложных функций и соответствующие формулы таблицы производных основных функций.

$$a)\ y'=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)'=-\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(x^2+x+1)'=$$

$$=-\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1)==-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.\blacksquare$$

$$b)\ y'=\left(4^{\sin^2 x}\right)'=4^{\sin^2 x}\ln 4\cdot\left(\sin^2 x\right)'=4^{\sin^2 x}\ln 4\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'=$$

$$=4^{\sin^2 x}\ln 4\cdot 2\sin x\cdot\cos x==4^{\sin^2 x}\ln 4\cdot\sin 2x.\blacksquare$$

$$c)\ y'=(\ln\ln x)'=\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'==\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}==\frac{1}{x\ln x}.\blacksquare$$

$$d)\ y'=(e^{tgx}-x\cos 2x)'=\left(e^{tgx}\right)'-\left(x\cos 2x\right)'=$$

$$=e^{tgx}\cdot(tgx)'-\left((x)'\cdot\cos 2x+x\cdot(\cos 2x)'\right)=$$

$$=e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\left(\cos 2x+x\cdot(-\sin 2x)(2x)'\right)=\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}-\cos 2x+2x\cdot\sin 2x.\blacksquare$$

e) В данном примере целесообразно воспользоваться логарифмическим дифференцированием.

Прологарифмируем обе части данного равенства по основанию e.

$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, в котором функция $\ln y$ является сложной функцией переменной x и $(\ln y)' = \frac{1}{y}y'$, получим

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x+4}.$$

Умножая обе части этого равенства на y, получим искомую производную.

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x+4}\right).\blacksquare$$

2. $y' = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2};$

$$y'' = 2\cdot\left((1-x)^{-2}\right)' = -4\cdot(1-x)^{-3}.\blacksquare$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}.\blacksquare$$

4. Представленная задача относится к задачам, имеющими неопределенность вида: 0^0; ∞^0; 1^∞, которые можно свести к неопределенности вида $0\cdot\infty$, которые, в свою очередь, можно решить с помощью правила Лопиталя. Это достигается с помощью тождества

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)},$$

в предположении, что $f(x) > 0$. Тогда

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} e^{\varphi(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)},$$

и дело сводится к определению $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

Используя вышеизложенный прием, можно записать: $x^x = e^{x\ln x}$, а потому

$$\lim_{x\to +0} x^x = \left[0^0\right] = \lim_{x\to +0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +0} x\ln x} =$$

$$= \left\{\lim_{x\to +0} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{(2.29)}{=} \lim_{x\to +0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to +0} x = 0\right\} =$$

$$= e^0 = 1.\blacksquare$$

Вариант №2

1. Найти производные следующих функций:

$$a)\ y=\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^7;\ b)\ y=e^{ctgx};\ c)\ y=\log_2(x+\sqrt{x});\ d)\ y=tg\frac{1+x}{x};$$

$$e)\ y=\frac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}.$$

2. Найти y'' функции $y=\arcsin x$.

3. Используя правило Лопиталя, найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

4. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

1. Заданные функции являются сложными функциями, поэтому при их дифференцировании будем применять правило дифференцирования сложных функций и соответствующие формулы таблицы производных основных функций.

$$a)\ y'=\left(\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^7\right)'=7\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^6\cdot(3x^4-6x^{-\frac{1}{2}}-2)'=$$

$$=7\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^6\left(3\cdot4\cdot x^3-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=7\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^6\left(12x^3+3\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)=21\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^6\left(4x^3+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).\blacksquare$$

$$b)\ y'=\left(e^{ctgx}\right)'=e^{ctgx}\cdot\left(ctgx\right)'=e^{ctgx}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}.\blacksquare$$

$$c)\ y'=\left(\log_2(x+\sqrt{x})\right)'=\frac{1}{(x+\sqrt{x})\ln 2}\cdot(x+\sqrt{x})'=$$

$$=\frac{1}{(x+\sqrt{x})\ln 2}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{(x+\sqrt{x})\ln 2}\cdot\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})\ln 2}.\blacksquare$$

$$d)\ y'=\left(tg\frac{1+x}{x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}\left(\frac{1+x}{x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}\left(\frac{1}{x}+1\right)'=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2\cos^2\frac{1+x}{x}}.\blacksquare$$

е) В данном примере целесообразно воспользоваться логарифмическим дифференцированием.

Прологарифмируем обе части исходного равенства по основанию e.

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln(x^2+7x-8)+\frac{1}{6}\ln(x^4-1)-\frac{1}{3}\ln(x^3-3x^2+x-4).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства с учетом того, что $(\ln y)' = \frac{1}{y}\cdot y'$, получим

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{4(x^2+7x-8)}\cdot(2x+7)+\frac{1}{6(x^4-1)}\cdot 4x^3 -$$

$$-\frac{1}{3(x^3-3x^2+x-4)}\cdot(3x^2-3x+1).$$

Умножая обе части этого равенства на y, получаем окончательно выражение для производной:

$$y' = \frac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}\left(\frac{2x+7}{4(x^2+7x-8)}+\frac{4x^3}{6(x^4-1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{3x^2-3x+1}{3(x^3-3x^2+x-4)}\right).\blacksquare$$

2. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$y'' = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.\blacksquare$$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1/x}{e^x} = \dfrac{3}{e}.\blacksquare$

4. Представленная задача относится к задачам, имеющими неопределенность вида: 0^0; ∞^0; 1^∞, которые можно свести к неопределенности вида $0\cdot\infty$, которые, в свою очередь, можно решить с помощью правила Лопиталя. Это достигается с помощью тождества

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)},$$

в предположении, что $f(x)>0$. Тогда

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} e^{\varphi(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)},$$

и дело сводится к определению $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

Используя вышеизложенный прием, можно записать: $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, а потому

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x} =$$

$$= \left\{ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{(2.29)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \right\} = e^0 = 1. \blacksquare$$

Вариант №3

1. Найти производные следующих функций:

$a)$ $y = \sqrt[3]{\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}}$. $b)$ $y = 2^{x^2}$; $c)$ $y = \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$; $d)$ $y = arcctg\, 5x^3$;

$e)$ $y = (x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$.

2. Найти y'' функции $y = \sqrt{x+5}$.

3. Используя правило Лопиталя, найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{tg3x}{tg5x}$.

4. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to+0} (1+x)^{\ln x}$.

Решение.

1. Заданные функции являются сложными функциями, поэтому при их дифференцировании будем применять правило дифференцирования сложных функций и соответствующие формулы таблицы производных основных функций.

$$a)\ y' = \left(\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)'.$$

Вычислим отдельно

$$\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)' = \frac{(\sin x - \cos x)'\cdot(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)\cdot(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{((\sin x)' - (\cos x)')\cdot(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)\cdot((\sin x)' + (\cos x)')}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)\cdot(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)\cdot(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{1 + \sin 2x}.$$

Подставим полученный результат в выражение для y'. Тогда

$$y'=\frac{1}{3}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{2}{3}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\frac{1}{(\sin x-\cos x)^{2/3}(\sin x+\cos x)^{4/3}}.=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2(\sin x+\cos x)^4}}.\blacksquare$$

$b)$ $y'=\left(2^{x^2}\right)'=2^{x^2}\ln 2\cdot\left(x^2\right)'=2^{x^2}\ln 2\cdot 2x=x2^{x^2+1}\ln 2.\blacksquare$

$c)$ Перепишем логарифмическую функцию в виде

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\ln(x-1)-\ln x.$$

Тогда

$$y'=\left(\ln(x-1)-\ln x\right)'=\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)'-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}.\blacksquare$$

$d)$ $y'=(arcctg\,5x^3)'=-\frac{1}{1+(5x^3)^2}(5x^3)'=-\frac{1}{1+25x^6}\cdot(5\cdot 3x^2)=$

$$=-\frac{15x^2}{1+25x^6}.\blacksquare$$

$e)$ В данном примере целесообразно воспользоваться логарифмическим дифференцированием, считая функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x, для которой $(\ln y)'=\frac{1}{y}y'$.)

Если $y=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$, то логарифмируя обе части данного выражения по основанию e, получим

$$\ln y=2\ln(x+5)+3\ln(2x-7)+\ln(x-2)+\ln(x+3).$$

Вычислив производную левой и правой части равенства, получим

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{x+5}+\frac{3}{2x-7}\cdot 2+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $y=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$, получим

$$y'=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)\left[\frac{2}{x+5}+\frac{6}{2x-7}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right].\blacksquare$$

2. $y'=\left((x+5)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}};$ $\qquad y''=-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}.\blacksquare$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg3x}{tg5x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(tg3x)'}{(tg5x)'} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{3}{\cos^2 3x}\right)}{\left(\frac{5}{\cos^2 5x}\right)} =$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2 = \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2 = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)^2 = \frac{5}{3}. \blacksquare$$

4. Представленная задача относится к задачам, имеющими неопределенность вида: 0^0; ∞^0; 1^∞, которые можно свести к неопределенности вида $0\cdot\infty$, которые, в свою очередь, можно решить с помощью правила Лопиталя. Это достигается с помощью тождества

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)},$$

в предположении, что $f(x) > 0$. Тогда

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} e^{\varphi(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)},$$

и дело сводится к определению $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

Используя вышеизложенный прием, можно записать: $(1+x)^{\ln x} = e^{\ln x\ln(1+x)}$, а потому

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\ln x} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to+0} e^{\ln x\ln(1+x)} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\ln x\ln(1+x)} =$$

$$= \left\{\lim_{x\to+0}(\ln x\cdot\ln(1+x)) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)}{(\ln x)^{-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{(2.29)}{=} \right.$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)}{-(\ln x)^{-2}\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to+0}\frac{x\ln^2 x}{1+x} = -\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{1/x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{(2.29)}{=} -\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-x^{-2}} =$$

$$\left. = 2\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{(2.29)}{=} 2\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -2\lim_{x\to+0} x = 0\right\} = e^0 = 1. \blacksquare$$

5. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производные функций.

1.1. $y=\left(1+2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)^4$.

1.2. $y=\left(\cos^2 x+\dfrac{2}{3}\right)\sin^3 x$.

1.3. $y=e^x arctge^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

1.4. $y=e^{\sqrt{x}}-x^2tg2x$.

1.5. $y=2^{\sin x}+\sqrt{x}ctg3x$.

1.6. $y=\arccos\sqrt{\dfrac{\cos 3x}{\cos^3 x}}$.

1.7. $y=arctg\,\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

1.8. $y=\ln\dfrac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}$.

1.9. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1.10. $y=\dfrac{1}{2}tg^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

Ответы.

1.1. $y'=4\left(1+2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)^3\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{x^3}\right)$.

1.2. $y'=5\sin^2 x\cos^3 x$.

1.3. $y'=e^x arctge^x$.

1.4. $y'=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-2xtg2x-\dfrac{2x^2}{\cos^2 2x}$.

1.5. $y'=2^{\sin x}\ln 2\cos x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}ctg3x-\dfrac{3\sqrt{x}}{\sin^2 3x}$.

1.6. $y'=-\sqrt{\dfrac{3}{\cos x\cos 3x}}$.

1.7. $y'=-\dfrac{1}{2}$.

1.8. $y'=\dfrac{x^3}{(x^2-2)(3-x^2)}$.

1.9. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.10. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}tg^3\sqrt{x}$.

2. Найти производные функций.

2.1. $y=\dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$.

2.2. $y=x^{x^2}$ $(x>0)$.

2.3. $y=(\sin x)^{tgx}\,(0<x<\pi)$.

Ответы.

2.1. $y'=\dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left[\dfrac{6}{2x-1}+\dfrac{3}{2(3x+2)}-\dfrac{10}{5x+4}+\dfrac{1}{3(1-x)}\right]$.

2.2. $y'=x^{x^2+1}(1+2\ln x)$.

2.3. $y'=(\sin x)^{tgx}(1+\sec^2 x\cdot\ln\sin x)$.

3. Найти производные высших порядков функций.

3.1. Найти y'' функции $y=\dfrac{1}{3}x^2\cdot\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x$.

3.2. Найти y''' функций: $a)$ $y=\dfrac{x}{6(x+1)}$; $b)$ $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$; $c)$ $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

3.3. Найти $y^{(n)}$ функций: $a)$ $y = e^{kx}$; $b)$ $y = \sin x$; $c)$ $y = 2^x + 2^{-x}$.

Ответы.

3.1. $y'' = 2\sqrt{1 - x^2}$.

3.2. $a)$ $y''' = \dfrac{1}{(x+1)^4}$; $b)$ $y''' = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$; $c)$ $y''' = -\dfrac{15}{8x^3\sqrt{x}}$.

3.3. $a)$ $y^{(n)} = k^n e^{kx}$; $b)$ $y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$; $c)$ $y^{(n)} = \left[2^x + (-1)^n 2^{-x}\right]\ln^n 2$.

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы функций.

4.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4}$. 4.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. 4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$. 4.5. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln tgx}{\ln tg2x}$. 4.6. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0}(xctg\pi x)$. 4.8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$. 4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

4.10. $\lim\limits_{x\to +0}(\sin x)^x$; 4.11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$. 4.12. $\lim\limits_{x\to +0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Ответы.

4.1. $\dfrac{3}{5}$. 4.2. 2. 4.3. $\dfrac{1}{3}$. 4.4. $+\infty$. 4.5. 1. 4.6. $\dfrac{1}{2}$.

4.7. $\dfrac{1}{\pi}$. 4.8. $-\dfrac{1}{2}$. 4.9. 0. 4.10. 1. 4.11. 1. 4.12. e^{-6}.

Список рекомендованной литературы

1. *Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П.*. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2009.
2. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Ч.1: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.
3. *Демидович В.П., Кудрявцев В.А.,* Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.
4. *Лунгу К. Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.
5. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.
6. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.
7. *Щипачев В. С.* Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1994.
8. Сорокина О.В., Основы дифференциального исчисления функций одной независимой переменной [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки/ О.В.Сорокина; ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского”.-Саратов:[б.и.], 2015-84 с. Библиогр.: с.84 (6 назв.)