Ю. В. Шевцова

Практические занятия по аналитической геометрии и линейной алгебре.

Часть 2. Аналитическая геометрия

1. Системы координат. Уравнение фигуры

Основные обозначения, определения и понятия

Обозначения:

$\vee$ - дизъюнкция - заменяет союз «или»;

$\wedge$ - конъюнкция – заменяет союз «и»;

$\Leftrightarrow$ - эквивалентность – заменяет словесное выражение «тогда и только тогда»;

$\cup$ - объединение; $\cap$ - пересечение.

1. *Векторная система координат* с данным полюсом O ставит в соответствие каждой точке M ее радиус-вектор, т.е. вектор $\overrightarrow{OM}$, определяемый началом в точке O и концом в точке M.

2. *Аффинная система координат* с данным полюсом O и базисом $(\overline{e_i})$ ставит в соответствие каждой точке M упорядоченную пару (тройку) чисел, составленную из координат радиус-вектора данной точки относительно выбранных полюса и базиса. Координаты радиус-вектора точки M называются *аффинными* координатами.

3. Аффинная система координат с ортонормированным базисом называется *декартовой.*

4. *Формулы преобразования аффинных координат* точки имеют линейный вид:

$$\begin{cases} x = e_1^1 x' + e_2^1 y' + e_3^1 z' + x_0 \\ y = e_1^2 x' + e_2^2 y' + e_3^2 z' + y_0 \\ z = e_1^3 x' + e_2^3 y' + e_3^3 z' + z_0 \end{cases}.$$

5. *Формулы поворота и переноса полюса декартовой системы координат* на плоскости

$$\begin{cases} x = \cos\alpha\, x' - \sin\alpha\, y' + x_0 \\ y = \sin\alpha\, x' + \cos\alpha\, y' + y_0 \end{cases}.$$

6. Уравнение $f(x,y)=0$ называется *уравнением фигуры* (относительно заданной аффинной системы координат на плоскости), если ему удовлетворяют координаты x и y любой точки, принадлежащей данной фигуре, и не удовлетворяют координаты x и y любой точки, не принадлежащей данной фигуре.

7. Если переменные координаты x и y точек фигуры выражены при помощи третьей вспомогательной переменной (параметра t): $x = x(t),\ y = y(t)$, где функции $x(t), y(t)$ предполагаются непрерывными по параметру t, то такое представление называется *параметрическим* заданием фигуры на плоскости.

8. Уравнение $f(x,y,z)=0$ называется *уравнением поверхности* (относительно заданной аффинной системы координат в пространстве), если ему удовлетворяют координаты x ,y ,z любой точки, принадлежащей данной поверхности, и не удовлетворяют координаты x ,y, z любой точки, не принадлежащей данной поверхности.

9. Если переменные координаты x ,y, z точек поверхности выражены при помощи двух параметров t_1, t_2: $x = x(t_1,t_2),\ y = y(t_1,t_2),\ z = z(t_1,t_2)$, то такое

представление называется *параметрическим* заданием поверхности в пространстве.

10. Уравнение вида $\sum_{\alpha\beta\gamma} p_{\alpha\beta\gamma} x^{n_\alpha} y^{m_\beta} z^{k_\gamma} = 0$ называется *алгебраическим*, а число $s = max(n_\alpha + m_\beta + k_\gamma)$ называется *степенью* алгебраического уравнения.

11. Фигура на плоскости и в пространстве называется *алгебраической порядка* n, если в аффинной системе координат она может быть определена алгебраическим уравнением степени n и не может быть определена уравнением степени меньше чем n.

12. Всякая не алгебраическая фигура называется *трансцендентной*.

2. Основные формулы аналитической геометрии

Пусть относительно некоторой декартовой системы координат в пространстве известны координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$. Тогда справедливы следующие формулы:

1. *Координаты вектора* $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

2. *Длина отрезка* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

3. *Деление отрезка в данном отношении*. Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$, тогда и только тогда, когда ее координаты вычисляются по формулам:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \; y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \; z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

4. *Мера угла в треугольнике* ABC

$$\cos\angle A=\frac{(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)+(z_B-z_A)(z_C-z_A)}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}}.$$

5. *Площадь треугольника* ABC

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_B-y_A & z_B-z_A \\ y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_B-x_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & z_C-z_A \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A \end{vmatrix}^2}.$$

На плоскости

$$S_\Delta=\frac{1}{2}mod\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A \end{vmatrix}.$$

6. *Объем тетраэдра* $ABCD$

$$V=\frac{1}{6}mod\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{vmatrix}.$$

3. Прямая на плоскости

Теорема (основная теорема о прямой на плоскости)

Фигурами I-го порядка на плоскости являются прямые и только они.

Специальные виды уравнений прямой на плоскости

1. Общее уравнение прямой: $Ax+By+C=0$.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N}(A,B)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=kx+b$.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно данному вектору $\vec{a}(a^x;a^y)$: $\dfrac{x-x_0}{a^x}=\dfrac{y-y_0}{a^y}$.

5. Параметрические уравнения прямой: $\begin{aligned} x &= x_0 + a^x t, \\ y &= y_0 + a^y t. \end{aligned}$

6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$,

$M_2(x_2, y_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

7. Уравнение прямой в отрезках (a, b - отрезки, отсекаемые на осях координат соответственно, с учетом их знаков): $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Взаимное расположение двух прямых $\begin{aligned} l_1 &: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ l_2 &: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{aligned}$ на плоскости

1. $(l_1 \| l_2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2} \right)$.

2. $(l_1 = l_2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \right)$.

3. $(l_1 \cap l_2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \right)$.

Основные метрические задачи на прямую на плоскости

1. Нахождение косинуса угла φ между двумя прямыми $\begin{aligned} l_1 &: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ l_2 &: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{aligned}$:

$$cos\,\varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

2. Условие взаимной перпендикулярности двух прямых $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

3. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

4. **Плоскость**

Теорема (основная теорема о плоскости)

Фигурами I-го порядка в пространстве являются плоскости и только они.

Специальные виды уравнений плоскости

1. Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.
2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N}(A, B, C)$:

   $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{a}(a^x; a^y, a^z)$, $\vec{b}(b^x; b^y, b^z)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \end{vmatrix} = 0.$$

4. Параметрические уравнения плоскости: $\begin{matrix} x = x_0 + a^x t_1 + b^x t_2 \\ y = y_0 + a^y t_1 + b^y t_2 \\ z = z_0 + a^z t_1 + b^z t_2 \end{matrix}$.
5. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Уравнение плоскости в отрезках (a, b, c - отрезки, отсекаемые на осях координат соответственно, с учетом их знаков): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Взаимное расположение двух плоскостей $\begin{array}{l}\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\end{array}$

1. $(\pi_1 \| \pi_2) \Leftrightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \right).$

2. $(\pi_1 = \pi_2) \Leftrightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \right).$

3. $(\pi_1 \cap \pi_2) \Leftrightarrow \left(\left[\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \right] \vee \left[\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \right] \vee \left[\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \right] \right).$

Основные метрические задачи на плоскость

1. Нахождение косинуса двугранного угла φ между двумя плоскостями

$\begin{array}{l}\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\end{array}$ **:**

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

2. Условие взаимной перпендикулярности двух плоскостей:

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

3. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Прямая в пространстве

Различные способы задания прямой в пространстве

1. Общее задание прямой в пространстве: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

при условии $\left(\left[\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\right]\vee\left[\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{C_1}{C_2}\right]\vee\left[\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}\right]\right)$.

2. Канонические уравнения прямой в пространстве: $\frac{x-x_0}{a^x}=\frac{y-y_0}{a^y}=\frac{z-z_0}{a^z}$.

3. Параметрические уравнения прямой в пространстве: $\begin{matrix} x=x_0+a^x t \\ y=y_0+a^y t \\ z=z_0+a^z t \end{matrix}$.

4. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Взаимное расположение двух прямых $\begin{matrix} l_1: \frac{x-x_1}{a^x}=\frac{y-y_1}{a^y}=\frac{z-z_1}{a^z} \\ l_2: \frac{x-x_2}{b^x}=\frac{y-y_2}{b^y}=\frac{z-z_2}{b^z} \end{matrix}$

в пространстве.

1. Две прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \end{vmatrix}=0.$$

2. Две прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \end{vmatrix}\neq 0.$$

3. $(l_1 \| l_2) \Leftrightarrow \left(\frac{a^x}{b^x}=\frac{a^y}{b^y}=\frac{a^z}{b^z}\right)$.

4. $(l_1 \cap l_2) \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \end{vmatrix} = 0 \wedge \left(\left[\frac{a^x}{b^x} \neq \frac{a^y}{b^y} \right] \vee \left[\frac{a^x}{b^x} \neq \frac{a^z}{b^z} \right] \vee \left[\frac{a^y}{b^y} \neq \frac{a^z}{b^z} \right] \right) \right)$.

Основные метрические задачи на прямую в пространстве

$$l_1 : \frac{x-x_1}{a^x} = \frac{y-y_1}{a^y} = \frac{z-z_1}{a^z}$$
$$l_2 : \frac{x-x_2}{b^x} = \frac{y-y_2}{b^y} = \frac{z-z_2}{b^z}$$

1. Нахождение косинуса угла между двумя прямыми l_1, l_2 в пространстве:

$$cos\,\varphi = \pm \frac{a^x b^x + a^y b^y + a^z b^z}{\sqrt{(a^x)^2 + (a^y)^2 + (a^z)^2}\sqrt{(b^x)^2 + (b^y)^2 + (b^z)^2}}.$$

2. Условие перпендикулярности двух прямых l_1, l_2 в пространстве:

$$a^x b^x + a^y b^y + a^z b^z = 0.$$

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми l_1, l_2:

$$h = \frac{mod \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a^y & a^z \\ b^y & b^z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a^z & a^x \\ b^z & b^x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a^x & a^y \\ b^x & b^y \end{vmatrix}^2}}.$$

4. Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой $\frac{x-x_0}{a^x} = \frac{y-y_0}{a^y} = \frac{z-z_0}{a^z}$ в пространстве:

$$\rho = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a^y & a^z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ a^z & a^x \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a^x & a^y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(a^x)^2 + (a^y)^2 + (a^z)^2}}\ .$$

Плоскость и прямая в пространстве

1. Взаимное расположение плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой $l : \frac{x - x_0}{a^x} = \frac{y - y_0}{a^y} = \frac{z - z_0}{a^z}$ в пространстве:

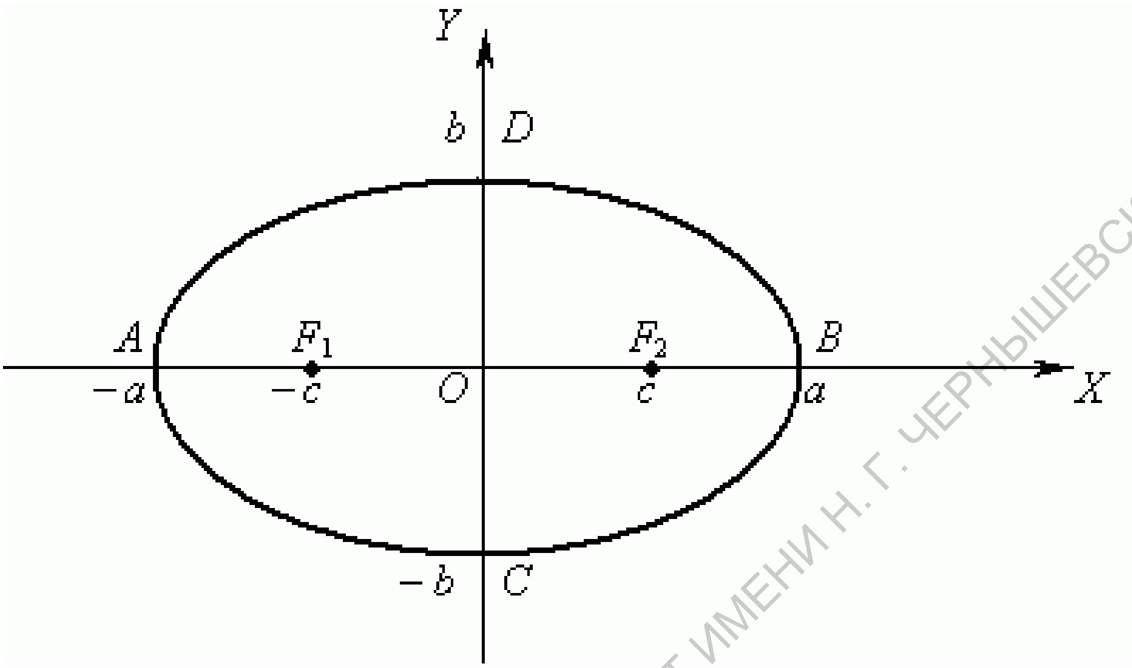
1. $(l \| \pi) \Leftrightarrow (Aa^x + Ba^y + Ca^z = 0)$.
2. $(l \subset \pi) \Leftrightarrow (\begin{cases} Aa^x + Ba^y + Ca^z = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$.
3. $(l \cap \pi) \Leftrightarrow (Aa^x + Ba^y + Ca^z \neq 0)$.
4. $(l \perp \pi) \Leftrightarrow \left(\frac{A}{a^x} = \frac{B}{a^y} = \frac{C}{a^z}\right)$.

2. Нахождение синуса угла φ между прямой и плоскостью в пространстве:

$$\sin\varphi = \pm \frac{Aa^x + Ba^y + Ca^z}{\sqrt{(a^x)^2 + (a^y)^2 + (a^z)^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ .$$

6. Конические сечения

1. Эллипс



<u>*Определение*</u> *Эллипс* – геометрическое место точек, сумма расстояний от которых, до двух фиксированных точек, называемых *фокусами* эллипса, есть величина постоянная (бóльшая, чем расстояние между фокусами) .

Обозначения: $2c$ - расстояние между фокусами,

$2a$ - сумма расстояний от точек эллипса до фокусов ($c < a$).

1. Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2 = a^2 - c^2$.

1. Координаты фокусов: $(-c;0), (c;0)$.

2. Координаты вершин эллипса: $(-a;0), (a;0); (0;-b), (0;b)$;

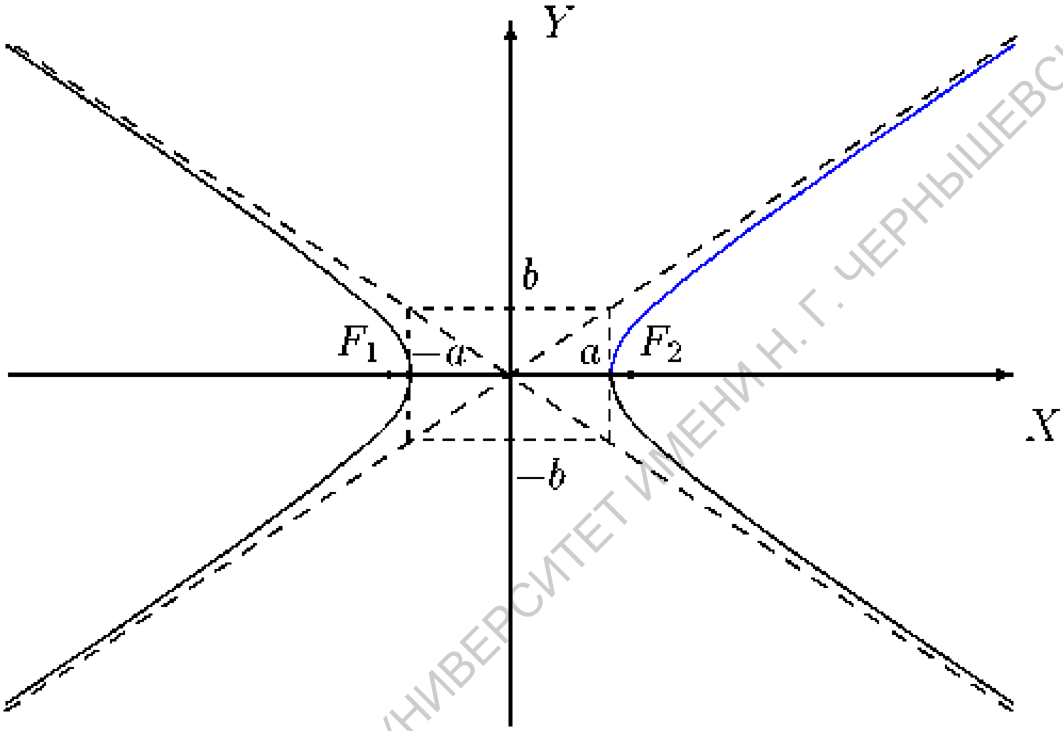
a - большая полуось эллипса,

b - малая полуось эллипса.

3. Эксцентриситет: $e = \frac{c}{a} < 1$.

4. Уравнения директрис: $x = \pm\frac{a}{e}$.

2. Гипербола



2.

<u>*Определение*</u> *Гипербола* – геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых, до двух фиксированных точек, называемых *фокусами* гиперболы, есть величина постоянная (меньшая, чем расстояние между фокусами) .

Обозначения: $2c$ - расстояние между фокусами,

$2a$ - разность расстояний от точек гиперболы до фокусов ($c > a$).

1. Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

2. Координаты фокусов: $(-c;0),(c;0)$.

3. Координаты вершин гиперболы: $(-a;0),(a;0)$.

   a - действительная полуось гиперболы,

   b - мнимая полуось гиперболы.

4. Уравнения асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x$.

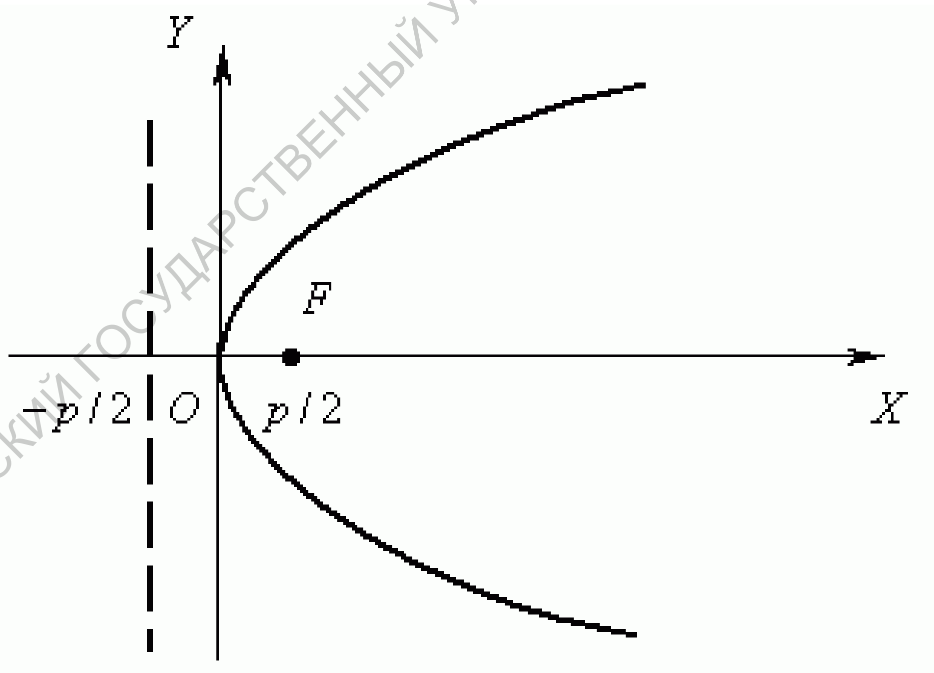
5. Эксцентриситет: $e=\frac{c}{a}>1$.

6. Уравнения директрис: $x=\pm\frac{a}{e}$.

7. Уравнение сопряженной гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

8. Уравнение равносторонней гиперболы: $x^2-y^2=a^2$.

3. Парабола



Определение *Парабола* – геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом* гиперболы, и данной прямой, называемой *директрисой.*

Обозначение: p - расстояние от фокуса до директрисы.

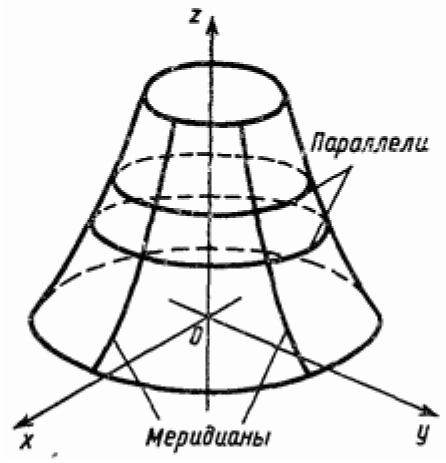
1. Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.
2. Координаты фокуса: $(\frac{p}{2};0)$.
3. Координаты вершины параболы: $(0;0)$.
4. Уравнение директрисы: $x = -\frac{p}{2}$.
5. Эксцентриситет: $e = 1$.

Общее директориальное свойство конических сечений: для любой точки эллипса, гиперболы и параболы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

7. Фигуры в пространстве

1. Фигуры вращения

Определение *Фигура вращения* – множество, получающееся в результате объединения непустого множества окружностей, центры которых лежат на некоторой прямой – оси вращения, а их плоскости перпендикулярны оси вращения.



Окружности, являющиеся результатом пересечения фигуры вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения, называются *параллелями.*

Кривые, являющиеся результатом пересечения фигуры вращения плоскостью, содержащей ось вращения, называются *меридианами*.

Теорема (об уравнении фигуры вращения) Пусть в плоской декартовой системе координат XoY меридиан определяется уравнением $f(x,y)=0$. Тогда уравнение фигуры вращения относительно оси oy будет иметь вид $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

Теорема (достаточный признак фигуры вращения) Пусть уравнение некоторой фигуры в пространстве относительно декартовой системы координат имеет вид $f(s,y)=0$, где $s=x^2+z^2$. Тогда эта фигура – фигура вращения относительно оси oy, а уравнение меридиана в плоскости XoY имеет вид $f(x^2,y)=0$.

2. Конусы

<u>*Определение*</u> *Конус* – множество, получающееся в результате объединения непустого множества прямых – *образующих* конуса, проходящих через общую точку – *вершину* конуса.

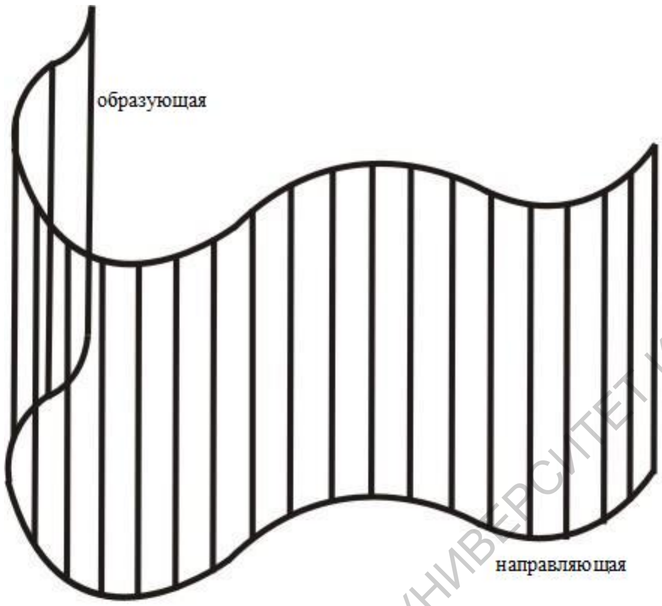
Фигура, имеющая точно одну общую точку с каждой из образующих конуса, называется *направляющей* конуса.

<u>*Определение*</u> Уравнение $f(x,y,z)=0$ называется однородным, если выполняется $f(x,y,z)=f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=0$ для любого числа λ.

<u>*Теорема*</u> (достаточный признак конуса) Пусть фигура в пространстве, имеющая, по крайней мере, две точки, задана в некоторой аффинной системе координат однородным уравнением $f(x,y,z)=0$. Тогда эта фигура является конусом с вершиной в полюсе аффинной системы координат.

3. Цилиндры

Определение *Цилиндр* – объединение непустого множества параллельных между собой прямых в пространстве, называемых *образующими* цилиндра. Фигура, имеющая точно одну общую точку с каждой из образующих цилиндра, называется *направляющей* цилиндра.



Теорема (достаточный признак цилиндра) Пусть уравнение некоторой непустой фигуры в пространстве относительно аффинной системы координат содержит только две переменные, например $f(x,y)=0$. Тогда данная фигура – цилиндр, образующие которого параллельны оси oy, а уравнение направляющей в плоской аффинной системе координат XoY имеет вид $f(x,y)=0$.

Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндры второго порядка

1. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

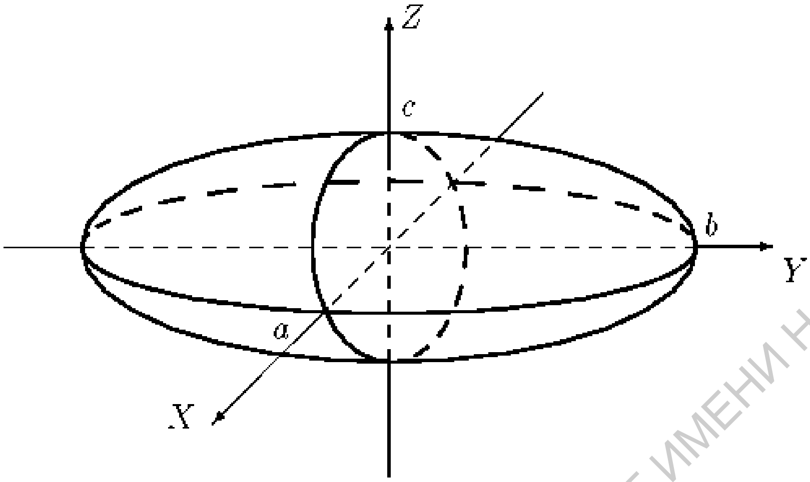


Рис. 1

2. Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

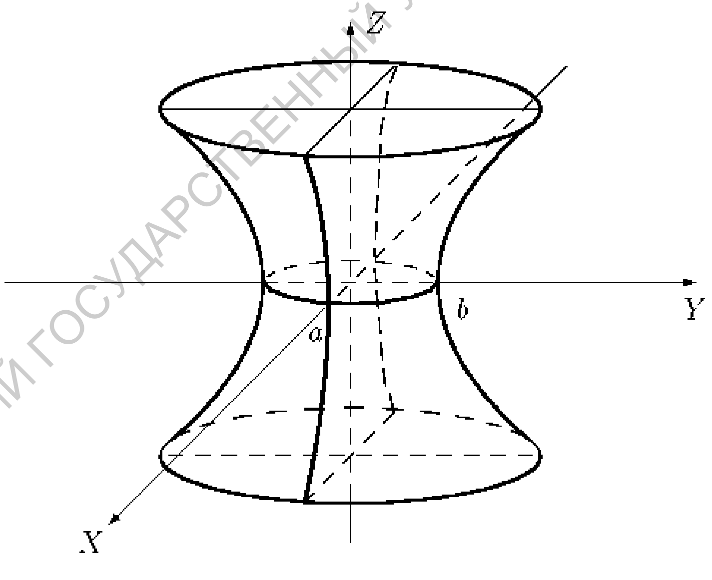
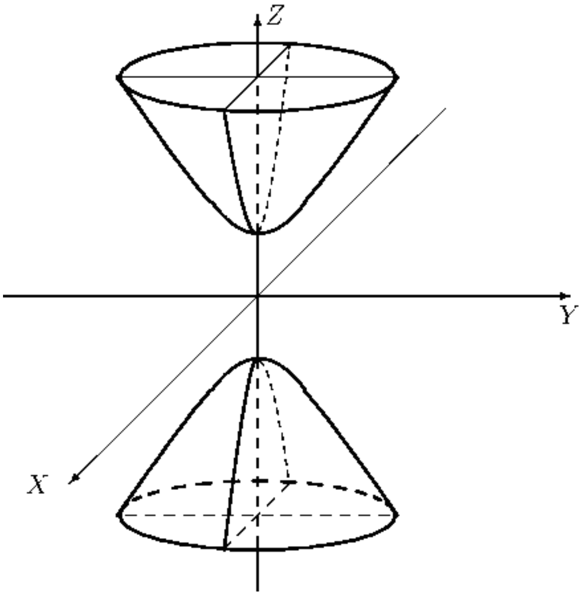


Рис. 1

3. Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



4. Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$

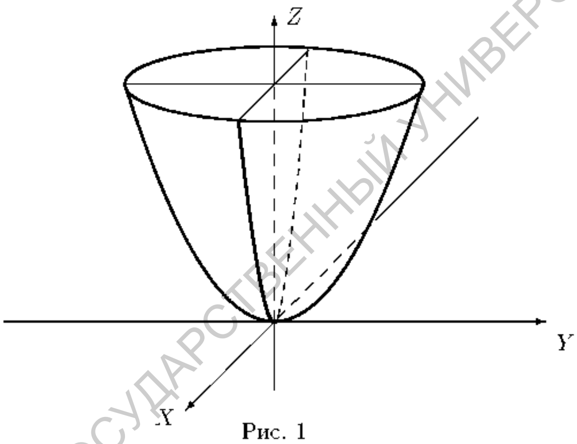
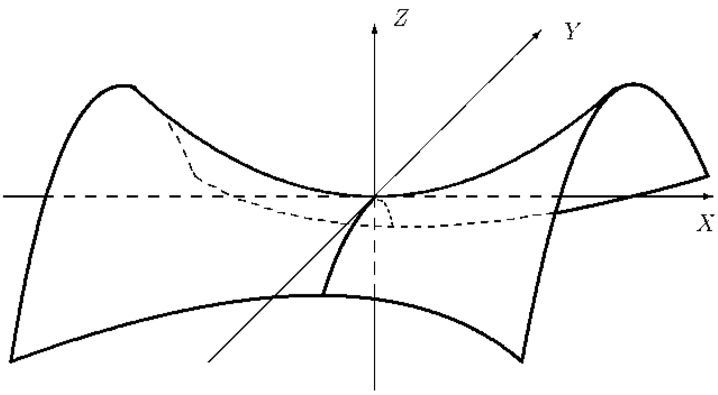
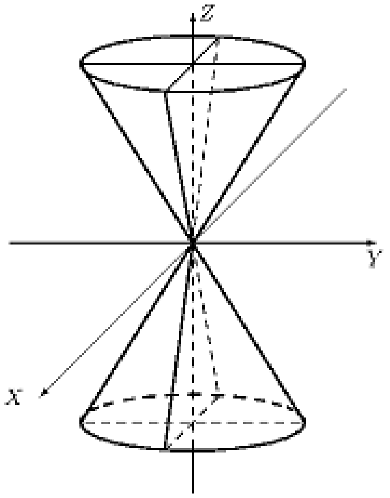


Рис. 1

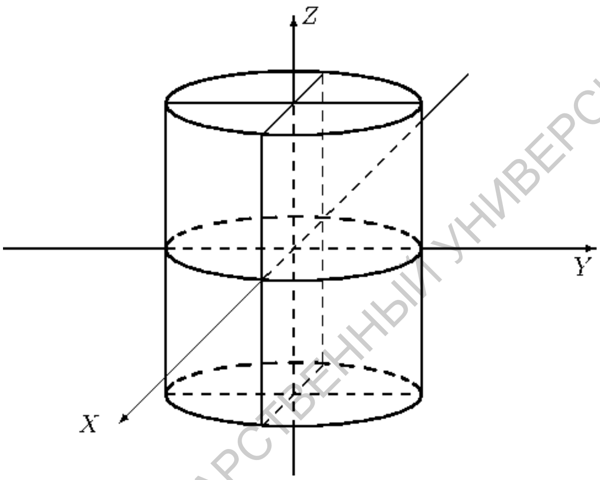
5. Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$



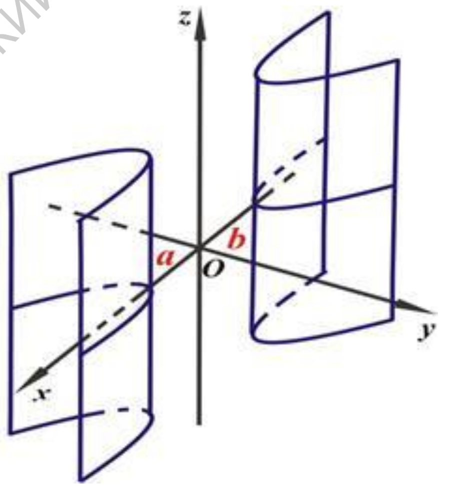
6. Конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



7. Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



8. Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



9. Параболический цилиндр $y^2 = 2px$

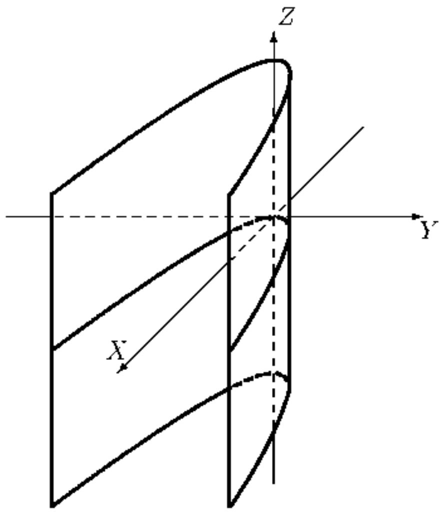


Рис. 3

В этих уравнениях $a, b, c, p, q > 0$.

8. Приведение общего уравнения фигуры второго порядка на плоскости к каноническому виду

Общее уравнение фигуры второго порядка на плоскости имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 . \qquad (1)$$

Обозначим $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$.

Преобразование коэффициентов уравнения при переходе к новой декартовой системе координат (коэффициенты уравнения в новой системе координат обозначены a'_{ij}):

1. <u>Перенос начала координат</u> осуществляется по формулам:

$$x' = x + x_0$$
$$y' = y + y_0$$

В результате переноса коэффициенты уравнения (1) преобразуются по формулам:

$a'_{11} = a_{11}$

$a'_{12} = a_{12}$

$a'_{22} = a_{22}$

(2)

$a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$

$a'_{13} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$

$a'_{33} = F(x_0, y_0)$,

где (x_0, y_0) - координаты полюса новой системы координат относительно старой системы координат.

2. Поворот осей координат осуществляется по формулам:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

В результате поворота коэффициенты уравнения (1) преобразуются по формулам:

$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha$

$a'_{12} = a_{11}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha$

$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha$ (3)

$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha$

$a'_{23} = a_{23}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha$

$a'_{33} = a_{33}$,

где α - угол поворота (угол между базисными векторами $\bar{i}$ и $\bar{i}'$ старой и новой систем координат)

Инварианты:

$$I = a_{11} + a_{22},\ \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Классификация фигур:

$\delta > 0$ **- эллиптический тип:** эллипс, точка, мнимый эллипс

$\delta < 0$ **- гиперболический тип:** гипербола, пара действительных пересекающихся прямых

$\delta = 0$ **- параболический тип:** парабола, пара параллельных прямых (действительных или мнимых)

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс (действительный или мнимый)	Точка
$\delta = 0$	Парабола	Параллельные прямые (действительные, мнимые, слившиеся)
$\delta < 0$	Гипербола	Действительные пересекающиеся прямые

Если $\delta \neq 0$, то фигура является *центральной* (имеет единственный центр симметрии),

если $\delta = 0$, фигура не является центральной.

Основные этапы упрощения уравнения фигуры

Вычислим второй инвариант и установим, является ли фигура центральной или нет.

►1. $\delta \neq 0$.

1.1 Преобразуем уравнение таким образом, чтобы в нем отсутствовали слагаемые, содержащие переменные x, y в первой степени. Другими словами, перенесем полюс декартовой системы координат в точку $O'(x_0, y_0)$ (центр симметрии) так, чтобы в новой системе координат коэффициенты a_{13}, a_{23} были равны нулю. Тогда из формул (2) следует, что координаты (x_0, y_0) являются решением системы:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Тогда в новой системе координат (O', x', y') уравнение фигуры будет иметь вид:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0,$$

где a'_{33} вычисляется по формулам (2).

1.2 Преобразуем уравнение таким образом, чтобы в нем отсутствовало слагаемое, содержащее произведение переменных x, y. Другими словами, повернем оси координат на такой угол α, чтобы в новой системе координат в уравнении коэффициент a_{12} был равен нулю. Полагая в системе (3) $a_{12}=0$, получим формулу для нахождения тангенса угла поворота:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(a_{22}-a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22}-a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}. \tag{5}$$

Решением (5) являются числа k_1 и k_2, такие, что $k_1 k_2 = -1$. Выберем одно из найденных решений. Зная тангенс угла, можно определить косинус и синус угла:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\ \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{6}$$

В новой системе координат (O', x'', y'') уравнение фигуры примет вид:

$$a''_{11} x''^2 + a''_{22} y''^2 + a''_{33} = 0,$$

где коэффициенты a''_{ii} вычисляются по формулам (3) (с заменой у индексов одного штриха на два штриха).

1.3 Если $a''_{33} \neq 0$, то перенесем это слагаемое в правую часть уравнения, а затем разделим на него (или его модуль) обе части уравнения.

<u>Пример 1</u>

Уравнение фигуры второго порядка на плоскости имеет вид:

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Приведем это уравнение к каноническому виду.

Выпишем коэффициенты уравнения:

$a_{11} = 0$ $\qquad$ $a_{13} = -6$

$a_{12} = 3$ $\qquad a_{23} = -13$

$a_{22} = 8$ $\qquad a_{33} = 11$

Вычислим второй инвариант $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9 < 0$, следовательно, эта фигура является фигурой гиперболического типа.

1. Так как $\delta \neq 0$, упрощение начнем с переноса начала координат.

Составим систему для нахождения (x_0, y_0) (см. (4)):

$$\begin{cases} 3y - 6 = 0 \\ 3x + 8y - 13 = 0 \end{cases}.$$

Ее решение - $x_0 = -1, y_0 = 2$. Вычисляем коэффициент (см.(2)) $a'_{33} = -9$.

В новой системе координат уравнение запишется в виде

$$6x'y' + 8y'^2 - 9 = 0.$$

2. Осуществим поворот осей координат. Для этого найдем тангенс угла поворота по формуле (5). Получим два значения $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = 3$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{1}{3}$. Для k_1 по формулам (6) находим $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Вычислим коэффициенты a''_{11}, a''_{22} по формулам (3): $a''_{11} = 9, a''_{22} = -1$.

Тогда уравнение в новой системе координат примет вид:

$$9x''^2 - y''^2 - 9 = 0.$$

Преобразуем уравнение: перенесем свободный член в правую часть и разделим на него. Получим: $\frac{x''^2}{1} - \frac{y''^2}{9} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.▪

►2. $\delta = 0$.

Так как фигура не является центральной, упрощение начнем с поворота осей координат. По формулам (5), (6) определяем тригонометрические функции угла, а затем по формулам (3) находим коэффициенты уравнения в новой системе координат. Обратить внимание на то, что один из коэффициентов a'_{11} или a'_{22} обязательно должен обратиться в нуль! Уравнение примет вид:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \qquad (7)$$

$$\text{или } a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \qquad (8)$$

В случае (7) выделяем полный квадрат при x':

$$a'_{11}(x'^2 + 2\frac{a'_{13}}{a'_{11}}x') + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33} - \frac{a'^{\,2}_{13}}{a'_{11}} = 0. \qquad (9)$$

Если $a'_{23} \neq 0$, то перепишем уравнение в виде

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + 2a'_{23}\left(y' + a'_{33}\frac{1}{2a'_{23}} - \frac{a'^{\,2}_{13}}{2a'_{11}a'_{23}}\right) = 0$$

и сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}} \\ y'' &= y' + a'_{33}\frac{1}{2a'_{23}} - \frac{a'^{\,2}_{13}}{2a'_{11}a'_{23}} \end{aligned}.$$

В новой системе координат уравнение запишется в виде:

$$a'_{11}x''^2 + 2a'_{23}y''^2 = 0.$$

Если $a'_{23} = 0$, то уравнение (9) имеет вид:

$$a'_{11}x'^2+2a'_{13}x'+a'_{33}=0 \Leftrightarrow a'_{11}\left(x'+\frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2=c.$$

Сделаем замену переменных $x''=x'+\dfrac{a'_{13}}{a'_{11}}, y''=y'$.

Тогда имеем $x''^2=\dfrac{c}{a'_{11}}$ или $x''^2=d$

В случае (8) проводятся аналогичные рассуждения.

<u>Пример 2</u>

Уравнение фигуры второго порядка на плоскости имеет вид:

$$x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0.$$

Приведем это уравнение к каноническому виду.

Выпишем коэффициенты уравнения:

$a_{11}=1$ $\quad a_{13}=2$

$a_{12}=-2$ $\quad a_{23}=-3/2$

$a_{22}=4$ $\quad a_{33}=-7$

Вычислим второй инвариант $\delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=0$, следовательно, эта фигура является фигурой параболического типа.

1. Упрощения начнем с поворота осей координат. Для этого найдем тангенс угла поворота по формуле (5). Получим два значения $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1=\dfrac{1}{2}$, $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2=-2$. Для k_1 по формулам (6) находим $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Вычислим коэффициенты $a'_{11},a'_{22},a'_{13},a'_{23}$ по формулам (3):

$a'_{11} = 0(!), a'_{22} = 5, a'_{13} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}, a'_{23} = -\sqrt{5}$. Таким образом, уравнение запишется в виде:

$5y'^2 + \sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' - 7 = 0$.

2. Преобразуем полученное уравнение следующим образом: сгруппируем слагаемые, содержащие переменную y', выделим полный квадрат, сгруппируем слагаемые, не содержащие y', вынося за скобку коэффициент при x':

$$5(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y') + \sqrt{5}x' - 7 = 0 \text{ или } 5(y'^2 - \sqrt{5})^2 + \sqrt{5}(x' - 7/5 - 5\sqrt{5}) = 0.$$

Перейдем к новым переменным по формулам:

$x'' = x' - 7/5 - 5\sqrt{5}$

$y'' = y' - \sqrt{5}$.

Тогда уравнение в новой системе координат примет вид: $5y''^2 - \sqrt{5}x'' = 0$ или окончательно получим: $y''^2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x''$ - каноническое уравнение параболы.▪

Самостоятельная работа №1 по теме

"Основные формулы аналитической геометрии"

N *– номер варианта (совпадает с номером в списке группы)*

1. На плоскости относительно декартовой системы координат даны координаты трех точек:

при N - четном: $A\left(\frac{N+4}{2};1\right), B\left(\frac{N+10}{2};4\right), C\left(\frac{N+4}{2};7\right);$

при N – нечетном: $A\left(1;\frac{N+1}{2}\right),\ B\left(4;\frac{N+7}{2}\right),\ C\left(1;\frac{N+13}{2}\right).$

Найти:

1) координаты вектора $\overline{CA}$;
2) координаты точек M_1, M_2, M_3, делящих отрезки AB, BC, AC в отношениях $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1/2, \lambda_3 = -3$, соответственно;
3) координаты центра тяжести треугольника ABC;
4) длину отрезка AB;
5) площадь треугольника ABC;
6) угол B.

2. В пространстве относительно декартовой системы координат даны координаты четырех точек:

при N - четном : $A\left(0;\frac{N+4}{2};\frac{N+4}{2}\right), B\left(-3;\frac{N+8}{2};\frac{N}{2}\right), C\left(6;\frac{N+12}{2};\frac{N+4}{2}\right); D\left(3;\frac{N-6}{2};\frac{N-4}{2}\right);$

при N – нечетном: $A\left(\frac{N+3}{2};3;\frac{N-5}{2}\right), B\left(\frac{N-3}{2};5;\frac{N+1}{2}\right), C\left(\frac{N+15}{2};7;\frac{N+5}{2}\right); D\left(\frac{N+9}{2};-2;\frac{N-3}{2}\right)$.

Найти:

1) координаты точек M_1, M_2, делящих отрезки AB и AD в отношениях $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1/3$, соответственно;

2) координаты центра тяжести треугольника ABC;

3) направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

4) площадь треугольника ABC;

5) объем тетраэдра ABCD;

6) длину высоты тетраэдра, опущенной на грань ABC.

Самостоятельная работа №2 по теме

“Прямая на плоскости ”

***N** – номер варианта (совпадает с номером в списке группы)*

1. Относительно декартовой системы координат даны координаты вершин треугольника:

<u>при N - четном</u>: $A\left(\frac{N+8}{2};7\right), B\left(\frac{N-8}{2};1\right), C\left(\frac{N-2}{2};-3\right);$

<u>при N – нечетном</u>: $A\left(3;\frac{N+13}{2}\right),\ B\left(-5;\frac{N+1}{2}\right),\ C\left(-2;\frac{N-7}{2}\right).$

Составить уравнения:

1) трех его сторон;
2) медианы, проведенной из вершины C;
3) биссектрисы угла B;
4) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

2. Относительно декартовой системы координат даны координаты точки:

<u>при N - четном</u> : $A\left(\frac{N}{2};\frac{N+2}{2}\right);$

<u>при N – нечетном</u>: $A\left(\frac{N+3}{2};\frac{5-N}{2}\right).$

Найти:

1) угловой коэффициент прямой ℓ_1, проходящей через точку A параллельно вектору $\bar{a}(1;3)$;
2) уравнение прямой ℓ_2, проходящей через точку A под углом $\pi/4$ к прямой ℓ_1;
3) уравнение прямой ℓ_3, проходящей через точку A и отсекающей на осях координат равные отрезки;
4) косинус угла между прямыми ℓ_1 и ℓ_3;
5) уравнения прямых ℓ_4 и ℓ'_4, проходящих через начало координат параллельно прямой ℓ_2;
6) расстояние между прямыми ℓ_2 и ℓ_4;
7) координаты точки B пересечения прямых ℓ_3 и ℓ_4;
8) расстояние от точки B до прямой ℓ_1.

Самостоятельная работа №3 по теме

“Плоскость ”

N *– номер варианта (совпадает с номером в списке группы)*

1. Относительно декартовой системы координат даны координаты четырех точек:

<u>при N - четном</u>: $A\left(\frac{N+6}{2};-\frac{N}{2};\frac{N}{2}\right), B\left(\frac{N}{2};\frac{12-N}{2};\frac{N}{2}\right), C\left(\frac{N}{2};-\frac{N}{2};\frac{N-6}{2}\right); D\left(\frac{N}{2};-\frac{N}{2};\frac{N}{2}\right)$;

<u>при N – нечетном</u>: $A\left(\frac{N+3}{2};-1;\frac{N+1}{2}\right), B\left(\frac{N-3}{2};5;\frac{N+1}{2}\right), C\left(\frac{N-3}{2};-1;\frac{N-5}{2}\right); D\left(\frac{N-3}{2};-1;\frac{N+1}{2}\right)$.

Составить уравнения плоскостей:

1) π_1, проходящей через точки A,B,D;
2) π_2, проходящей через точки A,C,D;
3) π_3, проходящей через точки B,C,D;
4) π_4, проходящей через точки A,B,C;
5) π_5, проходящей через точки A и B параллельно оси Oz;
6) π_6, проходящей через ось Ox и точку M – центр тяжести треугольника ABC;
7) π_7, проходящей через точку M и отсекающей на осях координат равные отрезки;
8) π_8, зная, что точка M является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость;

9) π_9, проходящей через точку E, делящую отрезок AM пополам , параллельно плоскости π_8.

Найти:

1) особенности в расположении плоскостей π_1, π_2, π_3 относительно осей координат;
2) отрезки, отсекаемые плоскостью π_4 на осях координат;
3) косинус угла между плоскостями π_4 и π_5;
4) расстояние от точки M до плоскости π_5;
5) расстояние между плоскостями π_8 и π_9.

Самостоятельная работа №4 по теме

“Прямая в пространстве. Прямая и плоскость”

N *– номер варианта (совпадает с номером в списке группы)*

1. Относительно декартовой системы координат даны координаты точки A и координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

<u>при N - четном</u>: $A\left(2;\frac{N}{2};\frac{N-20}{2}\right), \bar{a}\left(-1;\frac{N-16}{2};2\right), \bar{b}\left(\frac{N-10}{2};1;-3\right);$

<u>при N – нечетном</u>: $A\left(\frac{N-15}{2};1;\frac{N-7}{2}\right), \bar{a}\left(2;\frac{N-9}{2};1\right), \bar{b}\left(-3;2;\frac{N-11}{2}\right).$

Составить:

1) каноническое уравнение прямой ℓ_1, проходящей через точку A параллельно вектору $\bar{a}$;

2) параметрические уравнения прямой ℓ_2, проходящей через точку A параллельно вектору $\bar{b}$;

3) каноническое уравнение прямой ℓ_3, проходящей через начало координат O и точку A; представить прямую ℓ_3 как линию пересечения двух плоскостей;

4) каноническое уравнение прямой ℓ_4, проходящей через точку E, делящую отрезок AO в отношении $\lambda = 1/3$, параллельно оси Oz;

5) каноническое уравнение прямой ℓ_5 - линии пересечения плоскостей π_1 и π_2, проходящих через точку A перпендикулярно векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, соответственно;

6) уравнение плоскости π_3, проходящей через прямые ℓ_1 и ℓ_3;

7) уравнение плоскости π_4, проходящей через точку E и прямую ℓ_2;

8) уравнение плоскости π_5, проходящей через точку E перпендикулярно прямой ℓ_5.

Проверить:

1) пересекаются ли прямые ℓ_1 и ℓ_4;

2) лежит ли прямая ℓ_1 в плоскости π_5.

Найти:

1) косинус угла между прямыми ℓ_1 и ℓ_2.

Самостоятельная работа №5 по теме

“Фигуры второго порядка ”

***N** – номер варианта (совпадает с номером в списке группы)*

1. В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, зная, что расстояние между фокусами равно $2c$, большая полуось равна a:

<u>при N - четном</u>: $c = \frac{N}{2}, a = \frac{N+2}{2};$

<u>при N – нечетном</u>: $c = \frac{N+1}{2}, a = \frac{N+5}{2}.$

Найти:

1) эксцентриситет эллипса;
2) уравнения директрис;
3) расстояние от правого фокуса до ближайшей директрисы.

2. В данной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, зная, что расстояние между фокусами равно $2c$, действительная полуось равна a:

<u>при N - четном</u>: $c = \frac{N+4}{2}, a = \frac{N}{2};$

<u>при N – нечетном</u>: $c = \frac{N+3}{2}, a = \frac{N+1}{2}.$

Найти:

1) эксцентриситет гиперболы;
2) уравнения директрис;

3) уравнения асимптот;
4) длину отрезка асимптоты гиперболы, заключенного между ее центром и директрисой;
5) расстояния от фокусов гиперболы до ее асимптот;
6) уравнение сопряженной гиперболы; ее эксцентриситет, уравнения директрис.

3. В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, зная, что расстояние от фокуса до директрисы равно N.

Найти:

1) координаты фокуса;
2) уравнение директрисы;
3) координаты точек пересечения параболы с окружностью $x^2 + y^2 = 3N^2$.

4. Составить уравнения и определить типы фигур, образованных вращением:

1) эллипса из задачи №1 вокруг а) оси Ox, б) оси Oy;
2) гиперболы из задачи №2 вокруг а) оси Ox, б) оси Oy;
3) сопряженной гиперболы из задачи №2 вокруг а) оси Ox, б) оси Oy;
4) асимптот гиперболы из задачи №2 вокруг а) оси Ox, б) оси Oy;
5) параболы из задачи №3 вокруг оси Ox.

Варианты проверочной работы

Вариант 1

1. Записать уравнение прямой на плоскости, проходящей через две данные точки.
2. Записать каноническое уравнение плоскости.
3. Вывести формулу расстояния между двумя точками.
4. Даны координаты трех точек $A(0;1), B(3,4), C(2;7)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Вариант 2

1. Записать каноническое уравнение прямой на плоскости.
2. Записать формулу для нахождения угла между двумя плоскостями.
3. Вывести формулу деления отрезка в данном отношении.
4. Даны координаты четырех точек $A(0;3;3), B(-3;5;1), C(6;7;3); D(3;-4;-2)$. Вычислить объем тетраэдра ABCD.

Вариант 3

1. Записать уравнение прямой в отрезках.
2. Записать уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
3. Вывести формулу для нахождения косинуса угла в треугольнике по известным координатам его вершин.

4. Даны координаты трех точек- вершин треугольника: $A(0;1), B(3,4), C(2;7)$. Вычислить косинус угла В.

Вариант 4

1. Записать формулу для вычисления угла между двумя прямыми.
2. Записать уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
3. Вывести формулу для нахождения площади треугольника.
4. Даны координаты трех точек – вершин треугольника: $A(0;3;3), B(-3;5;1), C(6;7;3)$. Вычислить косинус угла А.

Вариант 5

1. Записать формулы для нахождения координат вектора по известным координатам его начала и конца.
2. Записать уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
3. Вывести формулу для вычисления угла между двумя прямыми на плоскости.
4. Даны координаты трех точек $A(0;3;3), B(-3;5;1), C(6;7;3)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти точки.

Вариант 6

1. Записать параметрические уравнения прямой на плоскости.

2. Записать формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости.
3. Вывести формулу для вычисления объема тетраэдра.
4. Даны координаты трех точек- вершин треугольника: $A(0;1), B(3,4), C(2;7)$. Записать уравнения его сторон.

Вариант 7

1. Записать формулу для вычисления расстояния между двумя точками.
2. Записать условие перпендикулярности двух плоскостей.
3. Вывести формулу для нахождения расстояния от точки до прямой на плоскости.
4. Даны координаты трех точек- вершин треугольника: $A(0;1), B(3,4), C(2;7)$. Найти длины его сторон.

Вариант 8

1. Записать формулы деления отрезка в данном отношении.
2. Записать условие перпендикулярности двух прямых на плоскости.
3. Доказать основную теорему о прямой на плоскости.
4. Даны координаты трех точек $A(0;3;3), B(-3;5;1), C(6;7;3)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Вариант 9

1. Записать формулу для вычисления площади треугольника по известным координатам его вершин.
2. Сформулировать основную теорему о плоскости.
3. Вывести каноническое уравнение прямой на плоскости.
4. Даны координаты трех точек $A(0;3), B(-3;5), C(6;7)$. Найти расстояние от точки А до прямой ВС.

Вариант 10

1. Записать формулу для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости.
2. Записать каноническое уравнение плоскости.
3. Вывести формулу для вычисления косинуса угла между двумя прямыми на плоскости.
4. Даны координаты трех точек – вершин треугольника: $A(0;1), B(3,4), C(2;7)$. Записать уравнение медианы, проведенной из точки В.

Вариант 11

1. Записать условие параллельности прямой и плоскости.
2. Записать канонические уравнения прямой в пространстве.
3. Вывести формулу деления отрезка в данном отношении.
4. Даны координаты четырех точек $A(0;3;3), B(-3;5;1), C(6;7;3); D(3;-4;-2)$. Вычислить расстояние от точки А до плоскости треугольника BCD.

Вариант 12

1. Записать уравнение плоскости в отрезках.
2. Записать уравнение прямой на плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
3. Вывести формулу для нахождения косинуса угла в треугольнике по известным координатам его вершин.
4. Даны координаты трех точек- вершин треугольника: $A(0;1), B(3,4), C(2;7)$. Вычислить площадь треугольника АВС.

Вариант 13

1. Записать условия параллельности и пересечения двух прямых на плоскости.
2. Записать уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
3. Доказать основную теорему о прямой на плоскости.
4. Даны координаты трех точек – вершин треугольника: $A(0;3;3), B(-3;5;1), C(6;7;3)$. Вычислить косинус угла В.

Вариант 14

1. Записать формулы для нахождения координат вектора по известным координатам его начала и конца.

2. Записать уравнение прямой на плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
3. Вывести формулу для вычисления угла между двумя прямыми.
4. Даны координаты трех точек $A(0;3;3), B(-3;5;1), C(6;7;3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А параллельно вектору $\overrightarrow{BC}$.

Примерные варианты контрольной работы

Вариант № 1

1. На оси Oy найти точку, отстоящую от плоскости $x+2y-2z-2=0$ на расстоянии $d=4$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;3;4)$ и перпендикулярной прямым $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{3}$.

3. Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между директрисами.

Вариант № 2

1. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $x-2y+2z+5=0$ и удаленной от точки $M(3;4;-2)$ на расстояние $d=5$.

2. В уравнении прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{n}=\frac{z}{3}$ найти параметр n, при котором эта прямая пересекается с прямой $\frac{x}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{1}$. Найти координаты точки их пересечения.

3. Через фокус эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$ проведен перпендикуляр к его большой оси. Определить расстояния от точек пересечения этого перпендикуляра с эллипсом до фокусов.

Вариант № 3

1. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x-2y+4z-5=0$ и отсекающей на координатных осях Ox, Oy отрезки $a=-2, b=\frac{2}{3}$.

2. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба с ребром, равным 1, и непересекающей ее диагональю грани.

3. Составить каноническое уравнение эллипса, если даны точка эллипса $M_1(2;-\frac{5}{3})$ и его эксцентриситет $e=2/3$.

Литература

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва: Лань, 2009.
2. Беклемишев Д. В.. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
3. Ильин В.А. Аналитическая геометрия. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006.
4. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2010.
5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2005.