Министерство образования и науки Российской Федерации
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.
Энгельсский технологический институт

В.В. Новиков, А.В. Серебряков

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания
для подготовки бакалавров по укрупненным группам направлений

09.00.00 Информатика и вычислительная техника
15.00.00 Машиностроение
18.00.00 Химические технологии
20.00.00 Техносферная безопасность и природообустройство
21.00.00 Прикладная геология, горное дело, нефтегазовое дело и геодезия
22.00.00 Технологии материалов
29.00.00 Технологии легкой промышленности

Электронное издание комбинированного распространения

Одобрено
редакционно-издательским советом
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Энгельс 2017 г.

ВВЕДЕНИЕ

Комбинаторика (комбинаторный анализ) – это раздел математики, в котором решаются задачи выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества. Такую конструкцию принято называть комбинаторной конфигурацией.

Комбинаторика развивается во взаимодействии с алгеброй, геометрией, теорией вероятностей. Комбинаторные конфигурации находят применение в информатике, статистической физике, биологии и других научных дисциплинах.

Настоящие методические указания составлены для обеспечения практических занятий и самостоятельной работы студентов при изучении дисциплин «Математика», «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы». Методические указания могут быть использованы при подготовке бакалавров по учебным планам очной и заочной форм обучения.

В работе представлен материал по следующим темам: комбинаторные числа и объекты, метод математической индукции, правило включений и исключений, случайные события и их вероятности, случайный выбор без возвращения и с возвращением. Для каждой темы приведены краткие сведения из теории, рассмотрены примеры решения задач, представлены варианты заданий для контрольных работ и самостоятельной работы студентов. Нумерация формул и рисунков в тексте методических указаний принята сквозной в каждом разделе.

В список литературных источников авторы включили известные ученые пособия и сборники задач [1-4,6,8,9], а также учебную литературу, авторами которой являются преподаватели ЭТИ (филиал) СГТУ [5,7].

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 1. Комбинаторные числа и объекты

1.1. Некоторые сведения из теории множеств

Понятие *множество* относится к исходным понятиям математики. Оно обозначает набор, совокупность каких-либо объектов, называемых *элементами множества*. Если элемент a встречается в наборе, представляющем данное множество A, говорят, что элемент принадлежит данному множеству: $a \in A$. Для обозначения *пустого множества*, то есть множества, которому не принадлежит ни одного элемента, используется символ $\varnothing$. Множество, содержащее конечное число элементов, называют *конечным множеством*.

Если каждый элемент, который принадлежит множеству A, принадлежит в то же время множеству B, то множество A называют *подмножеством* множества $B: A \subseteq B$ (A включается в B). Принято, что для любого множества A выполняются включения $A \subseteq A, \quad \varnothing \subseteq A$.

Если выполняются условия $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, говорят, что A и B – *равные множества*: $A = B$.

Множество U называется *универсальным*, если для любого множества A, которое может быть рассмотрено в данной задаче, выполняется условие $A \subseteq U$. В случае, когда универсальное множество определено, любое множество можно задать с помощью характеристического условия: если для данного элемента условие выполняется, то элемент принадлежит множеству, если не выполняется – не принадлежит.

Пример.1.1. Определить на множестве действительных чисел отрезок $[a,b]$.

В данном примере $U=\mathbb{R}$, $A=[a,b]$. Обозначим через x произвольное действительное число. Тогда $[a,b]=\{x\in \mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$. Роль характеристического условия выполняет двойное нестрогое неравенство.

С множествами произвольной природы можно совершать операции объединения и пересечения, определять разность множеств и дополнение множества. Приведем определения для указанных операций.

Объединением множеств A и B (обозначается как $A \cup B$) называется множество всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B. Символьная запись данного определения:

$$A \cup B = \left\{ x \in U \mid x \in A \quad \text{или} \quad x \in B \right\}.$$

Пересечением множеств A и B (обозначается как $A \cap B$) называется множество всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A и B, то есть

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \quad и \quad x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B (обозначается как $A \setminus B$) называется множество всех тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат B, то есть

$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \quad и \quad x \notin B\}.$$

Дополнением множества A (обозначается как $\overline{A}$, или $\neg A$) называется множество всех тех и только тех элементов, которые не принадлежат A, то есть

$$\neg A = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Наглядное представление об этих операциях дают *диаграммы Венна*. На таких диаграммах множества изображаются произвольными фигурами, лежащими в плоскости, соответствующей универсальному множеству U. Иллюстрации данных операций в виде диаграмм Венна приведены на рис.1-4.

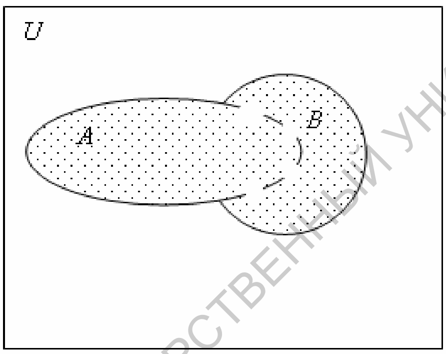

Рис.1. Объединение множеств

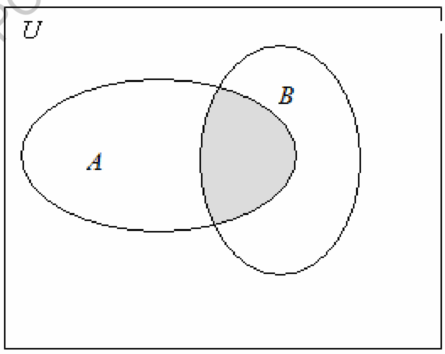

Рис.2. Пересечение множеств

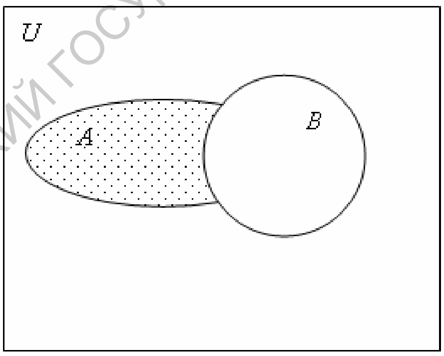

Рис.3. Разность множеств

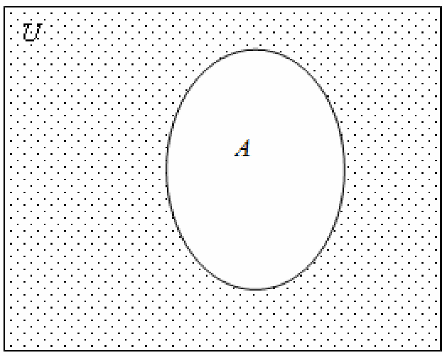

Рис.4. Дополнение множества

Для представления о свойствах операций над множествами приведем некоторые тождества теории множеств:

$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ – свойство коммутативности;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – свойство ассоциативности;

$A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,$
$A \cap \neg A = \varnothing,\ A \cup U = U,$ – действия с пустым и универсальным множествами;
$A \cap U = A,\ A \cup \neg A = U$

(1.1)

$\neg\neg A = A$ – правило двойного дополнения (двойного отрицания);

$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$ – свойство идемпотентности;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – свойство дистрибутивности;

$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B,$
$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ – правило де Моргана

Пусть далее A, B – произвольные множества. *Декартово произведение* множеств A и B (обозначается как $A \times B$) – это множество всех упорядоченных пар (x_1, x_2) таких, что $x_1 \in A, x_2 \in B$.

Пример.1.2. При записи шахматной партии используются множества $A = \{a, b, \ldots, h\}$ – для обозначения вертикалей, и $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$ – для обозначения горизонталей. Поля шахматной доски обозначаются с помощью элементов множества $A \times B = \{(a,1), (a,2), \ldots, (h,8)\}$.

Заметим, что можно построить декартово произведение произвольного числа множеств:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n \right\}. \tag{1.2}$$

Упорядоченный набор элементов $(x_1, \ldots, x_n)$ будем далее называть *вектором*.

В случае, когда в произведении (1.2) все множители равны между собой, то есть $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, говорят про *декартову степень* A^n *множества А.*

1.2. Метод математической индукции

Метод математической индукции является одним из способов строгого доказательства предложений (утверждений), зависящих от натурального аргумента. Суть метода заключается в следующем.

Пусть m *– натуральное число,* $m \geq 1$ *и* $P(n)$ *– предложение, зависящее от* n*, где* $n \geq m$.
Если

1) $P(m)$ *справедливо;*
2) $P(n)$ *будучи истинным предложением, влечет истинность предложения* $P(n+1)$ *для любого натурального* n*,* $n \geq m$*,*

то $P(n)$ *– истинное предложение для любого натурального* n*,* $n \geq m$*.*

Пункт 1 принято называть базой индукции, пункт 2 – шагом индукции. Допущение в пункте 2 справедливости $P(n)$ – индуктивным предположением.

Пример.1.3. Доказать, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1) Установим истинность базы индукции. При $n = m = 1$ имеем истинное равенство $1^2 = \dfrac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

2) Докажем, что обоснован шаг индукции. Действительно,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (n+1)^2,$$

то есть, согласно индуктивному предположению,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

В силу

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\big((2n^2+n) + 6(n+1)\big)}{6} =$$

$$= \frac{2(n+1)(n^2 + 3{,}5n + 3)}{6} = \frac{2(n+1)(n+1{,}5)(n+2)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\big(2(n+1)+1\big)}{6},$$

получаем

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Последнее означает, что шаг индукции реализуется.

Истинность базы индукции и обоснованность шага индукции доказывают, что данное в условии равенство выполняется для всех натуральных чисел.

1.3. Правило суммы и правило произведения

Правило суммы и правило произведения относятся к основным принципам комбинаторики. Для каждого правила приведем формулировки соответствующих теорем и рассмотрим пример.

Теорема (правило суммы). *Если для* $k=1,\dots,n$ *элемент* x_k *можно выбрать* m_k *способами, причём выбор одного элемента исключает одновременный выбор другого элемента, то число способов выбрать «либо* x_1*, либо* x_2*, … либо* x_n*» равно* $m_1+m_2+\dots+m_n$.

Теорема (правило произведения). *Если для* $k=1,\dots,n$ *элемент* x_k *можно выбрать* m_k *способами, то число способов выбрать вектор* $(x_1,\dots,x_n)$ *равно* $m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_n$.

Заметим, что доказательство приведенных теорем проводится с использованием метода математической индукции.

Пример.1.4. Пусть имеется пять красных и семь синих шаров. Тогда имеется 5 способов выбрать красный шар и 7 способов выбрать синий шар. Количество способов выбрать один шар без учета цвета определяется по правилу суммы как 5+7=12. Количество способов выбрать сперва красный шар, а затем синий шар определяется по правилу произведения как 5·7=35.

1.4. Размещения и перестановки

Рассмотрим конечное множество X, содержащее n элементов. Будем называть векторы $(x_1,\dots,x_m)\in X^m$, $m\le n$ *упорядоченными* m*-выборками или размещениями из* n *элементов по* m.

Число различных размещений из n по m без повторений элементов вычисляется по правилу умножения и составляет

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.3}$$

В формуле (1.3) использован *факториал*, то есть величина

$$n! = \begin{cases} 1, & n=0, \\ n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1, & n=1,2,3,\dots \end{cases}$$

В случае $m=n$ формула (1.3) дает *число перестановок из* n *элементов*

$$P_n = n! \tag{1.4}$$

Правило умножения позволяет также определить *число размещений из n по m с повторениями элементов*

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{1.5}$$

Рассмотрим примеры подсчета числа размещений и перестановок.

Пример. 1.5. Имеется множество цифр $D=\{0,1,\ldots,9\}$. Сколько различных шифров из трех цифр можно составить в случаях, когда повторы цифр запрещены либо разрешены?

Имеем $n=10$, $m=3$. В случае, когда повторы цифр запрещены, количество шифров определяется по формуле (1.3) и составляет

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720.$$

Для случая, когда повторы цифр разрешены, количество шифров определяется по формуле (1.5) как $\overline{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$.

Пример. 1.6. Сколько способов существует для того, что рассадить 12 зрителей в зале, где имеется 12 мест?

Даная задача сводится к подсчету числа перестановок из 12 элементов. Формула (1.4) позволяет вычислить $P_{12}=12!=479001600$.

Рассмотрим теперь множество из n элементов при условии, что среди них мы различаем m типов элементов. Пусть k_1 элементов относятся к первому типу, k_2 элементов – ко второму, и так далее, вплоть до k_m элементов последнего типа. При этом $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. Если элементы одного и того же типа для нас неразличимы, то число перестановок должно получаться меньше, чем по формуле (1.4). Действительно, в данном случае мы получаем *перестановки с повторениями*. Число таких перестановок равно

$$P(k_1,k_2,\ldots,k_m) = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} \tag{1.6}$$

Пример. 1.7. Пусть имеется 12 шаров, из них пять красных и семь синих. Сколько разных перестановок мы можем представить, не различая одноцветные шары?

Применим формулу (1.6) при $m=2$, $k_1=5$, $k_2=7$. Тогда искомое число перестановок равно

$$P(5,7) = \frac{(5+7)!}{5!\cdot 7!} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 9\cdot 11 = 792.$$

Сравнение результатов двух последних примеров иллюстрирует разницу между перестановками с повторениями и без повторений.

1.5. Сочетания

В начале данного пункта докажем следующее утверждение.

Теорема. *Число всех m-элементных неупорядоченных подмножеств множества из n элементов равно*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m(m-1)\cdot ...\cdot 2\cdot 1}. \quad (1.7)$$

Для доказательства рассмотрим сперва различные упорядоченные m-элементные выборки из данного множества. Число таких выборок определяется как A_n^m. Затем учитываем, что в данной теореме речь идет о неупорядоченных подмножествах. Число таких подмножеств по отношению к A_n^m уменьшается кратно числу перестановок из m элементов. Тогда $C_n^m = A_n^m / P_m$, что приводит с учетом формул (1.3) и (1.4) к равенству (1.7).

Подмножества, рассмотренные в теореме, называют также *сочетаниями из n элементов по m*. Величина C_n^m носит название *число сочетаний без повторений из n элементов по m*. Приведем без вывода некоторые известные тождества для числа сочетаний

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m \qquad \sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n, \qquad \sum_{m=0}^{n} (C_n^m)^2 = C_{2n}^m. \quad (1.8)$$

Заметим, что третья формула из (1.8) позволяет ответить на вопрос: сколько всего существует подмножеств у множества из n элементов?

Пример.1.8. Возьмем те же пять красных и семь синих шаров, которые использовали в предыдущих примерах. Сколько вариантов существует для того, чтобы выбрать два шара одинакового цвета?

Для ответа на поставленный вопрос выполним следующие действия.
1) Определим число вариантов для выбора двух красных шаров

$$m_1 = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10.$$

2) Определим число вариантов для выбора двух синих шаров

$$m_2 = C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2} = 21.$$

3) Воспользуемся правилом суммы и найдем искомое число вариантов выбора пары одноцветных шаров $m = m_1 + m_2 = 10 + 21 = 31$.

Для случая, когда элементы могут использоваться в наборе несколько раз, применяют *число сочетаний с повторениями из n элементов по m*

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \quad (1.9)$$

П р и м е р . 1.9. Сколько разных результатов можно получить при бросании двух игральных костей? Ответ дать для следующих ситуаций 1) если мы отличаем одну кость от другой; 2) если кости неразличимы между собой.

В первом случае число вариантов m определяется по правилу произведения, то есть $m=m_1 \cdot m_2=6 \cdot 6=36$. Во втором случае $m = \overline{C}_6^2 = C_7^2 = 21$.

1.6. Бином Ньютона. Полиномиальная формула

Термин *биномиальная формула Ньютона* (*бином Ньютона*) – это исторически сложившееся название для следующего утверждения

Т е о р е м а . *Для произвольных числовых величин a,b при* n=0,1,2,… *справедливо равенство*

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m \tag{1.10}$$

Для доказательства теоремы перемножим последовательно (a+b) n раз. Получим сумму из 2^n слагаемых. Каждое слагаемое будет иметь вид $d_1 d_2 \ldots d_n$, где $d_i=a$ либо $d_i=b$ ($i=1,\ldots,n$). Далее сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями b, и представим

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} B_m a^{n-m} b^m .$$

Величина B_m равна числу слагаемых, содержащих степень b^m. Заметим, что количество таких слагаемых равно числу способов определить в произведении $d_1 d_2 \ldots d_n$ ровно m множителей как $d_i=b$. Другими словами, B_m равно числу различных неупорядоченных выборок из n элементов по m. Но тогда $B_m = C_n^m$ и мы приходим к формуле (1.10).

Формула (1.10) для целых неотрицательных значений n была известна задолго до Ньютона, но ему удалось обобщить результат для случая дробных и отрицательных показателей степени. Число сочетаний C_n^m, которое использовано в формуле бинома Ньютона, принято также называть *биномиальным коэффициентом*.

Для вычисления биномиальных коэффициентов при малых значениях n удобно пользоваться так называемым *треугольником Паскаля*. В этой треугольной таблице нумерация строк начинается с 0, строка с номером n содержит биномиальные коэффициенты для разложения $(a+b)^n$. Каждый коэффициент, кроме крайних двух, которые равны 1, вычисляется как сумма соответствующих коэффициентов предыдущей строки. Это правило обусловлено второй формулой из (1.8). На рис.5 приведены первые 10 строк треугольника Паскаля

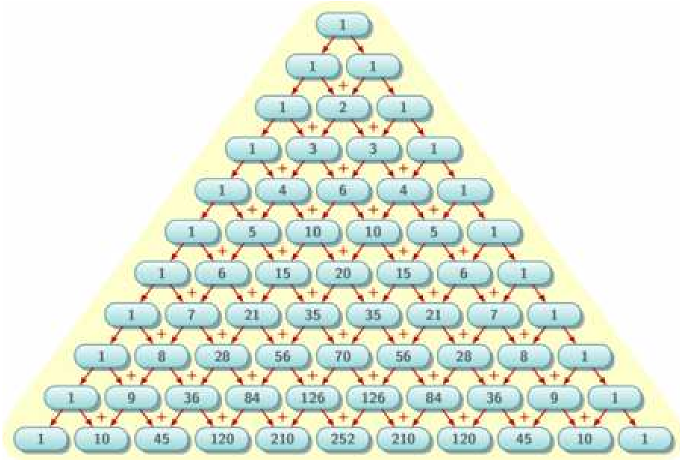

Рис.5. Фрагмент треугольника Паскаля(n=0,1,2,…,10)

Пример.1.10. Частным случаем бинома Ньютона являются известные из курса школьной математики формулы сокращенного умножения – квадрат суммы и куб суммы. Например,

$$(a+b)^3=\sum_{m=0}^{3}C_3^m a^{3-m}b^m=C_3^0a^{3-0}b^0+C_3^1a^{3-1}b^1+C_3^2a^{3-2}b^2+C_3^3a^{3-3}b^3=$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Значения биномиальных коэффициентов можно вычислить по формуле (1.7) или взять из треугольника Паскаля.

Приведем далее без вывода *полиномиальную формулу*

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n}P(k_1,k_2,\ldots,k_m)a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_m^{k_m}. \qquad (1.11)$$

Полиномиальные коэффициенты $P(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ в формуле (1.11) определяются как число перестановок с повторениями по формуле (1.6). При n=2 формула (1.11) сводится к биному Ньютона (1.10).

§ 2. Метод включений и исключений

В данном параграфе будет рассмотрена *формула включений и исключений*, которая позволяет находить число элементов в объединении конечного числа конечных множеств. Условимся обозначать число элементов в произвольном конечном множестве A через $m(A)$.

Теорема. *Пусть* $A_1,\ldots,A_n$ *– произвольные конечные множества. Тогда справедлива формула включений и исключений*

$$m(A_1\cup\ldots\cup A_n)=\sum_{1\le i\le n}m(A_i)-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}m(A_{i_1}\cap A_{i_2})+$$
$$+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}m(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})+\ldots+(-1)^{n-1}m(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n). \qquad (1.12)$$

Доказательство теоремы можно найти в учебной литературе [3]. Мы заметим только, что доказательство можно провести методом математической индукции, который рассматривался в пункте 1.2.

Пример.1.1. Контрольная работа по математике состоит из трех задач: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Известно, что контрольную работу выполняли 1000 школьников. Из них задачу по алгебре решили 800, по планиметрии – 700, по стереометрии – 600 человек. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 школьников, по алгебре и стереометрии – 500, по планиметрии и стереометрии – 400. Все три задачи решили 300 человек. Существуют ли школьники, не решившие ни одной задачи? Если существуют, то сколько их?

Обозначим: U – множество всех школьников; A – множество школьников, решивших задачу по алгебре; P – множество школьников, решивших задачу по планиметрии; S – множество школьников, решивших задачу по планиметрии. Дано по условию задачи

$$m(U)=1000,\quad m(A)=800,\quad m(P)=700,\quad m(S)=600,$$

$$m(A\cap P)=600,\quad m(A\cap S)=500,\quad m(P\cap S)=400,\quad m(A\cap P\cap S)=300.$$

Искомой величиной является

$$m\big(\neg(A\cup P\cup S)\big)=m(U)-m(A\cup P\cup S)$$

Вычислим по формуле включений и исключений

$$m(A\cup P\cup S)=m(A)+m(P)+m(S)-$$

$$-m(A\cap P)-m(A\cap S)-m(P\cap S)+m(A\cap P\cap S)=$$

$$=800+700+600-600-500-400+300=900.$$

Тогда $m\big(\neg(A\cup P\cup S)\big)=1000-900=100$. Таким образом, не решили ни одной задачи 100 школьников.

Задания для самостоятельной работы студентов

Для части задач указан источник из списка литературы. Некоторые задачи многократно встречаются в различных источниках, став «математическим фольклором».

1.1. Запишем предложение «*Четыре усталых молчаливых путника долго пережидали внезапно разразившуюся грозу*». Будем вычеркивать из него слова так, чтобы всякий раз получалось правильное предложение (например, нельзя вычеркнуть слово «*четыре*», но можно вычеркнуть слово «*усталых*»). Вычеркивать слова можно в любом порядке одно за другим. Сколькими способами можно прийти к предложению, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова? [3] *Ответ*: 60

1.2. Доказать, что следующие числа – целые [4]

а) $\frac{(2n)!}{2^n}$; б) $\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$; в) $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

1.3. В футбольном турнире приняли участие несколько команд, причем каждая команда сыграла с остальными по две матча. Всего состоялось 90 матчей. Сколько было команд?

Ответ: 10

1.4. Имеется m белых и n черных шаров, причем $m > n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом? [1]

Ответ: C_{m+1}^{n}

1.5. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Ответ: $2(n!)^2$

1.6. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты, так, чтобы среди них были карты каждой масти? [4]

Ответ: $C_4^1 C_{13}^3 \left(C_{13}^1\right)^3 + C_4^2 \left(C_{13}^2\right)^2 \left(C_{13}^1\right)^2 6362512$

1.7. Для окраски одной грани кубика требуется 5 секунд. За какое наименьшее время 3 человека могут выкрасить 188 кубиков? Предполагается, что два человека не могут одновременно красить один кубик. [4]

Ответ: 1880 с

1.8. Сессию из трех экзаменов успешно сдал 41 студент. Возможные оценки: 5, 4, 3. Доказать, что по крайней мере пять студентов сдали сессию с одинаковыми оценками. [4]

1.10. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2,\ldots,2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер? [3]

Ответ: $(n!)^2$

1.11. Трое сумасшедших маляров принялись красить пол, каждый в свой цвет. Один успел закрасить красным 75% пола, другой зелёным – 70%, третий синим – 65%. Какая часть пола наверняка закрашена всеми тремя красками? [1]

Ответ: 10%

1.12. Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей? [1]

Ответ: 210

Задания для контрольной работы «Комбинаторные числа и объекты» [6]

1. Из данной пропорции найти *x* и *y*.

Вар.	Данная пропорция	Вар.	Данная пропорция
1	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y}=5:4:2$	16	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=28:12:3$
2	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=3:3:2$	17	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=6:3:1$
3	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=42:35:20$	18	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=72:45:20$
4	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=3:4:3$	19	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=14:10:5$
5	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=4:5:4$	20	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=28:24:15$
6	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=21:14:6$	21	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=15:5:1$
7	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=3:5:5$	22	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=15:24:28$
8	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=2:4:5$	23	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=7:7:5$
9	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=2:3:3$	24	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=6:7:6$
10	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=14:8:3$	25	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=5:5:3$
11	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=5:3:1$	26	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=1:7:21$
12	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=5:6:5$	27	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=42:35:20$
13	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=14:7:2$	28	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=45:20:26$
14	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=6:14:21$	29	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=55:22:6$
15	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=24:9:2$	30	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=3:4:3$

2. В разложении данного выражения *P* по полиномиальной формуле найти коэффициент при x^k, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Вар.	*k*	*P*	Вар.	*k*	*P*	Вар.	*k*	*P*
1	23	$(2+x^2-x^3)^{13}$	11	112	$(4+x^{18}+x^4)^{28}$	21	44	$(2+x^{10}-x^4)^{11}$
2	96	$(1+x^6-x^{10})^{17}$	12	46	$(1-x^4+x^6)^{14}$	22	27	$(3+x^3+x^9)^9$
3	80	$(4-x^8+x^6)^{14}$	13	48	$(3+x^5-x^3)^{16}$	23	56	$(2-x^2+x^9)^{29}$
4	130	$(x^7-2+x^5)^{26}$	14	40	$(x^3+3-x^4)^{13}$	24	68	$(1+x^{10}-x^4)^{18}$
5	66	$(x^7-x^3+3)^{22}$	15	132	$(2-x^6+x^{14})^{23}$	25	60	$(2-x^4+x^7)^{16}$
6	48	$(1+x^7-x^2)^{25}$	16	34	$(4+x^2-x^5)^{17}$	26	17	$(7-x+x^4)^{14}$
7	114	$(3+x^{14}+x^6)^{20}$	17	96	$(1+x^4-x^{14})^{24}$	27	150	$(2-x^5-x^7)^{32}$
8	30	$(x^7+3-x^2)^{16}$	18	57	$(2-x^3+x^7)^{19}$	28	120	$(x^{14}+x^8-3)^{15}$
9	18	$(2+x^6-x^2)^9$	19	60	$(1+x^{14}-x^4)^{15}$	29	34	$(x^2-x^8+2)^{15}$
10	22	$(3-x^2+x^5)^{12}$	20	9	$(5-x-x^3)^{10}$	30	300	$(x^{10}-3+x^{14})^{31}$

2. КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В настоящее время общепринятым является аксиоматический подход к определению вероятности, предложенный А.Н. Колмогоровым в 30-х годах XX века. При этом конкретные способы приписать данному случайному событию ту или иную вероятность могут быть различными. Среди таких способов наиболее простым (и первым в историческом отношении) является метод, основанный на так называемом классическом определении вероятности. Хотя это определение имеет многовековую историю, оно и в настоящее время находит широкое применение в самых различных областях знаний (в генетике, информатике, статистической физике и т.д.).

Вторая часть настоящих методических указаний посвящена задачам вычисления классической вероятности, решение которых основано на идеях и методах, рассмотренных в предыдущей части.

§ 1. Случайные события и их вероятности

В данном разделе приведены основные определения, связанные с понятиями случайного события и его вероятности, изложение соответствует пособию [7]. С подробным освещением данных вопросов можно ознакомиться, например, по фундаментальному учебнику [9].

1.1. Операции над событиями. Алгебры и сигма-алгебры событий

Определение. *Случайное событие – это событие, о котором при данных условиях нельзя заранее сказать, произойдет оно или нет. Совокупность условий, сопровождающих случайное событие, (если их можно воспроизвести неоднократно) называют случайным экспериментом или испытанием.*

Случайные события (далее – просто «события») обозначают прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$

Определение. *Исход данного случайного эксперимента, не разложимый на более простые исходы, называется элементарным исходом или элементарным событием. Элементарные события обозначают как $\omega_1, \omega_2, \ldots$ или просто ω. Множество всех элементарных событий данного случайного эксперимента называют пространством элементарных событий и обозначают Ω.*

Определение. *Пусть A – некоторое (элементарное или нет) событие в данном испытании. Говорят, что данный элементарный исход*

$\omega \in \Omega$ *благоприятствует наступлению события* A, *если* A *происходит одновременно с* ω.

Математической моделью случайного эксперимента служит некоторое абстрактное множество Ω, элементы которого ω (точнее, одноэлементные подмножества $\{\omega\} \subset \Omega$) изображают элементарные события, а прочие подмножества $A \subseteq \Omega$ – сложные события, состоящие из элементарных событий, благоприятствующих A.

Все множество Ω отождествляется с *достоверным событием* (т.е. с тем, которое заведомо происходит в данном испытании), пустое множество $\varnothing$ – с *невозможным событием* (с тем, которое не может произойти).

Определение. *Произведением событий* A *и* B *называется событие* $C = AB$, *состоящее в том, что* A *и* B *произошли одновременно.*

Произведению событий A и B соответствует пересечение изображающих их множеств: $A \cap B$.

Определение. *Суммой событий* A *и* B *называется событие* $C = A + B$, *состоящее в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.*

Сумме событий A и B соответствует объединение изображающих их множеств: $A \cup B$.

Определение. *Разностью событий* A *и* B *называется событие* $C = A - B$, *состоящее в том, что* A *произошло, а* B *не произошло.*

Разности событий A и B соответствует теоретико-множественная разность изображающих их множеств: $A \setminus B$.

Определение. *Говорят, что событие* A *влечет событие* B, *если* B *происходит всякий раз, когда произошло событие* A.

Отношению «событие A влечет событие B» соответствует отношение «A есть подмножество B» изображающих их множеств: $A \subseteq B$.

Определение. *События* A *и* B *называются несовместными, если наступление любого из них исключает наступление другого.*

Несовместным событиям A и B соответствуют не пересекающиеся множества: $A \cap B = \varnothing$.

Определение. *Если* A *– некоторое событие, то противоположным ему называется событие* $\overline{A}$, *состоящее в том, что* A *не произошло.*

Противоположному событию $\overline{A}$ соответствует дополнение $\Omega \setminus A$ множества A до всего пространства Ω.

Замечание. В дальнейшем мы не будем различать событие A, наступающее в рамках некоторого случайного эксперимента, и множество A, изображающее его в соответствующей математической модели. Кроме, того для обозначения операций над событиями, наряду с приведенными выше, мы будем использовать теоретико-множественные обозначения. Например, записи $C = AB$ и $C = A \bigcap B$ означают одно и то же – произведение событий A и B.

Определение. *Совокупность* $\mathscr{A}$ *множеств* $A \subseteq \Omega$ *называется алгеброй событий, если она содержит* Ω *и из условия* $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{A}$ *следует, что* $A + B \in \mathscr{A}$, $AB \in \mathscr{A}$ *и* $A - B \in \mathscr{A}$.

Иначе говоря, алгебра событий – это система $\mathscr{A}$ подмножеств множества Ω и замкнутая относительно операций объединения, пересечения и взятия разности. Поскольку с прикладной точки зрения естественно требовать, чтобы сумма, призведение и разность событий снова были событиями, алгебра является тем минимальным «запасом» множеств, который гарантирует выполнение этого требования.

Если пространство элементарных событий Ω *конечно*, то алгебра $\mathscr{A}$ является не только минимальным, но и достаточным запасом множеств для построения полноценной теории. Если же множество Ω оказывается *бесконечным*, то требуется выполнение некоторых дополнительных условий, которые приводят к понятию т.н. *сигма-алгебры*.

Определение. *Бесконечное множество* A *называется счетным, если его элементы можно занумеровать натуральными числами т.е. представить в виде последовательности неповторяющихся элементов* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, *где* $a_i \neq a_j$, $i \neq j$. *В противном случае бесконечное множество называется несчетным.*

Доказано, что среди бесконечных множеств существуют как счетные, так и несчетные. Примерами счетных множеств служат множества всех натуральных, целых или рациональных чисел. Множество действительных чисел (числовая прямая), множество точек плоскости, любой числовой промежуток являются примерами несчетных множеств.

Определение. *Алгебра событий* $\mathscr{A}$, *называется* σ*-алгеброй (сигма-алгеброй), если она замкнута относительно счетного числа операций объединения, т.е., если из условия* $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots \in \mathscr{A}$ *следует* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots \in \mathscr{A}$.

Замечание. Можно доказать, что из замкнутости алгебры событий относительно счетного объединения следует замкнутость относительно счетного числа любых других операций над событиями. В частности, если $\mathscr{A}$ удовлетворяет условиям из определения σ-алгебры, то $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots \in \mathscr{A}$.

В настоящем издании мы ограничимся рассмотрением только конечных пространств Ω. Наиболее часто в этом случае в качестве алгебры событий $\mathscr{A}$ берут множество всех подмножеств множества Ω (включая само Ω и $\varnothing$). Оно называется *булеаном* Ω и обозначается через 2^{Ω}. Выше было отмечено (см. 1.8), что если множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ состоит из n элементов, то множество всех его подмножеств содержит 2^n элементов, чем и оправдывается обозначение 2^Ω.

1.2. Вероятность случайного события и ее свойства

Вероятность события A интуитивно понимается как численная мера «ожидаемости» наступления этого события, заключенная в пределах от нуля до единицы. Чем ближе вероятность события к единице, тем больше оснований ожидать, что оно наступит при данных условиях.

В рамках упомянутого выше аксиоматического подхода вероятность (вероятностную меру) определяют как числовую функцию $\mathsf{P}(A)$, заданную на некотором множестве случайных событий и удовлетворяющую определенному набору условий (аксиом).

Аксиома 1. *Пусть* Ω *– пространство элементарных событий и* $\mathscr{A}$ *– некоторая* σ*-алгебра событий. Каждому событию* $A \in \mathscr{A}$ *ставится в соответствие неотрицательное число* $\mathsf{P}(A)$, *называемое его вероятностью.*

Аксиома 2. *Вероятность достоверного события равна единице:*

$$\mathsf{P}(\Omega) = 1.$$

Аксиома 3 (счетная аддитивность вероятностной меры). *Если события* $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ *попарно несовместны, то*

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_i + \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

В частности, для конечного числа n *попарно несовместных событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *имеет место равенство*

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \ldots + \mathsf{P}(A_n).$$

Свойство, выражаемое последним равенством называется *конечной аддитивностью* вероятностной меры.

Следствия из аксиом

I. *Вероятность невозможного события равна нулю:* $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$.

II. *Для любого* $A \in \mathscr{A}$

$$0 \le \mathsf{P}(A) \le 1.$$

III. *Для любого* $A \in \mathscr{A}$

$$\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A).$$

IV. *Если событие* A *влечет за собой событие* B, *то*

$$\mathsf{P}(A) \le \mathsf{P}(B).$$

V. (Теорема сложения вероятностей). *Если A и B – произвольные (не обязательно несовместные) события, то*

$$\mathsf{P}(A+B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(AB).$$

Определение. *Вероятностным пространством называют тройку объектов $(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})$, где Ω – пространство элементарных событий, $\mathscr{A}$ – σ-алгебра его подмножеств, называемых случайными событиями, $\mathsf{P}(A)$ – вероятность, определенная на σ-алгебре $\mathscr{A}$.*

В современной теории вероятностей построение вероятностного пространства $(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})$ является исходным моментом для математического описания и моделирования любых случайных явлений и процессов.

§ 2. Классическое определение вероятности

Предположим, что проводится случайный эксперимент с конечным числом элементарных исходов $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_n\}$, и пусть имеются основания (например, соображения симметрии) считать эти исходы равновозможными:

$$\mathsf{P}(\omega_1)=\mathsf{P}(\omega_2)=\ldots=\mathsf{P}(\omega_n)=\frac{1}{n}.$$

Зададим вероятность на $\mathscr{A}=2^{\Omega}$ следующим образом. Если событию $A\in 2^{\Omega}$ благоприятствуют k элементарных событий $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\ldots,\omega_{i_k}$, то его вероятность положим равной

$$\mathsf{P}(A)=\sum_{m=1}^{k}\mathsf{P}(\omega_{i_m})=\frac{k}{n},$$

в частности, $\mathsf{P}(\Omega)=\sum_{m=1}^{n}\mathsf{P}(\omega_m)=\frac{n}{n}=1$. Очевидно, что все аксиомы вероятности для введенной нами функции множества выполнены. Определение вероятности события A, на основе изложенного подхода называется *классическим*. Кратко это определение можно сформулировать так:

при указанных выше условиях вероятность события A равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A к общему числу элементарных исходов

$$\mathsf{P}(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где символом $m(A)$ обозначено число элементов множества A.

П р и м е р 2.1. Случайный эксперимент состоит в однократном выбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма выпавших на двух костях очков кратна пяти.

Р е ш е н и е. Каждый элементарный исход зададим упорядоченной парой чисел (i, j), где i – число очков, выпавшее на первой кости, j – на второй, $1 \le i, j \le 6$. Общее число элементарных исходов равно $n = 6^2 = 36$. Событию A={сумма очков кратна 5} , благоприятствуют k=7 элементарных исходов:

$$5+5=10,\ 6+4=10,\ 4+6=10,\ 1+4=5,\ 4+1=5,\ 2+3=5,\ 3+2=5.$$

Таким образом, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{7}{36}$.

В приведенном примере число всех элементарных событий $m(\Omega)$ и число $m(A)$ событий, благоприятствующих событию A, легко получалось непосредственным подсчетом. Однако в большинстве практически важных случаев числа $m(\Omega)$ и $m(A)$ настолько велики, что непосредственный подсчет невозможен. В такой ситуации используются методы комбинаторики, часть из которых была рассмотрена в первой части методических указаний.

При подсчете вероятностей в рамках классического подхода удобной моделью эксперимента является так называемая выборочная схема. Пусть случайный эксперимент состоит в выборе наудачу k элементов из n различных элементов некоторого множества $E = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$. Для определенности будем считать, что имеется урна с n неразличимыми на ощупь, но пронумерованными шарами, из которой наудачу извлекают k шаров. При этом имеются два различных способа действий – *случайный выбор без возвращения*, когда вынутый шар обратно не возвращается и *случайный выбор с возвращением*, когда извлеченный шар всякий раз возвращается в урну. Кроме того, мы можем учитывать порядок, в котором появляются извлекаемые шары, тогда результатом эксперимента будет *упорядоченная выборка*. Если же учитывается только состав шаров в выборке, но не их порядок, то получаем *неупорядоченную выборку*. В связи с упомянутой интерпретацией, выборочную схему часто называют урновой схемой.

В зависимости от того, какой из четырех описанных вариантов реализуется (упорядоченный выбор с возвращением, неупорядоченный без возвращения и т.д.), мы будем получать различные множества Ω элементарных событий. Для подсчета общего числа элементов $m(\Omega)$ в этих множествах применяются различные комбинаторные числа, введенные в первой части методических указаний.

Далее мы рассмотрим каждый из четырех упомянутых случаев отдельно, при этом нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Пусть урна содержит n шаров с номерами 1, 2,…, n. Условимся записывать упорядоченную выборку, состоящую из k шаров в виде $(a_1, a_2, ..., a_k)$, где a_i – номер шара, извлеченного на i-м шаге, а неупорядоченную – в виде $[a_1, a_2, ..., a_k]$. Например, если в урне 5 шаров, то при выборе без возвращения четырех шаров записи (2,3,1,5) и (3,1,2,5) соответствуют двум различным упорядоченным выборкам с одинаковым составом шаров. Запись [1,2,3,5] означает неупорядоченную выборку с тем же составом шаров, что и две предыдущие (для определенности мы расположили номера в порядке возрастания).

§ 3. Случайный выбор без возвращения

Будем предполагать, что $k \le n$ и что извлеченные шары обратно не возвращаются. В этом случае, как было отмечено, имеются две возможности, связанные с тем, считаем ли мы выборки упорядоченными или нет.

3.1. Схема выбора, приводящая к сочетаниям

Если рассматриваются неупорядоченные выборки, то

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, a_2, ..., a_k],\ a_i \ne a_j,\ i \ne j,\ a_i = 1,2,...,n\},$$

т.е. элементарными исходами будут сочетания без повторений из n по k, число которых согласно (1.7) равно

$$m(\Omega) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.1}$$

П р и м е р 2.2. Из партии, содержащей n изделий, среди которых l бракованных, наудачу извлекают k изделий для контроля. Найти вероятность события A = {в полученной выборке ровно r изделий бракованные}.

Р е ш е н и е. Из условия ясно, что $k \le n$ и $r \le k$. Занумеруем изделия числами от 1 до n, и пусть множество номеров E_1 = {1, 2, ..., $n-l$} соответствует годным изделиям, а множество номеров E_2 = {$n-l+1$,…, n} – бракованным изделиям.

Согласно условию задачи, производится неупорядоченный выбор без возвращения k элементов из множества $E = E_1 \cup E_2$ ={1, 2, ..., n}. Поэтому $m(\Omega) = C_n^k$. Событию A благоприятствуют только такие исходы, при которых r элементов выборки принадлежат E_2, а остальные $k-r$ элементов – множеству E_1. Бракованные изделия в количестве r штук можно выбрать из имеющихся l штук C_l^r способами. Оставшиеся $k-r$ годных изделий из $n-l$ имеющихся – C_{n-l}^{k-r} способами. По комбинаторному правилу произведения (см. п. 1.3) получаем, что число всех интересующих нас исходов равно $m(A)=C_l^r C_{n-l}^{k-r}$, так что искомая вероятность есть

$$\mathsf{P}(A)=\frac{C_l^r C_{n-l}^{k-r}}{C_n^k}. \tag{2.2}$$

З а м е ч а н и е. Формулу (2.2) можно применять и в тех случаях, когда по условию в выборке должны быть только годные или только бракованные детали. Например, если искать вероятность того, что все отобранные детали оказались бракованными, получим из (2.2) с учетом $k=r$, $C_{n-l}^0=1$,

$$\mathsf{P}(A)=\frac{C_l^k}{C_n^k}.$$

3.2. Схема выбора, приводящая к размещениям

В случае упорядоченных выборок без возвращения пространство элементарных событий имеет вид

$$\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,a_2,\ldots,a_k),\ a_i\neq a_j,\ i\neq j,\ a_i=1,2,\ldots,n\}.$$

Каждая такая выборка представляет собой размещение из n по k без повторений. Их число, в соответствии с (1.3), равно

$$m(\Omega)=A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}, \tag{2.3}$$

П р и м е р 2.3. Имеется 8 карточек, на которых записаны первые 8 букв русского алфавита. Наугад без возвращения отбирают 5 карточек и из полученных в порядке поступления букв составляют слово. Найти вероятность того, что составленное указанным способом слово будет оканчиваться буквой «*б*»?

Р е ш е н и е. В данном случае $m(\Omega)$ – это число всех 5-буквенных слов в данном опыте. Оно равно числу 5-элементных упорядоченных подмножеств из 8 элементов, т.е.

$$m(\Omega)=A_8^5=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4.$$

Рассмотрим событие A = {наудачу составленное указанным способом слово оканчивается буквой «*б*»}. Число элементов множества A равно числу способов разместить на четыре оставшиеся места по одному символу из 7 (символ «*б*» исключен из рассмотрения, поскольку его место уже определено); таким образом,

$$m(A)=A_7^4=7\cdot6\cdot5\cdot4,$$

так что $$\mathrm{P}(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

§ 4. Случайный выбор с возвращением

В этом случае каждая компонента a_i может принимать любое из значений 1,2,…,*n*, в отличие от выбора без возвращения, где номера шаров повторяться не могут, т. е. $a_i \neq a_j,\ i \neq j$. Кроме того, естественное при выборе без возвращения условие $k \leq n$ теперь, вообще говоря, не выполняется.

4.1. Схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями

Если рассматриваются неупорядоченные выборки с возвращением, то пространство элементарных событий Ω выглядит следующим образом:

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, a_2, ..., a_k], a_i = 1,2,...,n\},$$

т.е. элементарными исходами будут сочетания с повторениями из *n* по *k*, число которых согласно (1.9) равно

$$m(\Omega) = C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (2.4)$$

П р и м е р 2.4. Во время карточного фокуса из стандартной колоды, содержащей 36 карт, последовательно достают и показывают зрителям 3 карты. При этом каждый раз извлеченная карта возвращается обратно в колоду и карты тщательно перемешиваются. Найти вероятность событий *A*={все показанные карты имеют разную масть}, *B*={все показанные карты имеют одну и ту же масть}.

Р е ш е н и е. Пронумеруем масти числами от 1 до 4 и рассмотрим урновую схему выбора с возвращением для $n = 4$. Поскольку в колоде имеется равное количество карт каждой масти и появление любой карты равновероятно, извлечение карты масти с номером i, $i = 1,2,3,4$, эквивалентно извлечению шара с тем же номером. Следовательно, число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно числу сочетаний с повторениями из 4 элементов по 3, т.е.

$$m(\Omega) = C_{4+3-1}^{3} = C_6^3.$$

Число исходов, благоприятствующих событию *A*, равно числу способов отобрать без возвращения 3 шара из 4, т.е. $m(A) = C_4^3$. Поэтому

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30} \approx 0{,}03.$$

Число исходов, благоприятствующих событию *B*, равно числу способов выбрать один шар из четырех, $m(A) = C_4^1$, поэтому

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{4 \cdot 3! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

З а м е ч а н и е. При решении задачи важен был тот факт, что появление любой масти равновероятно. Проведенное рассуждение применимо к любой ситуации, когда выбираемый объект с равной вероятностью принадлежит одному из нескольких непересекающихся классов. Сколько объектов содержит каждый класс (в нашем случае 9) при этом несущественно – количество может быть любым, даже бесконечным.

4.2. Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями

При рассмотрении упорядоченных выборок с возвращением, получаем следующее пространство элементарных событий Ω:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, ..., a_k), a_i = 1, 2, ..., n\},$$

так что элементарными исходами будут размещения с повторениями из n по k, число которых в силу (1.5) равно

$$m(\Omega) = k^n.$$

П р и м е р 2.5. Имеется 10 одинаковых шариков, которые случайным образом рассыпаются по 6 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 10 шариков по 6 лункам? Какова вероятность того, что в результате данного опыта первая, третья и четвертая лунки окажутся пустыми (при этом могут оказаться пустыми и еще какие-либо лунки)?

Р е ш е н и е. Пронумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 10-кратном выборе (т.е. $k = 10$) с возвращением номера лунки a_i, $1 \le a_i \le 6$, так что элементарным событием будет 10-компонентный упорядоченный вектор $(a_1, a_2, ..., a_{10})$. Таким образом, число всех способов распределить 10 шариков по 6 лункам равно числу размещений с повторениями из 6 по 10 , т. е. $m(\Omega) = 6^{10}$.

Событие A={первая, третья и четвертая лунки окажутся пустыми} соответствует такому вектору $(a_1, a_2, ..., a_{10})$, компоненты которого могут принимать лишь значения $a_i = 2, 5, 6$, поскольку номера 1, 3 и 4 из рассмотрения исключены. Поэтому $m(A) = 3^{10}$. Имеем

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \left(\frac{3}{6}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}0009.$$

§ 5. Подсчет вероятностей с помощью формулы включений-исключений

Рассмотрим еще одно применение формулы (1.12). Пусть $k_1 k_2 \dots k_n$ - некоторая перестановка чисел $1,2,\dots,n$. Будем говорить, что в этой перестановке число i стоит на своем месте, если $k_i = i$. Например, в перестановке 52143 числа 2 и 4 стоят на своем месте. Перестановка называется *беспорядком*, если ни одно из ее чисел не стоит на своем месте.

Пример 2.6. Найти количество беспорядков, образованных числами $1,2,\dots,n$.

Решение. Это количество можно получить, вычитая из общего числа перестановок $n!$ число перестановок, в которых хотя бы один элемент стоит на своем месте. Пусть A_i - множество перестановок, у которых число i, $i = 1,2,\dots n$, стоит на своем месте. Тогда искомое число N беспорядков будет равно

$$N = n! - m(A_1 \cup \dots \cup A_n) = n! - \sum_{1 \le i_1 \le n} m(A_{i_1}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} m(A_{i_1} \cap A_{i_2}) -$$

$$- \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} m(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots + (-1)^n m(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Очевидно, что $m(A_i) = (n-1)!$, значит

$$\sum_{1 \le i_1 \le n} m(A_{i_1}) = n(n-1)! = n!.$$

Аналогично,
$m(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = (n-2!)$, откуда

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} m(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}.$$

Далее, $m(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = (n-3)!$, так что

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} m(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}.$$

Теперь уже видна общая закономерность

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} m(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{n!}{k!},\ k = 1,2,\dots,n,$$

и мы получаем нужную формулу

$$N = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \qquad (2.5)$$

Следующая вероятностная задача известна в разных формулировках (как задача о письмах и конвертах, о рассеянной секретарше, о раздаче подарков и т.п.) и основана на подсчете числа беспорядков.

Пример 2.7. Секретарша должна была вложить n писем в n заранее подписанных конвертов и разослать их по адресам. По рассеянности она разложила письма случайным образом, при этом в каждый конверт попало по письму. Найти вероятность события A={хотя бы одно письмо оказалось в нужном конверте}.

Решение. Будем считать, что все $n!$ вариантов распределения писем по конвертам равновероятны. Число вариантов, в которых есть хотя бы одно совпадение письма и конверта равно тогда $n!-N$, где N - число беспорядков образованных числами $1,2,\ldots,n$ и определяемое формулой (2.5). Имеем

$$\mathsf{P}(A)=\frac{n!-N}{n!}=1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}. \qquad (2.6)$$

Выражение $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ есть n-я частичная сумма разложения

$$e^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}. \qquad (2.7)$$

Поэтому предел правой части (2.6) при $n\to\infty$ равен

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(A)=1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=1-\frac{1}{e}.$$

Ряд (2.7) очень быстро сходится, так как оценка остатка имеет вид

$$\left|e^{-1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right|<\frac{e}{(n+1)!}$$

Поэтому число $1-e^{-1}\approx 0{,}6321$ дает хорошее приближение для искомой вероятности уже при сравнительно небольших значениях n. Например, при $n=6$ последнее равенство верно с точностью до 4 знаков после запятой. Заметим, что найденная вероятность существенно превосходит вероятность e^{-1} того, что ни одно письмо не попадет в нужный конверт.

Задания для самостоятельной работы студентов

2.1. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками?[8]

Ответ: $1-C_{21}^{7}/C_{28}^{7}\approx 0{,}932$

2.2. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности следующих событий: A = {в состав нового алфавита входит буква а}, B = {в состав нового алфавита входят только согласные буквы}.[8]

Ответ: $\mathrm{P}(A)=1/2; \mathrm{P}(B)=1/42$

2.3. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий: А = {будут выбраны одни третьекурсники}, В = {все первокурсники попадут на конференцию}, С = {не будет выбрано ни одного второкурсника}.[8]

Ответ: $\mathrm{P}(A)=1/143; \mathrm{P}(B)=1/91; \mathrm{P}(C)=1/143$

2.4. Из урны, содержащей m_1+m_2 шаров, из которых m_1 белых и m_2 черных, наудачу отбирают m шаров ($m \le \min(m_1; m_2)$) и откладывают в сторону. Найти вероятности следующих событий: A = {все отложенные шары белые}, B = {среди отложенных шаров ровно k белых; $k \le m$}.[8]

Ответ: $\mathrm{P}(A)=\dfrac{C_{m_1}^m}{C_{m_1+m_2}^m}; \mathrm{P}(B)=\dfrac{C_{m_1}^k C_{m_2}^{m-k}}{C_{m_1+m_2}^m}$

Числа 1,2,...,9 записываются в случайном порядке. В задачах 2.5-2.7 найти вероятности указанных событий.

2.5. A = {числа будут записаны в порядке возрастания}.[8]

Ответ: $1/9!$

2.6. B = {числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания}, C = {числа 3, 6 и 9 будут стоять рядом}.[8]

Ответ: $\mathrm{P}(B)=1/9; \mathrm{P}(C)=1/12$

2.7. D = {на четных местах будут стоять четные числа}, E = {сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10}.[8]

Ответ: $\mathrm{P}(D)=1/126; \mathrm{P}(E)=1/945$

2.8. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом[8]

Ответ: 2/7

2.9. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т.д.; всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий: A={заказаны книги из различных разделов науки}, B={заказаны книги из одного и того же раздела науки}.[8]

Ответ: 0,74; 0,004

2.10. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал: а) пирожные одного вида; б) пирожные разных видов; в) по два пирожных различных видов. [8]

Ответ: а) 1/30; б) 1/6; в) 1/10

2.11. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятности следующих событий: A = {ни на ОДНОЙ кости не выпадет 6 очков}, B = {хотя бы на ОДНОЙ кости выпадет 6 очков}, C = {ровно на 3 костях выпадет 6 очков}. [8]

Ответ: $\mathsf{P}(A) = (5/6)^{10} \approx 0{,}1615$; $\mathsf{P}(B) \approx 0{,}8385$; $\mathsf{P}(C) \approx 0{,}155$

2.12. Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв алфавита E={ а, б, к, о, м} и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность того, что в результате будет выложено слово мама? [8]

Ответ: 0,0016

2.13. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из имеющихся десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность события A = {вошедшему удастся открыть дверь за один час}? [8]

Ответ: 1/4

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутова Н.Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ / Н.Б.Алфутова, А.В.Устинов. М.: МЦНМО, 2002. 264 с.
2. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика / Джеймс А. Андерсон. М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. 960 с.
3. Ежов И.И. Элементы комбинаторики / И.И.Ежов, А.В.Скороход, М.И.Ядренко. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 80 с.
4. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: Учеб. пособие / Под ред. К.А.Рыбникова. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 368 с.
5. Серебряков А.В. Элементарный курс математической логики: Учеб. пособие / А.В.Серебряков. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2011. 32 с.
6. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. / В.В.Тишин. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 352 с.
7. Новиков, В.В. Основы теории вероятностей: учебное пособие /Новиков В.В. – Энгельс: Изд-во ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., 2016. – 59 с.
8. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для втузов /Под общ. редакцией А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003. – 432 с.
9. Ширяев А.Н. Вероятность. /В 2-х книгах. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. Кн.1 – 520 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания

Авторы-составители: Новиков Владимир Васильевич

Серебряков Андрей Владимирович

413100, Россия, Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17.
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Тел: +7 (8453) 95-35-53
E-mail: eti@techn.sstu.ru
http://techn.sstu.ru

Регистрационный номер 32