ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ: «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ» КУРСА «МАТЕМАТИКА»

О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки

Саратов 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Учебно-методические материалы для выполнения контрольной работы по теме «Интегральное исчисление функций одной независимой переменной» курса «Математика» составлены в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего образования, рабочей программой и фондом оценочных средств курса «Математика» для студентов-бакалавров по направлению подготовки 04.03.01 «Химия» Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение некоторыми численными методами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

В процессе практических занятий по курсу «Математика» студенты учатся применять теоретические знания, полученные на лекциях, к решению конкретных задач математики. Текущий контроль освоения дисциплины «Математика» во втором семестре проводится в виде устного опроса и письменного контроля знаний по разделам: «Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной»; «Интегральное исчисление функции одной независимой переменной»; «Комплексные числа», «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Цель пособия – помочь студентам подготовиться к выполнению контрольной работы по теме «Интегральное исчисление функций одной независимой переменной» курса «Математика».

В пособии даны методические рекомендации по выполнению контрольной работы и критерии ее оценивания, приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала, разбирается решение задач примерных вариантов контрольной работы, приводятся задачи для самостоятельного решения с ответами. Ответы к задачам помогут осуществить контроль за правильностью решения, а также приведен необходимый список учебно-методической литературы.

Пособие может быть полезно студентам нематематических специальностей и иных направлений подготовки, изучающих высшую математику.

1. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

В соответствие с рабочей программой курса «Математика» вторая контрольная работа во втором семестре проводится по теме: «Интегральное исчисление функций одной независимой переменной». Контрольная работа проводится в письменной форме в течение аудиторного занятия без привлечения какой-либо справочной информации и вспомогательных вычислительных средств (калькулятор, телефон и т.п.).

Для успешного выполнения заданий контрольной работы необходимо повторить основной теоретический материал по теме работы с использованием лекций и списка рекомендуемой литературы (см. [1]-[8]) и ответить на контрольные вопросы по теме.

На аудиторном занятии студент получает билет с вариантом контрольной работы. Каждый вариант контрольной работы состоит из нескольких задач. После получения билета необходимо:

– внимательно прочитать условие каждой задачи;

– выбрать алгоритм ее решения;

– провести подробное решение задачи со всеми промежуточными выкладками в соответствии с выбранным методом решения задачи;

– провести анализ полученных результатов и их интерпретацию;

– изложить полученные результаты ясным научным языком, пользуясь научными терминами в соответствии с их смыслом.

Контрольная работа выполняется на отдельном чистом листе бумаги, сверху которого обязательно должны быть написаны фамилия студента и номер группы. Для черновых записей используется дополнительный лист.

Задачи контрольной работы можно выполнять в произвольном порядке. Условие каждой задачи должно быть кратко и понятно записано. Результат решения каждой задачи отражается в конечном ответе. Запись решения задач контрольной работы должна быть сделана аккуратно.

После выполнения, или по окончании времени, отведенном на выполнение, контрольная работа сдается на проверку и оценивается в соответствии с критериями оценивания.

2. Критерии оценивания контрольной работы

Максимально возможное количество баллов, которое может получить студент по теме – 5 баллов.

Каждая задача варианта контрольной работы также оценивается в 5 баллов:

0 баллов – решение задачи отсутствует или выполнено полностью неверно;

1 балл – выбран неоптимальный метод решения; решение не доведено до конца; имеются многочисленные логические и вычислительные ошибки; отсутствуют промежуточные выкладки;

2 балла – выбран неоптимальный метод решения, решение доведено до конца, но с вычислительными ошибками; либо выбран оптимальный метод решения, решение доведено не до конца, но прописан алгоритм решения;

3 балла – выбран оптимальный метод решения, но при решении допущены вычислительные ошибки, или выбран неоптимальный метод решения, но решение получено верно;

4 балла – выбран оптимальный метод решения задачи; решение задач произведено верно, но не совсем подробно, нет обоснований для некоторых действий; получен аналитически и численно верный результат;

5 баллов – выбран оптимальный метод решения поставленной задачи; решение задачи произведено полностью верно, последовательно, подробно; получен аналитически и численно верный результат).

Итоговый балл за контрольную работу рассчитываеся как среднеарифметическое результатов решения каждой задачи.

При получении итогового балла от 0 до 2 данная тема определяется как неосвоенная и требуется повторное выполнение контрольной работы.

Повторное выполнение контрольной работы проводится в назначенное дополнительное и свободное от занятий время.

3. Контрольные вопросы к теме: «Интегральное исчисление функций одной независимой переменной»

1. Дать определение первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X.
2. Что называют неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке X?
3. Всякая ли функция имеет первообразную?
4. Написать формулу замены переменной в неопределенном интеграле. При каких условиях эта формула справедлива?
5. Написать формулу интегрирования по частям неопределенного интеграла. При каких условиях эта формула справедлива?
6. Почему рассматривается вопрос об интегрировании только правильной рациональной дроби?
7. Что называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$?
8. Какая функция называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$?
9. Что называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$?
10. Является ли интегрируемой на отрезке $[a, b]$ непрерывная на этом отрезке функция?
11. Является ли интегрируемой на отрезке $[a, b]$ монотонная на этом отрезке функция?
12. Перечислить свойства определенного интеграла.
13. Написать формулу Ньютона-Лейбница. При каких условиях она справедлива?
14. Какую кривую называют простой незамкнутой (замкнутой) кривой?
15. Какая кривая называется спрямляемой?
16. Что называется длиной дуги кривой L?
17. Написать формулу для вычисления дуги кривой L, заданной в декартовых координатах.
18. Написать формулу для вычисления дуги кривой L, заданной параметрически.
19. Что такое плоская фигура?
20. Что называется площадью плоской фигуры?
21. Написать формулу для вычисления площади плоской фигуры в декартовых координатах.
22. Написать формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах.

4. Примерные варианты контрольной работы

Вариант №1

1. Вычислить неопределенные интегралы, используя правила интегрирования и метод замены переменной:

$$a) \int\left(3x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx; \qquad b) \int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx; \qquad c) \int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx;$$

$$d) \int\frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx; \qquad e) \int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx.$$

2. Вычислить неопределенный интеграл, используя формулу интегрирования по частям: $\int \ln x dx$.

3. Вычислить интеграл от дробно-рациональной функции: $\int\frac{dx}{x^3-8}$.

4. Вычислить интеграл от тригонометрической функции:
$\int\cos 3x\cos 9x dx$.

5. Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница: $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

1. Интегралы можно вычислить, выполнив алгебраические преобразования подынтегральных функций, используя таблицу интегралов, свойства неопределенных интегралов и метод замены переменной.

$$a) \int\left(3x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx = 3\int x^2dx - 4\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 3\int x^{-\frac{3}{5}}dx =$$

$$= x^3 - 8\sqrt{x} - \frac{15}{2}x^{\frac{2}{5}} + C = x^3 - 8\sqrt{x} - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^2} + C. \blacksquare$$

$$b) \int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx = \int\frac{(\arcsin x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{t = \arcsin x; \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right\} =$$

$$= \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{\arcsin x} + C. \blacksquare$$

$$c) \int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx = \left\{t = e^{2x}; \Rightarrow dt = 2e^{2x}dx; \Rightarrow e^{2x}dx = \frac{1}{2}dt\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}arctgt + C \overset{t=e^{2x}}{=} \frac{1}{2}arctge^{2x} + C. \blacksquare$$

d) При интегрировании данной функции необходимо использовать следующую формулу:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C\,. \tag{1}$$

Тогда

$$\int \frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx = \{t = \sin x;\ \Rightarrow dt = \cos x dx\} = \int \frac{dt}{5+t^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}\right)^2 + x^2} \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} arctg\, \frac{x}{\sqrt{5}} + C\,.\blacksquare$$

e) При интегрировании данной функции необходимо использовать следующую формулу:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + C.$$

Тогда

$$\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx = \left\{f(x) = x^2 - 4x + 8;\ \Rightarrow f'(x) = 2x-4\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 4x + 8\right| + C.\blacksquare$$

2. Интегрирование данной функции проведем с использованием формулы интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du\,,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

При интегрировании по частям в подынтегральном выражении одну из функций принимают за функцию u, а за dv принимается все, что остается под знаком интеграла. При правильном выборе после интегрирования по частям $\int v du$ должен оказаться проще первоначального.

$$\int \ln x dx = \left\{\begin{aligned} &u = \ln x; \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ &dv = dx;\ \Rightarrow v = x \end{aligned}\right\} = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C\,.\blacksquare$$

3. Дробь $\dfrac{1}{x^3-8}$ под знаком интеграла – правильная рациональная дробь, не являющаяся простейшей. Разложим многочлен в знаменателе на простые и квадратичные множители с использование формулы сокращенного умножения:

$$x^3 - 8 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right).$$

Правильная рациональная дробь может быть разложена на простейшие дроби.

$$\frac{1}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{Bx+C}{\left(x^2+2x+4\right)};$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, получим

$$1=A\left(x^2+2x+4\right)+(Bx+C)(x-2);$$

или

$$1=(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+4A-2C.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \multirow{3}{*}{} \\ x & \\ x^0 & \end{array}\quad \begin{cases} A+B=0, \\ 2A-2B+C=0, \\ 4A-2C=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим значения неопределенных коэффициентов:

$$A=\frac{1}{12};\quad B=-\frac{1}{12};\quad C=-\frac{1}{3}.$$

Таким образом, разложение заданной дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{1}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{1}{12}\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{12}\frac{x+4}{\left(x^2+2x+4\right)}.$$

Учитывая полученный результат, вычислим исходный интеграл.

$$\int\frac{dx}{x^3-8}=\int\frac{1}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{1}{(x-2)}dx-\frac{1}{12}\int\frac{x+4}{\left(x^2+2x+4\right)}dx=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{12}\int\frac{x+4}{\left(x^2+2x+4\right)}dx=$$

$$=\left\{\left(x^2+2x+4\right)'=2x+2\Rightarrow x+4=\frac{1}{2}(2x+2)-1+4\Rightarrow x+4=\frac{1}{2}(2x+2)+3\right\}=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)}{\left(x^2+2x+4\right)}dx-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+4\right)}=\left\{x^2+2x+4=(x+1)^2+3\right\}=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln\left(x^2+2x+4\right)-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln\left(x^2+2x+4\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{\left(x^2+2x+4\right)}-\frac{\sqrt{3}}{12}\,arctg\,\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}+C.\blacksquare$$

4. Заменяя подынтегральную функцию по известной тригонометрической формуле

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right),$$

получим

$$\int\cos 3x\cos 9x dx = \frac{1}{2}\int(\sin(-x)+\sin 13x)dx = \frac{1}{2}\int(-\sin x+\sin 13x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{13}\cos 13x\right) + C. \blacksquare$$

5. Имеет место следующая формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Тогда $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} = arctg\sqrt{3} - arctg\,0 = \frac{\pi}{3}. \blacksquare$

Вариант №2

1. Вычислить неопределенные интегралы, используя правила интегрирования и метод замены переменной:

$a)\int \frac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$; $b)\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$; $c)\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

$d)\int \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}$; $e)\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.

2. Вычислить неопределенный интеграл, используя формулу интегрирования по частям: $\int arctgx dx$.

3. Вычислить интеграл от дробно-рациональной функции:

$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

4. Вычислить интеграл от тригонометрической функции:

$\int \sin^4 x\cos^3 x dx$.

5. Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница: $\int\limits_0^1 e^x dx$.

Решение.

1. Интегралы можно вычислить, выполнив алгебраические преобразования подынтегральных функций, используя таблицу интегралов, свойства неопределенных интегралов и метод замены переменной.

$$a)\int \frac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(\frac{x^4}{x^{\frac{1}{3}}}-3\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}}+5\right)dx=\int\left(x^{\frac{11}{3}}-3x^{\frac{5}{3}}+5\right)dx=\int x^{\frac{11}{3}}dx-$$

$$-3\int x^{\frac{5}{3}}dx+5\int dx=\frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}}+5x+C=\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3}{14}x^4-\frac{9}{8}x^2+5\sqrt[3]{x}\right)+C. \blacksquare$$

$$b)\int\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx=\{t=\sin x;\ \Rightarrow dt=\cos x dx\}=\int\frac{dt}{t^5}=\int t^{-5}dt=\frac{t^{-4}}{-4}+C=$$

$$=-\frac{1}{4t^4}+C=-\frac{1}{4\sin^4 x}+C. \blacksquare$$

$$c)\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left\{t=\sqrt[3]{x};\ \Rightarrow x=t^3;\ \Rightarrow dx=3t^2dt\right\}=\int\frac{\sin t}{t^2}\cdot 3t^2dt=$$

$$=3\int\sin t dt=-3\cos t+C\overset{t=\sqrt[3]{x}}{=}-3\cos\sqrt[3]{x}+C. \blacksquare$$

$d)$ При интегрировании данной функции необходимо использовать следующую формулу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C. \qquad (2)$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{49\left(\frac{36}{49}-x^2\right)}} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2-x^2}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{7}\arcsin\frac{7x}{6}+C. ■$$

e) При интегрировании данной функции необходимо использовать следующую формулу:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C.$$

Тогда

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \left\{f(x)=x^2-1;\ \Rightarrow\ f'(x)=2x\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C. ■$$

2. Интегрирование данной функции проведем с использованием формулы интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

При интегрировании по частям в подынтегральном выражении одну из функций принимают за функцию u, а за dv принимается все, что остается под знаком интеграла. При правильном выборе после интегрирования по частям $\int vdu$ должен оказаться проще первоначального.

$$\int arctgxdx = \left\{\begin{aligned} & u=arctgx;\ \Rightarrow du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ & dv=dx;\ \Rightarrow v=x \end{aligned}\right\} = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= \left\{f(x)=1+x^2;\ \Rightarrow\ f'(x)=2x\right\} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C. ■$$

3. Дробь $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ под знаком интеграла – правильная, но не является простейшей, так как дискриминант многочлена второй степени в знаменателе дроби $p^2-4q=9-4\cdot 2>0$. Значения $x=1,\ x=2$ являются корнями этого многочлена, тогда $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ и правильная рациональная дробь может быть разложена на простейшие дроби следующим образом:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)};\quad \Rightarrow 1 = A(x-2)+B(x-1).$$

При $x=1$

$1=A(1-2)+B\cdot 0;\ \Rightarrow 1=-A;\ \Rightarrow A=-1.$

При $x=2$

$1=A\cdot 0+B\cdot(2-1);\ \Rightarrow 1=B;\ \Rightarrow A=1.$

Таким образом, $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{-1}{(x-1)}+\dfrac{1}{(x-2)}$ и можно переходить к вычислению интеграла.

$$\int\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=\int\frac{-1}{(x-1)}dx+\int\frac{dx}{(x-2)}==-\ln|x-1|+\ln|x-2|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.\blacksquare$$

4. Под знаком интеграла имеем произведение функций $\sin x$ и $\cos x$, причем одна из степеней является нечетным числом. Преобразуем подынтегральную функцию к виду:

$$\sin^4 x\cos^3 x=\sin^4 x\cos^2 x\cos x=\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x.$$

Так нечетная степень присутствует у функции $\cos x$, сделаем замену

$$t=\sin x;\ \Rightarrow dt=\cos x dx.$$

Тогда

$$\int\sin^4 x\cos^3 x dx=\int t^4\left(1-t^2\right)dt=\int\left(t^4-t^6\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C.\blacksquare$$

5. Имеет место следующая формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

где $F(x)-$первообразная функции $f(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$.

Следовательно, $\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1.\blacksquare$

Вариант №3

1. Вычислить неопределенные интегралы, используя правила интегрирования и метод замены переменной:

$a)\int\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$; $b)\int\frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$; $c)\int e^{3\cos x}\sin x dx$;

$d)\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx$; $e)\int\frac{x}{x^2-1}dx$.

2. Вычислить неопределенный интеграл, используя формулу интегрирования по частям: $\int\arcsin x dx$.

3. Вычислить интеграл от дробно-рациональной функции:

$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

4. Вычислить интеграл от тригонометрической функции:

$\int\sin^4 x\cos^2 x dx$.

5. Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница: $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$.

Решение.

1. Интегралы можно вычислить, выполнив алгебраические преобразования подынтегральных функций, используя таблицу интегралов, свойства неопределенных интегралов и метод замены переменной.

$$a)\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx=\int\left(x+2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx=\int\left(x+2x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=\int xdx+2\int x^{\frac{1}{6}}dx+\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\left(\frac{7}{6}\right)}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{3}\right)}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C.\blacksquare$$

$$b)\int\frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx=\left\{t=arctgx;\ \Rightarrow dt=\frac{1}{1+x^2}dx\right\}=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{arctg^4 x}{4}+C.\blacksquare$$

$$c)\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=\left\{t=e^{2x};\ \Rightarrow dt=2e^{2x}dx;\ \Rightarrow e^{2x}dx=\frac{1}{2}dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt+C\overset{t=e^{2x}}{=}\frac{1}{2}arctge^{2x}+C.\blacksquare$$

$d)$ При интегрировании данной функции необходимо сначала сделать замену переменной, а потом воспользоваться формулой. Тогда

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx==\left\{t=\cos^2 x;\ \Rightarrow dt=-2\cos x\sin xdx;\ \Rightarrow -dt=\sin 2xdx\right\}=$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = -\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C. \blacksquare$$

e) При интегрировании данной функции необходимо использовать следующую формулу:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

Тогда

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \left\{ f(x) = x^2 - 1; \Rightarrow f'(x) = 2x \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + C. \blacksquare$$

2. Интегрирование данной функции проведем с использованием формулы интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

При интегрировании по частям в подынтегральном выражении одну из функций принимают за функцию u, а за dv принимается все, что остается под знаком интеграла. При правильном выборе после интегрирования по частям $\int vdu$ должен оказаться проще первоначального.

$$\int \arcsin xdx = \left\{ \begin{aligned} & u = \arcsin x; \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ & dv = dx; \Rightarrow v = x \end{aligned} \right\} = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Для вычисления полученного неопределенного интеграла в правой части воспользуемся методом замены переменной.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{ t = 1 - x^2; \Rightarrow dt = -2xdx; \Rightarrow dx = -\frac{dt}{2x} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c.$$

Подставив результат, имеем окончательно

$$\int \arcsin xdx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \blacksquare$$

3. Дробь $\dfrac{3x-1}{x^2-4x+8}$ – правильная, и так как для многочлена в знаменателе дискриминант $p^2 - 4q = 16 - 4 \cdot 8 < 0$, она является простейшей. Наличие выражения $3x - 1$ в числителе данной дроби определяет способ вычисления интеграла, который относится к виду IV (см. [8]). В этом случае при решении следует найти производную знаменателя, выделить эту производную в числителе и представить дробь в виде суммы дробей. Интегрирование каждого слагаемого уже не представляет труда.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \left\{ \left(x^2-4x+8\right)' = 2x-4; \Rightarrow 3x-1 = \frac{3}{2}(2x-4)+6-1 \right\} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + \frac{5}{2} arctg\,\frac{x-2}{2} + C\,.\blacksquare$$

4. Здесь степени у функций $\sin x$ и $\cos x$ – четные числа. В этом случае можно понизить степень подынтегральной функции с помощью следующих тригонометрических формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \qquad (3)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \qquad (4)$$

$$\sin^4 x\cos^2 x = \sin^2 x\cos^2 x\sin^2 x = (\sin x\cos x)^2 \sin^2 x \overset{(4)}{=} \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \sin^2 x =$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2x\cdot\sin^2 x \overset{(3)}{=} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{16}(1-\cos 4x-\cos 2x+$$

$$+\cos 4x\cos 2x) = \frac{1}{16}\left(1-\cos 4x-\cos 2x+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right).$$

Тогда

$$\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{16}\int\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C\,.\blacksquare$$

5. Имеет место следующая формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Следовательно, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\,.\blacksquare$

5. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интегралы с использованием основных свойств и таблицы основных интегралов.

1.1. . $\int x\sqrt{x}dx$.

1.2. $\int\left(x^3-3x^2+5x-4\right)dx$.

1.3. $\int\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt[7]{x^5}}\right)dx$.

1.4. $\int\left(3x^2-5\right)^3dx$.

1.5. $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Ответы.

1.1. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$.

1.2. $\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{5x^2}{2}-4x+C$.

1.3. $15\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+14\cdot\sqrt[7]{x^2}+C$.

1.4. $\frac{27x^7}{7}-27x^5+75x^3-125x+C$.

1.5. $2\arcsin x-x+C$.

2. Вычислить интегралы с использованием метода замены переменной.

2.1. $\int(5x+4)^4dx$.

2.2. $\int\sqrt{1-x}dx$.

2.3. $\int\sqrt{4x^2+8x}(2x+2)dx$.

2.4. $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

2.5. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

2.6. $\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2.7. $\int\frac{dx}{5+16x^2}$.

2.8. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$.

2.9. $\int\frac{e^x}{5+e^x}dx$.

2.10. $\int\frac{1}{x\ln x}dx$.

2.11. $\int\frac{1}{5-x^2}dx.$

2.12. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+17}}dx.$

Ответы.

2.1. $\frac{1}{25}(5x+4)^5+C$.

2.2. $-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C$.

2.3. $\frac{1}{6}\left(4x^2+8x\right)\sqrt{4x^2+8x}+C$.

2.4. $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+C$.

2.5. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+C$.

2.6. $\frac{1}{4}\arcsin^4 x+C$.

2.7. $\frac{1}{4\sqrt{5}}arctg\,\frac{4x}{\sqrt{5}}+C$.

2.8. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x+C$.

2.9. $\ln\left(1+e^x\right)+C.$

2.10. $\ln|\ln x|+C.$

2.11. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}\right|+C.$

2.12. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+17}\right|+C.$

3. Вычислить интегралы с использованием формулы интегрирования по частям.

3.1. $\int x\ln xdx$. 3.2. $\int x^2 arctgxdx$. 3.3. $\int (x+1)e^x dx$.

3.4. $\int x^2 \sin xdx$. 3.5. $\int e^{2x}\cos xdx$. 3.6. $\int \sin\ln xdx$.

Ответы.

3.1. $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$. 3.2. $\frac{x^2}{3}arctgx-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right)+C$.

3.3. xe^x+C. 3.4. $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$.

3.5. $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C$. 3.6. $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$.

4. Вычислить интегралы от простейших дробно-рациональных функций.

4.1. $\int\frac{dx}{5-x}$. 4.2. $\int\frac{dx}{2x-1}$. 4.3. $\int\frac{dx}{(x-2)^3}$. 4.4. $\int\frac{dx}{(2x-1)^4}$.

4.5. $\int\frac{dx}{x^2+4x+14}$. 4.6. $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$. 4.7. $\int\frac{dx}{3x^2-8x+9}$.

4.8. $\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx$.

Ответы.

4.1. $-\ln|5-x|+C$. 4.2. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. 4.3. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+C$.

4.4. $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(2x-1)^3}+C$. 4.5. $\frac{1}{\sqrt{10}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{10}}+C$. 4.6. $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.7. $\frac{1}{\sqrt{11}}arctg\frac{3x-4}{\sqrt{11}}+C$. 4.8. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+7x+14\right|-\frac{13}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+7}{\sqrt{7}}+C$.

5. Вычислить интегралы от правильных дробно-рациональных функций.

5.1. $\int\frac{x+2}{x(x-3)}dx.$ 5.2. $\int\frac{2x^2+x+3}{(x+2)\left(x^2+x+1\right)}dx$.

5.3. $\int\frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}dx$. 5.4. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

5.5. $\int\frac{xdx}{1+x^3}$. 5.6. $\int\frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx$.

Ответы.

5.1. $-\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-3|+C$.

5.2. $-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+3\ln|x+2|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

5.3. $\frac{1}{2(x-2)^2}+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$.

5.4. $\ln\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}+C$.

5.5. $-\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{(x^2-x+1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

5.6. $\frac{31}{108}\ln|x-3|+\frac{29}{108}\ln|x+3|+\frac{2}{9}\ln|x^2+9|-\frac{1}{54}arctg\,\frac{x}{3}+C$.

6. Вычислить интегралы от тригонометрических функций.

6.1. $\int\cos^5 xdx$. 6.2. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$. 6.3. $\int\sin^5 x\cos^2 xdx$.

6.4. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^9 x}dx$. 6.5. $\int\sin^4 xdx$. 6.6. $\int\sin^4 x\cos^4 xdx$

6.7. $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$.

Ответы.

6.1. $\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C$. 6.2. $-\frac{1}{5\sin^5 x}+\frac{1}{3\sin^3 x}+C$.

6.3. $-\left(\frac{\cos^3 x}{3}-\frac{2\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}\right)+C$. 6.4. $-\frac{ctg^5 x}{5}+C$.

6.5. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. 6.6. $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$.

6.7. $\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C$.

7. Вычислить определенные интегралы с использованием формулы Ньютона-Лейбница.

7.1. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$. 7.2. $\int\limits_1^4\frac{dx}{2\sqrt{x}}$. 7.3. $\int\limits_1^e\frac{dx}{x}$. 7.4. $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

7.5. $\int\limits_0^{0,5}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 7.6. $\int\limits_{-1}^0(3x^2+1)dx$. 7.7. $\int\limits_1^8\frac{\theta-\sqrt[3]{\theta}}{\theta}d\theta$. 7.8. $\int\limits_2^8\frac{2+x}{x^2}dx$.

Ответы.

7.1. $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 7.2. 1. 7.3. 1. 7.4. $3(\sqrt[3]{2}-1)$.

7.5. $\frac{\pi}{3}$. 7.6. 2. 7.7. 4. 7.8. $\frac{3}{4}-2\ln 2$.

Список рекомендованной литературы

1. *Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П.*. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2009.

2. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Ч.1: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

3. *Демидович В.П., Кудрявцев В.А.,* Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

4. *Лунгу К. Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.

5. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

6. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

7. *Щипачев В. С.* Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1994.

8. Сорокина О.В., Интегрирование функций [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки/ О.В.Сорокина; ФГБОУ ВПО "Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского".-Саратов:[б.и.], 2015-84 с. Библиогр.: с.84 (6 назв.)-Б.ц.