Министерство образования и науки Российской Федерации
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.
Энгельсский технологический институт

В.В. Новиков, А.В. Серебряков

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Методические указания
для студентов всех направлений
очной и заочной форм обучения

Энгельс 2016 г.

УДК 512; 514; 517
ББК 22.1
Н 73

Н 73 Новиков В.В. Практикум по математике. Методические указания / В.В. Новиков, А.В. Серебряков. – Энгельс: Изд-во ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А. – 2016. – 61 с.

Рецензенты: зав.кафедрой «Техническая физика и информационные технологии» ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., к.ф.-м.н., доц. Терин Д.В.; профессор кафедры «Техническая физика и информационные технологии» ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., д.ф.-м.н., проф. Клинаев Ю.В.

Практикум предназначен для методического обеспечения практических занятий и самостоятельной работы студентов при изучении дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Линейная алгебра».

В работе представлен материал по следующим разделам: алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды. Для каждого раздела приведены краткие сведения из теории, рассмотрены примеры решения типовых задач, представлены варианты заданий для контрольных работ и самостоятельной работы студентов. Приведен также список рекомендованной учебной литературы.

УДК 512; 514; 517
ББК 22.1

Одобрено редакционно-издательским советом
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Брошюра издается в авторской редакции

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пример 1.1. Даны координаты точек $A_1(6;1;1)$, $A_2(4;6;6)$, $A_3(4;2;0)$, $A_4(1;2;6)$. Известно, что отрезки A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 являются смежными ребрами параллелепипеда. Требуется найти:

1) длину ребра A_1A_2;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) площадь грани, содержащей вершины A_1,A_2,A_3;
4) объем параллелепипеда;
5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
6) угол между ребром A_1A_4 и гранью, содержащей вершины A_1,A_2,A_3;
7) расстояние от вершины A_4 до плоскости A_1,A_2,A_3.

Решение.

1) Используя формулу расстояния между точками пространства, находим

$$|A_1A_2| = \sqrt{(4-6)^2 + (6-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{4+25+25} = \sqrt{54} \approx 7{,}34.$$

2) Будем искать угол φ между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$. Сначала вычислим координаты этих векторов

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (4-6;\ 6-1;\ 6-1) = (-2;\ 5;\ 5),\quad \overrightarrow{A_1A_4} = (1-6;\ 2-1;\ 6-1) = (-5;\ 1;\ 5).$$

Затем, используя формулу для скалярного произведения в координатах, найдем косинус угла φ

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{-2\cdot(-5)+5\cdot 1+5\cdot 5}{\sqrt{(-2)^2+5^2+5^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+1^2+5^2}} = \frac{40}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{51}} \approx 0{,}76.$$

Теперь находим сам угол

$$\varphi \approx \arccos 0{,}76 \approx 40{,}53^\circ.$$

3) Грань можно рассматривать, как параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Его площадь вычислим по формуле

$$S = \left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

Ищем сначала координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (4-6;\ 2-1;\ 0-1) = (-2;\ 1;\ -1).$$

Теперь находим координаты векторного произведения $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$

$$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = -10\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k},$$

и его длину

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-10)^2 + (-12)^2 + 8^2} = \sqrt{308} = 2\sqrt{77}.$$

Таким образом, искомая площадь равна $S = \left|\vec{a}\right| = 2\sqrt{77} \approx 17{,}55$.

4) Объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равен модулю смешанного произведения этих векторов $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. В нашем случае $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3}$, $\vec{c} = \overrightarrow{A_1A_4}$. Координаты этих векторов уже найдены, поэтому, используя формулу для смешанного произведения в координатах, получаем

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_z & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(1\cdot5 - 1\cdot1) - 5(-2\cdot5 - 1\cdot(-5)) + 5\cdot(-2\cdot1 - 1\cdot(-5)) =$$

$$= 2\cdot6 - 5\cdot(-15) + 5\cdot3 = -12 + 75 + 15 = 78.$$

Итак, $V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| = |78| = 78$. Отметим, что отрицательное значение смешанного произведения $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ означало бы, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

5) Уравнение плоскости, проходящей через точки $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_B - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим наши данные и упростим полученное уравнение

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-1 \\ 4-6 & 6-1 & 6-1 \\ 4-6 & 2-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-1 \\ -2 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)\cdot(-10) + (y-1)\cdot(-12) + (z-1)\cdot8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10x - 12y + 8z + 64 = 0 \Leftrightarrow 5x + 6y - 4z - 32 = 0.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$5x + 6y - 4z - 32 = 0. \qquad (1.1)$$

6) Подлежащий определению угол α между вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$ и плоскостью $A_1A_2A_3$ в сумме с острым углом β между $\overrightarrow{A_1A_4}$ и нормальным вектором $\vec{N}$ этой плоскости дает $90°$. Поэтому $\sin\alpha = \sin(90° - \beta) = \cos\beta$. Здесь предполагается, что из двух возможных направлений вектора $\vec{N}$ выбрано то, при

котором угол между $\vec{N}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$ – острый. В предыдущем пункте мы нашли уравнение (1.1) плоскости $A_1A_2A_3$, определив тем самым и координаты ее нормального вектора $\vec{n}=(5;\,6;\,-4)$. Подчеркнем, что пока неясно, как следует выбрать упомянутый выше вектор $\vec{N}$: можно ли положить $\vec{N}=\vec{n}$ или же следует взять за $\vec{N}$ противоположно направленный вектор $\vec{N}=-\vec{n}$. Вычислим косинус угла γ между $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$. Имеем

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{A_1A_4}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{-5\cdot 5+1\cdot 6+5\cdot(-4)}{\sqrt{(-5)^2+1^2+5^2}\sqrt{5^2+6^2+(-4)^2}}=\frac{-39}{\sqrt{51}\sqrt{77}}\approx -0{,}62\,.$$

Поскольку $\cos\gamma<0$, угол γ – тупой и нам следует положить $\vec{N}=-\vec{n}=(-5;\,-6;\,4)$. Тогда $\beta=180^\circ-\gamma$,

$$\sin\alpha=\cos\beta=\cos(180^\circ-\gamma)=-\cos\gamma=\frac{39}{\sqrt{51}\sqrt{77}},$$

откуда $\alpha=\arcsin\dfrac{39}{\sqrt{51}\sqrt{77}}\approx\arcsin 0{,}62=38{,}31^\circ$.

7) Расстояние d от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости с общим уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0$$

вычисляется по формуле

$$d=\frac{\left|Ax_0+B\,y_0+C\,z_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Подставляя в эту формулу коэффициенты уравнения (1.1) и координаты точки $A_4(1;\,2;\,6)$, находим

$$d=\frac{\left|5\cdot 1+6\cdot 2+(-4)\cdot 6-32\right|}{\sqrt{5^2+6^2+(-4)^2}}=\frac{39}{\sqrt{77}}=\frac{39\sqrt{77}}{77}\approx 4{,}44\,.$$

Задание 1.1. Даны координаты точек A_1, A_2, A_3, A_4. Известно, что отрезки A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 являются смежными ребрами параллелепипеда. Требуется найти:

1) длину ребра A_1A_2;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;
3) площадь грани, содержащей вершины A_1,A_2,A_3;
4) объем параллелепипеда;
5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
6) угол между ребром A_1A_4 и гранью, содержащей вершины A_1, A_2, A_3;
7) расстояние от вершины A_4 до плоскости A_1,A_2,A_3.

1. $A_1(0;3;2)$, $A_2(-1;3;6)$, $A_3(-2;4;2)$, $A_4(0;5;4)$.

2. $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$.

3. $A_1(-1;2;0)$, $A_2(-2;2;4)$, $A_3(-3;3;0)$, $A_4(-1;4;2)$.

4. $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$.

5. $A_1(2;2;3)$, $A_2(1;2;7)$, $A_3(0;3;3)$, $A_4(2;4;5)$.
6. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10)$, $A_4(7;5;9)$.
7. $A_1(0;-1;2)$, $A_2(-1;-1;6)$, $A_3(-2;0;2)$, $A_4(0;1;4)$.
8. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.
9. $A_1(3;0;2)$, $A_2(2;0;6)$, $A_3(1;1;2)$, $A_4(3;2;4)$.
10. $A_1(10;6;6)$, $A_2(-2;8;2)$, $A_3(6;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.

Пример 1.2. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

$$2x-3y+13=0, \qquad (1.2)$$
$$3x+2y-26=0 \qquad (1.3)$$

и одна из вершин $O(0;0)$. Найти уравнения двух других сторон и координаты оставшихся трех вершин. Выполнить чертеж.

Решение. Обозначим прямые (1.2) и (1.3) через l_1 и l_2 соответственно. Поскольку точка $O(0;0)$ не лежит ни на одной из этих прямых, точка их пересечения $B=l_1\cap l_2$ является вершиной, противолежащей вершине O, иными словами, отрезок OB есть диагональ прямоугольника. Пусть l_1' и l_2' – прямые, параллельные прямым l_1 и l_2 соответственно и проходящие через точку O, и пусть $A=l_1\cap l_2'$, $C=l_2\cap l_1'$. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ параллельно заданной прямой $Ax+By+C=0$ имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Подставляя в него коэффициенты прямых l_1 и l_2 и координаты точки O, получим уравнения прямых l_1' и l_2'

$$l_1':\ 2\cdot(x-0)-3\cdot(y-0)=0 \Leftrightarrow 2x-3y=0,$$
$$l_2':\ 3\cdot(x-0)+2\cdot(y-0)=0 \Leftrightarrow 3x+2y=0.$$

После того, как получены уравнения всех сторон прямоугольника, найдем его вершины A,B,C. Каждая такая вершина есть точка пересечения прямых, содержащих соответствующие смежные стороны. Поэтому координаты вершин можно искать, решая совместно уравнения соответствующих прямых. Имеем

$$A(x_A;\,y_A)=l_1\cap l_2' \Rightarrow \begin{cases}2x_A-3y_A+13=0\\3x_A+2y_A=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_A=-2\\y_A=4,\end{cases}$$

$$B(x_B;\,y_B)=l_1\cap l_2 \Rightarrow \begin{cases}2x_B-3y_B+13=0\\3x_B+2y_B-26=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B=4\\y_B=7,\end{cases}$$

$$C(x_C;\,y_C)=l_1'\cap l_2 \Rightarrow \begin{cases}2x_C-3y_C=0\\3x_C+2y_C-26=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_C=6\\y_C=4.\end{cases}$$

Сделаем чертеж (рис.1.1).

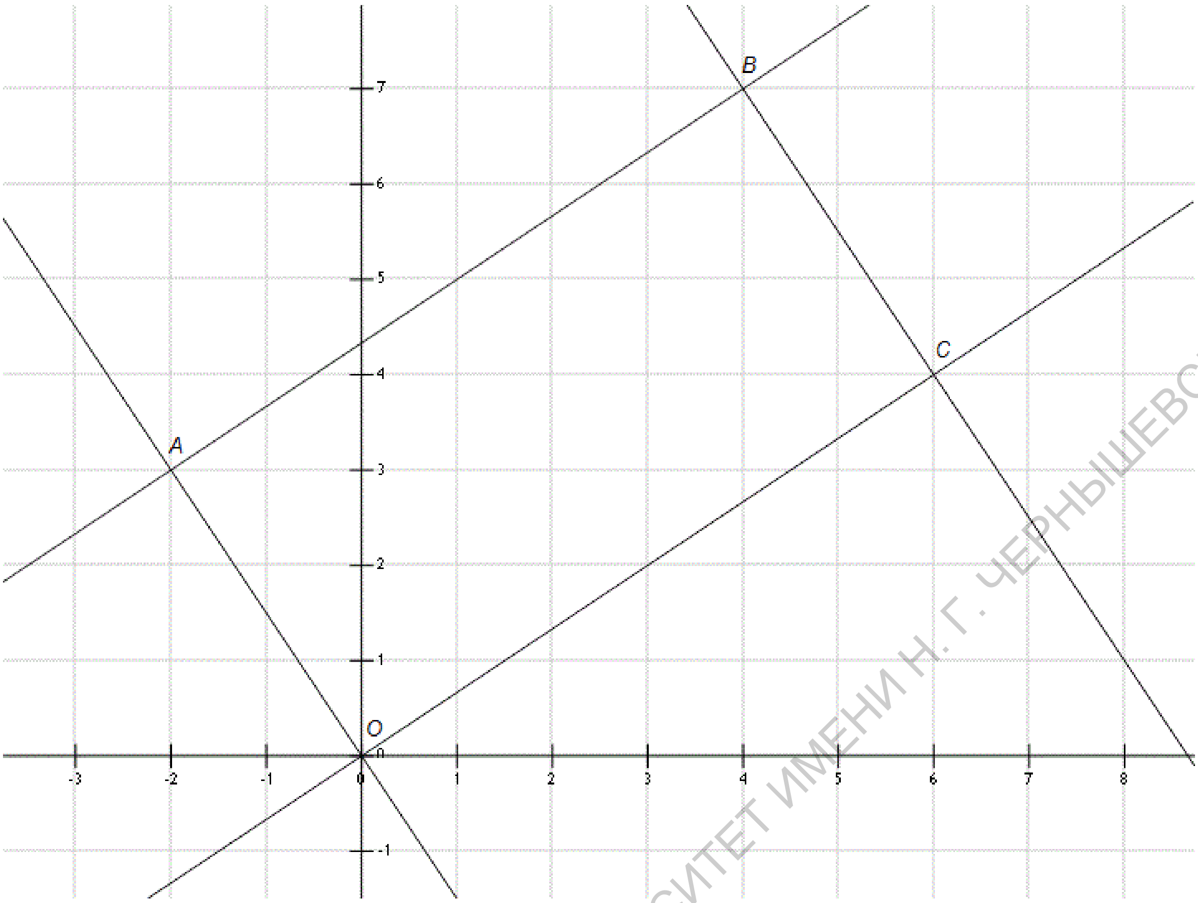

Рис. 1.1.

Задание 1.2.

1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $x+2y+1=0$ и $2x+y-3=0$. Центр параллелограмма находится в точке $A(1;2)$. Найти уравнения двух других сторон. Выполнить чертеж.

2. Даны две вершины треугольника $A(2;1)$, $B(4;9)$ и точка пересечения высот $N(3;4)$. Найти уравнения сторон треугольника. Выполнить чертеж.

3. Даны две противоположные вершины квадрата $A(1;3)$, $C(-1;1)$. Найти координаты двух его других вершин и составить уравнения сторон. Выполнить чертеж.

4. Найти уравнения сторон треугольника, если заданы его вершина $A(1;3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$, $y-1=0$. Выполнить чертеж.

5. Известны уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-3=0$ и точка пересечения диагоналей $N(-2;0)$. Найти уравнения остальных его сторон. Выполнить чертеж.

6. Уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $2x-y+8=0$, $x-2y-12=0$. Точка $N(4;0)$ лежит на основании треугольника. Найти уравнение основания. Выполнить чертеж.

7. Найти уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2;-7)$, а также уравнения высоты $3x+y+11=0$ и медианы $x+2y+7=0$, проведенных из различных вершин. Выполнить чертеж.

8. Точка A(5;-4) является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой x-7y-8=0. Написать уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата. Выполнить чертеж.

9. Уравнение основания равнобедренного треугольника x+y-1=0, уравнение боковой стороны x-2y-2=0. Точка N(-2;0) лежит на другой боковой стороне. Найти уравнение этой стороны. Выполнить чертеж.

10. Даны уравнения медиан треугольника 5x+4y=0 и 3x-y=0 и одна из его вершин A(-5;2). Найти уравнения сторон треугольника. Выполнить чертеж.

Пример 1.3. Составить уравнение и построить гиперболу, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, а точки $A(6;\,-1)$ и $B\left(-8;\,2\sqrt{2}\right)$ принадлежат гиперболе.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1.4}$$

Чтобы определить полуоси a и b, подставим координаты точек $A(6;\,-1)$ и $B\left(-8;\,2\sqrt{2}\right)$ в уравнение (1.4). В результате получим систему двух уравнений относительно неизвестных a и b. Находим

$$\begin{cases}\dfrac{6^2}{a^2}-\dfrac{(-1)^2}{b^2}=1\\ \dfrac{(-8)^2}{a^2}-\dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{36}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\\ \dfrac{64}{a^2}-\dfrac{8}{b^2}=1.\end{cases}$$

Положим $u=\dfrac{1}{a^2},\ v=\dfrac{1}{b^2}$, и решим полученную линейную относительно неизвестных u и v систему

$$\begin{cases}36u-v=1\\ 64u-8v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}288u-8v=8\\ 64u-8v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}224u=7\\ 8v=64u-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{7}{224}=\dfrac{1}{32}\\ v=\dfrac{1}{8}\left(64\cdot\dfrac{1}{32}-1\right)=\dfrac{1}{8}.\end{cases}$$

Таким образом, искомое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$$

Чтобы построить гиперболу, заметим, что ее действительная и мнимая полуоси равны, соответственно, $a=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\approx 5{,}6$ и $b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2{,}8$. Отсюда следует, что вершины гиперболы расположены в точках $A_1\left(-4\sqrt{2};0\right)$ и $A_2\left(4\sqrt{2};0\right)$. Асимптоты $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ в нашем случае имеют вид $y=\pm\frac{x}{2}$. Они являются продолжениями диагоналей характеристического прямоугольника, т.е. прямоугольника, ограниченного прямыми $x=\pm a,\ y=\pm b$. Построив сначала этот прямоугольник и асимптоты, мы можем затем достаточно точно изобразить обе ветви гиперболы (см. рис. 1.2).

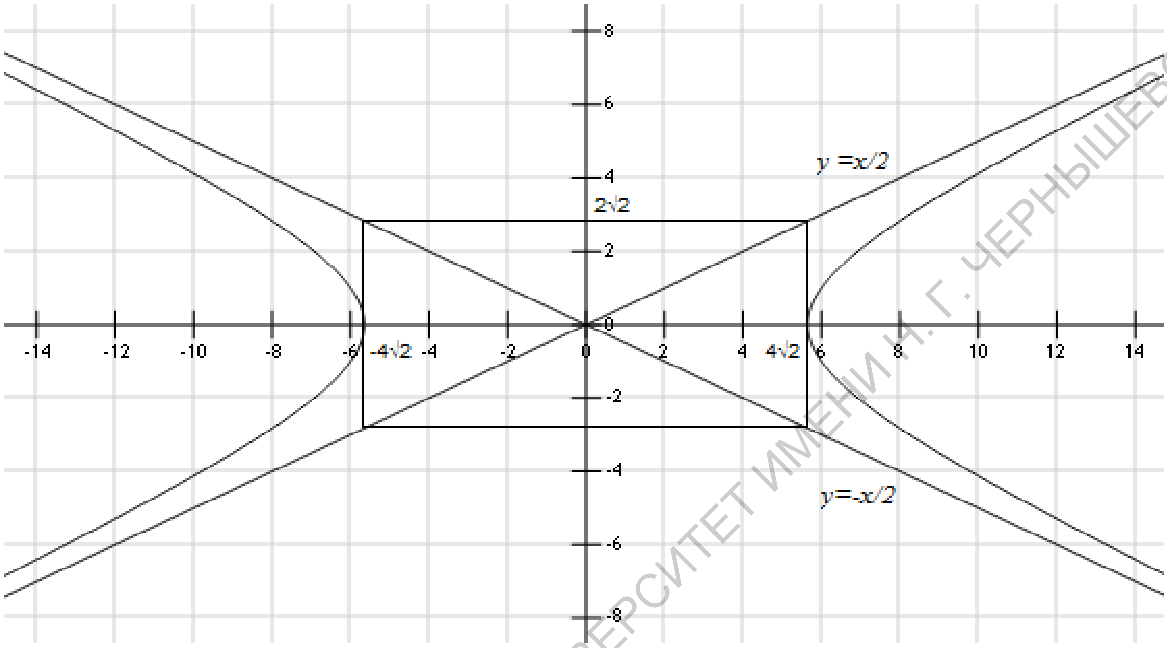

Рис.1.2.

Задание 1.3.

1. Составить уравнение и построить окружность, проходящую через точки $A(1;2)$, $B(0;-1)$ и $C(-3;0)$.

2. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(0;1)$ в два раза меньше расстояния ее до прямой y-4=0.

3. Составить уравнение и построить линию, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(-3;0)$ и $B(3;0)$ равна 50.

4. Составить уравнение и построить линию, расстояние от каждой точки которой до точки $A(-1;1)$ вдвое меньше расстояния до точки $B(-4;4)$.

5. Составить уравнение и построить линию, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $A(-2;0)$ и $B(2;0)$ равна $2\sqrt{5}$.

6. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от точки $F(2;2)$ и оси Ox.

7. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от точки $A(2;0)$ и прямой $5x+8=0$ относятся как 5:4.

8. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5;0)$ относятся как 2:1.

9. Составить уравнение и построить гиперболу, проходящую через точку $N(9;8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y=\pm(2\sqrt{2}/3)x$.

10. Составить уравнение и построить гиперболу, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса $5x^2+8y^2=40$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ

Пример 2.1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3 \qquad\qquad = -1 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-7 \\ 3x_1-7x_2+x_3-5x_4=-8 \\ \qquad\quad x_2-x_3-x_4=-1 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Решение. Исключим из второго и третьего уравнений неизвестную x_1. Для этого умножим первое уравнение на 2 и вычтем из второго, затем умножим первое на 3 и вычтем из третьего. Имеем

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3 \qquad\qquad = -1 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-7 \\ 3x_1-7x_2+x_3-5x_4=-8 \\ \qquad\quad x_2-x_3-x_4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-4x_2+2x_3 \qquad\qquad = -1 \\ \qquad 5x_2-5_3-5x_4=-5 \\ 3x_1-7x_2+x_3-5x_4=-8 \\ \qquad\quad x_2-x_3-x_4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-4x_2+2x_3 \qquad\qquad = -1 \\ \qquad 5x_2-5_3-5x_4=-5 \\ \qquad 5x_2-5_3-5x_4=-5 \\ \qquad\quad x_2-x_3-x_4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-4x_2+2x_3 \qquad\qquad = -1 \\ \qquad\quad x_2-x_3-x_4=-1. \end{cases} \qquad (2.2)$$

После исключения неизвестной x_1 мы получили систему, в которой последние три уравнения пропорциональны. Оставив в системе только одно из них (четвертое, как наиболее простое), получим «укороченную» систему (2.2) двух уравнений, эквивалентную исходной. Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_2, а неизвестные x_3 и x_4 будем считать свободными, затем выразим базисные переменные через свободные

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3 \qquad\qquad = -1 \\ \qquad\quad x_2-x_3-x_4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1+4x_2-2x_3 \\ x_2=-1+x_3+x_4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1+4(-1+x_3+x_4)-2x_3 \\ x_2=-1+x_3+x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-5+2x_3+4x_4 \\ x_2=-1+x_3+x_4. \end{cases}$$

Переобозначим свободные переменные другими буквами $x_3 = s,\ x_4 = t$. Тогда окончательно общее решение системы (2.1) можно записать в виде

$$x_1 = -5 + 2s + 4t,$$
$$x_2 = -1 + s + t,$$
$$x_3 = s,$$
$$x_4 = t,$$

где параметры $s, t \in \mathbb{R}$ могут принимать произвольные действительные значения.

Замечание. Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) позволяет не только решать систему, но и одновременно исследовать вопрос о существовании решения. Если бы исходная система была несовместной (не имеющей решений), то в ходе преобразования ее к «трапецевидной» форме (2.2) мы обязательно получили бы среди уравнений неверное числовое равенство (например, 3=7). Тем самым было бы установлено, что система решений не имеет.

Задание 2.1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5, \\ 2x_1-x_2+3x_3=4, \\ 5x_2+6x_3+x_4=11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+6x_4+x_5=4, \\ 3x_1-x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1+3x_2+5x_3=9. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+6x_4+x_5=6, \\ x_1+5x_3+x_4-7x_5=6, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4+x_5=6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5=5, \\ -2x_2+4x_3+x_4+x_5=3, \\ x_1-3x_2+5x_3=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=4, \\ 2x_1+x_3-3x_4+5x_5=3, \\ 3x_1-x_3+6x_4+x_5=6. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -2x_1-x_2+2x_3=2, \\ x_1+x_2+4x_3+x_4+3x_5=8, \\ 3x_1+x_2-x_3=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1+x_3-x_4+x_5=2, \\ 4x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5=7, \\ -x_1+x_3+2x_4+x_5=2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 6x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=9, \\ -x_1-x_3+7x_4+8x_5=14, \\ x_1+2x_3+x_4+x_5=3. \end{cases}$

9.
$$\begin{cases} -2x_1+3x_3+x_4+x_5=5, \\ 3x_1+x_2+x_3+6x_4+2x_5=9, \\ -x_1+2x_3-x_4+2x_5=3. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} 2x_1+3x_3+x_4=4, \\ x_1-x_3+2x_4+3x_5=4, \\ 3x_1+3x_2+6x_3+3x_4+6x_5=15. \end{cases}$$

Пример 2.2. Дано комплексное число $z=\dfrac{16}{1-i\sqrt{3}}$. Требуется:

1) записать число z в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;
2) найти все корни уравнения $w^3+z=0$, изобразить эти корни на плоскости комплексной переменной.

Решение.

1) Сначала выполним указанные действия. Чтобы разделить на комплексное число в алгебраической форме, домножим числитель и знаменатель исходной дроби на число, сопряженное к знаменателю

$$z=\frac{8}{1-i\sqrt{3}}=\frac{8}{1-i\sqrt{3}}\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{8+8\sqrt{3}i}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2+2\sqrt{3}i.$$

Мы получили алгебраическую форму заданного числа $z=x+iy$, в нашем случае $x=2$, $y=2\sqrt{3}$. Найдем теперь его тригонометрическую

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

и показательную

$$z=re^{i\varphi}$$

формы. Вычислим модуль r числа z. Имеем

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=4.$$

Записывая z в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=4\left(\dfrac{2}{4}+i\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\right)=4\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, замечаем, что $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Таким образом, тригонометрическая и показательная формы записи числа z имеют, соответственно, вид

$$z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\qquad z=4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2) Корни уравнения $w^3+z=0$ найдем из равенства $w=\sqrt[3]{-z}$. Если комплексное число $a\neq 0$ записано в тригонометрической форме

$$a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

то корни степени n из a (их количество равно числу n) определяются по формуле

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ n=0,1,\ldots,n-1. \qquad (2.3)$$

Запишем число $a=-z=-4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в тригонометрической форме. Учитывая, что $|z|=|-z|=4$, будем иметь $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ откуда $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$. Теперь находим корни по формуле (2.3). При $k=0$ имеем

$$w_0=\left(\sqrt[3]{a}\right)_0=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right),$$

при $k=1$ получаем

$$w_1=\left(\sqrt[3]{a}\right)_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{3}+i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{3}\right)=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right),$$

наконец, при $k=2$ находим

$$w_2=\left(\sqrt[3]{a}\right)_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 2}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}\right)=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)\right).$$

Последнее преобразование (переход от значения угла $\alpha=\frac{10\pi}{9}$ к значению $\alpha=-\frac{8\pi}{9}=\frac{10\pi}{9}-2\pi$) является необязательным. Мы провели его только для того, чтобы в ответе фигурировало главное значение аргумента числа w_2, т.е. чтобы угол α удовлетворял условию $\alpha\in(-\pi,\pi]$. Итак, корнями уравнения $w^3+z=0$, где $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ являются числа

$$w_0=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right),\quad w_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right),$$

$w_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$. На комплексной плоскости эти числа изображаются точками, совпадающими с вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ с центром в начале координат (рис. 2.1).

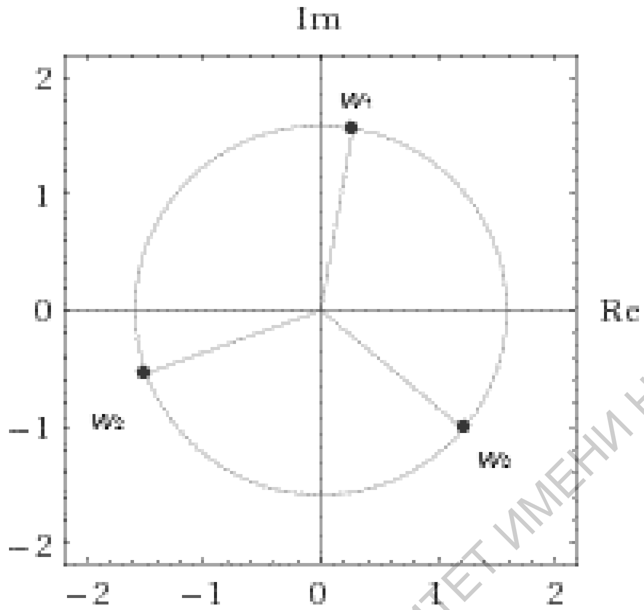

Рис. 2.1.

Замечание. В нашем примере величина угла φ легко угадывалась, поскольку $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ принимали хорошо известные, «табличные» значения. В общем случае главное значение аргумента комплексного числа $z = x + iy$ определяется из соотношений

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Задание 2.2. Дано комплексное число *z*. Требуется:

1) записать число *z* в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;
2) найти все корни уравнения $w^3 + z = 0$, изобразить эти корни на плоскости комплексной переменной.

1. $z = \dfrac{8}{1 + i\sqrt{3}}$. **2.** $z = -\dfrac{\sqrt{8}}{1 + i}$. **3.** $z = \dfrac{\sqrt{8}}{1 - i}$.

4. $z = \dfrac{2}{1 - i\sqrt{3}}$. **5.** $z = -\dfrac{2}{\sqrt{3} - i}$. **6.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{3} + i}$.

7. $z = \dfrac{-4}{1 - i\sqrt{3}}$. **8.** $z = \dfrac{-\sqrt{8}}{1 - i}$. **9.** $z = \dfrac{\sqrt{8}}{1 + i}$.

10. $z = \dfrac{1}{\sqrt{3} - i}$.

3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Напомним последовательность действий при геометрическом преобразовании графика. Пусть задан график функции $y = f(x)$ и требуется построить график функции $y = a \cdot f(bx + c) + d$, где b, c, a, d – некоторые постоянные числа.

1. Выполняем преобразование $y = a \cdot f(b \cdot (x + c/b)) + d$, т.е. выносим за скобки коэффициент при x в аргументе функции.
2. При условии $|b|>1$ ($0<|b|<1$) выполняем сжатие (растяжение) графика $y = f(x)$ с коэффициентом $|b|$ вдоль оси Ox к оси Oy. В результате получаем график вспомогательной функции $y = f_1(x) = f(bx)$.
3. Если $b<0$, то симметрично отображаем график $y = f_1(x)$ относительно оси Oy; при $b > 0$, переходим к следующему шагу.
4. Выполняем параллельный перенос (сдвиг) полученного графика $y = f_1(x)$ на c/b единиц влево, если $c/b> 0$ и вправо, если $c/b < 0$. В результате получаем график вспомогательной функции $y = f_2(x) = f_1(x+c/b)=f(b(x+c/b))$.
5. Производим растяжение от оси Ox (сжатие к оси Ox) графика $y = f_1(x)$ с коэффициентом $|a|$ вдоль оси Oy, если $|a| > 1$ (если $0<|a|<1$). В результате получаем график вспомогательной функции $y = f_3(x) = af_2(x)$.
6. Если $a< 0$, то симметрично отображаем график $y = f_3(x)$ относительно оси Ox, если же $a > 0$, то переходим к следующему шагу.

Выполняем параллельный перенос (сдвиг) графика $y = f_3(x)$ на d единиц вверх, если $d> 0$ и на $|d|$ единиц вниз, если $d < 0$. В результате получаем искомый график функции $y = f_4(x) = f_3(x)+d = af(b(x+c/b))+d$.

Пример 3.1. Построить график функции $y = 4\cos(2x - 3) + 1$ посредством преобразования графика некоторой простейшей элементарной функции.

Решение. Применяя описанную выше схему к нашей функции, будем строить ее график, исходя из графика функции $y = f(x) = \cos x$ (рис. 3.1).

1. Выполняем преобразование $y = 4\cos(2x-3)-1 = 4\cos\left(2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)-1$, и производим сжатие графика $y = f(x) = \cos x$ с коэффициентом $|a|=|2|=2$ вдоль оси Ox к оси Oy. В результате получаем график вспомогательной функции $y = f_1(x) = \cos 2x$ (рис. 3.2).
2. Выполняем параллельный перенос полученного графика $y = f_1(x)$ на $\left|\frac{c}{b}\right| = \frac{3}{2}$ единиц вправо, поскольку $\frac{c}{b} = -\frac{3}{2} < 0$. Получаем график функции $y = f_2(x) = f_1\left(x+\frac{3}{2}\right) = \cos\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)$ (рис. 3.3).
3. Производим растяжение от оси Ox графика $y = f_1(x)$ с коэффициентом $|4|=4$ вдоль оси Oy. В результате получаем график функции $y = f_3(x) = 4f_2(x) = 4\cos\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)$ (рис. 3.4).
4. Выполняем параллельный перенос графика $y = f_3(x)$ на 1 единицу вверх тем самым получаем искомый график функции
$$y = f_4(x) = f_3(x)+1 = 4\cos\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)+1$$

(рис. 3.5). Последовательность выполненных преобразований можно проследить по приведенным рисункам.

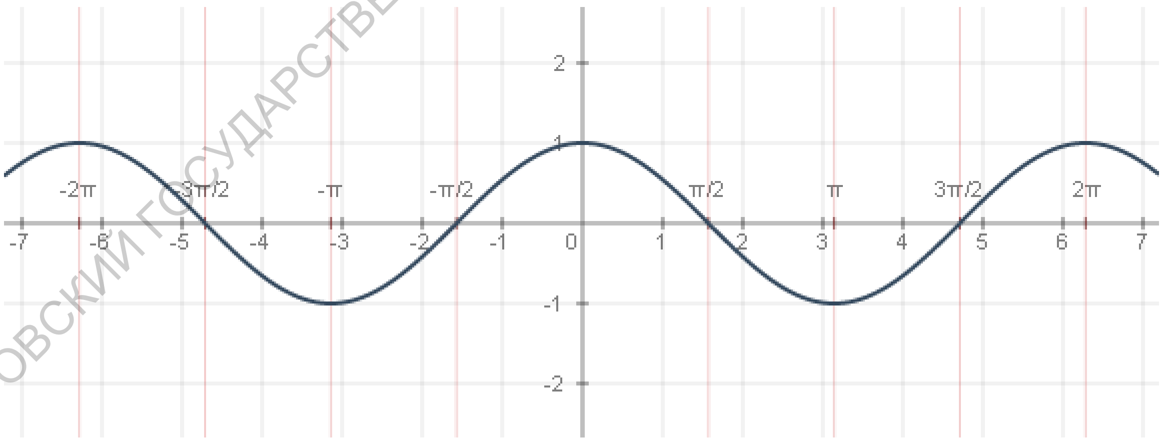

Рис. 3.1.

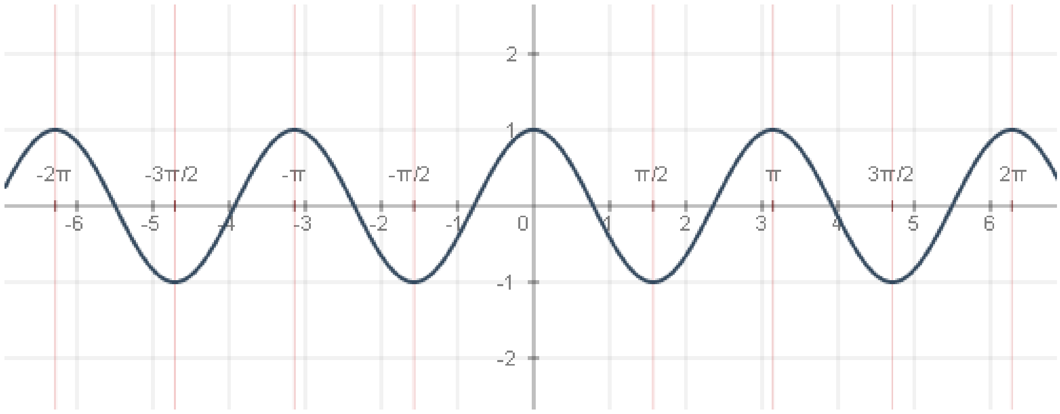
2
1
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2

Рис. 3.2.

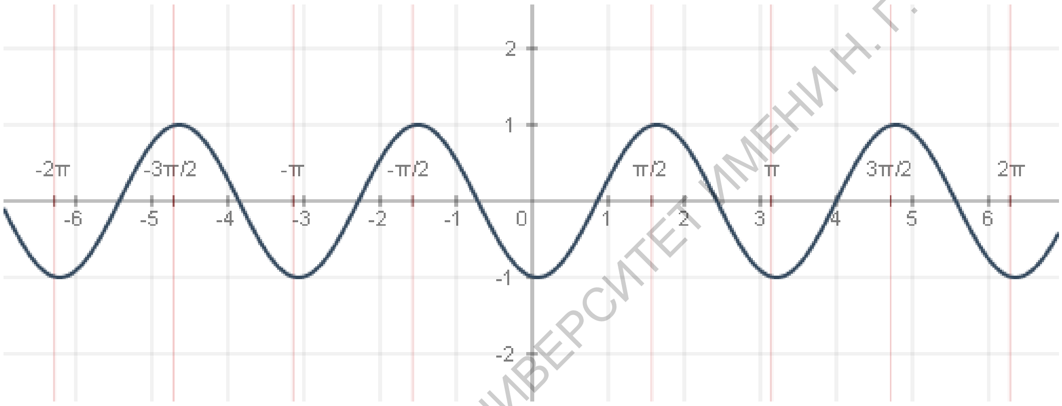
2
1
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2

Рис. 3.3.

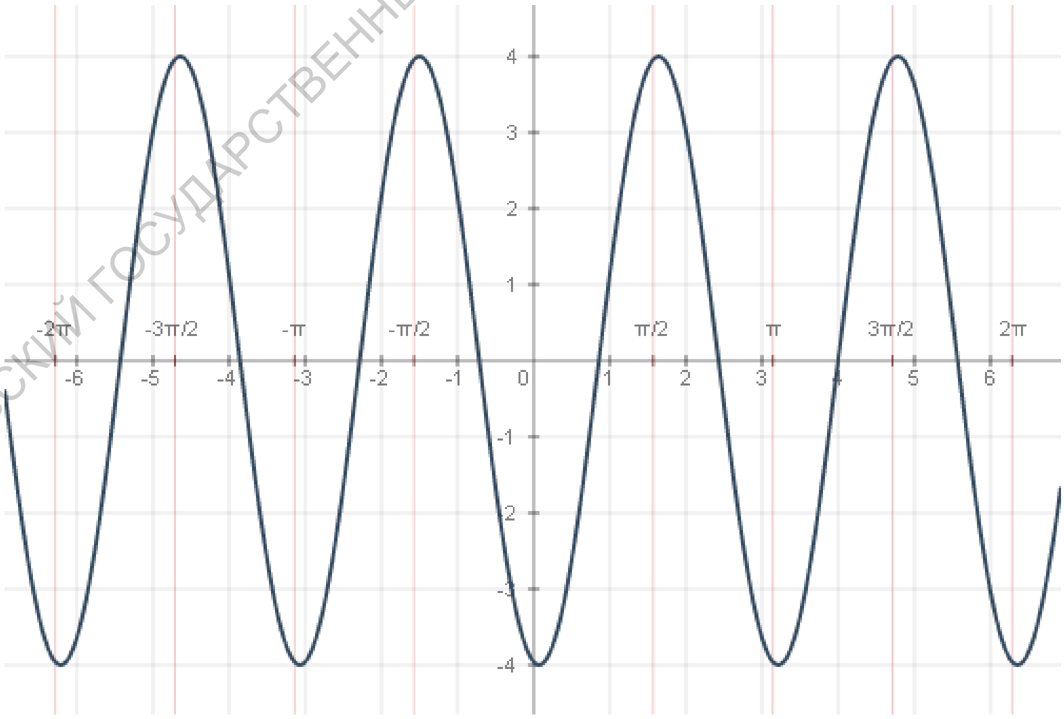
4
3
2
1
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
-4

Рис. 3.4.

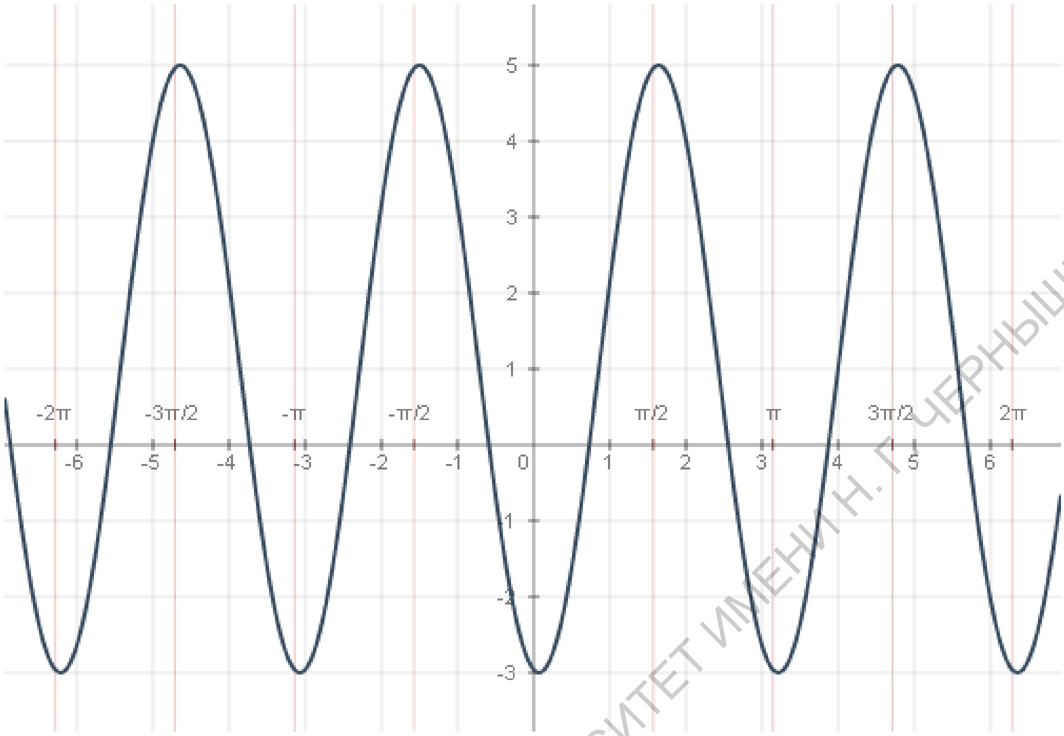

Рис. 3.5.

Задание 3.1. Построить график функции $y = f(x)$ посредством преобразования графика некоторой простейшей элементарной функции.

1. $f(x) = (3x+2) / (2x+3)$.

2. $f(x) = 3\cos(2x - 5)$.

3. $f(x) = \sqrt{(4x^2 + 7x - 2)/(4x - 1)}$.

4. $f(x) = 9x^2 - 6x + 3$.

5. $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$.

6. $f(x) = -2\sin(3x + 4)$.

7. $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 54x - 53$.

8. $f(x) = \ln((x+1)^{-2} / e^2)$.

9. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{8x^2 + 8x - 16}{x + 2}}$.

10. $f(x) = (3x^2 - 5x + 2)/(2x^2 + x - 3)$.

Пример 3.2. Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$; в) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+4} - 1}{x + 3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to 2} (3 - x)^{\frac{4x}{x-2}}$.

Решение.

а) Так как при $x \to \infty$ и числитель и знаменатель нашей дроби стремятся к ∞, мы имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия вынесем x^2 за скобки в числителе и в знаменателе. После сокращения на x^2 неопределенность исчезнет. Находим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3 - x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2} - 1 - \frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - 1 - 0}{1 + 0 + 0} = -1.$$

б) При $x \to 2$ как числитель, так и знаменатель данной дроби стремятся к 0, поэтому здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Чтобы избавиться от нее разложим числитель и знаменатель на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни трехчлена. Решая соответствующие квадратные уравнения (или используя теорему Виета, что проще, поскольку один корень $x = 2$ уже известен), находим $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. После подстановки этих выражений в исходную дробь и сокращения на $(x-2)$ неопределенность исчезнет. Имеем

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x+1} = \frac{2-3}{2+1} = -\frac{1}{3}.$$

в) Данный предел также содержит неопределенность вида $\frac{0}{0}$, поскольку $\sqrt{x+4} - 1 \to 0$ и $x + 3 \to 0$ при $x \to -3$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, снова применим тождественные преобразования: домножим числитель и знаменатель нашей дроби на $\sqrt{x+4} + 1$ и преобразуем числитель по формуле разности квадратов $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Находим

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{\left(\sqrt{x+4} - 1\right)\left(\sqrt{x+4} + 1\right)}{(x+3)\left(\sqrt{x+4} + 1\right)} = \lim_{x\to -3} \frac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2 - 1^2}{(x+3)\left(\sqrt{x+4} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x + 4 - 1}{(x+3)\left(\sqrt{x+4} + 1\right)} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 1} = \frac{1}{\sqrt{-3+4} + 1} = \frac{1}{2}.$$

г) Здесь снова имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для вычисления данного предела сначала преобразуем дробь, используя тригонометрическую формулу $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, а затем применим первый замечательный предел $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ и теорему о пределе произведения. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{\sin^2 2x}=4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2\cdot\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2=4\cdot 1^2\cdot 1^2=4.$$

д) При условии $x\to 2$ основание степени $(3-x)^{\frac{4x}{x-2}}$ стремится к 1, а показатель – к ∞, таким образом, в данном случае мы имеем дело с неопределенностью вида 1^∞. Для решения примера используем второй замечательный предел $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$. Вычисляем

$$\lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{4x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left[\left(1+(2-x)\right)^{\frac{1}{2-x}}\right]^{-4x}=e^{-4\lim\limits_{x\to 2}x}=e^{-4\cdot 2}=e^{-8}.$$

Задание 3.2. Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to -\pi}\frac{\sin 2x}{x(\pi+x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{3}{x+2}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+5x}$; б); в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}2x\cdot\operatorname{ctg}5x$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{3x^2-40x+128}{x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{4x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+6}{2x^3+10x^2+5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{1+x}-3}{2-\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2}{5x^4+8x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{x-1}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2+1}{3x^5-2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-6x+7}{3x^2+20x-1}\right)^{1-x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\operatorname{tg}2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{4x+5}{x-1}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x-2}{5x^3+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^2-16x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+8x-2}{5x^2+3x+3}\right)^{4x+1}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin^2 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{4x-2}{x-1}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x}{2x^2+6x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{5x+4}\right)^{x/2}$.

Пример 3.3. Исследовать на непрерывность функцию $y=f(x)$, найти точки разрыва и определить их род. Построить схематический график функции.

а) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$;

в) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 \text{ при } x<2; \\ \cos\pi x \text{ при } 2\le x\le 3; \\ x-3 \text{ при } x>3.\end{cases}$

Решение. а) Функции $y=x$, $y=\cos x$ непрерывны всюду, а функция $y=\dfrac{1}{x}$ – всюду, за исключением точки $x=0$ (в этой точке она даже не определена). Поэтому сложная функция $\cos\dfrac{1}{x}$ и произведение $x\cos\dfrac{1}{x}$ также непрерывны всюду, кроме точки $x=0$. Выясним тип разрыва функции $x\cos\dfrac{1}{x}$ в этой точке. Функция $\cos\dfrac{1}{x}$ ограничена на всей своей области определения, поскольку $|\cos t|\le 1 \ \forall t\in(-\infty,\infty)$, а функция $y=x$ является бесконечно малой при $x\to 0$. По известной теореме произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть снова бесконечно малая, т.е. существует

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0.$$

Таким образом, при $x=0$ функция не определена, но в этой точке существует конечный предел. Это означает, что единственная точка, в которой нарушается непрерывность, является точкой устранимого разрыва.

Эскиз графика изображен на рис. 3.6. Характерной особенностью является тот факт, что в окрестности нуля график совершает бесконечное число колебаний с неограниченно возрастающей «частотой». При этом «амплитуда» колебаний стремится к нулю, т. к. вблизи начала координат график заключен внутри пары прямых $y=\pm x$, что, в свою очередь, объясняется наличием множителя x в выражении $x\cos\dfrac{1}{x}$.

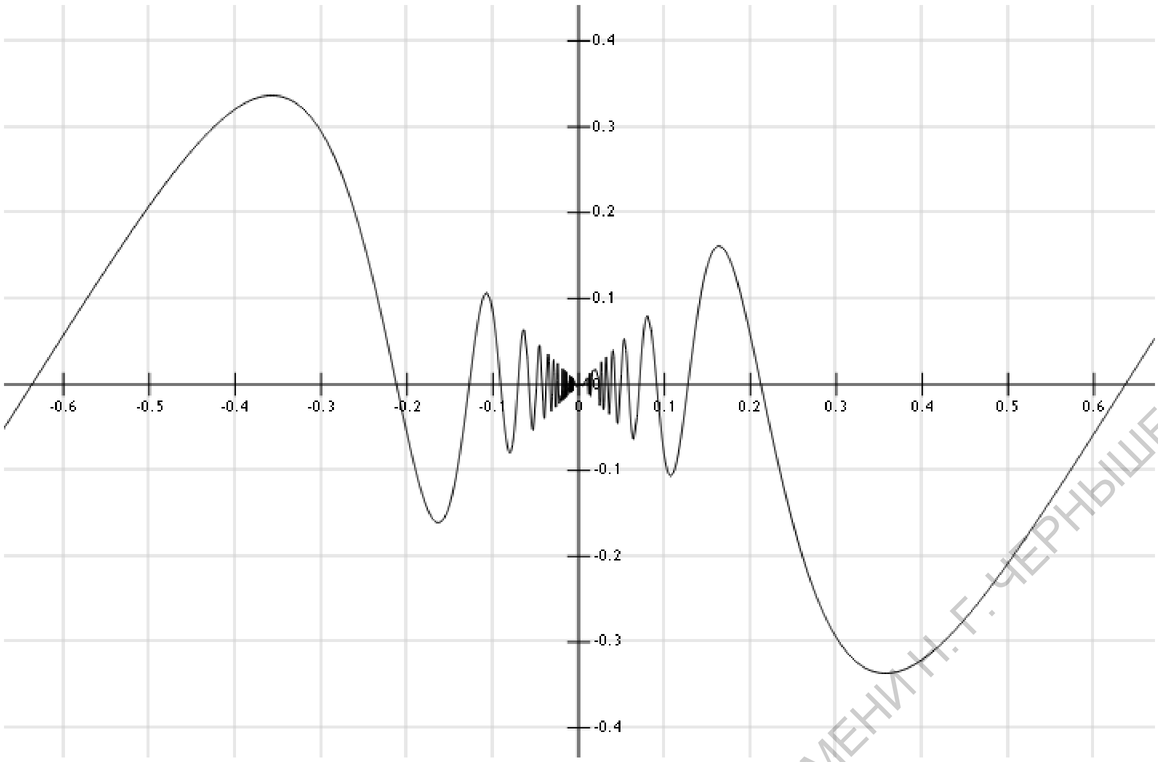

Рис. 3.6.

б) Аналогично предыдущему пункту заключаем, что сложная функция $f(x) = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ непрерывна всюду, кроме точки $x = 0$, в которой она не определена. Выясним тип разрыва, вычислив односторонние пределы в точке $x = 0$. Для предела справа имеем

$$\lim_{x\to +0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \lim_{t\to +\infty} \operatorname{arcctg} t = 0,$$

а для предела слева

$$\lim_{x\to -0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \lim_{t\to -\infty} \operatorname{arcctg} t = \pi.$$

Таким образом, в точке $x = 0$ существуют конечные односторонние пределы, не равные между собой. По определению это означает, что $x = 0$ – точка разрыва 1 рода.

Для построения графика полезно учесть, что горизонтальная прямая $y = \dfrac{\pi}{2}$ является его асимптотой, поскольку $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} = \operatorname{arcctg} 0 = \dfrac{\pi}{2}$. На рис. 3.7 показан как сам график функции $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$, так и эта асимптота.

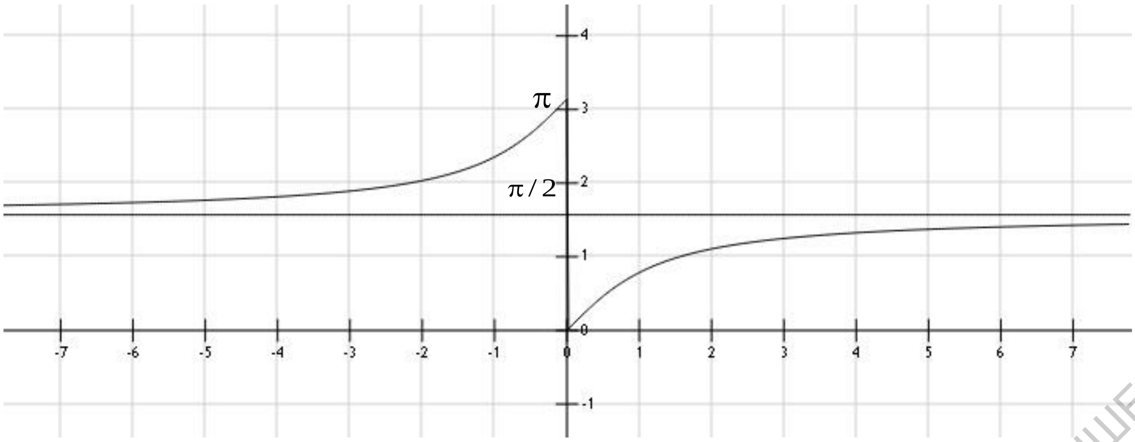

Рис.3.7.

в) Функция

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 \text{ при } x<2;\\ \cos\pi x \text{ при } 2\le x\le 3;\\ \dfrac{1}{3-x} \text{ при } x>3,\end{cases}$$

на промежутках $(-\infty,2)$, $[2,3]$ и $(3,+\infty)$ определена разными аналитическими выражениями. При этом каждое из этих трех выражений задает функцию, непрерывную в своей области определения (в частности, на соответствующем промежутке). Действительно, функции $y=(x-1)^2$, $y=\cos\pi x$ и $y=\dfrac{1}{3-x}$ являются элементарными, а такие функции, как известно, непрерывны в своих областях определения. При этом первые две функции определены всюду, а третья – всюду, за исключением точки $x=3$. Поэтому точками разрыва функции $f(x)$ могут быть только границы промежутков. Чтобы обнаружить наличие разрыва и установить его тип, вычислим односторонние пределы функции $f(x)$ в точках $x=2$ и $x=3$. Для точки $x=2$ будем иметь

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)^2=1,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\cos\pi x=\cos 2\pi=1=f(2).$$

Мы видим, что односторонние пределы существуют, равны между собой и равны значению функции в точке: $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=f(2)$. Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна при $x=2$. Теперь исследуем значение $x=3$. Находим

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\cos\pi x=\cos 3\pi=-1,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{3-x} = -\infty .$$

В данном случае односторонние пределы также существуют, но один из них равен бесконечности, поэтому в точке $x = 3$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода. Эскиз графика изображен на рис. 3.8.

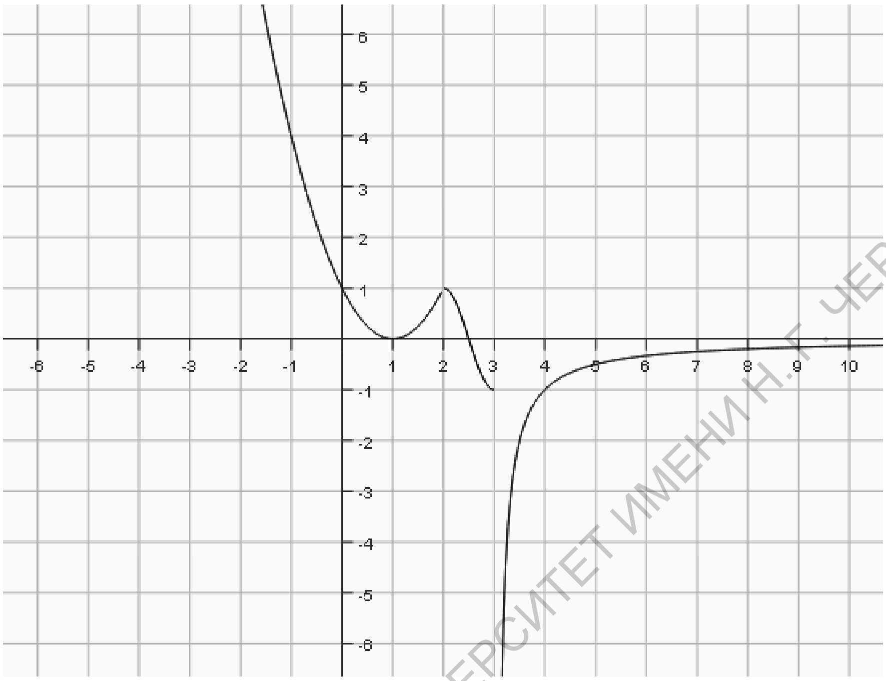

Рис. 3.8.

Задание 3.3. Исследовать на непрерывность функцию $y = f(x)$, найти точки разрыва и определить их род. Построить схематический график функции.

1. $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$.   **2.** $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$.

3. $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3}$.   **4.** $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{2x}$.

5. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$.   **6.** $f(x) = \begin{cases} (2x^2+3)/5 \text{ при } x < 1; \\ 6 - 5x \text{ при } 2 < x < 3; \\ x - 3 \text{ при } x \ge 3. \end{cases}$

7. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.   **8.** $f(x) = x\cdot\operatorname{ctg}x$.

9. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.   **10.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пример 4.4. Найти производные первого порядка данных функций, используя правила дифференцирования.

а) $y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$; б) $y = x^{\arcsin x}$; в) $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$;

г) $x = \operatorname{tg} t,\ y = \sin 2t + 2\cos 2t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. а) Применяем правило дифференцирования сложной функции $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Имеем

$$y' = \left[\operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)\right]' = \frac{1}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2} \cdot \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \cdot \left(1 - \left(\sqrt{1+x^2}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{2\left(1+x^2-x\sqrt{1+x^2}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{2\left(1+x^2-x\sqrt{1+x^2}\right)} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\left(1+x^2-x\sqrt{1+x^2}\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

б) Необходимо вычислить производную степенно-показательной функции $y = x^{\arcsin x}$. Используя основное логарифмическое тождество $a = b^{\log_b a}$, представим основание x степени $x^{\arcsin x}$ в виде $x = e^{\ln x}$ и преобразуем выражение $x^{\arcsin x}$ к показательной форме $x^{\arcsin x} = e^{\ln x \cdot \arcsin x}$. Теперь его можно дифференцировать как сложную функцию. Находим

$$y' = \left(x^{\arcsin x}\right)' = \left(e^{\ln x \cdot \arcsin x}\right)' = e^{\ln x \cdot \arcsin x}\left(\ln x \cdot \arcsin x\right)' =$$

$$= x^{\arcsin x}\left((\ln x)' \cdot \arcsin x + \ln x \cdot (\arcsin x)'\right) = x^{\arcsin x}\left(\frac{1}{x} \cdot \arcsin x + \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$x^{\arcsin x}\left(\frac{1}{x} \cdot \arcsin x + \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x^{\arcsin x}\left(\frac{\arcsin x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

в) Чтобы найти производную $y'(x)$ продифференцируем равенство

$$e^x \sin y - e^y \cos x = 0,$$

учитывая, что переменная y является функцией аргумента x. Имеем

$$\left(e^x \sin y(x) - e^{y(x)} \cos x\right)' = 0,$$

$$\left(e^x \sin y(x)\right)' - \left(e^{y(x)} \cos x\right)' = 0,$$

$$e^x \sin y(x) + e^x \left(\sin y(x)\right)' - \left(\left(e^{y(x)}\right)' \cos x + e^{y(x)} (\cos x)'\right) = 0,$$

$$e^x \sin y(x) + e^x \cos y(x) y'(x) - e^{y(x)} y'(x) \cos x - e^{y(x)}(-\sin x) = 0,$$

$$y'(x)\left(e^x \cos y(x) - e^{y(x)} \cos x\right) = -e^x \sin y(x) - e^{y(x)} \sin x,$$

$$y'(x) = \frac{e^{y(x)} \sin x + e^x \sin y(x)}{e^{y(x)} \cos x - e^x \cos y(x)}.$$

Таким образом, искомая производная равна (в окончательном ответе аргумент x функций $y(x)$ и $y'(x)$ принято опускать)

$$y' = \frac{e^y \sin x + e^x \sin y}{e^y \cos x - e^x \cos y}.$$

г) Если функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \ t \in (a, b), \end{cases}$$

то ее производная вычисляется по формуле

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (4.1)$$

Возьмем производные от $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

$$\varphi'(t) = (\operatorname{tg} t)' = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\psi'(t) = (\sin 2t + 2\cos 2t)' = 2\cos 2t - 4\sin 2t.$$

Теперь найдем производную от $y(x)$ по формуле (4.1)

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{2\cos 2t - 4\sin 2t}{1/\cos^2 t} = 2(\cos 2t - 2\sin 2t)\cos^2 t.$$

Задание 4.1. Найти производные первого порядка данных функций, используя правила вычисления производных.

1. 1) $y = \sqrt{4x^4 + \operatorname{tg} x}$; 2) $y = x^{1/2} / \sin x$;
3) $y = \operatorname{ctg}(5x) / x^3$; 4) $y = \operatorname{arctg}(e^x) + \operatorname{tg}(\arccos(e^x))$.

2. 1) $y = \ln(\operatorname{tg}(3x + 2))$; 2) $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$;
3) $y = x^{\operatorname{tg} x}$; 4) $y = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.

3. 1) $y = \arccos(x^2) + \operatorname{arcctg}(x^2)$; 2) $xy = \cos(x - y)$;
3) $y = \log_2(2^x + 1)$; 4) $y = \sqrt{1 - x^2} / \sqrt{1 + x^2}$.

4. 1) $y=(2-5x)\big/\sqrt{2-5x+x^2}$; 2) $y=e^{x-y}$;
3) $y=2^{\ln x-x}$; 4) $y=\sin^2 3t,\ x=\cos^4 3t$.

5. 1) $y=(\arcsin x)^{1-x}$; 2) $y=\cos^2 x+\mathrm{tg}2x$;
3) $x^3+y^3-3xy=3$; 4) $x=t-\sin 2t,\ y=1-\cos 2t$.

6. 1) $y=\sin^2 x\ /\ (1+\sin^2 x)$; 2) $y=3^{\mathrm{arctg}\,x}+(\mathrm{arctg}x)^3$,
3) $y=(1+x^2)^{1+2x}$; 4) $y=\mathrm{tg}3t,\ x=\cos^2 3t$.

7. 1) $y=3^{-3x}+(3x)^{-3}$; 2) $y=(x-1)\log_5(x^2-1)$,
3) $y=(x^2+1)^x$; 4) $y=\mathrm{tg}(x^2/y^2)$.

8. 1) $y=\ln(\lg(\log_2 x))$; 2) $y=(x^2+x+1)/(x^2+1)$;
3) $y=(x+1)^x$; 4) $e^{x+y}=x-y$.

9. 1) $y=(x^2+1)^3-(x^2-1)^3$; 2) $y=(\ln 5x)/(x^4-1)$;
3) $y=(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$; 4) $x=t\,\mathrm{ctg}(t^2)$, $y=t\cos^2(t^2)$.

10. 1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; 2) 2) $y=x^{-\sin 2x}$;
3) $y=2/(x-1)+1/(x^2-1)$; 4) $\sin(x+y)+\cos(x^2+y^2)=1$.

Пример 4.5. Построить график функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$, используя общую схему исследования функции.

Решение.

1. Область определения функции задается условием $x^2-3\neq 0$ или $x\neq\pm\sqrt{3}$. Таким образом,

$$D(y)=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right).$$

2. Функция является нечетной, поскольку $D(y)$ симметрична относительно нуля и $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=-\dfrac{x^3}{x^2-3}=-y(x)$.

3. Изучим предельное поведение функции на границах области определения, т.е. при $x\to\pm\infty$, $x\to\pm\sqrt{3}\pm 0$. Сначала исследуем функцию для значений $x>0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{x^2}{x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\dfrac{3}{x^2}}=+\infty\cdot 1=+\infty .$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x+\sqrt{3}}\cdot\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{1}{x-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{2\sqrt{3}}\cdot(-\infty)=-\infty . \qquad (4.2)$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x+\sqrt{3}}\cdot\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{1}{x-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{2\sqrt{3}}\cdot\left(+\infty\right)=+\infty. \qquad (4.3)$$

Далее, в силу нечетности функции, получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty, \qquad (4.4)$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty. \qquad (4.5)$$

Соотношения (4.2)-(4.3) и (4.4)-(4.5) означают, что в точках $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$ функция имеет разрывы 2 рода, и что прямые $x=\pm\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика нашей функции.

4. Найдем наклонные асимптоты графика функции. По определению прямая $y=kx+b$ есть наклонная асимптота графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0. \qquad (4.6)$$

Коэффициенты k и b выражаются по формулам

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad (4.7)$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right] \qquad (4.8)$$

Аналогично определяется и наклонная асимптота при $x\to-\infty$, при этом в соотношениях (4.6)-(4.7) символ «$+\infty$» заменяется на «$-\infty$». В нашем примере

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x\left(x^2-3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1, \qquad (4.9)$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-3x}{x^2-3}=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-3}=$$

$$=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-3}=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{3}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=-3\cdot1\cdot0=0. \qquad (4.10)$$

Итак, наклонная асимптота графика при $x \to +\infty$ имеет вид $y = x$. Поскольку вычисления в (4.9)-(4.10) не зависят от знака «+» или «–» у символа бесконечности, прямая $y = x$ будет наклонной асимптотой также и при $x \to -\infty$.

5. Найдем промежутки монотонности и стационарные точки функции. Находим первую производную

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)' = \frac{\left(x^3\right)' \cdot \left(x^2-3\right) - x^3 \cdot \left(x^2-3\right)'}{\left(x^2-3\right)^2} = \frac{3x^2 \cdot \left(x^2-3\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2-3\right)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 - 9x^2 - 2x^4}{\left(x^2-3\right)^2} = \frac{x^4 - 9x^2}{\left(x^2-3\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-3\right)^2}. \qquad (4.11)$$

Из (4.11) видно, что $y'(x)$ обращается в ноль в точках $x_3 = 0$, $x_4 = -3$, $x_5 = 3$. Знак $y'(x)$ определяется знаком выражения $x^2 - 9$, так что

1) $y'(x) > 0$, при $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty) \Rightarrow y(x)$ возрастает на $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$;

2) $y'(x) < 0$, при $x \in (-3,3) \Rightarrow y(x)$ убывает на $\left(-3,-\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3},3\right)$.

В точке $x_3 = 0$ производная не меняет знак, следовательно, экстремума в этой точке нет. При переходе через точку $x_4 = -3$ производная $y'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус», а при переходе через $x_5 = 3$ – с «минуса» на «плюс». Поэтому в точке $x_4 = -3$ функция достигает локального максимума $y(-3) = -\dfrac{9}{2}$, а в точке $x_5 = 3$ – локального минимума, $y(3) = \dfrac{9}{2}$.

6. Найдем промежутки выпуклости и вогнутости функции, а также точки перегиба. Вычисляем вторую производную

$$y''(x) = \left(\frac{x^2\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-3\right)^2}\right)' = \left(\frac{x^4 - 9x^2}{\left(x^2-3\right)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(x^4 - 9x^2\right)'\left(x^2-3\right)^2 - \left(x^4 - 9x^2\right)\left(\left(x^2-3\right)^2\right)'}{\left(x^2-3\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(4x^3 - 18x\right)\left(x^2-3\right)^2 - \left(x^4 - 9x^2\right)2\left(x^2-3\right) \cdot 2x}{\left(x^2-3\right)^4} =$$

$$= 2x\frac{\left(2x^2-9\right)\left(x^2-3\right) - 2\left(x^4 - 9x^2\right)}{\left(x^2-3\right)^3} =$$

$$= 2x\frac{2x^4 - 9x^2 - 6x^2 + 27 - 2x^4 + 18x^2}{\left(x^2 - 3\right)^3} = \frac{6x\left(x^2 + 9\right)}{\left(x^2 - 3\right)^3}. \qquad (4.12)$$

Из (4.12) следует, что $y''(x)$ обращается в ноль в точке $x_3 = 0$ и знак $y''(x)$ определяется знаком выражения $\dfrac{x}{\left(x^2 - 3\right)^3}$. Поэтому

1) $y''(x) > 0$, $\forall x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right) \Rightarrow y(x)$ выпукла на $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$;
2) $y''(x) < 0$, $\forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \Rightarrow y(x)$ вогнута на $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$.

7. Принимая во внимание характер монотонности и направление выпуклости на промежутках, а также расположение асимптот, строим график функции. На рис. 4.1, кроме самого графика, показаны также и его асимптоты.

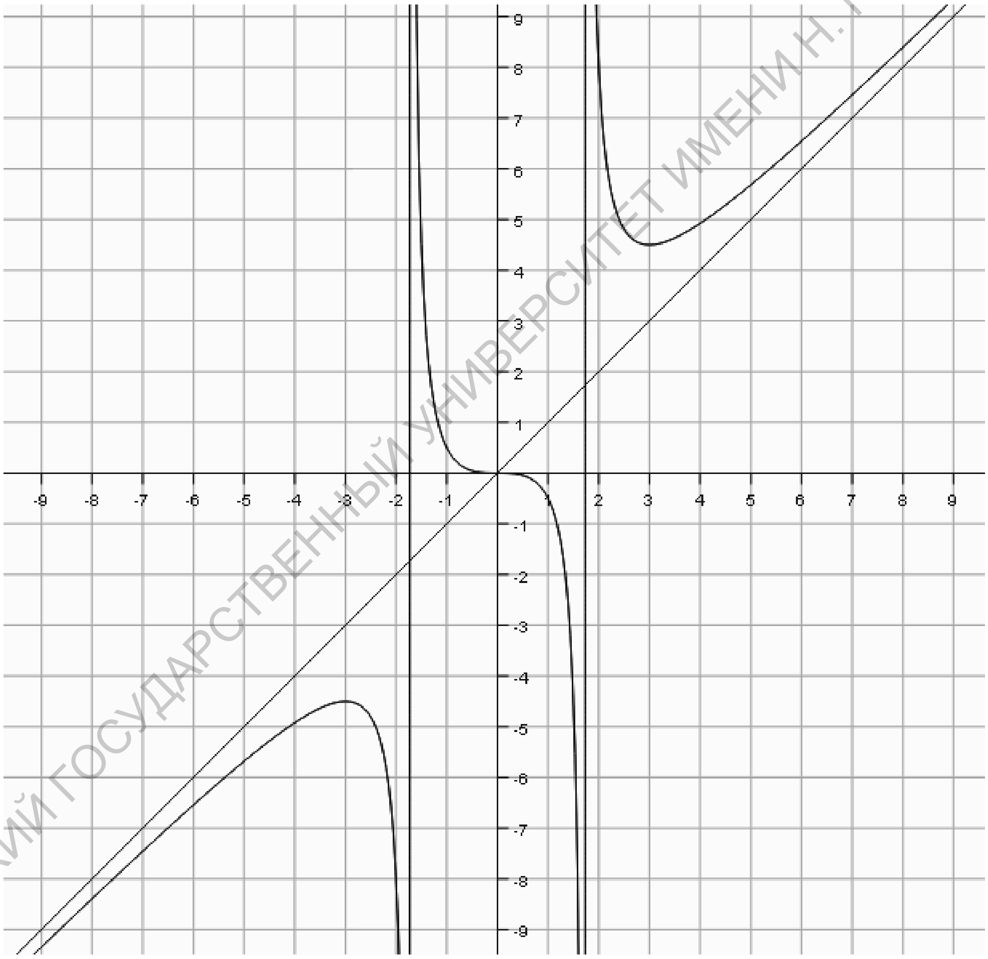

Рис. 4.1.

Задание 4.2. Построить график функции, используя общую схему исследования функции.

1.	$y = (x^2 + 2x + 2)/(2 + x^2)$.	**2**.	$y = (4 + x^2)/(9 – x^2)$.
3.	$y = (2 + 3x^2)/(1 + x^2)$.	**4**.	$y = (x^3 + 2x^2 + 2)/(x^2 + 1)$.
5.	$y = (x^2 + 3x + 5)/(x – 1)$.	**6**.	$y = (3x^3 – 2)/x$.
7.	$y = (2x^2 +3x + 1)/(x – 2)$.	**8**.	$y = x^3/(x^3 + 1)$.
9.	$y = (3 – 9x^2)/(1 – 9x^2)$.	**10**.	$y = (x^3 + 8)/(x^3 – 8)$.
11.	$y = xe^{2x-1}$.	**12**.	$y = \ln(x^2 – 9)$.
13.	$y = (1 + x^2)\exp(-x^2)$.	**14**.	$y = \lg(4 + x^2)$.
15.	$y = e^{2/(1-x)}$.	**16**.	$y = \ln(16 – x^2)$.
17.	$y = x^2 + 1 + 2\ln x$.	**18**.	$y = \exp(1 + 4x – 2x^2)$.
19.	$y = (2 + x)\exp(- 4 - 4x - x^2)$.	**20**.	$y = \lg(1-x)\big/\sqrt{1-x}$.

Пример 4.6. Составить уравнение касательной и нормали:

1) к явно заданной кривой $y=\sqrt{4-2x^2}$, в точке, абсцисса которой равна $x_0=-1$;
2) к кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=\sqrt{2}\sin t$, $y=\cos t$ в точке, для которой параметр t равен $t_0=\pi/3$.

Построить графики кривых, касательных и нормалей. Для каждой кривой найти кривизну в указанных точках.

Решение. 1) Уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0;y_0)$ к плоской кривой, заданной явным уравнением $y=f(x)$ записываются, соответственно, в виде

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (4.13)$$

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (4.14)$$

Находим

$$y_0=\sqrt{4-2x_0{}^2}=\sqrt{4-2\cdot(-1)^2}=\sqrt{2},$$

$$f'(x)=\left(\sqrt{4-2x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{4-2x^2}}\cdot(-4x)=-\frac{2x}{\sqrt{4-2x^2}},$$

$$f'(x_0)=f'(-1)=-\frac{2\cdot(-1)}{\sqrt{4-2\cdot(-1)^2}}=\sqrt{2},$$

откуда, с учетом (4.13) и (4.14), получаем уравнения касательной

$$y-\sqrt{2}=\sqrt{2}(x+1)\Leftrightarrow y=\sqrt{2}x+2\sqrt{2},$$

и нормали

$$y-\sqrt{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Кривизна K плоской кривой, заданной явным уравнением $y = f(x)$ определяется по формуле $K = \dfrac{|f''(x)|}{\left[1+[f'(x)]^2\right]^{3/2}}$. Вычисляем вторую производную

$$f''(x) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{4-2x^2}}\right)' = -2\frac{1\cdot\sqrt{4-2x^2} - x\left(\sqrt{4-2x^2}\right)'}{4-2x^2} =,$$

$$= -2\frac{\sqrt{4-2x^2} - x\left(-\dfrac{2x}{\sqrt{4-2x^2}}\right)}{4-2x^2} = -2\frac{4-2x^2+2x^2}{\left(4-2x^2\right)^{3/2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\left(2-x^2\right)^{3/2}} =,$$

затем значение $f''(x)$ в точке $x_0 = -1$: $f''(-1) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{\left(2-(-1)^2\right)^{3/2}} = -2\sqrt{2}$,

и, наконец, кривизну в точке $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$

$$K_A = \frac{|f''(x_0)|}{\left[1+[f'(x_0)]^2\right]^{3/2}} = \frac{\left|-2\sqrt{2}\right|}{\left[1+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

На рис. 4.2 показана кривая, а также касательная и нормаль в точке A.

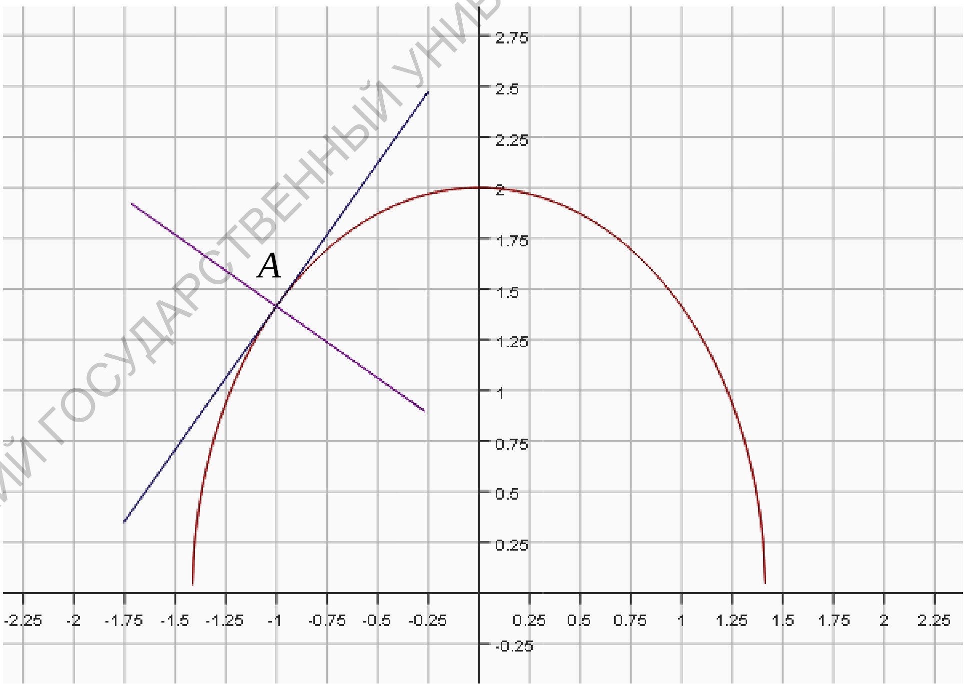

Рис. 4.2.

2) Если функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 < t < T, \tag{4.15}$$

то производная y по x определяется равенством $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Для нахождения уравнений касательной и нормали можно воспользоваться соотношениями (4.13) и (4.14), где координаты точки $A(x_0; y_0)$ и производная $f'(x_0)$ вычисляются по формулам $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $f'(x_0) = \dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$.

Имеем

$$\begin{gathered} x_0 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}},\ y_0 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \\ \varphi'(t) = \left(\sqrt{2}\sin t\right)' = \sqrt{2}\cos t,\ \psi'(t) = (\cos t)' = -\sin t, \\ \varphi'(t_0) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \psi'(t_0) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{-\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Теперь можно выписать искомые уравнения касательной

$$y - \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x + 2,$$

и нормали

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{3}{2}}x - \frac{1}{2}.$$

Кривизна параметрически заданной кривой (4.15) определяется формулой

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{\left([\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\right)^{3/2}}. \tag{4.17}$$

Вычисляем вторые производные функций

$$\varphi''(t) = \left(\sqrt{2}\cos t\right)' = -\sqrt{2}\sin t,\ \psi''(t) = (-\sin t)' = -\cos t,$$

затем значения этих производных в точке $t_0 = \pi/3$

$$\varphi''(t_0) = -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{\frac{3}{2}},\ \psi''(t_0) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}. \tag{4.18}$$

Подставляя (4.16) и (4.18) в (4.17), находим

$$K=\frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}\right)^{3/2}}=\frac{8\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}. \qquad (4.17)$$

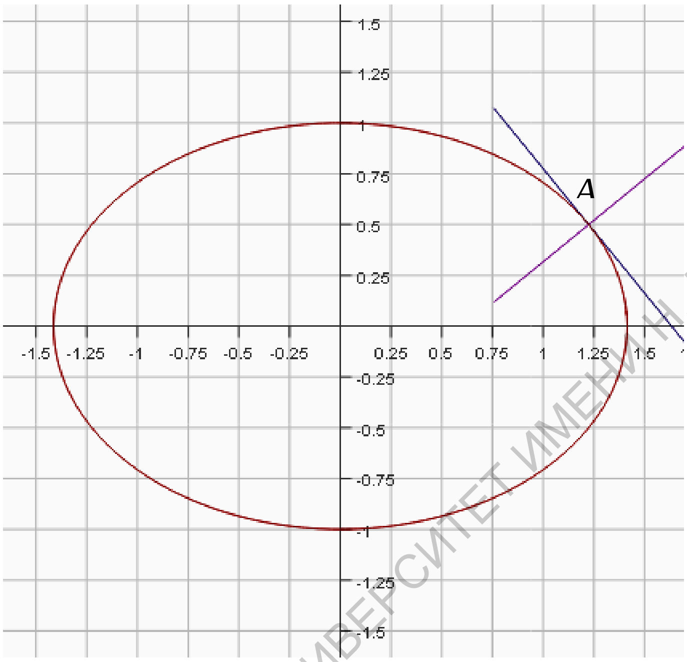

Рис. 4.3.

На рис. 4.3, как и в предыдущем примере, изображены кривая, касательная и нормаль в указанной точке.

Задание 4.3. Составить уравнение касательной и нормали:

3) к графику кривой $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x_0;

4) к графику кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке, для которой параметр t равен t_0.

Построить графики кривых, касательных и нормалей. Для каждой кривой найти кривизну в указанных точках.

1. 1) $y=-\sqrt{(9-x^2)/3},\ \ x_0=-3/2;$

2) $x=3\cos t,\ y=\sqrt{3}\sin t,\ \ t_0=-\pi/3.$

2. 1) $y=\sqrt{4-8x^2},\ \ x_0=-1/2;$

2) $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ y=-2\sin t,\ \ t_0=\dfrac{5\pi}{4}.$

3. 1) $y=\sqrt{16-4x^2},\ \ x_0=1;$

2) $x=-\sin t,\ y=-4\cos t,\ \ t_0=5\pi/6.$

4. 1) $y=-\sqrt{8-3x^2}$, $x_0=-\sqrt{2}$; 2) $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cos t,\ y=2\sqrt{2}\sin t,\ t_0=\dfrac{-\pi}{6}$.

5. 1) $y=-\sqrt{25-5x^2}$, $x_0=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$;
2) $x=-\sqrt{5}\sin t,\ y=5\cos t,\ t_0=7\pi/6$.

6. 1) $y=\sqrt{(4-x^2)/2}$, $x_0=\sqrt{2}$;
2) $x=2\sin t,\ y=\sqrt{2}\cos t,\ t_0=-\pi/4$.

7. 1) $y=\sqrt{8-4x^2}$, $x_0=-1$;
2) $x=\sqrt{2}\cos t,\ y=2\sqrt{2}\sin t,\ t_0=\pi/4$.

8. 1) $y=\sqrt{(7-x^2)/2}$, $x_0=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$;
2) $x=\sqrt{7}\cos t,\ y=\sqrt{\dfrac{7}{2}}\sin t,\ t_0=\pi/3$.

9. 1) $y=-\sqrt{8-2x^2}$, $x_0=-1$;
2) $x=2\sin t,\ y=2\sqrt{2}\cos t,\ t_0=5\pi/6$.

10. 1) $y=-\sqrt{4-8x^2}$, $x_0=-1/2$; 2) $x=\sqrt{1/2}\cos t,\ y=2\sin t,\ t_0=5\pi/4$.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пример 5.1. Дано скалярное поле $u=9x^2+4y^2-18x+8y$ и точки $A(3;-4)$ и $B(2;-1)$. Требуется:

1) составить уравнение линии уровня $9x^2+4y^2-18x+8y=C$, $C=59$, и построить эту линию;
2) в точке A найти градиент и производную по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$;
3) в точке A построить касательную и нормаль к линии уровня, получив их уравнения.

Решение. 1) Приведем уравнение кривой второго порядка

$$9x^2+4y^2-18x+8y=59$$

к каноническому виду, выделив полные квадраты. Имеем

$$9x^2+4y^2-18x+8y=59 \Leftrightarrow 9\left(x^2-2x\right)+4\left(y^2+2y\right)=59 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x^2-2x+1\right)-9+4\left(y^2+2y+1\right)-4=59 \Leftrightarrow 9(x-1)^2+4(y+1)^2=72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y+1)^2}{18}=1. \qquad (5.1)$$

Уравнение (5.1) определяет эллипс с центром в точке $C(1;-1)$, оси которого параллельны осям координат, а длины полуосей равны, соответственно, $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2{,}8$ и $b=\sqrt{18}=2\sqrt{3}\approx 3{,}4$.

2) Градиент функции $f(x,y)$ в точке A – это вектор $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, где частные производные вычислены в точке A. Находим эти частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(9x^2+4y^2-18x+8y\right)=18x-18,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(9x^2+4y^2-18x+8y\right)=8y+8,$$

и вычисляем их значения в точке $A(3;-4)$

$$\frac{\partial f(3;-4)}{\partial x}=18\cdot 3-18=36,$$

$$\frac{\partial f(3;-4)}{\partial y}=8\cdot(-4)+8=-24.$$

Таким образом, искомый градиент равен $\nabla f(3,-4)=(36;-24)$.

3) Уравнение касательной и нормали в точке $A(x_0;y_0)$ к неявно заданной кривой $F(x,y)=0$ имеют, соответственно, вид

$$F'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0)=0.$$

$$F'_y(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)-F'_x(x_0;y_0)\cdot(y-y_0)=0.$$

В нашем случае $F(x,y)=9x^2+4y^2-18x+8y-59=f(x,y)-59$. Поэтому $F'_x(x_0;y_0)=f'_x(3;-4)=36$, $F'_y(x_0;y_0)=f'_y(3;-4)=-24$, так что искомые уравнения запишутся следующим образом

а) касательная: $\quad 36(x-3)-24(y+4)=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{17}{2};$ (5.2)

б) нормаль: $\quad 24(x-3)+36(y+4)=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{17}{2}.$ (5.3)

Из (5.2) видно, что градиент $\nabla f(3,-4)=(36;-24)$ является нормальным вектором касательной к линии уровня в точке A. Этот факт соответствует одному из свойств градиента, именно: градиент в точке всегда ортогонален линии уровня, проходящей через данную точку. На рис. 5.1 изображены линия уровня (5.1), касательная (5.2) и нормаль (5.3).

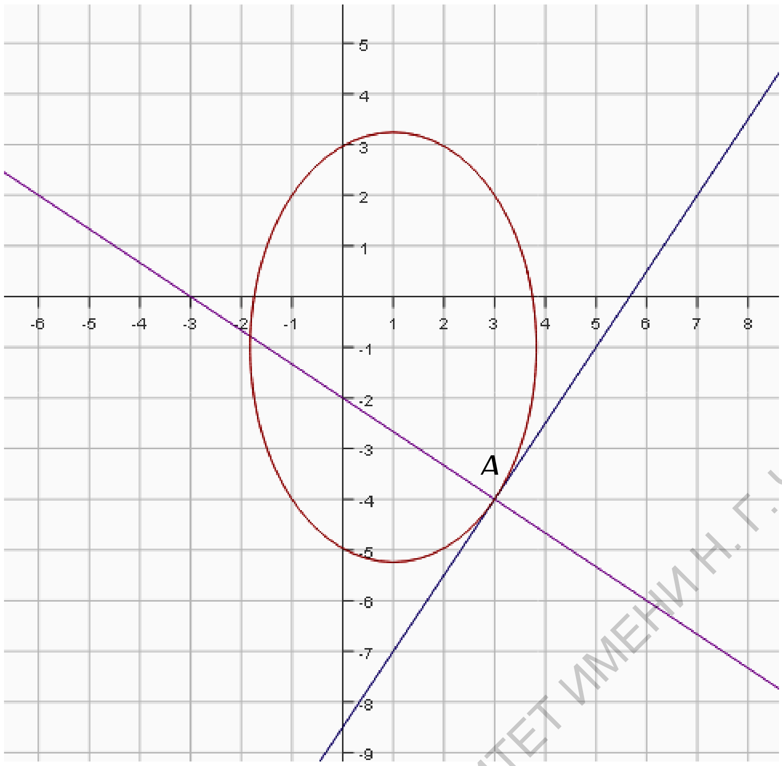

Рис. 5.1.

Задание 5.1. Дано скалярное поле $u = f(x, y)$. Требуется:

1) составить уравнение линии уровня $f(x, y) = C$ и построить эту линию;

2) в точке A найти градиент и производную по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$;

3) в точке A построить касательную и нормаль к линии уровня, получив их уравнения.

121.	$u = x^2 + 4y^2 + 4x + 4y$,	C=13,	A(1, -2),	B(2, 4).
122.	$u = x^2 + 9y^2 + 2x - 6y$,	C=2,	A(-1, 1),	B(0, 4).
123.	$u = 4x^2 + y^2 + 4x - 4y$,	C=36,	A(2, -2),	B(1, 1).
124.	$u = 9x^2 + y^2 - 6x - 2y$,	C=6,	A(1, 3),	B(3, 0).
125.	$u = x^2 + 4y^2 + 2x - 8y$,	C=20,	A(2, 3),	B(1, 4).
126.	$u = 25x^2 + y^2 + 10x + 2y$,	C=14,	A(-1, -1),	B(2, 4).
127.	$u = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 12y$,	C=8,	A(2, 0),	B(-1, -1).
128.	$u = 9x^2 + 4y^2 - 12x - 4y$,	C=8,	A(0, 2),	B(2, 5).
199.	$u = x^2 + 25y^2 - 2x + 20y$,	C=165,	A(2, -3),	B(2, 1).
130.	$u = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y$,	C=35,	A(5, 1),	B(5, 4).

6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пример 6.1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int x^2 e^x dx$; в) $\int \frac{x^3+x+1}{(x+1)^2(x^2+4x+5)}dx$.

Решение. а) Обозначим исходный интеграл через $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ и преобразуем подынтегральную функцию следующим образом

$$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{dx}{x^2}.$$

Замечаем, что в последнем интеграле $\frac{dx}{x^2}=-d\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{x}\right)^2$, поэтому

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{dx}{x^2}=-\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)+C.$$

б) Так как x входит в подынтегральную функцию в квадрате, формулу интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (6.1)$$

придется применить дважды. Сначала полагаем $u=x^2$, $dv=e^x dx$, откуда $du=2xdx$, $v=e^x$. Получаем

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx. \qquad (6.2)$$

К последнему интегралу снова применяем формулу (6.1), положив $u=x$, $dv=e^xdx$. Имеем

$$\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C \qquad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в (6.2), окончательно находим

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\left(xe^x-e^x+C\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

в) Так как подынтегральная функция – правильная рациональная дробь, сразу ищем ее разложение в сумму простейших дробей

$$\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2\left(x^2+4x+5\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+4x+5}=$$
$$=\frac{A(x+1)\left(x^2+4x+5\right)+B\left(x^2+4x+5\right)+(Mx+N)(x+1)^2}{(x+1)^2\left(x^2+4x+5\right)}$$

Полагая в тождестве

$$x^3+x+1\equiv A(x+1)\left(x^2+4x+5\right)+B\left(x^2+4x+5\right)+(Mx+N)(x+1)^2 \tag{6.4}$$

$x=-1$, находим $B=-\frac{1}{2}$. Полагая в (6.4) последовательно $x=0$, $x=1$, а затем приравнивая коэффициенты при x^3, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 1=5A-\frac{5}{2}+N \\ 3=20A-5+4M+4N \\ 1=A+M \end{cases} \tag{6.5}$$

Выразив N и M через A из первого и третьего уравнений и подставив во второе, найдем сначала $A=\frac{5}{2}$, а затем и остальные коэффициенты, $M=-\frac{3}{2}$, $N=-9$. Заметим, что система (6.5) значительно проще той, которая получилась бы при использовании стандартного метода неопределенных коэффициентов. Итак,

$$\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2\left(x^2+4x+5\right)}=\frac{5}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x+6}{x^2+4x+5}. \tag{6.6}$$

Интегрируя (6.6), находим

$$\int\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2\left(x^2+4x+5\right)}dx=\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{x+6}{x^2+4x+5}dx=$$
$$=\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{4}\int\frac{(2x+4)+8}{x^2+4x+5}dx=\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}-$$
$$-\frac{3}{4}\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+5}-6\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{4}\int\frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5}-$$
$$-6\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{4}\ln\left(x^2+4x+5\right)-6\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

Задание 6.1. Найти неопределенные интегралы.

131. а) $\int \exp(-8x^3)x^2\,dx$; б) $\int x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$; в) $\int dx/(6x^3-7x^2-3x)$.

132. а) $\int \mathrm{tg}(5x+3)\,dx$; б) $\int \ln(x^2+1)\,dx$; в) $\int (x^3-1)/(4x^3-x)\,dx$.

133. а) $\int \mathrm{ctg}(2x-3)\,dx$; б) $\int \ln^2 x\,dx$; в) $\int x^2/(x^3+5x^2+8x+4)\,dx$.

134. а) $\int \cos^2(1+\ln x)/x\,dx$; б) $\int \arcsin^2 x\,dx$; в) $\int (x^3+1)/(x^3-x^2)\,dx$.

135. а) $\int \cos^4 x\cdot\sin 2x\,dx$; б) $\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx$; в) $\int (x^2+1)/(x^3+x^2-x-1)\,dx$.

136. а) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$; б) $\int \ln^3/x^2\,dx$; в) $\int (x^4+1)/(x^3-x^2+x-1)\,dx$.

137. а) $\int x/(3x+2)\,dx$; б) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$; в) $\int x/(x^3-3x+2)\,dx$.

138. а) $\int e^x/(e^{2x}+4)\,dx$; б) $\int x\cdot\ln((1+x)/(1-x))\,dx$; в) $\int x/(x^3-1)\,dx$.

139. а) $\int e^{-x}(e^{2x}-1)\,dx$; б) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$; в) $\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$.

140. а) $\int (3x-1)/(x^2+9)\,dx$; б) $\int \exp\sqrt{x}\,dx$; в) $\int x^2/(x^3+x^2+x+1)\,dx$.

Пример 6.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $(y-x)^2=x^3,\ x=1$.

Решение. Обозначим интересующую нас фигуру через D, а ее площадь через S_D. Уравнение $(y-x)^2=x^3$, определяющее ее границу, равносильно уравнению $|y-x|=x^{\frac{3}{2}}$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности двух уравнений $y=x-x^{\frac{3}{2}}$ и $y=x+x^{\frac{3}{2}}$. При $x<0$ функции $f_1(x)=x-x^{\frac{3}{2}}$ и $f_2(x)=x+x^{\frac{3}{2}}$ не определены, при $x=0$ обе они обращаются в ноль. Справа наша фигура ограничена вертикальной прямой $x=1$. Заметим, наконец, что при $x\in[0;1]$ выполняется условие $f_1(x)\le f_2(x)$. Таким образом, область D снизу и сверху ограничена графиками функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, где $x\in[0;1]$, соответственно, а с боков – прямыми $x=0$ и $x=1$. Она представляет собой криволинейный треугольник, который изображен на рис. 6.1.

Имеем

$$S_D=\int_0^1[f_2(x)-f_1(x)]dx=\int_0^1\left(x+x^{\frac{3}{2}}-x+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=2\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_0^1=\frac{4}{5}.$$

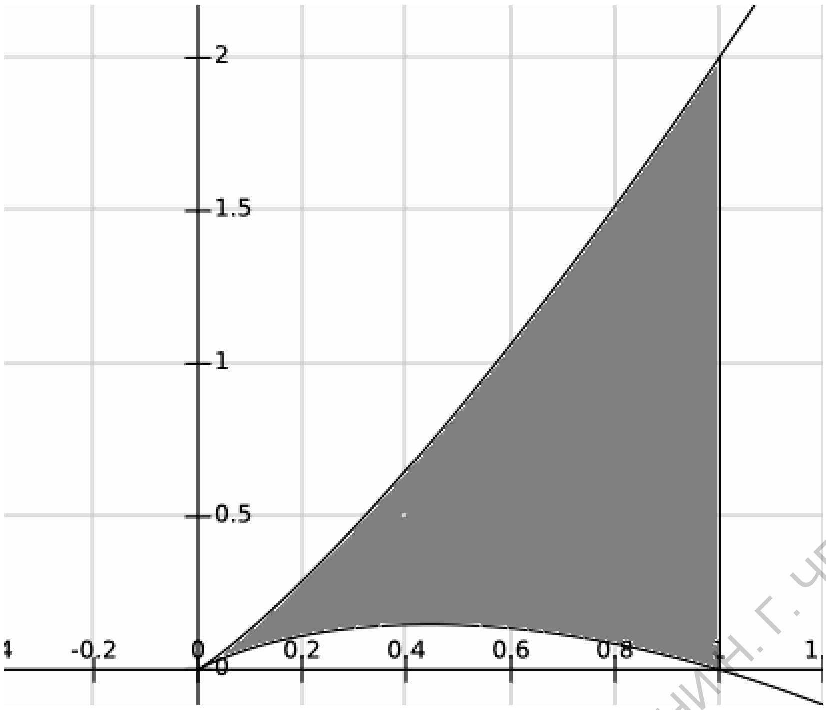

Рис. 6.1.

Задание 6.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, уравнения которых даны.

151. $y = 1/(1 + x^2)$, $y = x^2/2$.
152. $y = x^2$, $y = x^3/3$.
153. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.
154. $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$.
155. $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$.
156. $y = x(x - 1)^2$, $y = 0$.
157. $(y - x - 2)^2 = 9x$, $x = 0$, $y = 0$.
158. $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$, $y = 0$.
159. $x = y^2(y - 1)$, $x = 0$.
160. $y = x - x^{5/2}$, $y = 0$.

7. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенное дифференциальное уравнение – это соотношение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{7.1}$$

Здесь: x – независимая переменная (аргумент), y – искомая функция этого аргумента, $y', \ldots, y^{(n)}$ – производные искомой функции. Левая часть равенства (7.1) является заданной функцией своих аргументов. В большинстве задач, которые возникают в естественных науках и технических приложениях, эта функция является непрерывной.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение (7.1), называют порядком дифференциального уравнения. В естественных науках и технических приложениях чаще встречаются уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

и уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Решить уравнение (7.1) – значит найти функцию, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает последнее в тождество при всех допустимых значениях аргумента. Таких функций оказывается не одна, а целое семейство. При этом мы находим общее решение дифференциального уравнения. Это решение можно представить в виде

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n). \tag{7.2}$$

Здесь $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные интегрирования. Число этих констант совпадает с порядком уравнения. Искомое семейство функций может быть также найдено в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0. \tag{7.3}$$

Равенство (7.3) определяет общий интеграл дифференциального уравнения.

Числовые значения констант интегрирования определяются, если наряду с уравнением (7.1) заданы начальные условия

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{7.4}$$

Число начальных условий должно равняться порядку уравнения. В начальных условиях могут быть заданы значения искомой функции, а также её производных, порядок которых меньше порядка дифференциального уравнения. Уравнение (7.1) вместе с начальными условиями (7.4) представляют собой так называемую задачу Коши (задачу с начальными условиями). При решении такой задачи сначала получается общее решение (7.2), затем на основании условий (7.4) составляется система уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_n$. Решение этой системы $C_1^0, \ldots, C_n^0$ подставляется в общее решение (7.2). В результате получается частное решение уравнения (7.1), удовлетворяющее начальным условиям (7.4). Частное решение представляет собой определенную функцию аргумента x. Эта функция может быть задана неявно. В этом случае получается частный интеграл дифференциального уравнения.

Вопросы существования и единственности решения задачи с начальными условиями рассмотрены в учебной литературе. В рамках данных методических указаний заметим только, что в большинстве задач, связанных с инженерными приложениями, существуют решения, причем единственные.

Рассмотрим далее решения некоторых типовых задач.

Линейные уравнения первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения вида

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{7.5}$$

Решение должно также удовлетворять начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.6}$$

Уравнение вида (7.5) называется линейным уравнением первого порядка. Наличие свободного слагаемого делает уравнение неоднородным.

Одним из методов отыскания общего решения уравнения (7.5) является метод вариации произвольной постоянной. Применение этого метода для решения задачи вида (7.5),(7.6) поясним следующим примером

Пример 7.1. Требуется решить уравнение

$$y' + \frac{n}{x} y = \frac{2}{x^n} \tag{7.7}$$

при начальном условии

$$y(1) = 0. \tag{7.8}$$

1. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y' + \frac{n}{x} y = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать, разделив переменные:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{n}{x} y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{n}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{n}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -n \ln|x| + \ln A.$$

В результате получим

$$y = \frac{A}{x^n}.$$

2. Используем полученное общее решение однородного уравнения. Будем искать общее решение данного неоднородного уравнения в виде

$$y = \frac{A(x)}{x^n}. \tag{7.9}$$

Отметим, что подстановка на место постоянной A неизвестной функции $A(x)$ называется вариацией произвольной постоянной.

Подставляя выражение (7.9) в уравнение (7.7), получим:

$$\left(\frac{A(x)}{x^n}\right)' + \frac{n}{x}\frac{A(x)}{x^n} = \frac{2}{x^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{A'(x)x^n - A(x)nx^{n-1}}{x^{2n}} + n\frac{A(x)}{x^{n+1}} = \frac{2}{x^n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'(x)}{x^n} - n\frac{A(x)}{x^{n+1}} + n\frac{A(x)}{x^{n+1}} = \frac{2}{x^n} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 2.$$

Интегрируем полученное уравнение, разделив переменные:

$$\frac{dA(x)}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad dA(x) = 2dx \quad \Rightarrow \quad \int dA(x) = \int 2dx \quad \Rightarrow \quad A(x) = 2x + C.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (7.9), получим:

$$y=\frac{2x+C}{x^n}=\frac{C}{x^n}+\frac{2}{x^{n-1}}. \qquad (7.10)$$

В формуле (7.10) общее решение неоднородного уравнения представлено как сумма двух слагаемых: первое совпадает с общим решением однородного уравнения, второе является частным решением неоднородного уравнения.

3. Определим числовое значение постоянной C из начального условия (7.8):

$$\frac{2\cdot 1+C}{1^n}=0 \quad \Rightarrow \quad C=-2.$$

Тогда искомое решение задачи с начальным условием:

$$y(x)=\frac{2(x-1)}{x^n}.$$

Для выработки навыков решения линейных уравнений первого порядка рекомендуется выполнить следующее задание.

Задание 7.1. Найти решение задачи с начальным условием

1. $xy'-2y=x^3e^x,\qquad y(1)=e.$

2. $(x+1)y'-2y=(x+1)^4,\qquad y(0)=0.$

3. $x^2y'+2xy=\cos x,\qquad y(\pi)=1.$

4. $xy'+y=x+1,\qquad y(2)=0.$

5. $y'\cos x-y\sin x=4x^3,\qquad y(0)=1.$

6. $y'-y\cos x=2x\exp(\sin x),\qquad y(0)=\pi.$

7. $x^2y'+2xy=1,\qquad y(1)=1.$

8. $y'+2xy=2x\exp(-x^2),\qquad y(0)=1.$

9. $2xy'-y=2x^{3/2}\cos x,\qquad y(\pi)=0.$

10. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=2x\cos x,\qquad y(0)=4.$

Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называют уравнения вида

$$y''+py'+qy=f(x),\quad p,q=const$$

Решение может быть получено как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y''+py'+qy=0$$

и частного решения данного неоднородного уравнения. Чтобы найти общее решение однородного уравнения, определим корни k_1, k_2 характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0$$

и применим одну из стандартных формул:

$y_{одн} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если $k_1 \neq k_2, \quad k_1, k_2 \in \boldsymbol{R}$,

$y_{одн} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$, если $k_1 = k_2 = k, \quad k \in \boldsymbol{R}$,

$y_{одн} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

Частное решение рекомендуется построить методом неопределенных коэффициентов, ориентируясь по виду функции $f(x)$ в правой части уравнения. Рассмотрим далее пример.

Пример 7.2. Требуется найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5 = 2e^{3x} \tag{7.11}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -3/4. \tag{7.12}$$

1. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 2 \pm i.$$

Тогда

$$y_{одн} = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$$

– общее решение однородного уравнения, соответствующего данному.

2. Исходя из вида правой части уравнения (7.11), будем искать частное решение этого уравнения в форме $Y = Ae^{3x}$. Тогда:

$$\left(Ae^{3x}\right)'' - 4\left(Ae^{3x}\right)' + 5Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow 9Ae^{3x} - 12Ae^{3x} + 5Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow 2A = 2.$$

Получили $A = 1$, следовательно, $Y = e^{3x}$.

3. Общее решение данного неоднородного уравнения представим в виде

$$y = y_{одн} + Y.$$

В результате получим общее решение:

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{3x}. \tag{7.13}$$

Дифференцируя выражение (7.13), находим:

$$y' = 2e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{2x}\left(-C_1 \sin x + C_2 \cos x\right) + 3e^{3x}.$$

Учитываем начальные условия (7.12):

$$2 = e^0\left(C_1\cos 0 + C_2\sin 0\right) + e^0,$$
$$-\frac{3}{4} = 2e^0\left(C_1\cos 0 + C_2\sin 0\right) + e^0\left(-C_1\sin 0 + C_2\cos 0\right) + 3e^0.$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 2, \\ 2C_1 + C_2 + 3 = -3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -23/4\,. \end{cases}$$

Получили частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x) = e^{2x}\left(\cos x - \frac{23}{4}\sin x\right) + e^{3x}.$$

Для выработки навыков решения линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами рекомендуется выполнить следующее задание.

Задание 7.2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

1. $y'' - 9y = e^{-2x},\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$

2. $y'' - 4y = x - 1,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$

3. $y'' + 2y' + y = \cos x,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$

4. $y'' + 3y' + 2y = 1 + x + x^2,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1.$

5. $y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x},\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 4.$

6. $y'' - 2y' - 8y = 16x + 4,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 6.$

7. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$

8. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0.$

9. $y'' + y = \cos 3x,\quad y(\pi/2) = 4,\quad y'(\pi/2) = 1.$

10. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x},\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = 9.$

8. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Числовые ряды

Пусть имеется произвольная последовательность чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

Определим числовой ряд как формальную бесконечную сумму вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

и далее наряду с последовательностью членов ряда

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

будем также использовать последовательность частичных сумм ряда

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

При этом

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} u_n, \quad m = 1, 2, \ldots$$

В случае существования конечного предела последовательности частичных сумм

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

говорят, что ряд сходится, при этом S называют суммой ряда. В противном случае ряд называют расходящимся. Универсального признака, позволяющего установить сходимость либо расходимость данного числового ряда, не существует. Далее приведены некоторые признаки сходимости.

Необходимое условие сходимости ряда:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Признак Даламбера для знакоположительного ряда:

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0, \; n = 1, 2, \ldots$ *и существует* $L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Тогда при $L<1$ *данный ряд сходится, а при* $L>1$ *данный ряд расходится.*

Признак Коши для знакоположительного ряда:

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \; u_n > 0, \; n = 1, 2, \ldots$ *и существует* $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

Тогда при $L<1$ *данный ряд сходится, а при* $L>1$ *данный ряд расходится.*

Признак Лейбница для знакочередующегося ряда:

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$. *Если* $u_n \geq u_{n+1} > 0, \; n = 1, 2, \ldots$ *и* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, *то данный ряд сходится. При этом* $|S - S_n| \leq u_{n+1}$, *где* S *– сумма ряда,* S_m *– частичная сумма.*

Далее рассмотрим данный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Если ряд из модулей сходится, то данный ряд называется абсолютно сходящимся. Доказано, что абсолютно сходящийся ряд сходится в обычном смысле. Обратное неверно. В случае, когда данный ряд сходится, а ряд из модулей его членов расходится, говорят, что данный ряд сходится условно.

Пример 8.1. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n^2+1}$ на абсолютную и условную сходимость.

1) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1}$, составленный из модулей членов данного ряда. Используем известный признак сравнения для знакоположительных рядов.

Выберем для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который, как известно, расходится. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n^2+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2+1}=1.$$

Так как $1\in(0,\infty)$, то ряд из модулей ведет себя так же как гармонический – то есть расходится. Таким образом, исходный ряд не обладает абсолютной сходимостью.

2) Исследуем данный ряд как знакопеременный, с помощью признака Лейбница. Все условия признака Лейбница выполняются. Следовательно данный ряд сходится.

3) Учитывая результаты пунктов 1 и 2, окончательно – данный числовой ряд сходится условно.

Задание 8.1. Исследовать числовой ряд на абсолютную и условную сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2+2n)}{3n^2+2}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n^2+1}{n^2+3n-2}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3+\sqrt[3]{\ln n}}$.
6. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^3}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$.
8. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.
9. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(\ln\ln n)^3}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^4}{n^4-n^3+1}$.

Степенные ряды

Степенной ряд с действительными членами – это ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \tag{8.1}$$

где x_0 и $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ – известные постоянные, x – вещественная переменная. Важной характеристикой степенного ряда является интервал сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)$. Для значений x внутри интервала сходимости ряд (8.1) сходится абсолютно. Сходимость на границе интервала определяется сходимостью числовых рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Величина R называется радиусом сходимости степенного ряда. Значение R может быть найдено, например, с помощью формул

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

или

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

при условии, что указанные пределы существуют. Значение R может быть конечным или бесконечным. В последнем случае ряд (8.1) сходится на всем множестве действительных чисел.

Заметим также, что степенные ряды допускают почленное дифференцирование и почленное интегрирование. Степенные ряды, которые получаются в результате этих операций, имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд. Соответственно суммы таких рядов можно получить дифференцируя либо интегрируя сумму исходного ряда.

Пример 8.2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(x-3)^n$.

В нашем случае x_0=3 и $a_n=\frac{n}{n+1}$ при $n=1,2,\ldots$

Вычислим

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}:\frac{n+1}{n+2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+2/n)}{n^2(1+2/n+1/n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1+2/n+1/n^2}=1.$$

Тем самым определен интервал сходимости (2,4). При x=2 получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

который расходится в силу нарушения необходимого признака сходимости. При x=4 получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

который расходится в силу нарушения необходимого признака сходимости. Окончательно, данный степенной ряд сходится при $x\in(2,4)$.

Задание 8.2. Исследовать сходимость ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{\ln(4n+2)}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}$.

4. $\sum_{n=2}^{\infty}(3n-1)(x+2)^n$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}x^n$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2-1)(x-2)^n$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}$.

8. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{\sqrt[3]{n^4-2}}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}x^n$

10. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$

Тригонометрические ряды Фурье

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-l,l]$, то есть сходится интеграл $\int_{-l}^{l}|f(x)|dx$. Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$ называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l}\right),$$

с коэффициентами

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx,\quad m=0,1,2,\ldots$$

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx,\quad m=1,2,\ldots$$

Для функции нечетной на отрезке $[-l,l]$ разложение в ряд Фурье содержит только синусы, для четной – только косинусы.

Пример 8.3. Разложить функцию $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$ в ряд Фурье на отрезке [0,2].

Продолжаем данную функцию, на отрезке [-2,2] нечетным образом. Тогда $a_m=0$ для $m=0,1,2,\ldots$ Далее вычисляем при $l=2$

$$b_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{m\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\sin\frac{m\pi x}{2}dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\sin\frac{m\pi x}{2}dx == \int_{0}^{2} x\sin\frac{m\pi x}{2}dx = -\frac{2}{m\pi}\int_{0}^{2} xd\left(\cos\frac{m\pi x}{2}\right) =$$

$$= -\frac{2}{m\pi}\left[x\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \cos\frac{m\pi x}{2}dx\right] = -\frac{2}{m\pi}\left[x\cos\frac{m\pi x}{2} - \frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2}\right]\Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{4}{m\pi}\cos m\pi = (-1)^{m+1}\frac{4}{m\pi}.$$

Таким образом, искомое разложение в ряд Фурье принимает вид

$$x - \frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\sin(\frac{\pi m}{2}x), \qquad 0 \le x \le 2.$$

Задание 8.3. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном отрезке.

1. $f(x) = |x|$ на отрезке [-1, 1].

2. $f(x) = x$ на отрезке [0, 3] по синусам.

3. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ на отрезке [-π, π].

4. $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ на отрезке [-π, π].

5. $f(x) = \begin{cases} -\pi/2, & \pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \pi/4, & 0 < x \le \pi \end{cases}$ на отрезке [-π, π].

6. $f(x) = e^x$ на отрезке [-2, 2].

7. $f(x) = e^x - 1$ на отрезке [0, 2π] по косинусам.

8. $f(x) = \pi/4 - x/2$ на отрезке [0, π] по синусам.

9. $f(x) = x$ на отрезке [-π, π].

10. $f(x) = (\pi - x)/2$ на отрезке [0, π] по синусам.

9. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Кратные интегралы на примере двойного интеграла

Как известно, двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

от функции $f(x,y)$ на множестве D определяется как предел последовательности интегральных сумм. В случае $f(x,y) \equiv 1$ в области D, значение двойного интеграла совпадает с площадью области. Однако вычисление двойного интеграла с использованием интегральных сумм является очень сложной задачей. На практике двойной интеграл вычисляют, представляя его через повторный интеграл.

Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве D (рис.9.1).

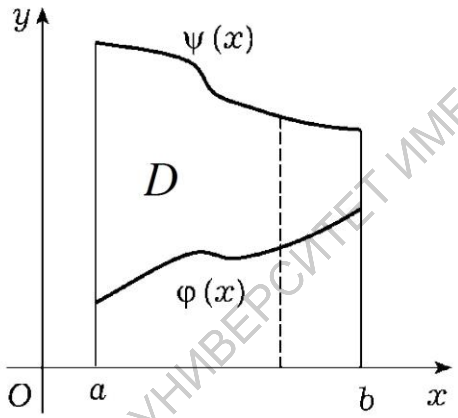

Рис.9.1.

При этом выполнены следующие условия:
1) Множество D допускает представление

$$D = \{(x, y) \mid\ a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}. \qquad (9.1)$$

2) Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из (9.1) непрерывны на отрезке $[a,b]$.
3) При любом $x \in [a,b]$ существует интеграл

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy, \qquad (9.2)$$

который зависит от x, как от параметра.
4) Функция $F(x)$, определенная в (9.2), интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Тогда существует так называемый повторный интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \qquad (9.3)$$

Если при этом функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве D, то возможно представление

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \qquad (9.4)$$

Если множество D можно представить в виде

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}, \qquad (9.5)$$

где функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$ непрерывны на отрезке $[c,d]$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx. \qquad (9.6)$$

Если для области интегрирования D возможны оба представления (9.1),(9.5), то величина повторного интеграла не зависит от порядка интегрирования. Действительно, совместное выполнение равенств (9.4),(9.6) означает, что

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx.$$

Для случая, когда область интегрирования не допускает представлений вида (9.1),(9.5), следует произвести разбиение на подобласти, каждая из которых допускает хотя бы одно из таких представлений. Искомый интеграл получим как сумму интегралов в подобластях.

Пример 9.1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x,y) = \sin(x+y)$ в области D, которая ограничена осью Ox и прямыми линиями $x=\pi/4$, $x=\pi/2$, $y=x$.

Область D допускает представление

$$D = \left\{(x,y) \mid \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le x\right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^x \sin(x+y)dy = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(-\cos(x+y)\Big|_0^x\right)dx =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (-\cos 2x + \cos x)dx = \left(-\frac{\sin 2x}{2} + \sin x\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = (0+1) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{2}}{2}.$$

В ряде случаев при вычислении двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

можно применять замену переменных. Для этого требуется рассмотреть функции вида

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (u;v) \in G, \qquad (9.7)$$

которые позволят представить область интегрирования D на координатной плоскости Oxy как образ некоторого множества G на координатной плоскости O^*uv. Величины u,v принято называть криволинейными координатами. При выполнении известных условий справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv\,.$$

Здесь

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

Пример 9.2. Вычислить двойной интеграл J от функции $f(x,y)=x+y$ в области

$$D=\{(x,y)\big|\ x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$$

Используем в качестве криволинейных координат на плоскости полярные координаты (r,φ). Тогда

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r. \tag{9.8}$$

Область-прообраз представляется в виде

$$G=\left\{(r,\varphi)\big|\ 0\le r\le a,\ 0\le\varphi\le\pi/2\right\}. \tag{9.9}$$

Области D и G показаны на рис.9.2.

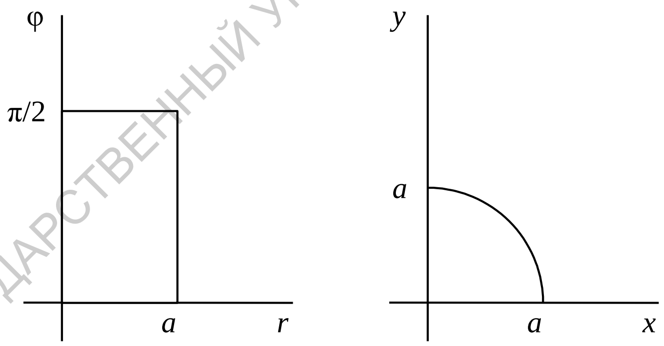

Рис.9.2.

Тогда

$$J=\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f\big(x(r,\varphi),y(r,\varphi)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|drd \quad =$$

$$=\iint\limits_G \left(r\cos\varphi + r\sin\varphi\right)rdrd \quad = \int_0^a r^2dr\int_0^{\pi/2}\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)d\varphi.$$

Вычисляя далее повторный интеграл, получим

$$J=\int_0^a\left[\left(\sin\varphi-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}\right]r^2dr=\int_0^a 2r^2dr=\frac{2}{3}\left(r^3\right)\Big|_0^a=\frac{2}{3}a^3.$$

Задание 9.1. Вычислить с помощью замены переменных двойной интеграл и определить площадь области, ограниченной заданными линиями.

1. $\left(x^2+y^2\right)^2=2ax^3.$

2. $xy=a^2,\quad xy=b^2,\quad x=py,\quad x=qy;\quad 0<a<b,\quad p<q\quad (x>0).$

3. $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4.$

4. $x=2y,\quad y=3x,\quad 3x=2+y,\quad x=4+2y.$

5. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$

6. $x+y=a,\quad x+y=b,\quad y=\alpha x,\quad y=\beta x,\quad 0<a<b,\quad 0<\alpha<\beta.$

7. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy.$

8. $y^2=ax,\quad y^2=bx,\quad x=py,\quad x=qy,\quad 0<a<b,\quad 0<p<q.$

9. $xy=a^2,\quad xy=b^2,\quad x^2=py,\quad x^2=qy,\quad 0<a<b,\quad 0<p<q.$

10. $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\quad (a>0).$

Криволинейные интегралы второго рода – по координатам

Пример 9.3. Вычислить интеграл второго рода от функции $\boldsymbol{a}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}=(-y^2x)\boldsymbol{i}+(x^2y)\boldsymbol{j}$ вдоль плоской кривой

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{\cos t}\\ y=\sqrt{\sin t}\end{cases}\quad 0\le t\le\pi/2.$$

Используя формулу

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=\int_a^b\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)dt==\int_a^b\left(P\left(x(t),y(t)\right)\cdot x'(t)+Q\left(x(t),y(t)\right)\cdot y'(t)\right)dt,$$

получим

$$\int_\Gamma(-y^2x)dx+x^2ydy=\int_0^{\pi/2}\left(-\sin t\sqrt{\cos t}\frac{-\sin t}{2\sqrt{\cos t}}+\cos t\sqrt{\sin t}\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dt=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Задание 9.2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода вдоль заданной линии. Для незамкнутых кривых ориентация соответствует возрастанию параметра t или переменной x. Для замкнутых кривых направление обхода предполагается положительным.

1. $\int\limits_L y\sin x dy - x\cos y dx;$ L– отрезок прямой, от точки (0;0) до (π ;2π).

2. $\int\limits_L xydy + (y - x)dx;$ L – дуга линии $y = x^2$ от точки (0;0) до точки (1;1).

3. $\int\limits_L 2xydx + x^2dy;$ L – дуга линии $y = x^3$ от точки (0;0) до точки (1;1).

4. $\int\limits_L 2xydx + x^2dy;$ L– дуга окружности $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in [0;\pi]$.

5. $\int\limits_L ydx - xdy;$ L – эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

6. $\int\limits_L \dfrac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2};$ L– дуга окружности $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in [0;\dfrac{\pi}{2}]$.

7. $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy;$ L – линия $y = x^2$, $x \in [-1;1]$.

8. $\int\limits_L (x + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy;$ L – линия $y = 1 - |1-x|$, $x \in [0;2]$.

9. $\int\limits_L (2 - y)dx + xdy;$ L– арка циклоиды $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t \in [0;2\pi]$.

10. $\int\limits_L \dfrac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2};$ L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Вычисление потока векторного поля через поверхность с помощью поверхностного интеграла

Векторным полем называется векторная функция точки пространства, в частном случае – плоскости. Если ввести в рассмотрение систему координат, то векторное поле можно представить в виде

$$\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

где $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ – определенные функции координат.

Векторные поля используются для математического описания различных физических процессов. При этом часто приходится вычислять поток Π векторного поля $\boldsymbol{a}$ через заданную поверхность S, используя поверхностный интеграл первого рода

$$\Pi = \iint\limits_S (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n})dS,$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности. Ограничимся случаем, когда поверхность задана явным образом

$$S=\{(x,y,z)\mid\ z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\}.$$

Тогда поток векторного поля выражается через двойной интеграл

$$\Pi=\pm\iint\limits_D\left(P(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}+Q(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}-R(x,y,f(x,y))\right)dxdy. \quad (9.10)$$

Знак перед интегралом в формуле (9.10) определяется направлением нормали $\boldsymbol{n}$. Выразив таким образом поверхностный интеграл через двойной, вычисляем последний через повторный интеграл.

Пример 9.4. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}+7y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$, через часть плоскости $P:\ x+2y+z=1$, расположенную в первом октанте, если известно, нормаль образует острый угол с осью Oz.

Представим часть плоскости следующим образом

$$S=\{(x,y,z)\mid\ z=1-x-2y,\quad (x,y)\in D\}.$$

По условию задачи область D лежит в координатной плоскости Oxy и ограничена осями Ox, Oy и прямой $x+2y=1$. Тогда

$$D=\left\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\frac{1-x}{2}\right\}.$$

Для нашего примера в формуле (9.10)

$$P(x,y,z)=2x,\ Q(x,y,z)=7y,\ R(x,y,z)=-z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2.$$

Для нормали, которая образует острый угол с осью Oz, перед интегралом следует взять знак минус.

Тогда

$$\Pi=-\iint\limits_D\big(2x(-1)+7y(-2)+(1-x-2y)\big)dxdy=\iint\limits_D(3x+16y-1)dxdy.$$

И далее

$$\Pi=\int_0^1 dx\int_0^{(1-x)/2}(3x+16y-1)dy=\int_0^1(3xy+8y^2-y)\Big|_0^{(1-x)/2}dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}x(1-x)+2(1-x)^2-\frac{1-x}{2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{6}-x^2+\frac{3}{2}x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}-1+\frac{3}{2}=\frac{2}{3}.$$

Задание 9.3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте, если известно, что нормаль к плоскости образует острый угол с осью Oz.

1. $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $\qquad P:\ x+y+z=1.$

2. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $P:\ x/2 + y + z = 1.$
3. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $P:\ x + y/2 + z/3 = 1.$
4. $\boldsymbol{a} = -2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$, $P:\ x/3 + y + z/2 = 1.$
5. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$, $P:\ x + y + z = 1.$
6. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 5y\boldsymbol{j} + 5z\boldsymbol{k}$, $P:\ x/2 + y/3 + z = 1.$
7. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$, $P:\ 2x + y/2 + z = 1.$
8. $\boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 12z\boldsymbol{k}$, $P:\ 2x + y/2 + z = 1.$
9. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $P:\ 2x + 3y + z = 1.$
10. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$, $P:\ 2x + 3y + z = 1.$

Построение потенциала векторного поля в двумерной области

При описании физических процессов особую роль играют потенциальные векторные поля вида

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}U,$$

где U – скалярная функция пространственных координат, именуемая потенциалом векторного поля. Рассмотрим случай векторного поля $\boldsymbol{a} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$, которое определено в какой-нибудь односвязной области D на плоскости Oxy. Выполнение всюду в D условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{9.11}$$

является достаточным для существования потенциала $U(x,y)$. Значения потенциала можно определить по формуле

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + U(x_0,y_0). \tag{9.12}$$

В формуле (9.12) роль начальной точки (x_0,y_0) может выполнять произвольная фиксированная точка из области D.

Пример 9.5. Доказать потенциальность поля $\boldsymbol{a} = (x+y)\boldsymbol{i} + (x-y)\boldsymbol{j}$ и найти его потенциал $U(x,y)$.

В данном примере векторное поле определено на всей плоскости Oxy, которая является односвязной областью. Так как для данного поля

$$P(x,y) = x + y, \quad Q(x,y) = x - y,$$

то условие потенциальности (9.11) выполнено. Выбрав точку $O(0,0)$ за начальную и полагая $U(0,0)=0$, получим по формуле (9.12)

$$U(x,y) = \int_0^x (x+0)dx + \int_0^y (x-y)dy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^x + \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^y = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}.$$

Окончательно, представляем искомый потенциал в виде

$$U(x,y)=\frac{x^2+2xy-y^2}{2}.$$

Задание 9.4 Доказать потенциальность поля $\boldsymbol{a}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ и найти его потенциал $U(x,y)$.

1. $P(x,y)=3x^2-2xy+y^2$, $Q(x,y)=-x^2+2xy$.

2. $P(x,y)=1+e^{x+y}+\cos x$, $Q(x,y)=1+e^{x+y}+\cos y$.

3. $P(x,y)=2x(y^2-2)$, $Q(x,y)=2y(x^2+1)$.

4. $P(x,y)=e^{x+y}+\cos(x-y)$, $Q(x,y)=e^{x+y}-\cos(x-y)$.

5. $P(x,y)=2x-3xy^2+2y$, $Q(x,y)=2x-3x^2y+2y$.

6. $P(x,y)=x(1+6y^2)$, $Q(x,y)=y(1+6x^2)$.

7. $P(x,y)=1+e^{\frac{x}{y}}$, $Q(x,y)=\frac{y-x}{y}e^{\frac{x}{y}}$.

8. $P(x,y)=x^2+2xy-y^2$, $Q(x,y)=x^2-2xy-y^2$.

9. $P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x$, $Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$.

10. $P(x,y)=x^2-2xy^2+3$, $Q(x,y)=y^2-2x^2y+3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика в упражнения и задачах: В 2 ч., учеб. пособие / П.Е. Данко [и др.]. – М.: ООО "Издательство Оникс"; М.: ООО "Издательство "Мир и Образование" – Ч.1,2. – 7-е изд., испр. – 2008.

2. Математика: учеб. пособие / под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. – ИНФРА-М, 2012. – 496 с.

3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс /Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2010. – 608 с.