Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского

И.А.Кузнецова

МАТЕМАТИКА: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

Учебно-методическое пособие для слушателей-иностранцев подготовительного отделения

Саратов 2018

УДК 51(072.4)

ББК 22.1я.7

К89

Кузнецова И.А.

Математика: основные понятия и формулы:учеб.-метод.пособие для слушателей-иностранцев подготовительного отделения. И.А.Кузнецова.2018.44с.

Пособие содержит основные определения, формулы и алгоритмы решения задач, которые необходимо знать и усвоить для успешного обучения в высшем учебном заведении.

Для слушателей-иностранцев подготовительного отделения.

Рекомендуют к печати:

Научно-методическая комиссия механико-математического факультета СГУ

Кандидат физ.-мат.наук,доцент Е.В.Разумовская

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие предназначено для слушателей-иностранцев, обучающихся на подготовительном отделении Саратовского государственного университета. Формат пособия определило недостаточное знание данной категорией обучающихся русского языка. Пособие выполнено в виде презентации, в которой каждый лист содержит небольшой объем информации, например, определения, формулы, алгоритмы, примеры, представленные наглядно. Подобный метод был опробован на занятиях и принес хорошие результаты. Пособие также может быть использовано абитуриентами, желающими быстро освежить в памяти основные факты элементарной математики.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Линейное уравнение с одной переменной.

Линейное уравнение с одной переменной — это уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a и b – некоторые числа.

Например: $3x+15=0$;

$6{,}4x=0{,}4$;

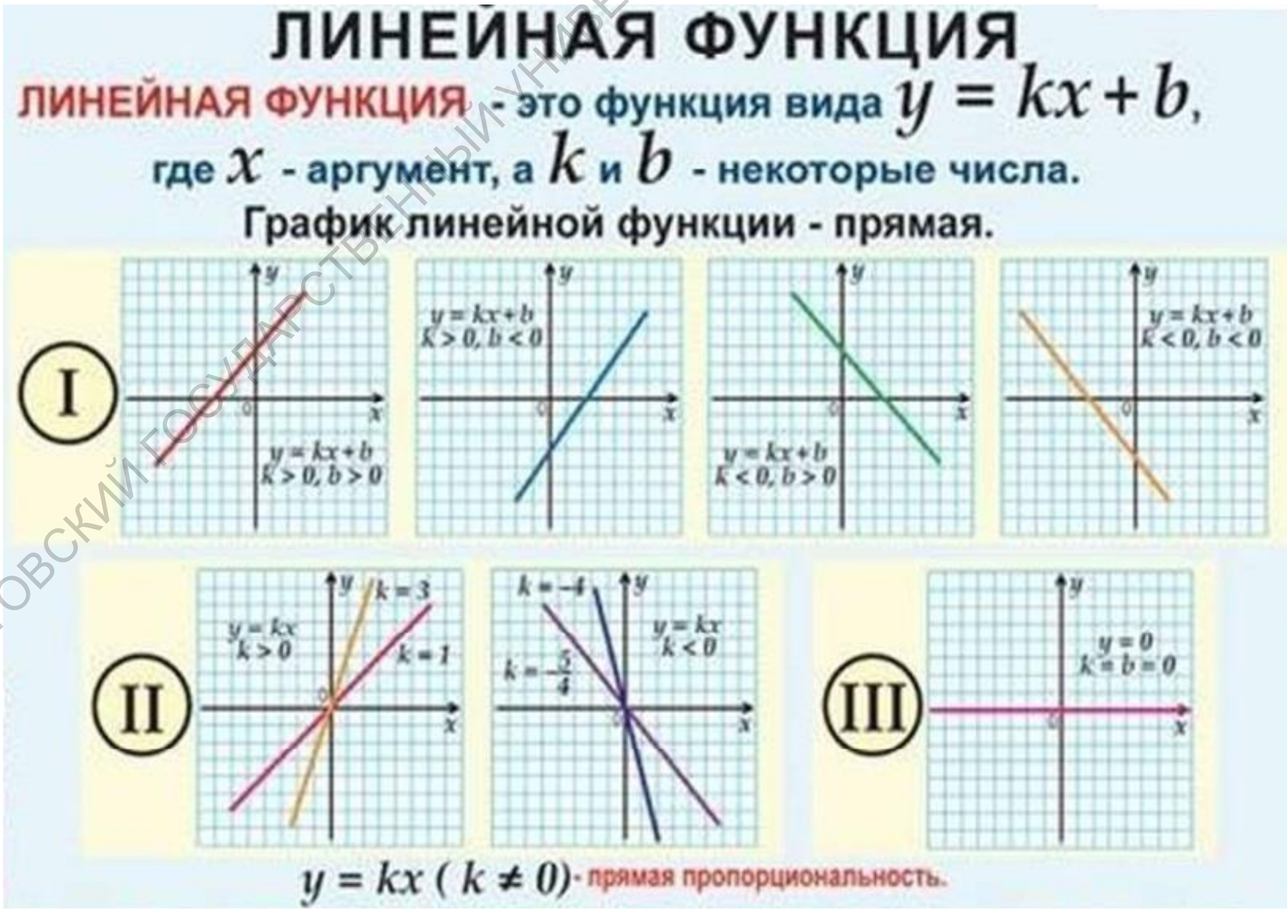
Линейное уравнение с одной переменной

1) **имеет единственный корень, если** $a \neq 0$;
2) **имеет бесконечное множество корней, если** $a=0$; $b=0$;
3) **не имеет корней, если** $a=0$; $b \neq 0$.

Алгоритм решения линейного уравнения

- $10(x-9)=7$
- $-9(8-9x)=4x+5$
- $-x-2+3(x-3)=3(4-x)-3$

1. Раскрыть скобки
2. Перенести слагаемые из одной части в другую
3. Привести подобные слагаемые
4. Найти неизвестный множитель
5. Записать ответ.



Линейным неравенством

с одним неизвестным называются неравенства вида

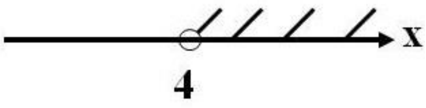
$ax > в,\ ax < в,\ ax \geq в,\ ax \leq в,$

в которых а и в заданные числа, х - неизвестное

Решением неравенства *с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.*

Решить неравенство *– это значит найти все его решения или установить, что их нет.*

Алгоритм решения линейных неравенств

Алгоритм решения линейных неравенств	Решить неравенство: $5\cdot(x-3) > 2x - 3$
1. Раскрыть скобки:	$5x - 15 > 2x - 3$
2. Перенести все слагаемые с х влево, а числа вправо, меняя при этом знак на противоположный:	$5x - 2x > -3 + 15$
3. Привести подобные слагаемые:	$3x > 12$
4. Разделить обе части неравенство на число, стоящее перед х **(если это число положительное, то знак неравенства не меняется; если это число отрицательное, то знак неравенства меняется на противоположный):**	$3\cdot x > 12$ / (: 3) $x > 4$
5. Перейти от аналитической модели к геометрической модели:	
6. Указать множество решений неравенства, записав ответ:	**Ответ: $(4; +\infty)$**

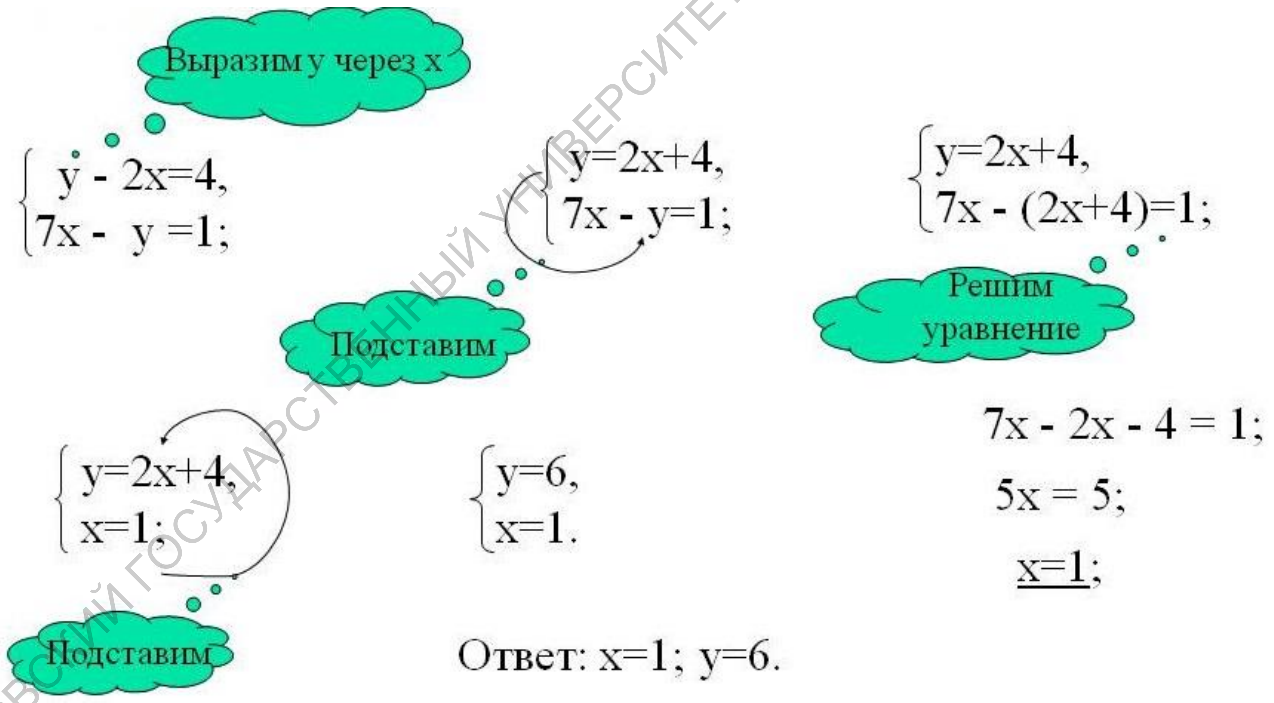
Система уравнений – это два и более уравнений, которые имеют общие решения.

Уравнения системы записывают друг под другом и объединяют специальным символом – фигурной скобкой.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему уравнений – это значит найти все её решения или установить, что их нет.

Решение системы линейных уравнений методом подстановки



КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0, \text{ где } a\neq 0.$$

Алгоритм решения уравнения
$$ax^2 + bx + c = 0$$

1. Вычислить дискриминант D по формуле $D = b^2 - 4ac$.
2. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней.
3. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень:
$$x = -\frac{b}{2a}.$$
4. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Примеры решения квадратных уравнений через дискриминант

Пример1: $3x^2+11x+6=0$ a=3; в=11;с=6.

$D=11^2-4\cdot3\cdot6=121-72=49>0$ – уравнение имеет 2 корня

$$x_{1,2} = \frac{-11\pm\sqrt{49}}{2*3} = \frac{-11\pm 7}{6};$$

$$x_1 = \frac{-11-7}{6} = -3;$$

$$x_2 = \frac{-11+7}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Решение неполных квадратных уравнений

1. $ax^2+bx=0$

$x(ax+b)=0$

$\underline{x_1=0}$, $ax+b=0$

$ax=-b$

$\underline{x_2=-b/a}$

2. $ax^2+c=0$

$ax^2=-c$

$x^2=-c/a$

3. $ax^2=0$

$x^2=0$

$\underline{x_{1,2}=0}$

КВАДРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$

Решение квадратного неравенства

1) найти корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

2) схематично изобразить график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$

3) записать промежутки, на которых квадратичная функция положительна $(ax^2+bx+c>0)$ или отрицательна $(ax^2+bx+c<0)$

$a>0$		$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$
$D>0$	x_1, x_2, x	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	$(x_1;x_2)$	$[x_1;x_2]$
$D=0$	$x_1=x_2$, x	$(-\infty;x_1)\cup(x_1;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$	$\{x_1\}$
$D<0$	x	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$	$\varnothing$
$a<0$		$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$
$D>0$	x_1, x_2, x	$(x_1;x_2)$	$[x_1;x_2]$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$
$D=0$	$x_1=x_2$, x	$\varnothing$	$\{x_1\}$	$(-\infty;x_1)\cup(x_1;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
$D<0$	x	$\varnothing$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$

Алгоритм решения неравенств методом интервалов

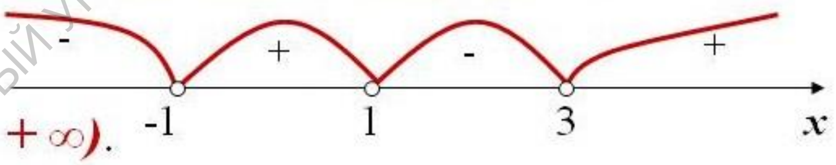
- 1. Ввести функцию и найти её область определения.
- 2. Сравнить функцию с нулём.
- 3. Приравнять функцию к нулю. (Найти нули функции).
- 4. Начертить ось абсцисс и расставить на ней нули функции, в порядке возрастания. Выделить интервалы.
- 5**. Определить знаки функции, на промежутках знакопостоянства, с помощью вычислений.**
- 6. Заштриховать верные промежутки и выписать их.
- 7. Записать ответ.

Примеры решения неравенств методом интервалов

Пример 1.

Решить неравенство $(x + 1)(x - 1)(x - 3) > 0.$

Решение.

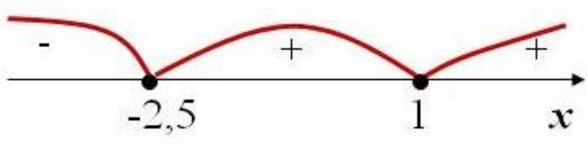


Ответ: $(-1; 1) \cup (3; +\infty).$

Пример 2.

Решить неравенство $(x - 1)(2x^2 + 3x - 5) \le 0.$

Решение.



Решим уравнение

$(x - 1)(2x^2 + 3x - 5) = 0$

$x - 1 = 0$ или $2x^2 + 3x - 5 = 0;$ $x_1 = 1, x_2 = -2,5.$

Ответ: $(-\infty; -2,5].$

СТЕПЕНИ, ИХ СВОЙСТВА. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Определение и свойства степени

1) $a^1 = a \, (a \in R)$

2) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n} \, (a \in R, n \in N, n \neq 1);$

3) $a^0 = 1 \, (a \neq 0, \;\; a \in R);$

4) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \, (a \neq 0, a \in R, n \in N);$

5) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \, (m \in Q, n \in N);$

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y};$

2) $a^x : a^y = a^{x-y};$

3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y};$

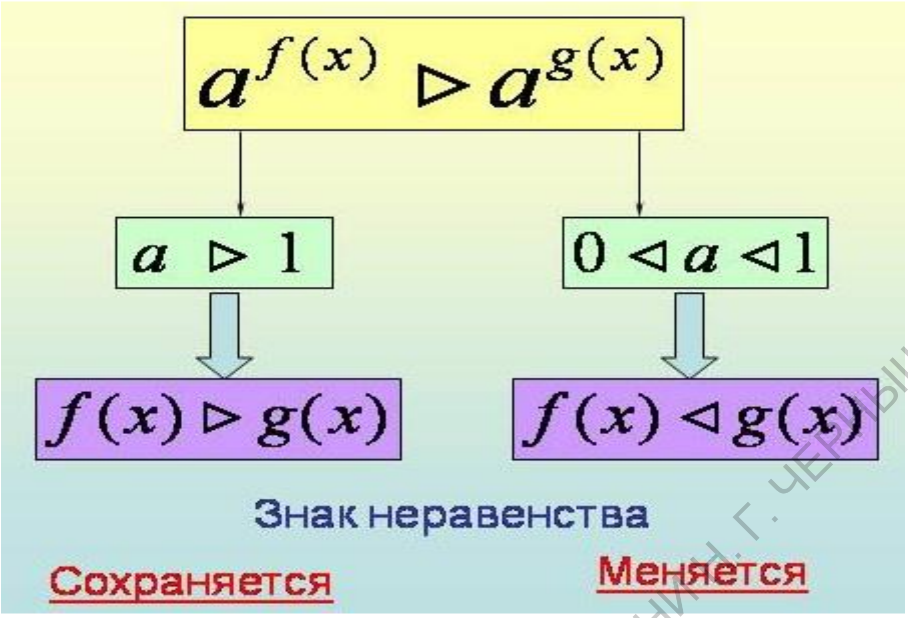
4) $a^x b^x = (ab)^x;$

5) $\left(\dfrac{a^x}{b^x}\right) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x.$

Показательные уравнения

$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \; (a > 0, \;\; a \neq 1),$ $f(x) = g(x)$	$a^{f(x)} = b, \; (a > 0, \;\; b > 0),$ $f(x) = \log_a b$

Решение простейших показательных неравенств



ЛОГАРИФМЫ, ИХ СВОЙСТВА. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Определение. **Логарифмом** положительного числа b по основанию a, где $a>0, a\neq 1$ называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

$$\log_a b = \text{x}, \quad \text{a}^{\text{x}} = b,$$

$$a>0, a\neq 1, b>0$$

Свойства логарифмов

$$\boxed{a^{\log_a b} = b} \qquad \boxed{a^{\log_c b} = b^{\log_c a}}$$

1) $\log_a 1 = 0.$

2) $\log_a a = 1.$

3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

4) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5.1) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x.$

5.2) $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p}\log_a b.$

6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Следствия:

1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

2) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b.$

3) $\log_a b = \log_{a^\gamma} b^\gamma$

Логарифмические уравнения – это уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a f(x) = b,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильное уравнению

$$f(x) = a^b.$$

Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, *где* $a \neq 1$, $a > 0$ *называют* ***логарифмическими уравнениями***

$$\log_a f(x) = \log_a h(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический метод.

2. Метод потенцирования.

3. Метод введения новой переменной.

Решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком логарифма, основано на следующих теоремах:

$$\log_a f(x) = g(x)$$
$$f(x) = a^{g(x)}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \succ 0 \\ g(x) \succ 0 \end{cases}$$

$$\log_a (f(x))^{2n} = g(x)$$
$$2n \cdot \log_a |f(x)| = g(x)$$

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют логарифмическими неравенствами

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Алгоритм решения логарифмического неравенства

1. Найти (О.Д.З.) область допустимых значений (подлогарифмическое выражение больше нуля).
2. Левую и правую чисти неравенства в виде логарифмов по одному и тону же основанию:

$$log_a f(x) > log_a g(x)$$

3. Определить, возрастающей или убывающей является логарифмическая функция.

(если а > 1, то возрастающая; если 0 < a < 1, то убывающая).

4. Перейти к более простому неравенству (подлогарифми-ческикических выражений), учитывая, что знак неравенства сохранится, если функция возрастает, и изменится, если она убывает:

$$log_a f(x) > log_a g(x)$$

если а > 1 , то $f(x) > g(x)$

если 0 < а < 1 , то $f(x) < g(x)$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a)\ a > 1, \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$b)\ 1 < a < 0, \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x), \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a)\ a > 1, \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$b)\ 1 < a < 0, \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Примеры решения логарифмических неравенств

Пример 1

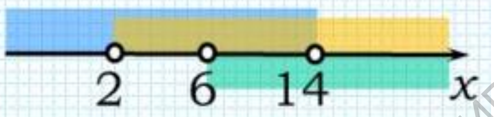
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

т.к. $a = 3 > 1$, то

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}} 16$$

т.к. $a = \frac{1}{2} < 1$, то

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; \end{cases}$$ – *лишнее условие*

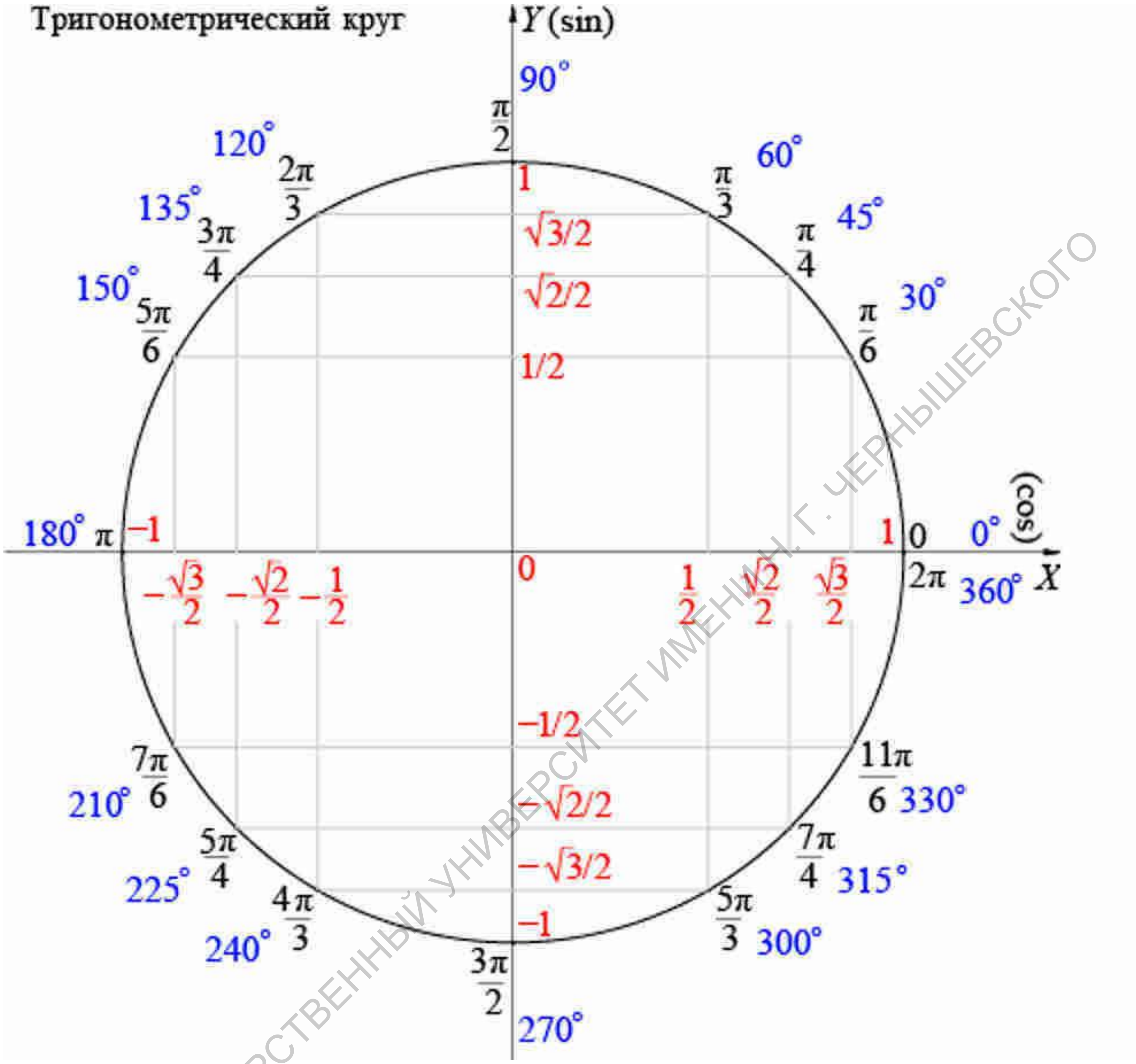
$$4x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 4x \le 0$$

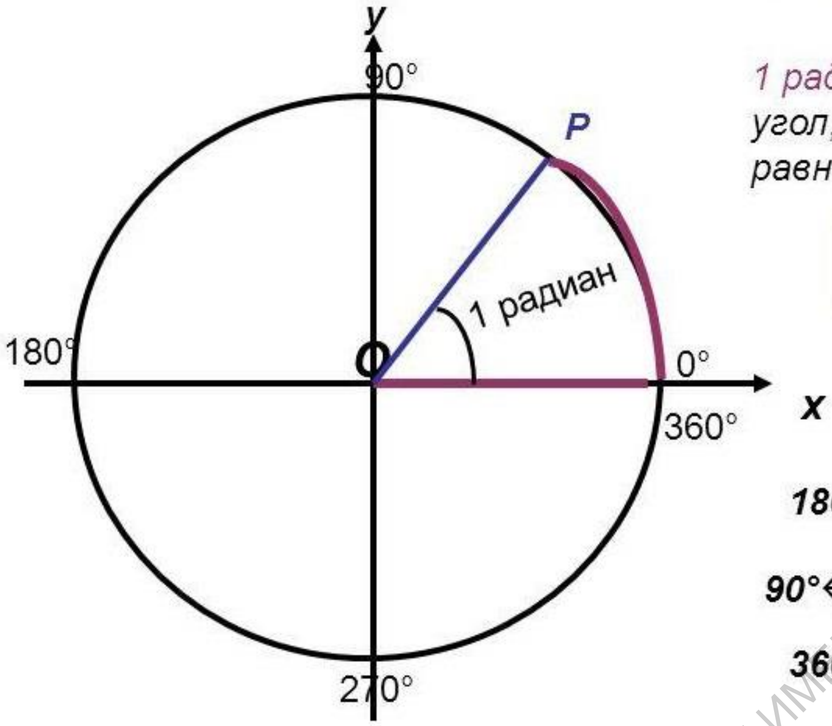
$$x(x-4) \le 0$$

Ответ: [0; 4].

ТРИГОНОМЕТРИЯ


Тригонометрический круг
Y (sin)
X
(cos)
90°
π/2
120°
2π/3
60°
π/3
135°
3π/4
45°
π/4
150°
5π/6
30°
π/6
1
√3/2
√2/2
1/2
180°
π
−1
1
0
0°
2π
360°
−√3/2
−√2/2
−1/2
0
1/2
√2/2
√3/2
−1/2
−√2/2
−√3/2
−1
210°
7π/6
225°
5π/4
240°
4π/3
3π/2
270°
5π/3
300°
7π/4
315°
11π/6
330°

Радианная мера угла



1 радиан это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности

$\boxed{1 \text{ радиан} \approx 57^\circ}$

$180^\circ = \pi$ **рад**

180° ← развёрнутый угол → π

90° ← прямой угол → $\dfrac{\pi}{2}$

360° ← полный угол → 2π

Формула перехода от градусной меры к радианной:

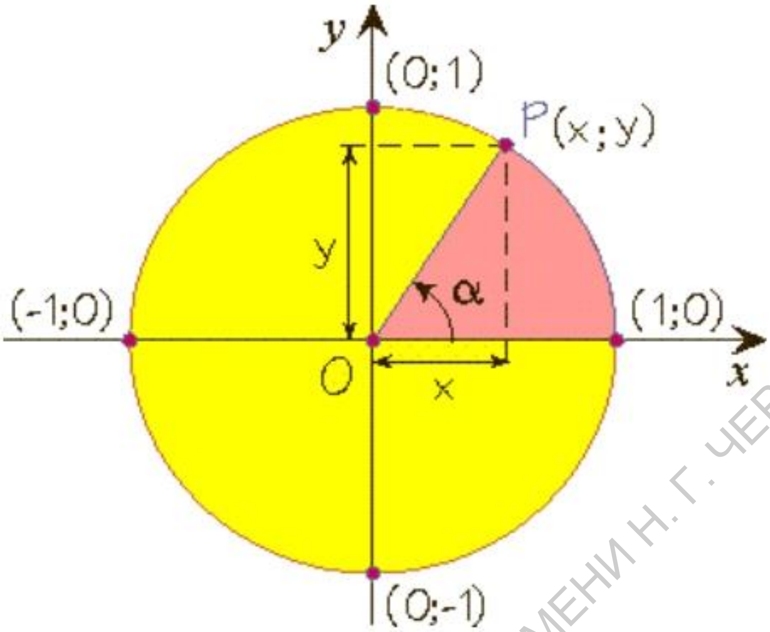
$$\alpha \text{ рад} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$$

Формула перехода от радианной меры к градусной :

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha \text{ рад}$$

Углы в градусах	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°
Углы в радианах	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Тригонометрические функции



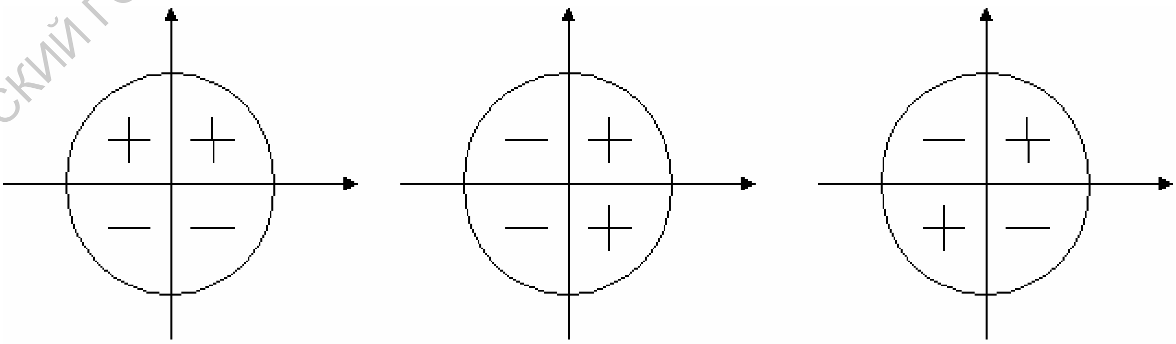
Синус: $\sin\alpha = y$

Косинус: $\cos\alpha = x$

Тангенс: $tg\,\alpha = \dfrac{y}{x}$

Котангенс: $ctg\,\alpha = \dfrac{x}{y}$

Знаки тригонометрических функций по четвертям

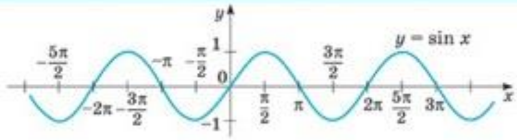
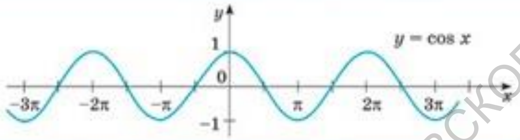
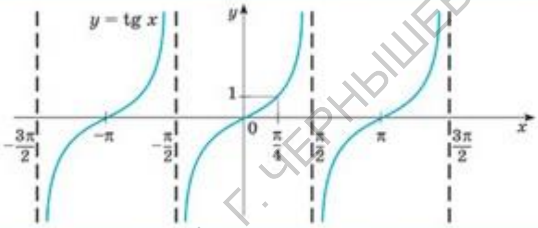
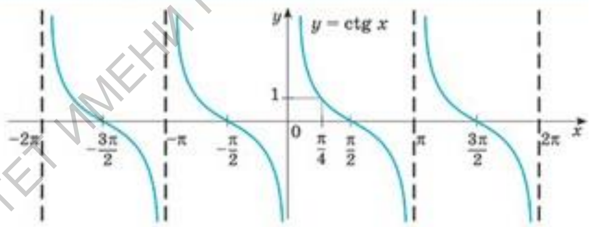


Знаки синуса *Знаки косинуса* *Знаки тангенса и котангенса*

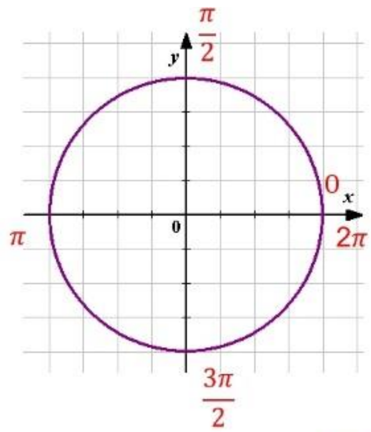
Значения тригонометрических функций некоторых углов

Угол α		Тригонометрические функции			
в град.	в рад.	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0	0	1	0	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0

Тригонометрические функции

$y = \sin x$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$ $E(y) = [-1; 1]$ Период $T = 2\pi$. Нечетная функция.	
$y = \cos x$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$ $E(y) = [-1; 1]$ Период $T = 2\pi$. Четная функция.	
$y = \operatorname{tg} x$	$D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $E(y) = (-\infty; +\infty)$ Период $T = \pi$. Нечетная функция. Возрастает на всей области определения. Асимптоты $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.	
$y = \operatorname{ctg} x$	$D(y) = (\pi k; 2\pi k)$ $E(y) = (-\infty; +\infty)$ Период $T = \pi$. Убывает на всей области определения. Асимптоты $x = \pi k$.	

Формулы приведения



1) Определить четверть

2) Определить знак исходной функции в этой четверти

3) Если аргумент приводимой функции имеет вид $\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right)$, то функция меняется на кофункцию.

4) Если аргумент приводимой функции имеет вид $(\pi \pm t)$ или $(2\pi \pm t)$, то функция не меняется на кофункцию.

Задача 3. ***Упростите выражение:***

$cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) =$ *- sin t*

$tg\,(180° + t) =$ *tg t*

$sin\,(2\pi - t) =$ *-sin t*

$ctg\,(90° - t) =$ *tg t*

Функция	**Аргумент t**						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, t$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(360^\circ + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(360^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$
$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$ctg\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы суммы

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$	
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$	
$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$	$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$

Формулы двойного угла

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	
$\cos2\alpha=\cos^2-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$	
$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$	$ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Сумма тригонометрических функций

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
$ctg\alpha + ctg\beta = + \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Степени тригонометрических функций

СТЕПЕНИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ	
$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$	$\sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$
$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$	$tg^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$

Определение обратных тригонометрических функций

arcsin a	Если $\lvert a\rvert \le 1$, то arcsina=t ⇔ $\begin{cases} \sin t = a, \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ arcsin (-a)=-arcsin a
arccos a	Если $\lvert a\rvert \le 1$, то arccos a=t ⇔ $\begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$ arccos (-a)=π-arccos a
arctg a	arctg a=t ⇔ $\begin{cases} tg\, t = a, \\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ arctg (-a)=-arctg a
arcctg a	arcctg a=t ⇔ $\begin{cases} ctg\, t = a, \\ 0 < t < \pi \end{cases}$ arcctg (-a)=π-arcctg a

Значения обратных тригонометрических функций

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{arctg}\, a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{arcctg}\, a$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = t, \text{при } |t| \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin t + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = t, \text{при } |t| \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos t + 2\pi n, n \in Z$$

$$\mathrm{tg}\, x = t, \text{при } x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow x = \mathrm{arctg}\, t + \pi n, n \in Z$$

Частные случаи

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

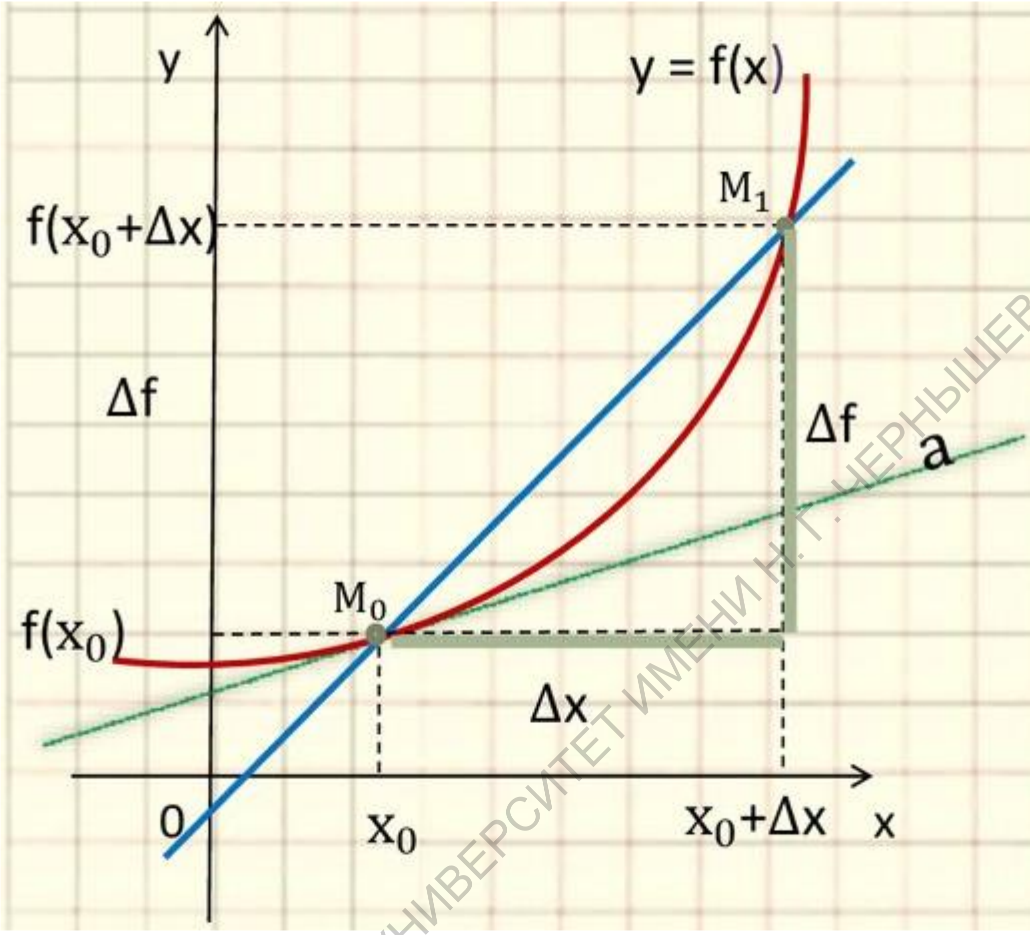
$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНОЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Определение производной

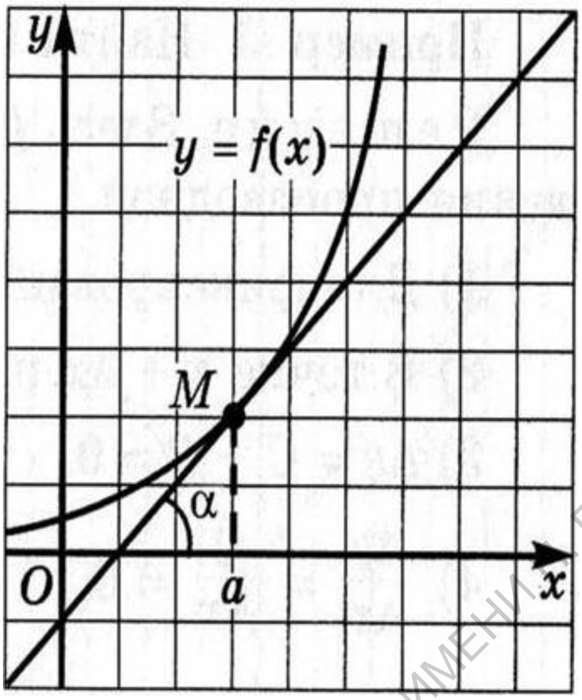


Производной функции в точке x_0, называется предел приращения функции к приращению аргумента, если он существует и пишут:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \Delta f(x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Геометрический смысл производной

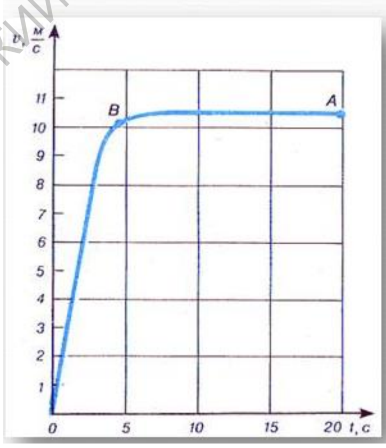


Геометрический смысл производной: $f'(a)$ - это тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке a.

$$f'(a) = tg\, a$$

Физический смысл производной

- *Физический смысл производной заключается в следующем: произ-водная функции $y = f(x)$ в точке x_0 - это скорость изменения функции $f(x)$ в*



Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону x(t) , то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = x'(t)$$

Таблица производных основных элементарных функций

1. $C' = 0$;

2. $x' = 1$;

3. $(x^2)' = 2x$;

4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;

5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

5* $(e^x)' = e^x$;

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

6*. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

7. $(\sin x)' = \cos x$;

8. $(\cos x)' = -\sin x$;

9. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

10. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14. $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Свойства производной

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

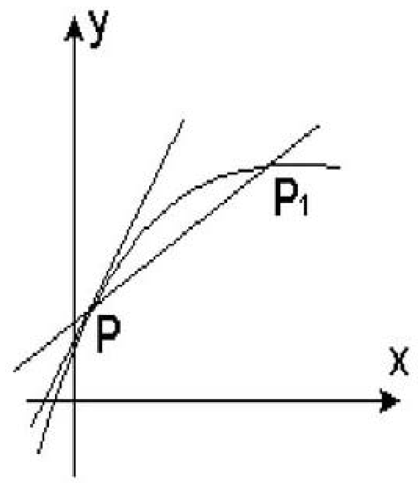
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + v' \cdot u}{v^2}$$

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

Производная сложной функции

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$$

Определение касательной к графику функции



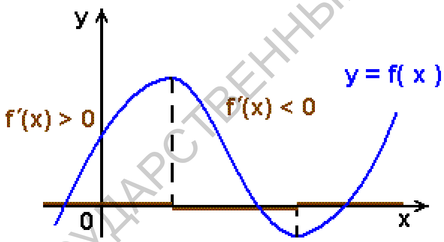
Пусть дана некоторая кривая и точка P на ней. Возьмем на этой кривой другую точку P1 и проведем прямую через точки P и P1. Эту прямую называют секущей. Будем приближать точку P1 к P. Положение секущей PP1 будет меняться (стремиться к точки P) предельное положение прямой PP1 и будет касательной к кривой в точке P.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$

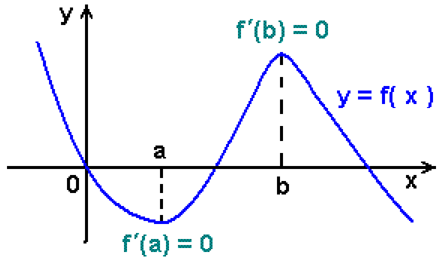
$$y_{кас} = f(x_0) + f^{/}(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Применение производной к исследованию функций

Достаточный признак возрастания (убывания) функции



Необходимые условия существования экстремума

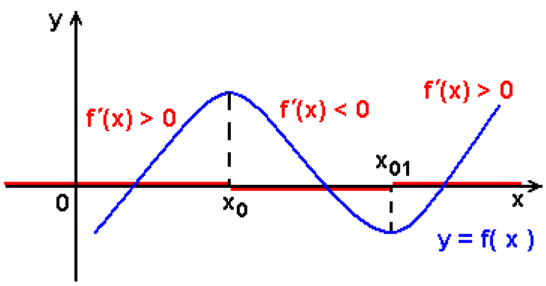


Достаточные условия существования экстремума

f(x) непрерывна в т.x_0 и x_{01}

x_0 - точка максимума

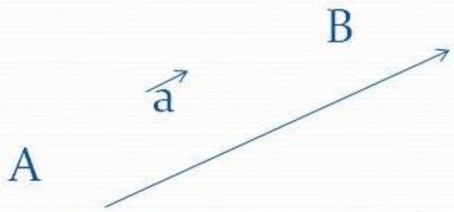
x_{01} - точка минимума



ВЕКТОРЫ, ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ В КООРДИНАТАХ

__Вектор__ - это направленный отрезок, для которого указано, какая из его точек является началом, а какая концом.

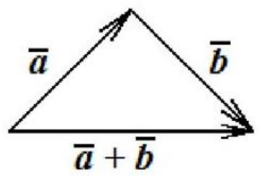
Вектор $\vec{a}$

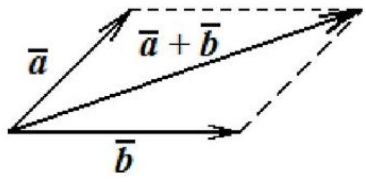


Точка А- начало вектора, точка В – конец вектора.

Линейные операции над векторами.

1. Сложение векторов.



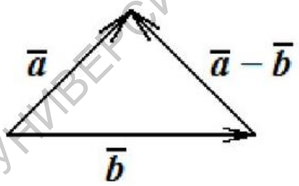


правило треугольника — правило параллелограмма

Свойства сложения

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (переместительный закон)
2. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$ (сочетательный закон)
3. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$

2. Разность векторов.



3) **<u>Умножение</u> <u>вектора</u>** $\vec{a}$ **<u>на</u> <u>число</u>** α.

$\vec{b}=\alpha\vec{a}$: 1) $|\vec{b}|=|\alpha| * |\vec{a}|$ — $\vec{b}=\vec{0}$, если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\alpha=0$.

2) $\alpha>0 \rightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

3) $\alpha<0 \rightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

<u>Свойства</u> <u>операции</u> <u>умножения</u> <u>вектора</u> <u>на</u> <u>число</u>.

- $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ - ассоциативность относительно умножения чисел.
- $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ - дистрибутивность относительно сложения векторов.
- $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ - дистрибутивность относительно сложения чисел.

4) **<u>Деление вектора</u>** $\vec{a}$ **<u>на вектор</u>** $\vec{b}$.

Операция нахождения числа α из векторного уравнения $\vec{a}=\alpha\vec{b}$ называется **<u>делением вектора</u>** $\vec{b}$ **<u>на вектор</u>** $\vec{a}$ ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны быть коллинеарными).

Основные свойства линейных операций над векторами

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$

2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$

3) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$

4) $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$

5) $k\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot k$

6) $(k+l)\cdot\overline{a}=k\overline{a}+l\overline{a}$

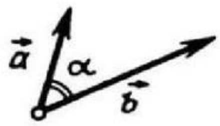
7) $(kl)\cdot\overline{a}=k(l\overline{a})$

8) $k(\overline{a}+\overline{b})=k\overline{a}+k\overline{b}$

9) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$

10) $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла a между ними



$$\alpha=(\angle\vec{a},\vec{b}) \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})=90^\circ \leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})=0^\circ \text{ или } (\vec{a},\vec{b})=180^\circ$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

$$\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$$

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора определяются по формуле:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

или

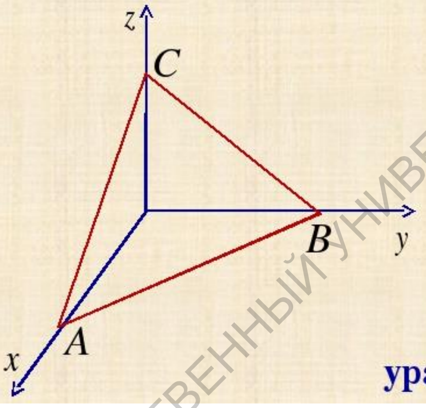
$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Уравнение плоскости

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$, где $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

Если плоскость проходит через начало координат, то ***d=0***



Если плоскость пересекает оси координат в точках A, B, C, то

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

уравнение плоскости в отрезках

1. Расстояние от точки до плоскости	д) $\rho = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
2. Угол между двумя прямыми	а) $\sin\alpha = \dfrac{\lvert x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\rvert}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
3. Угол между прямой и плоскостью	б) $\cos\alpha = \dfrac{\lvert p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2\rvert}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$
4. Угол между плоскостями	г) $\cos\alpha = \dfrac{\lvert x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\rvert}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
5. Расстояние между двумя прямыми	в) $\rho = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

ВЕРОЯТНОСТЬ, ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события А называется отношение числа элементарных событий, которые благоприятствуют этому событию, к общему числу всех элементарных событий, входящих в данную группу .

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Вероятность невозможного события равна нулю: P(0) = 0 .

Вероятность достоверного события равна единице: P(E) = 1.

Вероятность случайного события изменяется от 0 до 1: 0 ≤ P(A) ≤ 1.

P(A+B) = P(A) + P(B) – P(A·B). Если A и B несовместные, то P(A+B) = P(A) + P(B).

Если A и B независимы, то вероятность P(A·B)= = P(A) · P(B).

Основные элементы комбинаторики

1. Размещение $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Это любое упорядоченное подмножество m из элементов множества n.

(Порядок важен).

2. Перестановки

Если m = n, то эти размещения называются перестановками.

3. Сочетания $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Это любое подмножество из m – элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n – различных элементов.

(Порядок не важен).

Следствие. Число сочетаний из n элементов по n – m равно число сочетаний из n элементов по m, т.е. $C_n^{n-m} = C_n^m$

Список рекомендованной литературы

1. Ш.А Алимов и др. Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы. М.:Изд-во «Просвещение», 2014.

2. Ю.Н.Макарычев и др. Алгебра, 9 класс. М.:Изд-во « Просвещение», 2014.

3. Л.С.Атанасян и др. Геометрия, 10-11 классы. М.: Изд-во « Просвещение», 2014.

4. Л.С.Атанасян и др. Геометрия, 7-9 классы. М.:Изд-во «Просвещение», 2014.

5. Л.Д.Лаппо, М.А.Попов. Математика. Профильный уровень. Эксперт в ЕГЕ. М.:Изд-во «Экзамен», 2018.

6. Интернет-ресурсы.