ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ: «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» КУРСА «МАТЕМАТИКА»

О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки

Саратов 2018

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

СОДЕРЖАНИЕ

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Введение

Учебно-методические материалы для выполнения контрольной работы по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения» курса «Математика» составлены в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего образования, рабочей программой и фондом оценочных средств курса «Математика» для студентов-бакалавров по направлению подготовки 04.03.01 «Химия» Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение некоторыми численными методами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

В процессе практических занятий по курсу «Математика» студенты учатся применять теоретические знания, полученные на лекциях, к решению конкретных задач математики. Текущий контроль освоения дисциплины «Математика» во втором семестре проводится в виде устного опроса и письменного контроля знаний по разделам: «Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной»; «Интегральное исчисление функции одной независимой переменной»; «Комплексные числа», «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Цель пособия – помочь студентам подготовиться к выполнению контрольной работы по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения» курса «Математика».

В пособии даны методические рекомендации по выполнению контрольной работы и критерии ее оценивания, приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала, разбирается решение задач примерных вариантов контрольной работы, приводятся задачи для самостоятельного решения с ответами. Ответы к задачам помогут осуществить контроль за правильностью их решения. В заключение приведен необходимый список учебно-методической литературы.

Пособие может быть полезно студентам нематематических специальностей и иных направлений подготовки, изучающих высшую математику.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

1. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

В соответствие с рабочей программой курса «Математика» одна из контрольных работ во II семестре проводится по теме: «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Контрольная работа проводится в письменной форме в течение аудиторного занятия без привлечения какой-либо справочной информации и вспомогательных вычислительных средств (калькулятор, телефон и т.п.).

Для успешного выполнения заданий контрольной работы необходимо повторить основной теоретический материал по теме работы с использованием лекций и списка рекомендованной литературы (см. [1]-[7]) и ответить на контрольные вопросы к теме.

На аудиторном занятии студент получает билет с вариантом контрольной работы. Каждый вариант контрольной работы состоит из нескольких задач. После получения билета необходимо:

– внимательно прочитать условие задачи;

– выбрать алгоритм ее решения;

– провести подробное решение задачи со всеми промежуточными выкладками в соответствии с выбранным методом решения задачи;

– провести анализ полученных результатов и их интерпретацию;

– изложить результаты решения ясным математическим языком, пользуясь научными терминами в соответствии с их смыслом.

Контрольная работа выполняется на отдельном чистом листе бумаги, сверху которого обязательно должны быть указаны фамилия студента и номер группы. Для черновых записей используется дополнительный лист.

Задачи контрольной работы можно решать в произвольном порядке. Условие каждой задачи должно быть кратко и понятно записано. Результат решения каждой задачи отражается в конечном ответе. Запись решения задач контрольной работы должна быть сделана аккуратно.

После выполнения, или по окончании времени, отведенного на выполнение, контрольная работа сдается на проверку и оценивается в соответствии с критериями оценивания.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

2. Критерии оценивания контрольной работы

Максимально возможное количество баллов, которое может получить студент за выполнение контрольной работы по теме – 5 баллов.

Выполнение каждой из задач варианта контрольной работы также оценивается в 5 баллов. При этом:

0 баллов – решение задачи отсутствует или выполнено полностью неверно;

1 балл – выбран неоптимальный метод решения; решение не доведено до конца; имеются многочисленные логические и вычислительные ошибки; отсутствуют промежуточные выкладки;

2 балла – выбран неоптимальный метод решения, решение доведено до конца, но с вычислительными ошибками; либо выбран оптимальный метод решения, решение доведено не до конца, но прописан алгоритм решения;

3 балла – выбран оптимальный метод решения, но при решении допущены вычислительные ошибки, или выбран неоптимальный метод решения, но решение получено верно;

4 балла – выбран оптимальный метод решения задачи; решение задач произведено верно, но не совсем подробно, нет обоснований для некоторых действий; получен аналитически и численно верный результат;

5 баллов – выбран оптимальный метод решения поставленной задачи; решение задачи произведено полностью верно, последовательно, подробно; получен аналитически и численно верный результат.

Итоговые баллы за контрольную работу рассчитываются как среднеарифметическое результатов решения каждой задачи.

При получении итоговых баллов от 0 до 2,9 данная тема определяется как неосвоенная и требуется повторное выполнение контрольной работы.

Повторное выполнение контрольной работы проводится в назначенное дополнительное и свободное от занятий время.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3. Контрольные вопросы к теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)»

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением?
2. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением $n - ого$ порядка?
3. Что называют общим решением обыкновенного дифференциального уравнения $n - ого$ порядка?
4. Что называют частным решением обыкновенного дифференциального уравнения $n - ого$ порядка?
5. Что называют интегральной кривой дифференциального уравнения?
6. Какая задача называется задачей Коши?
7. Что называют особым решением обыкновенного дифференциального уравнения $n - ого$ порядка?
8. Какой вид имеет уравнение с разделяющимися переменными?
9. Какая функция называется однородной степени m?
10. Какое дифференциальное уравнение называется однородным?
11. В каком случае уравнение приводится к однородному?
12. Какое дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах?
13. Какой вид имеет линейное дифференциальное уравнение первого порядка?
14. В чем заключается метод Лагранжа решения неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка?
15. Какое ОДУ называется линейным уравнением второго порядка?
16. Что называют фундаментальной системой решений линейного однородного ОДУ второго порядка?
17. Как зависит фундаментальная система решений линейного однородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами от корней характеристического уравнения?
18. Какой вид имеет общее решение линейного неоднородного ОДУ второго порядка?
19. В каком случае можно применить метод неопределенных коэффициентов для отыскания частного решения линейного неоднородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами?
20. Какое ОДУ называют уравнением Эйлера второго порядка?
21. Указать метод решения уравнения Эйлера?
22. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
23. Какой вид имеет система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
24. Представить матричную форму записи системы линейных однородных ОДУ с постоянными коэффициентами.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

4. Примерные варианты контрольной работы

Вариант №1

1. Найти общее решение ОДУ: $x\left(1+y^2\right)^{1/2}dx + y\left(1+x^2\right)^{1/2}dy = 0.$

2. Решить ОДУ первого порядка: $(2x+2xy)dx + \left(x^2-2y\right)dy = 0$.

3. Найти решение задачи Коши: $y' - 4y = \cos x, \quad y(0) = 1$.

4. Найти общее решение линейного неоднородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами: $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Решение.

1. Исходное уравнение имеет вид

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)dy = 0$$

и является уравнением с разделяющимися переменными.

Разделим обе части уравнения на $\left(1+y^2\right)^{1/2}\cdot\left(1+x^2\right)^{1/2} \neq 0.$ Получим

$$\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{1/2}}dx + \frac{y}{\left(1+y^2\right)^{1/2}}dy = 0.$$

Проинтегрируем обе части уравнения (см. [6]):

$$\int\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{1/2}}dx + \int\frac{y}{\left(1+y^2\right)^{1/2}}dy = C.$$

Отсюда найдем общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \quad \mathbf{(}C>0\mathbf{)},$$

($C>0$, так как рассматриваются только арифметические значения корня).

Теперь следует решить вопрос об особых решениях. Для этого рассмотрим уравнение

$$\left(1+y^2\right)^{1/2}\cdot\left(1+x^2\right)^{1/2} = 0.$$

Действительных решений это уравнение не имеет, а потому и нет особых решений.■

2. Исходное уравнение является ОДУ первого порядка вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где $P(x,y) = 2x + 2xy; \quad Q(x,y) = x^2 - 2y$.

Для исходной задачи

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x,$$

и, следовательно, выполнено условие:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Тогда ОДУ является уравнением в полных дифференциалах.

Для решения уравнения найдем функцию $u(x,y)$, для которой $du=0$.

Для определения функции $u(x,y)$ имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2xy, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2y. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по переменной x (в этом случае y считается фиксированным), получаем

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx == \int (2x + 2xy) dx = x^2 + x^2 y + C(y) .$$

Здесь $C(y)$ является неизвестной функцией от одного аргумента y. Для ее определения подставим $u(x,y)$ во второе уравнение системы:

$$x^2 + C'(y) = x^2 - 2y ,$$

то есть $C'(y) = -2y$ и $C(y) = -y^2$.

Общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$x^2 + x^2 y - y^2 = C .$$

Разрешив последнее уравнение относительно y, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^2 + 4x - 4C}}{2} .■$$

3. Решение задачи Коши осуществляется в два этапа. Сначала необходимо найти общее решение дифференциального уравнения, а затем, используя начальные условия, определить произвольную постоянную.

Данное уравнение – линейное *неоднородное* ОДУ первого порядка.

Найдем сначала решение соответствующего *однородного* уравнения:

$$y' - 4y = 0 .$$

Решение будем искать в виде

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad \text{где} \quad P(x) = -4.$$

Тогда $y = Ce^{\int 4dx}; \;\Rightarrow y = Ce^{4x}$.

Общее решение неоднородного уравнения будем искать с помощью метода вариации произвольного постоянного (метод Лагранжа). В этом методе решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y = C(x)e^{4x},$$

где $C(x)$ –некоторая функция.

Для определения функции $C(x)$ выражение для y подставим в исходное неоднородное уравнение.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$\left(C(x)e^{4x}\right)' - 4C(x)e^{4x} = \cos x,$$
$$C'(x)e^{4x} + 4C(x)e^{4x} - 4C(x)e^{4x} = \cos x,$$
$$C'(x)e^{4x} = \sin x, \ \Rightarrow C'(x) = e^{-4x}\sin x,$$
$$C(x) = \int e^{-4x}\sin x dx.$$

Вычисляя интеграл с использованием формулы интегрирования по частям (см. [6]), получим следующее выражение для функции $C(x)$:

$$C(x) = \frac{e^{-4x}}{17}\left(\sin x - 4\cos x\right) + C.$$

Подставив найденную функцию $C(x)$ в вид решения, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y = \left[\frac{e^{-4x}}{17}\left(\sin x - 4\cos x\right) + C\right]e^{4x},$$

или

$$y = Ce^{4x} + \frac{1}{17}\left(\sin x - 4\cos x\right).$$

Для определения частного решения, используем начальное условие:

$$x = 0; \ \ y = 1.$$

Подставив эти значения в общее решение неоднородного уравнения, найдем значение произвольной постоянной C.

$$1 = C - \frac{4}{17}, \ \Rightarrow C = \frac{21}{17}.$$

Решение задачи Коши примет вид

$$y = \frac{1}{17}\left(21e^{4x} + \sin x - 4\cos x\right).\blacksquare$$

4. Данное ОДУ является неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого уравнения имеет вид

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

где $\bar{y} = \bar{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения, соответствующего исходному, а $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим однородное уравнение:

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Для определения общего решения этого уравнения найдем корни его характеристического уравнения:

$$k^2 - 2k - 3 = 0; \ \Rightarrow k_1 = -1, \ k_2 = 3.$$

Корни характеристического уравнения действительные и различные. Тогда общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Определим частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Правой частью исходного неоднородного уравнения является функция $f(x) = e^{4x}$. Тогда частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения можно искать по виду функции $f(x)$. В этом случае

$$\tilde{y} = Ae^{4x},$$

где A – постоянная, значение которой необходимо определить. Для этого найдем

$$\tilde{y}' = 4Ae^{4x}, \quad \tilde{y}'' = 16Ae^{4x}.$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, получим

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x}; \;\Rightarrow 5Ae^{4x} = e^{4x}; \;\Rightarrow 5A = 1; \;\Rightarrow A = 1/5.$$

Таким образом, $\tilde{y} = \frac{1}{5}e^{4x}$ и общее решение неоднородного уравнения окончательно примет вид

$$y = C_1 e^{-x} + cC_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}. \blacksquare$$

Вариант №2

1. Найти решение задачи Коши:

$xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}\,dy = 0, \quad y(\sqrt{8}) = 1.$

2. Решить ОДУ первого порядка: $y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0.$

3. Найти общее решение ОДУ: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

4. Найти общее решение линейного неоднородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами: $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Решение.

1. Решение задачи Коши осуществляется в два этапа. Сначала необходимо найти общее решение дифференциального уравнения, а затем, используя начальные условия, определить произвольную постоянную.

Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение задачи. Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

Для интегрирования разделим обе части уравнения на $y \cdot \sqrt{1 + x^2} \neq 0$.

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx + \frac{1 + y^2}{y}dy = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx + \int \left(\frac{1}{y} + y\right)dy = C,$$

или общий интеграл $\sqrt{1 + x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Рассмотрим вопрос об особых решениях. Для этого надо решить уравнение:

$$y \cdot \sqrt{1+x^2} = 0.$$

Решение этого уравнения: $y = 0$ (уравнение $\sqrt{1+x^2} = 0$ не имеет действительных корней). Решение $y = 0$ является особым решением, так как оно, удовлетворяя уравнению, не может быть получено из общего уравнения ни при одном частном значении C.

Решение задачи Коши получим, подставляя в общий интеграл начальные значения $x = \sqrt{8}$, $y = 1$:

$$\sqrt{1+8} + \ln|1| + \frac{1}{2} = C; \qquad C = \frac{7}{2}.$$

Частное решение примет вид

$$\sqrt{1+x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = \frac{7}{2}, \quad \text{или} \quad 2\sqrt{1+x^2} + \ln y^2 + y^2 = 7. \blacksquare$$

2. Исходное уравнение является ОДУ первого порядка вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где $P(x,y) = y^2$, $Q(x,y) = x^2 - xy$.

Так как

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)^2 = \lambda^2 y^2 = \lambda^2 P(x,y),$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - \lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2\left(x^2 - xy\right) = \lambda^2 Q(x,y).$$

следовательно, функции $P(x)$ и $Q(x)$ – однородные функции одного и того же порядка и исходное уравнение является однородным ОДУ.

Для определения общего решения уравнения сделаем замену:

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow dy = xdt + tdx.$$

Подставив замену в уравнение, получим

$$(tx)^2 dx + \left(x^2 - x \cdot tx\right)\left(xdt + tdx\right) = 0.$$

$$t^2 x^2 dx + x^2(1-t)(xdt + tdx) = 0 \Rightarrow t^2 dx + (1-t)(xdt + tdx) = 0.$$

$$(1-t)xdt + (1-t)tdx + t^2 dx = 0 \Rightarrow (1-t)xdt + tdx = 0.$$

В последнем уравнении с разделяющимися переменными, разделим переменные:

$$\frac{(t-1)dt}{t} + \frac{dx}{x} = 0$$

и проинтегрируем:

$$t - \ln|t| + \ln|x| = C.$$

Возвращаясь к исходным величинам, получим общее решение в виде

$$\frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| - \ln|x| = C, \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \ln|y| + C. \blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3. Данное уравнение – линейное *неоднородное* ОДУ первого порядка. Найдем сначала решение соответствующего *однородного* уравнения:

$$y' + 2xy = 0.$$

Решение этого уравнения следует искать в виде

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \text{ где } \quad P(x) = 2x.$$

Тогда $\quad y = Ce^{-\int 2x dx}; \Rightarrow y = Ce^{-x^2}$.

Общее решение заданного *неоднородного* уравнения будем искать с помощью метода вариации произвольного постоянного (метод Лагранжа). В этом методе решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y = C(x)e^{-x^2}.$$

Для определения функции $C(x)$ необходимо последнее выражение для y подставить в неоднородное уравнение.

$$\left(C(x)e^{-x^2}\right)' + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

$$C'(x) = x; \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в форму для решения неоднородного уравнения, получим его общее решение

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2},$$

или

$$y = Ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2}.$$

Первое слагаемое в общем решении Ce^{-x^2} – общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего данному, а второе слагаемое $\frac{x^2}{2}$ определяет частное решение исходного неоднородного уравнения. ■

4. Общее решение данного уравнения будем искать в виде суммы общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения.

Для определения $\bar{y}$ решим однородное дифференциальное уравнение вида

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$. Корни $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$ –комплексно-сопряженные числа.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\bar{y} = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x).$$

Определим частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Так как функция $f(x) = x^2$ и нет корней характеристического уравнения равных нулю, то частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде многочлена второй степени с неопределенными коэффициентами

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C,$$

где A, B, C –постоянные, которые необходимо найти.

Вычислим производные: $\tilde{y}' = 2Ax + B$, $\tilde{y}'' = 2A$. Подставляя их в исходное уравнение, получим

$$2Ax^2 - 2(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2.$$

Раскрыв скобки в левой части уравнения, сгруппировав слагаемые с одинаковыми степенями x, получим

$$2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2A - 2B + 2C) = x^2.$$

В последнем уравнении приравняв коэффициенты при равных степенях x в левой и правой частях равенства, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 4A = 0, \\ 2A - 2B + 2C = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы:

$$A = \frac{1}{2},\ B = 1,\ C = \frac{1}{2}.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{y} = \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2. \blacksquare$$

Вариант №3

1. Найти решение задачи Коши: $y' = 5\sqrt{y}$, $y(0) = 25$.

2. Решить ОДУ первого порядка: $y' = \dfrac{1}{3x + y}$.

3 Найти общее решение ОДУ: $y' - \dfrac{x}{1+x^2}y = x$.

4. Найти общее решение линейного неоднородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами: $y'' - 6y' + 25y = 3\sin x$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Р е ш е н и е.

1. Решение задачи Коши осуществляется в два этапа. Сначала необходимо найти общее решение дифференциального уравнения, а затем, используя начальные условия, определить произвольную постоянную.

Перепишем ОДУ задачи в виде

$$\frac{dy}{dx} = 5\sqrt{y}.$$

Отсюда получим $\qquad dy - 5\sqrt{y}dx = 0.$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные в уравнении, разделив обе его части на $5\sqrt{y} \neq 0$:

$$\frac{dy}{5\sqrt{y}} - dx = 0.$$

Интегрируя, получаем $\quad \frac{1}{5}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} - \int dx = C.$

Тогда общий интеграл исходного уравнения примет вид

$$\frac{2}{5}\sqrt{y} - x = C.$$

Преобразовав последнее уравнение, получим общий интеграл уравнения в более удобном виде

$$\frac{2}{5}\sqrt{y} - x = C, \Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{y} = x + C, \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{5}{2}(x + C), \Rightarrow y = \frac{25}{4}(x + C)^2.$$

Чтобы получить особое решение, рассмотрим уравнение $5\sqrt{y} = 0$, или $y = 0$. Это решение будет особым, так как оно не может быть получено из общего решения ни при каком значении произвольной постоянной C.

Частное решение получим из общего решения, подставляя в него значения $x = 0, \quad y = 25$:

$$\frac{2}{5}\sqrt{25} - 0 = C; \Rightarrow C = 2.$$

Решение исходной задачи Коши: $\qquad y = \frac{25}{4}(x + 2)^2.$■

2. Заданное уравнение имеет вид $y' = f(ax + by + c)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки:

$$3x + y = z.$$

Дифференцируя последнее равенство, находим

$$3 + y' = z'; \quad y' = z' - 3.$$

Но $y' = \frac{1}{3x + y}$, поэтому

$$z' - 3 = \frac{1}{z}; \Rightarrow z' = \frac{1 + 3z}{z}; \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1 + 3z}{z}.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Разделив переменные в последнем уравнении, получим

$$\frac{z}{1+3z}dz - dx = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\int \frac{z}{1+3z}dz - \int dx = C.$$

Вычислив интегралы (см. [6]), получаем $\frac{1}{3}z - \frac{1}{9}\ln|1+3z| - x = C$.

Заменив z на $3x+y$, имеем общее решение исходного уравнения:

$$\frac{1}{3}(3x+y) - \frac{1}{9}\ln|9x+3y+1| - x = C. \blacksquare$$

3. Данное уравнение относится к линейным *неоднородным* ОДУ первого порядка.

Найдем сначала решение соответствующего *однородного* уравнения.

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0.$$

Решение будем искать в виде $y = Ce^{-\int P(x)dx}$, где $P(x) = -\frac{x}{1+x^2}$.

Тогда $y = Ce^{\int \frac{x}{1+x^2}dx}$; $\Rightarrow y = Ce^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$; $\Rightarrow y = C\sqrt{1+x^2}$.

Общее решение неоднородного уравнения $y' - \frac{x}{1+x^2}y = x$ будем искать с помощью метода вариации произвольного постоянного (метод Лагранжа). В этом методе решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y = C(x)\cdot\sqrt{1+x^2}.$$

Для определения функции $C(x)$ последнее выражение для y подставим в неоднородное уравнение.

$$\left(C(x)\cdot\sqrt{1+x^2}\right)' - \frac{x}{1+x^2}\cdot C(x)\cdot\sqrt{1+x^2} = x,$$

$$C'(x)\cdot\sqrt{1+x^2} + C(x)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{1+x^2}\cdot C(x)\cdot\sqrt{1+x^2} = x$$

$$C'(x)\cdot\sqrt{1+x^2} = x,$$

$$C'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \Rightarrow C(x) = \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C_1.$$

Подставив найденную функцию $C(x)$ в вид решения, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y = \left(\sqrt{1+x^2} + C_1\right)\cdot\sqrt{1+x^2}, \quad \text{или} \quad y = C_1\cdot\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2. \blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

4. Данное ОДУ является неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение линейного неоднородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

где $\bar{y} = \bar{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения, соответствующего исходному, а $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим однородное уравнение

$$y'' - 6y' + 25y = 0.$$

Составим его характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 25 = 0$. Корни $k_1 = 3 + 4i$, $k_2 = 3 - 4i$ – комплексно-сопряженные числа, где действительная часть $\alpha = 3$, а мнимая часть $\beta = 4$. В этом случае общее решение будет иметь вид (см. [7])

$$\bar{y} = e^{3x}\left(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x\right).$$

Определим частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Так как функция $f(x) = 3\sin x$, то частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде

$$\tilde{y} = A\sin x + B\cos x,$$

где A, B –постоянные, которые необходимо найти.

$$\tilde{y}' = \left(A\sin x + B\cos x\right)' = A\cos x - B\sin x.$$

$$\tilde{y}'' = \left(A\cos x - B\sin x\right)' = -A\sin x - B\cos x.$$

Для определения A, B, подставим найденные выражения в исходное уравнение.

$$-A\sin x - B\cos x - 6\cdot\left(A\cos x - B\sin x\right) + 25\left(A\sin x + B\cos x\right) = 3\sin x.$$

Раскроем в последнем уравнении скобки и сгруппируем слагаемые в левой части уравнения

$$(-A - 6A + 25B)\cos x + (-B + 6B + 25A)\sin x = 3\sin x;$$

$$(7A + 25B)\cos x + (5B + 25A)\sin x = 3\sin x.$$

В последнем уравнении приравняв коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях уравнений, получим систему:

$$\begin{cases} -7A + 25B = 0, \\ 25A + 5B = 3. \end{cases}$$

Решением системы являются значения $A = \dfrac{15}{132}$, $B = \dfrac{7}{220}$.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$\tilde{y} = \frac{15}{132}\sin x + \frac{7}{220}\cos x.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = e^{3x}\left(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x\right) + \frac{15}{132}\sin x + \frac{7}{220}\cos x. \blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

5. Задачи для самостоятельного решения

Задачи для самостоятельного решения.

1. $x^2\left(y^3+5\right)dx+\left(x^3+5\right)y^2dy=0, \quad y(0)=1.$

2. $tgydx-x\ln xdy=0, \quad y(e)=\frac{\pi}{2}.$

3. $\sqrt{1-y^2}dx+\sqrt{1-x^2}dy=0, \quad y(0)=1.$

4. $\left(1+y^2\right)dx+\left(1+x^2\right)dy=0, \quad y(1)=2.$

5. $y'(y+x)=1.$

6. $y'=3x+4y.$

7. $y'=\frac{2}{x+2y}-3.$

8. $2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0..$

9. $\left(2-9xy^2\right)xdx+\left(4y^2-6x^3\right)ydy=0.$

10. $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0.$

11. $y'+y=e^x; \quad y(0)=1.$

12. $y'+tgxy=\cos^2 x; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$

13. $xy'+y=x^2+3x+2; \quad y(1)=\frac{29}{6}.$

14. $y''-2y'+y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=4.$

15. $y''+y'+y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=\frac{1}{2}.$

16. $y''+9y'+20y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=-1.$

17. $y''+4y=8.$

18. $y''+2y'-3y=4e^{-x}.$

19. $y''-2y'-2y=x^3-5x^2+7x+2.$

20. $y''+y=5\sin 2x.$

21. $y''-2y'+10y=x\cos 2x.$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

О т в е т ы и у к а з а н и я.

1. Общий интеграл: $(x^3+5)(y^3+5)=C$.

Решение задачи Коши: $(x^3+5)(y^3+5)=30$.

2. Общий интеграл: $x=e^{C\sin y}$. (Произвольную постоянную удобно взять в виде $\ln|C|$).

Решение задачи Коши: $x=e^{\sin y}$.

3. Общий интеграл: $\arcsin x+\arcsin y=\arcsin C$. (Произвольную постоянную удобно взять в виде $\arcsin C$). Если в решении взять синус обеих частей и, учитывая, что $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, общее решение примет вид: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$.

Особое решение: $y=\pm 1$.

Решение задачи Коши: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$.

4. Общий интеграл: $arctgx+arctgy=arctgC$. (Произвольную постоянную удобно взять в виде $arctgC$). Если в решении взять тангенс обеих частей и, учитывая, что $tg(arctgx)=x$, общее решение примет вид: $\dfrac{x+y}{1-xy}=C$.

Решение задачи Коши: $\dfrac{x+y}{1-xy}=-3$.

5. Общий интеграл: $y-\ln|x+y+1|=C$. (Подстановка: $x+y=z$).

6. Общее решение: $y=Ce^{4x}-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{16}$.

7. Общее решение: $5x+10y+4\ln|5x+10y-4|=C-25x$.

8. Общее решение: $3x^2y-y^3=C$.

9. Общее решение: $x^2-3x^3y^2+y^4=C$.

10. Общее решение: $xe^{-y}-y^2=C$.

11. Общее решение: $y=Ce^{-x}+\dfrac{1}{2}e^x$.

Частное решение: $y=\dfrac{1}{2}e^{-x}+\dfrac{1}{2}e^x$, или $y=shx$.

12. Общее решение: $y=C\cos x+\sin x\cos x$. (При решении воспользоваться формулой $e^{\ln N}=N$).

Частное решение: $y=\sin x\cos x$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

13. Общее решение: $y=\frac{C}{x}+\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{2}+2$. (Обе части уравнения разделить на x).

Частное решение: $y=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{2}+2$.

14. Общее решение: $\bar{y}=e^x\left(C_1+C_2(x+1)\right)$.

Решение задачи Коши: $\bar{y}=2e^x(1+x)$.

15. Общее решение: $\bar{y}=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Решение задачи Коши: $\bar{y}=e^{-\frac{x}{2}}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

16. Общее решение: $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

Решение задачи Коши: $\bar{y}=e^x$.

17. Общее решение: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+2$.

18. Общее решение: $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-e^{-x}$.

19. Общее решение: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{2}x^3+\frac{13}{4}x^2-\frac{33}{4}x+\frac{51}{8}$.

20. Общее решение: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{5}{3}\sin 2x$.

21. Общее решение:

$$y=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\left(\frac{3}{26}x+\frac{29}{338}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{13}x+\frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Список рекомендованной литературы

1. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Ч.2: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

2. *Демидович В.П., Кудрявцев В.А.,* Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

3. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

4. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

5. *Щипачев В. С.* Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1994.

6. Сорокина О.В., Интегрирование функций [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки/ О.В.Сорокина; ФГБОУ ВПО "Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского".-Саратов:[б.и.], 2015-84 с. Библиогр.: с.84 (6 назв.)-Б.ц.

7. Сорокина О.В., Решение обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки/ О.В.Сорокина; ФГБОУ ВПО "Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского".-Саратов:[б.и.], 2014-65 с. Библиогр.: с.65 (6 назв.)-Б.ц.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО