IV-V

Элементарная математика: алгебра

С.В. Лебедева
СГУ им. Н.Г. Чернышевского
Саратов, 2018

Министерство науки и высшего образования РФ

Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского

С.В. Лебедева

Элементарная математика
Алгебра

для студентов, обучающихся по направлению подготовки
44.03.01 – педагогическое образование (профиль – математическое образование)

Учебно-методическое пособие

Саратов, 2018

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р
Л 33

Рекомендовано к печати
научно-методической комиссией механико-математического факультета
Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского

Рецензент:
И. К. Кондаурова кандидат педагогических наук, заведующая кафедрой математики и методики её преподавания Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Л 33 **Лебедева, С. В. Элементарная математика: алгебра** : учебно-методическое пособие / С. В. Лебедева – Саратов, 2018. – 72 с. – (Профессиональная подготовка учителя математики).

Серийное оформление *С.В.Лебедевой*

Курс «Элементарная математика» открывает цикл профессиональных дисциплин, изучаемых студентами, обучающимися по направлению 44.03.01 – «педагогическое образование (профиль – математическое образование)». Цель курса в плане общей подготовки студента – обобщение и систематизация имеющихся знаний в области элементарной математики с точки зрения информационного моделирования, в плане профессиональной подготовки – пропедевтика курса методики обучения математики, а также смежных с этими курсами дисциплин профессионально-методической подготовки.

Пособие состоит из шести взаимосвязанных разделов: 1. Алгебраические выражения. 2. Рациональные уравнения, неравенства, их системы и совокупности. 3. Функционально-графический подход к решению уравнений, неравенств, их систем и совокупностей. 4. Дробно-рациональные уравнения, неравенства и системы. 5. Иррациональные уравнения, неравенства и системы. 6. Трансцендентные (логарифмические и показательные) уравнения, неравенства и системы.

Система задач представлена пятью группами: тестовые задания, математические алгоритмические, математические эвристические, практические и творческие задания.

Пособие ориентировано преимущественно на самостоятельное изучение курса «Элементарная математика», самоконтроль и самооценку результатов, для чего предусмотрена рейтинговая система оценки достижений студентов.

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р

Введение

Пособие содержит 600 задач обучающе-контролирующего характера, рассчитанных на самостоятельное решение студентами второго курса, как на аудиторных занятиях, так и в ходе внеаудиторной работы.

Система задач представлена пятью группами: тестовые задания (60 задач), задачи I уровня сложности – математические алгоритмические (300 задач), задачи II уровня сложности – математические эвристические (150 задач), задачи III уровня сложности – практические (60 задач) и творческие задания (30 задач).

Тестовые задания имеют четыре варианта ответа, среди которых находится, как правило, один верный. В ряде заданий предполагается запись в пустой строке своего варианта ответа. Тестовые задания являются к каждой теме представляют собой демоверсии вариантов итогового автоматизированного тестирования на портале системы дистанционного обучения IpsilonUni. На зачёте/экзамене преподаватель может попросить обосновать выбор ответа любого тестового задания.

Задачи I уровня сложности можно считать тренировочными, так как их выполнение требует знания соответствующего теоретического материала и известных алгоритмов решения. Студенту не следует «увлекаться» выполнением тренировочных задач, как правило, достаточно решить три задачи этой группы (определённого вида), чтобы вспомнить или сформировать нужный алгоритм решения.

Задачи II уровня сложности требуют умелого сочетания ряда известных алгоритмов решения, а иногда и нестандартного подхода к задаче. Большая часть задач, решаемых студентом, должна быть из этой группы задач.

Задачи III уровня сложности требуют сформированности ряда компонентов информационной культуры, главным из которых можно считать умения, связанные с информационным (в том числе математическим) моделированием. Процесс оформления решения данного вида задач должен включать описание всех этапов информационного моделирования.

Задачи I-III уровней сложности выполняются в отдельной тетради и сдаются для проверки преподавателю в установленные преподавателем сроки (до проведения зачёта).

Выполненное творческое задание представляет собой информационный ресурс, размещённый в электронном профессиональном портфолио студента, например, на сайте УчПортфолио.ру (http://www.uchportfolio.ru); преподавателю предоставляется ссылка (указывается режим доступа) на этот ресурс.

Каждая задача имеет свой «вес» – $\mathcal{V}$, указанный рядом с видом и формулировкой задания. Вес тестового задания – 0,05 балла, вес задачи I уровня – 0,1 балла, II уровня – 0,15 балла, III уровня – 0,2 балла, вес творческого задания – 1 балл.

Для получения зачёта по модулю «Алгебра» студенту достаточно пройти тестирование по каждой теме (с результатом, не менее 70% верных ответов) и набрать определённое рабочей программой количество баллов по каждой теме.

За каждое правильно решённое задание студент получает максимальное количество баллов $\mathcal{V}$ только в том случае, если он единственный из группы включает это задание в свой отчёт о выполнении заданий по теме. В противном случае максимальное количество баллов $\mathcal{V}$ за правильно решённое задание, делится на количество решающих $\mathcal{N}$, и каждый получает за это задание $\mathcal{V}/\mathcal{N}$ баллов.

В качестве методической поддержки обучающихся в Пособии предусмотрен теоретический материал и образцы рассуждения и оформления некоторых типов задач, предваряющие систему заданий по каждой теме курса.

Предполагается участие студентов в проектной деятельности.

Проект «Избранные вопросы линии уравнений и неравенств школьного курса математики» групповой, рассчитан на 3 недели.

Результатом проектной деятельности группы студентов является методическая разработка по одной из тем:

1.1. Обзор методов, способов и приёмов решения уравнений, неравенств и их систем.

1.2. Задачи с параметрами.

1.3. Информационное моделирование текстовых задач (математических, физических и др. задач области естественных наук).

1.4. Становление алгебры как учебной дисциплине в общеобразовательных учреждениях.

1.5. Задачи математических олимпиад для школьников алгебраической тематики.

Методические разработки составляют основу Банка методических работ.

Методическая разработка – это пособие, раскрывающее формы, средства, методы обучения, элементы современных педагогических технологий или сами технологии обучения и воспитания применительно к конкретной теме урока, теме учебной программы, преподаванию курса в целом.

Методическая разработка может быть как индивидуальной, так и коллективной работой. Она направлена на профессионально-педагогическое совершенствование преподавателя или качества подготовки по учебным специальностям.

I. Алгебраические выражения

Под *алгебраическим выражением (многочленом)* будем понимать выражение вида $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, где $a_k \in \mathbf{R}$, $k = 0 \div n$.

$a_0, a_1 x, \ldots, a_n x^n$ называют членами многочлена, a_0 – свободный член.

Два многочлена $F(x)$ и $G(x)$ называют *равными,* если для $\forall k$ коэффициент при x^k для $F(x)$ равен коэффициенту при x^k для $G(x)$.

Алгебраической суммой двух многочленов $F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ и $G(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ называют многочлен вида:

$$F(x) \pm G(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \ldots + (a_p \pm b_p)x^p, \text{ где } p = max(n, m).$$

Произведением двух многочленов $F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ и $G(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ называют многочлен вида:

$$F(x) \cdot G(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m+n} x^{n+m},$$

где $c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k$ для $\forall k = 0 \div (n + m)$.

Степенью многочлена $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ называется наибольшее из таких чисел $k = 0 \div n$ что $a_k \neq 0$. Обозначение многочлена степени k: $F_k(x)$. Член $a_k x^k$ называют *старшим членом* многочлена, а коэффициент a_k – *старшим коэффициентом* многочлена.

Многочлен, старший коэффициент которого равен 1, называют *нормированным (приведённым).*

Многочлен, все коэффициенты которого равны нулю, называют *нулевым.*

Многочлен, все коэффициенты которого имеют знаки, противоположные знакам соответствующих коэффициентов некоторого многочлена $F_n(x)$ называют *противоположным* для $F_n(x)$.

Теорема о делении многочленов с остатком. Для двух многочленов $F_m(x)$ и $G_n(x)$ существует единственная пара многочленов $Q_{m-n}(x)$ и $R(x)$ такие, что $F_m(x) = G_n(x) \cdot Q_{m-n}(x)) + R_s(x)$, причём $s \leq n$.

Теорема о делении многочлена на двучлен $(x - x_0)$ с остатком. Для любого многочлена $F_n(x)$ существует единственный многочлен $Q_{n-1}(x)$ такой, что $F_n(x) = Q_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + F_n(x_0)$.

Число x_0 называют *корнем многочлена* $F_n(x)$, если $F_n(x_0) = 0$. Число корней многочлена $F_n(x)$, $n \neq 0$ не превосходит его степени.

Теорема Безу: $F_n(x)$ делится на двучлен $(x - x_0)$ без остатка тогда и только тогда, когда $F_n(x_0) = 0$:

$$F_n(x) \,\vdots\, (x - x_0) \Leftrightarrow F_n(x_0) = 0$$

Число x_0 называют *корнем кратности* k многочлена $F_n(x)$, если k – наибольшее натуральное число, такое, что $F_n(x) \,\vdots\, (x - x_0)^k$. Если $k = 1$, то корень называется простым, если $k > 1$, то корень называется кратным.

Теорема о разложении многочлена на линейные множители. Всякий многочлен $F_n(x)$ на множестве действительных чисел может быть представим в виде $F_n(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}\cdot Q_{n-\sum_{i=1}^{m}k_i}(x)$, где многочлен $Q(x)$ не имеет действительных корней. Многочлен $Q(x)$ в этом случае называют *неприводимым на множестве* $\mathbf{R}$: его нельзя разложить на линейные множители. Неприводимым на множестве действительных чисел является не имеющий действительных корней квадратный трёхчлен: $Q(x) = x^2 + px + q$.

Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Всякий многочлен $F_n(x)$ на множестве действительных чисел может быть представим в виде:

$$F_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

где квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Для многочленов $F(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ и $G(y)=b_0+b_1y+\ldots+b_ny^n$ возможны операции $a\cdot F_m(x) + b\cdot G_n(y)$ и $a\cdot F_m(x)\cdot G_n(y)$ или их комбинации, приводящие к образованию многочлена с двумя переменными $K(x,y)$. *Степенью многочлена с двумя переменными* $a_0+a_1x^{m_1}y^{n_1}+\ldots+a_kx^{m_k}y^{n_k}$ называется наибольшая сумма $m_i + n_j$ для $i = 0\div m, j= 0\div n$, что $a_k \neq 0$.

Тестовые задания (по 0,05 балла)

1. Суммой многочленов: $x^2 + 5x - 3;\ x^3 - 5x - 13;\ 2x^2 + 7{,}6x + 8$ – является многочлен

а) $4x^2 + 7{,}6x - 8$ в) $x^3 + 3x^2 + 7{,}6x - 8$

б) $4x^2 + 7{,}6x + 8$ г) $x^3 + 3x^2 + 7{,}6x + 8$

2. Произведением многочленов: $x^2 + 5x - 3;\ x^3 - 5x - 13$ – является многочлен

а) $x^6 - 5x^4 + 8x^3 - 38x^2 - 50x +39$ в) $x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 80x +39$

б) $x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 38x^2 - 50x +39$ г) $x^5 - 28x^3 + 2x^2 - 65x +39$

3. Степенью многочлена $(x^2 + 5x - 3)\cdot(x^3 - 5x - 13) + x^4(7 - x)$ – является число

а) 3 б) 4 в) 5 г) 6

4. Остаток от деления многочлена $x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 80x +39$ на многочлен $x^2 + x + 3$

а) $54 - 75x$ б) $54 - 60x$ в) $48 - 86x$ г) $24 - 70x$

5. Остаток от деления многочлена $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ на двучлен $(x-1)$

а) 0 б) 1 в) 3 г) 9

6. Неполное частное от деления многочлена $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ на двучлен $(x-1)$

а) $x^3 + 3x^2 + 6x + 8$ в) $x^3 + 3x^2 - 6x - 6$

б) $x^3 + 3x^2 + 6x - 8$ г) $x^3 - 3x^2 + 2$.

7. Какой из многочленов делится без остатка одновременно на двучлены $(x-1)$, $(x+1)$ и $(x+2)$?

а) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ в) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

б) $x^3 + 4x^2 + x - 6$ г) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.

8. Какой из многочленов имеет кратные корни?

а) $x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 - 11x - 11$ в) $x^5 - x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 11$

б) $x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 26x^2 - 31x + 11$ г) $x^5 + 6x^4 + 17x^3 + 17x^2 + 16x + 11$.

9. Укажите вариант правильного разложения многочлена на неприводимые множители

а) $4(x - 1/2)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x^4 + 1)$ в) $(x-2)^3 \cdot (2x + 1) \cdot (2x^2 - 3x - 2)$

б) $(x-2) \cdot (x+3) \cdot (x^2 + 2x - 11)$ г) $3(x + 2)^3 \cdot (x + 1/3) \cdot (x^2 - 3x + 5)$.

10. Укажите вариант правильного разложения некоторого многочлена 7 степени на множители

а) $4(x - 1/2)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x^4 + 1)$ в) $2\,(x-2)^4 \cdot (x + 1/2)^2$

б) $(x-2) \cdot (x+3)^2 \cdot (x^2 + 2x + 11)$ г) $3(x + 2)^3 \cdot (x + 1/3) \cdot (x^2 - 3x + 5)$.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Многочлены являются одной из форм представления уравнений. Например, в левой части уравнения

$$\lg^6 x - 4\lg^3 x + 4 = 0$$

можно выделить многочлен $F_6(y) = y^6 - 4y^3 + 4$, где $y = \lg x$, разложить его на неприводимые множители:

$$F_6(y) = y^6 - 4y^3 + 4 = (y^3 - 2)^2 = (y - \sqrt[3]{2}\,)^2 (y^2 + y\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\,)^2$$

и тем самым выяснить количество (или отсутствие) действительных корней: $y = \sqrt[3]{2}$ – корень кратности 2. Затем, вернувшись к исходным переменным, решить данное уравнение: $\lg x = \sqrt[3]{2}$. Ответ: $x = 10^{\sqrt[3]{2}}$. Поэтому важно научиться раскладывать многочлены на неприводимые множители.

Одним из методов разложения на множители многочленов чётной степени вида:

$$F_{2n}(x) = ax^{2n} \pm bx^n + c$$

является выделение полного квадрата:

$$F_{2n}(x) = \left((\sqrt{a}\,x^n)^2 \pm 2\sqrt{a}\,x^n \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{b^2}{4a} \right) - \left(\frac{b^2}{4a} - c \right) =$$

$$= \left(\sqrt{a}\,x^n \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - c \right).$$

Если $\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)>0,$

то $F_{2n}(x)=\left(\sqrt{a}\,x^n \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{b^2}{4a}-c}\right)\left(\sqrt{a}\,x^n \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{b^2}{4a}-c}\right).$

Если $\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)=0$, то $F_{2n}(x)=\left(\sqrt{a}\,x^n \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$

Если $\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)<0$, то для разложения многочлена $F_{2n}(x)$ на множители используют другие методы.

Разложим на множители многочлен $F_4(x)=x^4-6x^2+8$.

$$\mathbf{x^4-6x^2+8}=(x^4-2x^2\cdot 3+9)-1=(x^2-3)^2-1=(x^2-4)\cdot(x^2-2)=$$
$$=\mathbf{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})}.$$

Используя метод выделения полного квадрата, разложить многочлен на множители.

11. $3x^4+6x^2-1$
12. $x^{12}+10x^6+10$
13. $4x^{16}+4x^8-15$
14. $x^{20}+10x^{10}+21$
15. $16x^{24}+24x^{12}-27$
16. x^4+2

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Ещё один метод разложения многочленов на множители – группировка с последующим вынесением общего множителя – заключается в том, чтобы представить данный многочлен в виде алгебраической суммы многочленов, каждый из которых может быть представлен произведением двух множителей, один из которых – общий для всех многочленов этой суммы.

Разложим на множители многочлен $F_4(x)=6x^4+3x^3\underline{-x^2}+4x-12$.

$$\mathbf{6x^4+3x^3\underline{-x^2}+4x-12}=6x^4+3x^3\underline{-(9+8)x^2}+4x-12=$$
$$=(6x^4+3x^3-9x^2)+(8x^2+4x-12)=$$
$$=3x^2(2x^2+x-3)+4(2x^2+x-3)=$$
$$=(2x^2+x-3)(3x^2+4)=$$
$$=2(x-1)(x+3/2)(3x^2+4)=$$
$$=\mathbf{6(x-1)(x+3/2)(x^2+4/3)}.$$

Используя метод группировки, разложить многочлен на множители.

17. $6x^3+16x^2-3x-8$
18. $2x^4+x^3+7x^2+x+5$
19. $x^4+4x^3-8x-32$
20. $x^4-5x^3+7x^2-57x+110$
21. $5x^4-3x^3+5x^2-13x+6$
22. $2x^4-x^3+6x^2+4x+7$
23. $4x^4-12x^3+17x^2-24x+18$
24. $6x^4-18x^3+7x^2+16x-11$
25. $2x^5-5x^4-32x+80$
26. $3x^5-6x^3-7x^2+14$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Метод группировки в разложении многочленов на множители является эффективным в поиске неприводимых множителей, но достаточно сложным для многочленов степени выше третьей. Чтобы «понизить» степень многочлена используют различные способы поиска его целых и рациональных корней. Затем делением на двучлен $(x - x_0)$, где x_0 – найденный корень «понижают» степень многочлена, который нужно разложить на множители. При этом используют теорему Безу и её следствия, схему Горнера для поиска коэффициентов частного и остатка от деления многочлена на двучлен $(x - x_0)$, а также тот факт, что все целые корни многочлена являются делителями его свободного члена, а все рациональные корни представимы в виде дроби, числитель которой – делитель свободного члена, а знаменатель – делитель старшего коэффициента данного многочлена.

Схема Горнера – алгоритм вычисления коэффициентов q_i многочлена $Q_{n-1}(x)$ и значения $F_n(x_0)$ в разложении: $F_n(x) = Q_{n-1}(x)\cdot(x - x_0) + F_n(x_0)$ – представляет собой таблицу, каждая строка которой заполняется по определённому правилу:

	a_n	a_{n-1}	…	a_0
x_0	$q_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = q_{n-1}\cdot x_0 + a_{n-1}$	…	$F_n(x_0) = q_0\cdot x_0 + a_0$

Разложим на множители многочлен $F_4(x) = x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 102x + 72.$

Коэффициенты при нечётных степенях отрицательны, это значит, что корнем не может быть отрицательное число, так как оно изменит знак одночленов с нечётными степенями на противоположный, и в результате получится сумма пяти положительных слагаемых, которая никак не может равняться нулю.

Разработаем компьютерную модель схемы Горнера в среде электронных таблиц и начнём проверять все положительные делители свободного члена, то есть числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.

Делители свободного члена	Введите коэффициенты многочлена, начиная от старшего и кончая свободным членом								
	1	-12	53	-102	72				
2	1	-10	33	-36	0				
3	1	-7	12	0					
3	1	-4	0						
4	1	0							

Итак, $F_4(x) = x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 102x + 72 = (x - 2)(x - 3)^2(x - 4).$

Используя схему Горнера, разложить многочлен на множители.

27. $x^4 - 16x^3 + 95x^2 - 248x + 240$
28. $4x^4 + 4x^3 - 23x^2 - 12x + 36$
29. $x^5 - 15x^4 + 86x^3 - 232x^2 + 288x - 128$
30. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$
31. $x^4 - 3x^3 - 39x^2 + 47x + 210$
32. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$
33. $6x^4 - 17x^3 + 12x^2 + 3x - 4$
34. $6x^4 - 5x^3 - 49x^2 + 20x + 100$
35. $33x^4 + 247x^3 - 1223x^2 + 577x - 66$
36. $8x^5 - 12x^4 - 26x^3 + 47x^2 - 24x + 4$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Если многочлен чётной степени не имеет рациональных корней, то поиск иррациональных корней возможен при условии представления данного многочлена произведением квадратных трёхчленов. Для того, чтобы представить многочлен чётной степени в виде произведения квадратных трёхчленов, можно воспользоваться методом неопределённых коэффициентов, основанного на определении равных многочленов.

			m	n	p	
			am	an	ap	a
			bm	bn	bp	b
			cm	cn	cp	c
am	$an+bm$	$ap+bn+cm$	$bp+cn$	cp		
3	6	4	2	1		

Разложим на множители многочлен:

$F_4(x) = 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1,$

для чего представим его произведением двух квадратных трёхчленов с неопределёнными коэффициентами (для удобства воспользуемся таблицей):

$$3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = (ax^2 + bx + c)(mx^2 + nx + p) =$$
$$=(am)x^4 + (an+bm)x^3 + (ap+bn+cm)x^2 + (bp+cn)x + cp.$$

Уравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему из 5 уравнений с 6 неизвестными, определёнными на множестве целых чисел:

$$\begin{cases} am = 3 \\ an + bm = 6 \\ ap + bn + cm = 4 \\ bp + cn = 2 \\ cp = 1 \end{cases}$$

Для первого уравнения возможными решениями будут пары: $a = 3, m = 1$ и $a = 1, m = 3$. Для последнего уравнения возможными решениями будут пары: $c = 1, n = 1$ и $c = -1, n = -1$. В совокупности предстоит решить (относительно b и p) четыре системы уравнений для наборов:

$a = 3, m = 1, c = 1, n = 1.$ $\quad$ $a = 3, m = 1, c = -1, n = -1.$

$a = 1, m = 3. c = 1, n = 1.$ $\quad$ $a = 1, m = 3. c = -1, n = -1.$

Начнём с первого, $\begin{cases} a = 3, \ m = 1 \\ 3n + b = 6 \\ 3 + bn + 1 = 4 \\ b + n = 2 \\ c = 1, \ p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \ m = 1 \\ 3n + b = 6 \\ bn = 0 \\ b + n = 2 \\ c = 1, \ p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \ m = 1 \\ b = 0, \ n = 2 \\ c = 1, \ p = 1 \end{cases}$

В силу единственности разложения, проверять другие наборы не имеет смысла. Наш многочлен представим в виде: $F_4(x) = 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = (3x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2) = 3(x^2 + 1/3)(x^2 + 2x + 2).$ Дальнейшее разложение невозможно, так как полученные квадратные трёхчлены не имеют действительных корней.

Используя метод неопределённых коэффициентов, разложить многочлен на множители.

37. $3x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 5x + 2$

38. $x^4 + x^3 - x^2 + 6$

39. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2$

40. $2x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 3$

41. $2x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x - 3$

42. $2x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 5$

43. $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 4x + 2$

44. $x^4 - 6x^2 + 8x - 3$

45. $x^4 - x^3 - 5x^2 - 6x - 4$

46. $3x^4 + x^3 + 19x^2 + 6x + 6$

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Иногда многочлены записаны не в стандартном виде, а в виде некоторой комбинации относительно действий сложения и умножения алгебраических выражений, например,

$$F_4(x) = (x + 1)\cdot (x + 3)\cdot (x + 5)\cdot (x + 7) - 1920.$$

В этом случае не всегда целесообразно приводить многочлен к стандартному виду и затем действовать по известным предписаниям. Можно попытаться разложить его на множители, произведя замену и, таким образом, понизить его степень:

$$F_4(x) = (x + 1)\cdot \underline{(x + 3)\cdot (x + 5)}\cdot (x + 7) - 1920 =$$

$$= \underline{(x^2 + 8x + 15)}\cdot (x^2 + 8x + 7) - 1920 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 8x + 11 \\ F_2(y) = (y + 4)\cdot(y - 4) - 1920 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 8x + 11 \\ F_2(y) = y^2 - 1936 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 8x + 11 \\ F_2(y) = (y + 44)\cdot(y - 44) \end{cases} \Leftrightarrow F_4(x) = (x^2 + 8x + 55)\cdot (x^2 + 8x + 33)$$

Разложить на множители.

47. $(x^2 + x + 1)\cdot (x^2 + x + 2) - 12$

48. $(x + 1)\cdot(x + 2)\cdot(x + 4)\cdot(x + 5) - 18$

49. $(x + 1)^4 + 2(x + 1)^3 + x(x + 2)$

50. $(x - 5)\cdot(x - 3)\cdot(x + 2)\cdot(x + 4) - 176$

51. $(x^2 + x - 1)\cdot (x^2 + 3x - 1) + x^2$

52. $(x + 1)\cdot(x + 2)\cdot(x + 3)\cdot(x + 6) + x^2$

53. $(x^2 - 3x + 2)\cdot (x^2 - 8x + 20) - 10$

54. $(x^2 - 4x - 12)\cdot (x^2 + 2x - 3) + 39x^2$

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Для разложения на множители многочленов с двумя и более переменными применимы все методы и приёмы, что в случае многочленов с одной переменной.

Разложим на множители многочлен:

$$F_2(x,y) = x^2 \underline{- 3xy} + 2y^2 - 2x + 4y =$$

$$= x^2 - 2x \underline{- 3xy} + 2y^2 + 4y =$$

$$= (x^2 - 2x \underline{- xy}) + (2y^2 + 4y \underline{- 2xy}) =$$

$$= x(x - 2 - y) + 2y(y + 2 - x) =$$

$$= x(x - 2 - y) - 2y(-y - 2 + x) =$$

$$= (x - 2y)\cdot (x - 2 - y).$$

Разложить на множители.

55. $2x^2 + 2y^2 - 5xy$

56. $3x^3 + 9x^2y - xy - 3y^2$

57. $x^3 + 2y^3 - 3xy^2$

58. $2x^2 - 21xy - 11y^2 - x + 34y - 3$

59. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

60. $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Докажите следующие утверждения:

61. $F_n(x) = x^n + x^2 + 3x - 5$ при любом натуральном n делится на $(x - 1)$.

62. Многочлен $F_n(x) = x^{72} + 1$ делится на многочлен $G_n(x) = x^{16} - x^8 + 1$.

63. Среди корней многочлена $F_3(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеются два противоположных числе тогда и только тогда, когда $ab = c,\ b \le 0$

64. Если многочлен $F_n(x)$ с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает одно и то же значение равное 1, то он не имеет целых корней.

65. Сумма всех коэффициентов любого многочлена $F_n(x)$ равна его значению при $x = 1$.

66. Если многочлен $F_n(x)$ с рациональными коэффициентами и $F_n(a + b\sqrt{c}) = p + q\sqrt{c}$, где a, b, c, p, q – рациональны, $\sqrt{c}$ – иррациональное число, то $F_n(a - b\sqrt{c}) = p - q\sqrt{c}$.

67. $x^2 + y^2 \geq xy$

68. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.

69. $x^2 + y^2 + z^2 > xy + yz + xz$.

70. $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 > 0$.

71. $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$.

72. $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 10 > 0$.

73. $(x + y)^n < 2^n(x^n + y^n)$ для любых положительных x и y и натуральных n.

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Найдите:

74. **остаток** от деления многочлена $F_{2015}(x) = x^{2015} + x^{201} + x^{15} + 2$ на $(x^2 - 1)$;

75. **параметры** a и b, при которых многочлен

$$F_6(x) = x^6 + ax^5 + 11x^4 + 27x^3 + 32x^2 + b - 31$$

делится на $(x^2 - 4)$ без остатка;

76. **параметры** a и b квадратного трёхчлена $F_2(x) = 2x^2 + ax + b$ если его остатки от деления на $(x - a)$ и $(x - b)$ равны соответственно a и b;

77. **параметры** a и b многочлена $F_4(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b$ если три его корня равны;

78. **все многочлены** наименьшей степени, которые делятся на $F_4(x) = 8x^4 - 28x^3 + 18x^2 + 27x - 27$ и на многочлен $G_4(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x$;

79. **целое число** $\boldsymbol{a}$**,** при котором многочлен $F_{13}(x) = x^{13} + x + 90$ делится на многочлен $G_3(x) = x^2 - x + a$;

80. **нормированный многочлен** наименьшей степени с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $3 - \sqrt{5}$;

81. **нормированный многочлен** наименьшей степени с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt[3]{2}$;

82. **значение числового выражения**

$$(2^2 - 2 + 1)(2^4 - 2^2 + 1)(2^8 - 2^4 + 1)(2^{16} - 2^8 + 1);$$

83. **многочлен** $F_n(x)$ степени не ниже третьей, который при $x = 1$ принимает значение, равное 1, при $x = 2$ принимает значение, равное 2, при $x = 3$ принимает значение, равное 3;

84. **сумму коэффициентов** многочлена

$$F(x) = (2x^2 - 2x + 1)^{2017}(x^3 - 2x^2)^{2019};$$

85. **многочлен** $F_n(x)$ все коэффициенты которого – натуральные числа, меньшие 10, а $F_n(10) = 1248$.

<u>Задачи III уровня (по 0,2 балла).</u> Объясните результат.

86. Четверо учеников упражнялись в устном счёте и под руководством учителя выполняли следующую последовательность действий. *Задумай число А, вычти из него 11, результат умножь на А, увеличь на 41, вновь умножь на А, уменьши на 61, вновь умножь на А, сложи с 30. Что получилось?* В какой-то момент на вопрос учителя: «Что получилось?», – все ученики дружно ответили: «Ноль». «Вы действовали с одним и тем же числом? Какое это число?» – спросил учитель и задумался, когда дети назвали четыре разных числа.

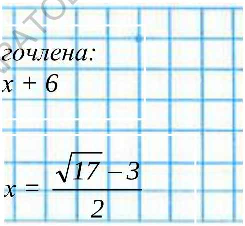
87. На занятии математического кружка после формулировки теоремы о количестве корней многочлена учитель попросил привести примеры многочленов с указанием их степени и корней и тем самым убедиться в истинности сформулированного математического утверждения. «Теорема неверна, – заявил один из учеников, – вот многочлен <u>второй</u> степени, который имеет <u>три</u> корня a, b и c: $F_2(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} - 1$.

88. В Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач, которые часто облекались в стихотворную форму. Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась
А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?

89. Из куба некоторого действительного числа вычли 15, после чего результат представили в виде произведения трёх множителей: 14, исходного числа и числа на 1 больше, чем исходное.

90. Ученик, небрежно оформивший решение задачи по нахождению корней некоторого многочлена третьей степени, потерял листок с условием задачи и большей частью решения. Всё, что у него осталось, это один из найденных корней $x = \dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}$ и указание на то, что свободный член данного многочлена равен 6. Опираясь на эти данные ученик восстановил и условие и решение задачи.



91. На экзамене по алгебре один нерадивый студент в качестве оправдания сказал: *Не подготовился я к экзамену только потому, что все три дня пытался решить проблему формулировки теоремы, справедливой только для чисел –3/2, 1, 2, 5 и 12.*

92. На практическом занятии по алгебре студенты, разбившись на три группы, искали корни многочлена Маркова $F(x,y,z)= x^2+ y^2+ z^2 - 3xyz$. Первая группа искала тройки чисел (x,y,z), содержащих 1, вторая группа – тройки, содержащие 2, третья группа – содержащие (– 1). Какова вероятность того, что найденные множества корней будут содержать хотя бы одну общую тройку чисел (x,y,z)?

93. В ожидании своей очереди сдавать зачёт по математике, студентки решают задачу по нахождению действительных корней некоторого многочлена $F_6(x)$. Одна предложила: «*Старший коэффициент 1, свободный член (– 72), следует использовать схему Горнера».* Вторая: *«Лучше понизить степень, заменив x^2 на y, а затем применить метод неопределённых коэффициентов к новому многочлену $F_3(y)$». Через 5 минут, первая студентка сообщила, что многочлен не имеет целых корней, вторая студентка заявила, что ей удалось найти значение $y = -6$.* Подошла третья студентка, и глядя на исходный многочлен, заявила: *«Его корни – алгебраические числа, абсолютная величина которых $\sqrt[4]{12}$ ».* Как выяснилось во время зачёта, все студентки оказались правы.

94. В нормированный многочлен третьей степени с целыми коэффициентами и свободным членом (–100), трое участников математической летней школы подставляют числа 4, 5 и 6. Тот, кто работал с числом 4, получил число на 1 меньшее, чем тот, кто работал с числом 5, а тот, кто работал с числом 6, получил число на 1 большее, чем тот, кто работал с числом 5.

95. На практическом занятии по алгебре студенты в произвольном порядке подставляют числа 3, 2, –1, –4 вместо коэффициентов a, b, c, d многочлена $F_3(x)= ax^3+bx^2+cx + d.$. Какова вероятность того, что все такие многочлены имеют общий корень?

96. <u>Творческое задание (100 баллов)</u>:

Алгебра многочленов изучает свойства многочленов одной переменной над некоторым числовым кольцом К. Докажите свойства коммутативности, ассоциативности сложения многочленов, существование нулевого многочлена и противоположного многочлена.

Пусть К – область целостности – коммутативное, ассоциативное кольцо с 1 и без делителей 0. Докажите коммутативность и ассоциативность умножения многочленов, существование 1 и отсутствие делителей нуля.

Докажите теоремы: о делении многочлена на $(x - x_0)$ и следствие из неё (теорему Безу); о числе корней многочлена; о делении многочленов с остатком

97. <u>Творческое задание (100 баллов)</u>:

Как комплексные числа помогли ответить на некоторые важные вопросы относительно многочленов с действительными коэффициентами?

Сформулируйте и докажите основную теорему алгебры. Кто стоял у истоков открытия этой теоремы? Каковы методы её доказательства?

98. <u>Творческое задание (100 баллов)</u>:

Вспомните формулировку теоремы Виета для квадратного трёхчлена. Что Вам известно об авторе этой теоремы?

Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для многочлена

$$F_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Разработайте систему упражнений на закрепление теоремы Виета.

99. <u>Творческое задание (100 баллов)</u>:

Вспомните основные положения теории делимости натуральных чисел. Нельзя ли по аналогии (до известной степени) разработать теорию делимости многочленов. Сформулируйте основные положения этой теории: определите основные понятия, докажите наиболее важные свойства.

100. <u>Творческое задание (100 баллов)</u>:

Одно из основных понятий алгебры многочленов – понятие результанта двух многочленов. Что Вам известно об этом понятии, о его свойствах, применении к решению задач, связанных с многочленами?

II. Рациональные уравнения, неравенства и системы

Уравнение / неравенство называют *рациональным (алгебраическим)*, если обе его части являются многочленами.

Решить рациональное уравнение с одним неизвестным на множестве **R** значит найти все его действительные корни и указать их кратность или доказать, что уравнение корней не имеет.

Решить рациональное неравенство с одним неизвестным / систему рациональных неравенств с одним неизвестным на множестве **R** значит найти множество его решений (которое может быть пустым, содержать конечное или бесконечное число элементов); в случае непустого множества – все действительные числа, удовлетворяющие данному неравенству / системе неравенств.

Решение рациональных уравнений первой степени: $ax + b = cx + d$, $a \neq 0, a \neq c$ сводится к нахождению отношения: $x = \dfrac{d-b}{a-c}$.

Решением рационального неравенства первой степени: $ax + b > cx + d$, $a \neq 0, a \neq c$ является:

– отношение $x > \dfrac{d-b}{a-c}$ (числовой промежуток $\left(\dfrac{d-b}{a-c};+\infty\right)$), при $a - c > 0$,

– отношение $x < \dfrac{d-b}{a-c}$ (числовой промежуток $\left(-\infty;\dfrac{d-b}{a-c}\right)$), при $a - c < 0$.

Решение рациональных уравнений второй степени: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ сводится к нахождению дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Если дискриминант отрицателен, то уравнение не имеет действительных корней; если дискриминант равен 0, то уравнение имеет двукратный корень $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$. если дискриминант положителен, то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Решением рационального неравенства второй степени: $ax^2 + bx + c > 0$, $a > 0$ является:

– множество $\mathbf{R} \equiv (-\infty;+\infty)$, при $D < 0$,

– множество $\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\} \equiv \left(-\infty;\dfrac{-b}{2a}\right) \cup \left(\dfrac{-b}{2a};+\infty\right)$, при $D = 0$,

– множество $\left(-\infty;\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) \cup \left(\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a};+\infty\right)$, при $D > 0$.

Решением рационального неравенства второй степени: $ax^2 + bx + c < 0$, $a > 0$ является:

– множество $\varnothing$, при $D \le 0$,

– множество $\left(\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} ; \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} \right)$, при $D > 0$,

Решение рациональных уравнений третьей степени: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ сводится у нахождению дискриминанта

$$D = 18abcd + (bc)^2 - 4db^3 - 4ac^3 - 27(ad)^2$$

и определению числа действительных корней.

Для вычисления дискриминанта составим программу (например в среде электронных таблиц).

Решение рациональных уравнений третьей степени:

ax3 + bx2 + cx + d = 0, a $\neq$ 0

сводится у нахождению дискриминанта

$$D = 18abcd + (bc)^2 - 4db^3 - 4ac^3 - 27(ad)^2$$

a	b	c	d		
1	3	-3	-14	**D =**	***-1485***

Если дискриминант отрицателен, то уравнение имеет один действительный рациональный и пару комплексно сопряжённых корней.

Если дискриминант равен 0, то хотя бы два корня совпадают. Это может быть, когда уравнение имеет двойной действительный корень и ещё один отличный от них действительный корень; либо все три корня совпадают, образуя корень кратности 3.

Если дискриминант положителен, то уравнение имеет три действительных иррациональных корня (это так называемый «неприводимый» случай), которые получают с помощью комплексных чисел; – этот случай мы уберём из рассмотрения.

Решим уравнение $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$.

Найдём дискриминант $D = - 1845$.

Дискриминант отрицателен, уравнение имеет один действительный рациональный корень, который находим, используя схему Горнера или любые другие способы нахождения корней многочлена $F_3(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 14$.

Делители свободного члена	1	3	-3	-14	
2	1	5	7	0	D= -3

<u>Ответ</u>. $x = 2$.

Для нахождения корней уравнения четвёртой степени существуют формулы, которые в силу своей громоздкости применяются крайне редко; для уравнений степени выше четвёртой таких формул не существует.

Уравнение вида

$$a_0x^{2m+1} + a_1x^{2m} + a_2x^{2m-1} + \ldots + a_mx^{m+1} + \lambda a_mx^m + \lambda^3a_{m-1}x^{m+1} + \ldots + \lambda^{2m+1}a_0 = 0$$

где λ – фиксированное число, а $a_0 \neq 0$, называют ***возвратным*** уравнением нечётной степени. Это уравнение всегда имеет корень $x = -\lambda$, поэтому его можно представить в виде произведения множителя $(x - \lambda)$ и некоторого возвратного уравнения чётной степени, то есть уравнения вида:

$$b_0x^{2n} + b_1x^{2n-1} + b_2x^{2n-2} + \ldots + b_nx^n + \mu b_{n-1}x^{n+1} + \mu^2b_{n-2}x^{n+2} + \ldots + \mu^nb_0 = 0$$

где μ – фиксированное число, а $b_0 \neq 0$.

Для решения возвратного уравнения чётной степени его:

– делят на x^n, так как $x = 0$ не является корнем возвратного уравнения,

– группируют члены так, что

$$b_0\left(x^n + \left(\frac{\mu}{x}\right)^n\right) + b_1\left(x^{n-1} + \left(\frac{\mu}{x}\right)^{n-1}\right) + \ldots + b_{n-1}\left(x + \frac{\mu}{x}\right) + b_n = 0,$$

– заменяют: $y = x + \dfrac{\mu}{x}$, $\quad y^2 - 2\mu = x^2 + \left(\dfrac{\mu}{x}\right)^2$, $\quad y^3 - 3\mu y = x^3 + \left(\dfrac{\mu}{x}\right)^3$, ...

и записывают уравнение относительно переменной y, переходя, таким образом, от уравнения $2n$ степени к уравнению n-ой степени,

– решают уравнение $F_n(y) = 0$,

– для каждого найденного значения y находят x из уравнения: $y = x + \dfrac{\mu}{x}$.

Решим уравнение $x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 24x - 32 = 0$, которое является возвратным уравнением пятой степени с $\lambda = -2$. Перепишем его в виде:

$\underline{x^5} + \mathbf{3x^4} - x^3 - (-2)x^2 + (-2)^3 \cdot 3x + \underline{(-2)^5} = 0$ и сгруппируем члены:

$$(x^5 - 32) + 3x(x^3 - 8) - x^2(x - 2) = 0$$

$(x - 2)[x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + 3x(x^2 + 2x + 4) - x^2] = 0,$

$x_1 = 2, \quad x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16 = 0$

$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16 = 0$ – возвратное уравнение четвёртой степени с $\mu = 4$; разделим его на x^2, так как $x = 0$ не является корнем, и сгруппируем члены так, что $\left(x^2 + \left(\dfrac{4}{x}\right)^2\right) + 5\left(x + \dfrac{4}{x}\right) + 9 = 0$.

Заменим $y = x + \dfrac{4}{x}$ и $y^2 - 8 = x^2 + \left(\dfrac{4}{x}\right)^2$, получим $y^2 + 5y + 1 = 0$.

$y_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$. Перейдём к уравнениям $\dfrac{-5 - \sqrt{21}}{2} = x + \dfrac{4}{x}$; $\dfrac{-5 + \sqrt{21}}{2} = x + \dfrac{4}{x}$.
Преобразуем и решим каждое.

$$x^2+\frac{5+\sqrt{21}}{2}+4=0,\quad D=\frac{5\sqrt{21}-9}{2},\quad x_{2,3}=\frac{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}\pm\sqrt{\frac{5\sqrt{21}-9}{2}}}{2}$$

$$x_{2,3}=-\frac{5+\sqrt{21}}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10\sqrt{21}-18}{4}},\qquad x_{2,3}=\frac{-5-\sqrt{21}\pm\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4}$$

$$x^2+\frac{5-\sqrt{21}}{2}+4=0,\quad D=\frac{-5\sqrt{21}-9}{2}<0.$$

Ответ. Исходное уравнение имеет три корня: $x_1 = 2$, $x_{2,3}=\dfrac{-5-\sqrt{21}\pm\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4}$.

Для решения рационального неравенства n-ой степени его:

– представляют произведением неприводимых множителей:

$$a_n(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}>0$$

– избавляются от множителей $a_n\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$: если это произведение положительно, то переходят к неравенству $(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}>0$, если произведение отрицательно, то переходят к неравенству $(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}<0$,

– упорядочив корни таким образом, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, определяют, какое, положительное или отрицательное, значение принимает многочлен $(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}$ на каждом из интервалов $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, …, $(x_{m-1}; x_m)$, $(x_m; +\infty)$,

– в зависимости от знака неравенства выбирают интервалы, где многочлен принимает положительные значения (в случае неравенства $F(x) > 0$) или отрицательные значения (в случае неравенства $F(x) < 0$).

Решим неравенство $x^4 - 8x^3 - 41x^2 - 80x - 48 > 0.$

$$(x-1)(x+12)(x^2+3x+4)>0,$$

для любого x: $x^2 + 3x + 4 > 0,$

поэтому переходим к неравенству $(x - 1)(x + 12) > 0,$

$$(x+12)(x-1)\ \underline{\mathbf{>0}},$$

определим, какое, положительное или отрицательное, значение принимает многочлен $F(x) = (x + 12)(x - 1)$ на каждом из интервалов $(-\infty; -12)$, $(-12; 1)$, $(1; +\infty)$.

На интервале $\underline{\mathbf{(-\infty; -12)}}$. $F(x)\ \underline{\mathbf{>0}}$.

На интервале $(-12; 1)$, $F(x) < 0$.

На интервале $\underline{\mathbf{(1; +\infty)}}$, $F(x)\ \underline{\mathbf{>0}}$.

Ответ. $x \in (-\infty; -12)\cup(1; +\infty)$.

Решить систему n рациональных уравнений с n неизвестными значит найти все наборы из n элементов, удовлетворяющие каждому уравнению системы.

Пусть нам требуется найти решение системы из n линейных уравнений с n неизвестными: $\begin{cases} a_1x + a_2y + \ldots + a_nz = a_0 \\ b_1x + b_2y + \ldots + b_nz = b_0 \\ \ldots \\ n_1x + n_2y + \ldots + n_nz = n_0 \end{cases}$. Воспользуемся методом Гаусса – методом последовательного исключения неизвестных. Сначала исключим x из всех уравнений системы, начиная со второго, далее исключим y из всех уравнений, начиная с третьего, и так далее, пока в последнем уравнении останется только неизвестная переменная исключим z. Такой процесс преобразования уравнений системы для последовательного исключения неизвестных переменных называется *прямым ходом метода Гаусса*. После завершения прямого хода метода Гаусса из последнего уравнения находится z, с помощью этого значения из предпоследнего уравнения вычисляется значение другой неизвестной, и так далее, из первого уравнения находится x. Процесс вычисления неизвестных переменных при движении от последнего уравнения системы к первому называется *обратным ходом метода Гаусса*.

Кратко опишем алгоритм исключения неизвестных переменных.

Будем считать, что $a_1 \neq 0$, так как мы всегда можем этого добиться перестановкой местами уравнений системы. Исключим неизвестную переменную x из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению системы прибавим первое, умноженное на $\frac{-b_1}{a_1}$, к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на $\frac{-c_1}{a_1}$, и так далее, к *n-ому* уравнению прибавим первое, умноженное на $\frac{-n_1}{a_1}$.

Система уравнений после таких преобразований примет вид:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + \ldots + a_nz = a_0 \\ \left(b_2 - \frac{b_1 \cdot a_2}{a_1}\right)y + \ldots + \left(b_n - \frac{b_1 \cdot a_n}{a_1}\right)z = b_0 - \frac{b_1 \cdot a_0}{a_1} \\ \ldots \\ \left(n_2 - \frac{n_1 \cdot a_2}{a_1}\right)y + \ldots + \left(n_n - \frac{n_1 \cdot a_n}{a_1}\right)z = n_0 - \frac{n_1 \cdot a_0}{a_1} \end{cases}$$

или с учётом новых обозначений: $\begin{cases} a_1x + a_2y + \ldots + a_nz = a_0 \\ \boldsymbol{b_2^1 y + \ldots + b_n^1 z = b_0^1} \\ \boldsymbol{\ldots} \\ \boldsymbol{n_2^1 y + \ldots + n_n^1 z = n_0^1} \end{cases}$

Таким образом, переменная x исключена из всех уравнений, начиная со второго*. Далее действуем аналогично, но лишь с частью полученной системы, которая выделена жирным шрифтом.

Так продолжаем прямой ход метода Гаусса пока система не примет вид:

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + \ldots + a_n z = a_0 \\ \qquad b_2{}^1 y + \ldots + b_n{}^1 z = b_0{}^1 \\ \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\ldots} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{n_n{}^{n-1} z = n_0{}^{n-1}} \end{cases}.$$

С этого момента начинаем обратный ход метода Гаусса: вычисляем z из последнего уравнения как $z = \dfrac{n_0^{n-1}}{n_n^{n-1}}$, с помощью полученного значения z из предпоследнего уравнения вычисляется значение другой неизвестной, и так далее, из первого уравнения находится x.

Решим систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z + t = 4 \\ z + t + x = -3 \\ t + x + y = 1 \end{cases}$.

Перепишем систему в виде $\begin{cases} x + y + z + 0 \cdot t = 4 \\ \qquad y + z + t = 4 \\ x + 0 \cdot y + z + t = -3 \\ x + y + 0 \cdot z + t = 1 \end{cases}$ и начнём прямой ход метода Гаусса. Умножаем первое уравнение системы на (– 1) и складываем с третьим и четвёртым уравнениями: $\begin{cases} x + y + z + 0 \cdot t = 4 \\ \qquad y + z + t = 4 \\ -y + 0 \cdot z + t = -7 \\ \qquad -z + t = -3 \end{cases}$. Складываем второе и третье уравнения: $\begin{cases} x + y + z + 0 \cdot t = 4 \\ \qquad y + z + t = 4 \\ \qquad z + 2t = -3 \\ \qquad -z + t = -3 \end{cases}$. Складываем третье и четвёртое уравнения: $\begin{cases} x + y + z + 0 \cdot t = 4 \\ \qquad y + z + t = 4 \\ \qquad z + 2t = -3 \\ \qquad\quad 3t = -6 \end{cases}$. Начинаем обратный ход метода Гаусса и получаем: $t = -2,\ z = 1,\ y = 5,\ x = -2.$

Ответ. $x = -2,\ y = 5,\ z = 1,\ t = -2.$

---

* К такому же результату мы бы пришли, если бы выразили x через другие неизвестные переменные в первом уравнении системы, и полученное выражение подставили во все остальные уравнения.

Тестовые задания (по 0.05 балла).

101. Корни квадратного уравнения $x^2 + ax = b$ равны (– 1) и (– 3).

а) $a = -4,\ b = -3$
б) $a = 4,\ b = -3$
в) $a = -4,\ b = 3$
г) $a = 4,\ b = 3$

102. Уравнение $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0$ имеет
а) три действительных корня, один из которых равен 2
б) три действительных корня, один из которых равен (– 2)
в) один действительный корень равный 2
г) один действительный корень равный (– 2)

103. Уравнение $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ имеет
а) три действительных корня, один из которых равен 1
б) три действительных корня, один из которых равен (– 1)
в) один действительный корень равный 1
г) один действительный корень равный (– 1)

104. Уравнение $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$
а) не имеет действительных корней
б) имеет два различных действительных корня, один из которых равен 1
в) имеет действительный двукратный корень равный 1
г) имеет четыре действительных корня, один из которых равен 1

105. Решением неравенства $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 > 0$ является множество чисел

а) $(-\infty; 2)\cup(5; +\infty)$
б) $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$
в) $(-\infty; -3)\cup(-1; 2)\cup(5; +\infty)$
г) $(-\infty; -1)\cup(2; 5)\cup(6; +\infty)$

106. Решением неравенства $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 23x + 14 < 0$ является множество чисел

а) $(-\infty; -2)\cup(-1; +\infty)$
б) $(-2; -1)$
в) $(-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$
г) $(1; 2)$

107. Решением неравенства $3x^3 + 4x^2 + 5x - 6 > 0$ является множество чисел

а) $(-\infty; -2/3)$ б) $(-2/3; +\infty)$ в) $(-\infty; 2/3)$ г) $(2/3; +\infty)$

108. Значением неизвестной x в системах $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=-2 \\ z+x=-1 \end{cases}$ является число

а) -2 б) -1 в) 1 г) 2

109. Значением неизвестной y в системах $\begin{cases} x+2y+z=14 \\ 2x-y+z=0 \\ x-3y+2z=-8 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2y-z=12 \\ 2x-y-3z=-2 \\ x+3y-2z=16 \end{cases}$ является число

а) 1 б) 3 в) 5 г) 7

110. Сумма значений неизвестной x в системе $\begin{cases} 3x+2y-z=5 \\ 2x-y+z=7 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$ и неизвестной y в системе $\begin{cases} x+2y+3z=13 \\ -x-y+2z=3 \\ -2x-y+z=-12 \end{cases}$ равна

а) 10 б) 6 в) 4 г) 0

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решите уравнения

111. $x^4 + 7x^2 + 6x = 6x^3 + 8$
112. $x(x^4 + 12x + 1) = 2(x^4 + 3x^3 + 1)$
113. $(2x^2 + 3x - 1)^2 = 10x^2 + 15x - 9$
114. $(x - 1)(x + 3)(x + 4)(x + 8) = -96$
115. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 12x + 32) = 4x^2$
116. $(x^2 - 16)(x - 3)^2 + 9x^2 = 0$
117. $(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1)$
118. $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$
119. $12x^4 + 4x^3 + 4x + 12 = 41x^2$
120. $16x^4 + 32x^3 + 144 = 369x^2 + 96x$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решите неравенства

121. $6x^4 + 3x + 2 > 9x^3 + 8x^2$
122. $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 < x + 1$
123. $x^4 + 2 > 22x^2 + 5x$
124. $x^4 + 3x < x^3 + 2x^2 + 3$
125. $x^4 + x^3 + 50 < 15x^2 + 10x$
126. $x^5 + x^3 + x^2 + 1 < 3x^4 + 3x$
127. $x^3 + x^2 + x \geq -1/3$
128. $x^4 + (x - 4)^4 \leq 82$
129. $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) \geq 16$
130. $36x^4 + 60x + 36 \leq 47x^2 + 60x^3$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Основной метод решения рациональных уравнений / неравенств с модулем – подведение под понятие абсолютной величины – состоит в разбиении множества действительных чисел на подмножества, где каждое из выражений, стоящих под знаком модуля, либо положительно, либо отрицательно, в «избавлении» выражений от модуля на каждом из таким подмножеств и решении получившейся совокупности систем.

Решим неравенство $|x| + |7 - x| + 2|x - 2| < 4$.

Множество действительных чисел разбиваем на подмножества точками: $x = 0,\ x = 7,\ x = 2\ (x = 0,\ \ 7 - x = 0,\ \ x - 2 = 0)$ и переходим к решению совокупности неравенств: $\left[\begin{array}{ll} x<0, & -x+7-x-2x+4<4 \\ 0<x<2, & x+7-x-2x+4<4 \\ 2<x<7, & x+7-x+2x-4<4 \\ x>7, & x-7+x+2x-4<4 \end{array}\right.$,

$$\left[\begin{array}{ll} x<0, & -4x<-7 \\ 0<x<2, & -2x<-7 \\ 2<x<7, & 2x<1 \\ x>7, & 4x<15 \end{array}\right.$$. Все систем совокупности – пустые множества.

Ответ. $\varnothing$.

Решите уравнения и неравенства с модулем.

131. $|x-1|+|x-2|=|x+2|$

132. $x^2+4\geq|3x+2|-7x$

133. $2|x^2+2x-5|=x-1$

134. $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$

135. $|x-|4-x||-2x=4$

136. $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$

137. $|x^2-4x+3|+(x^2-5x+6)=1$

138. $||x-1|-5|\leq 2$

139. $x^4+2|x|^3+2|x|+1=6x^2$

140. $||x^2-3x+2|-1|\geq x-2$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решите систему уравнений

141. $\begin{cases} x-y-z=4 \\ 2x-3y-4z=1 \\ x+2y+8z=28 \end{cases}$

142. $\begin{cases} x+y=1+z \\ y+z=10-2x \\ z+x=13+y \end{cases}$

143. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+2z=6 \\ x-5y+3z=-4 \end{cases}$

144. $\begin{cases} xy=6z \\ 2yz=3x \\ 3xz=2y \end{cases}$

145. $\begin{cases} x^2y^2=4 \\ x^3y^2=2 \end{cases}$

146. $\begin{cases} xy+yz=8 \\ yz+xz=9 \\ xz+yz=5 \end{cases}$

147. $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 2y+z=16 \\ 2z+x=18 \end{cases}$

148. $\begin{cases} x+y=xyz \\ x+z=xyz \\ y+z=xyz \end{cases}$

149. $\begin{cases} x+z=2y \\ y+z=1{,}5x \\ 4(x-y)=z \end{cases}$

150. $\begin{cases} x^2+xy+y=1 \\ y^2+xy+x=1 \end{cases}$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решите систему уравнений

151. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ |x-y|=2 \end{cases}$

152. $\begin{cases} 3x-y=1 \\ |x-2y|=2 \end{cases}$

153. $\begin{cases} x+y=1 \\ x+1=|y| \end{cases}$

154. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ |x-1|=-y \end{cases}$

155. $\begin{cases} |x|+2|y|=3 \\ 7x+5y=2 \end{cases}$

156. $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1 \\ |x-1|+y=3 \end{cases}$

157. $\begin{cases} y-2|x|+3=0 \\ |y|+x-3=0 \end{cases}$

158. $\begin{cases} |xy-4|=8-y^2 \\ xy=2+x^2 \end{cases}$

159. $\begin{cases} |x+3|+|x-2|=5 \\ 818-137x^2\leq 135x \end{cases}$

160. $\begin{cases} y^2-|xy|+2=0 \\ (x+2y)^2=8-x^2 \end{cases}$

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Докажите следующие утверждения:

161. Уравнение $(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0$ имеет действительные корни только при $a=b=c\neq 0$.

162. Уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня при условии $a>0$, $b>a+c$.

163. Уравнение $x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ не имеет отрицательных корней.

164. Все корни уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 3)\ldots(x + 2018) = 2018$ меньше числа $\dfrac{1}{2017\,!}$.

165. Если уравнение $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$ имеет корень $x = \alpha$, то оно имеет и корень $x = 1/\alpha$.

166. Если $x^2 + y^2 = 1$, то $-\sqrt{2} \le x + y \le \sqrt{2}$.

167. Если $x + y = 2$, то $x^4 + y^4 \ge 2$.

168. Для любых положительных чисел x и y и любого натурального n выполняется неравенство $(x + y)^n < 2^n(x^n + y^n)$.

169. Если $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, то $x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz > 0$.

170. $|x - 1| + |x - 2| \ge 1$

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Найдите:

171. **все** $\boldsymbol{a}$ при которых система уравнений $\begin{cases} 2|x+1| = ay + 2 \\ 2x + 2(a-1)y = a - 4 \end{cases}$ имеет единственное решение (какое?).

172. **наименьшее** целое x для которого выполняется равенство:

$$|x - 3| + 2|x + 1| = 4$$

173. **все** $\boldsymbol{a}$ при которых уравнение $(x - a - a^2)^2 = x$ имеет два различных действительных корня.

174. **решение** уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при условии $|a + c| = |b|$.

175. **все** $\boldsymbol{a}$ при которых уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$ и $x^2 - x + a = 0$ имеют общий корень.

176. **корни** уравнения $x^3 - 2x^2 - (a^2 - a - 1)x + a^2 - a = 0$.

177. **все** $\boldsymbol{a}$ при которых уравнение $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 0$ имеет решение.

178. **решение** уравнения $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$.

179. **критерий** разрешимости системы уравнений $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ bx^2 + cx + a = 0 \\ cx^2 + ax + b = 0 \end{cases}$.

180. **все** $\boldsymbol{a}$ при которых уравнение $x|x + 2a| + 1 = a$ имеет два различных действительных корня.

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Решите систему уравнений:

182. $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 10 = 4y^2 + 7xy + 18y \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$

182. $\begin{cases} (x+y)^2 = 8(x+y) + 33 \\ (x-y)^2 = 80 - 2(x-y) \end{cases}$

183. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7(x+y) \\ x^3 - y^3 = 13(x-y) \end{cases}$

184. $\begin{cases} xy^2 + x^2y = 6 \\ xy + y + x = 5 \end{cases}$

185. $\begin{cases} xy^2 - 2y^2 + 3x = 18 \\ 3xx - 6y + 5x = 24 \end{cases}$

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите задачи.

186. Ученик, решая квадратное уравнение, допустил ошибку при переписывании, переставив местами старший коэффициент и свободный член уравнения. При этом оказалось, что один найденный им корень является корнем исходного уравнения, а второй корень, равный (–3) – не является. Найдите исходное уравнение.

187. Учитель предложил задачу: я загадал два числа, квадрат первого в сумме со вторым даёт 13, шестая степень первого в сумме с кубом второго даёт 793; какие числа я загадал? Через какое-то время ученик отвечает: $x = 2$, $y = 9$. Учитель сказал, что он загадал совсем другие числа. Как такое могло случиться? Какими условиями нужно дополнить задачу, чтобы в результате получилась единственная пара чисел?

188. Учитель предложил трём группам учащихся придумать уравнение с тремя неизвестными степени не ниже 3. Первая группа учащихся предложила уравнение $x + y^2 = z^3$, вторая группа, взяв за основу это уравнение и увеличив степень каждого неизвестного на единицу, получила «своё» уравнение, которое в свою очередь третья группа преобразовала по тому же алгоритму и получила новое уравнение. Учитель весьма недовольный отсутствием творческого подхода учащихся к конструированию задач, дал задание: решить систему из составленных учащимися уравнений. Весь класс тут же дал ответ: $x = y = z = 0$. «А где же вы потеряли ещё шесть решений?» – спросил учитель и дал на поиски пропавших результатов 5 минут. Найдите и Вы не более чем за 5 минут 6 других решений получившейся систему уравнений.

189. Одну и ту же площадку можно покрыть плитками трёх цветов тремя способами. При первом способе покрытия потребуется по 100 плиток белого, чёрного и серого цветов, при втором способе – по 150 белых и чёрных плиток и всего 50 серых, при третьем – 200 белых, 50 чёрных и 60 серых плиток. Во сколько раз площадь серой плитки больше площади чёрной плитки?

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите задачи из различных учебных пособий прошлых лет.

190. Лесопромышленник заплатил за три лесные дачи поровну; десятина лесу в первой даче обошлась ему 64 рублей, во второй – 80 рублей, в третьей – 90 рублей. Сколько десятин в каждой из этих трех дач, если во всех трех 6780 десятин лесу?

191. Чайный торговец купил 3 ящика чая, всего 13/4 пуда, и за один ящик заплатили 72 рубля, за второй – 66 рублей, за третий – 40 рублей. Сколько чая было в каждом ящике, если 1,1 фунта из первого ящика стоили столько, сколько 9/5 фунта из второго, а 20/3 фунта из второго столько же, сколько 11/2 фунта из третьего?

192. Древнекитайская задача о слитках золота. Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра, их взвесили, вес как раз совпал. Переложили слиток золота и слиток серебра, золото стало легче на 13 ланов. Спрашивается, какой вес слитка золота и слитка серебра каждого в отдельности?

193. Задача из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого. Некий торговец купил 112 баранов, старых и молодых, дал 49 рублев 20 алтын, за старого платил по 15 алтын и по 2 деньги, а за молодого по 10 алтын, и ведательно есть, колико старых и молодых баранов купил он.

194. Задача Л.Н. Толстого. Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель поделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

195. Задача из «Арифметики» Диофанта. Найти три числа так, чтобы наибольшее превышало среднее на данную часть 1/3 наименьшего, чтобы среднее превышало меньшее на 1/3 наибольшего и чтобы наименьшее превышало число 10 на данную часть 1/3 среднего числа.

<u>*196. Творческое задание (1 балл).*</u> При решении систем уравнений широко применяется метод замены переменных. Своеобразная замена переменных встречается при решении систем с помощью симметрических многочленов (симметрическим многочленом с двумя переменными x и y называется многочлен, который не меняет своего значения при замене x на y и y на x). Опишите решение систем уравнений, образованных симметрическими многочленами.

<u>*197. Творческое задание (1 балл).*</u> При доказательстве неравенств часто используются так называемые теоретические неравенства. Одно из них – неравенство Коши – устанавливает взаимосвязь между средним арифметическим нескольких неотрицательных чисел и средним геометрическим этих чисел. Что Вам известно об истории этого неравенства, методах его доказательства? Подберите ряд неравенств, доказательство которых опирается на неравенство Коши, приведите доказательства этих неравенств.

<u>*198. Творческое задание (1 балл).*</u> При доказательстве неравенств часто используются так называемые теоретические неравенства. Одно из них – неравенство Бернулли – устанавливает взаимосвязь между натуральной степенью N суммы некоторого числа A и единицы и суммой единицы и произведения числа AN. Что Вам известно об истории этого неравенства, методах его доказательства? Подберите ряд неравенств, доказательство которых опирается на неравенство Бернулли, приведите доказательства этих неравенств.

<u>*199. Творческое задание (1 балл).*</u> При доказательстве неравенств часто используются так называемые теоретические неравенства. Одно из них – векторное неравенство Коши-Буняковского – позволяет не только доказывать неравенства, но и решать уравнения и системы уравнений. Что Вам известно об истории этого неравенства, методах его доказательства? Подберите ряд уравнений, систем уравнений, задач на доказательство неравенств, решение которых опирается на неравенство Коши-Буняковского, приведите их решения.

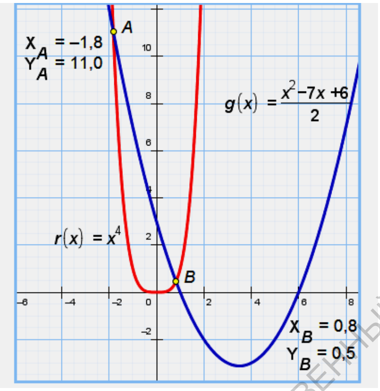
<u>*200. Творческое задание (1 балл).*</u> Разработайте в среде электронных таблиц компьютерные модели ряда задач данной темы, а также генераторы этих задач.

III. Функциональный подход к решению уравнений, неравенств, их систем и совокупностей

Полезно в ходе решения уравнения / неравенства / системы построить их графическую (геометрическую) модель, позволяющую оценить возможные пути алгебраического решения поставленной задачи.

Графическая модель строится, как правило, тогда когда решается уравнение / неравенство / система уравнений или система неравенств с одним неизвестным. В этом случае опираются на понятие функции и свойства функции. Иногда знаний свойств функций позволяет, не строя графическую модель, решить алгебраическую задачу.

Геометрическая модель строится, когда решается уравнение или неравенство с параметром, а также система уравнений или неравенств с двумя неизвестным. В этом случае необходимы, по крайней мере, элементарные знания аналитической геометрии, в частности, уравнений прямой и кривых второго порядка.



Например, требуется решить уравнение $2x^4 - x^2 + 7x - 6 = 0$. Перепишем его в любом удобном для нас виде, например,

$$x^4 = \frac{x^2 - 7x + 6}{2}$$

Введём функции:

$$f(x) = x^4 \text{ и } g(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{2},$$

абсциссы точек пересечения которых (при их наличии) будут являться корнями нашего уравнения. Осталось построить графики указанных функций и убедиться в том, что наше уравнение имеет 2 иррациональных решения. Это значит, что используя, например, метод неопределённых коэффициентов, можно разложить многочлен, стоящий в левой части исходного уравнения на два квадратных трёхчлена, один из которых и даст требуемые значения корней:

$$(2x^2 + 2x - 3)(x^2 - x + 2) = 0,\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Анализ графической модели данного уравнения позволил сделать ещё два вывода (по сути, решить два неравенства):

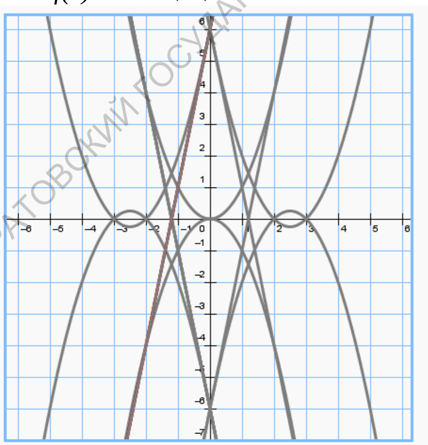
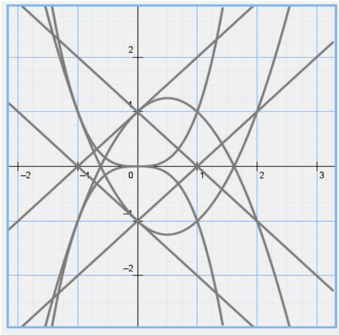
- $2x^4 - x^2 + 7x - 6 > 0$ для $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; +\infty\right)$;
- $2x^4 - x^2 + 7x - 6 < 0$ для $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

Очень часто знание свойств элементарных функций позволяет решить заданное уравнение / неравенство.

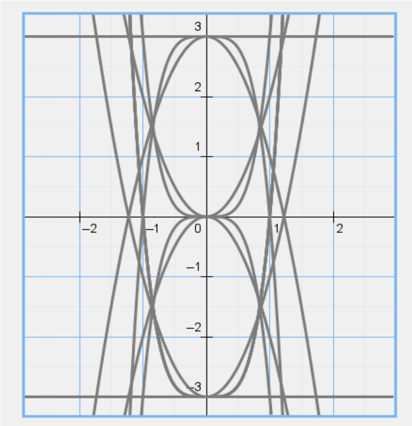
<table>
<tr><th>Свойство функции</th><th>Применение к решению уравнения / неравенства</th></tr>
<tr><td colspan="2">Функция f – это закон или правило, согласно которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y. При этом говорят, что функция f задана на множестве X, или что f отображает X в Y. Если элементу $x \in X$ сопоставлен элемент $y \in Y$, то говорят, что элемент y находится в функциональной зависимости f от элемента x. При этом переменная f хназывается аргументом (независимой переменной) функции f, множество X называется областью определения функции, а элемент y, соответствующий конкретному элементу x – частным значением функции f в точке x. Множество Y всех возможных частных значений функции f называется её областью значений.</td></tr>
<tr><td>Область определения – множество всех значений аргумента (переменной), для которых функция определена, то есть существует и имеет действительные значения.</td><td>Решим уравнение
$$\sqrt{3-x} = log_5(x-3).$$
Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения состоит из пересечения областей определения функций $f(x) = \sqrt{3-x}$ и $g(x) = log_5(x-3)$, то есть удовлетворяет системе $3 - x \geq 0,\ x - 3 > 0$, которая не имеет решений. Итак, ОДЗ уравнения – $\varnothing$, следовательно, оно не имеет корней.</td></tr>
<tr><td>Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху, если для некоторого числа M: $f(x) \leq M;$ наименьшее из M считается верхней гранью.
Функция $f(x)$ называется ограниченной снизу, если для некоторого числа m: $f(x) \geq m;$ наибольшее из m считается нижней гранью.
Функция $f(x)$ называется ограниченной, если для существуют числа m и M: $m \leq f(x) \leq M,$ где m и M – нижняя и верхняя грани.</td><td>Решим уравнение
$$sin(x^3+2x^2+1) = x^2+2x+3.$$
Рассмотрим функции $f(x) = sin(x^3+2x^2+1)$ и $g(x) = x^2+2x+3$. Наше уравнение можно представить как равенство этих функций: $f(x) = g(x)$. (*)
$f(x)$ ограничена: $-1 \leq f(x) \leq 1$
$g(x)$ ограничена снизу: $\underline{g(x)} =$
$= x^2+2x+3 = (x^2+2x+1) + 2 = (x+1)^2 + 2 \underline{\geq 2.}$
Из равенства (*) следует, что $f(x) \leq 1$ и $f(x) \geq 2$, что является противоречием, следовательно, уравнение не имеет корней.</td></tr>
<tr><td>Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке M, если
$\forall x_1, x_2 \in M:$
$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
Функция $f(x)$ называется строго возрастающей на</td><td>Решение уравнений и неравенств с использование свойства монотонности основывается на следующих утверждениях:
(1) Пусть $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке M, тогда уравнение $f(x) = C,$ где C – данная константа, может иметь не более одного корня на M.</td></tr>
</table>

промежутке М, если $\forall x_1, x_2 \in M$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке М, если $\forall x_1, x_2 \in M$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ Функция $f(x)$ называется *строго убывающей* на промежутке М, если $\forall x_1, x_2 \in M$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Возрастающая и убывающая функции называются монотонными (меняющимися в одном и том же направлении). Строго возрастающая или строго убывающая функция называется строго монотонными.	(2) Пусть $f(x)$ – непрерывна и строго возрастает на М, а $g(x)$ непрерывна и строго убывает на М, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного корня на промежутке М. Решим уравнение $x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64$. Рассмотрим функции $f(x) = x$ и $g(x) = 2^{x^2+2x+3}$. $g(x)$ – непрерывна, строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ и ограничена снизу нулём, то есть принимает только положительные значения. $f(x)$ – непрерывна, строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ и тоже должна принимать только положительные значения (поскольку в правой части исходного равенства стоит положительное число 64, представленное произведением двух множителей, одно из которых – $g(x)$ – тоже положительно): $f(x) > 0$, отсюда $x > 0$. Итак, $f(x) \cdot g(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке $(0; +\infty)$, тогда исходное уравнение может иметь не более одного корня на этом промежутке. Путь $x = 1$, тогда выполняется равенство: $1 \cdot 2^6 = 64$, следовательно, $x = 1$ – корень данного уравнения.

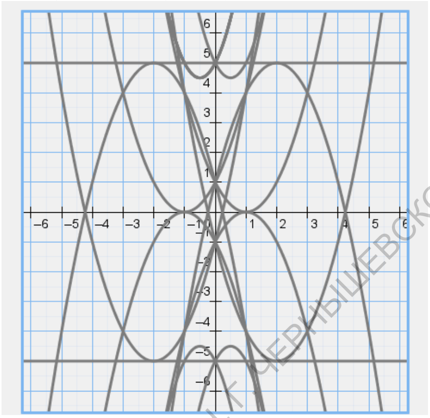
Тестовые задания (по 0,05 балла). На координатной плоскости выделите ту её часть, которая является графической / геометрической моделью данных функции, уравнения, неравенства или системы.

201. $f(x) = x^2 - 5\lvert x \rvert + 6$ 	202. $x^3 = \begin{cases} x+1-x^2, & x \le -1 \\ x-1, & -1 < x < 1 \\ x^2 - x - 1, & x \ge 1 \end{cases}$ 

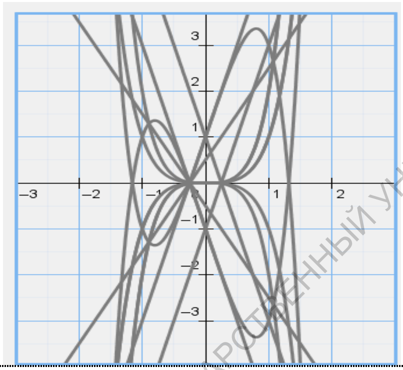
203. $3x^4 = 2x^2 - 3$



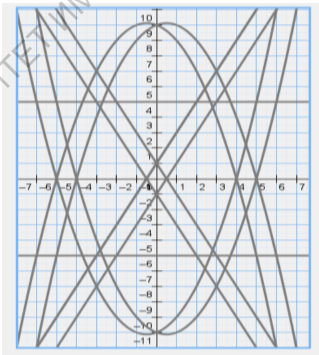
204. $(x-1)^2 + (x+2)^2 = 5$



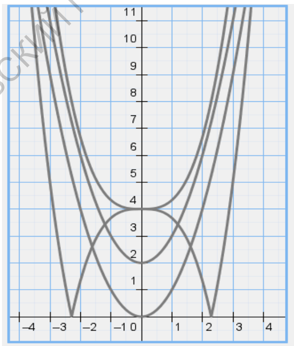
205. $\dfrac{x^5 + x^3}{2} \geq 2x + \dfrac{1}{2}$



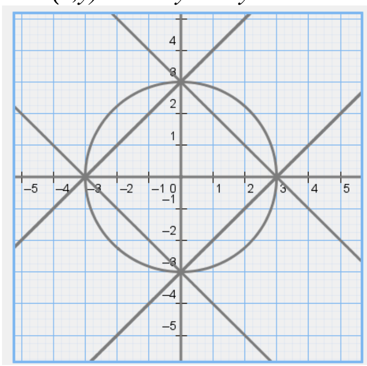
206. $|x-3| + |x+2| < 10 + \dfrac{x - x^2}{2}$



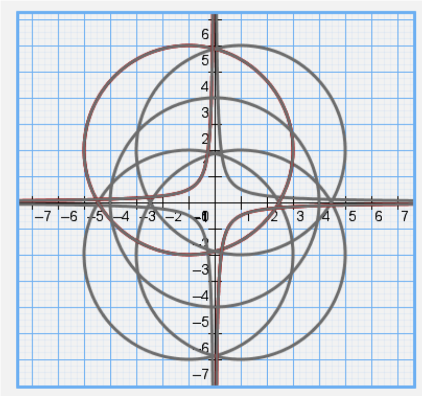
207. $\left|\dfrac{x^3}{3} + 4\right| \geq x^2 + 2$



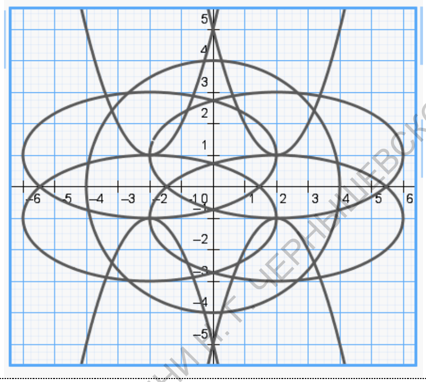
208. . $F(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - 9$



209. $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=16 \\ 2xx=1 \end{cases}$



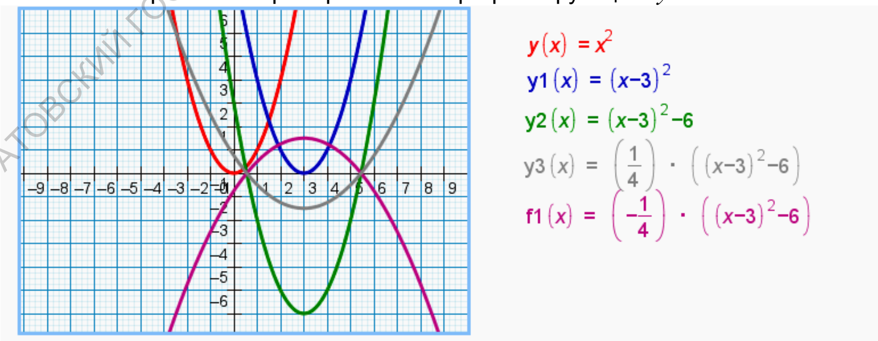
210. $\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{1}=4 \\ x^2-4x+5=y \end{cases}$

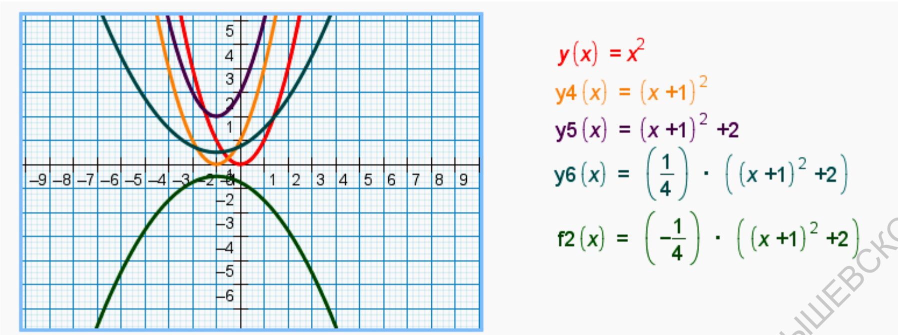


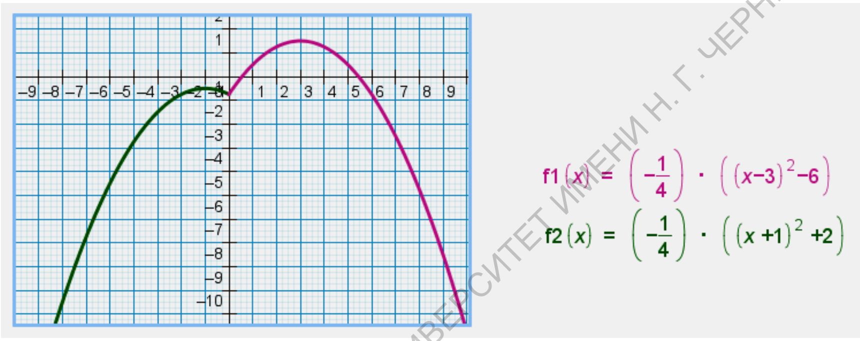
<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Часто график одной функции можно получить из графика другой функции с помощью геометрических преобразований (переносы параллельно осям координат, растяжение и сжатие к осям, симметрия относительно осей), а также используя «сложение» графиков.

Построим график функции $f(x)=\dfrac{x}{2}+|x|-\dfrac{x^2+3}{4}$, предварительно преобразовав его тек, чтобы можно было использовать как можно больше геометрических преобразований и как можно меньше «сложение» графиков.

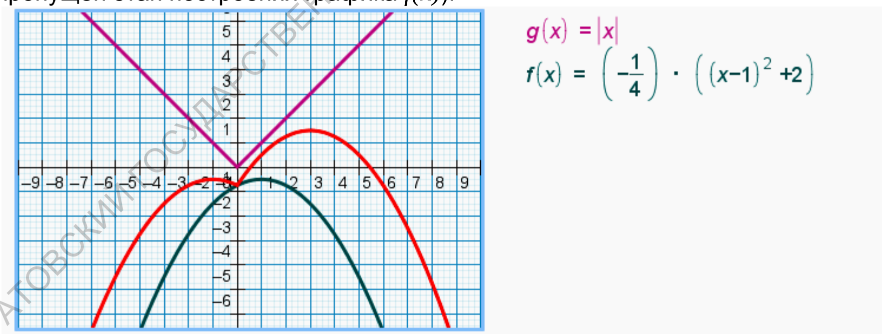
Если предварительно раскрыть модуль, то на промежутке $[0;\ +\infty)$ надо построить график функции $f_1(x)=-\dfrac{1}{4}((x-3)^2-6)$, а на промежутке $(-\infty;\ 0)$ построить график функции $f_2(x)=-\dfrac{1}{4}((x+1)^2+2)$. При этом используются только геометрические преобразования графика функции $y=x^2$.







Если модуль не раскрывать, то построение сведётся к построению графиков: $g(x)= |x|$ и $f(x)= -\dfrac{1}{4}((x-1)^2+2)$ и их «сложению» (на чертеже пропущен этап построения графика $f(x)$).



Используя графики элементарных функций, их геометрические преобразования и «сложение», постройте графики следующих функций:

211. $f(x)= sign\, x - \dfrac{x^3-2}{4}$

212. $f(x)= |x-3| + \dfrac{\sqrt{3x-1}}{2}$

213. $f(x)=\left|\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right|+\sqrt{\pi-x}$

214. $f(x)=\frac{|x|}{\pi}-2\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$

215. $f(x)=e^{\frac{x}{2}-1}+\frac{3}{x}-5$

216. $f(x)=|x-6|+\frac{1}{x^2+x-6}$

217. $f(x)=\log_{0,5}x^2-\operatorname{sign}(x^3)$

218. $f(x)=\log_2(x-5)+|2x-5|$

219. $f(x)=\frac{2}{|x-4|}+\sqrt{4-x}$

220. $f(x)=\frac{x^4}{9}-\sqrt{3x}-|x+3|$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Исследуйте функцию и постройте её график:

221. $f(x)=\frac{\lg 2^{3x^2}}{x}+4$

222. $f(x)=\frac{|x+3|}{x+3}$

223. $f(x)=\frac{x^2-4}{2-x}$

224. $f(x)=\frac{x^2-4}{2-|x|}$

225. $f(x)=-x^2+x-|x|-1$

226. $f(x)=-\frac{x^4}{x^2}+3|x|+2$

227. $f(x)=|3x^2+12x+9|+x$

228. $f(x)=|1-|x||$

229. $f(x)=|x+3|-|x+3|\cdot(x^2-1)$

230. $f(x)=|1-|x||-|x|+1$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Решите уравнения, используя функциональный подход.

231. $\sqrt{|\sin x|}=\sqrt[4]{-|\sin x|}+\operatorname{tg}x$

232. $x^3-x=\sin\pi x$

233. $\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[8]{x-2}=2$

234. $x^2+2x+3=\sqrt{4-x^2}$

235. $x\cdot 2^x=8$

236. $|x-3|+|x^2-3|=0$

237. $x^8+1=\cos x$

238. $\log_2 x=3-x$

239. $x^x=27$

240. $\sqrt{7+x}-\sqrt{11-x}=6$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Решите неравенства, используя функциональный подход.

241. $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[8]{x^4-1}<2^x-\log_2\left(1+x^8\right)$

242. $\log_5 x<\sqrt{1-x^4}$

243. $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{9-x}<\sqrt{3}$

244. $2^x+3^x+5^x<10$

245. $\log_2(2^x+1-x^2)>\log_2(2^{x-1}+1-x)+1$

246. $\sqrt{2+x}-\sqrt{4+x}\geq 2$

247. $\log_2 x>3-x$

248. $x\cdot\log_3 x<18$

249. $|1-|x||\geq|x|+1$

250. $\cos x\geq 1-\frac{x^2}{2}$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Решите систему неравенств, используя функциональный подход.

251. $\begin{cases} x-y+1\ge 0 \\ x+y-3\le 0 \\ x+3y+1\ge 0 \end{cases}$ *252.* $\begin{cases} x^2+y^2-4\le 0 \\ 2x+3y\ge 0 \end{cases}$

253. $\begin{cases} 3x-2y-5\ge 0 \\ 3x-2y+5\le 0 \end{cases}$ *254.* $\begin{cases} x^2-2y^2-4\ge 0 \\ |x|+|y|-4\le 0 \end{cases}$

255. $\begin{cases} x+y-1\ge 0 \\ y-x+4\ge 0 \\ 5x+4y-38\le 0 \\ 2x-y+3\ge 0 \end{cases}$ *256.* $\begin{cases} y-\dfrac{x^2}{4}\le 0 \\ 2|x|+|y-3|-5\le 0 \end{cases}$

257. $\begin{cases} 4x^2+9y^2-180\le 0 \\ x-y\le 0 \\ x+y\le 0 \end{cases}$ *258.* $\begin{cases} x^2+y^2-12x+11\le 0 \\ x^2+y^2-6x\ge 0 \end{cases}$

259. $\begin{cases} x^2+4y^2-81\le 0 \\ 3xx-16\ge 0 \end{cases}$ *260.* $\begin{cases} -5x-2y^2\ge 0 \\ x^2+y^2-8x+12\ge 0 \end{cases}$

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Функция $f(x)$ называется *чётной*, если она не меняет своего знака при перемене знака аргумента: $f(-x)=f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *нечётной*, если она при перемене знака аргумента меняет свой знак, но сохраняет абсолютную величину:

$$f(-x)=-f(x).$$

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существуют такие постоянные не равные нулю числа t, $2t$, $3t$, ... от прибавления которых к аргументу x значение функции не изменяется:

$$f(x+kt)=f(x),\ k=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots .$$

Наименьшее положительное число t, от прибавления которого к аргументу не изменяется значение функции называется *периодом функции.*

Функция $g(x)$, определённая на множестве D_g и принимающая значения на множестве E_g, называется *обратной к функции* $y=f(x)$, определённой на множестве D_f и принимающая значения на множестве E_f,

если для любого x из D_f: $g(f(x))=x$,

а для любого y из E_f: $f(g(y))=y$.

Функции $x=g(y)$ и $y=f(x)$, определённые на множестве D_g и D_f соответственно и принимающие значения на множестве E_g и E_f, соответственно, называются *взаимно обратными*, если $D_g=E_g$ и $D_f=E_f$.

Докажите следующие утверждения:

261. Если для всех x из некоторого промежутка M справедливы неравенства $f(x)>A$ и $g(x)<A$, где A – некоторое число, то на промежутке M уравнение $f(x)=g(x)$ корней не имеет.

262. Если для всех x из некоторого промежутка M справедливы неравенства $f(x)>A$ и $g(x)<A$, где A – некоторое число, то на промежутке M неравенство $f(x)<g(x)$ решений не имеет.

263. Пусть $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке M, тогда уравнение $f(x)=C$, где C – данная константа, может иметь не более одного корня на M.

264. Пусть $f(x)$ – непрерывна и строго возрастает на M, а $g(x)$ непрерывна и строго убывает на M, тогда уравнение $f(x)=g(x)$ может иметь не более одного корня на промежутке M.

265. Чётная функция не может быть строго монотонной.

266. Любая функция представима в виде суммы чётной и нечётной функций.

267. Взаимно обратные функции либо строго возрастают, либо строго убывают.

268. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$.

269. Чётная функция не имеет обратной функции.

270. Периодическая функция не имеет обратной функции.

Задачи II уровня (по 0,15 балла). *Сложной* называют функцию от функции, когда функция зависит от аргумента не непосредственно, а через посредство «промежуточной» функции: $y = f(g(x))$. Здесь функция y зависит от аргумента x через посредство «промежуточной» функции $t = g(x)$, другими словами, можно записать: $y=f(t)$, где $t = g(x)$ – внутренняя функция ($y=f(t)$ – внешняя функция). Графики сложных функций можно строить, как и графики простых функций, на основании общего исследования функции.

Построим график функции $y = lg\cos x$.

Область определения этой функции зависит от области определения $(-\infty; +\infty)$ и области значений $[-1; 1]$ внутренней функции $t = \cos x$, а также области определения $(0; +\infty)$ внешней функции $y = lg\, t$, то есть:

$$0 < \cos x \le 1,$$

что равносильно
$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Область значений этой функции определяется (логарифмированием) из того же условия:
$$0 < \cos x \le 1,$$
$$-\infty < lg\cos x \le 0,$$

Функция чётна в силу чётности функции $t = \cos x$, из чего следует:
$$lg\cos x = lg\cos(-x).$$

Функция периодичная с периодом 2π, равным периоду внутренней функции.

Характерные точки: $x = 0,\ x = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

При $x = 0$, $\cos x = 1$, $y = lg\cos x = lg\cos 1 = 0.$

При $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $\quad \cos x = 0,\quad$ $y = \lg \cos x$ не существует, но $y \to -\infty$.

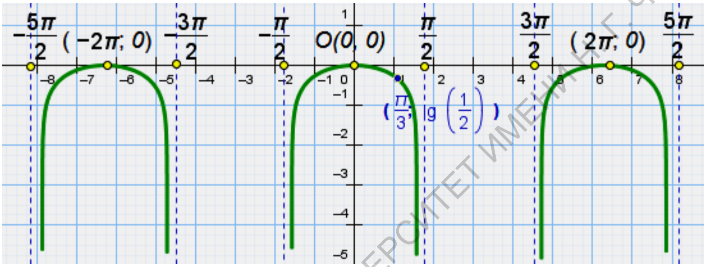
При $x = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \cos x = 0,\quad$ $y = \lg \cos x$ не существует, но $y \to -\infty$.

<u>Асимптоты</u>: $x = \pm \dfrac{\pi}{2}$.

<u>Контрольная точка</u>: $x = \dfrac{\pi}{3}$.

При $x = \dfrac{\pi}{3}$, $\quad \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\quad y = \lg \cos x = \lg \dfrac{1}{2} \approx -0{,}3.$

<u>График.</u>



Постройте график сложной функции:

271. $y = \lg \operatorname{tg} x$ 272. $y = \sqrt{\lg \cos x}$ 273. $y = \sqrt{\lg \operatorname{tg} x}$

274. $y = \sin^2 x$ 275. $y = \operatorname{tg} \dfrac{x^2}{2}$ 276. $y = \sin \dfrac{x^3}{8}$

277. $y = \operatorname{ctg} \lg x^2$ 278. $y = \sin \dfrac{2}{x}$ 279. $y = \operatorname{ctg} (\sin x)$

280. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ 281. $y = \lg (1 - x^2)$ 282. $y = \lg (x^2 - 1)$

283. $y = \lg \lg x$ 284. $y = 2^{x^2 - 1}$ 285. $y = 2^{1 - x^2}$

<u>*Задачи III уровня (по 0,2 балла).*</u> Решите задачи.

286. Найдите все положительные a такие, что система $\begin{cases} (x+5)^2 + y^2 = a^2 \\ (|x| - 7)^2 + (y-4)^2 = 9 \end{cases}$ имеет единственное решение.

287. Найдите все a такие, что система $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-8)^2 = 36 \\ |x-a| + 2 = y \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

288. Найдите все a, для которых график функции

$$f(x)=x^2-|x^2+2x-3|-a$$

пересекает ось абсцисс более, чем в двух различных точках.

289. Найдите все a, для которых решение неравенства

$$|2x-a|+1\le|x+3|$$

образует отрезок длины 1

290. Числа $5x-y,\ 2x+3y,\ x+2y$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $(1+y)^2,\ xy+1,\ (x-1)^2$ – геометрическую прогрессию. Найдите значения x и y.

291. При каких значениях a система $\begin{cases} y^2+2y(x+2)+(x^2+2x)(4-x^2)=0 \\ y-ax-3a=0 \end{cases}$

имеет не менее трёх различных решений?

292. Решите систему уравнений с параметром a: $\begin{cases} \big||x|-|y|\big|=3 \\ y^2+x^2=a^2 \end{cases}$.

293. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} x\ge|x-2| \\ y^2+x^2\le 4(y+x+1) \end{cases}$.

294. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяющие заданной системе уравнений $\begin{cases} f(2x+1)+g(x-1)=x \\ f(2x+1)-2g(x-1)=2x^2 \end{cases}$.

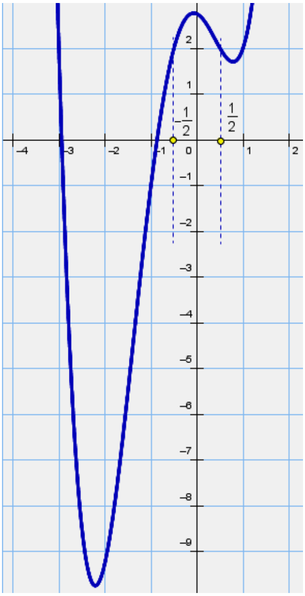
295. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяющие заданной системе уравнений $\begin{cases} f(2x+1)+2g(x-1)=2x \\ f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=x \end{cases}$.

<u>296. Творческое задание (1 балл).</u> Считается, что впервые термин «функция» (от латинского «functio» – совершение, исполнение), а также термины «переменная» и «константа» ввёл Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716), но только во второй половине XIX века благодаря развитию идей, заложенных в трудах Эйлера, Даламбера, Д.Бернулли, Фурье, Лобачевского, Дирихле, и созданию теории множеств сложилось современное понятие функции. Охарактеризуйте вклад этих учёных в развитие понятия «функция».

<u>297. Творческое задание (1 балл).</u> Одним из методов построения графика сложной функции является предварительное вспомогательное построение графика внутренней функции. Охарактеризуйте этот метод. Проиллюстрируйте метод на примере построения графиков из заданий №№ 271-285.

<u>298. Творческое задание (1 балл).</u> Одним из методов построения графика сложной функции является исследование производных этой функции. Что Вам известно об истории этого метода? Охарактеризуйте этот метод. Проиллюстрируйте метод на примере построения графиков из заданий №№ 271-285.

299. Творческое задание (1 балл). С графиками простейших многочленов Вы уже встречались и умеете их строить. Так, график многочлена 1-й степени (линейной функции $y = kx + b$ – прямая линия, многочлена второй степени $y = ax^2 + bx + c$ – парабола. Знакомые Вам графики многочленов высоких степеней для случая $y = x^n$ тоже по существу однотипны (для четных n и для нечетных n). А вот графики многочленов общего вида очень разнообразны и могут иметь самую причудливую форму. Исследуйте свойства графиков многочленов общего вида. Разработайте общую схему для их построения. Приведите не менее 10 примеров.



300. Творческое задание (1 балл). Решите задачу обратную задаче № 299: как по графику многочлена определить его аналитическую запись? Для начала определите многочлен, график которого представлен на чертеже. Разработайте общую схему для решения подобных задач. Приведите не менее 10 примеров.

IV. Дробно-рациональные уравнения, неравенства и системы

Уравнения / неравенства вида $\frac{F(x)}{G(x)} = 0$, $\frac{F(x)}{G(x)} < 0$, $\frac{F(x)}{G(x)} > 0$, где $F(x)$ и $G(x)$ – многочлены, называются *дробно-рациональными.*

Найдя корни уравнения $F(x) = 0$ необходимо проверить, какие из них не являются корнями уравнения $G(x) = 0$. Эти корни и только они будут решениями дробно-рационального уравнения.

<u>Теорема</u> (о равносильном дробно-рациональному):

$$\frac{F(x)}{G(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) = 0 \\ G(x) \neq 0 \end{cases}$$, где $F(x)$ и $G(x)$ – многочлены.

<u>Теорема</u> (о равносильном рациональному):

$$F(x) \cdot G(x) = F(x) \cdot H(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F(x) = 0 \\ G(x) = H(x) \end{array} \right.$$, где $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ – многочлены.

В общем случае решение уравнений $\frac{K(x)}{L(x)} = H(x)$, $\frac{K(x)}{L(x)} = \frac{H(x)}{J(x)}$ и т.п., сводится к решению соответствующего дробно-рационального уравнения $\frac{F(x)}{G(x)} = 0$. где $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $J(x)$, $K(x)$, $L(x)$ – многочлены, по теореме о равносильном дробно-рациональному, то есть, по сути, к нахождению корней многочлена $F(x)$,

Дробно-рациональные неравенства решаются методом интервалов.

<u>Теорема</u> (о равносильных неравенствах):

$$\frac{F(x)}{G(x)} > 0 \Leftrightarrow F(x) \cdot G(x) > 0$$, где $F(x)$ и $G(x)$ – многочлены.

<u>*Тестовые задания (по 0,05 балла).*</u>

301. Корнями дробно-рационального уравнения являются числа (–1) и 2

а) $\frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2} = 0$

в) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 3x + 2} = 0$

б) $\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - 3x + 2} = 0$

г) $\frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x - 2} = 0$

302. Корнями дробно-рационального уравнения являются числа (–3) и 1

а) $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = 0$

в) $\frac{(x-1)(x+3)^2}{x^3 + x^2 - 9x + 9} = 0$

б) $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x^2 - 2x - 3} = 0$

г) $\frac{(x-1)^2(x+3)^2}{x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4} = 0$

303. Уравнение $\frac{x^2+1}{2x+3}+\frac{2x+3}{x^2+1}=\frac{29}{10}$ имеет

а) два иррациональных корня, сумма которых равна 5, и два рациональных корня, произведение которых равно $\frac{-1}{5}$;

б) два иррациональных корня, произведение которых равно 26, и два рациональных корня, сумма которых равна $\frac{-4}{5}$;

в) два иррациональных корня, сумма которых равна (– 5), и два рациональных корня, произведение которых равно $\frac{1}{5}$:

г) два иррациональных корня, произведение которых равно (– 26), и два рациональных корня, сумма которых равна $\frac{4}{5}$.

304. Уравнение $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$ имеет

а) два иррациональных корня, сумма которых равна (– 3), и два рациональных корня, произведение которых равно 12;

б) два иррациональных корня, произведение которых равно 12, и два рациональных корня, сумма которых равна 4;

в) два иррациональных корня, сумма которых равна 3, и два рациональных корня, произведение которых равно (– 12);

г) два иррациональных корня, произведение которых равно 12, и два рациональных корня, сумма которых равна (– 4).

305. Корни уравнения $(x-5)\cdot(x^2+12x+20)=(x-10)\cdot(x^2+7x+10)$ образуют множество

а) $\{0\}$ б) $\{-2;\ 0\}$ в) $\{-2\}$ г) $\{-2;\ -2;\ 0\}$

306. Корни уравнения $\frac{x+10}{x}\cdot(x^2-3x-10)=\frac{x+5}{x}\cdot(x^2-8x-20)$ образуют множество

а) $\{0\}$ б) $\{-2;\ 0\}$ в) $\{-2\}$ г) $\{-2;\ -2;\ 0\}$

307. Решением неравенства $\frac{(x^2-5x+6)(4-x)}{x^2+3x+2}<0$ является множество чисел

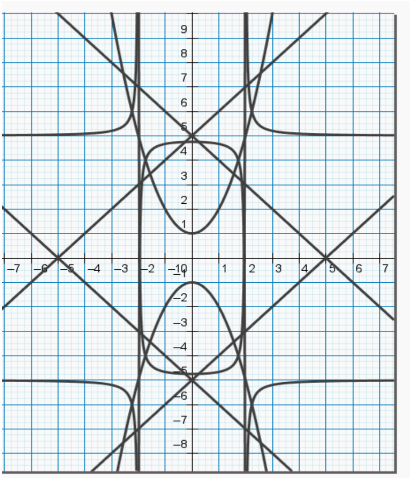
а) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$ б) $(-2;\ -1)\cup(2;\ 3)\cup(4;\ +\infty)$

в) $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ 3)\cup(4;\ +\infty)$ г) $(-2;\ -1)\cup(1;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$

308. Решением неравенства $\dfrac{(x^2+1)(x^2-1)^2(x-3)^4}{(2x-3)^3(2x^2+x-6)^2}<0$ является множество чисел

а) $(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(1{,}5;3)$ б) $(-2;-1)\cup(1;1{,}5)\cup(3;+\infty)$

в) $(-\infty;-1)\cup(1{,}5;+\infty)$ г) $(1{,}5;+\infty)$



309. На координатной плоскости выделите ту её часть, которая является графической моделью функции

$$f(x)=\frac{x(x^2-4)}{(x-2)(x+2)}$$

310. Решением системы

$$\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+5)(x-3)}{x-3}>\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-5}\\ (x^2-9)(x^2-25)=0\end{cases}$$

является множество

а) $\{-5\}$ в) $\{-5;-3;3\}$

б) $\{-5;-3\}$ г) $\{-5;-3;3;5\}$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Используя различные методы (например, методы группировки, введения новой переменной), способы (например, разнообразные способы записи одного и того же выражения) и приёмы (основанные на свойствах нулевого и единичного многочленов) сложные дробно-рациональные уравнения и неравенства сводят к более простым.

Решим уравнение $\dfrac{x+1}{x^2+2x}+\dfrac{x+6}{x^2+12x+35}=\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}+\dfrac{x+5}{x^2+10x+24}$.

Проведём ряд преобразований:

$$\frac{x+1}{x(x+2)}+\frac{x+6}{(x+5)(x+7)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+5}{(x+4)(x+6)};$$

$$2\cdot\left(\frac{x+1}{x(x+2)}+\frac{x+6}{(x+5)(x+7)}\right)=2\cdot\left(\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+5}{(x+4)(x+6)}\right);$$

$$\frac{2x+2}{x(x+2)}+\frac{2x+12}{(x+5)(x+7)}=\frac{2x+4}{(x+1)(x+3)}+\frac{2x+10}{(x+4)(x+6)};$$

$$\frac{x+x+2}{x(x+2)}+\frac{x+5+x+7}{(x+5)(x+7)}=\frac{x+1+x+3}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+4+x+6}{(x+4)(x+6)};$$

$$\frac{x}{x(x+2)}+\frac{x+2}{x(x+2)}+\frac{x+5}{(x+5)(x+7)}+\frac{x+7}{(x+5)(x+7)}=$$

$$=\frac{x+1}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+3}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+4}{(x+4)(x+6)}+\frac{x+6}{(x+4)(x+6)};$$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+4};$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}\right)+\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}\right)=\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}\right);$$

$$\frac{2x+7}{x^2+7x}+\frac{2x+7}{x^2+7x+10}=\frac{2x+7}{x^2+7x+6}+\frac{2x+7}{x^2+7x+12};$$

$$(2x+7)\left(\frac{1}{x^2+7x}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+6}-\frac{1}{x^2+7x+12}\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x+7=0 \\ \dfrac{1}{x^2+7x}+\dfrac{1}{x^2+7x+10}-\dfrac{1}{x^2+7x+6}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}=0 \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности даёт корень $\underline{x=-3{,}5.}$

Второе уравнение преобразуем:

$$\frac{1}{x^2+7x}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+6}-\frac{1}{x^2+7x+12}=0;$$

$$\frac{1}{x^2+7x}-\frac{1}{x^2+7x+6}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+12}=0.$$

Заменим $y=x^2+7x+3$, получим уравнение относительно переменной y:

$$\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y+3}+\frac{1}{y+7}-\frac{1}{y+9}=0; \qquad \frac{y+3-(y-3)}{y^2-9}+\frac{y+9-(y+7)}{y^2+16y+63}=0;$$

$$\frac{6}{y^2-9}+\frac{16}{y^2+16y+63}=0; \qquad \frac{3}{y^2-9}+\frac{8}{y^2+16y+63}=0;$$

$$\frac{3(y^2+16y+63)+8(y^2-9)}{(y^2-9)(y^2+16y+63)}=0;$$

Преобразуем числитель и сравним его с нулём: $11y^2+48y+117=0$, получим уравнение, дискриминант которого отрицателен. Следовательно, ни уравнение относительно неизвестной y, ни соответствующее ему уравнение относительно неизвестной x не имеют решения.

Ответ. $\underline{x=-3{,}5.}$

Решите уравнения

311. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0$

312. $\frac{x+4}{x-1}+\frac{x-4}{x+1}-\frac{x+8}{x-2}-\frac{x-8}{x+2}=-\frac{8}{3}$

313. $\frac{x^2+x+1}{x+1}+\frac{x^2+2x+2}{x+2}=\frac{x^2+3x+3}{x+3}+\frac{x^2+4x+4}{x+4}$

314. $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

315. $\frac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14}=\frac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}$

316. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{45}{16}$

317. $\frac{x(x-1)^2}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2}{9}$

318. $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}+\frac{5}{4}=0$

319. $\frac{24}{x^2-2x}=\frac{12}{x^2-x}+x^2-x$

320. $\frac{x^2}{(x+1)^2}+x^2=1$

321. $\frac{2}{x+8}+\frac{5}{x+9}=\frac{3}{x+15}+\frac{4}{x+6}$

322. $\frac{1}{1-\frac{8}{x}}+\frac{1}{1-\frac{6}{x}}+\frac{1}{1+\frac{6}{x}}+\frac{1}{1+\frac{8}{x}}=0$

323. $\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{x}\right)\cdot\left(x-\frac{9}{x}\right)=(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$

324. $\frac{9x^2}{(x+3)^2}+x^2=40$

325. $\frac{x(x+1)(x+3)(x+4)+1}{(x+2)^2(x-1)(x+5)+2}=3$

326. $\frac{(x+1)^5}{1+x^5}=\frac{81}{11}$

327. $\frac{x^4+13x^2+36}{x^2(x^4+36)}=\frac{1}{2}$

328. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{7}{9}\cdot\frac{x+1}{x-1}$

329. $\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x+2}+\frac{21}{x-3}=\frac{5}{x+1}+\frac{4}{x-2}+\frac{21}{x+3}$

330. $\frac{x+6}{x-6}\cdot\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\cdot\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=2\cdot\frac{x^2+36}{x^2-36}$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решите неравенства

331. $\dfrac{x^3(2x+1)-11x(x-1)-3}{x^2(2x^2-1)+9x(x^2-2)+8} \ge 0$

332. $\dfrac{x^3+x^2-8x-12}{x^4-5x^3+x^2+21x-18} \le 0$

333. $\left|1-\dfrac{|x|}{1+|x|}\right| \ge \dfrac{1}{2}$

334. $\dfrac{|x-3|}{6-5x+x^2} \ge 2$

335. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{|x-5|+x^2} \ge 1$

336. $|x| \ge \dfrac{2x}{|x-3|}$

337. $\dfrac{1+x^4}{(x+1)^4} \ge \dfrac{17}{81}$

338. $\dfrac{(1+x^2)^2}{x(x+1)^2} \le \dfrac{625}{112}$

339. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x+4}{x-4} \ge 4$

340. $\left(\dfrac{3+x}{x-1}\right)^2 \le 7-\dfrac{6x-6}{x+3}$

341. $\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}+x^2 \ge 5$

342. $\dfrac{x^2(x^2+2x+1)-4(x^2+x-1)}{6x(x^2+x-1)+(x^4+x-8)} \le 0$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Симметричность дробно-рациональных уравнений системы (или части уравнений) позволяет перейти к соответствующим симметрическим алгебраическим уравнениям.

Решим систему $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{3-y}=2 \end{cases}$.

Уравнения, входящие в данную систему – симметрические.

Преобразуем каждое уравнение системы в алгебраическое:

$$\begin{cases} x+y=xy \\ 5x+5y-12=2xx \\ x\notin\{0;3\} \\ y\notin\{0;3\} \end{cases},$$

введём новые неизвестные: $a = x + y$ и $b = xy$, и решим относительно этих неизвестных систему алгебраических уравнений: $\begin{cases} a=b \\ 5a-12=2b \end{cases}$.

Решением этой системы будет пара чисел: $a = b = 4$, зная которые, легко вычислить x и y.

Ответ: $x = 2,\ y = 2$.

Аналогично действуют и в ряде других случаев.

Решите системы уравнений:

343. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12 \end{cases}$

344. $\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y} \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x} \end{cases}$

345. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3 \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20 \end{cases}$

346. $\begin{cases} x=\dfrac{2y+3}{3y-2} \\ y=\dfrac{x-4}{11-2x} \end{cases}$

347. $\begin{cases} x+y=\dfrac{2}{z} \\ z+y=\dfrac{2}{x} \\ x+z=\dfrac{2}{y} \end{cases}$

348. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y+x}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

349. $\begin{cases} \dfrac{1+y^2}{1+x^2}=5 \\ x^3+4y=y^3+16x \end{cases}$

350. $\begin{cases} x+y+z=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{2} \\ xyz=1 \end{cases}$

__Задачи I уровня (по 0,1 балла).__ При решении систем дробно-рациональных уравнений применяется замена переменных; некоторые системы решаются с помощью исключения неизвестных; если уравнения системы представлены в виде пропорции, то целесообразным бывает переход к обратным величинам; к ряду систем дробно-рациональных уравнений применяются методы решения систем рациональных уравнений.

Решите системы уравнений:

351. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=3 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}=5 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{z}=23 \end{cases}$

352. $\begin{cases} x+y=\dfrac{5xx}{1+xy} \\ y+z=\dfrac{6yy}{1+yz} \\ x+z=\dfrac{7xx}{1+xz} \end{cases}$

353. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+x^2=1 \\ \dfrac{x^2}{x-y}=-2 \end{cases}$

354. $\begin{cases} \dfrac{3}{5}=\dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} \\ \dfrac{4}{5}=\dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} \end{cases}$

355. $\begin{cases} \dfrac{6}{5} = \dfrac{xyz}{x+y} \\ 2 = \dfrac{xyz}{z+y} \\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{xyz}{x+z} \end{cases}$

356. $\begin{cases} x = \dfrac{2y^2}{1+z^2} \\ y = \dfrac{2z^2}{1+x^2} \\ z = \dfrac{2x^2}{1+y^2} \end{cases}$

357. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y} + \dfrac{x+2y}{xy} = 2 \\ \dfrac{xy}{x-2y} + \dfrac{x-2y}{xy} = 4 \end{cases}$

358. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \\ xy^2 - x^2y = 6 \end{cases}$

359. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z} = -\dfrac{3}{2} \\ xy + yz + xz = -3 \end{cases}$

360. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{xy} = \dfrac{3}{z} \\ \dfrac{y^2+z^2-x^2}{yz} = \dfrac{3}{x} \\ \dfrac{x^2+z^2-y^2}{xz} = \dfrac{21}{y} \end{cases}$

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Докажите следующие утверждения:

361. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ для любых положительных a и b.

362. $\dfrac{a^2}{1000} + \dfrac{1}{a^4} \geq 0{,}01$ для любого неравного нулю значения переменной.

363. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$ для любых различных положительных a, b и c.

364. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$ для любых натуральных n.

365. $\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{25} + \ldots + \dfrac{1}{(2n+1)^2} < \dfrac{1}{4}$ для любых натуральных n.

366. Если сумма не равных нулю чисел a и b неотрицательна, то $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2} \geq \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}$.

367. Если $a \neq 2$, то $\dfrac{1}{a^2 - 4a + 4} \geq \dfrac{2}{a^3 - 8}$.

368. $1 < \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} < 2$ для любых положительных чисел a, b и c.

369. Если сумма квадратов положительных чисел a, b и c равна 2, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\le\frac{1}{abc}$.

370. Если сумма положительных чисел a, b и c равна 1, то $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge\frac{1}{2}$.

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Найдите:

371. **решение** уравнения с параметром a:

$$\frac{x+2}{3x-a}+\frac{3-x}{3x^2+2ax-a^2}=\frac{3x+2}{x+a};$$

372. **решение** уравнения с параметрами a и b: $\frac{2a+b}{x+a}-\frac{2a-b}{a-x}=\frac{2a}{b}$;

373. **дробно-рациональное уравнение,** в левой части которого – дробь в числителе которой – квадратное уравнение с корнями $\frac{x_1}{x_2}+1$ и. $\frac{x_2}{x_1}+1$, в знаменателе квадратное уравнение с корнями $\frac{1}{x_1^2}$ и. $\frac{1}{x_2^2}$; в правой части уравнения квадратный трёхчлен с корнями $\frac{2}{x_2^3}-1$ и. $\frac{2}{x_1^3}-1$; где x_1, x_2 – корни уравнения $4x^2-6x-1=0$;

374. **задачу,** решение которой приводит к уравнению / системе уравнений:

(а) $\frac{42}{17-x}-\frac{40}{17+x}=1$; (б) $\frac{10}{10-x}+\frac{20}{x+50}=1$;

(в) $\frac{12}{x}-\frac{5}{1+x}=\frac{30}{2+x}-1$; (г) $\begin{cases} x-y=3 \\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{10} \end{cases}$;

375. **наименьшее значение** каждого выражения на множестве [0; +∞):

(а) $x+\frac{81}{x}$; (б) $\frac{(x+3)(x+12)}{x}-15$; (в) $\frac{(x-2)^4+x^2-4x+5}{x^2-4x+5}$;

376. **наибольшее значение** каждого выражения на множестве [0; +∞):

(а) $\frac{x}{16+x^2}$; (б) $\frac{24x}{x^2+2x+25}$; (в) $\frac{x^2-6x+9}{4(x-3)^4+9}$;

377. **множество значений** аргумента, при которых график функции $y=\frac{x-13}{x^2+x-6}$ не выходит за пределы полосы $0\le y\le 1$;

378. **значение** выражения при указанных значениях переменной x

(а) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{3-x}{x+1}}}}$, $x=-\dfrac{1}{3}$; (б) $\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}}{4-\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}:\left(\dfrac{\dfrac{1}{2+x}}{\dfrac{1}{4}}-\dfrac{2}{x}-1\right)$, $x=-\dfrac{1}{2}$;

(в) $\dfrac{1-\dfrac{1}{(x+a)^2}}{\left(1-\dfrac{1}{x+a}\right)^2}:\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{2ax}{1-\left(x^2+a^2\right)}}}$ $x=\dfrac{1}{a-1}$;

379. **все целые значения x,** для которых не выполняется неравенство

$$1<\frac{3x-1}{2x+1}<2;$$

380. **при каких значениях параметра a** неравенство:

$$x+\frac{7a^2-a-2}{x-a}<-7a$$

не имеет решений, больших 1;

381. **все неположительные a,** при которых неравенство $\dfrac{a}{1+ax}+\dfrac{1}{ax-1}<\dfrac{1}{1-(ax)^2}$ имеет решение;

382. **значения параметра a**, при которых корни уравнения $x^2+3x+a=0$ удовлетворяют условию $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+1>0$;

383. **множество точек** в координатной плоскости**,** координаты которых (x, y) удовлетворяют условиям:

(а) $x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y}$, (б) $x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}$, (в) $|x|+\dfrac{1}{|x|}=|y|+\dfrac{1}{|y|}$, (г) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=\left|y+\dfrac{1}{y}\right|$,

по результатам построения сформулируйте обобщающие выводы.

384. **дробь** $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$ такую, что $\dfrac{x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}}{z}=1$ и $\dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{8}+\dfrac{z}{4}}{y}=1$;

385. **правильную положительную дробь** $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{z}}$ такую, что $\begin{cases}\dfrac{3}{x+y}=\dfrac{4}{z}\\[2mm]\dfrac{3}{x}=\dfrac{4}{y}+\dfrac{4}{z}\end{cases}$.

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите задачи.

386. Из деревни в город выехал мотоциклист со скоростью 45 км/ч. Через 40 минут в том же направлении выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Через сколько времени после выезда автомобиля расстояние между ним и мотоциклистом окажется равным 36 км?

387. Из города в деревню выехал велосипедист, а через 15 минут вслед за ним выехал автомобиль. На полпути автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в деревню, велосипедисту оставалось проехать ещё треть всего пути. За какое время велосипедист преодолеет путь из города в деревню?

388. Из двух портов А и В одновременно вышли два парохода, скорость которых будем считать постоянными величинами. В море пароходы встретились. Тот, что шёл из А прибыл в В через 16 часов после встречи, а тоn, что шёл из В прибыл в А через 25 часов после встречи. За какое время проходит весь путь каждый пароход?

389. Брат с сестрой пошли в школу. Через три минуты брат вспомнил, что забыл дома тетрадь, и побежал за ней со скоростью, большей первоначальной на 60 м/мин, а сестра с прежней скоростью пошла к школе. Взяв тетрадь, брат побежал (с такой же скоростью) обратно и догнал сестру уже у дверей школы. Расстояние от дома до школы 400 м. Найдите скорость сестры.

390. Три автоматизированные линии выпускают одинаковую продукцию. Совместная производительность всех трёх линий в 1,5 раза больше совместной производительности первой и второй линии. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, выполняют на 4 часа 48 минут быстрее. Это же задание вторая линия выполняет на два часа быстрее первой. За сколько часов выполнит своё сменное задание первая линия?

391. Продают три куска ткани. Из первого продали половину, из второго две трети, а третий кусок, в котором была треть всей ткани, продали весь. Сколько процентов ткани продано, если всего осталось ее вдвое меньше, чем было во втором куске?

392. Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 м от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 м от другого берега. Какова ширина реки?

393. Катер прошёл один час по течению реки и вернулся обратно. Затем прошёл ещё один час против течения реки и вернулся обратно. Докажите, что он находился в пути более 4 часов.

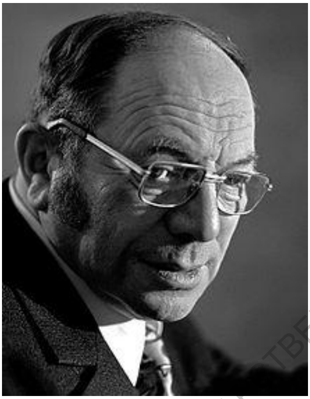
394. Фрукты в магазин были доставлены двумя машинами по 60 ящиков в каждой; при этом в 21 ящике были груши, а в остальных – яблоки. Сколько ящиков с грушами было в каждой машине, если в первой машине на один ящик с грушами приходится в 3 раза больше ящиков с яблоками, чем во второй.

395. Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

<u>396. Творческое задание (1 балл).</u> Многие практические задачи сводятся к системам неравенств относительно нескольких неизвестных. В качестве примера можно указать задачи, связанные с планированием производства. Обычно эти задачи формулируются так: найти наилучший план производства при заданных ресурсах, которые, как правило, задаются при помощи ряда неравенств. В итоге приходится искать наибольшее / наименьшее значение некоторой функции в области, которая задаётся системой неравенств. Приведём простейшую задачу такого типа. Бетон, производимый на двух заводах X и Y надо развести по строительным площадкам № 1, № 2 и № 3. Завод X производит 320 т бетона в сутки, а завод Y – 380 т. Потребность строительных площадок в бетоне такова: № 1 – 200 т, № 2 – 280 т, № 3 – 220 т. Стоимость (в тыс.руб.) перевозки одной тонны бетона с заводов на стройплощадки задаётся следующей таблицей. Требуется составить план перевозок бетона, при котором стоимость перевозок будет наименьшей.

Площадка / Завод	№ 1	№ 2	№ 3
X	2	4	6
Y	4	5	3

В ходе решения выясняется, что наименьшие затраты, в размере 2340 тыс.руб. будут при условии, что с завода X на стройплощадку № 1 поставляется 200 т бетона в сутки, на площадку № 2 – 120 т бетона в сутки, а с завода Y на стройплощадку № 2 поставляется 160 т бетона в сутки, на площадку № 3 – 220 т бетона в сутки,



Задачи такого типа называются задачами линейного программирования.

Сформулируйте задачу линейного программирования в общем виде. Приведите схему (алгоритм) решения. Решите данную задачу. Приведите примеры решения других задач линейного программирования.

<u>397. Творческое задание (1 балл).</u> Создание методов линейного программирования по существу началось с работ Л.В. Канторовича. Что Вам известно об этом учёном?

<u>398. Творческое задание (1 балл).</u> Проведите исследование и выясните, при каких условиях на числа a_i, b_i, A может быть решено уравнение вида $\frac{a_1}{x+b_1}+\frac{a_2}{x+b_2}+\ldots+\frac{a_n}{x+b_n}=A$. Приведите примеры решения таких уравнений.

<u>399. Творческое задание (1 балл).</u> Проведите исследование и выясните, при каких условиях на числа a_i, b_i, p_i, q_i, r_i, A может быть решено уравнение вида $\frac{a_1x+b_1}{p_1x^2+xq_1+r_1}+\frac{a_2x+b_2}{p_2x^2+xq_2+r_2}+\ldots+\frac{a_nx+b_n}{p_nx^2+xq_n+r_n}=A$. Приведите примеры решения таких уравнений.

<u>400. Творческое задание (1 балл).</u> Разработайте в среде электронных таблиц компьютерные модели ряда задач №№ 311-360 данной темы, а также генераторы этих задач.

V. Иррациональные уравнения, неравенства и системы

Иррациональными называют уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком радикала.

Простейшее иррациональное уравнение имеет вид: $\sqrt[n]{f(x)} = a$

При решении иррациональных уравнений, как правило, применяют преобразование, связанное с возведением обеих частей уравнения в натуральную степень.

При возведении уравнения в нечётную степень получается уравнение, равносильное исходному: $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^{2n+1}$.

При возведении уравнения в чётную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного: $\sqrt[2n]{f(x)} = a \Rightarrow f(x) = a^{2n}$, то есть такое, которое кроме корней исходного уравнения может содержать и другие корни (их называют посторонними для исходного). Значит в этом случае необходимо проверить все найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение. Другой путь решения таких уравнений – переход к равносильным системам, в которых учитывается область допустимых значений уравнения и требование неотрицательности обеих частей уравнения, возводимых в чётную степень: $\sqrt[2n]{f(x)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^{2n} \\ f(x) \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$.

При решении иррациональных неравенств используют метод интервалов или с помощью некоторых равносильных преобразований заменяют данное иррациональное неравенство системой (совокупностью систем) рациональных неравенств.

<u>*Тестовые задания (по 0,05 балла).*</u>

401. Равносильным выражению $xy\sqrt[4]{-x}$ на множестве (–∞, 0] является

а) $-\sqrt[4]{-x^5y^4}$ б) $\sqrt[4]{-x^5y^4}$ в) $-\sqrt[4]{x^5y^4}$ г) $\sqrt[4]{x^5y^4}$

402. Уравнение не имеет решений

а) $\sqrt{x+2} = -2$ б) $\sqrt{x-2} = 2$

в) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2} = 0$ г) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = 0$

д) $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-6} = 2$ е) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-6} = 2$

ж) $\sqrt{-1-x} = \sqrt[3]{x-5}$ з) $\sqrt{-1-x} = -\sqrt[3]{x-5}$

и) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+9} = 3\sqrt{x-2}$ к) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} = 3\sqrt{x-2}$

403. Уравнение $\sqrt{1+3x} = 1-x$ имеет

а) два корня, произведение которых равно 0,
б) два корня, сумма которых равна 5,
в) один корень, равный 0,
г) один корень, неравный 0.

404. Уравнение $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2+2x}$ имеет
а) два корня, произведение которых равно (– 6),
б) два корня, сумма которых равна (– 6),
в) один отрицательный корень равный ___________,
г) один положительный корень равный ___________.

405. Уравнение $\sqrt[3]{5-\sqrt{x^2+5}}=-2$
а) не имеет решений,
б) имеет единственное решение $\left(-2\sqrt{41}\right)$,
в) имеет единственное решение $2\sqrt{41}$,
г) имеет решение $\left(\pm 2\sqrt{41}\right)$.

406. Решением неравенства $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$ является множество чисел
а) $\{1, 2\}$ б) $\{1\}\cup[2;+\infty)$ в) $\{1\}\cup(2;+\infty)$ г) $[1, 2]$

407. Решением неравенства $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\le 0$ является множество чисел
а) $\{1, 2\}$ б) $(-\infty;-1)\cup\{2\}$ в) $(-\infty;-1]\cup\{2\}$ г) $[-1, 2]$

408. Решением неравенства $\sqrt{(x-3)(2-x)}<\sqrt{4x^2+12x+11}$ является множество чисел
а) $\varnothing$ б) $\{2, 3\}$ в) $[2, 3]$ г) $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$

409. Решением неравенства $\sqrt{x+5}<1-x$ является множество чисел
а) $\varnothing$ б) $[-5;-1)$ в) $[-5; 1]$ г) $[-5;-1)\cup(4;+\infty)$

410. Решением неравенства $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$ является множество чисел

а) $(3; 5]$ б) $(3; \frac{23}{5})$ в) $(3; 4]$ г) $[1; 5]$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Решите уравнения

411. $\sqrt{|x-3|+2}=3$

412. $\sqrt{|x-2|+5}=1-x$

413. $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$

414. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$

415. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=3-x$

416. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{7-x}$

417. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{5-4x}=1-2\sqrt{2+x}$

418. $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$

419. $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$

420. $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Часто, когда подкоренные выражения иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$ представлены многочленами степени 2 и выше, используют искусственные методы решения, позволяющие свести исходное уравнение к рациональному, минимальной степени.

Решим уравнение $\sqrt{3x^2-5x+7}+\sqrt{3x^2-7x+2}=3$. Воспользуемся формулой разности квадратов: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, в которой будет фигурировать наше уравнение: $A = \sqrt{3x^2-5x+7}$, $B = \sqrt{3x^2-7x+2}$,

$$A^2 = 3x^2 - 5x + 7,\quad B^2 = 3x^2 - 7x + 2,$$
$$A^2 - B^2 = 2x + 5,\quad A + B = 3.$$

$$2x+5=3\left(\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2}\right)$$

$$\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2}=\frac{2x+5}{3}.$$

Сложим это уравнение с исходным, получим: $2\sqrt{3x^2-5x+7}=\frac{2x+14}{3}$ или

$3\sqrt{3x^2-5x+7}=x+7$. Возведём в квадрат, упростим и получим:

$$26x^2 - 59x + 14 = 0,\ D = 45^2.\ x_1 = \frac{7}{26},\ x_2 = 2.$$

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение, убеждаемся, что полученные значения являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = \frac{7}{26}$, $x_2 = 2$.

Подобным образом поступают при решении уравнений вида:

$$\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = h(x) \text{ и } \sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)} \pm \sqrt[3]{j(x)}$$

В этом случае используется формула куба суммы / разности:

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm B^3 + 3AB(B \pm A)$$

Решите уравнения

421. $\sqrt{2x^2+5x+31}-\sqrt{2x^2-7x+22}=3$

422. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

423. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}$

424. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$

425. $\sqrt{5x-5}+\sqrt{10x-5}=\sqrt{15x-10}$

426. $\sqrt{x}=\frac{3}{6\sqrt{x}+\sqrt{6x-3}}$

427. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$

428. $\sqrt{12+\sqrt{12+x}}=x$

429. $4\sqrt[3]{(2x-7)^2}+\sqrt[3]{(2x+7)^2}=4\sqrt[3]{4x^2-49}$

430. $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}=8\sqrt[12]{(x-1)^5}$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решите неравенства

431. $\sqrt[4]{x(x+5)^2}+6\sqrt[4]{x^3}>5\sqrt[4]{x^2(x+5)}>0$

432. $\sqrt{7-\sqrt{7+x}}<x$

433. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>1+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}$

434. $\sqrt{3x-5}\le 7-\sqrt{2+x}$

435. $\sqrt{4-x^2}-x-|x|>1$

436. $\sqrt{4-x^2}-x-|x|<1$

437. $\left|\sqrt{x^2-x+1}-2x+1\right|>\sqrt{x^2-x+1}+2x$

438. $\dfrac{30}{x\sqrt[3]{35-x^3}}<x+\sqrt[3]{35-x^3}$

439. $\sqrt[8]{2-x^2}>x^3+x-1$

440. $\sqrt[4]{9-x}+\sqrt{õ+3}<\sqrt{3}$

441. $\sqrt[3]{\dfrac{6}{x-1}}>\sqrt[3]{\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}}$

442. $\sqrt{1-x^2}<\sqrt[8]{5-x}$

443. $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2$

444. $\dfrac{\sqrt{52-x^2}}{2-x}<1$

445. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$

446. $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2$

447. $\sqrt{5x-4}+\sqrt{4x-3}>\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}$

448. $\sqrt[3]{x-1}<1-\sqrt[3]{2x-1}$

449. $x^2+8x+8\ge 4(x+2)\sqrt{x+1}$

450. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+16}\le 2$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решите системы уравнений:

451. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}+2\\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=3\sqrt{2}\end{cases}$

452. $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2\\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1\end{cases}$

453. $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xx}=2\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$

454. $\begin{cases}x^2+y^2=226\\ \sqrt[4]{\dfrac{x+y}{y}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{x+y}}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

455. $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2}-2\sqrt{x^2-1}+y^2=3\\ 3(x-y)+\dfrac{2y}{\sqrt{x^2-1}-x}+3y^2=0\end{cases}$

456. $\begin{cases}\sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\sqrt{8}\\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{16+(x+y)^2}\end{cases}$

457. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt[6]{(x-y)^2(x+y)^3}=2\end{cases}$

458. $\begin{cases}\sqrt{y-5}\cdot\sqrt[3]{2x+1}+24=\dfrac{2x+1}{\sqrt{y-5}}\\ \sqrt{y-5}\cdot\sqrt[3]{2x+1}-6=(y-5)\dfrac{\sqrt{y-5}}{\sqrt[3]{2x+1}}\end{cases}$

459. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{y+1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{x-1}{\sqrt{y+1}}=13 \end{cases}$

460. $\begin{cases} \sqrt{x+1}=\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}-4}{11-2\sqrt[4]{x^2-1}} \\ \sqrt[4]{x^2-1}=\dfrac{2\sqrt{x+1}+3}{3\sqrt{x+1}-2} \end{cases}$

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Докажите следующие утверждения:

461. Среднее арифметическое любых двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

462. Для любых $1\le a \le 2$ справедливо равенство:

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=2.$$

463. $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2$ для любых действительных a.

464. $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$, $\dfrac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$ для любых положительных a, b, c и d.

465. Для всех допустимых значениях переменных выражение:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\left(\frac{x+\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}-\sqrt[4]{xy}\right)\cdot\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

неотрицательно и не зависит от x.

466. Для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство:

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

467. Для любых неотрицательных чисел x, y и z:

$$x+y+z\ge\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}.$$

468. Если сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 7, то сумма арифметических корней из этих чисел меньше 5.

469. Для любых чисел x и y больших 1: $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\le xy$.

470. Для любых положительных чисел x, y и z меньших 1, сумма кубов которых равна 1: $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{z^2}{\sqrt{1-x^2}}\ge 2$.

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Найдите:

471. **общее решение** уравнения вида:

$$4\sqrt[n]{(2x-7)^2}+\sqrt[n]{(2x+7)^2}=4\sqrt[m]{4x^2-49}$$

для любого натурального n;

472. **общее решение** уравнения вида: $\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}=2a\sqrt[2pq]{x^{p+q}}$ для любых натуральных a, p, q;

473. **общее решение** уравнения вида:

$$\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^{n^2}x^n}}=b$$

для любых натуральных $a<b$ и n;

474. **общее решение** уравнения вида: $\sqrt{x^2-a}+2\sqrt{x^2-1}=x$;

475. **алгоритм решения** уравнения вида: $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}=c$ где $a>b$, $c>0$ – данные числа;

476. **решение** неравенства $\sqrt{a^2-x^2}>x+1$ для всех $a>0$;

477. **решение** неравенства $\sqrt{\dfrac{3x+a}{x-a}}<a-1$;

478. **значение** выражения

$$\left(\left(1-\frac{2\sqrt{\tilde{o}}}{\sqrt{\tilde{o}}+\sqrt{\acute{o}}+\sqrt{z}}\right)\cdot\frac{4\sqrt{xy}}{z-x-y+2\sqrt{xy}}\right):\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{y}}}-\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{z}}}}$$

при $x = 126025$, $y = 18225$, $z = 729$.

479. **значения параметра** $\boldsymbol{a}$, при которых уравнение

$$x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}-(a+2)\sqrt[3]{x^4}+2a=0$$

имеет единственное решение;

480. **при каких значениях параметров** $\boldsymbol{a, b}$ ***и*** $\boldsymbol{c}$ уравнение

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$$

имеет бесконечно много решений;

481. **верно ли,** что при любых действительных значениях a выполняется неравенство $\dfrac{a^2+a+1}{\sqrt{a^2+a+2}}\geq 2$:

482. **наименьшее значение суммы** $\boldsymbol{(x+y)}$, если $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=3$;

483. **значения** $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющие неравенству $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2$.

484. **значения** $\boldsymbol{a}$, при каждом из которых решением неравенства $\sqrt{5-x}+|x+a|\leq 3$ является отрезок.

485. **геометрические модели выражений:** $\sqrt{xy}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{x^2-y^2}$, построение которых можно осуществить с помощью циркуля и линейки.

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите задачи.

486 Задача Диофанта Александрийского. Катет прямоугольного треугольника есть точный куб, другой катет представляет разность между этим кубом и его стороной (то есть первой степенью), а гипотенуза есть сумма куба и его стороны. найти стороны.

487. Брат с сестрой, используя складной метр, состоящий из 30 дециметровых звеньев, получают треугольники. Однажды брат сложил треугольник, стороны которого составлены из 11, 10 и 9 звеньев, а сестра – треугольник, стороны которого составлены из 12, 10 и 8 звеньев. Как детям, не производя измерений, выяснить, площадь какого треугольника больше?

488. Брат с сестрой, используя складной метр, состоящий из 30 дециметровых звеньев, получают треугольники. Однажды брат сложил треугольник, стороны которого составлены из 11, 10 и 9 звеньев, а сестра – треугольник, стороны которого составлены из 12, 10 и 8 звеньев. Как детям, не производя измерений, найти для каждого треугольника расстояние от его вершины до противолежащей стороны?

489. Брат с сестрой, используя складной метр, состоящий из 30 дециметровых звеньев, получают треугольники. Однажды брат сложил треугольник, стороны которого составлены из 11, 10 и 9 звеньев, а сестра – треугольник, стороны которого составлены из 12, 10 и 8 звеньев. Как детям, не производя измерений, найти для каждого треугольника длины его медиан?

490. Брат с сестрой, используя складной метр, состоящий из 30 дециметровых звеньев, получают треугольники. Однажды брат сложил треугольник, стороны которого составлены из 11, 10 и 9 звеньев, а сестра – треугольник, стороны которого составлены из 12, 10 и 8 звеньев. Как детям, не производя измерений, найти для каждого треугольника длины его биссектрис?

491. Задача Бхаскары. Посреди сражения яростный сын Притхи схватил некоторое число стрел, чтобы убить Карну; половину их он употребил на собственную защиту, а учетверённое количество квадратного корня – против лошадей: 6 стрел пронзили возницу Салью, 3 других прорвали зонтик Карны, разбили его лук и знамя, и только одна последняя пронзила ему голову. Сколько было стрел у Арджуны, сына Притхи?

492. Задача Фараона или *Колодец Лотоса* (VIII век до н. э.). В круглом колодце налита вода на одну единицу длины. Две разновеликие тростинки, с длиной 2 и 3 единицы соответственно, одними концами упираются в дно колодца, а другими концами опираются на его стены. Тростинки пересекаются на уровне налитой в колодец воды. Какова ширина* колодца?

493. Прямоугольный участок площадью 420 $м^2$ нужно обнести проволочным забором и разгородить по диагонали пополам. Определить размеры участка, если на это потребовалось 111 м проволоки. Какой формы прямоугольный участок с той же площадью нужно выбрать, чтобы на это потребовалось наименьшее количество проволоки?

494. Муравей ползёт по пню так, что его путь можно представить в виде ломаной, являющейся частью равнобокой трапеции – осевого сечения пня. Путь проделанный муравьём равен 12. объём пня – 28, его высота – 4. Какова площадь прямоугольника со сторонами, равными площадям верхнего и нижнего основания пня?

---

* диаметр

495. Задача арабского математика XI века. На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной 30 локтей, другой – 20 локтей. Расстояние между их основаниями – 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами. Они кинулись к ней разом и достигли ее одновременно. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

496. Творческое задание (1 балл). Заменой неизвестного решение иррациональных уравнений иногда можно свести к решению тригонометрических уравнений. Опишите этот метод решения иррациональных уравнений. Приведите не менее 10 примеров.

497. Творческое задание (1 балл). Обобщите неравенства из заданий № 461, № 464. В общем виде это неравенство было доказано великим французским математиком XIX века Огюстеном Луи Коши и является частью «неравенства о среднем».

Одно из доказательств этого неравенства было опубликовано Коши в его учебнике по математическому анализу в 1821 году. С тех пор для этого неравенства было найдено немало доказательств.

Приведите доказательство неравенства, данное самим автором. Выведите несколько следствий их этого неравенства.

Приведите полую формулировку неравенства о среднем, докажите его для случая двух неизвестных.

Что Вам известно о жизнедеятельности, математических и других научных достижениях О. Коши?

498. Творческое задание (1 балл). Радикалом называют знак $\sqrt[n]{\ }$, применяемый для обозначения операции извлечения корня n-ой степени из некоторого выражения. Выясните этимологию термина «радикал», историю возникновения этого символа, имена каких учёных связаны с использованием радикалов в математической литературе.

499. Творческое задание (1 балл). Известно, что решить иррациональное уравнение / неравенство с параметром можно несколькими способами. На примере какого-либо иррационального уравнения / неравенства продемонстрируёте всевозможные способы его решения. На каждый способ приведите подборку задач,

500. Творческое задание (1 балл). Разработайте в среде электронных таблиц компьютерные модели ряда задач №№ 411-460 данной темы, а также генераторы этих задач.

VI. Трансцендентные (логарифмические и показательные) уравнения, неравенства и системы

Логарифмическим называется уравнение, содержащее логарифмическую функцию.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида:

$$\log_a x = b,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Решение логарифмических уравнений основано на следующем важном свойстве логарифмов: логарифмы двух положительных чисел по одному и тому же положительному отличному от единицы основанию равны тогда и только тогда, когда равны эти числа.

Используя это свойство, простейшее логарифмическое уравнение решается так:

$$\log_a x = b,\ a > 0,\ a \neq 1 \Leftrightarrow x = a^b.$$

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_x A = B,\ A > 0.$$

При $A \neq 1$ и $B \neq 0$ уравнение имеет единственный корень $x = \grave{A}^{\frac{1}{\hat{A}}}$. При $A = 1$ и $B = 0$ уравнение имеет решением любое положительное число, отличное от 1. При $A = 1$ и $B \neq 0$ и при $A \neq 1$ и $B = 0$ уравнение корней не имеет.

Решение простейших логарифмических неравенств основано на свойствах монотонности логарифмической функции:

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

В данных переходах от простейшего логарифмического неравенства к равносильным системам неравенств, не содержащих знака логарифма, учтена область допустимых значений исходного неравенства.

При решении логарифмических неравенств следует избегать преобразований, которые могут привести к потере или появлению посторонних решений, так как в противном случае обоснование правильности ответа, как правило, есть более сложная задача, чем решение исходного неравенства. Практически единственным методом решения логарифмических неравенств является метод перехода к равносильным неравенствам (системам или совокупностям неравенств и уравнений):

$$\log_{f(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < g(x) < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > 1 \end{cases} \end{array} \right. ; \qquad \log_{f(x)} g(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1 \\ 0 < g(x) < 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Показательным называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений основано на свойствах степеней: две степени с одним и тем же положительным и отличным от единицы основанием равны тогда и только тогда, когда равны их показатели. Используя это свойство, простейшее показательное уравнение решается так:

$$a^x = b,\ a > 0, a \neq 1, b > 0 \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

Решение простейших показательных неравенств основано на свойствах монотонности показательной функции:

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ a > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

Учитывая эти свойства, многие показательные неравенства решаются методом приведения обеих частей неравенства к одному основанию.

Неравенство $a^{f(x)} \geq b,\ a > 0, a \neq 1, b > 0,$ может быть решено при помощи логарифмирования обеих частей (докажите, что это возможно); при всех $b \leq 0$ неравенство справедливо для любого x из ОДЗ неравенства.

Неравенство $a^{f(x)} \leq b,\ a > 0, a \neq 1, b \leq 0,$ решений не имеет.

Решим уравнение $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{\log_3 (x^2-1)}{2}} = \sqrt{2(x+1)}$. Анализ уравнения позволяет наметить план решения: (1) Найти ОДЗ уравнения. (2) Преобразовать показатель степени, содержащий логарифмические выражения, на ОДЗ. (3) Перейти от показательного уравнения к иррациональному. (4) Решить получившееся иррациональное уравнение.

Решение. (1) ОДЗ: $\begin{cases} x > -1 \\ x^2 - 1 > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Поскольку $x > 0$, следующие преобразования являются равносильными на этом множестве:

(2) $\left(3^{-2}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{\log_3 (x^2-1)}{2}} = \sqrt{2(x+1)} \Leftrightarrow \left(3^{\log_3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}}\right)^{-2} = \sqrt{2(x+1)} \Leftrightarrow$

(3) $\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^{-2} = \sqrt{2(x+1)} \Leftrightarrow$

(4) $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = \sqrt{2(x+1)} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2(x+1)} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

Ответ. $x = 3$.

Тестовые задания (по 0,05 балла).

501. Найдите пары равносильных уравнений:

А	$2^x = y$		$x = 2$	а
Б	$2^{x+3} = y$		$x = \log_8 y$	б
В	$2^{3x} = y$		$x = -\log_{0,5} y$	в
Г	$2^{x^3} = y$		$x = -\log_2 y$	г
Д	$3 \cdot 2^x = y$		$x = \log_2 \dfrac{y}{3}$	д
Е	$2^x = 3y$		$x = \log_2 \dfrac{y}{8}$	е
Ж	$2^x = 2x$		$x = \sqrt[3]{\log_2 y}$	ж

ответ	
А	
Б	
В	
Г	
Д	
Е	
Ж	

502. Корнем уравнения $1 - \lg 5 = \dfrac{1}{3}\left(\lg\dfrac{1}{2} + \lg x + \dfrac{1}{3}\lg 5\right)$ является число:

а) $\dfrac{2^{13}}{10}$; б) $0{,}2^{13}$; в) $\dfrac{16}{\sqrt[3]{5}}$; г) $\dfrac{16\sqrt[3]{5}}{5}$.

503. Корнем уравнения $4^x = 8^{2x-3}$ является число:

а) 0,25; б) 0,75; в) 2; г) 2,25.

504 Корнем уравнения $\lg_{\frac{1}{3}}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 2$ является число:

а) (– 9); б) (– 3); в) 3; г) 9.

505. Корнем $(0{,}4)^{x-1} = (6{,}25)^{2(6x-5)}$ уравнения является число

а) $\dfrac{7}{11}$; б) $\dfrac{11}{13}$; в) $\dfrac{13}{11}$; г) $\dfrac{11}{7}$.

506. Уравнения $\log_{\log_3 x} 3 = 2$

а) $\varnothing$ б) $\dfrac{1}{2}$ в) $3^{\sqrt{3}}$ г) $(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$

507. Решением неравенства $25^x > 125^{3x-2}$ является множество чисел

а) $(-\infty;\ \dfrac{6}{7}]$; б) $(-\infty;\ \dfrac{6}{7})$; в) $(\dfrac{6}{7};\ +\infty)$; г) $[\dfrac{6}{7};\ +\infty)$.

508. Решением неравенства $0{,}2^{\frac{2x+1}{1-x}} \le \dfrac{1}{5^{-3}}$ является множество чисел

а) $(-\infty;\ 1)\cup[4;\ +\infty)$ б) $(1;\ 4]$ в) $(-\infty;\ 1]\cup(4;\ +\infty)$ г) $[1;\ 4)$

509. Решением неравенства $log_2 \frac{5-12x}{12x-8} + log_{\frac{1}{2}} x \le 0$ является множество чисел

а) $(\frac{5}{12};\ \frac{2}{3})$; б) $(\frac{5}{12};\ \frac{1}{2}]$; в) $[\frac{1}{2};\ \frac{2}{3})$; г) $(\frac{2}{3};\ +\infty)$.

510. Решением неравенства $loo_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x^2-3x+2\right) \ge 2$ является множество чисел

а) $(-\infty;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$ б) $(0{,}5;\ 2{,}5)$ в) $[0{,}5;\ 2{,}5]$ г) $[0{,}5;\ 1)\cup(2;\ 2{,}5]$

__Задачи I уровня (по 0,1 балла).__ Решите уравнения

511. $\frac{1}{5-4lg\,x} + \frac{4}{1+4lg\,x} = 3$

512. $5^{2x+1} - 3\cdot 5^{2x-1} = 550$

513. $log_x^3 10 - log_x^2 10 - 6log_x 10 = 0$

514. $\sqrt{3^x}\cdot 5^{\frac{x}{2}} = 225$

515. $log_{\frac{1}{5}} \frac{2+x}{10} = log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{1+x}$

516. $\left(\sqrt{11}\right)^{x^2+x-2} = 1$

517. $log_{\frac{5+x}{3}} 3 = log_{\frac{-1}{1+x}} 3$

518. $\sqrt{5-x}\left(5^{x^2-7{,}2x+3{,}9} - 9\sqrt{3}\right) = 0$

519. $log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$

520. $5^{3x+2}\cdot 3^{2x-1} = \frac{9}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 3^{3x}$

521. $log_{x^3+x}\left(x^2-4\right) = log_{4x^2-6}\left(x^2-4\right)$

522. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

523. $log_{x^2+6x+8}\left(log_{2x^2+2x+3}\left(x^2-2x\right)\right) = 0$

524. $5^{2x} - 2\cdot 5^x - 15 = 0$

525. $\frac{1}{2}log_5(5+x) + log_5\sqrt{x-3} = \frac{1}{2}log_5(1+2x)$

526. $5^{2x+1} = 7^{3-x}$; $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$

527. $log_5^2 x + log_{5x}\frac{5}{x} = 1$

528. $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$

529. $log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\cdot log_{16x} x^3 + 40\cdot log_{4x}\sqrt{x} = 0$; $\frac{x^{\frac{log_2 x}{2}}}{4} = 2^{\frac{log_2^2 x}{4}}$

530. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Решите неравенства

531. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right)<0$

532. $x^2\cdot 5^x-5^{2+x}\le 0;\ \dfrac{1}{2^x-1}>\dfrac{1}{1-2^{x-1}}$

533. $\log_{x^2}(x+2)<1$

534. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$

535. $\log_9^2 x\ge \log_3^2\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}$

536. $3^{72}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}>1$

537. $\log_3\left(x^2+6x+8\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7$

538. $\sqrt{6-x}\cdot\left(5^{x^2-7{,}2x+3{,}9}-25\sqrt{5}\right)\ge 0$

539. $\log_x \dfrac{2x+\dfrac{2}{5}}{5(1-x)}>0$

540. $\dfrac{1}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 7^{3x+2}\le\dfrac{25}{7}\cdot 5^{3x}\cdot 7^{2x}$

541. $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right)\ge 1$

542. $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$

543. $\log_x 2x\le\sqrt{\log_x\left(2x^3\right)}$

544. $4^{0{,}5-x}-7\cdot 2^{-x}-4<0$

545. $\left(\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3^x-1}{16}\right)\cdot\left(\log_4\left(3^x-1\right)\right)\le\dfrac{3}{4}$

546. $\sqrt{\dfrac{9}{10}}\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^{x-1}>\dfrac{10^{\frac{3}{4}x-1}}{\sqrt{10}}$

547. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2-\frac{10x}{3}+1\right)}\le 1$

548. $2^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}\ge 3^{2x^2-6x+3}$

549. $5^{\frac{1}{4}\log_5^2 x}>5x^{\frac{1}{5}\log_5^2 x}$

550. $6\cdot\sqrt[x]{9}-13\cdot\sqrt[x]{3}\cdot\sqrt[x]{2}+6\cdot\sqrt[x]{4}\le 0$

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Решите системы уравнений и неравенств:

551. $\begin{cases}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y}=\dfrac{65}{36}\\ xy-x+y=118\end{cases}$

552. $\begin{cases}\log_y x-\log_x y=\dfrac{8}{3}\\ xy=16\end{cases}$

553. $\begin{cases}y^{x^2+7x+12}=1\\ x+y=6\\ y>0\end{cases}$

554. $\begin{cases}\left|\log_2(x+y)\right|+\left|\log_2(x-y)\right|=3\\ xy=3\end{cases}$

555. $\begin{cases}4^{\left|x^2-8x+12\right|-\log_4 7}=7^{2y-1}\\ |y-3|-3|y|-2(y+1)^2\ge 1\end{cases}$

556. $\begin{cases}4\cdot\log_2^2 x+1=2\cdot\log_2 y\\ \log_2 x^2\ge\log_2 y\end{cases}$

557.1. $\begin{cases}\log_{2-x}(2-y)>0\\ \log_{4-y}(2x-2)>0\end{cases}$

557.2. $\begin{cases}\sqrt{y}+2\cdot\lg x=3\\ y-3\cdot\lg\left(x^2\right)=1\end{cases}$

558. $\begin{cases} log_{1-\frac{x^2}{17}}\left(17-8|x|+x^2\right)-log_{1+\frac{x^2}{17}}\left(17-8|x|+x^2\right)\geq 0 \\ 49^x+3\cdot 14^x-4\cdot 4^x>0 \end{cases}$

559. $\begin{cases} log_4(7+x)+log_4(x-5)\leq 0{,}5+log_{16}(23+x)^2 \\ 5^{x-4}+16\cdot 5^{6-x}>40 \end{cases}$

560. $\begin{cases} \left(1+2\cdot log_{|xy|}2\right)\cdot log_{x+y}|xy|=1 \\ x-y=2\sqrt{3} \end{cases}$

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 балла).*</u> Докажите следующие утверждения:

561. Уравнение $log_{ï}\ \dfrac{b}{a}$ не имеет решений.

562. Уравнение $lg(4-x)-lg(x-6)=5$ не имеет решений.

563. Для любых натуральных $n\geq 10,\ 2^n>n^3$.

564. Для любых положительных a и b, и любых действительных x и y:

$$a\cdot 2^x+b\cdot 3^y+1\leq \sqrt{4^x+9^y+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1}\cdot$$

565. Для любых натуральных n: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$.

566. Для любых положительных a и b, и любых натуральных n:

$$(a+b)^n<2^n(a^n+b^n).$$

567.1. $\dfrac{6^a}{36^{a+1}+1}\leq\dfrac{5}{6}-b+\dfrac{b^2}{3}$ *567.2.* $\dfrac{7^{a+1}}{7^{2a}+49}\leq 5-2b+\dfrac{2b^2}{9}$

567.3. $\dfrac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}\leq 13-5b+\dfrac{b^2}{2}$

568. Для любых натуральных n, $n>1$: $\sqrt[n]{4+\sqrt{15}}+\sqrt[n]{4-\sqrt{15}}>2$.

569. Для любых положительных a и b: $a>b$, и любого натурального n:

(1) $a^a\cdot b^b>a^b\cdot b^a$. (2) $log_n\dfrac{b}{a}<log_n\dfrac{b+1}{a+1}$.

570. $x^2\left(4+log_2^2 y\right)+2x\cdot log_2 y+log_2^2 y+1\geq 0$.

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 балла).*</u> Найдите:

571. **алгоритм** решения уравнения вида $A\cdot a^{f(x)}+B\cdot b^{f(x)}+C=0$, где A, B, C – действительные числа, а a и b – взаимно обратные положительные числа;

572. **тождественны ли** функции $y=\sqrt[x]{a}$ и $y=a^{\frac{1}{x}}$;

573. **корни уравнения** $x^{\sqrt[3]{x^2}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$;

574. **значения параметра** a, при которых уравнение $lg\ ax=2\cdot lg\ (x+1)$ имеет хотя бы одно решение;

575. **значения параметра *a***, при которых уравнение $4^x - a\cdot 2^x - a + 3 = 0$ имеет единственный корень;

576. **решение неравенства** $A\cdot a^{2x} + B\cdot a^x + C \le 0$;

577. **значения параметра *a***, при которых неравенство

$$4^{x^2} + 2\cdot 2^{x^2}\cdot(2a+1) + 4a^2 - 3 > 0$$

выполняется для любых значений x;

578. **решение неравенства** $a^{2x} + a^{x+2} - 1 \ge 1$ при всех значениях параметра a $(a > 0, a \ne 1)$;

579. **множество** всех решений неравенства

$$\frac{x^{\frac{\log_2 x}{2}}}{4} \ge 2^{\frac{(\log_2 x)^2}{4}};$$

580. **множество** всех решений неравенства:

$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2 - \log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2} \ge 0;$$

581. **множество** всех решений неравенства при $0 < a < 1/4$:

$$\log_{x+a} 2 < \log_x 4;$$

582. **значения параметра *a***, при которых неравенство

$$1 + \log_5(x^2+1) \ge \log_5(ax^2+4x+a)$$

выполняется для любого значения x;

583. **решение** неравенства

$$\frac{\log_{11}\left(3x+2\sqrt{x+1}+2\right)}{\log_{11}\left(5x+3\sqrt{x+1}+3\right)^3} \ge \frac{\log_{27} 11}{\log_3 11};$$

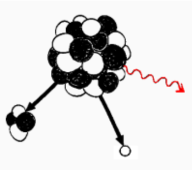
584. **решение** уравнения

$$2\cdot\log_7(ax-2) = \log_{\sqrt{7}}\left(-x^2-9x-18\right);$$

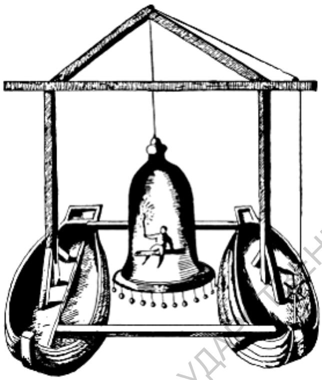
585. **при каких значениях параметра *a***, для любого значения параметра b, $b > 0$, уравнение $\log_2(1-x-x^2) = b + a\cdot\log_{-x^2-x+1} 2$ имеет действительные корни из интервала $(0; 0,5)$.

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите задачи.

586. Задачи физического содержания. (1) В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t)=\dfrac{m_0}{2^{\frac{t}{T}}}$, где m_0 – начальная масса изотопа, T – период полураспада (в мин.). В лаборатории получили вещество содержащее 40 мг изотопа азота-13, период полураспада которого 10 минут. В течении скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг? (2) Уравнение процесса, в котором участвовал газ записывается в виде $pV^a=const$, где p – давление в газе (в Па), V – объём газа (в м^3), a – положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вчетверо объёма газа, участвующего в процессе, приводит не менее, чем к двукратному изменению давления?



587. Задачи физического содержания. (1) Для обогрева помещения, температура в котором $T_п= 20\,℃$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_в= 60\,℃$. Через радиатор проходит $m = 0,3$ *кг/с* воды. Проходя по радиатору расстояние в 84 метра, вода охлаждается до температуры $T(℃)$, причём это расстояние определяется выражением: $x=0,7\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_в-T_п}{T-T_п}$, где c – теплоёмкость воды (равна 4200 Дж/кг·°С), γ – коэффициент теплообмена (равен 21 Вт/°С), До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода? (2) Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 4$ *моля* воздуха при давлении $p_1= 1,2$ *атм.*, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в Дж), совершаемая при сжатии воздуха, определяется выражением: $A=5,75\cdot\nu T\cdot\log_2\dfrac{p_2}{p_1}$, где $T = 300$ *К* – температура воздуха, p_1 – начальное давление (в атм.), p_2 – конечное давление (в атм.) воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более, чем 20700 Дж?



588. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 5\cdot10^{-6}$ *Ф*. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2\cdot10^6$ *Ом.* Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U = 18$ *кВ*. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U *(кВ)* за время (в секундах), определяемое выражением $t = 1,1\cdot RC\cdot\log_2\dfrac{U_0}{U}$. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 11 секунд?

589. Из десятилитрового сосуда со 100% уксусной кислотой отлили 1 л. кислоты, добавили 1 л. воды и тщательно перемешали. Какое минимальное количество раз нужно повторить эту процедуру для того, чтобы в сосуде оказался 64% раствор уксуса?

590. Содержание § 72 «Счисление сложных процентов и сложных уплат» из учебника «Алгебры» начала XX века. «При счислении процентов различают так называемые простые проценты и сложные. Если прибыль сосчитывается ежегодно только с основного капитала, то говорят, что капитал отдан на простые проценты; если же прибыль за каждый год сосчитывается с капитала, наращенного прибылями за предшествующие года, то говорят, что капитал отдан на сложные проценты. Задачи на простые проценты решаются по способам, рассматриваемым в арифметике. Задачи на сложные проценты требуют пособия логарифмических таблиц и потому рассматриваются в алгебре.

Основная формула сложных процентов выводится следующим образом:

Положим, что капитал a, отданный в рост по p сложных процентов со ста на время t полных лет, обращается в конце оборота в сумму A.

Чтобы выразить зависимость указанных чисел, рассуждаем так…»[*]

Выведите формулу сложных процентов и выясните, через сколько лет капитал, отданный в рост под 9% годовых, увеличится вдвое.

591. Содержание § 72 «Счисление сложных процентов и сложных уплат» из учебника «Алгебры» начала XX века. «При займах в банках делают обыкновенно условие, чтобы долг вместе с процентами погашался в течение некоторого срока ежегодными взносами. Такие ежегодные взносы называются срочными уплатами.

Если сумму долга обозначить через A, срочную уплату, постоянную для каждого года, через a, отношение наращения через q и время через t, то формулу, посредством которой решаются задачи на срочные уплаты, можно вывести таким рассуждением:

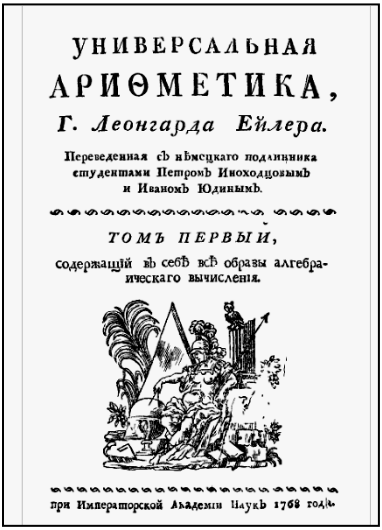
Долг в течение первого года обратился в Aq, но должник внесёт a рублей и потому к началу следующего года долг будет $Aq - a$. Эта сумма в течение второго года обратится в $Aq^2 - aq$, но после второй срочной уплаты к началу следующего года останется долгу $Aq^2 - aq - a$. По истечении трёх лет размер долга выразится через …».[**]

Выведите формулу срочных уплат и выясните, во сколько лет можно уплатить долг в 250 000 рублей, занятый под 10% годовых, уплачивая ежегодно по 75 000 рублей?

---

[*] Шапошников Н.А. Учебник алгебры, применимый к программам средних учебных заведений. Седьмое издание (в двух частях) с существенными дополнениями во второй части. Часть вторая. Курсы старших классов гимназий и реальных училищ. – М., 1908. – С. 114.

[**] Там же, С 116



УНИВЕРСАЛЬНАЯ
АРИѲМЕТИКА,
Г. Леонгарда Ейлера.
Переведенная съ нѣмецкаго подлинника студентами Петромъ Иноходцовымъ и Иваномъ Юдинымъ.
ТОМЪ ПЕРВЫЙ,
содержащій въ себѣ всѣ образы алгебраическаго вычисленія.
при Императорской Академіи Наукъ 1768 года.

Понеже логариѳмы при извлеченіи корней великую пользу приносятъ, то хотимъ мы сіе однимъ изъяснить примѣромъ.

Пусть должно будетъ изъ числа 10ти найти квадратной корень, то надлежитъ здѣсь логариѳмъ числа 10ти, которой есть 1,0000000 раздѣлить на 2, частное будетъ 0,5000000 логариѳмъ искомаго корня, а корень самъ изъ таблицъ найдется 3,16228, котораго квадратъ и въ самомъ дѣлѣ только $\frac{1}{100000}$ частицею больше нежели 10.

592. На занятие математического кружка учитель принёс копию страницы учебника Леонарда Эйлера «Универсальная арифметика», изданного в 1768 году. Текст страницы касался применения логарифмов к извлечению корней. После рассказа о великом математике и просветителе XVIII века учитель дал задание: разработать алгоритм извлечения корней из действительных чисел, используя свойства логарифмов. Насколько разработанный учениками алгоритм отличался от предложенного в учебнике Л. Эйлера?

593. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению реки одновременно начинают движение соответственно плот и лодка. В тот же момент из пункта B навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

594. Ограничение складывания бумаги пополам – физический феномен, суть которого состоит в том, что лист обычной бумаги офисного размера можно сложить пополам не более 7 раз*. Объясните, почему?

* В 2001 году американка Бритни Гэлливан (англ. Britney Gallivan), тогда школьница, вывела математическую модель складывания бумаги; кроме того, ей удалось сложить лист 12 раз, правда достаточно тонкой и гибкой золотой фольги.
24 января 2007 года в 72-м выпуске телепередачи «Разрушители легенд» команда исследователей попыталась опровергнуть закон. Они сформулировали его более точно: «Даже очень большой сухой лист бумаги нельзя сложить в двое больше семи раз, делая каждый из сгибов перпендикулярно предыдущему». На обычном офисном листе закон подтвердился, тогда исследователи проверили закон на огромном листе бумаги. Лист размером с футбольное поле (51,8×67,1 м) им удалось сложить 8 раз без специальных средств (11 раз с применением катка и автопогрузчика).

595. Закон органического размножения: при благоприятных условиях (отсутствие врагов, большое количество пищи) живые организмы размножались бы по закону: $N = N_0 e^{k t}$. По этому закону возрастает количество клеток гемоглобина в организме человека, который потерял много крови. Объем крови в норме составляет в среднем у мужчин 5200 мл, у женщин 3900 мл, причём красных кровяных телец (эритроцитов) у мужчин 4-5·10^{12}/л, у женщин 3,9-4,7·10^{12}/л. Определите время t *(ч)* восстановления эритроцитов у мужчин и женщин с различными объёмами потери крови, если константа скорости роста эритроцитов $k = 0{,}07$, $k = 0{,}14$, $k = 0{,}2$.

596. Творческое задание (1 балл). Решение показательных уравнений, в которых имеются три степени с различными основаниями, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии, причём эти основания возводятся в одну и ту же зависящую от x степень, сводится к решению квадратных уравнений. Продемонстрируйте это решение на конкретном примере. Приведите не менее 10 задач указанного вида с их решениями.

597. Творческое задание (1 балл). Некоторые показательные уравнения содержат выражения вида $f(x)^{g(x)}$. Приведите примеры таких уравнений. Опишите алгоритм их решения. Продемонстрируйте это решение на конкретном примере. Приведите не менее 10 задач указанного вида с их решениями.

598. Творческое задание (1 балл). Проанализировав уравнения из блока заданий №№ 511-530 проведите классификацию логарифмических уравнений по методам, способам и приёмам их решения. Для каждого класса уравнений укажите равносильное преобразование, приведите примеры решения.

599. Творческое задание (1 балл). Что Вам известно об алгебраических и трансцендентных числах? Имена каких учёных связаны с этими числами?

600. Творческое задание (1 балл). Разработайте в среде электронных таблиц компьютерные модели ряда задач №№ 511-560 данной темы, а также генераторы этих задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Светлана Владимировна Лебедева

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА

На обложке – репродукция картины «В классе» французского художника Henri Jules Jean Geoffroy (1853-1924).

Работа издана в авторской редакции