Министерство образования и науки Российской Федерации
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.
Энгельсский технологический институт

В.В.Новиков, А.В.Серебряков, Ю.Н.Нагар

ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

Энгельс 2016 г.

УДК 517.3
ББК 22.1
Н73

Н73 Новиков В.В. Основы интегрального исчисления: Учебное пособие / В.В. Новиков, А.В. Серебряков, Ю.Н. Нагар. – Энгельс: Изд-во ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., 2016. – 64 с. ISBN

Рецензенты: кафедра теории функций и приближений Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского;
главный научный сотрудник Института проблем точной механики и управления РАН, д.ф.-м.н., проф. Ольшанский В.Ю.

Учебное пособие рекомендуется студентам технических вузов и классических университетов.

УДК 517.3
ББК 22.1

Одобрено редакционно-издательским советом
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Учебное пособие издается в авторской редакции

ISBN 978-5-9905521-0-4

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1.1. *Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, если для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x).$$

В дальнейшем мы не будем каждый раз указывать, на каком именно интервале рассматривается первообразная, так как это обычно видно из контекста. Например, говоря, что x^2 есть первообразная функции $2x$, подразумеваем, что $x \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема 1.1 (Общий вид первообразной). *Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также будет первообразной для $f(x)$. Любая первообразная $G(x)$ функции $f(x)$, отличная от $F(x)$, может быть записана в виде*

$$G(x) = F(x) + C_0,$$

где C_0 – некоторая постоянная.

Из теоремы 1 следует, что любые две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ одной и той же функции $f(x)$ могут отличаться только на постоянное слагаемое. График любой первообразной можно получить параллельным переносом вдоль оси OY графика какой-либо фиксированной первообразной $y = F(x)$.

Определение 1.2. *Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается*

$$\int f(x)dx.$$

При этом $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, x – переменной интегрирования, а произведение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*.

В силу теоремы 1 неопределенный интеграл от функции $f(x)$ можно представить в виде

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – какая-либо фиксированная первообразная, а C – произвольная постоянная. Отметим, что в некоторых случаях (например, при решении дифференциальных уравнений) символом $\int f(x)dx$ принято обозначать произвольную фиксированную первообразную функции $f(x)$, а не всю совокупность этих первообразных. В настоящем же пособии мы всегда будем понимать термин «неопределенный интеграл» и обозначение $\int f(x)dx$ в смысле определения 1.2.

1.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная;

4) если существуют первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует и первообразная функций $f(x) \pm g(x)$, $Af(x)$, $A \in \mathbb{R}$, причем

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad A \neq 0.$$

З а м е ч а н и е 1.1. Формулы 1)-3) показывают, что операции дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными. Будучи последовательно примененными к одной и той же функции они «взаимно уничтожаются».

З а м е ч а н и е 1.2. Из курса дифференциального исчисления известно, что не у всякой функции $f(x)$ существует производная $f'(x)$. Например, функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$. Подобным образом, не у всякой функции $f(x)$ на данном интервале (a,b) существует первообразная $F(x)$. Убедимся в этом на следующем примере.

П р и м е р 1.1. Докажем, что функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

не имеет первообразной на любом интервале (a,b), содержащем точку $x_0 = 0$. Очевидно, что на интервале $(a,0)$ всякая первообразная $F(x)$ этой функции запишется в виде $F(x) = -x + C_1$, а на интервале $(0,b)$ – в виде $F(x) = x + C_2$, где C_1, C_2 – некоторые постоянные. При $C_1 \neq C_2$, как бы мы не определяли функцию $F(x)$ в точке 0, она будет разрывной в этой точке. Производная $F'(0)$ в точке разрыва, разумеется, не существует, а по условию должно быть $F'(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$. Если же $C_1 = C_2$, то, полагая $F(0) = 0$, мы получим непрерывную на (a,b) функцию $F(x)=|x|+C_1$, которая, тем не менее, также не имеет производной в точке 0. Таким образом, при любом выборе констант C_1 и C_2 функция $F(x)$ не имеет производной в точке 0, и поэтому не может быть первообразной на (a,b) ни для какой функции.

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Следующие формулы получаются непосредственно из таблицы производных простейших элементарных функций.

1) $\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1;$ 2) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \ x \neq 0;$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \ 0 < a \neq 1;$ в частности, $\int e^x dx = e^x + C;$

4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$ 5) $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \ x \neq \pi n, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

8) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$

9) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \quad -1 < x < 1.$

В простейших случаях искомый интеграл удается свести к набору табличных интегралов путем тождественных преобразований с последующим применением свойств 1)-4).

Пример 1.2.

$$\int (2+3x)^2 dx = \int \left(4 + 12x + 9x^2\right) dx = 4\int dx + 12\int x dx + 9\int x^2 dx =$$
$$= 4x + 6x^2 + 3x^3 + C.$$

Пример 1.3.

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

П р и м е р 1.4.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

З а м е ч а н и е 1.3. Из курса дифференциального исчисления известно, что производная любой элементарной функции снова является элементарной функцией. Иная ситуация с операцией интегрирования. Можно доказать, что первообразные некоторых элементарных функций уже не будут элементарными функциями. В таких случаях говорят о «неберущихся интегралах». Важнейшими примерами таких интегралов являются следующие:

1) $\int e^{-x^2}dx$; 2) $\int \cos\left(x^2\right)dx$; 3) $\int \sin\left(x^2\right)dx$;

4) $\int \frac{dx}{\ln x}$ $\left(0 < x \neq 1\right)$; 5) $\int \frac{\cos x}{x}dx$ $\left(x \neq 0\right)$; 6) $\int \frac{\sin x}{x}dx$ $\left(x \neq 0\right)$.

Первый из этих интегралов называется интегралом Эйлера-Пуассона (Леонард Эйлер – швейцарский математик, 1707-1783; Симеон Дени Пуассон – французский математик, 1781-1840) и широко используется в теории вероятностей, математической статистике и ряде прикладных дисциплин. Интегралы 2), 3) названы в честь французского физика Огюстена Френеля (1788-1827), впервые применившего их при расчетах в волновой оптике. Наконец, последние три интеграла носят названия, соответственно, интегральных логарифма, косинуса и синуса и находят применение в теории чисел и математическом анализе.

1.4. Интегрирование с помощью замены переменной

Данный метод основан на следующем утверждении.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть функция* $x = g(t)$ *определена и дифференцируема на интервале T и интервал X есть множество ее значений. Пусть, далее, функция* $y = f(x)$ *определена на X и на этом интервале у нее существует первообразная* $F(x)$. *Тогда на интервале T функция* $f[g(t)]g'(t)$ *имеет первообразную, которая равна* $F[g(t)]$, *так что*

$$\int f[g(t)]g'(t)dt = F[g(t)] + C. \qquad (1.1)$$

Учитывая, что $\int f(x)dx = F(x) + C$, формулу (1.1) можно переписать в виде

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt, \;\; x = g(t). \qquad (1.2)$$

Пример 1.5. Найти неопределенный интеграл $\int \sin^5 x \cos x dx.$ Сделаем замену переменной $y = \sin x.$ Тогда $dy = \cos x dx$, откуда

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int y^5 dy = \frac{y^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

Отметим, что на практике в подобных простейших случаях, когда замена очевидна, промежуточную переменную не вводят, а сразу записывают заменяемую функцию под знаком дифференциала (т.н. метод «подведения под дифференциал»).

Пример 1.6. Найти неопределенный интеграл $\int xe^{-x^2}dx$. Здесь за новую переменную необходимо взять выражение $-x^2$, которое и следует «подвести под дифференциал». Учитывая, что $d\left(-x^2\right) = -2xdx$ можно записать $xdx = -\frac{1}{2}d\left(-x^2\right)$. Теперь находим

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Рассмотрим еще несколько аналогичных примеров.

Пример 1.7.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2+3x^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{d(2+3x^2)}{\sqrt{2+3x^2}} = \frac{1}{6}\int (2+3x^2)^{-\frac{1}{2}}d(2+3x^2) = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot(2+3x^2)^{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{2+3x^2} + C.$$

Пример 1.8.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

Все рассмотренные выше примеры решены по следующей схеме: мы брали часть подынтегрального выражения и обращались с ней как с некоторой новой переменной, «выполняли замену». В результате получали легко берущийся интеграл. Существуют, однако, примеры, в которых, наоборот, вместо исходной переменной интегрирования следует подставить некое новое выражение. Полученный таким образом интеграл оказывается проще исходного. Такой прием иногда называют «подстановкой». Следует подчеркнуть, что с содержательной точки зрения «подстановка» и «замена переменной» – это одно и то же. Проиллюстрируем сказанное примером.

Пример 1.9. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{1-x^2}dx$. Применим здесь подстановку $x = \sin t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx = d(\sin t) = \cos t dt$. Пересчитывая интеграл к новой переменной, будем иметь (пояснения ниже)

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int |\cos t|\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int \cos 2t\, d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C.$$

В ходе вычислений мы учли, что $\cos t > 0$ при $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, поэтому знак модуля у косинуса можно опустить. Кроме того, мы использовали тригонометрические формулы понижения степени $\cos^2 t = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2t)$ и двойного угла $\sin 2t = 2\sin t\cos t$.

1.5. Метод интегрирования по частям

Теорема 1.3. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на интервале X и на этом интервале существует первообразная функции $u'(x)v(x)$. Тогда на X существует также и первообразная функции $u(x)v'(x)$, причем справедливо равенство*

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Это равенство называется формулой интегрирования по частям. С учетом того, что $u'(x)dx = du$, $v'(x)dx = dv$, ее можно переписать в виде

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1.3)$$

Использование формулы интегрирования по частям проследим на примерах.

Пример 1.10. Найти неопределенный интеграл $\int x\cos x dx$. Применяем формулу (1.3). Для этого положим $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тогда $du = dx$, $v = \sin x$. Подставляя последние выражения в (1.3), будем иметь

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Пример 1.11. Найти неопределенный интеграл $\int x^2 e^x dx$. Так как x входит в подынтегральную функцию в квадрате, интегрировать по частям придется дважды. Сначала полагаем $u = x^2$, $dv = e^x dx$, откуда $du = 2xdx$, $v = e^x$. Получаем

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx. \tag{1.4}$$

К последнему интегралу снова применяем формулу (1.3), положив $u = x$, $dv = e^x dx$. Имеем

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.4), окончательно находим

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x + C\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Аналогично вычисляются интегралы от выражений вида $x^n \cos x$, $x^n \sin x$, $x^n e^x$ и т. п., где n - натуральное число.

Пример 1.12. Найти неопределенный интеграл $\int \ln x dx$. Полагая $u = \ln x$, $dv = dx$, будем иметь

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int xd\left(\ln x\right) = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Пример 1.13. Найти неопределенный интеграл $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. Полагая $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, находим

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x\operatorname{arctg} x - \int xd\left(\operatorname{arctg} x\right) = x\operatorname{arctg} x - \int x\frac{dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Пример 1.14. Найти неопределенный интеграл $I = \int e^{ax}\cos bx\, dx$.

Полагая $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\, dx$, находим $du = ae^{ax}$, $v = \dfrac{\sin bx}{b}$, так что

$$I = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\, dx.$$

Вычислим последний интеграл, полагая теперь $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\, dx$. Имеем, $du = ae^{ax}$, $v = -\dfrac{\cos bx}{b}$,

$$I=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{e^{ax}\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.\right)=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}+\frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}I.$$

Таким образом, дважды применив формулу интегрирования по частям, мы получили уравнение первой степени относительно неизвестного интеграла I. Решая это уравнение, окончательно получим

$$I=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$$

Аналогично вычисляются интегралы вида $e^{ax}\sin bx$, $\sin(\ln x)$, $\cos(\ln x)$.

П р и м е р 1.15. Найти неопределенный интеграл

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n},\quad n=1,2,...,\quad a>0.$$

При $n=1$ получим интеграл, почти совпадающий с табличным

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Получим теперь формулу, сводящую вычисление интеграла I_n к вычислению интеграла I_{n-1} (такого типа формулы называются *рекуррентными*). Сначала преобразуем исходный интеграл I_n следующим образом

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}$$

и возьмем последний интеграл по частям, полагая $dv=\dfrac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, $u=x$.

Учитывая, что $v=\int\dfrac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^n}=-\dfrac{1}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}$, $du=dx$,

найдем

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}=-\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу для I_n, получим

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{x}{a^2(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2(2n-2)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}=$$

$$=\frac{x}{a^2(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}},$$

или $\quad I_n = \dfrac{x}{a^2(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}} - \dfrac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1}, \quad n = 2,3,...$

Применяя эту формулу последовательно $n-1$ раз, можно свести интеграл I_n к известному интегралу I_1.

1.6. Интегрирование рациональных дробей

Важным классом функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции, являются *рациональные дроби* или *рациональные функции.* Для их изучения нам понадобятся некоторые сведения из теории алгебраических многочленов.

Определение 1.3. *Алгебраическим многочленом или полиномом степени n (n – целое неотрицательное) называется функция вида*

$$P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + a_0, \qquad c_n \neq 0.$$

Числа $c_0, c_1, ..., c_n$ называют коэффициентами многочлена, c_n – его старшим коэффициентом, c_0 – свободным членом. Степень многочлена принято обозначать символом $\deg P_n$. Из определения следует, что многочлен нулевой степени – это любая отличная от нуля константа, $P_0(x) \equiv C,\ C \neq 0$, а многочлены первой и второй степени – соответственно линейная $P_1(x) = c_1 x + c_0$ и квадратичная функции $P_2(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$.

Замечание 1.4. Среди многочленов, имеющих вид тождественной постоянной, особое место занимает многочлен, тождественно равный нулю $\theta(x) \equiv 0$. В отличие от других многочленов-констант $P_0(x) \equiv C,\ C \neq 0$, степень которых равна нулю, степень многочлена $\theta(x)$ не определена. Дело в том, что если приписать $\theta(x)$ любую конечную степень, то будет нарушено одно из основных правил умножения многочленов: если $\deg P = k,\ \deg Q = n$, то

$$\deg PQ = k + n. \tag{1.6}$$

Действительно, $\deg \theta P = \deg \theta$, какова бы ни была степень многочлена P. Чтобы равенство (1.6) выполнялось, формально можно считать, что $\deg \theta = -\infty$.

Теорема 1.5 (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен P_n ненулевой степени имеет хотя бы один корень, т.е. существует число x_0 (вообще говоря, комплексное) такое, что $P_n(x_0) = 0$.*

Следствием этой теоремы является следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Пусть* $x_1, x_2, ..., x_m$ *– попарно различные корни многочлена* $P_n(x)$, $n > 1$, *имеющего вид* (1). *Тогда справедливо равенство*

$$P_n(x) = c_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} ... (x - x_m)^{k_m}, \tag{1.7}$$

где натуральные числа $k_1, k_2, ..., k_m$ *таковы, что* $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, *причем данное представление единственно.*

Числа $k_1, k_2, ..., k_m$ называются кратностями корней $x_1, x_2, ..., x_m$ соответственно. Из теоремы 1.6 следует, что, *всякий многочлен* $P_n(x)$, *степени* $n > 1$ *имеет ровно* n *корней, если считать каждый корень с учетом его кратности.*

Теорема 1.7. *Если комплексное число* $a = A + iB$ *является корнем кратности* k *многочлена* $P_n(x)$, $n > 1$, *с действительными коэффициентами, то сопряженное ему число* $\overline{a} = A - iB$ *также будет корнем многочлена* P_n *той же кратности* k.

Таким образом, для многочлена с действительными коэффициентами разложение (1.7) имеет вид

$$P_n(x) = c_n (x - x_1)^{k_1} ... (x - x_l)^{k_l} [(x - a_1)(x - \overline{a}_1)]^{m_1} ... [(x - a_s)(x - \overline{a}_s)]^{m_s},$$

где $x_1, x_2, ..., x_l$ – действительные корни, $a_j = A_j + iB_j$, $\overline{a}_j = A_j - iB_j$, $j = \overline{1, s}$, – пары сопряженных комплексных корней, $k_1, ..., k_l$, $m_1, ..., m_s$ – соответствующие кратности. Выполняя умножение внутри квадратных скобок, получим

$$(x - a_j)(x - \overline{a}_j) = (x - A_j - iB_j)(x - A_j + iB_j) = (x - A_j)^2 + B_j^2 = x^2 + p_j x + q_j,$$

где $p_j = -2A_j$, $q_j = A_j^2 + B_j^2$, $j = \overline{1, s}$. При этом очевидно, что квадратный трехчлен $x^2 + p_j x + q_j$ не имеет действительных корней, т.е. $p_j^2 < 4q_j$.

Итак, для многочлена с действительными коэффициентами разложение в произведение неприводимых действительных множителей выглядит следующим образом

$$P_n(x) = c_n (x - x_1)^{k_1} ... (x - x_l)^{k_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} ... (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s}, \tag{1.8}$$

где $k_1 + k_2 + ... + k_l + 2(m_1 + ... + m_s) = n$ и $p_j^2 < 4q_j$, $j = \overline{1, s}$.

Определение 1.4. *Рациональной функцией или рациональной дробью называется функция вида*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ *– многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если* $\deg P_n < \deg Q_m$ *и неправильной, если* $\deg P_n \ge \deg Q_m$.

Неправильную рациональную дробь $R(x)$ всегда можно представить в виде суммы правильной дроби и многочлена

$$R(x) = P_{n-m}(x) + \frac{F_k(x)}{Q_m(x)},\ k < m. \tag{1.9}$$

Многочлен $P_{n-m}(x)$ при этом называется *целой частью* рациональной дроби $R(x)$. Чтобы получить представление (1.9) достаточно выполнить деление «уголком» многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$.

Пример 1.16. Выделить целую часть рациональной дроби

$$R(x) = \frac{x^5 + 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Решение. Будем делить числитель на знаменатель до тех пор, пока степень остатка от деления не станет меньше степени знаменателя.

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + 2x + 1 & \underline{x^2 + 1} \\
\underline{x^5 + x^3} & x^3 - x \\
\quad -x^3 + 2x + 1 & \\
\quad \underline{-x^3 - x} & \\
\qquad\quad 3x + 1 &
\end{array}$$

Таким образом, $R(x) = x^3 - x + \dfrac{3x+1}{x^2+1}$.

Отметим, что старший коэффициент знаменателя рациональной дроби $Q_m(x)$ всегда можно считать равным единице, так как в противном случае всегда можно сократить дробь на этот коэффициент (он заведомо не равен нулю).

Оказывается, что для правильной рациональной дроби имеет место разложение в сумму так называемых *простейших* (или *элементарных*) дробей, в некотором смысле аналогичное разложению многочлена в произведение неприводимых линейных и квадратичных множителей вида (1.8).

Определение 1.5. *Простейшей рациональной дробью называется функция одного из следующих четырех типов*

$$1)\ \frac{A}{x-a}; \tag{1.10}$$

$$2)\ \frac{A}{(x-a)^\lambda};\ \lambda = 2,3,..., \tag{1.11}$$

$$3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ p^2 < 4q; \tag{1.12}$$

$$4)\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}},\ \lambda=2,3,...,\quad p^2<4q. \tag{1.13}$$

Теорема 1.8. *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– правильная рациональная дробь с действительными коэффициентами, знаменатель которой имеет вид*

$$Q_m(x)=(x-x_1)^{k_1}...(x-x_l)^{k_l}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}...\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s}, \tag{1.14}$$

где $k_1+k_2+...+k_l+2(m_1+...+m_s)=m$ *и* $p_j^2<4q_j$, $j=\overline{1,s}$. *Тогда справедливо следующее представление этой дроби в виде суммы простейших дробей*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-x_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-x_1)^{k_1}}+...+$$
$$+\frac{A_1^{(l)}}{x-x_l}+\frac{A_2^{(l)}}{(x-x_l)^2}+...+\frac{A_{k_l}^{(l)}}{(x-x_l)^{k_l}}+...+$$
$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+...+\frac{M_{m_1}^{(1)}x+N_{m_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}}+...+$$
$$+\frac{M_1^{(s)}x+N_1^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{M_2^{(s)}x+N_2^{(s)}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^2}+...+\frac{M_{m_s}^{(s)}x+N_{m_s}^{(s)}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s}}. \tag{1.15}$$

Здесь $A_\nu^{(\mu)}$, $M_\alpha^{(\beta)}$, $N_\gamma^{(\delta)}$ *– некоторые постоянные числа (часть из них может быть равна нулю). Указанное представление единственно.*

Таким образом, интегрирование любой рациональной дроби сводится в силу (1.9) к интегрированию многочлена и нахождению интегралов от простейших дробей вида (1.10)-(1.13). Очевидно, что первообразная многочлена представляет собой многочлен степени на единицу выше и вычисляется непосредственно. Вычислим интегралы от простейших дробей.

$$1)\int\frac{A}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C; \tag{1.16}$$

$$2)\int\frac{A}{(x-a)^{\lambda}}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^{\lambda}}=-\frac{A}{(\lambda-1)(x-a)^{\lambda-1}}+C,\lambda\neq1; \tag{1.17}$$

$$3)\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C; \tag{1.18}$$

4) аналогично предыдущему пункту имеем

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda}=$$

$$=\frac{M}{2(1-\lambda)}\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^\lambda}=$$

$$=\frac{M}{2(1-\lambda)}\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda}=$$

$$=\frac{M}{2(1-\lambda)}\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_\lambda, \tag{1.19}$$

где $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, а интеграл I_λ вычисляется по выведенной ранее рекуррентной формуле.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.9. *Любая рациональная дробь интегрируема в элементарных функциях.*

Рассмотрим теперь практические приемы разложения рациональной функции в сумму простейших дробей. Наиболее универсальным является т.н. *метод неопределенных коэффициентов*. Идею метода разберем на примере.

П р и м е р 1.17. Разложить рациональную дробь $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ на простейшие. Согласно теореме 1.8 получим

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Mx+N)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{(A+M)x^2+(A+M+N)x+A+N}{(x+1)(x^2+x+1)}. \qquad (1.20)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A, M, N воспользуемся тем фактом, что два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие коэффициенты. Знаменатели исходной дроби и дроби (1.20) с неопределенными коэффициентами равны, поэтому равны должны быть также и их числители:

$$1 \equiv (A+M)x^2+(A+M+N)x+A+N.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$A+M=0, \quad A+M+N=0, \quad A+N=1,$$

решая которую, находим $A=1,\ M=-1,\ N=0$. Таким образом, требуемое разложение имеет вид

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^2+x+1}.$$

В рассмотренном примере задача свелась к системе трех уравнений очень простого вида. Если же знаменатель исходной дроби содержит достаточно много неприводимых множителей, метод неопределенных коэффициентов становится довольно громоздким. Рассмотрим еще один пример.

П р и м е р 1.18. Разложить рациональную дробь $\dfrac{x^3+1}{(x-2)(x-1)(x^2+1)}$ в сумму простейших. Снова по теореме 1.8 имеем

$$\frac{x^3+1}{(x-2)(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x-2)(x^2+1)+(Mx+N)(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{(A+B+M)x^3+(-A-3M-2B+N)x^2+(A+2M-3N+B)x+2N-A-2B}{(x-2)(x-1)(x^2+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получим систему (теперь уже четырех) линейных уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+B+M=1 \\ x^2 & -A-3M-2B+N=0 \\ x^1 & A+2M-3N+B=0 \\ x^0 & 2N-A-2B=1. \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A=\dfrac{9}{5}$, $B=-1$, $M=\dfrac{1}{5}$, $N=\dfrac{2}{5}$, откуда

$$\frac{x^3+1}{(x-2)(x-1)(x^2+1)}=\frac{9}{5(x-2)}-\frac{1}{x-1}+\frac{x+2}{5(x^2+1)}.$$

Как видим, метод неопределенных коэффициентов может приводить к громоздким выкладкам уже в случае, когда коэффициентов всего четыре. Покажем, как можно было найти коэффициенты, не прибегая к полному решению системы. Рассмотрим тождество для числителей

$$x^3+1\equiv A(x-1)(x^2+1)+B(x-2)(x^2+1)+(Mx+N)(x-2)(x-1). \quad (1.21)$$

Полагая последовательно в (1.21)

1) $x=1$, получаем $1^3+1=B(1-2)(1^2+1)$, откуда $B=-1$;

2) $x=2$, получаем $2^3+1=A(2-1)(2^2+1)$, откуда $A=\dfrac{9}{5}$;

3) $x=0$, получаем $1=-A-2B+2N$, откуда $1=-\dfrac{9}{5}-2\cdot(-1)+2N$, $N=\dfrac{2}{5}$;

4) приравняв коэффициенты при x^3, получим $1=A+B+M$, $1=\dfrac{9}{5}-1+M$,

откуда $M=\dfrac{1}{5}$.

Следующий метод позволяет легко находить часть неопределенных коэффициентов, соответствующих действительным корням знаменателя. Пусть a – действительный корень кратности k знаменателя рациональной дроби $R(x)$. Тогда в разложении (1.15) этому корню будет соответствовать группа слагаемых вида

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \quad (1.22)$$

Обозначим сумму всех слагаемых из правой части (1.15), не входящих в (1.22) через $\tilde{R}(x)$, тогда равенство (1.15) примет вид

$$R(x)=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\tilde{R}(x). \quad (1.23)$$

Умножая обе части (1.23) на $(x-a)^k$, получим

$$(x-a)^k R(x)= \\ =(x-a)^{k-1}A_1+(x-a)^{k-2}A_2+\ldots+(x-a)A_{k-1}+A_k+(x-a)^k\tilde{R}(x). \qquad (1.24)$$

Очевидно, что выражение $(x-a)^k R(x)$ формально получается из $R(x)$ вычеркиванием скобки $(x-a)^k$ в знаменателе дроби $R(x)$. Если положить в равенстве (1.24) $x=a$, все слагаемые в его правой части, кроме A_k, обратятся в нуль

$$\left.(x-a)^k R(x)\right|_{x=a}=A_k.$$

Итак, мы обосновали к т.н. метод вычеркивания: *чтобы получить коэффициент при* $(x-a)^{-k}$, *где* k *– кратность корня* a, *следует в знаменателе исходной дроби* $R(x)$ *вычеркнуть скобку* $(x-a)^k$ *и в оставшемся выражении положить* $x=a$.

Данный метод особенно удобен, когда знаменатель дроби $R(x)$ представляет собой произведение линейных множителей в первой степени.

Пример 1.19. Разложить рациональную дробь $\dfrac{x^2+x-3}{(x-2)(x+1)(x+4)}$ в сумму простейших. Разложение этой дроби на простейшие с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$\frac{x^2+x-3}{(x-2)(x+1)(x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+4}.$$

В соответствии с методом вычеркивания находим

$$\left.\frac{x^2+x-3}{(x+1)(x+4)}\right|_{x=2}=A,\ A=\frac{2^2+2-3}{(2+1)(2+4)}=\frac{1}{6},$$

$$\left.\frac{x^2+x-3}{(x-2)(x+4)}\right|_{x=-1}=B,\ B=\frac{(-1)^2+(-1)-3}{(-1-2)(-1+4)}=\frac{1}{3},$$

$$\left.\frac{x^2+x-3}{(x-2)(x+1)}\right|_{x=-4}=C,\ C=\frac{(-4)^2+(-4)-3}{(-4-2)(-4+1)}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\dfrac{x^2+x-3}{(x-2)(x+1)(x+4)}=\dfrac{1}{6(x-2)}+\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{1}{2(x+4)}$.

В заключение раздела рассмотрим пример на интегрирование рациональной функции.

Пример 1.20. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2(x^2+4x+5)}dx$.

Так как подынтегральная функция – правильная рациональная дробь, сразу ищем ее разложение в сумму простейших дробей

$$\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2\left(x^2+4x+5\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+4x+5}=$$
$$=\frac{A(x+1)\left(x^2+4x+5\right)+B\left(x^2+4x+5\right)+(Mx+N)(x+1)^2}{(x+1)^2\left(x^2+4x+5\right)}$$

Полагая в тождестве

$$x^3+x+1\equiv A(x+1)\left(x^2+4x+5\right)+B\left(x^2+4x+5\right)+(Mx+N)(x+1)^2 \tag{1.25}$$

$x=-1$, находим $B=-\dfrac{1}{2}$. Полагая в (1.25) последовательно $x=0$, $x=1$, а затем приравнивая коэффициенты при x^3, приходим к системе уравнений

$$1=5A-\frac{5}{2}+N,\quad 3=20A-5+4M+4N,\quad 1=A+M \tag{1.26}$$

Выразив N и M через A из первого и третьего уравнений и подставив во второе, найдем сначала $A=\dfrac{5}{2}$, а затем и остальные коэффициенты, $M=-\dfrac{3}{2}$, $N=-9$. Заметим, что система (1.26) значительно проще той, которая получилась бы при использовании стандартного метода неопределенных коэффициентов. Итак,

$$\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2\left(x^2+4x+5\right)}=\frac{5}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x+6}{x^2+4x+5}. \tag{1.27}$$

Интегрируя (1.27), находим

$$\int\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2\left(x^2+4x+5\right)}dx=\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{x+6}{x^2+4x+5}dx=$$
$$=\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{4}\int\frac{(2x+4)+8}{x^2+4x+5}dx=\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}-$$
$$-\frac{3}{4}\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+5}-6\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{4}\int\frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5}-$$
$$-6\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{4}\ln\left(x^2+4x+5\right)-6\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

1.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Определение 1.6. *Многочленом степени* n *от двух переменных* x *и* y *называется выражение вида*

$$P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots + a_{0n}y^n,$$

где $a_{00}, a_{10}, \ldots, a_{0n}$ *– постоянные числа, называемые коэффициентами многочлена, причем среди коэффициентов* $a_{n0}, a_{n-1,1}, a_{n-2,2}, \ldots, a_{0n}$ *хотя бы один отличен от нуля.*

Определение 1.7. *Рациональной функцией от двух переменных* x *и* y *называется выражение вида*

$$R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)},$$

где числитель и знаменатель – некоторые многочлены от двух переменных степени n *и* m *соответственно.*

Рассмотрим основные типы иррациональностей, которые надлежащей заменой переменной приводятся к интегралу от рациональной дроби («рационализируются»). Условимся всюду в дальнейшем через $R(x, y)$ обозначать произвольную рациональную функцию от двух переменных.

1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей. Так называют функции вида $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где a, b, c, d – постоянные числа такие, что $ad - bc \neq 0$. Последнее условие нужно, чтобы дробь $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ не обращалась в константу. Интеграл от функции указанного вида всегда рационализируется подстановкой $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Пример 1.21. Вычислить интеграл $\int \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \dfrac{dx}{1-x}$.

Выполним замену переменной $t = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$. Тогда

$$x = \frac{1-t^3}{1+t^3},\ dx = -\frac{6t^2 dt}{\left(1+t^3\right)^2},\ 1 - x = 1 - \frac{1-t^3}{1+t^3} = \frac{2t^3}{1+t^3}.$$

Пересчитав интеграл к новой переменной, найдем

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1-x} = -\int t \cdot \frac{6t^2}{\left(1+t^3\right)^2} \cdot \frac{1+t^3}{2t^3} dt = -3\int \frac{dt}{1+t^3}.$$

Последний интеграл вычислим, используя рассмотренные выше методы интегрирования рациональных функций. Для этого разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей (например, методом неопределенных коэффициентов), а затем проинтегрируем. Имеем

$$\int \frac{1}{t^3+1}dx = \int \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}dx = \int\left(\frac{1}{3(t+1)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{t-2}{t^2-t+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{t+1} - \frac{1}{3}\int\frac{t-2}{t^2-t+1}dx = \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\int\frac{(2t-1)-3}{t^2-t+1}dx = \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\int\frac{(2t-1)dx}{t^2-t+1} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\int\frac{d\left(t^2-t+1\right)}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln\left(t^2-t+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Таким образом, окончательно

$$\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{1-x} == -\ln|t+1| + \frac{1}{2}\ln\left(t^2-t+1\right) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

где $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

2. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Так называют функции вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, где a,b,c – некоторые постоянные числа. Очевидно, что требуется рассмотреть только два случая: когда трехчлен не имеет действительных корней и когда корни действительны и различны (случай кратного корня сводится к рациональной функции).

I. Если трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней, его знак совпадает со знаком старшего коэффициента a, поэтому $a>0$ и можно выполнить подстановку $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}$. Она называется *первой подстановкой Эйлера* и всегда рационализирует интеграл в указанном случае.

II. *Вторая подстановка Эйлера* применяется, когда трехчлен имеет различные действительные корни, т.е. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Она имеет вид $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}$. Как и в предыдущих случаях, нетрудно проверить, что данная подстановка всегда приводит к интегралу от рациональной функции.

П р и м е р 1.22. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$. Так как трехчлен x^2-2x+2 не имеет действительных корней, применяем первую подстановку Эйлера $t=\sqrt{x^2-2x+2}+x$. Выразим x и $\sqrt{x^2-2x+2}$ через t

$$t-x=\sqrt{x^2-2x+2}\Rightarrow (t-x)^2=x^2-2x+2\Rightarrow x=\frac{t^2-2}{2(t-1)},$$

$$\sqrt{x^2-2x+2}=t-x=t-x=t-\frac{t^2-2}{2(t-1)}=\frac{t^2-2t+2}{2(t-1)}.$$

Теперь найдем дифференциал переменной x и пересчитаем интеграл к новой переменной t

$$dx=d\,\frac{t^2-2}{2(t-1)}=\frac{t^2-2t+2}{2(t-1)^2}\,dt,$$

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx=\int\frac{t^2-2}{2(t-1)}\cdot\frac{t^2-2t+2}{2(t-1)}\cdot\frac{t^2-2t+2}{2(t-1)^2}\,dt=\frac{1}{8}\int\frac{(t^2-2)(t^2-2t+2)^2}{(t-1)^4}\,dt.$$

Для сокращения записей в последнем интеграле сделаем замену $z=t-1$, $dz=dt$. Получаем

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx=\frac{1}{8}\int\frac{(t^2-2)(t^2-2t+2)^2}{(t-1)^4}\,dt=\frac{1}{8}\int\frac{((z+1)^2-2)(z^2+1)^2}{z^4}\,dz=$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(z^2+2z+1+\frac{4}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{1}{z^4}\right)dz=\frac{1}{8}\left(\frac{z^3}{3}+z^2+z+4\ln|z|+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3z^3}\right)+C,$$

где $z=\sqrt{x^2-2x+2}+x-1$.

П р и м е р 1.23. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(x+1)}\right)^2}$. Применим вторую подстановку Эйлера $tx=\sqrt{x(x+1)}$. Выразим x и $1+\sqrt{x(x+1)}$ через t

$$t^2x^2=x(x+1)\Rightarrow x=\frac{1}{t^2-1},\ 1+\sqrt{x(x+1)}=1+tx=1+\frac{t}{t^2-1}=\frac{t^2+t-1}{t^2-1}.$$

Теперь ищем дифференциал от x и пересчитываем интеграл к новой переменной t

$$dx=d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2},$$

$$\int\frac{dx}{\left[1+\sqrt{x(x+1)}\right]^2}=-\int\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+t-1)^2}\cdot\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}=-2\int\frac{tdt}{(t^2+t-1)^2}=$$

$$-\int\frac{(2t+1)dt}{(t^2+t-1)^2}+\int\frac{dt}{(t^2+t-1)^2}=\frac{1}{t^2+t-1}+\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}.$$

Итак, мы получили интеграл от рациональной функции. Для упрощения дальнейших вычислений сделаем в полученном интеграле линейную замену переменной $z = t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда

$$\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \int \frac{dz}{z^2 \left(z + \sqrt{5}\right)^2}.$$

Разложим рациональную функцию $\frac{1}{z^2\left(z+\sqrt{5}\right)^2}$ на элементарные дроби. В данном примере это можно легко сделать, используя только тождественные преобразования

$$\frac{1}{z^2\left(z+\sqrt{5}\right)^2} = \left(\frac{1}{z\left(z+\sqrt{5}\right)}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{z+\sqrt{5}-z}{z\left(z+\sqrt{5}\right)}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+\sqrt{5}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5z^2} + \frac{1}{5\left(z+\sqrt{5}\right)^2} - \frac{2}{5z\left(z+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{5z^2} + \frac{1}{5\left(z+\sqrt{5}\right)^2} - \frac{2}{5\sqrt{5}z} + \frac{2}{5\sqrt{5}\left(z+\sqrt{5}\right)}.$$

Теперь проинтегрируем

$$\int \frac{dz}{z^2\left(z+\sqrt{5}\right)^2} = \int\left(\frac{1}{5z^2} + \frac{1}{5\left(z+\sqrt{5}\right)^2} - \frac{2}{5\sqrt{5}z} + \frac{2}{5\sqrt{5}\left(z+\sqrt{5}\right)}\right)dz = -\frac{1}{5z} -$$

$$-\frac{1}{5\left(z+\sqrt{5}\right)} - \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln|z| + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|z+\sqrt{5}\right| + C = -\frac{2z+\sqrt{5}}{5z\left(z+\sqrt{5}\right)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z}{z+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Учитывая, что $t^2 + t - 1 = \left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = z\left(z+\sqrt{5}\right)$, окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{\left[1+\sqrt{x(x+1)}\right]^2} = \frac{1}{z\left(z+\sqrt{5}\right)} - \frac{2z+\sqrt{5}}{5z\left(z+\sqrt{5}\right)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z}{z+\sqrt{5}}\right| + C =,$$

$$\frac{1}{z\left(z+\sqrt{5}\right)} - \frac{2z+\sqrt{5}}{5z\left(z+\sqrt{5}\right)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z}{z+\sqrt{5}}\right| + C$$

где $z = \sqrt{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Интегрирование дифференциального бинома. Дифференциальным биномом (или биномиальным дифференциалом) называется выражение вида

$$x^m\left(a + bx^n\right)^p dx$$

Известно, что дифференциальный бином выражается в элементарных функциях только в трёх случаях:

- p — целое число. Используется подстановка $x = t^k$, где k — общий знаменатель дробей m и n;
- $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число. В этом случае применяем подстановку $t^s = a + bx^n$, где s — знаменатель дроби p.
- $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое число. Здесь используется подстановка $t^s = ax^{-n} + b$, где, как и в предыдущем случае, s — знаменатель дроби p.

Пример 1.24. Вычислить интеграл $\int x^{-3}\left(1-2x^3\right)^{-\frac{1}{3}}dx$. В данном примере $m=-3$, $n=3$, $p=-\dfrac{1}{3}$ так что $\dfrac{m+1}{n}+p=-1$ — целое число (третий случай). Поэтому выполняем замену $t^3 = x^{-3}-2$, $x=\left(t^3+2\right)^{-\frac{1}{3}}$, $dx = -\dfrac{t^2dt}{\left(t^3+2\right)^{\frac{4}{3}}}$, после которой интеграл легко берется

$$\int x^{-3}\left(1-2x^3\right)^{-\frac{1}{3}}dx = \int x^{-4}\left(x^{-3}-2\right)^{-\frac{1}{3}}dx = -\int \left(t^3+2\right)^{\frac{4}{3}} t^{-1}\frac{t^2dt}{\left(t^3+2\right)^{\frac{4}{3}}} = -\int tdt = -\frac{t^2}{2}+C =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left(1-2x^3\right)^{\frac{2}{3}}}{x^2}+C.$$

1.8. Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int R(\cos x, \sin x)dx$ всегда рационализируется так называемой универсальной тригонометрической подстановкой $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. При этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad (1.28)$$

Пример 1.25. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3+\cos x}$. Применим универсальную тригонометрическую подстановку $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Используя (1.28), находим

$$\int \frac{dx}{3+\cos x} = 2\int \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

2.1. Интегральные суммы. Определение интеграла

Определение 2.1. *Будем говорить, что набор точек*

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

задает разбиение отрезка $[a;b]$ *на* n *элементарных отрезков* $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$.

Обозначим разбиение буквой T, а длину элементарного отрезка через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$.

Определение 2.2. *Наибольшее из чисел* $\Delta x_i, i = 0,1,\ldots,n-1$ *называется диаметром (или нормой) разбиения T и обозначается* $d(T)$.

Пусть задано разбиение T отрезка $[a,b]$. Если в пределах каждого элементарного отрезка произвольным образом выбраны точки ξ_i, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, то говорят о разбиении с выбранными промежуточными точками. Обозначим через $\bar{\xi}$ набор $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ и пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $f(x)$.

Определение 2.4. *Величина*

$$\sigma\left(f,T,\bar{\xi}\right)=\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i \tag{2.1}$$

называется интегральной суммой функции f, соответствующей разбиению T с промежуточными точками $\bar{\xi}$.

Определение 2.5. *Число $I\in\mathbb{R}$ называется пределом интегральных сумм* (2.1) *при $d(T)$, стремящемся к нулю, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для $d(T)<\delta$ и любого выбора точек $\{\xi\}$ выполняется неравенство*

$$\left|\sigma\left(f,T,\bar{\xi}\right)-I\right|<\varepsilon.$$

При этом пишут

$$I=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right)\Delta x. \tag{2.2}$$

Определение 2.6. *Если для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$ существует предел интегральных сумм* (2.2)*, то говорят, что $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$; число I при этом называется ее интегралом по отрезку $[a;b]$ и обозначается*

$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

Числа a и b называются, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Замечание 2.1. При построении определенного интеграла мы имеем дело с новым типом предельного перехода, поскольку понятие предела интегральных сумм не может быть сведено к понятию предела последовательности или функции.

Замечание 2.2. Приведенное определение интеграла принадлежит немецкому математику Бернгарду Риману (1826-1866) и нашло повсеместное применение как в математике, так и в различных ее приложениях. Это объясняется тем, что, с одной стороны, класс функций, интегрируемых по Риману достаточно широк, а с другой, конструкция этого интеграла сравнительно проста. В то же время, еще в начале XX века было обнаружено, что в математических исследованиях важную роль играют классы функций, не интегрируемых по Риману. Это привело к построению различных обобщений интеграла Римана (таких как интеграл Лебега, «узкий» и «широкий» интеграл Данжуа, интегралы Курцвейля-Хенстока, Маклейна и др.), обсуждение которых выходит за рамки данного пособия.

2.2. Условия существования определенного интеграла

Теорема 2.1 (Необходимое условие интегрируемости). *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$, *то она ограничена на нем.*

Из приведенной теоремы следует, что всякая неограниченная на данном отрезке $[a;b]$ функция не может быть интегрируемой на нем.

Пример 2.1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x\in(0,1],\\ 0, \text{ если } x=0.\end{cases}$$

Она определена на отрезке $[0,1]$, но, как легко видеть, не ограничена на этом отрезке. Поэтому в силу теоремы 2.1 данная функция не будет интегрируемой на $[0,1]$. Заметим, что непосредственное доказательство этого факта путем изучения соответствующих интегральных сумм является намного более трудоемким.

Замечание 2.3. Неограниченность функции на отрезке – не единственная возможная причина отсутствия интегрируемости. Если функция $f(x)$ имеет «слишком много» точек разрыва, то она также может оказаться неинтегрируемой, даже будучи ограниченной на данном отрезке.

Пример 2.2. Функция

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x - \text{иррациональное число},\\ 1, \text{ если } x - \text{рациональное число},\end{cases}$$

называется функцией Дирихле (Петер Густав Лежен-Дирихле – немецкий математик, 1805-1859). Эта функция определена на всей числовой прямой, ограничена на ней, и при этом разрывна в каждой точке. Докажем, что она не интегрируема на любом отрезке $[a;b]$. Пусть T – произвольное разбиение этого отрезка с любым, сколь угодно малым, диаметром $d(T)$. Выберем промежуточные точки $\xi_0,\xi_1,...,\xi_{n-1}$ рациональными. Тогда

$$\sigma(f,T,\bar{\xi})=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_i=b-a.$$

Если же выбрать точки $\{\xi\}$ иррациональными, то будем иметь

$$\sigma(f,T,\bar{\xi})=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}0\cdot\Delta x_i=0.$$

Устремляя $d(T)$ к нулю, можно получить две последовательности интегральных сумм, одна из которых стремится к единице, а другая – к нулю, в зависимости от выбора точек $\{\xi\}$. Но это означает, что последовательность интегральных сумм $\sigma(f,T,\bar{\xi})$ не имеет предела в смысле определения 2.5, т.е. функция Дирихле не интегрируема на $[a;b]$.

Приведенный пример показывает, что ограниченность функции является только необходимым условием интегрируемости, но не достаточным. Следующие две теоремы дают такие достаточные условия.

Теорема 2.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 2.3. Если функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

2.3. Свойства определенного интеграла

Свойство 2.1. *Пусть* $a<b$ *и функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$. *Тогда по определению полагают*

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx,$$

кроме того, также по определению,

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

Свойство 2.2 (Аддитивность интеграла относительно промежутка интегрирования). *Пусть* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$, $c\in[a;b]$. *Тогда* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;c]$ *и* $[c;b]$, *причем*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Свойство 2.3. *Если* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$, *то* $\forall C=\mathrm{const}$ *функция* $C\cdot f(x)$ *также интегрируема на* $[a;b]$ *и*

$$\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 2.4. *Если функции* $f(x), g(x)$ *интегрируемы на* $[a;b]$, *то их сумма* $f(x)+g(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$, *причем*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 2.5. *Если* $a<b$, $f(x)\geq 0$ *на* $[a;b]$, *и функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

Свойство 2.6 (Монотонность интеграла). *Если* $a<b$, *функции* $f(x), g(x)$ *интегрируемы на* $[a;b]$ *и* $\forall x\in[a;b]$ *имеет место неравенство* $f(x)\leq g(x)$, *то* $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.

Свойство 2.7 (Оценка интеграла). *Пусть* $a<b$ *и* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$. *Тогда* $|f(x)|$ *также интегрируема на* $[a;b]$ *и*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Свойство 2.8. (Теорема о среднем значении). *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$, $a<b$, *и при* $x\in[a;b]$ *верно неравенство* $m\le f(x)\le M$. *Тогда существует число* μ, $m\le\mu\le M$, *такое, что* $\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)$. *Если, кроме того, функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то найдется число* $\xi\in[a;b]$ *такое, что* $\mu=f(\xi)$, *т.е.*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

2.4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$. Тогда, по свойству 2.2 предыдущего пункта, она интегрируема на $[a;x]$ при любом $x\in[a;b]$. Введем функцию

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]. \tag{2.3}$$

Определение 2.7. *Функция, определенная на отрезке* $[a;b]$ *соотношением* (2.3) *называется интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 2.4. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$, *то* $\Phi(x)$ *непрерывна* $[a;b]$.

Теорема 2.5. *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$ *и непрерывна в точке* $x\in[a;b]$. *Тогда* $\Phi(x)$ *имеет производную в этой точке, причем* $\Phi'(x)=f(x)$.

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$, *то* $\forall x\in[a;b]$ *имеет место равенство* $\Phi'(x)=f(x)$, *так что* $\Phi(x)$ *является первообразной для* $f(x)$.

Теорема 2.6. (Формула Ньютона-Лейбница). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$, *то имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a), \tag{2.4}$$

где $F(x)$ – любая из первообразных функции $f(x)$.

Формула Ньютона-Лейбница является главной формулой интегрального исчисления. Она связывает понятия неопределенного и определенного интегралов и дает важнейший инструмент для вычисления последнего. Часто ее записывают в виде $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$, где $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример 2.3. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 x^2 dx$. Учитывая, что первообразная от x^2 есть $\frac{x^3}{3}$, по формуле Ньютона-Лейбница найдем

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

2.5. Замена переменной и интегрирование по частям для определенного интеграла

Теорема 2.7. (Замена переменной). Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, $a = \min\limits_{\alpha \le t \le \beta} \varphi(t)$, $b = \max\limits_{\alpha \le t \le \beta} \varphi(t)$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Пусть, далее, функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2.5}$$

Пример 2.4. Найти определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. Применим подстановку $x = \sin t$. Поскольку x меняется в пределах от 0 до 1 , переменная t пробегает отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Далее, $dx = d(\sin t) = \cos t dt$. Теперь по формуле (2.5) находим

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Теорема 2.8. (Интегрирование по частям). Пусть функции $u(x)$, $v(x)$, а также их производные $u'(x), v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \qquad (2.6)$$

Пример 2.5. Найти определенный интеграл $\int_0^{\pi} x\cos x dx$. Применим формулу (2.6). Полагаем $u = x$, $dv = \cos x dx$, откуда $du = dx$, $v = \sin x$.

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_0^{\pi} = 0 + \cos\pi - \cos 0 = -2.$$

2.6. Геометрические приложения определенного интеграла: длина дуги кривой

Определение 2.8. *Говорят, что на координатной плоскости* $\mathbb{R}^2$ *задана непрерывная плоская кривая* Γ, *если задано непрерывное отображение отрезка* $[a,b]$ *в* $\mathbb{R}^2$, *т.е. если на* $[a,b]$ *определены непрерывные функции действительного аргумента* t

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [a,b]. \qquad (2.7)$$

Переменная t *называется параметром, значения векторной функции* $\boldsymbol{r} = (x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ *– точками кривой* Γ, *а совокупность всех значений функции* $\boldsymbol{r}$ *– множеством точек (траекторией) этой кривой. Кривая называется замкнутой, если* $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$. *Замкнутую кривую часто называют контуром.*

Таким образом, кривая – это геометрическое место точек на координатной плоскости с указанным направлением обхода, соответствующим возрастанию параметра t (точнее, множество точек $\boldsymbol{r}$ и закон, по которому каждая такая точка сопоставляется значению параметра t). Например, функция $\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, задает единичную окружность, проходимую один раз против часовой стрелки, если параметр t возрастает от 0 до 2π.

Впрочем, иногда мы будем понимать кривую только как множество точек (траекторию).

Определение 2.9. *Плоская кривая* Γ *называется простой, если различным значениям параметра* t *из отрезка* $[a,b]$ *соответствуют различные точки на кривой* Γ.

Упрощенно говоря, простая кривая – это кривая, вовсе не имеющая точек самопересечения, если она незамкнута и пересекающая сама себя строго в одной точке $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$, в случае, когда она замкнута.

Определение 2.10. *Плоская кривая* Γ *называется гладкой, если*

1) функции $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a,b]$ *(т.е. если* $\varphi'(t)$ *и* $\psi'(t)$ *существуют и непрерывны в каждой точке интервала*

(a,b) *и, кроме того, существуют конечные односторонние пределы* $\lim\limits_{t\to a-0}\varphi'(t)$, $\lim\limits_{t\to a-0}\psi'(t)$ *и* $\lim\limits_{t\to b+0}\varphi'(t)$, $\lim\limits_{t\to b+0}\psi'(t)$*),*

2) производные $\varphi'(t)$ *и* $\psi'(t)$ *одновременно не обращаются в ноль в точках* t *этого отрезка.*

О п р е д е л е н и е 2.11. *Кривая называется кусочно-гладкой, если ее можно представить в виде объединения конечного числа гладких кривых, попарно пересекающихся не более чем в одной точке.*

Примерами гладких кривых служат отрезок, окружность, эллипс. Примеры кусочно-гладких кривых – ломаная, граница сегмента, сектора. С геометрической точки зрения гладкость кривой означает, что: *во-первых, в каждой точке кривой существует касательная прямая, во-вторых, что при движении точки касания вдоль кривой касательная изменяется непрерывным образом.*

По аналогии с плоской кривой можно определить *пространственную кривую* Γ как непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ в пространство $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)),\ t\in[a,b]. \tag{2.8}$$

Понятия простой, гладкой и кусочно-гладкой кривой очевидным образом переносятся на этот случай.

Пусть плоская кривая задана параметрическими уравнениями (2.7). Разобьем отрезок $[a,b]$ точками

$$t_0=a<t_1<t_2<\ldots<t_m=b$$

и пусть M_i имеет координаты $(\varphi(t_i),\psi(t_i))$, $i=1,\ldots,m$. Рассмотрим ломаную линию L, вершинами которой служат точки $\{M_i\}$. Обозначим $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, и пусть $\Delta=\max\limits_{1\le i\le m}\Delta t_i$. Из равномерной непрерывности на отрезке $[a,b]$ функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ следует, что при условии $\Delta\to 0$ максимальная длина $|M_{i-1}M_i|=\sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2}$ звена ломаной L также будет стремиться к нулю. Таким образом, при неограниченном уменьшении Δ форма ломаной будет все меньше отличаться от формы кривой. Этот факт оправдывает следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2.12. *Плоская кривая* Γ *называется спрямляемой, если существует конечный предел длины ломаной* L

$$|\Gamma|=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2}$$

при стремлении к нулю максимальной длины звена ломаной. Величина этого предела $|\Gamma|$ *называется длиной кривой* Γ.

Теорема 2.9. *Если плоская кривая* Γ *задана параметрическими уравнениями* (2.7) *и при этом является простой и гладкой, то она спрямляема и ее длина равна*

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (2.9)$$

Следствие 1. *Если кривая задана явным уравнением* $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, *то формула* (2.8) *принимает вид*

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Следствие 2. *Если кривая задана полярным уравнением* $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Пример 2.6. Найти длину l части окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ и лежащей в первой четверти.

Выразим переменную y из уравнения окружности $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Ищем производную $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Отсюда $l = \displaystyle\int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = a \cdot \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = a\frac{\pi}{2}$,

так что $l = \dfrac{a\pi}{2}$. Результат согласуется с известной формулой длины окружности $L = 2\pi a$.

Замечание 2.4. Для пространственной кривой Γ вида (2.8) справедлив аналог теоремы 2.9. При этом

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,dt. \qquad (2.10)$$

2.7. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры

Определение 2.13. *Будем называть плоской фигурой часть плоскости, ограниченную замкнутой кривой без самопересечений.*

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем понимать под фигурой множество точек как заключенных внутри границы, так и принадлежащих этой границе. Это частный случай так называемого замкнутого множества, точное определение которого мы дадим в гл. III.

Определение 2.14. *Многоугольником будем называть плоскую фигуру, границей которой служит замкнутая ломаная без самопересечений.*

Из курса средней школы известно понятие площади треугольника. Произвольный же многоугольник всегда можно разбить на конечное число треугольников (вообще говоря, различными способами). Его площадь определим, как сумму площадей составляющих треугольников. Нетрудно доказать, что это определение – корректное, т.е. вне зависимости от способа разбиения, суммарная площадь треугольников будет одна и та же. *Площадь многоугольника A мы будем обозначать через $S(A)$.*

Для дальнейшего изложения нам понадобится понятие точной грани числового множества.

Определение 2.15. *Непустое множество действительных чисел E называется ограниченным сверху (снизу), если существует число M (число m) такое, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $x \le M$ (соответственно $x \ge m$).*

Определение 2.16. *Пусть множество E ограничено сверху. Наименьшая из его верхних границ называется точной верхней гранью этого множества и обозначается $\sup E$ (произносится «супремум»,* от латинского *supremum – «наивысший»).*

Аналогично, наибольшая среди всех нижних границ ограниченного снизу множества называется его точной нижней гранью и обозначается $\inf E$ (произносится «инфимум», от латинского infimum – «самый низкий»).

В подробных курсах математического анализа доказывается, что если множество E ограничено сверху (снизу), то у него всегда существует точная верхняя (нижняя) грань. Заметим, что точные грани множества могут как принадлежать ему, так и не принадлежать. Например, и для интервала $I = (a,b)$ и для отрезка $\bar{I} = [a,b]$ будем иметь $\inf I = \inf \bar{I} = a$, $\sup I = \sup \bar{I} = b$, но в случае отрезка точные грани ему принадлежат, а в случае интервала не принадлежат. Для неограниченного сверху множества E по определению полагают $\sup E = +\infty$, а для неограниченного снизу $\inf E = -\infty$.

Вернемся к вопросу о площади плоской фигуры D. Рассмотрим множество $\{A\}$ многоугольников A, целиком лежащих в D, и множество $\{B\}$ многоугольников B, содержащих D.

Так как для любых множеств $A \in \{A\}$, $B \in \{B\}$ имеют место включения $A \subset D \subset B$, для их площадей выполняется неравенство $S(A) \le S(B)$. Следовательно, множество площадей $\{S(A)\}$ ограничено сверху (любым числом $S(B)$), а множество $\{S(B)\}$ ограничено снизу (любым числом $S(A)$). Поэтому существуют величины $\sup\{S(A)\}$ и $\inf\{S(B)\}$.

Определение 2.17. *Плоская фигура D называется квадрируемой, если $\sup\{S(A)\}=\inf\{S(B)\}$. При этом общее значение этих граней называется площадью фигуры D: $S(D)=\sup\{S(A)\}=\inf\{S(B)\}$.*

Определение 2.18. *Пусть на отрезке $[a,b]$ задана неотрицательная функция $y=f(x)$. Плоская фигура D называется криволинейной трапецией (или подграфиком функции f), если она ограничена снизу осью OX, сверху – графиком $y=f(x)$, с боков – вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$.*

Теорема 2.10 (Площадь в прямоугольных координатах). *Если неотрицательная функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то соответствующая криволинейная трапеция D является квадрируемой фигурой, причем*

$$S(D)=\int_a^b f(x)dx.$$

Следствие. *Пусть фигура D ограничена снизу и сверху графиками непрерывных функций $y=f_1(x), y=f_2(x), f_1(x)\le f_2(x), x\in[a,b]$. Тогда D является квадрируемой и*

$$S(D)=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx.$$

Теорема 2.11 (Площадь в полярных координатах). *Пусть фигура D представляет собой криволинейный сектор в полярных координатах, ограниченный лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и графиком непрерывной на отрезке $[\alpha;\beta]$ функции $r=r(\varphi)\ge 0$, $\alpha\le\varphi\le\beta$. Тогда D является квадрируемой и*

$$S(D)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример 2.7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=x^3$, $x=2$ $x=4$.

На основании следствия из теоремы 2.10 имеем

$$S=\int_2^4 x^3dx-\int_2^4 xdx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_2^4=\frac{4^4}{4}-\frac{4^2}{2}-\frac{2^4}{4}+\frac{2^2}{2}=54.$$

2.8. Геометрические приложения определенного интеграла: объем тела

Объем трехмерного тела F мы определим аналогично площади плоской фигуры. Считая известным понятие объема многогранника, рассмотрим множество объемов $\{V(P)\}$ многогранников $P \subset F$, содержащихся в данном теле и множество объемов $\{V(Q)\}$ многогранников $Q \supset F$, содержащих данное тело.

Если $\sup\{V(P)\} = \inf\{V(Q)\}$, то тело F называют *кубируемым.* Объем тела F по определению полагают равным $V(F) = \sup\{V(P)\} = \inf\{V(Q)\}$.

Важным классом кубируемых тел являются *цилиндрические тела,* т.е. тела, ограниченные цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными некоторой оси, и двумя плоскостями, перпендикулярными этой оси.

Теорема 2.12. *Пусть тело F представляет собой прямой цилиндр высоты h, основанием которого является квадрируемая фигура D с площадью $S(D)$. Тогда F – кубируемо, при этом его объем равен*

$$V(F) = S(D) \cdot h.$$

Теорема 2.13 (Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям). *Пусть F – трехмерное тело, проекция которого на ось OX есть отрезок $[a;b]$ и сечение его плоскостью, проходящей через точку $(x,0,0)$ перпендикулярно оси OX, представляет собой квадрируемую фигуру с площадью $S(x)$, $a \le x \le b$. Предположим, далее, что функция $S(x)$ непрерывна на $[a;b]$, и что для любых $x_1, x_2 \in [a;b]$ проекция одного из сечений на плоскость OYZ целиком содержится в проекции другого сечения. Тогда F – кубируемое тело, и его объем равен*

$$V(F) = \int_a^b S(x)dx.$$

Замечание 2.5. Последнее условие из теоремы 2.13 о включении одной проекции в другую является существенным, т.к. без него одна только непрерывность функции $S(x)$ не гарантирует кубируемость тела F. Примером такого не кубируемого тела может служить объединение F единичных кругов, параллельных плоскости OYZ, центры которых имеют координаты $(x, f(x), 0)$, $x \in [0,1]$, где $f(x)$ – функция Дирихле. В данном случае функция $S(x) = \pi$, $x \in [0,1]$, непрерывна, указанное условие нарушено и можно доказать, что тело F не является кубируемым.

Следствие (Объем тела вращения). *Пусть функция* $y = f(x) \ge 0$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ *и D – соответствующая криво-*

линейная трапеция. Тогда объем тела F, образованного вращением фигуры D вокруг оси OX равен

$$V(F) = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример 2.8. Найти объем шара радиуса R с помощью формулы из теоремы 2.13.

Будем считать, что центр шара совпадает с началом координат. Тогда поперечные сечения шара – суть круги переменного радиуса $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Функция, задающая площадь сечения имеет вид $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Интегрируя, получаем известное выражение для объема шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

2.9. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь поверхности вращения

Здесь мы не будем давать строгого определения площади криволинейной поверхности, а ограничимся лишь интуитивными представлениями. Кроме того, рассматриваться будут только так называемые *поверхности вращения*, т.е. поверхности, образованные вращением плоской кривой вокруг оси, лежащей в той же плоскости. Приведем условия, при которых поверхность вращения заведомо имеет площадь, и укажем формулу для ее вычисления.

Теорема 2.14 (Площадь поверхности вращения). *Пусть плоская кривая* Γ *задана параметрическими уравнениями* (2.7) *и при этом является простой и гладкой. Тогда площадь* S *поверхности, образованной вращением кривой* Γ *вокруг оси* OX *существует, причем*

$$S = 2\pi\int_a^b \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

2.10. Несобственные интегралы

Определение 2.19. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на промежутке* $[a,+\infty)$ *и интегрируема на любом отрезке* $[a;b]$, $b\in[a,+\infty)$. *Предел*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{2.11}$$

называется несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$. *Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае – расходится.*

Аналогично определяются несобственные интегралы по промежуткам $(-\infty,b]$ и $(-\infty,+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{2.12}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx, \tag{2.13}$$

В последнем пределе требуется, чтобы параметры a и b стремились к бесконечности независимо друг от друга.

Замечание 2.6. В определении интеграла Римана существенным является требование, чтобы промежуток интегрирования был конечен. Поэтому несобственный интеграл первого рода можно рассматривать как обобщение определенного интеграла Римана на случай бесконечного промежутка интегрирования.

Определение 2.19. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на полуинтервале* $[a,b)$, *интегрируема на любом отрезке* $[a;c]$, $c\in[a,b)$, *и не ограничена в любой окрестности точки* b. *Предел*

$$\int_a^{b} f(x)dx := \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx, \tag{2.14}$$

называется несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$. *Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае – расходится.*

Условимся называть точку, в любой окрестности которой функция не ограничена, *особой точкой* этой функции. Заметим, что в самой особой точке функция может быть определена произвольным образом или же не определена вовсе. В определении 2.19 особой точкой функции $f(x)$ была точка b. В случае, когда особой точкой является точка a, несобственный интеграл определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)dx. \qquad (2.15)$$

Наконец, если особая точка ξ лежит внутри промежутка интегрирования $\xi\in(a,b)$, то несобственный интеграл по отрезку $[a;b]$ определяется как сумма интегралов вида (2.14) и (2.15) при условии, что они оба сходятся:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^b f(x)dx. \qquad (2.16)$$

З а м е ч а н и е 2.7. Несобственный интеграл второго рода нельзя определить как предел интегральных сумм Римана, хотя промежуток интегрирования в данном случае конечен. Это связано с тем, что подынтегральная функция теперь не ограничена и поэтому не может быть интегрируемой по Риману. Таким образом, несобственный интеграл второго рода можно рассматривать как обобщение интеграла Римана на случай неограниченной подынтегральной функции.

П р и м е р 2.9. Определить, при каких значениях p сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p},\ a>0 \qquad (2.17)$$

Известно, что $\int\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{1-p}x^{1-p}+C, p\neq 1\\ \ln x + C, p=1\end{cases}$. Поэтому при $p>1$ будем иметь

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}b^{1-p}-\frac{1}{1-p}a^{1-p}\right)=-\frac{1}{1-p}a^{1-p},$$

поскольку $b^{1-p}\to 0$ при $b\to+\infty$. При $p=1$ получаем

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{a}=+\infty$$

И, наконец, при $p<1$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}b^{1-p}-\frac{1}{1-p}a^{1-p}\right)=+\infty\ ,$$

так как $b^{1-p}\to+\infty$.

Таким образом, интеграл (2.17) сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

П р и м е р 2.10. При каких значениях q сходится интеграл

$$\int_0^1\frac{dx}{x^q}. \qquad (2.18)$$

Если $q \le 0$, то (2.18) является собственным интегралом. Если же $q > 0$, то этот интеграл не может существовать в собственном смысле, так как функция $\frac{1}{x^q}$ теперь не ограничена в окрестности $x = 0$. Далее, при $q \ne 1$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^q} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{1-q} - \frac{\varepsilon^{1-q}}{1-q}\right) = \begin{cases} +\infty, q > 1 \\ \frac{1}{1-q}, q < 1 \end{cases},$$

а при $q = 1$ имеем $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}(-\ln\varepsilon) = +\infty$. Значит, интеграл (2.18) сходится при $q < 1$ и расходится при $q \ge 1$.

Следующий пример несобственного интеграла иллюстрирует случай, когда не существует ни конечного, ни бесконечного предела (2.11).

Пример 2.11. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^\infty \cos x dx$. Имеем по определению

$$\int_0^\infty \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to\infty}\sin b.$$

Последний предел не существует, так как при $x \to \infty$ функция $f(x) = \sin x$ колеблется, принимая поочередно все значения из промежутка $[-1,1]$. Интеграл расходится.

В некоторых случаях требуется установить не численное значение интеграла, а лишь факт его сходимости или расходимости. Для подобного исследования используют так называемые признаки сходимости. Приведем один из них.

Теорема 2.15 (признак сравнения). *Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ определены на $[a,+\infty)$ и интегрируемы по Риману на любом $[a;b]$, где $b > a$. Пусть, далее, при некотором значении $a \le a_0 < +\infty$ на промежутке $a_0 \le x < +\infty$ выполняется неравенство $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^\infty f_2(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^\infty f_1(x)dx$, а из расходимости $\int_a^\infty f_1(x)dx$ – расходимость $\int_a^\infty f_2(x)dx$.*

Аналогичная теорема имеет место и для несобственного интеграла второго рода.

Пример 2.12. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + x + 1}. \tag{2.19}$$

Решение. Учитывая неравенство

$$0 \le \frac{1}{x^4+2x^3+x+1} \le \frac{1}{x^4} \quad \forall x \in [1,+\infty)$$

и тот факт, что интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ сходится (с.м. пример 2.6), на основании признака сравнения заключаем, что интеграл (2.19) также сходится.

Определение 2.20. *Интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$.

Теорема 2.16. *Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле. Обратное не верно.*

Определение 2.21. *Интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *называется условно сходящимся, если сам он сходится, а соответствующий интеграл от модуля* $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ *расходится.*

Аналогично определяется абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла второго рода.

Пример 2.13. Исследовать на абсолютную сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \tag{2.20}$$

Решение. Прежде всего, заметим, что подынтегральная функция ограничена (в силу того, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$) и непрерывна на $(0,\infty)$, поэтому мы имеем дело с интегралом первого рода. Запишем

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

Первое слагаемое представляет собой собственный интеграл. Второй интеграл, по определению, равен

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\cos x}{x}\Big|_1^b - \int\limits_1^b \frac{\sin x}{x^2}dx \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-\cos b}{b} + \frac{\cos 1}{1} - \int\limits_1^b \frac{\sin x}{x^2}dx \right).$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\dfrac{-\cos b}{b}\right)=0$ и при любом $x\neq 0$ верно неравенство $\dfrac{|\sin x|}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$, по признаку сравнения из сходимости интеграла $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ следует сходимость интеграла (2.20).

Проверим, будет ли эта сходимость абсолютной. Предположим, что интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{|\sin x|}{x}dx$ сходится. Тогда из неравенства $|\sin x|\ge\sin^2 x$ и признака сравнения следовало бы, что интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x}dx$ также сходится. Но это неверно. Действительно, учитывая, что $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, находим

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{1-\cos 2x}{x}dx=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}-\int\limits_1^{b}\frac{\cos 2x}{x}dx\right). \qquad (2.21)$$

Интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x}$ расходится. Рассуждая как при доказательстве сходимости интеграла (2.20), можно убедиться, что интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\cos 2x}{x}dx$ сходится. Таким образом, предел (2.21) равен бесконечности, т.е. интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x}dx$, а с ним и $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{|\sin x|}{x}dx$ расходится. Итак, исходный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ является условно сходящимся.

Замечание 2.8. С качественной точки зрения условную сходимость интегралов можно объяснить периодическим изменением знака подынтегральной функции. В результате положительные и отрицательные части интеграла частично взаимно уничтожают друг друга (интерферируют). Вследствие этого получаем конечный предел (2.11). Если же рассматривать интеграл от модуля

$$\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx,$$

то здесь подобной интерференции уже не будет, поэтому предел (2.11) оказывается бесконечным.

3. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Понятие о кратном интеграле на примере двойного интеграла. Свойства двойного интеграла

Введем следующие понятия.

Определение 3.1. *Плоская область D называется ограниченной, если её полностью можно разместить в круге конечного радиуса.*

Определение 3.2. *Плоская область D называется замкнутой, если включает в себя точки своей границы.*

Определение 3.3. *Диаметром плоской фигуры называется максимальное расстояние между точками границы этой фигуры.*

Рассмотрим далее следующую задачу. Как показано на рис.3.1, в пространстве *Oxyz* рассматривается тело *Q*, внешняя поверхность которого получается при объединении ограниченной замкнутой области *D* на координатной плоскости *Oxy*, цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси *Oz*, и поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$. Полагаем при этом, что функция $f(x, y)$ неотрицательна при $(x; y) \in D$. Назовем такое тело *z-цилиндрическим*.

Будем искать объем *V* тела *Q*. Для этого разобьем основание *D* кусочно-гладкими кривыми на *n* подобластей D_i, не имеющих общих внутренних точек. В каждой подобласти выберем некоторую точку $(\xi_i; \eta_i) \in D_i$. Тогда все тело *Q* можно приближенно представить состоящим из *n* прямых цилиндров Q_i ($i = 1,...,n$). Основаниями цилиндров являются подобласти D_i. Высота цилиндра принимается равной соответствующему значению $f(\xi_i, \eta_i)$.

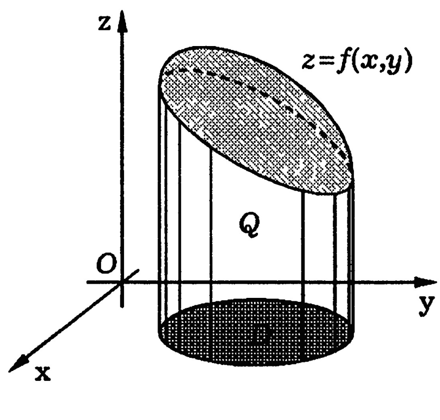

Рис.3.1.

Объем ΔV_i цилиндра Q_i будет равен произведению $f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, где ΔS_i – площадь частичной области D_i. В таком случае объем тела *Q* приближенно можно представить в виде суммы:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \qquad (3.1)$$

Для повышения точности этого соотношения следует, очевидно, уменьшать размеры частичных областей D_i, увеличивая их количество. За точное значение объема V следует принять предел суммы (3.1) при стремлении наибольшего диаметра d среди *диаметров множеств* D_i, $(i=1,...,n)$ к нулю, т.е.

$$V = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i. \qquad (3.2)$$

Далее будем называть сумму вида

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i, \qquad (3.3)$$

интегральной суммой функции $f(x,y)$ в замкнутой области D. Эта сумма определена разбиением области и выбором точек $(\xi_i;\eta_i)$.

Определение 3.4. *Функция $f(x,y)$ интегрируема в D, если существует число I, такое что для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое что для любого разбиения $T=\{D_1,...,D_n\}$ замкнутой области D с диаметрами $d(D_i)<\delta(\varepsilon)$ и любого выбора точек $(\xi_i;\eta_i)\in D_i$ для соответствующей интегральной суммы $S(T)$ выполняется неравенство $|S(T)-I|<\varepsilon$. Число I называют двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по замкнутой области D и обозначают*

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (3.4)$$

Область D называют областью интегрирования.

Определение 3.4. применимо для функции, которая может менять знак в области интегрирования. Наглядная геометрическая интерпретация двойного интеграла возможна, когда интегрируемая в замкнутой ограниченной области D функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию $f(x,y)\ge 0, (x;y)\in D$ и определяет в пространстве z-цилиндрическое тело, ограниченное снизу областью интегрирования D, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, и сверху поверхностью $z=f(x,y)$ (рис.3.1). Двойной интеграл определяет объем этого тела.

Обсудим связь интегрируемости функции $f(x,y)$ с другими известными свойствами. При этом ограничимся формулировкой важного для теории и приложений результата.

Теорема 3.1. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в квадрируемой замкнутой области D, то $f(x,y)$ – интегрируемая функция в области D.*

Рассмотрим некоторые общие свойства двойного интеграла. Всюду полагается, что области интегрирования – квадрируемые и замкнутые.

1) Если область D имеет площадь S_D, то выполнено равенство

$$\iint_D dxdy = S_D. \qquad (3.5)$$

2) Если функции $f(x, y), g(x, y)$ интегрируемы в области D, то их линейная комбинация $\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)$ также интегрируема в области D при любых коэффициентах $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. При этом

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dxdy = \alpha \iint_D f(x, y) dxdy + \beta \iint_D g(x, y) dxdy. \qquad (3.6)$$

Формула (3.6) выражает так называемое свойство линейности двойного интеграла.

3) Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в D, область D разбита на подобласти E и G, которые не имеют общих внутренних точек и $E \cup G = D$. Тогда

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_E f(x, y) dxdy + \iint_G f(x, y) dxdy \qquad (3.7)$$

причем все интегралы в (3.7) существуют. Формула (3.7) выражает так называемое свойство аддитивности двойного интеграла по области интегрирования.

4) Если функции $f(x, y), g(x, y)$ интегрируемы в области D и $f(x, y) \geq g(x, y),\ (x, y) \in D$, то

$$\iint_D f(x, y) dxdy \geq \iint_D g(x, y) dxdy. \qquad (3.8)$$

5) Если функция $f(x, y)$ интегрируема в D, то функция $|f(x, y)|$ также интегрируема в D, причем

$$\left| \iint_D f(x, y) dxdy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dxdy. \qquad (3.9)$$

Не приводя строгой формулировки, отметим также, что для двойного интеграла имеет место теорема о среднем значении, аналогичная теореме о среднем значении для определенного интеграла по числовому отрезку.

3.2. Выражение двойного интеграла через повторный интеграл

Вычисление двойного интеграла с использованием интегральных сумм является очень сложной задачей. На практике двойной интеграл вычисляют, представляя его через *повторный интеграл*.

Рассмотрим ситуацию, проиллюстрированную на рис.3.2.

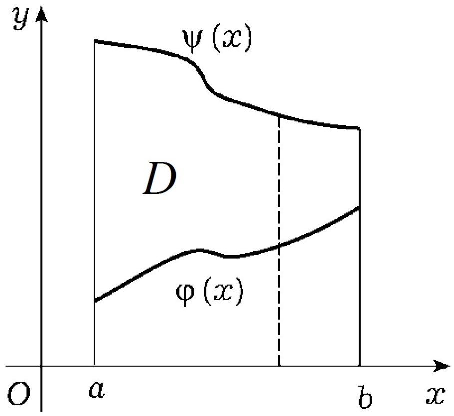

Рис.3.2.

Пусть выполнены следующие условия:
1) Функция $f(x,y)$ определена на множестве D, допускающем представление

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}. \qquad (3.10)$$

2) Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из (3.10) непрерывны на отрезке $[a,b]$.
3) При любом $x \in [a,b]$ существует интеграл

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\,, \qquad (3.11)$$

который зависит от x, как от параметра.
4) Функция $F(x)$, определенная в (3.11), интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Тогда существует интеграл

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right] dx\,.$$

Такой интеграл называют повторным и обозначают

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \qquad (3.12)$$

Возможность использовать повторные интегралы вида (2.12) для вычисления двойных интегралов обоснована следующим теоретическим результатом.

Теорема 3.2 (Представление двойного интеграла через повторный).
1) *Пусть функция* $f(x,y)$ *непрерывна на множестве D, которое представлено в виде* (2.10)*, где* $\varphi(x)$*,* $\psi(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$.
Тогда

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\,. \qquad (3.13)$$

2) *Пусть функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве D, которое представлено в виде*

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}, \tag{3.14}$$

где функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$ *непрерывны на отрезке* $[c,d]$. *Тогда*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx. \tag{3.15}$$

Заметим, если для области интегрирования D возможны оба представления (3.10),(3.14), то величина повторного интеграла не зависит от порядка интегрирования. Действительно, совместное выполнение равенств (3.13),(3.15) означает, что

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx.$$

Заметим также, в случае, когда область интегрирования не допускает представлений вида (3.10),(3.14), следует произвести разбиение на подобласти, каждая из которых допускает хотя бы одно из таких представлений. Вычислив двойные интегралы в подобластях, применяем далее формулу (3.7).

Продемонстрируем результат теоремы 3.2 на следующем примере.

Пример 3.1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = \sin(x + y)$ в области D, которая ограничена осью Ox и прямыми линиями $x=\pi/4$, $x=\pi/2$, $y=x$.

Область D допускает представление вида (3.10)

$$D = \left\{(x, y) \mid \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le x\right\}.$$

Тогда

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^x \sin(x + y)dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(-\cos(x + y)\Big|_0^x \right) dx =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-\cos 2x + \cos x)dx = \left(-\frac{\sin 2x}{2} + \sin x \right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = (0 + 1) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}.$$

3.3. Замена переменных в двойном интеграле

Для замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

требуется рассмотреть функции вида

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u; v) \in G, \tag{3.16}$$

которые позволят представить область интегрирования *D* на координатной плоскости *Oxy* как образ некоторого множества *G* на координатной плоскости O^*uv. Величины *u*,*v* принято называть *криволинейными координатами*. Далее оговорим выполнение следующих условий:

1) Отображение $F:(u,v)\to(x,y)$, определенное в (3.16), является взаимнооднозначным и отображает область *G* на область *D* так, что внутренние точки области *G* переходят во внутренние точки области *D*, а граница области *G* отображается на границу области *D*.

2) Функции $x=x(u,v),\ \ y=y(u,v)$ непрерывно дифференцируемы внутри области *G*.

3) Для определителя

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (3.17)$$

во всех внутренних точках области *G* выполняется условие $J(u,v)\neq 0$.

Определитель вида (3.17) является детерминантом матрицы Якоби и называется *якобианом*. Понятие якобиана допускает геометрическое толкование.

Проиллюстрируем действие отображения (3.16) с помощью рис.3.3.

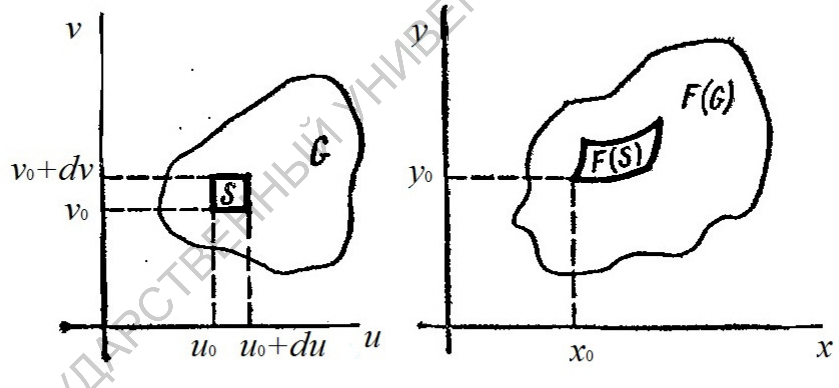

Рис.3.3.

Здесь $F:(u_0,v_0)\to(x_0,y_0)$. Обозначим площади прообраза *S* и образа *F*(*S*) соответственно mes*S* и mes*F*(*S*). Выясняется, что справедливо равенство

$$\lim_{\substack{du\to 0\\ dv\to 0}}\left(\frac{\mathrm{mes}S}{\mathrm{mes}F(s)}\right)=\left|J(u_0,v_0)\right|, \qquad (3.18)$$

где $\left|J(u_0,v_0)\right|$ – абсолютная величина якобиана. Подробный вывод для (3.18) можно найти в [3], основные идеи доказательства доступно изложены в [4].

Сформулируем теперь основной результат данного раздела. Если использовать отображение вида (3.16), для которого выполняются сформулированные выше условия 1-3, то справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3 (Замена переменных в двойном интеграле).

Пусть функция $f(x,y)$ *непрерывна на множестве D. Тогда*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv. \qquad (3.19)$$

Покажем далее, как можно применить результат теоремы 3.3.

Пример 3.2. Вычислить двойной интеграл I от функции $f(x,y)=x+y$ в области

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

Используем в качестве криволинейных координат на плоскости полярные координаты (r,φ). Тогда

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big) = r. \qquad (3.20)$$

Область-прообраз представляется в виде

$$G = \big\{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\big\}. \qquad (3.21)$$

Области D и G показаны на рис.3.4.

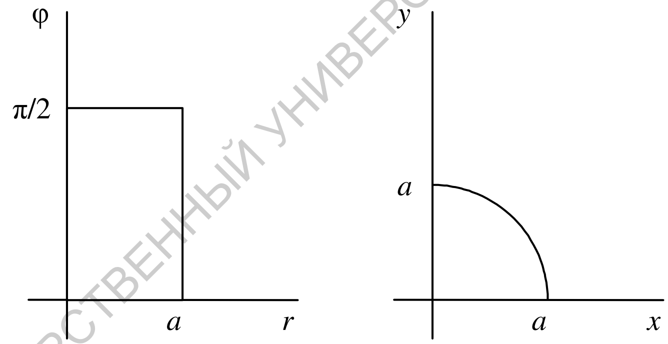

Рис.3.4.

С учетом (3.20),(3.21) имеем

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f\big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|drd\varphi =$$

$$= \iint_G (r\cos\varphi + r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int_0^a r^2dr \int_0^{\pi/2}(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi.$$

Вычисляя далее повторный интеграл, получим

$$I = \int_0^a \left[(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} \right] r^2 dr = \int_0^a 2r^2dr = \frac{2}{3}\big(r^3\big)\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3.$$

3.4. Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги)

Пусть $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$ – спрямляемая кривая. Представим кривую, как множество точек

$$\Gamma=\{(M(s), 0\le s\le S\}. \qquad (3.22)$$

Здесь $M(s)=(x(s), y(s), z(s))$, где параметр s – переменная длина дуги.

Если $M(0)=A, M(S)=B$, то кривую Г, ориентированную с помощью представления (3.22), то есть с отсчетом дуг от точки *A*, можно обозначать как кривую *AB*.

Пусть далее на Г задана числовая функция *F*, которая является функцией точки кривой $(x(s), y(s), z(s))$. Обычно пишут $F=F(x,y,z), (x,y,z)\in\Gamma$.

Определение 3.5. *Криволинейным интегралом первого рода* (*криволинейным интегралом по длине дуги*) *от функции F по кривой Г называется интеграл*

$$\int_\Gamma F(x,y,z)ds=\int_0^S F(x(s), y(s), z(s))ds. \qquad (3.23)$$

Отметим общие свойства криволинейного интеграла первого рода.

1) Если F непрерывна на кривой, то есть функция $F(x(s), y(s), z(s))$ непрерывна на отрезке [0,*S*], то интеграл $\int_\Gamma F(x,y,z)ds$ существует.

2) Если функция $F(x(s), y(s), z(s))$ интегрируема на отрезке [0,*S*], то криволинейный интеграл (3.23) является пределом соответствующих интегральных сумм.

3) Криволинейный интеграл первого рода по кривой не зависит от ее ориентации, так что $\int_{BA} F(x,y,z)ds=\int_{AB} F(x,y,z)ds$.

4) Пусть гладкая кривая Г задана с помощью произвольного параметра непрерывно дифференцируемым представлением $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),\ \ a\le t\le b$, без особых точек, то есть

$$[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2>0, \quad t\in[a,b].$$

Тогда имеет место формула

$$\int_\Gamma F(x,y,z)ds=\int_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt. \qquad (3.23)$$

В частном случае, когда плоская кривая Г является графиком функции $y=f(x)$ при $a\le x\le b$, можно использовать представление

$$\Gamma = \{ M(x, y) \mid x = x,\ y = f(x),\ a \le x \le b \}.$$

Тогда формула (3.23) принимает вид

$$\int_{\Gamma} F(x, y) ds = \int_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Пример 3.3. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} \sqrt{2y} ds$, где Γ – дуга параболы $y = x^2/2$ от точки (0,0) до точки (1, 1/2).

Используем представление $\Gamma = \{ M(x, y) \mid x = x,\ y = x^2,\ 0 \le x \le 1 \}$. Тогда

$$\int_{\Gamma} \sqrt{2y} ds = \int_0^1 \sqrt{2x^2/2} \cdot \sqrt{1 + (2x/2)^2} dx = \int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + x^2)^{1/2} d(1 + x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{3/2}}{3/2} \Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{8} - 1}{3}.$$

3.5. Криволинейные интегралы второго рода (по координатам)

Рассмотрим в пространстве гладкую ориентированную кривую Γ. Обозначим через $M \in \Gamma$ произвольную точку кривой. Пусть в каждой точке данной кривой определена векторная функция $\boldsymbol{a}(M)$. Выбрав начало отсчета в некоторой произвольной фиксированной точке O, введем в рассмотрение радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$.

Определение 3.6. *Криволинейным интегралом второго рода по гладкой ориентированной кривой* Γ *от векторной функции* $\boldsymbol{a}(M)$ *называется интеграл*

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r}. \tag{3.24}$$

Используем известное равенство $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\tau} ds$, где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к кривой Γ в текущей точке M. Тогда интеграл (3.24) можно представить в виде

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) ds. \tag{3.25}$$

Если точку O использовать как начало системы координат $Oxyz$, то становятся возможными следующие разложения векторов по базису

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \cos\alpha \boldsymbol{i} + \cos\beta \boldsymbol{j} + \cos\gamma \boldsymbol{k}.$$

Здесь α,β,γ – углы между касательной прямой к кривой Г и осями координат. Переходя в (3.25) к координатной форме, получим

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)ds. \qquad (3.26)$$

Отметим далее, не приводя доказательств, общие свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) Если функция $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$ непрерывна на кривой Г (то есть функции P, Q, R непрерывны на кривой Г), то интеграл (3.24) существует.

2) Интегралы $\int_{\Gamma} P(x, y, z)dx$, $\int_{\Gamma} Q(x, y, z)dy$, $\int_{\Gamma} R(x, y, z)dz$ являются пределами соответствующих интегральных сумм.

3) При изменении ориентации кривой криволинейный интеграл второго меняет только знак:

$$\int_{BA} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = -\int_{AB} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}.$$

4) Если гладкая ориентированная кривая Г допускает векторное представление

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad a \le t \le b,$$

то

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \int_a^b \left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)dt =$$

$$= \int_a^b \Big(P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\cdot y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\cdot z'(t)\Big)dt \qquad (3.27)$$

Приведем пример вычисления криволинейного интеграла по координатам.

Пример 3.4. Вычислить интеграл второго рода от функции $\boldsymbol{a}=(-y^2x)\boldsymbol{i}+(x^2y)\boldsymbol{j}$ вдоль плоской кривой

$$\Gamma:\ \begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

Используя формулу (3.27), получим

$$\int_{\Gamma} (-y^2x)dx + x^2ydy = \int_0^{\pi/2} \left(-\sin t\sqrt{\cos t}\frac{-\sin t}{2\sqrt{\cos t}} + \cos t\sqrt{\sin t}\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3.6. Формула Грина

Рассмотрим ограниченную замкнутую плоскую область D, границей которой является контур γ. Ориентируем γ по следующему правилу: направление обхода γ считается положительным, если при движении в этом направлении область G остается слева (рис.3.5)

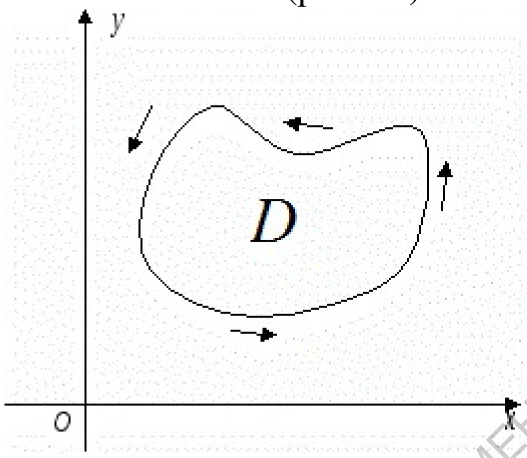

Рис.3.5.

Далее получим результат, который позволяет при определенных условиях связать значения двойного интеграла по области D и криволинейного интеграла по контуру γ.

Т е о р е м а 3.4 (Ф о р м у л а Г р и н а). *Пусть плоская область D допускает представления*

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$
$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$$

и γ – положительно ориентированный кусочно-гладкий контур области D. Пусть далее функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ вместе с частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны в области D и на контуре γ. Тогда

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy \qquad (3.28)$$

Докажем сначала справедливость равенства

$$\iint\limits_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_\gamma P(x, y)dx$$

Рассмотрим область D с контуром γ (рис.3.6).

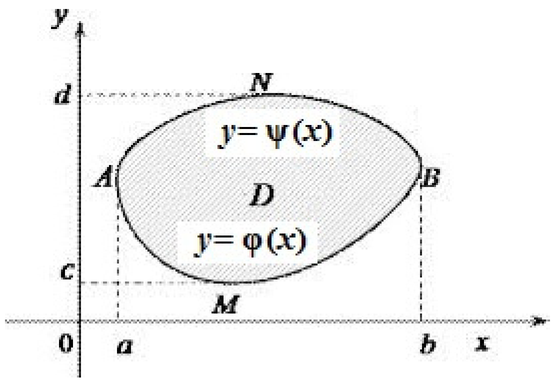

Рис.3.6.

Выразим двойной интеграл через повторный и выполним интегрирование

$$\iint\limits_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy = \int\limits_a^b \left(-P(x,\psi(x)) + P(x,\varphi(x))\right)dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(-P(x,\psi(x)) + P(x,\varphi(x))\right)dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx + \int\limits_b^a P(x,\psi(x))dx.$$

Заметим, что

$$\int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx = \int\limits_{AMB} P(x,y)dx, \quad \int\limits_b^a P(x,\psi(x))dx = \int\limits_{BNA} P(x,y)dx.$$

Тогда

$$\iint\limits_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{AMB} P(x,y)dx + \int\limits_{BNA} P(x,y)dx = \oint\limits_\gamma P(x,y)dx. \qquad (3.29)$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint\limits_\gamma Q(x,y)dy. \qquad (3.30)$$

Складывая соответственно, левые и правые части равенств (3.29) и (3.30), получаем формулу Грина (3.28).

Рассмотрим пример использования формулы Грина. Получим формулу для вычисления площади плоской фигуры через криволинейный интеграл.

П р и м е р 3.5. Пусть на плоскости *Oxy* дана ограниченная замкнутая область *D*, ограниченная кусочно-гладким контуром γ. Введем в рассмотрение функции $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=x$. Для этих функций в области *D* выполнены все условия теоремы 2.4. Применяя формулу (3.28), получим

$$\iint\limits_D 2dxdy = \oint\limits_\gamma xdy - ydx.$$

Про площадь области S_D из свойств двойного интеграла известно, что

$$S_D = \iint\limits_D dxdy\,.$$

Следовательно

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_\gamma xdy - ydx\,.$$

3.7. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования

Криволинейные интегралы второго рода используются для описания различных процессов в естественных науках и технических приложениях. В качестве доступного примера отметим, что величина

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz \qquad (3.31)$$

позволяет вычислить работу переменной силы $\boldsymbol{a}$ при перемещении точки приложения силы по криволинейной траектории из положения A в положение B.

Как известно, в физике особую роль отводится потенциальным (консервативным) силам. Работа таких сил не зависит от траектории движения и определяется только начальным и конечным положениями точки приложения силы. Примерами потенциальных сил являются сила тяжести, сила упругости, сила электростатического взаимодействия.

Рассмотрим различные формы критерия независимости интеграла

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (3.32)$$

от пути интегрирования. Оговорим при этом, что все кривые в наших рассуждениях полагаются кусочно-гладкими.

Т е о р е м а 3.5. *Пусть задана плоская область D и в ней определены непрерывные функции P(x,y), Q(x,y). Криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

при произвольно фиксированных точках $A \in D$, $B \in D$ не зависит от выбора кривой, их соединяющей и лежащей в D тогда и только тогда, когда для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$ выполняется равенство

$$\oint\limits_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,. \qquad (3.33)$$

Докажем теорему в части необходимости. Рассмотрим на контуре γ две различные произвольно выбранные точки A, B (рис.3.7).

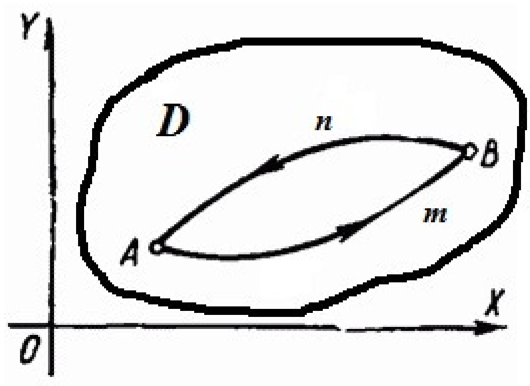

Рис.3.7.

Тогда

$$\int\limits_{AmB} Pdx+Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx+Qdy \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{AmB} Pdx+Qdy - \int\limits_{AnB} Pdx+Qdy = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \int\limits_{AmB} Pdx+Qdy + \int\limits_{BnA} Pdx+Qdy = 0 \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy = 0.$$

Докажем теорему в части достаточности. Рассмотрим кривые AmB и AnB, которые соединяют точки A, B и образуют при этом контур γ (рис.3.7). Тогда

$$\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy = 0 \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{AmB} Pdx+Qdy + \int\limits_{BnA} Pdx+Qdy = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \int\limits_{AmB} Pdx+Qdy - \int\limits_{AnB} Pdx+Qdy = 0 \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{AmB} Pdx+Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx+Qdy.$$

Теорема 3.6. *Пусть задана плоская область D и в ней определены непрерывные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$. Криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

при произвольно фиксированных точках $A\in D$, $B\in D$ не зависит от выбора кривой, их соединяющей и лежащей в D тогда и только тогда, когда выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, которая определена в D. При этом имеет место равенство

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A).$$

Доказательство теоремы 3.6 приводится в [3]. Заметим: если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ описывают компоненты силы, то $u(x,y)$ является потенциальной функцией. Теорема 3.6 позволяет представить силу вектором

$$\boldsymbol{a} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} = \operatorname{grad} u(x,y)$$

В этом случае сила $\boldsymbol{a}$ является потенциальной.

Результаты теорем 3.5, 3.6 трудно применять для решения задач. Для того, чтобы сформулировать и доказать критерий в форме, удобной для приложений, нам потребуется ввести новое понятие.

Определение 3.7. *Плоская область D называется односвязной, если любой простой контур* $\Gamma \subset D$ *ограничивает область* $G \subseteq D$.

На рис.3.8 приведены примеры односвязной и неодносвязной областей.

Рис.3.8. *A* – односвязная область. *B* – неодносвязная область.

Теорема 3.7. *Пусть задана плоская область D и в ней определены непрерывные функции P*(*x*,*y*), *Q*(*x*,*y*) *вместе с непрерывными производными* $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$. *Для того чтобы криволинейный интеграл*

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

при произвольно фиксированных точках $A \in D$, $B \in D$ *не зависел от выбора кривой, их соединяющей и лежащей в D необходимо, а при односвязности области D и достаточно, чтобы всюду в D выполнялось равенство*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.34}$$

Действительно, если интеграл (3.32) не зависит от пути интегрирования, то в силу теоремы 3.6 имеет место

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

и далее в силу равенства непрерывных смешанных производных второго порядка

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Если же выполняется равенство (3.34), то для интеграла по произвольно выбранному кусочно-гладкому контуру, целиком лежащему в *D*, получаем

$$\oint_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Последнее равенство в силу теоремы 3.5 означает, что интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования.

Пример 3.6. Даны функции $P(x,y) = x^4 + 4xy^3$ и $Q(x,y) = 6x^2y^2 - 5y^4$. Проверить, что выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом и вычислить криволинейный интеграл

$$J = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

от точки A(3,0) до точки B(-2,-1).

Так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^4 + 4xy^3\right) = 12xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(6x^2y^2 - 5y^4\right) = 12xy^2,$$

то $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$ и данный криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, то есть

$$J = \int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$$

Принимаем в качестве траектории интегрирования двухзвенную ломаную ANB, используя точку N(-2,0). Отрезки прямых AN и NB параллельны соответственно координатным осям Oy и Ox.

Представим

$$AN = \{(x,y) \mid x = -2, \quad -1 \le y \le 0\}, \quad NB = \{(x,y) \mid y = 0, \quad -2 \le x \le 3\}.$$

Тогда

$$J = \int\limits_{AN} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy + \int\limits_{NB} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (6(-2)^2y^2 - 5y^4)dy + \int\limits_{-2}^{3} x^4 dx = (8y^3 - y^5)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{3} = (0+7) + \frac{243+32}{5} = 62.$$

3.8. Приложения двойных и криволинейных интегралов к геометрическим задачам и к задачам естественных наук

Рассмотрим некоторые примеры приложений двойных и криволинейных интегралов.

Пример 3.7. Вычислить с помощью формулы

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_{\gamma} xdy - ydx$$

площадь эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Контур, охватывающий площадь, обходится в положительном направлении. Значит, параметр t изменяется от 0 до 2π. Искомая площадь

$$S=\frac{1}{2}\oint_{\gamma} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t-b\sin t\cdot(-a\sin t)\right)dt=\frac{ab}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\frac{ab}{2}\int_{0}^{2\pi}dt=$$

$$=\frac{ab}{2}t\Big|_0^{2\pi}=\frac{ab}{2}(2\pi-0)=\pi ab\text{ (кв.ед.)}$$

Пример 3.8. Найти центр тяжести однородной дуги окружности радиуса a, когда центральный угол равен 2φ.

Введем декартову систему координат: расположим начало координат в центре окружности, ось Ox направим вдоль оси симметрии рассматриваемой дуги (рис.3.9). Параметрические уравнения кривой запишутся в виде $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ -\varphi\le t\le\varphi$.

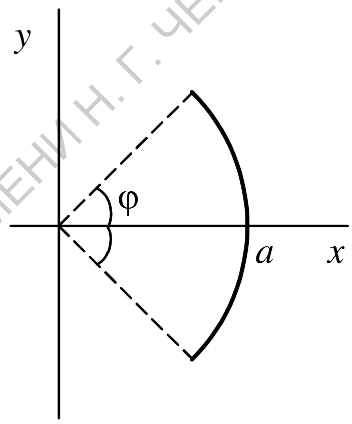

Рис.3.9

Дуга однородная, поэтому ее линейная плотность $\mu(x,y)=\mu_0=const$, а масса составляет

$$M=\int_{\gamma}\mu ds=\mu_0\int_{\gamma}ds=\mu_0 s=\mu_0\cdot 2\varphi a=2\mu_0\varphi a.$$

Определяем координаты центра тяжести:

$$x_C=\frac{1}{M}\int_{\gamma}x\mu ds=\frac{1}{2\mu_0\varphi a}\int_{\gamma}x\mu_0 ds=\frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi}x(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi}a\cos t\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt=\frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi}a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi}a\cos t\cdot\sqrt{a^2}dt=\frac{1}{2\varphi a}\cdot a^2\int_{-\varphi}^{\varphi}\cos tdt=\frac{a}{2\varphi}\cdot 2\int_{0}^{\varphi}\cos tdt=\frac{a}{\varphi}\sin t\Big|_0^{\varphi}=$$

$$=\frac{a}{\varphi}(\sin\varphi-\sin 0)=\frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

$$y_C=\frac{1}{M}\int_\gamma y\mu ds=\frac{1}{2\mu_0\varphi a}\int_\gamma y\mu_0 ds=\frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi} a\sin t\sqrt{\left(-a\sin t\right)^2+\left(a\cos t\right)^2}\,dt=\frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi} a\sin t\cdot\sqrt{a^2}\,dt=\frac{a}{2\varphi}\int_{-\varphi}^{\varphi}\sin t dt=$$

$$=\frac{a}{2\varphi}\cdot 0=0.$$

Таким образом, искомый центр тяжести лежит на оси симметрии дуги на расстоянии $(a\sin\varphi)/\varphi$ от центра окружности.

П р и м е р 3.9. Доказать, что объём прямого цилиндра, срезанного плоскостью, не обязательно параллельной основанию, равен площади основания, умноженной на высоту над центром тяжести основания

Введем декартову систему координат, совместив координатную плоскость Oxy с плоскостью основания цилиндра. Уравнение плоскости, рассекающей цилиндр, представим в виде $z=ax+by+c$. Обозначим через H_C высоту над центром тяжести $C(x_C,y_C,0)$ основания S (рис.3.10). Очевидно, что $H_C=ax_C+by_C+c$.

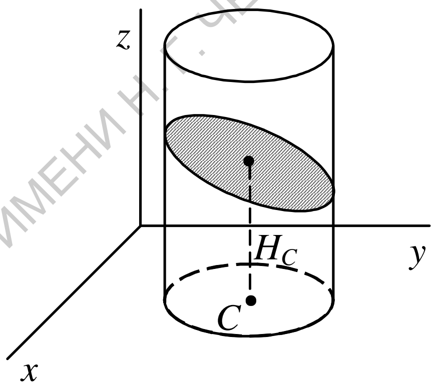

Рис.3.10

Объём части цилиндра, ограниченной сверху данной плоскостью, равен

$$V=\iint_S f(x,y)dxdy=\iint_S(ax+by+c)dxdy=a\iint_S xdxdy+b\iint_S ydxdy+c\iint_S dxdy=$$

$$=a\cdot Sx_C+b\cdot Sy_C+c\cdot S=S(ax_C+by_C+c)=SH_C.$$

Что и требовалось доказать.

П р и м е р 3.10. Найти момент инерции сегмента с радиусом a и центральным углом 2α относительно оси симметрии.

Введем декартову систему координат: начало координат – в центре окружности, ось Ox направим вдоль оси симметрии сегмента (рис.3.11).

Момент инерции сегмента относительно оси симметрии равен

$$J_x=\iint_S y^2dxdy.$$

Сегмент S ограничен прямой $x=a\cos\alpha$ и окружностью $x^2+y^2=r^2$. Учтём симметрию области интегрирования относительно оси Ox и чётность подынтегральной функции относительно переменной y.

Тогда

$$J_x = \iint_S y^2 dxdy = 2\iint_{S_1} y^2 dxdy .$$

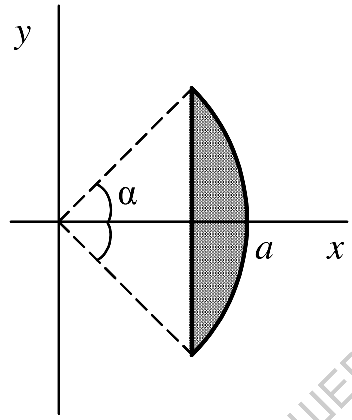

Рис.3.11

Область интегрирования представляет собой часть круга, поэтому удобно перейти к полярным координатам (r,φ) по формулам $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Представим область интегрирования G как множество

$$G = \left\{ (r,\varphi) \,\middle|\, \frac{a\cos\alpha}{\cos\varphi} \le r \le a,\ -\alpha \le \varphi \le \alpha \right\}$$

Переходя в двойном интеграле к полярным координатам, получим

$$J_x = 2\iint_G (r\sin\varphi)^2 r dr d\varphi = 2\int_0^\alpha \sin^2\varphi d\varphi \int_{\frac{a\cos\alpha}{\cos\varphi}}^{a} r^3 dr = 2\int_0^\alpha \sin^2\varphi \left(\left. \frac{r^4}{4} \right|_{\frac{a\cos\alpha}{\cos\varphi}}^{a} \right) d\varphi =$$

$$= 2\int_0^\alpha \sin^2\varphi \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^4\cos^4\alpha}{4\cos^4\varphi} \right) d\varphi = 2\cdot\frac{a^4}{4}\int_0^\alpha \left(\sin^2\varphi - \cos^4\alpha \frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^\alpha \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi - \frac{a^4\cos^4\alpha}{2}\int_0^\alpha \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi = \frac{a^4}{4}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_0^\alpha -$$

$$- \frac{a^4\cos^4\alpha}{2}\int_0^\alpha \operatorname{tg}^2\varphi\, d(\operatorname{tg}\varphi) = \frac{a^4}{4}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right) - \frac{a^4\cos^4\alpha}{2} \left. \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3} \right|_0^\alpha =$$

$$= \frac{a^4}{4}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right) - \frac{a^4}{6}\cos^4\alpha \operatorname{tg}^3\alpha = \frac{a^4}{4}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right) - \frac{a^4}{6}\cos\alpha\sin^3\alpha.$$

Пример 3.11. Пусть имеется один моль идеального газа, для которого можно использовать уравнение состояния

$$pV = RT \tag{3.35}$$

В формуле (3.35) обозначено: p – давление, V – объем, T – абсолютная температура, а также $R=c_p-c_V$, где константы c_p, c_V соответственно представляют молярную теплоемкость газа при постоянном давлении и постоянном объеме. Известно, что количество теплоты, получаемое газом при переходе из состояния (p_1,V_1) в состояние (p_2,V_2) определяется выражением

$$Q = \int_{\Gamma} \frac{c_p}{R} pdV + \frac{c_V}{R} Vdp \tag{3.36}$$

Здесь кривая Г – траектория перехода на плоскости (p,V) из начального состояния в конечное.

1) Рассмотрим изотермический процесс, при котором T=const в уравнении состояния (3.35). Представим $p=RT/V$ и выразим криволинейный интеграл в формуле (3.36), считая V за параметр. Получим

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{c_p}{R} \frac{RT}{V} + \frac{c_V}{R} VRT \left(\frac{-1}{V^2} \right) \right) dV = T(c_p - c_V) \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = TR \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

2) Рассмотрим теперь адиабатический процесс, при котором

$$pV^{\gamma} = C, \quad C = \text{const}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V}. \tag{3.37}$$

Из уравнения адиабаты (3.37) выразим $p = C \cdot V^{-\gamma}$. Тогда для количества тепла Q в соответствии с (3.36) получим выражение

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{c_p}{R} CV^{-\gamma} + \frac{c_V}{R} V(-\gamma) CV^{-\gamma-1} \right) dV$$

и далее

$$Q = \frac{C}{R} \cdot \int_{V_1}^{V_2} \left(c_p V^{-\gamma} - c_V \frac{c_p}{c_V} V^{-\gamma} \right) dV = 0$$

вне зависимости от начального и конечного состояний. Последний результат означает, что при адиабатическом переходе идеальный газ не получает и не отдает тепло.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. М.: Физматлит. Ч.1 – 2005. – 648 с.

2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Изд-во: АСТ, Астрель – 2006.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3т. Т.2. – М.: Высш. шк., 1988. – 576 с.

4. Математика: Учебное пособие / Под ред. Л.Н.Журбенко, Г.А.Никоновой – М.: ИНФРА-М, 2009. – 496 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Новиков Владимир Васильевич
Серебряков Андрей Владимирович
Нагар Юлия Николаевна

ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

Ответственный за выпуск А.В. Серебряков
Оригинал-макет А.В. Серебряков

Подписано в печать 02.03.2016 г.
Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman Печать RISO.
Объем 4,0 печ.л. Тираж 100 экз. Заказ № 259

413100, Россия, Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17.
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.