ОПЕРАТОРЫ С РАЗРЫВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ

Саратов
2018

УДК 517.51
ББК 22.162я73
Х94

Х94 **Хромова Г. В. Операторы с разрывной областью значений в задачах приближения функций и некорректных задачах :** учеб. пособие для студ. матем. спец. [Электронный ресурс]. – Саратов, 2018. – 59 с.

Учебное пособие содержит материалы разд. 4 из коллективной монографии «Новые методы аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа» (Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. 296 с. ISBN 978-5-292-04391-1). Рассматриваются методы приближения и восстановления непрерывных функций и методы решения интегральных уравнений 1 рода.

Для аспирантов и студентов математических специальностей.

Рекомендуют к печати:
кафедра математической физики и вычислительной математики
ФГБОУ ВО «СГУ имени Н. Г. Чернышевского»
доктор физико-математических наук, профессор *С. П. Сидоров*

УДК 517.51
ББК 22.162я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В теории приближения функций при решении целого ряда задач используются интегралы с дельтаобразными ядрами [1].

Это интегралы вида

$$\int_a^b K_\alpha(x,t)f(t)dt \qquad (\alpha > 0 \text{ — параметр}),$$

удовлетворяющие условиям:

1) ядро $K_\alpha(x,t)$ неотрицательно и интегрируемо по t;

2) для любого малого $\eta > 0$ $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_{|x-t|>\eta} K_\alpha(x,t)dt = 0$;

3) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_{|x-t|\leqslant\eta} K_\alpha(x,t)dt = 1$ равномерно для x из промежутка $a < a_1 \leqslant x \leqslant b_1 < b$.

Тогда справедлива

Теорема 0.1. *Для любой $f(x) \in C[a,b]$ имеет место сходимость*

$$\|K_\alpha f - f\|_{C_{[a_1,b_1]}} \to 0 \textit{ при } \alpha \to \alpha_0.$$

Оператор K_α оказывает усредняющее действие на функцию $f(x)$. При этом усреднение может быть либо локальным, т. е. действующим на функцию в окрестности точки x (пример — известный оператор Стеклова), либо глобальным, т.е. действует на функцию на всем отрезке $[a,b]$ (пример — оператор Ландау [1]).

Недостатком указанных выше интегралов является затруднение при получении равномерных приближений к непрерывным функциям на всем отрезке их задания. С целью устранения этого недостатка делались попытки модификации операторов K_α (особенно это относится к наиболее простому из них — оператору Стеклова).

В настоящей работе для решения указанной задачи приводится специальный достаточно общий способ модификации операторов K_α. Характерной особенностью построения модификаций является разрывная в одной точке область их значений (мы будем в дальнейшем называть полученные операторы разрывными), а также то, что они весьма просто конструируются.

Общая идея данного подхода была высказана А. П. Хромовым [2]. Здесь эта идея проводится на операторах Стеклова и Ландау. Кроме того, на базе полученных разрывных операторов строятся другие семейства разрывных операторов, которые применяются не только для решения задач из теории приближений, но и достаточно сложных задач из других разделов математики.

В частности, строятся простые и эффективные методы регуляризации нескольких некорректно поставленных задач, при этом даже в тех случаях, когда классические методы неприменимы.

Кратко остановимся на содержании работы.

Глава 1 посвящена оператору Стеклова. В параграфе 1.1 дается определение оператора Стеклова, приводятся три известные его модификации с непрерывной областью значений и вводится разрывный оператор Стеклова. В параграфе 1.2 разрывный оператор Стеклова применяется для получения равномерных приближений к непрерывным функциям на отрезке. Затем на базе указанного оператора строятся семейства других разрывных операторов, которые применяются для получения равномерных приближений к непрерывным производным (любого порядка) функций, заданных на отрезке. Достоинством построенных операторов является их интегральный вид. Это позволяет применять их в задачах, где исходные данные заданы их среднеквадратичными приближениями, что является важным для приложений.

В параграфе 1.3 приводятся основные принципы построения методов регуляризации решения уравнений 1-го рода, а также ранее предложенный Г. В. Хромовой специальный подход к построению таких методов, основанный на привлечении операторов из теории приближений [3].

В параграфе 1.4 с помощью операторов, введенных в параграфе 1.2, решается простейшая некорректная задача — задача получения равномерных приближений к непрерывной функции $f(x)$ по её среднеквадратичному δ-приближению — так называемая задача восстановления функции $f(x)$, а затем задача восстановления производной любого порядка функции, заданной на отрезке [4]. Эти задачи имеют прикладное значение, поскольку связаны с обработкой экспериментальных данных физических задач.

В параграфе 1.5 на базе операторов из параграфа 1.2 решается обратная задача для обыкновенного дифференциального уравнения — задача определения правой части уравнения про приближенно заданному решению [5]. К такой математической постановке приводит одна из обратных задач математической физики.

Параграф 1.6 посвящен решению уравнения Абеля. При этом в п. 1.6.1 строится метод регуляризации для уравнения Абеля, использующий разрывный оператор Стеклова [6]. Метод прост по конструкции и доказательствам теорем, но работает лишь при ограничении на параметр, входящий в уравнение Абеля.

С целью устранения этого ограничения в п. 1.6.2 строится другой метод регуляризации, использующий иной разрывный оператор, сформированный из квадратов левостороннего и правостороннего операторов Стеклова [7].

В главе 2 на базе известного оператора Ландау строится разрывный оператор и исследуются его аппроксимационные свойства. Кроме этого дается модификация оператора Ландау и на её основе конструируется другой разрывный оператор, имеющий ряд преимуществ перед первым [8]. Приводится решение задачи восстановления непрерывных функций на отрезке с получением неулучшаемой по порядку оценки погрешности приближенного решения на некотором классе функций. В этой же главе рассматриваются другие разрывные операторы.

Отметим, что почти во всех задачах, рассмотренных в данной работе, решается вопрос об оценке погрешности приближенных решений. Этот вопрос для некорректных задач, в частности для уравнения Абеля, является не простым.

1 РАЗРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР СТЕКЛОВА

1.1 Оператор Стеклова и его модификации. Понятие разрывного оператора Стеклова

В. А. Стеклов ввел в рассмотрение оператор $\frac{1}{\alpha}\int\limits_x^{x+\alpha} f(t)dt$, который был назван его именем. Наряду с ним оператором Стеклова также называются операторы $\frac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)dt$ и $\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)dt$. Мы будем называть первый из них правосторонним оператором Стеклова, второй — левосторонним, третий — симметричным оператором Стеклова.

Полагаем, что $f(x) \in C[0,1]$. Чтобы значения этих операторов не выходили за пределы этого отрезка, считаем, что при каждом фиксированном α в правостороннем операторе Стеклова $x \in [0, 1-\alpha]$, в левостороннем $x \in [\alpha, 1]$, в симметричном $x \in [\alpha, 1-\alpha]$.

Приведем здесь три известные модификации оператора Стеклова, позволяющие получать равномерные приближения к $f(x)$ на всем отрезке $[0,1]$.

Модификация 1 [9]:

$$\tilde{S}_\alpha f = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha-x} f(t)\,dt + \frac{1}{2\alpha}\int\limits_{\alpha-x}^{\alpha+x} f(t)\,dt, & x \in [0,\alpha], \\ \frac{1}{2\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\,dt, & x \in [\alpha, 1-\alpha], \\ \frac{1}{2\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{2-\alpha-x} f(t)\,dt + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{2-\alpha-x}^{1} f(t)\,dt, & x \in [1-\alpha, 1]. \end{cases}$$

Модификация 2:

$$\tilde{S}_\alpha f = \begin{cases} \frac{1}{x+\alpha}\int\limits_0^{x+\alpha} f(t)\,dt, & x \in [0,\alpha], \\ \frac{1}{2\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\,dt, & x \in [\alpha, 1-\alpha], \\ \frac{1}{1-x+\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{1} f(t)\,dt, & x \in [1-\alpha, 1]. \end{cases}$$

(Как нам известно, эта модификация была предложена Ю. А. Субботиным.)

Модификация 3 [10]:

$$\bar{S}_\alpha f = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{(1-\alpha)x}^{(1-\alpha)x+\alpha} f(t)\,dt.$$

Все эти операторы имеют непрерывную область значений и каждый из них при $\alpha \to 0$ дает сходимость к $f(x)$ в равномерной метрике на отрезке $[0,1]$.

Теперь построим разрывный оператор Стеклова следующим образом. Возьмем правосторонний оператор Стеклова, но будем рассматривать его на отрезке $[0,1/2]$, а левосторонний — на отрезке $[1/2,1]$, т.е. построим оператор

$$S_\alpha f = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)\,dt = S_{\alpha 2} f, & x \in [0,1/2], \\ \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)\,dt = S_{\alpha 1} f, & x \in [1/2,1], \end{cases} \tag{1.1}$$

Такая запись предполагает, что мы считаем несущественным, какие именно значения приписывать функции $S_\alpha f$ при $x = 1/2$.

Потребуем, чтобы значения этого оператора не выходили за границы отрезка, т.е. чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{2} + \alpha \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} - \alpha \geqslant 0.$$

Отсюда получим несущественное ограничение на α: $\alpha \leqslant 1/2$.

Функции $S_\alpha f$ терпят разрыв 1-го рода в точке $x = 1/2$. Поэтому мы будем их рассматривать как элементы подпространства из $L_\infty[0,1]$ с нормой:

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max(\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}). \tag{1.2}$$

1.2 Получение равномерных приближений к функциям и их производным

Теорема 1.1. *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ имеет место сходимость*

$$\|S_\alpha f - f\|_{L_\infty} \to 0, \quad \alpha \to 0.$$

Доказательство. Поскольку $S_{\alpha j}1 = 1$, то получаем

$$\|S_{\alpha 2}f - f\|_{C[0,1/2]} \leqslant \omega(\alpha),$$
$$\|S_{\alpha 1}f - f\|_{C[1/2,1]} \leqslant \omega(\alpha),$$

где $\omega(\alpha)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[0,1]$. Отсюда и из (1.2) следует утверждение теоремы. □

Конструкция операторов, определенных в (1.1), позволяет строить из них семейства операторов, с помощью которых можно получать равномерные приближения к производным функций, заданных на отрезке.

Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$. Из операторов (1.1) построим операторы

$$S_\alpha^{(2)}f = \begin{cases} S_{\alpha 2}^2 f, & x \in [0,1/2], \\ S_{\alpha 1}^2 f, & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Лемма 1.1. *Операторы* $S_{\alpha 1}^2$ *и* $S_{\alpha 2}^2$ *имеют вид*

$$\begin{aligned} S_{\alpha 1}^2 f &= \frac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha}(2\alpha-(x-t))f(t)dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x}(x-t)f(t)dt\right], \\ S_{\alpha 2}^2 f &= \frac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x}^{x+\alpha}(t-x)f(t)dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}(2\alpha-(t-x))f(t)dt\right] \\ &\qquad (\alpha \leqslant 1/4). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Доказательство получается, если к повторным интегралам в выражениях для функций $S_{\alpha 1}^2 f$ и $S_{\alpha 2}^2 f$ применить формулу интегрирования по частям.

Например:

$$\int\limits_{x}^{x+\alpha}\int\limits_{t}^{t+\alpha} f(\tau)\,d\tau\,dt = \Big[t\int\limits_{t}^{t+\alpha} f(\tau)d\tau\Big]_x^{x+\alpha} - \int\limits_{x}^{x+\alpha} t[f(t+\alpha)-f(t)]\,dt =$$

$$= (x+\alpha)\int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} f(t)\,dt - x\int\limits_{x}^{x+\alpha} f(\tau)\,d\tau - \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}(\tau-\alpha)f(\tau)d\tau + \int\limits_{x}^{x+\alpha} tf(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{x}^{x+\alpha} (t-x)f(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t-x))f(t)\,dt.$$

Ограничение на α налагается по аналогии с соответствующими ограничениями для операторов S_α.

Теперь построим операторы:

$$DS_\alpha^{(2)} f = \begin{cases} DS_{\alpha 2}^2 f, & x \in [0, 1/2], \\ DS_{\alpha 1}^2 f, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Лемма 1.2. *Операторы $DS_{\alpha 1}^2$ и $DS_{\alpha 2}^2$ имеют вид*

$$DS_{\alpha 1}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha} f(t)\,dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)\,dt \right],$$

$$DS_{\alpha 2}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} f(t)\,dt \right].$$

Доказательство следует из формул (1.3). □

Теорема 1.2. *Для любой непрерывной функции $f(x)$ выполняется сходимость*

$$\|S_\alpha^{(2)} f - f\|_{L_\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1. □

Теорема 1.3. *Для $f(x) \in C^1[0,1]$ выполняется сходимость*

$$\|DS_\alpha^{(2)} f - f'\|_{L_\infty} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$

Доказательство. Имеем очевидное равенство

$$DS_{\alpha j} f = S_{\alpha j} f', \quad j = 1, 2.$$

Отсюда следует

$$DS_{\alpha j}^2 f = DS_{\alpha j}(S_{\alpha j} f) = S_{\alpha j} DS_{\alpha j} f = S_{\alpha j}^2 f'.$$

Значит, $\|DS_\alpha^{(2)} f - f'\|_{L_\infty} = \|S_\alpha^{(2)} f' - f'\|_{L_\infty} \to 0$ при $\alpha \to 0$ по теореме 1.2.

Пусть теперь $f(x) \in C^m[0,1]$, $m \geqslant 1$ — любое целое положительное число. Рассмотрим следующие операторы:

$$S_\alpha^{(m)} f = \begin{cases} S_{\alpha 2}^m f, & x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1}^m f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$$D^m S_\alpha^{(m+1)} f = \begin{cases} D^m S_{\alpha 2}^{m+1} f, x \in [0, 1/2], \\ D^m S_{\alpha 1}^{m+1} f, x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где D^m — оператор дифференцирования порядка m.

Теорема 1.4. *Справедливы следующие представления:*

$$D^m S_{\alpha 1}^{m+1} f = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_1(x - k\alpha), \tag{1.4}$$

$$D^m S_{\alpha 2}^{m+1} f = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_2(x + (m-k)\alpha), \tag{1.5}$$

где $m \geqslant 1$, $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2(m+1)}$,

$$F_1(x) = \int\limits_{x-\alpha}^{x} u(\xi)\, d\xi, \quad F_2(x) = \int\limits_{x}^{x+\alpha} u(\xi) d\xi.$$

Доказательство. При $m = 1$ формулы (1.4) и (1.5) верны — они получены в лемме (1.2). Пусть они верны для $m = p$. Формула (1.5) при $m = p$ будет иметь вид

$$D^p S_{\alpha 2}^{p+1} f = \alpha^{-(p+1)} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k F_2(x + (p-k)\alpha). \tag{1.6}$$

Положим теперь $m = p + 1$. Очевидно, что

$$D^{p+1} S_{\alpha 2}^{p+2} f = \alpha^{-1} D (D^p S_{\alpha 2}^{p+1} F_2).$$

Отсюда получаем

$$D^{p+1} S_{\alpha 2}^{p+2} f = \alpha^{-(p+2)} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k D \int\limits_{x+(p-k)\alpha}^{x+(p-k+1)\alpha} F_2(\xi) d\xi.$$

Проведя дифференцирование, получим

$$D^{p+1}S^{p+2}_{\alpha 2}f = \alpha^{-(p+2)}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k\big[F_2(x+(p-k+1)\alpha)-F_2(x+(p-k)\alpha)\big].$$

Приведем подобные члены в правой части последнего равенства. Пользуясь свойством сочетаний $C_p^k + C_p^{k-1} = C_{p+1}^k$, приходим к формуле (1.6) с заменой p на $p+1$. Отсюда по индукции получаем формулу (1.5) для любого $m > 1$.

Для операторов $D^m S^{m+1}_{\alpha 1}$ проводим доказательство по той же схеме, заменяя $F_2(x+(p-k)\alpha)$ на $F_1(x-k\alpha)$.

Далее, чтобы аргументы функций $D^m S^{m+1}_{\alpha j}$, $j = 1, 2$ не выходили за границу отрезка $[0, 1]$, мы должны потребовать в соответствии с (1.4) и (1.5) выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} &x-(m+1)\alpha \geqslant 0, \quad x\in[0,1/2],\\ &x+(m+1)\alpha \leqslant 1, \quad x\in[1/2,1]. \end{aligned}$$

Это приводит к ограничению на α: $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2(m+1)}$, которое не является существенным в нашей задаче.

Теорема 1.5. *Для любой* $f(x) \in C^m[0,1]$, $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2(m+1)}$ *имеет место сходимость*

$$\|D^m S^{m+1}_{\alpha} f - f^{(m)}\|_{L_\infty} \to 0 \quad \textit{при} \quad \alpha \to 0. \tag{1.7}$$

Доказательство. Сходимость (1.7) эквивалентна сходимостям

$$\begin{aligned} &\|D^m S^{m+1}_{\alpha 2} f - f^{(m)}\|_{C[0,1/2]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0,\\ &\|D^m S^{m+1}_{\alpha 1} f - f^{(m)}\|_{C[1/2,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Далее из равенства $DS_{\alpha j}f = S_{\alpha j}Df$ получаем для любого $l \geqslant 1$

$$DS^l_{\alpha j}f = DS_{\alpha j}S^{l-1}_{\alpha j}f = S_{\alpha j}DS^{l-1}_{\alpha j}f = S^2_{\alpha j}DS^{l-2}_{\alpha j}f = \ldots = S^l_{\alpha j}Df. \tag{1.9}$$

Отсюда следует

$$D^m S^l_{\alpha j}f = D^{m-1}S^l_{\alpha j}Df = D^{m-2}DS^l_{\alpha j}Df = D^{m-2}S^l_{\alpha j}D^2 f = \ldots = S^l_{\alpha j}D^m f.$$

Таким образом, при $l = m+1$ получаем

$$D^m S_{\alpha j}^{m+1} f = S_{\alpha j}^{m+1} f^{(m)}.$$

Но для любого $l \geqslant 1$ и любой непрерывной $\varphi(x)$, очевидно, выполняется сходимость

$$S_{\alpha j}^{l} \varphi \to \varphi(x)$$

равномерно по $x \in [0, 1/2]$ для $j = 2$ и $x \in [1/2, 1]$ для $j = 1$.

Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1.1. Теорема 1.5 справедлива для всех операторов вида $D^m S_\alpha^{m+l}$ где $l \geqslant 1$, но из соображений целесообразности мы рассматривали для приближения функций $f^{(m)}(x)$ операторы $D^m S_\alpha^{m+1}$, содержащие наименьшую из возможных степеней оператора Стеклова и сохраняющие при этом интегральный вид, что представляет интерес при решении прикладных задач.

1.3 Основные принципы построения методов регуляризации для уравнений 1-го рода

Рассматрим уравнение

$$Au = f, \tag{1.10}$$

где A — линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства X_1 в банахово пространство X_2. Считаем, что A^{-1} существует, но неограничен. В этом случае уравнение (1.10) называется уравнением 1-го рода.

Очевидно, здесь нарушается третье требование корректности по Адамару — требование непрерывной зависимости решения от исходных данных. В связи с этим рассматривается задача приближенного решения уравнения (1.10) в следующей постановке.

Считается, что точная правая часть f нам неизвестна (так и бывает при решении прикладных задач), а вместо нее известно δ-приближение к f, т.е. последовательность элементов f_δ такая, что $\|f_\delta - f\|_{X_2} \leqslant \delta$. Требуется по f_δ и δ построить такую последовательность элементов u_δ, чтобы $\|u_\delta - u\|_{X_1} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Решение поставленной задачи осложняется еще и тем, что неограниченность оператора A^{-1} влечет за собой нарушение первого требования корректности — требования существования решения для любого f из X_2. Действительно, если для данной правой части f решение существует и единственно, то это не означает, что данное утверждение справедливо для любого f — иначе бы по теореме Банаха об обратном операторе A^{-1} был бы ограничен.

Таким образом, элементы f_δ не обязаны принадлежать области значений оператора A, и мы не можем их подставить в правую часть уравнения.

Чтобы избежать указанных трудностей и получить решение поставленной задачи, применяются специальные методы, называемые методами регуляризации. Основополагающими работами, положившими начало теории методов решения уравнений 1-го рода, являются работы А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова (см., например, [11–13]).

Методы регуляризации состоят из двух принципиальных моментов:

1) построение семейства линейных операторов R_α , зависящих от параметра α, действующих из пространства X_2 в пространство X_1 и обладающих свойствами:

а) каждый из операторов R_α определён на всем пространстве X_2;

б) $\|R_\alpha\|_{X_2\to X_1} \leqslant \infty$ при каждом значении α;

в) при $\alpha \to 0$

$$\|R_\alpha f - u\|_{X_1} \to 0; \tag{1.11}$$

2) согласование параметра α с погрешностью $\delta : \alpha = \alpha(\delta)$ такое, что $\alpha(\delta) \to 0$:

$$\delta \|R_{\alpha(\delta)}\|_{X_2\to X_1} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{1.12}$$

Определение 1.1. Семейство линейных операторов R_α, $\alpha > 0$ — параметр, удовлетворяющее условиям а)–в), называется *регуляризирующим семейством* для уравнения (1.10); параметр α называется *параметром регуляризации.* Если соотношение (1.11) выполняется не на всем пространстве X_1, а для $M \in X_1$, где M — некоторый класс элементов из X_1, то семейство $\{R_\alpha\}$ называется *регуляризирующим на классе* M; оператор R_α при фиксированном значении α называется *регуляризирующим оператором.* Если стремление к пределу в (1.11) равномерно относительно $u \in M$, то сам класс называется *классом равномерной регуляризации.*

Существование регуляризирующего семейства является условием, достаточным для разрешимости задачи приближённого решения уравнения (1.10). Действительно, из оценки

$$\|R_\alpha f_\delta - u\|_{X_1} \leqslant \delta \|R_\alpha\|_{X_2\to X_1} + \|R_\alpha f - u\|_{X_1} \tag{1.13}$$

получаем, что параметр α можно так согласовать с погрешностью δ ($\alpha = \alpha(\delta)$), что будет выполняться (1.12), а отсюда следует стремление к нулю правой части (1.13) при $\alpha = \alpha(\delta)$, $\delta \to 0$. Таким образом, метод регуляризации (или метод R_α) — это метод приближённого решения уравнения (1.10) с помощью регуляризирующего семейства R_α при согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, обеспечивающем предельные соотношения (1.12). Условия же (1.11), (1.12) являются достаточными для сходимости приближённого решения $u_\delta \equiv T_{\alpha(\delta)} f_\delta$ к точному.

Лемма 1.3. *Имеет место сходимость*

$$\|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1} \to \infty \quad \textit{при} \quad \alpha \to 0.$$

Доказательство следует из сходимости (1.11). Действительно, запишем (1.11) в виде

$$\|R_\alpha f - A^{-1} f\|_{X_1} \leqslant \varepsilon, \quad \alpha \leqslant \alpha_0,$$

и предположим, что $\|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1} \leqslant K$, где K не зависит от α. Тогда из оценки

$$\|A^{-1} f\|_{X_1} - \|R_\alpha\|_{X_1} \leqslant \|R_\alpha f - A^{-1} f\|_{X_1}$$

следует, что оператор A^{-1} ограничен — приходим к противоречию.

Итак, согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ выбирается из соотношений (1.12), значит, определяется неоднозначно. Вопрос в том, какому именно согласованию отдать предпочтение в каждом конкретном случае, не может быть решен, если нет никакой дополнительной информации о точном решении уравнения (1.10). Если же $u \in M$, где M — класс равномерной регуляризации, тогда можно найти точную формулу для $\alpha = \alpha(\delta)$ и получить оценку погрешности приближенного решения на классе M.

Остановимся подробнее на этих вопросах.

Введем величины

$$\Delta(\delta, R_\alpha, u) = \sup\{\|R_\alpha f_\delta - u\|_{X_1} : \|f_\delta - f\|_{X_2} \leqslant \delta\},$$

$$\Delta(\delta, R_\alpha, M) = \sup\{\|R_\alpha f_\delta - u\|_{X_1} : u \in M, \|f_\delta - f\|_{X_2} \leqslant \delta\}, \tag{1.14}$$

$$\Delta_1(R_\alpha A, M) = \sup\{\|R_\alpha A u - u\|_{X_1} : u \in M\}. \tag{1.15}$$

Определение 1.2. *Погрешностью метода* $R_{\alpha(\delta)}$ *в точке* будем называть величину $\Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, u)$; *погрешностью метода* $R_{\alpha(\delta)}$ *на классе* $M \subset X_1$ будем называть величину $\Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, M)$.

Теорема 1.6. *Для сходимости* $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ *условия* (1.12) *являются необходимыми и достаточными.*

Доказательство проводится по аналогии с теоремой 1 из [14]. Достаточность следует из оценки (1.13).

Докажем необходимость. Пусть $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$. Требуется доказать сходимость (1.11) и сходимость $\delta\|R_\alpha\|_{X_2\to X_1} \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$. Имеем

$$\|R_\alpha f - u\|_{X_1} = \Delta(\delta, R_\alpha, u)|_{\delta=0} \leqslant \Delta(\delta, R_\alpha, u)|_{\delta>0}.$$

Отсюда следует (1.11). Далее рассмотрим величину $\delta\|R_\alpha\|_{X_2\to X_1}$. Очевидно, её можно представить в виде

$$\delta\|R_\alpha\|_{X_2\to X_1} = \sup\{\|R_\alpha(f_\delta - f)\|_{X_1} : \|f_\delta - f\|_{X_2} \leqslant \delta\}.$$

В то же время

$$\begin{aligned} &\sup\{\|R_\alpha f_\delta - R_\alpha f\|_{X_1} : \|f_\delta - f\|_{X_2} \leqslant \delta\} \leqslant \\ &\leqslant \sup\{\|R_\alpha f_\delta - u\|_{X_1} : \|f_\delta - f\|_{X_2} \leqslant \delta\} + \|R_\alpha f - u\|_{X_1} = \\ &= \Delta(\delta, R_\alpha, u) + \|R_\alpha f - u\|_{X_1}. \end{aligned}$$

Поскольку оба слагаемых в правой части этой оценки стремятся к нулю при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$, отсюда следует сходимость $\delta\|R_\alpha\|_{X_2\to X_1} \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$.

Теорема 1.7. *При любых и имеет место двусторонняя оценка:*

$$\frac{1}{2}\varphi(\delta, R_\alpha, M) \leqslant \Delta(\delta, R_\alpha, M) \leqslant \varphi(\delta, R_\alpha, M), \tag{1.16}$$

где

$$\varphi(\delta, R_\alpha, M) = \Delta_1(R_\alpha A, M) + \delta\|R_\alpha\|_{X_2\to X_1}. \tag{1.17}$$

Доказательство следует из равенств

$$\Delta_1(R_\alpha A, M) = \Delta(\delta, R_\alpha, M)|_{\delta=0}, \quad \delta\|R_\alpha\|_{X_2\to X_1} = \Delta(\delta, R_\alpha, M)|_{f=0}$$

и того, что из $f = 0$ следует $u = 0$. □

Г. В. Хромовой был предложен метод получения оценок погрешностей приближенных решений, не улучшаемых по порядку δ, и формул для согласования α с δ, обеспечивающего такие оценки [15].

Этот метод схематически заключается в следующем.

1. Находится представление

$$\Delta_1(R_\alpha A, M) = \varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha), \tag{1.18}$$

где $\psi_1(\alpha) = o(\varphi_1(\alpha))$ при $\alpha \to 0$, либо двусторонняя оценка

$$C_2\varphi_1(\alpha) + \tilde{\psi}_1(\alpha) \leqslant \Delta_1(R_\alpha A, M) \leqslant C_1\varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha), \tag{1.19}$$

где $\tilde{\psi}_1(\alpha), \psi_1(\alpha)$ суть $o(\varphi_1(\alpha))$.

2. Находятся аналогичное представление для $\|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1}$:

$$\|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1} = \varphi_2(\alpha) + \psi_2(\alpha) \tag{1.20}$$

либо оценка

$$C_3\varphi_2(\alpha) + \tilde{\psi}_2(\alpha) \leqslant \|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1} \leqslant C_4\varphi_2(\alpha) + \psi_2(\alpha), \tag{1.21}$$

где $\tilde{\psi}_2(\alpha), \psi_2(\alpha)$ суть $o(\varphi_2(\alpha))$.

3. Составляется функция

$$\Phi(\delta, \alpha) = \varphi_1(\alpha) + \delta\varphi_2(\alpha)$$

и находится $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\Phi(\delta, \alpha) \to \inf_\alpha$.

Тем самым определяется метод $R_{\alpha(\delta)}$.

4. Найденное согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ подставляется в оценку (1.16). В результате получается оценка погрешности, точная по порядку δ и не улучшаемая по порядку δ для данного метода регуляризации, поскольку $\Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, M) \simeq \inf_\alpha \Delta(\delta, R_\alpha, M)$.

Будем в дальнейшем рассматривать случай, когда $X_1 = C[a, b]$, $X_2 = L_2[a, b]$.

Если мы хотим получить решение поставленной выше задачи для любой непрерывной функции $u(x)$ (без каких-либо дополнительных условий), то ни один из классических методов (метод А. Н. Тихонова, метод В. К. Иванова) не дают нам такой возможности. В связи с этим в [3] был предложен метод регуляризации, использующий конструкцию оператора A^{-1} и базирующийся на применении операторов из теории приближений.

В общей постановке он выглядит так.

Пусть T_α (α — параметр) — семейство операторов, действующих в пространстве X_1 и таких, что $\|T_\alpha u - u\|_{X_1} \to 0$ при $\alpha \to 0$ для любого $u \in X_1$ либо для любого $u \in M \subset X_1$, если заранее известно, что $u \in M$. Имеем

$$T_\alpha u = T_\alpha A^{-1} Au \equiv R_\alpha Au,$$

где $R_\alpha = T_\alpha A^{-1}$ определен на множестве значений оператора A.

Теорема 1.8. *Если операторы R_α можно продолжить так, что они будут линейными ограниченными при каждом α операторами, действующими из X_2 в X_1, то семейство $\{R_\alpha\}$ является регуляризирующим для уравнения* (1.10).

Доказательство тривиально, поскольку сходимость (1.11) изначально задается. □

Таким образом, предложенный метод регуляризации позволяет получать приближенные решения уравнения (1.10) и при отсутствии дополнительных условий на точное решение, и при наличии таких дополнительных условий, которые определяются возможностями приближающих операторов T_α.

В случае когда $X_1 = C[a,b]$, $X_2 = L_2[a,b]$, этот метод конкретизирован на целом ряде операторов T_α, дающих приближение к непрерывным функциям. В их числе рассматривался и оператор Стеклова (симметричный, а также расширенный для всего отрезка [4, 9, 16]).

Здесь мы используем разрывный оператор Стеклова и различные конструкции из него. Но тогда при постановке задачи приближенного решения уравнения (1.10) мы делаем акцент на получении равномерных приближений к непрерывной функции $u(x)$, не привязываясь к метрике пространства $C[0,1]$, а рассматривая приближающие функции из более широкого пространства. Это приводит к более широкому понятию семейства регуляризирующих операторов: мы рассматриваем их как операторы, действующие из пространства $L_2[0,1]$ в пространство $L_\infty[0,1]$ с метрикой, определенной в (1.2).

Лемма 1.4. *Если K — интегральный оператор с ядром $K(x,t)$, действующий из пространства $L_2[0,1]$ в пространство $L_\infty[0,1]$ с нормой* (1.2), *то справедлива формула*

$$\|K\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]} =$$
$$= \max\Big(\max_{x\in[0,1/2]}\Big(\int_0^1 K^2(x,t)dt\Big)^{1/2}, \max_{x\in[1/2,1]}\Big(\int_0^1 K^2(x,t)dt\Big)^{1/2}\Big). \quad (1.22)$$

Доказательство вытекает из (1.2) и формулы для нормы интегрального оператора, действующего из L_2 в C.

1.4 Решение задачи восстановления функций и их производных

1.4.1 Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана ее δ-приближением в среднеквадратичной метрике $L_2[0,1] : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta$. Задачу получения равномерных приближений к $f(x)$ по заданныме f_δ и δ мы называем задачей восстановления функции $f(x)$. Это простейшая некорректно поставленная задача.

Общая постановка задачи восстановления элемента $f \in X_1$ по его δ-приближению f_δ в пространство X_2 ($X_1 \subset X_2$ и $\|\cdot\|_{x_2} \leqslant K\|\cdot\|_{X_1}$) дана в [17], где было предложено решать её с помощью метода А. Н. Тихонова. В [18] была установлена связь этой задачи с уравнением (1.10), в котором A есть оператор вложения из X_1 в X_2 . Поскольку в этом случае u и f — один и тот же элемент, только рассматриваемый в первом случае как элемент пространства X_1, а во втором — как элемент прострaства X_2, то мы в дальнейшем будем обозначать его одной и тот же буквой f. Указанная связь задачи восстановления с уравнением 1-го рода нам нужна здесь для того, чтобы пользоваться принципами построения методов регуляризации.

Отметим, что уравнение (1.10) с оператором вложения из X_1 в X_2 является простейшим уравнением 1-го рода и может служить модельным уравнением при отработке различных исследований по некорректным задачам.

Г. В. Хромовой было дано решение задачи восстановления для $X_1 = C[a,b]$, $X_2 = L_2[a,b]$ в различных вариантах с применением и метода Тихонова, и методов из [3] (см., например, [3, 9, 19]).

Рассмотрим решение указанной в начале этого пункта задачи методом из [3] при $T_\alpha = S_\alpha$ из (1.1).

Теорема 1.9. *Операторы S_α являются регуляризирующими для задачи восстановления из $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$. При этом справедливо утверждение: для сходимости*

$$\Delta(\delta, S_\alpha, f) \equiv \sup\{\|S_\alpha f_\delta - f\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\} \to 0$$

при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям:

1) $\alpha(\delta) \to 0$;

2) $\delta(\alpha(\delta))^{-1/2} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство. Очевидно, что операторы S_α могут рассматриваться как действующие из $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$. Далее справедлива формула

$$\|S_\alpha\|_{L_2 \to L_\infty} = \alpha^{-1/2}, \tag{1.23}$$

которая вытекает из вида операторов S_α и формулы (1.22).

Отсюда и из теоремы 1.1 следует, что операторы S_α — регуляризирующие. Последнее утверждение теоремы является конкретизацией теоремы 1.6 применительно к нашему случаю.

Пусть известно, что $f(x) \in \mathrm{Lip}_K 1$.

Теорема 1.10. *Если $f(x) \in \mathrm{Lip}_K 1$, то справедлива двусторонняя оценка, не улучшаемая по порядку δ:*

$$M^{1/3}\delta^{2/3} \leqslant \Delta(\delta, S_{\alpha(\delta)}, \mathrm{Lip}_K 1)) \leqslant \frac{3}{2} M^{1/3}\delta^{2/3}, \tag{1.24}$$

где

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{\delta}{K}\right)^{2/3}. \tag{1.25}$$

Доказательство проводится по схеме, приведенной в параграфе 1.3. Справедлива формула

$$\Delta_1(S_\alpha, \mathrm{Lip}_K 1)) = \frac{K}{2}\alpha. \tag{1.26}$$

Действительно, имеем

$$\|S_{\alpha 2} f - f\| = \left\| \frac{1}{\alpha} \int\limits_x^{x+\alpha} (f(t) - f(x))dt \right\| \leqslant \frac{K}{\alpha} \int\limits_x^{x+\alpha} (t - x)dt = \frac{K\alpha}{2}.$$

Точно такая же оценка справедлива для $\|S_{\alpha 1} f - f\|$. Отсюда следует оценка

$$\Delta_1(S_\alpha, \mathrm{Lip}_K 1)) \leqslant \frac{K}{2}\alpha.$$

В то же время

$$\sup\{\|S_{\alpha 2} f - f\|_{L_\infty} : f \in \mathrm{Lip}_K 1\} \geqslant \|S_{\alpha 2} f_0 - f_0\|_{C[0,1/2]} \geqslant |S_{\alpha 2} f_0 - f_0|_{x=0},$$

где $f_0(x) = Mx$.

Отсюда следует оценка $\Delta_1(S_\alpha, \mathrm{Lip}_K 1)) \geqslant \frac{K}{2}\alpha$, что приводит к равенству (1.26).

Из (1.23), (1.26) вытекает равенство

$$\Phi(\delta, \alpha) \equiv \varphi(\delta, S_\alpha, \mathrm{Lip}_K 1) = \frac{K}{2}\alpha + \delta\alpha^{-1/2}.$$

Выбирая $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\Phi(\delta, \alpha) \to \inf\limits_\alpha$, приходим к (1.25). Далее, учитывая, что $\max\{\Delta_1(S_{\alpha(\delta)}, \mathrm{Lip}_K 1), \delta\|S_{\alpha(\delta)}\|_{L_2 \to L_\infty}\} = M^{1/3}\delta^{2/3}$, мы приходим к (1.24).

1.4.2 Рассмотрим задачу получения равномерных приближений к производной порядка m функции $f(x)$, заданной её среднеквадратичным приближением $f_\delta(x)$. Для решения задачи используем операторы, представленные в (1.4), (1.5).

Введем в рассмотрение величину

$$\Delta^{(m)}(\delta, S_\alpha^{(m+1)}, f) = \sup\{\|D^m S_\alpha^{(m+1)} f_\delta - f^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} : \ \|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]} \leqslant \delta\}.$$

Лемма 1.5. *Справедлива формула*

$$\|D^m S_\alpha^{(m+1)}\|_{L_2 \to L_\infty} = C_m \alpha^{-\frac{2m+1}{2}},$$

где $C_m = ((m+1)\cdots 2m(m!)^{-1})^{1/2}$.

Доказательство. Имеем

$$\|D^m S_\alpha^{(m+1)}\|_{L_2 \to L_\infty} =$$
$$= \max\left\{\|D^m S_{\alpha 2}^{m+1}\|_{L_2[0,1] \to C[0,1/2]}, \|D^m S_{\alpha 1}^{m+1}\|_{L_2[0,1] \to C[1/2,1]}\right\}.$$

Из формул (1.4), (1.5) получаем

$$D^m S_{\alpha j}^{m+1} f = \alpha^{-(m+1)} \int\limits_0^1 K_{\alpha j}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где $K_{\alpha 1}(x, \xi) \neq 0$ лишь при $\xi \in [x - (m+1)\alpha, x]$, $x \in [1/2, 1]$, $K_{\alpha 2}(x, \xi) \neq 0$ — при $\xi \in [x, x + (m+1)\alpha]$, $x \in [0, 1/2]$. При этом $K_{\alpha j}(x, \xi) = (-1)^k C_m^k$, $k = 0, \dots, m$, если $\xi \in [x - (k+1)\alpha, x - k\alpha]$ для $j = 1$ и $\xi \in [x + (m-k)\alpha, x + (m-k+1)\alpha]$ для $j = 2$.

Далее имеем

$$\|D^m S_{\alpha j}^{m+1}\|_{L_2[0,1]\to C[c,d]} = \alpha^{-(m+1)} \max_{c\leqslant x\leqslant d} \left(\int\limits_0^1 K_{\alpha j}^2(x,\xi)\, d\xi \right)^{1/2},$$

где $[c,d]=[1/2,1]$ для $j=1$, $[c,d]=[0,1/2]$ для $j=2$.

Очевидно [20, с. 66], что

$$\int\limits_0^1 K_{\alpha j}^2(x,\xi)\, d\xi = \alpha \sum_{k=0}^{m} (C_m^k)^2 = \alpha C_{2m}^m.$$

Отсюда и из формулы $C_{2m}^k = \dfrac{(2m)!}{k!(2m-k)!}$ при $k=m$ получаем утверждение леммы. □

Теорема 1.11. *Для сходимости* $\Delta^{(m)}(\delta, S_\alpha^{(m+1)}, f) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ *необходимо и достаточно выполнения согласования* $\alpha = \alpha(\delta)$ *такого, что* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta \cdot (\alpha(\delta))^{-(2m+1)/2} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Утверждение теоремы следует из теоремы 1.6 и леммы 1.4.

Получим конкретное согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, а на его базе — оценку погрешности приближения производной для случая $m=1$, $f(x)\in M$, где $M = \{f(x) \in C^1[0,1] : f'(x) \in \mathrm{Lip}_K\beta,\ 0<\beta\leqslant 1\}$.

Рассмотрим величины

$$\Delta_1^{(1)}(DS_\alpha^{(2)}, M) = \sup\{\|DS_\alpha^{(2)} f - f'\|_{L_\infty} : f\in M\},$$

$$\Delta^{(1)}(\delta, DS_\alpha^{(2)}, M) = \sup\{\|DS_\alpha^{(2)} f_\delta - f'\|_{L_\infty} : f\in M, \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\}.$$

Лемма 1.6. *Справедливо равенство*

$$\Delta_1^{(1)}(DS_\alpha^{(2)}, M) = KC_\beta \alpha^\beta,$$

где

$$C_\beta = (2^{1+\beta}-1)(2+\beta)^{-1}(1+\beta)^{-1}.$$

Доказательство. В теореме 1.3 установлено равенство $DS_\alpha^{(2)} f = S_\alpha^{(2)} f'$, где операторы $S_\alpha^{(2)}$ имеют вид (1.3). Отсюда следует, что

$$\Delta_1^{(1)}(DS_\alpha^{(2)}, M) = \Delta_1^{(1)}(S_\alpha^{(2)}, \mathrm{Lip}_K\beta).$$

Далее используем оценку для $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_K \beta$:

$$|\varphi(t) - \varphi(x)| \leqslant K|t - x|^\beta$$

и равенство $S_\alpha^{(2)} 1 \equiv 1$.

Тогда из (1.3) получаем на отрезке $[0, 1/2]$

$$\|S_{\alpha 2}^2 \varphi - \varphi\| = \frac{1}{\alpha^2} \Bigg| \int\limits_x^{x+\alpha} (t - x)(\varphi(t) - \varphi(x))dt +$$

$$+ \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t - x))(\varphi(t) - \varphi(x))dt \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha^2} \left(\int\limits_x^{x+\alpha} (t - x)^{1+\beta} dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t - x))(t - x)^\beta dt \right).$$

Проведя вычисления, имеем

$$\int\limits_x^{x+\alpha} (t - x)^{1+\beta} dt = \frac{\alpha^{2+\beta}}{2 + \beta},$$

$$\int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} 2\alpha (t - x)^\beta dt = \frac{2\alpha^{2+\beta}}{1 + \beta}(2^{\beta+1} - 1),$$

$$- \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (t - x)^{\beta+1} dt = -\frac{\alpha^{2+\beta}}{2 + \beta}(2^{\beta+2} - 1).$$

Отсюда приходим к оценке

$$\|S_{\alpha 2}^2 \varphi - \varphi\| = 2K(2^{\beta+1} - 1)(2 + \beta)^{-1}(1 + \beta)^{-1}\alpha^\beta.$$

Такая же оценка имеет место на отрезке $[1/2, 1]$. Таким образом, справедлива оценка

$$\Delta_1^{(1)}(S_\alpha^{(2)}, \mathrm{Lip}_K \beta) = K C_\beta \alpha^\beta,$$

которая достигается на функции $\varphi_0 = K x^\beta$. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Теорема 1.12. *Справедлива двусторонняя оценка, не улучшаемая по порядку* δ*:*

$$C_1(\beta)\delta^{\frac{2\beta}{2\beta+3}} \leqslant \Delta(\delta, DS^{(2)}_{\alpha(\delta)}, M) \leqslant C_2(\beta)\delta^{\frac{2\beta}{2\beta+3}}, \tag{1.27}$$

где

$$\alpha(\delta) = D(\beta)\delta^{\frac{2}{2\beta+3}}, \tag{1.28}$$

$$D(\beta) = 3^{\frac{2}{2\beta+3}}(K\beta C_\beta 2^{1/2})^{-\frac{2}{2\beta+3}},$$

$$C_1(\beta) = \frac{1}{2}C_2(\beta), C_2(\beta) = (KC_\beta)^{\frac{3}{2\beta+3}}(3\beta^{-1}2^{-1/2})^{\frac{2\beta}{2\beta+3}}.$$

Доказательство. Из леммы 1.4 при $m = 1$ имеем

$$\|DS^{(2)}_\alpha\|_{L_2\to L_\infty} = 2^{1/2}\alpha^{-3/2}.$$

Отсюда и из леммы 1.5 имеем

$$\Phi(\delta, \alpha) \equiv \varphi(\delta, DS^{(2)}_\alpha, M) = KC_\beta\alpha^\beta + 2^{1/2}\delta\alpha^{-3/2},$$

а из $\Phi(\delta, \alpha) \to \inf\limits_\alpha$ получаем (1.28).

Подставляя (1.28) в оценку (1.16), получаем (1.27).

1.5 Решение задачи об определении плотности тепловых источников

В этом параграфе дано решение одной известной обратной задачи математической физики с помощью разрывных операторов, построенных в параграфе 1.2.

Рассматривается задача об определении плотности тепловых источников в тонком стержне длины l, в котором установилась стационарная температура с нулевыми значениями на концах, по известной температуре.

Введем следующие обозначения: $u(x) \in C^2[0, l]$ — температура в сечении с абсциссой x, $f(x)$ — плотность тепловых источников, $k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $q(x)$ — коэффициент теплообмена. Считаем, что $k(x) \in C[0, l]$, $q(x) \in C[0, l]$ — известные функции.

Требуется найти равномерные приближения к $f(x)$ в случае, когда $u(x)$ задана нам приближенно, т. е. вместо $u(x)$ известна $u_\delta(x)$ такая, что $\|u_\delta - u\|_{C[0,l]} \leqslant \delta$.

В математической постановке эта задача сводится к определению правой части уравнения

$$k(x)u''(x) + k'(x)u'(x) - q(x)u(x) = f(x),$$

где $u(0) = u(l) = 0$, по известной $u(x)$.

Если $u(x)$ — точная температура, то $f(x)$ находится тривиально. Если же $u(x)$ задана приближенно, то в силу неустойчивости операции дифференцирования для нахождения приближений к $f(x)$ требуется привлечение методов регуляризации.

В [21] применялась регуляризация с помощью разностных формул численного дифференцирования. При этом приближенное решение получалось на внутренних из $[0, l]$ отрезках, границы которых должны быть увязаны с шагом разностных формул.

Примененные конструкции из разрывного оператора Стеклова позволяют устранить этот недостаток: получены равномерные приближения к $f(x)$ на всем отрезке.

Рассматриваемая задача является частным случаем общей некорректной задачи определения правой части дифференциального уравнения

$$a_n(x)u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = f(x)$$

с краевыми условиями

$$U_i(u) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и непрерывными коэффициентами, когда нам известно приближение к $u(x)$ в равномерной метрике.

Рассмотрим сначала семейство операторов

$$T_\alpha u = \begin{cases} T_{\alpha 2}u, & x \in [0, l/2], \\ T_{\alpha 1}u, & x \in [l/2, l], \end{cases}$$

где $T_{\alpha j} \equiv DS^2_{\alpha j}, j = 1, 2$ определены в лемме 1.2.

В теореме 1.3 показано, что

$$\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty[0,l]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0$$

для любой $u(x) \in C^1[0, l]$.

Теперь на базе операторов T_α построим семейство операторов

$$T_\alpha^{(2)}u = \begin{cases} T_{\alpha 2}^{(2)}u, & x \in [0, l/2], \\ T_{\alpha 1}^{(2)}u, & x \in [l/2, l]. \end{cases}$$

Лемма 1.7. *Для любой $u(x) \in C^2[0,l]$ выполняется сходимость*

$$\|T_\alpha^2 u - u''\|_{L_\infty[0,l]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$T_\alpha^{(2)}u = S_\alpha^{(4)}u'',$$

где

$$S_\alpha^{(4)} = \begin{cases} S_{\alpha 2}^4, & x \in [0, l/2], \\ S_{\alpha 1}^4, & x \in [l/2, l]. \end{cases}$$

Действительно, из равенства $DS_{\alpha j}^2 u = S_{\alpha j}^2 u'$, $j = 1, 2$, установленного в доказательстве теоремы 1.3, вытекает

$$T_{\alpha j}^2 u = T_{\alpha j}(T_{\alpha j}u) = S_{\alpha j}^2 D S_{\alpha j}^2 D u = S_{\alpha j}^4 D^2 u,$$

т. е. $T_{\alpha j}^2 u = S_{\alpha j}^4 u''$.

Но $S_{\alpha j}^4 \varphi \to \varphi$ при $\alpha \to 0$ для любой непрерывной $\varphi(x)$ (сходимость в равномерной метрике). Отсюда и из (1.2) следует утверждение леммы.□

Лемма 1.8. *Для операторов $T_{\alpha j}^2$, $j = 1, 2$, справедливы представления*

$$T_{\alpha 2}^2 u = \alpha^{-4}\Bigg[\int_x^{x+\alpha}(t-x)u(t)\,dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha}(4\alpha - 3(t-x))u(t)\,dt +$$

$$+ \int_{x+2\alpha}^{x+3\alpha}(-8\alpha + 3(t-x))u(t)\,dt + \int_{x+3\alpha}^{x+4\alpha}(4\alpha - (t-x))u(t)\,dt\Bigg], \qquad (1.29)$$

$$T_{\alpha 1}^2 u = \alpha^{-4}\Bigg[\int_{x-4\alpha}^{x-3\alpha}(4\alpha - (x-t))u(t)\,dt + \int_{x-3\alpha}^{x-2\alpha}(3(x-t) - 8\alpha)u(t)\,dt +$$

$$+ \int_{x-2\alpha}^{x-\alpha}(4\alpha - 3(x-t))u(t)\,dt + \int_{x-\alpha}^{x}(x-t)u(t)\,dt\Bigg]. \qquad (1.30)$$

Доказательство. Имеем

$$T_{\alpha 2}^{2}u = \alpha^{-4}\Bigg\{ -\int\limits_{x}^{x+\alpha}\Bigg[-\int\limits_{t}^{t+\alpha} u(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t+\alpha}^{t+2\alpha} u(\tau)d\tau\Bigg]\,dt +$$

$$+ \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}\Bigg[-\int\limits_{t}^{t+2\alpha} u(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t+\alpha}^{t+2\alpha} u(\tau)d\tau\Bigg]\,dt\Bigg\},$$

или

$$T_{\alpha 2}^{2}u = \alpha^{-4}[I_1 + I_2 + I_3 + I_4], \tag{1.31}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{x}^{x+\alpha}\int\limits_{t}^{t+\alpha} u(\tau)\,d\tau\,dt, \quad I_2 = -\int\limits_{x}^{x+\alpha}\int\limits_{t}^{t+2\alpha} u(\tau)\,d\tau\,dt,$$

$$I_3 = -\int\limits_{x}^{x+2\alpha}\int\limits_{t}^{t+2\alpha} u(\tau)\,d\tau\,dt, \quad I_4 = -I_{2|x\to x_1 = x+\alpha}.$$

Далее

$$I_1 = \int\limits_{x}^{x+\alpha}(t-x)u(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}(2\alpha - (t-x))u(t)\,dt$$

(см. выражение для $S_{\alpha 2}^{2}f$ в лемме 1.1). При подсчете I_2 берем внешний интеграл по частям, затем делаем замены переменных $t_1 = t + 2\alpha$ и $t_2 = t + \alpha$, собираем слагаемые с одинаковыми пределами и приходим к выражению

$$I_2 = -\int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}((t-x)-\alpha)u(t)dt - \int\limits_{x+2\alpha}^{x+3\alpha}(3\alpha - (t-x))u(t)\,dt.$$

Далее очевидно, что $I_3 = I_1|_{x\to x_1 = x+\alpha}$. Сделав указанную замену, приходим к тому, что

$$I_3 = I_2.$$

Подставим полученные выражения в формулу (1.31), соберем слагаемые, содержащие интегралы с одинаковыми пределами интегрирования, получим представление (1.29).

Представление (1.30) получается из (1.29) при замене x на $x-4\alpha$.

Подсчитаем нормы $\|T_\alpha\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]}$ и $\|T_\alpha^{(2)}\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]}$. Справедлива

Лемма 1.9. *Имеют место формулы*

$$\|T_\alpha\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]} = 2\alpha^{-1}, \quad \|T_\alpha^{(2)}\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]} = \frac{8}{3}\alpha^{-2}. \tag{1.32}$$

Доказательство. По аналогии с формулой (1.22) из (1.2) вытекает формула

$$\|T_\alpha\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]} = \max\left\{\max_{0\leqslant x\leqslant \frac{l}{2}}\int_0^l |T_{\alpha 2}(x,t)|dt, \max_{\frac{l}{2}\leqslant x\leqslant 1}\int_0^l |T_{\alpha 1}(x,t)|dt\right\},$$

где $T_{\alpha j}(x,t)$, $j=1,2$, — ядра интегральных операторов $T_{\alpha j}$, $j=1,2$, и такая же формула с заменой ядер операторов $T_{\alpha j}$ на ядра операторов $T^2_{\alpha j}$ справедлива для нормы $\|T_\alpha^{(2)}\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]}$. Тогда первая из формул (1.32) вытекает из вида операторов T_α, приведенного в лемме 1.2.

Получим вторую формулу. После замены переменных $\tau = t-x$ в выражении (1.29) получим

$$\int_0^l |T^2_{\alpha 2}(x,t)|\,dt = \alpha^{-4}\left(\int_0^\alpha \tau\,d\tau + \int_\alpha^{2\alpha}|4\alpha-3\tau|\,d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_{2\alpha}^{3\alpha}|3\tau-8\alpha|\,d\tau + \int_{3\alpha}^{4\alpha}(4\alpha-\tau)\,d\tau\right). \tag{1.33}$$

Учитываем, что выражение $4\alpha-3\tau$ положительно при $\tau<\frac{4}{3}\alpha$ и отрицательно при $\tau>\frac{4}{3}\alpha$, выражение $3\tau-8\alpha$ положительно при $\tau>\frac{8}{3}\alpha$ и отрицательно при $\tau<\frac{8}{3}\alpha$. В соответствии с этим разбиваем второй и третий интегралы в скобках на сумму двух, затем подсчитываем все интегралы в правой части выражения (1.33) и приходим к формуле

$$\int_0^l |T^2_{\alpha 2}(x,t)|dt = \frac{8}{3}\alpha^{-2}.$$

Точно такую же формулу получаем для $\int_0^l |T^2_{\alpha 1}(x,t)|dt$. Отсюда следует вторая формула в лемме 1.8.

Введем в рассмотрение величины

$$\Delta^{(1)}(\delta, T_\alpha, u) = \sup\{\|T_\alpha^{(1)} u_\delta - u'\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_c \leqslant \delta\},$$
$$\Delta^{(2)}(\delta, T_\alpha^{(2)}, u) = \sup\{\|T_\alpha^{(2)} u_\delta - u''\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_c \leqslant \delta\}.$$

По аналогии с теоремой 1.1 справедлива

Теорема 1.13. *Для сходимости $\Delta^{(1)}(\delta, T_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям: 1) $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и 2) $\delta(\alpha(\delta))^{-1} \to 0$ при $\delta \to 0$. Для сходимости $\Delta^{(2)}(\delta, T_\alpha^{(2)}, u) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условию 1) и условию 3) $\delta(\alpha(\delta))^{-2} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Теперь построим приближенное решение нашей задачи с помощью операторов T_α и $T_\alpha^{(2)}$. Рассмотрим функцию

$$f_\delta^\alpha(x) = k(x) T_\alpha^{(2)} u_\delta(x) + k'(x) T_\alpha u_\delta(x) - q(x) u_\delta(x).$$

Теорема 1.14. *При согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющем условиям 1) и 3), указанным в теореме 1.13, имеет место сходимость*

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\|_{L_\infty[0,l]} \to 0, \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Доказательство. Очевидна оценка

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leqslant K \|T_\alpha^{(2)} u_\delta - u''\|_{L_\infty} + K_1 \|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} + Q\delta, \tag{1.34}$$

где $K = \|k(x)\|_{C[0,l]}$, $K_1 = \|k_1(x)\|_{C[0,l]}$, $Q = \|q(x)\|_{C[0,l]}$.

Поскольку

$$\|T_\alpha^{(2)} u_\delta - u''\|_{L_\infty} \leqslant \Delta^{(2)}(\delta, T_\alpha^{(2)}, u) \quad \text{и} \quad \|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} \leqslant \Delta^{(1)}(\delta, T_\alpha, u),$$

а согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия 3) теоремы 1.14 обеспечивает и согласование из условия 2) теоремы 1.13, то отсюда вытекает утверждение теоремы.

Таким образом, приближенное решение поставленной задачи строится по следующей схеме:

1) вычисляются функции $v_\delta^\alpha(x) = T_\alpha u_\delta$ и $w_\delta^\alpha(x) = T_\alpha v_\delta^\alpha$;

2) выбирается согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ по теореме 1.14;

3) составляется функция

$$f_\delta \equiv f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) = k(x)w_\delta^{\alpha(\delta)}(x) + k'(x)v_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - q(x)u_\delta(x).$$

При наличии дополнительных условий на функцию $u(x)$ укажем конкретную формулу для выбора $\alpha = \alpha(\delta)$ и получим оценку погрешности приближенного решения.

Обозначим

$$M = \max_{0\leqslant x\leqslant l} |u''(x)|$$

и будем считать, что эта константа нам известна и, кроме того, $u''(x) \in \mathrm{Lip}_{M_1} 1$. Тогда справедлива

Лемма 1.10. *При каждом фиксированном α выполняются оценки*

$$\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty} \leqslant 2M\alpha, \quad \|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty} \leqslant 4M_1\alpha.$$

Доказательство. Доказательство первой оценки вытекает из равенства $T_\alpha u = S_\alpha^{(2)} u'$, второй — из равенства $T_\alpha^{(2)} u = S_\alpha^{(u)} u''$. □

Теорема 1.15. *Если $M = \|u''(x)\|_{C[0,l]}$ и $u''(x) \in \mathrm{Lip}_{M_1} 1$, то справедлива оценка*

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)} - f\|_{L_\infty} \leqslant C_1\delta^{1/3} + C_2\delta^{2/3} + Q\delta, \tag{1.35}$$

где

$$\alpha(\delta) = C\delta^{1/3}, \tag{1.36}$$

$$C = \left(\frac{4}{3}K\right)^{1/3} (2KM_1 + K_1M)^{-1/3},$$

$$C_1 = 4(2KM_1 + K_1M)^{2/3}\left(\frac{4}{3}K\right)^{1/3}, \quad C_2 = K_1(6K)^{1/3}(2KM_1 + K_1M)^{1/3}.$$

Доказательство. Из оценки (1.34) вытекает оценка

$$\begin{aligned}\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leqslant K[\|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty} + \delta\|T_\alpha^{(2)}\|_{C\to L_\infty}]+ \\ +K_1[\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty} + \delta\|T_\alpha\|_{C\to L_\infty}] + Q\delta.\end{aligned} \tag{1.37}$$

Подставим в эту оценку равенства для норм из леммы 1.8 и оценки из леммы 1.9. Получим

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leqslant 2(2KM_1 + K_1M)\alpha + \frac{8}{3}K\delta\alpha^{-2} + 2K_1\delta\alpha^{-1} + Q\delta.$$

Теперь сделаем конкретный выбор $\alpha = \alpha(\delta)$ из разумных соображений, а именно из равенства

$$2(2KM_1 + K_1M)\alpha = \frac{8}{3}K\delta\alpha^{-2}.$$

Отсюда получим формулу (1.36). Подставив (1.36) в (1.37), получим оценку (1.35).

1.6 Решение уравнения Абеля

Рассматривается уравнение Абеля

$$Au \equiv \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t)dt = f(x), \tag{1.38}$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, $0 < \beta < 1$, $u(x) \in C[0,1]$, $f(x)$ задана ее δ-приближением в $L_2[0,1] : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta$.

Решается задача нахождения равномерных приближений к $u(x)$ по заданным f_δ и δ.

Для оператора A известен вид обратного оператора

$$A^{-1}f = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t)\,dt. \tag{1.39}$$

Как уже отмечалось в п. 1.3, этой формулой мы не можем воспользоваться, если $f(x)$ задана приближенно: $f_\delta(x)$, вообще говоря, не принадлежит области значений оператора A, и тут требуется применение методов регуляризации. Но эти методы возникли почти 150 лет после появления уравнения Абеля. Поэтому необходимость решать различные прикладные задачи, в которых непросредственно используется уравнение Абеля (1.38) и различные его обобщения и модификации, вызвала создание большого количества методов, которые приводят к неудовлетворительным результатам (в них либо не учитывается погрешность в задании исходных данных, либо учитывается, но предполагается, что $f_\delta(x)$ обладает завышенными свойствами, либо не дается строгого математического обоснования). Информацию об этом можно найти, например, в [22–24].

Мы здесь рассматриваем постановку, в которой о решении $u(x)$ дается минимум информации (только его непрерывность), что делает невозможным применение ни одного из классических методов решения некорректных задач.

1.6.1 Применяем для решения поставленной задачи метод из [3]. В качестве T_α возьмем операторы S_α и построим семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$.

Теорема 1.16. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x,t)$, имеющими вид*

$$R_\alpha(x,t) = \begin{cases} (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 2}(x,t), & x \in [0,1/2], \\ (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 1}(x,t), & x \in [1/2,1], \end{cases} \tag{1.40}$$

$$R_{\alpha 1}(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{-\beta} - (x-\alpha-t)^{-\beta}, & 0 \leqslant t < x-\alpha, \\ (x-t)^{-\beta}, & x-\alpha \leqslant t < x, \\ 0, & x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.41}$$

$$R_{\alpha 2}(x,t) = \begin{cases} (x+\alpha-t)^{-\beta} - (x-t)^{-\beta}, & 0 \leqslant t < x, \\ (x+\alpha-t)^{-\beta}, & x \leqslant t < x+\alpha, \\ 0, & x+\alpha \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.42}$$

Доказательство. Из (1.1) и (1.39) получаем

$$R_{\alpha 1}(x,t) = (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} \Big(\int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta} \Big)_{x-\alpha}^{x},$$

$$R_{\alpha 2}(x,t) = (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} \Big(\int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta} \Big)_{x}^{x+\alpha}.$$

Сделав указанные подстановки и вычислив соответствующие интегралы, приходим к утверждению следующей теоремы.

Теорема 1.17. *Операторы $R_{\alpha j}$, $j = 1,2$, при $0 < \beta < 1/2$ являются линейными, ограниченными при каждом значении α операторами, действующими из пространства $L_2[0,1]$ в $C[1/2,1]$ при $j = 1$ и в $C[0,1/2]$ при $j = 2$. При этом справедлива двусторонняя оценка*

$$C_\beta \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}} \leqslant \|R_\alpha\|_{L_2 \to L_\infty} \leqslant \sqrt{2} C_\beta \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}}, \tag{1.43}$$

где $C_\beta = (\Gamma(1-\beta))^{-1} (1-2\beta)^{-1/2}$.

Доказательство. Из неравенства Буняковского следует, что операторы $R_{\alpha j}$, $j = 1, 2$, определены на всем пространстве $L_2[0,1]$ и ограничены при каждом фиксированном α и $0 < \beta < 1/2$. Действительно, например, для $j = 1$ и $t \in [x-\alpha, x)$ имеем

$$\left| \int\limits_{x-\alpha}^{x} (x-t)^{-\beta} f(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{x-\alpha}^{x} (x-t)^{-2\beta} dt \right)^{1/2} \|f\|_{L_2} = (1-2\beta)^{-1/2} \alpha^{1-2\beta} \|f\|_{L_2}.$$

Аналогичные оценки получаются для других интервалов изменения t.

При этом значения интегральных операторов с ядрами $R_{\alpha_j}(x,t)$, определенными в (1.41), (1.42), являются непрерывными функциями на соответствующих половинах отрезка $[0,1]$. Это следует из непрерывности функции $\int\limits_0^x (x-t)^{-\beta} f(t) dt$, которая устанавливается при выводе формулы (1.39).

Далее пользуемся формулой (1.22). Рассмотрим сначала операторы $R_{\alpha 1}$. Из (1.22) и (1.41) после замены переменных $x - t = \tau$ получим

$$\int\limits_0^1 R_{\alpha 1}^2(x,t) dt = \int\limits_{\alpha}^{x} [\tau^{-\beta} - (\tau-\alpha)^{-\beta}]^2 d\tau + \int\limits_0^{\alpha} \tau^{-2\beta}\, d\tau.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_0^1 R_{\alpha 1}^2(x,t) dt \geqslant (1-2\beta)^{-1} \alpha^{1-2\beta}. \tag{1.44}$$

Далее, поскольку $\tau^{-\beta} \leqslant (\tau-\alpha)^{-\beta}$, то

$$[\tau^{-\beta} - (\tau-\alpha)^{-\beta}]^2 \leqslant (\tau-\alpha)^{-2\beta} - \tau^{-2\beta}.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_{\alpha}^{x} [\tau^{-\beta} - (\tau - \alpha)^{-\beta}]^2 \, d\tau \leqslant (1 - 2\beta)^{-1}[(x - \alpha)^{1-2\beta} - x^{1-2\beta} + \alpha^{1-2\beta}].$$

Поскольку $(x - \alpha)^{1-2\beta} \leqslant x^{1-2\beta}$, то в итоге приходим к оценке

$$\int\limits_{0}^{1} R^2_{\alpha 1}(x, t) dt \leqslant 2(1 - 2\beta)^{-1}\alpha^{1-2\beta}. \tag{1.45}$$

Аналогично из (1.22)и (1.42), сделав замену $x + \alpha - t = \tau$, придем к оценкам (1.44), (1.45) для $\int\limits_{0}^{1} R^2_{\alpha 2}(x, t)dt$.

Наконец, из (1.40), (1.44), (1.45) следует (1.43).

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, R_\alpha, u) = sup \left\{ \|R_\alpha f_\delta - u\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta \right\}.$$

На основании теорем 1.1, 1.6, 1.17 справедлива

Теорема 1.18. *Для сходимости $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{2\beta+1}{2}} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Найдем конкретное согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, обеспечивающее неулучшаемую по порядку оценку погрешности приближенных решений уравнения 1.38 и получим такую оценку в случае, когда $u(x) \in \mathrm{Lip}_M 1$.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, R_\alpha, \mathrm{Lip}_M 1) = sup \left\{ \|R_\alpha f_\delta - u\|_{L_\infty} : u \in \mathrm{Lip}_M 1, \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta \right\}.$$

Теорема 1.19. *Справедлива неулучшаемая по порядку δ оценка*

$$\frac{1}{2}C_1(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}} \leqslant \Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, \mathrm{Lip}_M 1) \leqslant C_2(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}}, \tag{1.46}$$

где

$$\alpha(\delta) = D(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}}, \tag{1.47}$$

$$D(\beta) = \left(2^{1/2} M^{-1} C_\beta (2\beta+1)\right)^{\frac{2}{3+2\beta}}, \quad C_1(\beta) = \frac{M}{2} D(\beta) + C_\beta (D(\beta))^{-\frac{2\beta+1}{2}},$$

$C_2(\beta)$ отличается от $C_1(\beta)$ множителем 2 во втором слагаемом, $0 < \beta < 1/2$.

Доказательство. Пользуемся методом из [15], схема которого приведена в параграфе 1.3.

Очевидно, что

$$\Delta_1(R_\alpha A, \mathrm{Lip}_M 1) \equiv \Delta_1(S_\alpha, \mathrm{Lip}_M 1).$$

Составляем функцию

$$\varphi(\delta, R_\alpha, \mathrm{Lip}_M 1) = \Delta_1(S_\alpha, \mathrm{Lip}_M 1) + \delta \|R_\alpha\|_{L_2 \to L_\infty}.$$

Из равенства (1.26) и двусторонней оценки (1.43) получаем оценку

$$\Phi_1(\alpha, \delta) \leqslant \varphi(\delta, R_\alpha, \mathrm{Lip}_M 1)) \leqslant \Phi_2(\alpha, \delta), \tag{1.48}$$

где $\Phi_1(\alpha, \delta) = M\frac{\alpha}{2} + C_\beta \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}}$, а $\Phi_2(\alpha, \delta)$ отличается от $\Phi_1(\alpha, \delta)$ множителем $\sqrt{2}$ во втором слагаемом, C_β приведена в теореме 1.17.

Найдем $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\Phi_2(\alpha, \delta) \to \inf\limits_\alpha$ и придем к формуле (1.47).

Подставляя (1.47) в оценки (1.48) и (1.16), получаем оценку (1.46).

Ранее в [16] был построен метод регуляризации уравнения (1.38), базирующийся на операторе $\tilde{S}_\alpha$, приведенном в параграфе 1.1 и являющимся расширением симметричного оператора Стеклова до всего отрезка. Этот метод работает также при значениях β в интервале $(0, 1/2)$.

Сравнение регуляризации, приведенной здесь, с регуляризацией из [16] показывает, что разрывные операторы приводят к более простому семейству регуляризирующих операторов R_α, к более простым доказательствам соответствующих теорем, а главное, дают возможность, как это будет показано ниже, построить метод приближенного решения уравнения (1.38), работающий при всех значениях параметра β из диапазона $(0, 1)$.

1.6.2. Возьмем в методе регуляризации из [3] вместо функций $S_{\alpha j}u$, $j = 1, 2$, функции $S^2_{\alpha j}u$, приведенные в лемме 1.1, и построим семейство

$$R_\alpha f = S^{(2)}_\alpha A^{-1} f = \begin{cases} R_{\alpha 2} f, & x \in [0, 1/2], \\ R_{\alpha 1} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \tag{1.49}$$

$$R_{\alpha j} f = S^2_{\alpha j} A^{-1} f, \quad j = 1, 2.$$

Теорема 1.20. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x, t)$, имеющими вид*

$$R_\alpha(x, t) = \alpha^{-2} 2\pi^{-1/2} \begin{cases} R_{\alpha 2}(x, t), & x \in [0, 1/2], \\ R_{\alpha 1}(x, t), & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где

$$R_{\alpha 2}(x, t) = \begin{cases} (x - t)^{1/2} - 2(x - t + \alpha)^{1/2} + (x - t + 2\alpha)^{1/2}, \\ \hfill 0 \leqslant t \leqslant x, \\ (x - t + 2\alpha)^{1/2} - 2(x - t + \alpha)^{1/2}, \ x \leqslant t \leqslant x + \alpha, \\ (x - t + 2\alpha)^{1/2}, \ x + \alpha \leqslant t \leqslant x + 2\alpha, \\ 0, \ x + 2\alpha \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.50}$$

$$R_{\alpha 1}(x, t) = \begin{cases} (x - t - 2\alpha)^{1/2} - 2(x - t - \alpha)^{1/2} + (x - t)^{1/2}, \\ \hfill 0 \leqslant t \leqslant x - 2\alpha, \\ (x - t)^{1/2} - 2(x - t - \alpha)^{1/2}, \ x - 2\alpha \leqslant t \leqslant x - \alpha, \\ (x - t)^{1/2}, \ x - \alpha \leqslant t \leqslant x, \\ 0, \ x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.51}$$

$$0 < \alpha \leqslant 1/4.$$

Доказательство. Пусть $x \in [0, 1/2]$. Тогда по формулам (1.49), (1.3), (1.39) имеем

$$R_\alpha f = R_{\alpha 2} f = S^2_{\alpha 2} A^{-1} f = \alpha^{-2} (\Gamma(1 - \beta))^{-1} [F_1(x) + F_2(x)],$$

где

$$F_1(x) = \int\limits_x^{x+\alpha} (t - x) \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t - \tau)^{-\beta} f(\tau) \, d\tau dt,$$

$$F_2(x) = \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t-x)) \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\beta} f(\tau)\, d\tau\, dt.$$

Берем интегралы по частям. Получим

$$F_1(x) = \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\beta} f(\tau)\, d\tau \Big|_x^{x+\alpha} - \int\limits_x^{x+\alpha} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\beta} f(\tau)\, d\tau\, dt,$$

$$F_2(x) = (2\alpha - (t-x)) \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\beta} f(\tau)\, d\tau \Big|_{x+\alpha}^{x+2\alpha} +$$

$$+ \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\beta} f(\tau)\, d\tau\, dt.$$

Тогда при сложении подстановки взаимно уничтожатся. Останется сумма двух интегралов, первый из которых обозначим через I_1, а второй — через I_2.

Меняем порядок интегрирования в полученных интегралах:

$$\int\limits_x^{x+\alpha} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\beta} f(\tau)\, d\tau\, dt = \int\limits_0^x \left(\int\limits_x^{x+\alpha} (t-\tau)^{-\beta} dt \right) f(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_x^{x+\alpha} \left(\int\limits_\tau^{x+\alpha} (t-\tau)^{-\beta}\, dt \right) f(\tau)\, d\tau.$$

Выражение для I_2 получается из выражения для I_1 после замены x на $x+\alpha$.

Проводим вычисления, учитывая, что при интегрировании степени $(t-\tau)^{-\beta}$ выходит множитель $(1-\beta)$, и приходим к формулам (1.50). Теперь пусть $x \in [1/2, 1]$. Если мы в выражениях функций $S_{\alpha 1}^2 u$ из (1.3) сделаем замену $x_1 = x - 2\alpha$, то $S_{\alpha 1}^2 u = S_{\alpha 2}^2 u$, где в выражении для $S_{\alpha 2}^2 u$ x заменен на x_1. Тогда выражение (1.51) получается из формулы (1.50) при замене в последней x на $x - 2\alpha$.

Теорема 1.21. *Операторы R_α, рассматриваемые как операторы из $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$, являются регуляризирующими для уравнения* (1.38) *при любом β из интервала* $(0,1)$.

Доказательство аналогично соответствующему доказательству в теореме 1.16, только в данном случае операторы R_α являются ограниченными при всех $\beta \in (0,1)$, а сходимость $\|R_\alpha Au - u\|_{L_\infty} \to 0, \alpha \to 0$ вытекает из теоремы 1.2.

Теорема 1.22. *Для норм операторов R_α справедлива двусторонняя оценка*

$$C_2\alpha^{-\frac{1+2\beta}{2}} \leqslant \|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty} \leqslant C_1\alpha^{-3/2} + O(\alpha^{\frac{5}{2}-2\beta}), \tag{1.52}$$

где $C_1 = (1-\beta)^{-1}(\Gamma(1-\beta))^{-1}6^{1/2}$, $C_2 = (1-\beta)^{-1}(\Gamma(1-\beta))^{-1}(3-2\beta)^{-1}$.

Доказательство. Пользуемся формулой (1.22). Возьмем сначала операторы $R_{\alpha 2}$. Имеем из (1.50)

$$\|R_{\alpha 2}\|_{L_2\to C} = \alpha^{-2}(1-\beta)^{-1}(\Gamma(1-\beta))^{-1} \max_{0\leqslant x\leqslant 1/2}\left(\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 2}(x,t)\,dt\right)^{1/2}. \tag{1.53}$$

Обозначим $I(x) = \int\limits_0^1 R^2_{\alpha 2}(x,t)dt$ и представим $I(x)$ в соответствии с (1.50) в виде

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x), \tag{1.54}$$

где

$$I_1(x) = \int\limits_0^x [(x-t)^{1-\beta} - 2(x-t+\alpha)^{1-\beta} + (x-t+2\alpha)^{1-\beta}]^2 dt,$$

$$I_2(x) = \int\limits_x^{x+\alpha} [(x-t+2\alpha)^{1-\beta} - 2(x-t+\alpha)^{1-\beta}]^2 dt,$$

$$I_3(x) = \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (x-t+2\alpha)^{2-2\beta} dt.$$

После замены переменных $x-t=\tau$ в $I_1(x)$, $x-t+\alpha=\tau$ в $I_2(x)$, $x-t+2\alpha=\tau$ в $I_3(x)$ получим

$$I_1(x) = \int\limits_0^x [\tau^{1-\beta} - 2(\tau+\alpha)^{1-\beta} + (\tau+2\alpha)^{1-\beta}]^2 d\tau, \tag{1.55}$$

$$I_2(x) = \int\limits_0^{\alpha} [(\tau+\alpha)^{1-\beta} - 2\tau^{1-\beta}]^2 d\tau, \tag{1.56}$$

$$I_3(x) = \int\limits_0^{\alpha} \tau^{2-2\beta} d\tau = \frac{\alpha^{3-2\beta}}{3-2\beta}. \tag{1.57}$$

Заметим, что $I_2(x)$ и $I_3(x)$ не зависят от x.

Поскольку $I(x) > I_3(x)$ при любом $x \in [0, 1/2]$, то из (1.57) получаем оценку снизу в (1.52). Получим оценку сверху для $I(x)$. Возьмем $I_2(x)$. Имеем из (1.55)

$$I_2(x) = \int\limits_0^{\alpha} [(\tau+\alpha)^{2-2\beta} + 4\tau^{2-2\beta} - 4\tau^{1-\beta}(\tau+\alpha)^{1-\beta}] d\tau.$$

Из очевидной оценки (поскольку $\tau^{2-2\beta} < \tau^{1-\beta}(\tau+\alpha)^{1-\beta}$)

$$I_2(x) \leqslant \int\limits_0^{\alpha} (\tau+\alpha)^{2-2\beta} d\tau,$$

получаем оценку

$$I_2(x) \leqslant \frac{2^{3-\beta}-1}{3-2\beta} \alpha^{3-2\beta}. \tag{1.58}$$

Теперь возьмем I_1 из (1.55):

$$I_1(x) = \int\limits_0^{x} [\tau^{2-2\beta} + 4(\tau+\alpha)^{2-2\beta} + (\tau+2\alpha)^{2-2\beta} - 4\tau^{1-\beta}(\tau+\alpha)^{1-\beta} +$$

$$+ 2\tau^{1-\beta}(\tau+2\alpha)^{1-\beta} - 4(\tau+\alpha)^{1-\beta}(\tau+2\alpha)^{1-\beta}] d\tau.$$

Из очевидных оценок

$$\tau^{1-\beta}(\tau+\alpha)^{1-\beta} \geqslant \tau^{2-2\beta)}(\tau+\alpha)^{1-\beta}(\tau+2\alpha)^{1-\beta} \geqslant (\tau+\alpha)^{2-2\beta},$$

$$\tau^{1-\beta}(\tau+2\alpha)^{1-\beta} \leqslant (\tau+2\alpha)^{2-2\beta}$$

получаем

$$I_1(x) \leqslant 3\int\limits_0^{x} [(\tau+2\alpha)^{2-2\beta} - \tau^{2-2\beta}] d\tau =$$

$$= \frac{3}{3-2\beta}[(x+2\alpha)^{3-2\beta} - x^{3-2\beta} - (2\alpha)^{3-2\beta}] <$$
$$< \frac{3}{3-2\beta}[(x+2\alpha)^{3-2\beta} - x^{3-2\beta}].$$

По теореме о среднем

$$(x+2\alpha)^{3-2\beta} - x^{3-2\beta} = (3-2\beta)\xi^{2-2\beta}2\alpha,$$

где $x < \xi < x + 2\alpha$.

Так как $\xi \leqslant 1$, то отсюда получаем оценку

$$I_1(x) \leqslant 6\alpha, \tag{1.59}$$

Из (1.54), (1.57), (1.58), (1.59) приходим к оценке

$$I(x) < 6\alpha + O(\alpha^{3-2\beta}),$$

а из нее и формулы (1.53) получаем оценку сверху в (1.52) для нормы $\|R_{\alpha 2}\|_{L_2 \to C}$.

Замечание 1.2. Недостаток оценки (1.52) — «разбаланс» в показателях степеней α слева и справа. При этом чем больше β, тем ближе показатель степени у α слева к показателю справа.

Поскольку $R_{\alpha 1}f = R_{\alpha 2}f$ с заменой в правой части x на $x_1 = x - 2\alpha$, то такая же оценка получается и для нормы $\|R_{\alpha 1}\|_{L_2 \to C[1/2,1]}$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

При конкретных значениях параметра β оценку (1.52) можно улучшить — получить в ней точную степень α. Рассмотрим классическое уравнение Абеля с $\beta = 1/2$.

При $\beta = 1/2$ формулы (1.55)–(1.57) принимают вид

$$I_1(x) = \int\limits_0^x [\tau^{1/2} - 2(\tau+\alpha)^{1/2} + (\tau+2\alpha)^{1/2}]^2 d\tau, \tag{1.60}$$

$$I_2(x) = \int\limits_0^\alpha [(\tau+\alpha)^{1/2} - 2\tau^{1/2}]^2 d\tau, \tag{1.61}$$

$$I_3(x) = \int\limits_0^\alpha \tau d\tau = \frac{\alpha^2}{2}, \tag{1.62}$$

а оценка (1.52) — вид

$$C_2\alpha^2 \leqslant \|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty} \leqslant C_1\alpha. \tag{1.63}$$

Чтобы улучшить оценку (1.63), вычислим более точно интегралы (1.60) и (1.61). Тогда придем к следующей теореме.

Теорема 1.23. *В случае $\beta = 1/2$ для норм операторов R_α выполняется двусторонняя оценка*

$$C_2\alpha^{-1} \leqslant \|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty} \leqslant C_1\alpha^{-1} + O(\alpha^2), \tag{1.64}$$

где $C_2 = (2/\pi)^{1/2}$, $C_1 = C_2(2\ln 6)^{1/2})$.

Доказательство. Рассмотрим сначала интеграл $I_2(x)$. Раскрыв квадрат скобки в подынтегральном выражении (1.61), придем к формуле

$$I_2(x) = \frac{7}{2}\alpha^2 - 4[P_1(\tau)]_0^\alpha, \tag{1.65}$$

где

$$P_1(\tau) = \int \tau^{1/2}(\tau+\alpha)^{1/2}d\tau. \tag{1.66}$$

Известно (см. [25]), если $R(\tau) = \tau^2 + b\tau + a$, $\Delta = 4a - b^2$, то

$$\int (R(\tau))^{1/2}d\tau = \frac{(2\tau+\beta)(R(\tau))^{1/2}}{4} + \frac{\Delta}{8}\int (R(\tau))^{-1/2}d\tau, \tag{1.67}$$

$$\int (R(\tau))^{-1/2}d\tau = \ln(2(R(\tau))^{1/2} + 2\tau + b). \tag{1.68}$$

В нашем случае

$$P_1(\tau) = \frac{2\tau+\alpha}{4}\tau^{1/2}(\tau+\alpha)^{1/2} - \frac{\alpha^2}{8}\ln(2\tau^{1/2}(\tau+\alpha)^{1/2} + 2\tau + \alpha). \tag{1.69}$$

Отсюда

$$\begin{gathered} P_1(0) = -\frac{\alpha^2}{8}\ln\alpha, \\ P_1(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{8}\ln(2\sqrt{2}+3)\alpha. \end{gathered} \tag{1.70}$$

Из (1.70) и (1.65) получаем представление

$$I_2(x) = \left(\frac{7}{2} - 3\sqrt{2}\right)\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}\ln(2\sqrt{2}+3). \tag{1.71}$$

Теперь рассмотрим $I_1(x)$. Раскроем квадрат в подынтегральном выражении в формуле (1.60) и представим

$$I_1(x) = \tilde{I}_1(x) + \tilde{I}_2(x), \tag{1.72}$$

где в $\tilde{I}_1(x)$ собраны слагаемые, не содержащие дробных степеней, а в $\tilde{I}_2(x)$ — содержащие дробные степени.

Легко видеть, что:

$$\tilde{I}_1(x) = 6\int\limits_0^x (\tau+\alpha)d\tau = 3x^2 + 6\alpha x, \tag{1.73}$$

$$\tilde{I}_2(x) = \int\limits_0^x \Big(-4\tau^{1/2}(\tau+\alpha)^{1/2} + 2\tau^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2} -$$
$$-4(\tau+\alpha)^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2}\Big)d\tau. \tag{1.74}$$

Вычислим интегралы от каждого слагаемого в правой части формулы (1.74) по формулам (1.67), (1.68). Получим

$$\tilde{I}_2(x) = [P(\tau)]_0^x, \tag{1.75}$$

где

$$P(\tau) = -4P_1(\tau) + 2P_2(\tau) - 4P_3(\tau), \tag{1.76}$$

$P_1(\tau)$ определена в (1.66), (1.69), $P_j(\tau) = \int R_j(\tau)d\tau$, $j = 2,3$, $R_j(\tau) = R(\tau)$ при $b = 2\alpha$, $a = 0$ для $j = 2$, при $b = 3\alpha$, $a = 2\alpha^2$ для $j = 3$.

Тогда имеем

$$P_2(\tau) = \frac{2(\tau+\alpha)}{4}\tau^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2} - \frac{4\alpha^2}{8}\ln(2\tau^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2} + 2\tau + 2\alpha),$$

$$P_3(\tau) = \frac{2\tau+3\alpha}{4}(\tau+\alpha)^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2} -$$
$$-\frac{\alpha^2}{8}\ln(2(\tau+\alpha)^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2} + 2\tau + 3\alpha).$$

Подставим полученные выражения и выражение (1.69) в (1.76) и представим $P(\tau)$ в виде

$$P(\tau) = Q_1(\tau) + Q_2(\tau), \tag{1.77}$$

где $Q_1(\tau)$ — сумма слагаемых, не содержащих логарифмы, а $Q_2(\tau)$ — сумма слагаемых с логарифмами.

Очевидно, что

$$\begin{gathered} Q_1(\tau) = -(2\tau+\alpha)\tau^{1/2}(\tau+\alpha)^{1/2} + (\tau+\alpha)\tau^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2} - \\ -(2\tau+3\alpha)(\tau+\alpha)^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2}, \end{gathered} \tag{1.78}$$

$$\begin{gathered} Q_2(\tau) = \alpha^2[\frac{1}{2}\ln(2\tau^{1/2}(\tau+\alpha)^{1/2} + 2\tau + \alpha) - \ln(2\tau^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2} + \\ +2\tau+2\alpha) + \frac{1}{2}\ln(2(\tau+\alpha)^{1/2}(\tau+2\alpha)^{1/2} + 2\tau + 3\alpha)]. \end{gathered} \tag{1.79}$$

При этом

$$Q_1(0) = -3\sqrt{2}\alpha^2, \quad Q_2(0) = \alpha^2 \ln \frac{(2\sqrt{2}+3)^{1/2}}{2}. \tag{1.80}$$

Из (1.75)–(1.77) вытекает формула

$$\tilde{I}_2(x) = Q_1(x) + Q_2(x) - Q_1(0) - Q_2(0), \tag{1.81}$$

где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ определены в (1.78), (1.79) с заменой τ на x, а $Q_1(0)$, $Q_2(0)$ — в (1.80).

Далее учтем, что нам нужна оценка для $\max_{0\leqslant x\leqslant 1/2} I(x)$(см. (1.53)), а этот максимум, как видно из (1.60)–(1.62), достигается при $x = 1/2$. Поэтому в дальнейшем мы считаем всюду, что $x = 1/2$, непосредственно подставлять вместо x это значение будем по мере надобности — для простоты вычислений. Из сказанного выше правомерно применить формулу Тейлора к функции $\varphi(t) = t^{1/2}$, считая ее заданной на отрезке $[x, x+\alpha]$ для разложения $(x+\alpha)^{1/2}$ и на отрезке $[x, x+2\alpha]$ для разложения $(x+2\alpha)^{1/2}$. Тогда получим

$$\begin{gathered} x^{1/2}(x+\alpha)^{1/2} = x + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}x^{-1} + O(\alpha^3), \\ x^{1/2}(x+2\alpha)^{1/2} = x + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}x^{-1} + O(\alpha^3), \\ (x+\alpha)^{1/2}(x+2\alpha)^{1/2} = x + \frac{3}{2}\alpha - \frac{\alpha^2}{8}x^{-1} + O(\alpha^3). \end{gathered}$$

Подставив эти формулы в (1.78) при $\tau = x$, придем к выражению

$$Q_1(x) = -(2x+\alpha)\left[x + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}x^{-1} + O(\alpha^3)\right] +$$
$$+(x+\alpha)\left[x + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}x^{-1} + O(\alpha^3)\right] -$$
$$-(2x+3\alpha)\left[x + \frac{3}{2}\alpha - \frac{\alpha^2}{8}x^{-1} + O(\alpha^3)\right].$$

Отсюда следует представление

$$Q_1(x) = -3x^2 - 6\alpha x - 4\alpha^2 + O(\alpha^3). \tag{1.82}$$

Вернемся к формуле (1.53). Подставим в нее равенства (1.65), (1.71)–(1.73) и (1.81).

Тогда увидим, что в полученном выражении останутся только слагаемые, содержащие логарифмы, остальные взаимно уничтожатся и $I(x)$ будет иметь вид

$$I(x) = \alpha^2 \ln 2 + Q_2(x). \tag{1.83}$$

Займемся функцией $Q_2(x)$. Из (1.78) получим

$$Q_i(x) =$$
$$= \alpha^2 \ln \frac{[(2x^{1/2}(x+\alpha)^{1/2} + 2x + \alpha)(2(x+\alpha)^{1/2}(x+2\alpha)^{1/2} + 2x + 3\alpha)]^{1/2}}{2x^{1/2}(x+2\alpha)^{1/2} + 2x + 2\alpha}.$$

Подставим в правую часть $x = 1/2$, используем оценку $0 < \alpha \leqslant 1/4$ в выражении, стоящем под знаком логарифма. Тогда получим оценку

$$Q_2(1/2) < \alpha^2 \ln 3. \tag{1.84}$$

Подставив оценку (1.84) в (1.83) при $x = 1/2$, получим оценку

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1/2} I(x) = I(1/2) < \alpha^2 \ln 6.$$

Из этой оценки, оценки $I(x) > I_3(x) = \alpha^2/2$ и формулы (1.53), учитывая, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, получаем оценку (1.67) для нормы $\|R_{\alpha 2}\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}$. Эта оценка будет выполняться и для нормы $\|R_{\alpha 1}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}$.

Действительно, на отрезке $[1/2, 1]$, поскольку $R_{\alpha 1} f = R_{\alpha 2} f|_{x \to x_1}$, повторяем предыдущее доказательство, только теперь учитываем, что $\max_{1/2-2\alpha\leqslant x_1\leqslant 1-2\alpha} I(x_1) = I(1-2\alpha)$. Все полученные при этом равенства для компонент функции $I(x_1)$ сохраняются, изменится только выражение для $Q_2(x_1)$ при $x_1 = 1-2\alpha$:

$$Q_2(1-2\alpha) = \alpha^2 \ln\left(\frac{(2(1-2\alpha)^{1/2}(1-\alpha)^{1/2} + 2(1-2\alpha)+\alpha)^{1/2}}{2(1-2\alpha)^{1/2} + 2(1-2\alpha) + 2\alpha}\times\right.$$
$$\left.\times(2(1-\alpha)^{1/2} + 2(1-2\alpha) + 3\alpha)^{1/2}\right).$$

Теперь для оценки сверху этого выражения заменяем в числителе α на 0 , а в знаменателе на $1/4$. В итоге получаем оценку (1.84) для $Q_2(1-2\alpha)$.

Отсюда следует справедливость утверждения теоремы.

Теперь займемся вопросом о сходимости приближенных решений уравнения (1.38) к точному в случае, когда операторы R_α применяются к функции $f_\delta(x)$.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, R_\alpha, u) = \sup\{\|R_\alpha f_\delta - u\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\}.$$

Справедлива

Теорема 1.24. *Если β — любое из интервала $(0,1)$, то для сходимости $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющее условиям*

1) $\alpha(\delta) \to 0$;

2) $\delta(\alpha(\delta))^{-(1/2+\beta)} \to 0$ при $\delta \to 0$,

и достаточно выполнения условия 1) и условия $\delta(\alpha(\delta))^{-3/2} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Если $\beta = 1/2$, то для указанной сходимости необходимо и достаточно выполнения условий 1) и 2).

Доказательство приводится аналогично доказательству теоремы 1.18. □

2 РАЗРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР ЛАНДАУ, ЕГО МОДИФИКАЦИЯ И ДРУГИЕ РАЗРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

2.1 Понятие разрывного оператора Ландау и его модификация

В теории приближений известен оператор Ландау [1]

$$L_n f = \frac{1}{2J_n} \int_0^1 (1 - (x-t)^2))^n f(t)\, dt,$$

где $J_n = \int_0^1 (1-t^2))^n\, dt$.

С помощью этих операторов было дано одно из доказательств знаменитой теоремы Вейерштрасса. Известно [1], что для любой непрерывной функции, заданной на отрезке, эти операторы дают равномерные приближения к ней внутри отрезка.

Мы здесь рассмотрим оператор вида

$$K_n f = \frac{n+1}{2} \int_0^1 (1 - |x-t|)^n f(t) dt,$$

более простой по конструкции, предложенный А. П. Хромовым [22].

Из этих операторов ниже будет построено модифицированное семейство операторов с разрывной областью значений, позволяющее получать равномерные приближения к непрерывным функциям на всем отрезке их задания. Дальнейшее исследование этих модифицированных операторов показывает, что они обладают хорошими аппроксимативными свойствами. (Например, при аппроксимации единицы на отрезке получается более высокая скорость сходимости, чем для соответствующих модифицированных операторов Ландау.)

Представим операторы K_n в виде

$$K_n f = K_{1n} f + K_{2n} f,$$

где

$$K_{1n} f = \frac{n+1}{2} \int_0^x (1 - (x-t))^n f(t)\, dt, \tag{2.1}$$

$$K_{2n} f = \frac{n+1}{2} \int_x^1 (1 - (t-x))^n f(t)\, dt. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Если* $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$, $0 < \varepsilon < 1/2$, *то*

$$\left\| K_{1n}1 - \frac{1}{2} \right\|_{C[\varepsilon,1]} = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^{n+1}.$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$, *то*

$$\left\| K_{2n}1 - \frac{1}{2} \right\|_{C[0,1-\varepsilon]} = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^{n+1}.$$

Доказательство вытекает из формул

$$\int_0^x (1-(x-t))^n dt = \int_{1-x}^1 t^n dt, \tag{2.3}$$

$$\int_x^1 (1-(t-x))^n dt = \int_x^1 t^n dt, \tag{2.4}$$

откуда следует представление

$$K_{1n}1 = \frac{1}{2}(1-(1-x)^{n+1}), \quad K_{2n}1 = \frac{1}{2}(1-x^{n+1}).$$

Следствие 2.1. *Если* $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1/2$, *то*

$$\|K_n1 - 1\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} \leqslant (1-\varepsilon)^{n+1}.$$

Доказательство вытекает из оценки

$$\|K_n1 - 1\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} \leqslant \frac{1}{2}\|(1-x)^{n+1}\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} + \frac{1}{2}\|x^{n+1}\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]}.$$

Построим теперь оператор T_n с разрывной областью значений (будем в дальнейшем называть его разрывным оператором):

$$T_nf = \begin{cases} T_{2n}f, & x \in [0,1/2], \\ T_{1n}f, & x \in [1/2,1], \end{cases} \tag{2.5}$$

где $T_{jn} = 2K_{jn}$, $j = 1, 2$.

Из леммы 2.1 следует, что

$$\|T_{1n}1 - 1\|_{C[1/2,1]} = \frac{1}{2^{n+1}}, \tag{2.6}$$

$$\|T_{2n}1 - 1\|_{C[0,1/2]} = \frac{1}{2^{n+1}}, \tag{2.7}$$

т. е. на каждом из отрезков $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ операторы T_n дают равномерную сходимость к единице.

Лемма 2.2. *Имеет место равенство*

$$\|T_n\|_{L_\infty[0,1]} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Доказательство следует из (2.6), (2.7).

Теперь для сравнения рассмотрим операторы Ландау и построим по аналогии с операторами T_n операторы

$$\hat{T}_n f = \begin{cases} \hat{T}_{2n} f, & x \in [0, 1/2], \\ \hat{T}_{1n} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где

$$\hat{T_{1n}} f = \frac{J_{1n} f}{J_n}, \quad \hat{T_{2n}} f = \frac{J_{2n} f}{J_n},$$

$$J_{1n} f = \int\limits_0^x (1 - (x - t)^2)^n f(t)\, dt, \tag{2.8}$$

$$J_{2n} f = \int\limits_x^1 (1 - (x - t)^2)^n f(t)\, dt. \tag{2.9}$$

Сравним операторы T_n и $\hat{T}_n$ по скорости сходимости приближений к $f(x) \equiv 1$.

Лемма 2.3. *Справедливо равенство*

$$\|\hat{T}_n 1 - 1\|_{L_\infty[0,1]} = \frac{1}{J_n} \int\limits_{1/2}^1 (1 - t^2)^n\, dt. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пологая в (2.8), (2.9) $f(x) = 1$ и делая замену переменных $x - t = \tau$ в (2.8), $t - x = \tau$ в (2.9), придем к представлениям

$$\hat{T}_{1n} 1 = \frac{1}{J_n} \int\limits_0^x (1 - t^2)^n\, dt,$$

$$\hat{T}_{2n}1 = \frac{1}{J_n} \int\limits_0^{1-x} (1-t^2)^n \, dt.$$

Отсюда получаем

$$\hat{T}_{1n}1 = 1 - \frac{1}{J_n} \int\limits_x^1 (1-t^2)^n \, dt, \quad \hat{T}_{2n}1 = 1 - \frac{1}{J_n} \int\limits_{1-x}^1 (1-t^2)^n \, dt.$$

Учитывая, что оператор $\hat{T}_{1n}$ действует на отрезке $[1/2, 1]$, а $\hat{T}_{2n}$ — на отрезке $[0, 1/2]$, получаем (2.10).

Лемма 2.4. *Справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{(3/4)^{n+1}}{2(n+1)} \leqslant \|\hat{T}_n 1 - 1\|_{L_\infty[0,1]} \leqslant 2(3/4)^{n+1}. \tag{2.11}$$

Доказательство. В интегралах, стоящих в правых частях равенства (2.10), сделаем замену $1 - t^2 = \tau$. Тогда получим

$$\frac{1}{J_n} \int\limits_{1/2}^1 (1-t^2)^n \, dt = \frac{1}{\tilde{J}_n} \int\limits_0^{3/4} \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} \, dt,$$

где $\tilde{J}_n = \int\limits_0^1 \dfrac{t^n}{\sqrt{1-t}} \, dt.$

Далее имеем

$$\int\limits_0^1 t^n dt \leqslant \tilde{J}_n \leqslant \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \, dt,$$

откуда следует двусторонняя оценка

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\tilde{J}_n} \leqslant n+1. \tag{2.12}$$

Аналигочно получаем

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 (1-t^2)^n dt = \int\limits_0^{\frac{3}{4}} \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} \, dt.$$

В интеграле $\int\limits_0^{3/4} \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt$ используем оценку $1/2 \leqslant \sqrt{1-t} \leqslant 1$, из которой получаем

$$\frac{(3/4)^{n+1}}{(n+1)} \leqslant \int\limits_0^{3/4} \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}dt \leqslant 2\frac{(3/4)^{n+1}}{(n+1)}. \qquad (2.13)$$

Из (2.12), (2.13) приходим к (2.11).

Из (2.6), (2.7) и леммы 2.4 можно сделать вывод: при аппроксимации единицы операторы T_n дают более высокую скорость сходимости, чем разрывные операторы Ландау.

Вернемся к операторам T_n с целью дальнейшего изучения их аппроксимационных свойств.

Лемма 2.5. *Справедливы представления*

$$T_{1n}f - f = (n+1)\int\limits_0^x (1-(x-t))^n (f(t)-f(x))dt -$$
$$-f(x)(1-x)^{n+1}, \qquad (2.14)$$

$$T_{2n}f - f = (n+1)\int\limits_x^1 (1-(t-x))^n (f(t)-f(x))dt - f(x)x^{n+1}. \qquad (2.15)$$

Доказательство. Из (2.3), (2.4) следуют представления

$$1 = T_{1n}1 + (1-x)^{n+1},$$

$$1 = T_{2n}1 + x^{n+1}.$$

Умножая эти равенства на $f(x)$, приходим к соответствующим представлениям функции $f(x)$, а из них — к (2.14), (2.15). □

Теорема 2.1. *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ имеет место оценка*

$$\|T_nf - f\|_{L_\infty[0,1]} \leqslant \omega(\delta_1) + K\left[2(1-\delta_1)^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right], \qquad (2.16)$$

где $0 < \delta_1 < 1/2$, $\omega(\delta_1)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, $K = \|f\|_{C[0,1]}$.

Доказательство. Разобьем интеграл в правой части (2.14) на сумму

$$\int\limits_0^x = \int\limits_0^{x-\delta_1} + \int\limits_{x-\delta_1}^x ,$$

где δ_1 — из условия теоремы. Имеем

$$\left|\int\limits_0^{x-\delta_1}(1-(x-t))^n(f(t)-f(x))\,dt\right| \leqslant 2\|f\|_{C[0,1]}|\int_{\delta_1}^x(1-t)^n dt =$$

$$= 2\|f\|_{C[0,1]}\int\limits_{1-x}^{1-\delta_1} t^n dt,$$

$$\left|\int\limits_{x-\delta_1}^{x}(1-(x-t))^n(f(t)-f(x))\,dt\right| \leqslant \omega(\delta_1)\int_{1-\delta_1}^1 t^n dt.$$

Из этих оценок получаем

$$\left|\int\limits_0^{x-\delta_1}(1-(x-t))^n(f(t)-f(x))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|f\|_{C[0,1]}\frac{(1-\delta_1)^{n+1}}{n+1}, \tag{2.17}$$

$$\left|\int\limits_{x-\delta_1}^{x}(1-(x-t))^n(f(t)-f(x))\,dt\right| \leqslant \frac{\omega(\delta_1)}{n+1}. \tag{2.18}$$

Аналогично поступаем с интегралом в правой части (2.15), разбивая его на сумму $\int\limits_x^1 = \int\limits_x^{x+\delta_1} + \int\limits_{x+\delta_1}^1$. Тогда для первого слагаемого получаем оценку (2.18), для второго — оценку (2.17) . Из (2.14), (2.15), (2.17), (2.18) получаем (2.16). $\square$

Следствие 2.2. *При $n \to \infty$ выполняется сходимость*

$$\|T_n f - f\|_{L_\infty[0,1]} \to 0.$$

Пусть $f(x) \in M \equiv \{f(x) \in Lip_1 1 : \, f(0) = 0\}$. Рассмотрим величину

$$\Delta_1(T_n, M) \equiv \sup\{\|T_n f - f\|_{L_\infty[0,1]} : \, f \in M\}.$$

Лемма 2.6. *Если* $f(x) \in M$, *то*

$$\|T_{1n}f - f\|_{C[1/2,1]} \leqslant \frac{1}{n+2},$$

$$\|T_{2n}f - f\|_{C[0,1/2]} \leqslant \frac{1}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{2^{n+2}}.$$

Доказательство. Воспользуемся представлениями (2.14), (2.15) и оценками $|f(x) - f(t)| \leqslant |x - t|$ и $|f(x)| \leqslant |x|$ для $f(x) \in M$. Тогда получим

$$|T_{1n}f - f| \leqslant (n+1)\int\limits_0^x (1-(x-t))^n (x-t)\,dt + x(1-x)^{n+1}, \tag{2.19}$$

$$|T_{2n}f - f| \leqslant (n+1)\int\limits_x^1 (1-(t-x))^n (t-x)\,dt + x^{n+2}. \tag{2.20}$$

Сделав в интегралах правых частей этих оценок замены переменных $x - t = \tau$ в (2.19) и $t - x = \tau$ — в (2.20), а затем в полученных после этого интегралах замену $1 - \tau = \xi$, придем к оценкам

$$|T_{1n}f - f| \leqslant (n+1)\int\limits_{1-x}^1 t^n(1-t)\,dt + x(1-x)^{n+1},$$

$$|T_{2n}f - f| \leqslant (n+1)\int\limits_x^1 t^n(1-t)\,dt + x^{n+2}.$$

Далее имеем

$$\int\limits_{1-x}^1 t^n(1-t)\,dt = \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}\right)_{1-x}^1,$$

$$\int\limits_x^1 t^n(1-t)\,dt = \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}\right)_x^1.$$

Отсюда следуют оценки

$$|T_{1n}f - f| \leqslant \frac{1}{n+2} - \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}, \tag{2.21}$$

$$|T_{2n}f - f| \leqslant \frac{1}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}x^{n+2}. \tag{2.22}$$

Учитывая, что в (2.21) $x \in [1/2, 1]$, а в (2.22) $x \in [0, 1/2]$, получаем утверждение леммы.

Лемма 2.7. *Для $f(x) = x$ справедливо равенство*

$$\|T_n x - x\|_{L_\infty[0,1]} = \frac{1}{n+2}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Повторяем рассуждение в доказательстве леммы 2.6. Только теперь, поскольку $f(x) = x$, представления (2.14), (2.15) примут вид

$$T_{1n}x - x = (n+1)\int_0^x (1-(x-t))^n(t-x)\,dt - x(1-x)^{n+1},$$

$$T_{2n}x - x = (n+1)\int_x^1 (1-(t-x))^n(t-x)\,dt - x^{n+2}.$$

Первое из этих равенств умножим на -1. Сделав соответствующие замены переменных в интегралах, придем к выражениям

$$-(T_{1n}x - x) = \frac{1}{n+2} - \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2},$$

$$T_{2n}x - x = \frac{1}{n+2} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - x^{n+1}.$$

Отсюда получаем (2.23). □

Из лемм 2.6 и 2.7, используя представления

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}, \quad \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1 - \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}},$$
$$\frac{n+1}{n+2}\frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{2^{n+1}}$$

и оценок

$$\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{n^2},$$

приходим к следующей теореме.

Теорема 2.2. *Справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\leqslant \Delta_1(T_n,M)\leqslant \frac{1}{n}+\frac{1}{2^{n+2}}. \tag{2.24}$$

Пусть теперь вместо $f(x)\in C[0,1]$ нам известно ее среднеквадратичное δ-приближение $f_\delta(x)$. Рассмотрим задачу восстановления функции $f(x)$ по этому приближению с помощью операторов T_n. Как известно, указанная задача является некорректно поставленной, и здесь операторы T_n выступают в роли регуляризирующих операторов [11].

Лемма 2.8. *Справедливо равенство*

$$\|T_n\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}=\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}\,. \tag{2.25}$$

Доказательство. Очевидно, имеем

$$\|T_n\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}=\max\left\{\|T_{1n}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]},\|T_{2n}\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}\right\}.$$

Далее из (2.1), (2.2), (2.5) получаем

$$\|T_{1n}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}=(n+1)\max_{1/2\leqslant x\leqslant 1}\left(\int\limits_0^x(1-(x-t))^{2n}\,dt\right)^{1/2},$$

$$\|T_{2n}\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}=(n+1)\max_{0\leqslant x\leqslant 1/2}\left(\int\limits_x^1(1-(t-x))^{2n}\,dt\right)^{1/2}.$$

Отсюда приходим к (2.25). □

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta,T_n,M)\equiv\sup\|T_nf_\delta-f\|_{L_\infty[0,1]}:\ f\in M,\ \|f_\delta-f\|_{L_2[0,1]}\leqslant\delta.$$

Лемма 2.9. *Справедлива двусторонняя оценка*

$$\sqrt{\frac{n}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2n}}\leqslant\|T_n\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}\leqslant\sqrt{\frac{n}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{2.26}$$

Доказательство. Из леммы 2.8 следует представление

$$\|T_n\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}=\sqrt{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1/2}.$$

По теореме Лагранжа получаем

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1/2} = 1-\frac{1}{4n}(1+\Theta)^{-3/2},$$

где $0<\Theta<\dfrac{1}{2n}$, отсюда следует

$$1-\frac{1}{4n} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1/2} < 1,$$

$$1+\frac{1}{2n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1/2} < 1+\frac{1}{n}.$$

Из этих оценок вытекает утверждение леммы. □

Лемма 2.10. *Справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{1}{2}\Phi(n,\delta)-\Phi_1(n,\delta) < \Delta(\delta,T_n,M) < \Phi(n,\delta)+\Phi_2(n,\delta), \tag{2.27}$$

где

$$\Phi(n,\delta)=\frac{1}{n}+\delta\sqrt{\frac{n}{2}}, \quad \Phi_2(n,\delta)=\frac{1}{n^2}+\frac{\delta}{\sqrt{2n}},$$

$$\Phi_1(n,\delta)=\frac{1}{n^2}+\frac{\delta}{4\sqrt{2n}}.$$

Теорема 2.3. *Справедлива двусторонняя оценка, неулучшаемая по порядку δ:*

$$\frac{\sqrt{2}+1}{4}\delta^{2/3}-\left(2+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\delta^{4/3} \leqslant \Delta(\delta,T_{n(\delta)},M) \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta^{2/3}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\delta^{4/3}, \tag{2.28}$$

где

$$n(\delta)=[[2\delta^{-2/3}]], \tag{2.29}$$

$[[a]]$ — *целая часть* a.

Доказательство. Пользуемся методом получения точных по порядку δ оценок величины $\Delta(\delta,T_n,M)$, схема которого приведена в параграфе 1.3.

Найдем $n = n(\delta)$ из условия $\Phi(n, \delta) \to \inf_n$ с учетом того, что n — целое число, получим (2.29). Подставляя (2.29) в (2.27) и пользуясь оценками

$$2\delta^{-2/3} - 1 < [[2\delta^{-2/3}]] \leqslant 2\delta^{-2/3},$$

получаем (2.28). $\square$

2.2 Другие разрывные операторы

Кроме операторов, приведенных в главе 1 и параграфе 2.1, для приближения непрерывных функций на отрезке можно использовать и другие интегральные операторы с дельтаобразными ядрами.

Приведем без доказательств два примера таких операторов.

1. Рассмотрим оператор [26, с. 298]

$$A_n f = \frac{n}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f(t)dt}{1 + n^2(t-x)^2}.$$

Теорема 2.4. *Для любой* $f(x) \in C[0,1]$ *выполняется сходимость*

$$\|A_n f - f\|_{C[\eta, 1-\eta]} \to 0, \ \eta \to 0 (0 < \eta < 1/2).$$

Строим разрывный оператор

$$\overline{A}_n f = \begin{cases} \frac{2n}{\pi} \int\limits_x^1 \frac{f(t)dt}{1+n^2(t-x)^2}, & x \in [0, 1/2], \\ \frac{2n}{\pi} \int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{1+n^2(t-x)^2}, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Теорема 2.5. *Для любой* $f(x) \in C[0,1]$ *выполняется сходимость:*

$$\|\overline{A}_n f - f\|_{L_\infty} \to 0, \quad n \to \infty.$$

2. Рассмотрим оператор Вейерштрасса [26, с. 345]

$$W_n f = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^1 \exp^{-n^2(t-x)^2} f(t)\, dt.$$

Теорема 2.6. *Для любой непрерывной функции выполняется сходимость*

$$\|W_n f - f\|_{C[\eta,1-\eta]} \to 0, \quad n \to \infty \quad (0 < \eta < 1/2).$$

Строим разрывный оператор

$$\overline{W}_n f = \begin{cases} \frac{2n}{\pi} \int\limits_x^1 \exp^{-n^2(t-x)^2} f(t)\, dt, & x \in [0, 1/2], \\ \frac{2n}{\pi} \int\limits_0^x \exp^{-n^2(t-x)^2} f(t)\, dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Теорема 2.7. *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ выполняется сходимость*

$$\|\overline{W}_n f - f\|_{C[0,1]} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Список литературы

1. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М. : ГИТЛ, 1954. 327 с.
2. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 15-й Сарат. зимн. шк., посвящ. 125-летию со дня рожд. В. В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.
3. *Хромова Г. В.* Об одном способе построения методов регуляризации уравнений I рода // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 997–1002.
4. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Разрывные операторы Стеклова в задаче равномерного приближения производных на отрезке // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, № 9. С. 1442–1557.
5. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* Решение задачи об определении плотности тепловых источников // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 309–314.
6. *Хромова Г. В.* Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 599–603.
7. *Хромова Г. В.* О равномерных приближениях к решению интегрального уравнения Абеля // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 10. С. 1703–1712.
8. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одном семействе операторов с разрывной областью значений в задачах приближения и восстановления непрерывных функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 10. С. 1603–1609.
9. *Хромова Г. В.* О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.
10. *Сендов Б. Х.* Модифицированная функция Стеклова // Докл. Болг. акад. наук. 1983. Т. 134, № 2. С. 355–379.
11. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
12. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
13. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1962. 96 с.
14. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.
15. *Хромова Г. В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.
16. *Хромова Г. В.* О приближенных решениях уравнения Абеля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2001. № 3. С. 5–9.
17. *Морозов В. А.* О восстановлении функций методом регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7, № 4. С. 874–879.
18. *Хромова Г. В.* Задача восстановления и уравнения 1 рода // Дифференц. уравнения и вычисл. матем. 1976. Вып. 6, ч. 1. С. 83–87.
19. *Хромова Г. В.* О тихоновской регуляризации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 75–81.
20. *Кречмар В. А.* Задачник по алгебре. М. : Наука, 1968. 440 с.

21. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. 206 с.
22. *Преображенский Н. Г., Пикалов В. В.* Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1982. 237 с.
23. *Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.* Конструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1987. 115 с.
24. *Сизиков В. С., Смирнов А. В., Федоров Б. А.* Численное решение сингулярного интегрального уравнения Абеля обобщенным методом квадратур // Изв. вузов. Матем. 2004. Вып. 8. С. 62–70.
25. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Наука, 1963. 96 с.
26. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. СПб. : Лань, 2013. 506 с.