Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

С. В. Тышкевич

Практикум по ТФКП

Учебно-методическое пособие для студентов
физического факультета

Саратов
2019

Оглавление

Введение

Функции комплексного переменного широко применяются в различных разделах математики (алгебре, аналитической теории чисел, дифференциальных уравнениях, теории рядов, преобразованиях Фурье, Лапласа), а также в прикладных математических дисциплинах (теоретической физике, гидродинамике, теории упругости). Методы теории функций комплексного переменного (ТФКП) постоянно и успешно используются в технических расчетах, являются одним из основных математических инструментов решения различных задач из области автоматики и телемеханики, теории электрических цепей.

Основное внимание в пособии уделяется методам теории функций комплексного переменного, которые часто применяются в прикладных задачах (конформные отображения, разложения в ряды, вычисление интегралов с помощью вычетов). Для того чтобы студенты могли самостоятельно в полном объеме овладеть методами ТФКП, в пособии приведено большое количество примеров с решениями, а также задачи для самостоятельного решения, что даёт возможность не только глубже усвоить теоретический материал, но и приобрести необходимые практические навыки в решении задач. При написании пособия использовались многие учебники и монографии по ТФКП, в частности [1–4]. Часть примеров и задач составлена автором, некоторые задачи заимствованы из задачников [5, 6].

Глава 1

Комплексные числа и их геометрическое представление

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$ (алгебраическая форма), где x и y — действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица ($i^2 = -1$). Число x называют *действительной частью комплексного числа* z, число y — *мнимой частью комплексного числа* z и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ соответственно.

Если $y = 0$, то комплексное число $z = x + i \cdot 0$ отождествляется с действительным числом x; комплексное число $z = 0 + iy$ принято отождествлять с iy. Числа вида $z = iy$ называют *чисто мнимыми числами.*

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* числу $z = x + iy$ и обозначается $\bar{z}$.

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны между собой тогда и только тогда, когда равны между собой их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z = z_1 - z_2$, являющееся решением уравнения $z_1 = z + z_2$ и вычисляемое по формуле

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Частным чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ ($z_2 \neq 0$) называется число z, которое удовлетворяет уравнению $zz_2 = z_1$, обозначается $\frac{z_1}{z_2}$ и вычисляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Геометрическая интерпретация

Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат с началом координат в точке O. Каждая точка $M(x,y)$ (каждый радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$) рассматривается как образ комплексного числа $z = = x+iy$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех комплексных чисел. Множество всех действительных чисел при этом изображается осью абсцисс, называемой *действительной осью*, множество чисто мнимых чисел — осью ординат, называемой *мнимой осью*. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется *комплексной*.

Модулем $|z|$ *комплексного числа* z называется модуль (длина) вектора $\overrightarrow{OM}$. Таким образом,

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}. \tag{1.1}$$

Положение любой точки (кроме начала координат) на плоскости характеризуется полярными координатами ρ, φ ($\rho > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$). Очевидно, $\rho = |z|$ (рис. 1.1).

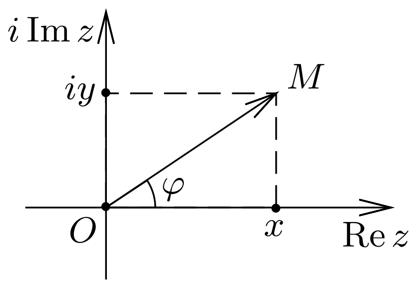

Рис. 1.1

Полярный угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением действительной оси, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Последний определен с точностью до слагаемого, кратного 2π. Значение φ аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$. Очевидно, что

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0, \ y \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0, \ y < 0; \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y, & \text{если } x = 0, \ y \neq 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Выразив действительную и мнимую части числа $z \neq 0$ через модуль и аргумент

$$\operatorname{Re} z = |z| \cos\varphi, \ \operatorname{Im} z = |z| \sin\varphi,$$

можем записать число z в виде

$$z = |z| \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \tag{1.3}$$

который называется *тригонометрической формой* этого числа.

Обозначив $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, получим *показательную форму* комплексного числа:

$$z = |z|e^{i\varphi}. \tag{1.4}$$

Представление комплексного числа в тригонометрической (и показательной) форме единственно: если

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \rho > 0,\ -\pi < \varphi \le \pi,$$

то $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Геометрически сложение и вычитание комплексных чисел производится по правилу сложения и вычитания соответствующих векторов.

Так как для $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ имеют место равенства

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right), \tag{1.5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right), \tag{1.6}$$

то умножение z_1 на z_2 ($z_1 \ne 0,\ z_2 \ne 0$) означает растяжение вектора z_1 в $|z_2|$ раз и его поворот около своего начала на угол φ_2 против часовой стрелки, деление z_1 на z_2 ($z_1 \ne 0,\ z_2 \ne 0$) — сжатие вектора z_1 в $|z_2|$ раз и его поворот около своего начала на угол φ_2 по часовой стрелке.

Имеют место следующие важные соотношения (формулы Моавра):

$$z^m = |z|^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi),\ m \in \mathbb{Z}, \tag{1.7}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.8}$$

Все n значений корня $\sqrt[n]{z}$ лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в эту окружность.

Пример 1. *Найти вещественную и мнимую части комплексного числа* $\left(\frac{1+i^{15}}{1+i^{121}}\right)^2$.

Решение. Так как

$$z = \left(\frac{1+i^{15}}{1+i^{121}}\right)^2 = \left(\frac{1+i^3}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^2 = \left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right)^2 = -1,$$

то $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 0$.

Пример 2. *Доказать равенство* $\overline{(\overline{z})} = z$.

Решение. $\overline{(\overline{z})} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$

Пример 3. *Найти модуль и аргумент комплексного числа*

$$\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5} - i.$$

Решение.

$$z = \sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5} - i = 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} - i\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{10} =$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{10}\left(\sin\frac{\pi}{10} - i\cos\frac{\pi}{10}\right) = 2\cos\frac{\pi}{10}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)\right) = 2\cos\frac{\pi}{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right).$$

Из единственности тригонометрической формы комплексного числа следует, что

$$|z| = 2\cos\frac{\pi}{10},\ \arg z = -\frac{2\pi}{5}.$$

Пример 4. *Вычислить*

$$\frac{(1-i)^6}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^9}.$$

Решение. Найдем модули и аргументы чисел $1-i$, $1+i\sqrt{3}$ по формулам (1.1), (1.2):

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2},\ \arg(1-i) = \operatorname{arctg}\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4},$$

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2,\ \arg(1+i\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Воспользовавшись формулами (1.7) и (1.6), получаем:

$$z = \frac{(1-i)^6}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^9} = \frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^6}{\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^9} =$$

$$= \frac{2^3\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)}{2^9\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right)} = \frac{1}{2^6}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}-3\pi\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}-3\pi\right)\right) = \frac{1}{64}\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)\right) = -\frac{i}{64}.$$

Пример 5. *Найти все значения корня* $\sqrt[3]{i}$ *и построить их.*

Решение. Так как $|i| = 1$, $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{2}$, то по формуле Моавра будем иметь:

$$\left(\sqrt[3]{i}\right)_k = \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2,$$

т.е. получаем следующие значения (рис. 1.2):

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{i}\right)_0 &= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad (\text{при } k = 0),\\
\left(\sqrt[3]{i}\right)_1 &= \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad (\text{при } k = 1),\\
\left(\sqrt[3]{i}\right)_2 &= \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) =\\
&= \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i \quad (\text{при } k = 2).
\end{aligned}$$

Пример 6. *Описать геометрически множество всех точек плоскости, удовлетворяющих условию* $|z + 2 - i| = 3$.

Решение. $|z+2-i| = 3 \Leftrightarrow |x+iy+2-i| = 3 \Leftrightarrow |x+2+i(y-1)| = 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$, т.е. искомое множество точек — окружность радиуса 3 с центром в точке $(-2,\ 1)$ (рис. 1.3).

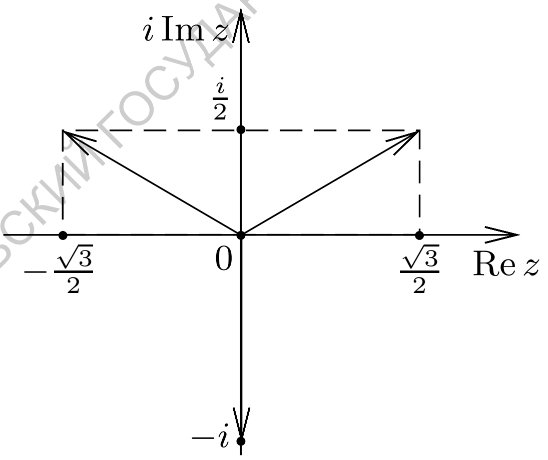

Рис. 1.2

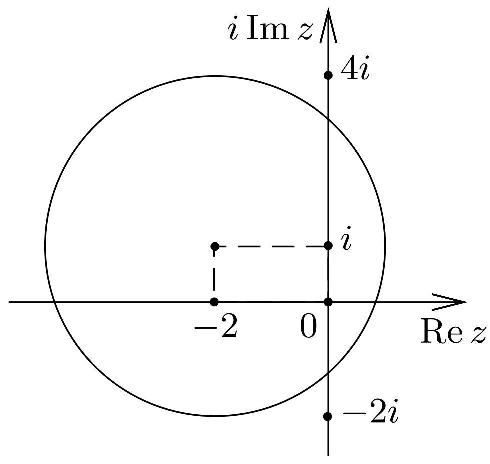

Рис. 1.3

Задача 1. *Найти вещественную и мнимую части следующих комплексных чисел:*

1. $\dfrac{1}{i}$;

2. $\dfrac{1}{1-i}$;

3. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$;

4. $\left(\dfrac{2+i^5}{1+i^{123}}\right)^2$;

5. $\dfrac{(1-i)^5}{(1+i)^3}$;

6. $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^3}{i}$.

Задача 2. *Доказать равенства:*

1. $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$;

2. $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$;

3. $\left(\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\right) = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$;

4. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$;

5. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$;

6. $\overline{z} \cdot z = |z|^2$.

Задача 3. *Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:*

1. -2;

2. $\dfrac{1+i}{1-i}$;

3. $\dfrac{i-1}{i}$;

4. $\dfrac{1+i}{i}$;

5. $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

6. $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^6}{(1-i)^8}$;

7. $-\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$;

8. $1+\cos\dfrac{\pi}{9} - i\sin\dfrac{\pi}{9}$.

Задача 4. *Вычислить, результат изобразить на комплексной плоскости:*

1. $\dfrac{(1+i)^{12}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^3}$;

2. $\dfrac{5+i}{2+3i} + \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2 + i$;

3. $\dfrac{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^7}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}$;

4. $\left(\dfrac{i^5+1}{i^{19}+1}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$;

5. $\dfrac{\left(\sqrt{3}+3i\right)^6}{(1-i)^8} i$;

6. $\dfrac{2-3i}{5-i} + \dfrac{\left(3+i\sqrt{3}\right)^4}{18(1-i)^6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 5. *Найти все значения следующих корней и построить их:*

1. $\sqrt[3]{1}$; *2.* $\sqrt[3]{i}$; *3.* $\sqrt{-1+i}$;

4. $\sqrt[3]{2-2i}$; *5.* $\sqrt[4]{-i}$; *6.* $\sqrt{3+4i}$.

Задача 6. *Решить уравнения:*

1. $z^2-2z+2=0$; *2.* $z^3+8=0$; *3.* $z^4+1=0$;

4. $z^4-16=0$; *5.* $|z|-z=1+2i$; *6.* $\bar{z}=z^3$.

Задача 7. *Описать геометрически множества всех точек плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. $\operatorname{Im} z \le 0$;

2. $|\operatorname{Re} z| < 1$;

3. $|z-i| \ge 1$;

4. $1 < |z+i| < 2$;

5. $\operatorname{Im}(z(1-i)) < 2$;

6. $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$;

7. $|z+1|+|z-1| = 4$;

8. $|z-2|-|z+2| > 3$;

9. $0 < \arg \frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}$;

10. $\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4$.

Глава 2

Функции комплексного переменного

Если каждой точке $z = x + iy$ области D комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ поставлено в соответствие число $w = u + iv$ области $W \subset \overline{\mathbb{C}}$, то говорят, что задана функция $w = f(z)$ комплексного переменного z или отображение области D в область W. Значения этой функции можно представить в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.1}$$

В качестве примера определим показательную функцию: если $z = x + iy$, то

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Тригонометрические функции задаются формулами:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \ \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гиперболические функции определяются по формулам:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right), \ \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right), \ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Очевидно, что

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \ \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

Если каждому значению z соответствует лишь одно значение w, то функция называется *однозначной*, в противном случае — *многозначной*.

Пусть $w = f(z)$ — однозначная функция комплексного переменного, определённая на множестве D, и z_0 — предельная точка этого множества. *Производной* функции $f(z)$ по множеству D в точке z_0 называется предел (если он существует)

$$\lim_{z \to z_0, \ z \in D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

обозначаемый $f'(z_0)$.

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* по множеству D в точке z_0, если ее приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta f(z) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z)\Delta z,$$

где $\Delta f(z) = f(z) - f(z_0)$, $\Delta z = z - z_0$, $\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$ $(z \in D)$.

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определённая в некоторой области D, *дифференцируема в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$ области D тогда и только тогда, когда в точке (x_0, y_0) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных x и y, и выполняются условия Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.2}$$

При этом производная $f'(z)$ может быть записана в одной из форм:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D, называется *дифференцируемой в области* D или *аналитической в области* D.

Пример 7. *Показать, что функция* $w = z\,\mathrm{Re}\,z$ *дифференцируема лишь в одной точке комплексной плоскости.*

Решение. $w = z\,\mathrm{Re}\,z = (x+iy)x = x^2 + ixy$, т.е.

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\,w = x^2, \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\,w = xy.$$

Значит,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x,$$

и условия Коши—Римана принимают вид

$$\begin{cases} 2x = x \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция $w = z\,\mathrm{Re}\,z$ дифференцируема лишь в точке $z = 0$.

Задача 8. *Найти все точки, в которых дифференцируемы следующие функции*:

1. $w = \mathrm{Re}\,z$; *2.* $w = \sin 2z$; *3.* $w = \overline{z}$;

4. $w = e^z$; *5.* $w = \bar{z}^2$; *6.* $w = z + \dfrac{1}{z}$.

Гармонической в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функцией называется действительная функция $u(x,y)$ двух действительных переменных, имеющая в D непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2.3}$$

Если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — аналитическая в области D, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — гармонические в области D.

Если гармонические функции связаны в области уравнениями Коши—Римана, то они называются *сопряженными гармоническими функциями* в этой области; если $u(x,y)$ — гармоническая в односвязной области D функция, то сопряженная функция $v(x,y)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого c по формуле

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y dx + u'_x dy + c \tag{2.4}$$

(интеграл в формуле (2.4) не зависит от пути интегрирования). Для нахождения функции $v(x,y)$ по заданной функции $u(x,y)$ (или наоборот) можно использовать непосредственно условия Коши—Римана.

Пример 8. *Восстановить аналитическую функцию*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ \ f(0) = 0,$$

по её мнимой части

$$v(x,y) = e^y \sin x + 3xy + y,$$

предварительно убедившись, что функция $v(x,y)$ является гармонической в некоторой области.

Решение. Функция $v(x,y) = e^y \sin x + 3xy + y$ является гармонической во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, так как

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^y \cos x + 3y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^y \sin x + 3x + 1,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -e^y \sin x, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^y \sin x,$$

т.е. во всей плоскости

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Воспользуемся условиями Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^y \sin x + 3x + 1,$$

откуда для функции $u(x,y)$ будем иметь:

$$u(x,y) = -e^y \cos x + \frac{3}{2}x^2 + x + \varphi(y). \tag{2.5}$$

Из (2.5) находим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^y \cos x + \varphi'(y).$$

Но по условиям Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^y \cos x - 3y,$$

поэтому

$$\varphi'(y) = -3y, \qquad \varphi(y) = -\frac{3}{2}y^2 + c,$$

где c — действительная постоянная.

Из (2.5)

$$u(x,y) = -e^y \cos x + \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}y^2 + c,$$

следовательно,

$$\begin{gathered} f(z) = -e^y \cos x + \tfrac{3}{2}x^2 + x - \tfrac{3}{2}y^2 + c + i\left(e^y \sin x + 3xy + y\right) = \\ = -e^y(\cos x - i\sin x) + \tfrac{3}{2}\left(x^2 + 2ixy - y^2\right) + (x + iy) + c = \\ = -e^{-iz} + \tfrac{3}{2}z^2 + z + c. \end{gathered}$$

Из условия $f(0) = 0$ вытекает, что $c = 1$.

Задача 9. *Восстановить аналитическую функцию*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

по её действительной (или мнимой) части:

1. $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x,\ f(0) = 1$;

2. $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy,\ f(0) = 0$;

3. $v(x,y) = -2xy,\ f(0) = 5$;

4. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2,\ f(0) = i$;

5. $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(3) = \dfrac{1}{3}$;

6. $u(x,y) = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right),\ f(0) = 3i$;

7. $v(x,y) = r\left(\ln r \cdot \sin\varphi + \varphi\cos\varphi\right),\ f(0) = 1,\ (r = |z|,\ \varphi = \arg z,$ $z = x + iy)$;

8. $\arg f = xy,\ f(0) = 1$.

Отображение посредством непрерывной функции, сохраняющее углы между кривыми, проходящими через данную точку, называется *конформным* в этой точке; при этом если сохраняются не только величины углов, но и направление их отсчета, то говорят о *конформном отображении первого рода*; если же направление отсчета углов меняется на противоположное, то говорят о *конформном отображении второго рода*. Отображение называется *конформным в области*, если оно конформно в каждой точке этой области.

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение посредством этой функции конформно в точке z_0, причем $\arg f'(z_0)$ — угол поворота, а $|f'(z_0)|$ — коэффициент линейного растяжения при этом отображении в точке z_0.

Пример 9. *Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении* $w = z^2$ *в точке* $z_0 = -3 + 4i$.

Решение. Находим $f'(z) = 2z$ и $|f'(-3+4i)| = |-6+8i| = 10 > 1$ — растяжение. Далее, $\arg f'(-3+4i) = \pi - \operatorname{artcg} \frac{4}{3}$ — угол поворота.

Задача 10. *Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении с помощью указанных функций в соответствующей точке*:

1. $w = z^4,\ z_0 = 1 + i$; *2.* $w = z^3,\ z_0 = 4i$;

3. $w = ie^z,\ z_0 = 0$; *4.* $w = \dfrac{1+iz}{1-iz},\ z_0 = i$.

Задача 11. *В каких точках плоскости угол поворота при отображении* $w = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ *равен нулю? В каких точках коэффициент растяжения равен единице?*

Задача 12. *Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией*:

1. $w = z^2$; *2.* $w = z^2 - 2z$; *3.* $w = z^{-1}$; *4.* $w = e^z$.

Глава 3

Элементарные аналитические функции и соответствующие конформные отображения

Теорема 1 (принцип соответствия границ)**.** *Пусть даны две односвязные ограниченные области D и Δ с границами Γ и γ. Пусть в области D задана аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная и дифференцируемая в замыкании $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Если $w = f(z)$ является взаимно однозначным и непрерывным вместе со своим обратным отображением Γ на γ и положительному обходу Γ соответствует положительный обход γ, то функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области D на область Δ.*

3.1. Дробно-линейная функция

Пусть a, b, c, d — комплексные числа, $ad - bc \neq 0$.
Функция, определяемая равенствами

$$w = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{если } z \in \mathbb{C},\ z \neq -\dfrac{d}{c}, \\ \dfrac{a}{c}, & \text{если } z = \infty, \\ \infty, & \text{если } z = -\dfrac{d}{c}, \end{cases} \tag{3.1}$$

называется *дробно-линейной.*

Каждую дробно-линейную функцию можно представить в виде композиции трех функции: линейной $\eta = cz + d$, инверсии $\zeta = \frac{1}{\eta}$ и снова линейной $w = A + B\zeta$ ($A = \frac{a}{c}$, $B = \frac{bc-ad}{c}$).

Основные свойства дробно-линейного отображения

1. *Конформность отображения.* Функция (3.1) осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости z на расширенную комплексную плоскость w.

2. *Круговое свойство.* При дробно-линейном отображении образом любой окружности (прямой) является окружность или прямая.

Точки P и P' называются *симметричными относительно окружности* Γ, если они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности O и

$$|OP| \cdot |OP'| = R^2,$$

где R — радиус окружности (центр окружности считается симметричным бесконечно удаленной точке).

3. *Сохранение симметрии.* При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности или прямой, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности или прямой.

4. *Инварианты дробно-линейного отображения.* Существует единственное дробно-линейное отображение, которое три разные точки z_1, z_2, z_3 переводит соответственно в три разные точки w_1, w_2, w_3; оно задается формулой

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \tag{3.2}$$

Если одна из точек z_k, w_k $(k = 1, 2, 3)$ является бесконечно удаленной, то в формуле (3.2) разности, в которые входит эта точка, следует заменить единицами.

Пример 10. *Найти образ множества $\mathcal{E} = \{z : \operatorname{Re} z = 1\}$ при отображении $w = \dfrac{z-1}{z+1}$.*

Решение. Способ 1. Множество $\mathcal{E}$ — прямая, параллельная мнимой оси и проходящая через точку $z = 1$, следовательно, по круговому свойству ее образом будет либо прямая, либо окружность. Все точки множества $\mathcal{E}$ при отображении $w = \frac{z-1}{z+1}$ переходят в конечные точки w-плоскости, поэтому образом $\mathcal{E}$ будет окружность Γ. Возьмем три точки множества $\mathcal{E}$: $z = 1$, $z = 1 + i$, $z = \infty$ (считаем, что прямая проходит через бесконечно удаленную точку) и найдем их образы, принадлежащие окружности Γ:

$$w(1) = 0,\ w(1+i) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i,\ w(\infty) = 1.$$

Эти три точки w-плоскости однозначно определяют окружность Γ:

$$\left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Способ 2. Данную функцию можно представить в виде

$$w = \frac{z-1}{z+1} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{z+1},$$

и, следовательно, в виде композиции отображений

$$\eta = z + 1,\ \zeta = \frac{1}{\eta},\ w = 1 - 2\zeta.$$

Отображение $\eta = z + 1$ переводит множество $\mathcal{E}$ z-плоскости во множество $\mathcal{E}_\eta = \{\eta : \operatorname{Re} \eta = 2\}$ η-плоскости.

Отображение $\zeta = \frac{1}{\eta}$ – дробно-линейное и переводит прямую $\mathcal{E}_\eta$ в окружность: $\zeta(2) = \frac{1}{2}$, $\zeta(\infty) = 0$, а точкам действительной оси сопоставляет опять точки действительной оси. Это важно, потому что в силу конформности отображения $\zeta = \frac{1}{\eta}$ в точке $\eta = 2$ угол между $\mathcal{E}_\eta$ и действительной осью, равный $\frac{\pi}{2}$, сохранится. Другими словами, окружность, являющаяся образом прямой $\mathcal{E}_\eta$, пересекает действительную ось ζ-плоскости под прямым углом, поэтому ее диаметр проходит по действительной оси, т.е. это окружность

$$\left|\zeta - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}. \tag{3.3}$$

Отображение $w = 1 - 2\zeta$ сводится к равномерному растяжению ζ-плоскости в 2 раза, повороту ее вокруг $\zeta = 0$ на угол π и сдвигу вдоль вектора $\zeta = 1$. В результате окружность (3.3) переходит в искомую (рис. 3.1).

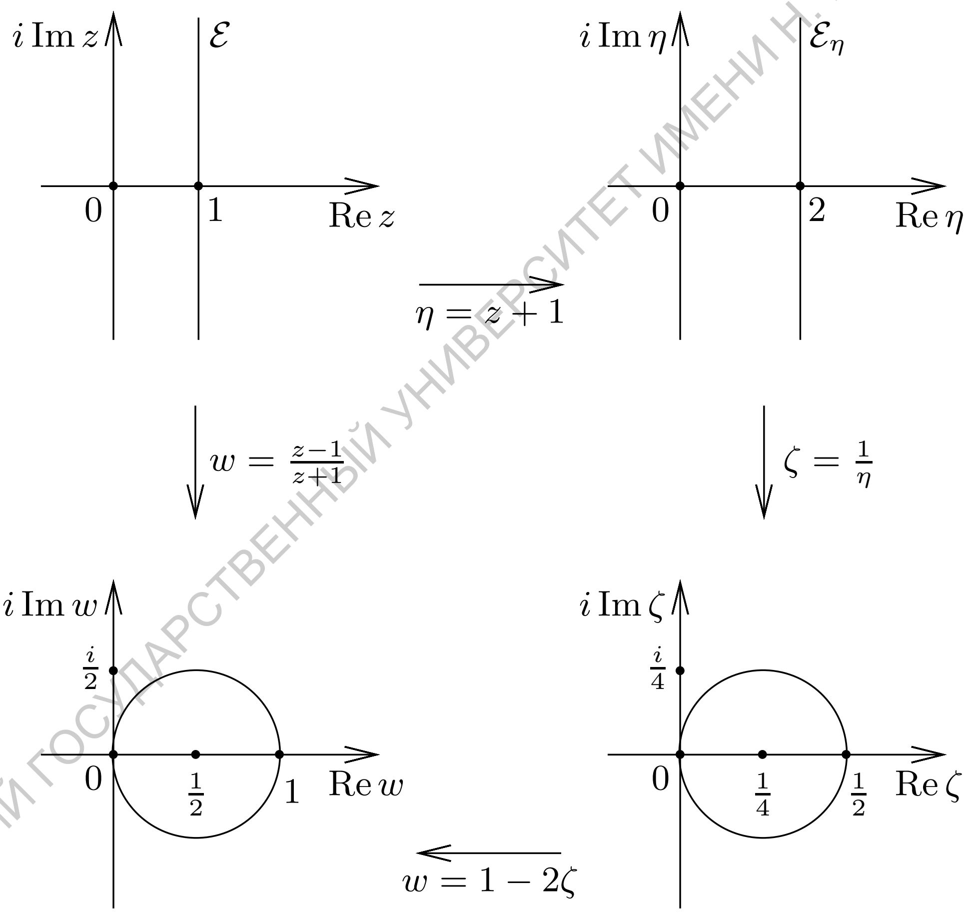

Рис. 3.1

Способ 3. Точка $z = -1$ при отображении $w = \frac{z-1}{z+1}$ переходит в точку $w = \infty$, следовательно, точка $z^* = 3$, симметричная точке $z = -1$ относительно прямой $\mathcal{E}$, переходит в центр окружности, являющейся образом прямой $\mathcal{E}$, $w(z^*) = \frac{1}{2}$. Так как $w(\infty) = 1$, то искомая окружность задается равенством

$$\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

Пример 11. *Найти образ области*

$$D=\{z:\ 0<\operatorname{Re}z<1,\ 0<\operatorname{Im}z<1\}$$

при отображении функцией $w=\dfrac{z}{z-1}$.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции w:

$$u=\operatorname{Re}w=\frac{x(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2},$$
$$v=\operatorname{Im}w=-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$$

и найдем образ границы области D (рис. 3.2).

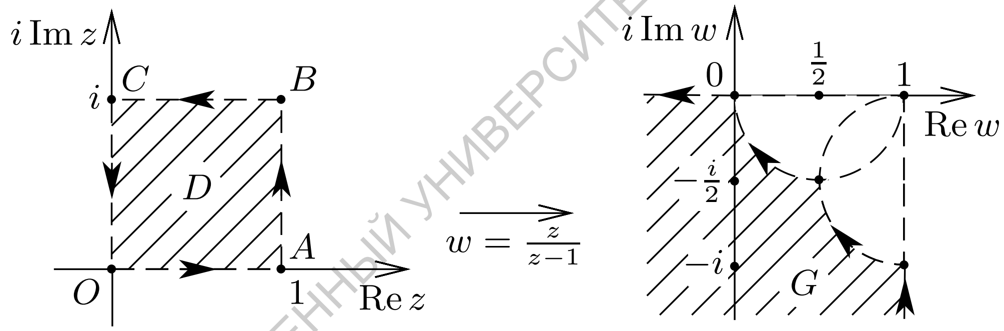

Рис. 3.2

Сторона OA ($y=0,\ 0\le x\le 1$) отображается на отрицательную часть действительной оси $\operatorname{Re}w$ ($v=0,\ -\infty<u\le 0$).

Сторона AB ($x=1,\ 0<y\le 1$) отображается в линию $u=1$, $-\infty<v\le -1$.

Сторона BC ($y=1,\ 1\ge x\ge 0$) отображается в линию, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$u=\frac{x(x-1)+1}{(x-1)^2+1},\ v=-\frac{1}{(x-1)^2+1},\ 0\le x\le 1.$$

Исключив параметр x, получим

$$(u-1)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{2}\le u\le 1,\ -1\le v\le -\frac{1}{2}.$$

Аналогично образ стороны CO определяется уравнением

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4},$$

$$0 \le u \le \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \le v \le 0.$$

По принципу соответствия границ образом квадрата D будет область G (см. рис. 3.2).

Пример 12. *Найти дробно-линейное отображение, которое переводит точку $z_3 = i$ в точку $w_3 = 0$, а точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ оставляет неподвижными. Найти образ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ при данном отображении.*

Решение. По условию имеем три пары соответствующих точек:

$$z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = i,$$

$$w_1 = 1,\ w_2 = -1,\ w_3 = 0.$$

Применяя формулу (3.2), получим искомое дробно-линейное отображение:

$$w = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

Найдем теперь образ верхней полуплоскости, границей которой является действительная ось. Согласно круговому свойству действительная ось при отображении $w = \frac{iz+1}{z+i}$ переходит в окружность. Чтобы найти ее, на действительной оси выберем три точки $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = 0$, образами которых будут точки $w_1 = 1$, $w_2 = -1$, $w_3 = -i$. Они лежат на окружности $|w| = 1$. По принципу соответствия границ получаем, что образом верхней полуплоскости будет область $G = \{w :\ |w| < 1\}$.

Пример 13. *Найти дробно-линейное отображение, которое переводит круг $|z - 4i| < 2$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$ так, что $w(4i) = -4$, $w(2i) = 0$.*

Решение. Условие задачи определяет две пары соответствующих точек. Третью пару найдем, пользуясь свойством симметрии дробно-линейного отображения. По этому свойству точки $z_1 = 4i$ и $z_3 = \infty$, симметричные относительно окружности $|z - 4i| = 2$, перейдут в точки $w_1 = -4$ и $w_3 = -4i$, симметричные относительно прямой $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$. Таким образом, найдена третья пара точек $z_3 = \infty$ и $w_3 = -4i$. По формуле (3.2) найдем искомое отображение

$$w = \frac{-4iz - 8}{z - 2 - 4i}.$$

Задача 13. *Найти образ множества D при отображении дробно-линейной функцией $w = f(z)$:*

1. $D = \{z: \ \operatorname{Im} z = 1\}$, $w = \dfrac{z-1}{z+1}$;
2. $D = \{z: \ |z-1| = 2\}$, $w = \dfrac{z-1}{z-3}$;
3. $D = \{z: \ |z| \geq 1\}$, $w = \dfrac{z+2}{1+2z}$;
4. $D = \{z: \ |z| \leq 1\}$, $w = 3 \cdot \dfrac{2z-1}{z-2}$;
5. $D = \{z: \ \operatorname{Re} z < 1\}$, $w = \dfrac{z}{z-2}$;
6. $D = \{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $w = \dfrac{z-1}{z}$;
7. $D = \{z: \ 1 < |z-1| < 2\}$, $w = \dfrac{2}{z+1}$;
8. $D = \{z: \ |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \dfrac{1-z}{z+1}$.

Задача 14. *Найти дробно-линейные функции $w(z)$, удовлетворяющие условиям:*

1. $w(0) = 4, \ w(1+i) = 2+2i, \ w(2i) = 0$;
2. $w(0) = 0, \ w(1+i) = 2+2i, \ w(2i) = 4$;
3. $w(0) = 1, \ w(1) = 2, \ w(2) = \infty$;
4. $w(0) = 0, \ w(1+i) = \infty, \ w(2i) = 2i$.

Найти образ круга $|z-i| < 1$ при отображениях этими функциями.

Задача 15. *Найти дробно-линейные функции $w(z)$, удовлетворяющие условиям:*

1. $w(i) = 0, \ w(\infty) = 1, \ w(-i) = \infty$;
2. $w(-1) = 1, \ w(0) = i, \ w(1) = -1$;
3. $w(i) = -2, \ w(\infty) = 2i, \ w(-i) = 2$;
4. $w(i) = 2, \ w(\infty) = 1+i, \ w(-i) = 0$.

Найти образ верхней полуплоскости при отображениях этими функциями.

3.2. Степенная функция

Функция $w = z^n$, $n = 2, 3, \dots$, называется *целой степенной функцией*; она определена и однозначна во всей комплексной плоскости.

Основные свойства целой степенной функции

1. *Аналитичность.* Функция $w = z^n$ аналитическая во всей комплексной плоскости.

2. *Конформность отображения.* Отображение, осуществляемое посредством степенной функции, конформно в каждой точке комплексной плоскости, кроме $z = 0$.

3. *Геометрическое поведение.* Функция $w = z^n$ отображает взаимно однозначно и конформно внутренность любого угла с вершиной в точке $z = 0$ и раствора α, $0 < \alpha < \frac{2\pi}{n}$, на внутренность угла с вершиной в точке $w = 0$ и раствором $n\alpha$, $0 < n\alpha < 2\pi$; при $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ область

$$D = \left\{z :\ \varphi_0 < \arg z < \varphi_0 + \frac{2\pi}{n}\right\}$$

отображается на плоскость с разрезом вдоль луча $\arg w = n\varphi_0$. Образом окружности $|z| = R$ является окружность $|w| = R^n$.

Пример 14. *Найти образы заданных множеств при указанных отображениях*:

1. $D = \{z :\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{4}\}$, $w = z^4$;

2. $D = \{z :\ \operatorname{Im} z < -1\}$, $w = z^2$.

Решение. 1. Положив $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$, находим $\rho = r^4$, $\psi = 4\varphi$, поэтому образом луча $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ при отображении функцией $w = z^4$ является луч $\arg w = -2\pi$, а образом луча $\arg z = -\frac{\pi}{4}$ — луч $\arg w = -\pi$. Значит, образом области $D = \left\{z :\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{4}\right\}$ является область $G = \{w :\ 0 < \arg w < \pi\}$, т.е. верхняя полуплоскость.

2. Выделим действительную и мнимую части функции w:

$$u = \operatorname{Re} w = x^2 - y^2,\ v = \operatorname{Im} w = 2xy.$$

Образом границы области $D = \{z :\ \operatorname{Im} z < -1\}$ — прямой $\operatorname{Im} z = -1$ — является линия, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$u = \operatorname{Re} w = x^2 - 1,\ v = \operatorname{Im} w = 2x,$$

т.е. парабола $v^2 = 4(1 + u)$.

Так как точка $z = 0$, не принадлежащая $D = \{z :\ \operatorname{Im} z < -1\}$, при отображении $w = z^2$ остается неподвижной, то ее образ $w = 0$ также не принадлежит образу этой области. Значит, образом области D является внешность параболы $v^2 = 4(1 + u)$.

Задача 16. *Найти образы заданных множеств при указанных отображениях:*

1. $D = \{z:\ \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = z^2$;
2. $D = \{z:\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = z^2$;
3. $D = \{z:\ \operatorname{Re} z = 2\}$, $w = z^2$;
4. $D = \{z: |z| > 2, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = z^2$;
5. $D = \{z:\ 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$, $w = z^4$;
6. $D = \{z:\ \operatorname{Im} z < -1\}$, $w = z^2$.

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к $z = w^n$, определена на всей комплексной плоскости, n-значна при $z \neq 0$. Как следует из формулы Моавра для корня n-й степени, значение $\sqrt[n]{z}$ определяется значением аргумента, выбранным для точки z:

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right).$$

Однозначной непрерывной ветвью многозначной функции $f(z)$ в области D называется однозначная непрерывная функция $\varphi(z)$, значение которой в каждой точке $z \in D$ совпадает с одним из значений функции $f(z)$.

Пусть область D — комплексная плоскость с разрезом по лучу, выходящему из начала координат под углом φ_0 к положительному направлению действительной оси. В этой области существуют n различных ветвей функции $\sqrt[n]{z}$:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_k z}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}_k z}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3.4}$$

где

$$\varphi_0 + 2\pi k < \operatorname{Arg}_k z < \varphi_0 + 2\pi(k+1).$$

Каждая из ветвей осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение области D на один из секторов

$$D_k = \left\{w:\ \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} < \operatorname{Arg} w < \frac{\varphi_0 + 2\pi(k+1)}{n}\right\},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Для выделения ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, достаточно определить сектор D_k, на который эта ветвь отображает область D.

Пример 15. *Найти образы следующих областей D при отображении ветвью функции w, выделяемой ее значением в указанной точке:*

1. $D=\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\sqrt{z}$, $\sqrt{z}\big|_{z=i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;

2. $D=\{z:\ (\operatorname{Im} z)^2>2\operatorname{Re} z+1\}$, $w=\sqrt{z}$, $\sqrt{z}\big|_{z=-1}=-i$.

Решение. 1. Так как $w=\sqrt{z}$ — функция, обратная к $z=w^2$, то задание можно переформулировать следующим образом: в w-плоскости найти такую область, которая при отображении $z=w^2$ переводится в данную область D. Таких областей две:

$$G_1=\left\{w:\ 0<\arg w<\frac{\pi}{2}\right\} \text{ и } G_2=\left\{w:\ -\pi<\arg w<-\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Из этих двух областей выбираем ту, которая содержит точку $w=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, т.е. G_2.

2. В z-плоскости D — внешность параболы $y^2=2x+1$, которая является образом при отображении $z=w^2$ прямой $\operatorname{Im} w=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (или $\operatorname{Im} w=-\frac{\sqrt{2}}{2}$). Таким образом, область D является образом двух областей:

$$G_1=\left\{w:\ \operatorname{Im} w>\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \text{ и } G_2=\left\{w:\ \operatorname{Im} w<-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Из этих двух областей выбираем ту, которая содержит точку $w=-i$, т.е. G_2.

Задача 17. *Найти образы следующих областей D при отображении ветвью функции w, выделяемой ее значением в указанной точке:*

1. $D=\{z:\ \operatorname{Re} z<0\}$, $w=\sqrt{z}$, $w(-1)=-i$;

2. $D=\{z:\ z\notin[0,+\infty]\}$, $w=\sqrt{z}$, $w(-1)=-i$;

3. $D=\{z:\ z\notin[-\infty,1]\}$, $w=\sqrt{z}$, $w(4)=2$;

4. $D=\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\sqrt[3]{z}$, $w(i)=-\frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

5. $D=\{z:\ \operatorname{Im} z>0,\ (\operatorname{Im} z)^2>2\operatorname{Re} z+1\}$, $w(-1)=-i$;

6. $D=\{z:\ \operatorname{Im} z>0,\ (\operatorname{Im} z)^2>4\operatorname{Re} z+4\}$, $w(-1)=i$.

Задача 18. *В плоскости z с разрезом по положительной части действительной оси найти значение в точке z ветви функции w, выделяемой ее значением в указанной точке:*

1. $z=8i$, $w=\sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{-1}=-1$;

2. $z=-4+4i$, $w=\sqrt[5]{z}$, $\sqrt[5]{-i}=-i$;

3. $z=-64$, $w=\sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{i}=-\frac{\sqrt{3}-i}{2}$;

4. $z=16i$, $w=\sqrt{z}$, $\sqrt{-1}=-i$;

5. $z=i$, $w=\sqrt[4]{z}$, $\sqrt[4]{-1}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

3.3. Функция Жуковского и обратная к ней

Функция, задаваемая равенством $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, называется *функцией Жуковского.*

Основные свойства функции Жуковского

1. *Аналитичность.* Функция Жуковского аналитическая во всех точках комплексной плоскости, кроме $z = 0,\ z = \infty$.

2. *Однолистность.* Функция Жуковского однолистна в любой области D, в которой нет различных точек z_1 и z_2, связанных равенством $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Аналитическая в области D функция $w = f(z)$ называется *однолистной* в области D, если в разных точках области она принимает разные значения. Область, в которой функция однолистна, называется *областью однолистности* этой функции.

3. *Геометрическое поведение.* Функция Жуковского переводит окружности $|z| = \rho$, $\rho \neq 1$, в эллипсы

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \tag{3.5}$$

$$\left(u = \operatorname{Re} w,\ v = \operatorname{Im} w,\ a = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right),\ b = \frac{1}{2}\left|\rho - \frac{1}{\rho}\right|\right).$$

При $\rho > 1$ эллипс ориентирован так же, как и окружность; если же $\rho < 1$, то эллипс ориентирован противоположно окружности.

Образом окружности $|z| = 1$ является отрезок $[-1,\ 1]$, проходимый дважды.

Лучи $\arg z = \alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, посредством функции Жуковского переходят в ветви гипербол

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1; \tag{3.6}$$

луч $\arg z = 0$ переходит в луч $[1,\ \infty)$, проходимый дважды; луч $\arg z = \pi$ переходит в луч $(-\infty,\ -1]$, проходимый дважды; лучи $\arg z = \frac{\pi}{2}$ и $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ переходят в мнимую ось $\operatorname{Re} w = 0$.

Фокусы всех эллипсов (3.5) и гипербол (3.6) расположены в точках $w = \pm 1$. Любой эллипс (3.5) пересекается с любой гиперболой (3.6) под прямым углом.

4. *Конформность отображения.* Функция Жуковского конформно отображает внешность (внутренность) единичного круга на внешность отрезка $[-1,\ 1]$, верхнюю (нижнюю) полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ $(\operatorname{Im} z < 0)$ — на плоскость w с разрезами по лучам $(-\infty,\ -1]$ и $[1,\ \infty)$.

Пример 16. *Найти образы следующих множеств при отображении функцией Жуковского* $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:

1. $D = \left\{z:\ |z| < 1,\ z \notin \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$;

2. $D = \left\{z:\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4},\ z \notin \{\operatorname{Re} z = 0,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}\right\}$.

Решение. 1. Записав z в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, выделим действительную и мнимую части функции Жуковского:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{3.7}$$

По формулам (3.7) находим: окружность единичного радиуса $|z| = 1$ ($r = 1$) отображается в отрезок $v = 0$, $u = \cos\varphi$ $(-\pi < \varphi \le \pi)$, т.е. в отрезок $[-1,\ 1]$, проходимый дважды; отрезок действительной оси $y = 0$, $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ $\left(\varphi = \pi, \frac{1}{2} \le r \le 1\right)$ переходит в отрезок действительной оси $v = 0$, $u \in \left[-\frac{5}{4}, -1\right]$; отрезок действительной оси $y = 0$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ $\left(\varphi = 0, \frac{1}{2} \le r \le 1\right)$ переходит в отрезок действительной оси $v = 0$, $u \in \left[1, \frac{5}{4}\right]$. Таким образом, исходная область отображается на всю комплексную плоскость с разрезом по отрезку действительной оси $v = 0$, $u \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

2. Учитывая формулы (3.7), имеем: луч $\arg z = \frac{\pi}{2}$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{2},\ r > 0\right)$ переходит в мнимую ось $\operatorname{Re} w = 0$; так как $w(i) = 0$, $w\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{3}{4}i$ и $w(0) = \infty$, то отрезок $x = 0$, $0 \le y \le 1$, проходимый дважды, переходит в отрицательную часть мнимой оси, проходимую дважды. При помощи формул (3.7) и (3.6) находим, что луч $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ $\left(\varphi = \frac{3\pi}{4},\ 0 \le r < \infty\right)$ переходит в левую ветвь гиперболы $2u^2 - 2v^2 = 1$, а луч $\arg z = \frac{\pi}{4}$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{4},\ 0 \le r < \infty\right)$ переходит в правую ветвь гиперболы $2u^2 - 2v^2 = 1$. Таким образом, исходная область отображается на внутренность гиперболы $2u^2 - 2v^2 = 1$ с разрезом по отрицательной части мнимой оси.

Задача 19. *Найти образы следующих множеств при отображении функцией Жуковского* $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:

1. $D = \left\{z:\ \arg z = \frac{\pi}{4}\right\}$;

2. $D = \{z:\ |z| > 2\}$;

3. $D = \{z:\ |z| < 1,\ z \notin [0,\ 1]\}$;

4. $D = \{z:\ |z| < 1,\ z \notin [-2,\ -1] \cup [1, +\infty]\}$;

5. $D = \left\{z:\ |z| < 1,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < 0\right\}$;

6. $D = \left\{z:\ \frac{1}{2} < |z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0\right\}$.

Решая уравнение $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ относительно z, находим

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1},$$

т.е. функция

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{3.8}$$

является *обратной к функции Жуковского*.

Пусть D — плоскость z с разрезом по отрезку $[-1,\ 1]$. В этой области функция $z + \sqrt{z^2 - 1}$ распадается на две ветви: $w = f_1(z)$, которая конформно отображает D на внешность единичного круга, и $w = f_2(z)$, которая отображает D на круг $|w| < 1$.

Пример 17. *Найти образ области $D = \left\{z:\ 144x^2 + 400y^2 > 225\right\}$ при отображении ветвью функции $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, выделяемой значением $w(\infty) = 0$.*

Решение. В w-плоскости существуют две области, которые функцией Жуковского отображаются на указанную внешность эллипса

$$G_1 = \{w:\ |w| > 2\} \text{ и } G_2 = \left\{w:\ |w| < \frac{1}{2}\right\}.$$

Так как $w(\infty) = 0$, то в качестве образа при отображении, обратном к функции Жуковского, выбираем область G_2.

Задача 20. *Найти образы следующих областей при отображении ветвью функции $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, выделяемой ее значением в указываемой точке (в неравенствах, определяющих область, положено $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$):*

1. $D = \left\{z:\ 12x^2 - 4y^2 < 3\right\}$, $w(0) = i$;
2. $D = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(+i\infty) = 0$;
3. $D = \{z:\ z \notin [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$, $w(0) = i$;
4. $D = \left\{z:\ 4x^2 - 12y^2 > 3,\ x > 0,\ y > 0\right\}$, $w(+\infty) = 0$.

3.4. Показательная функция

Функция $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy$, называется *показательной* и обозначается e^z.

Основные свойства показательной функции

1. *Однолистность.* Любая полоса шириной 2π, стороны которой параллельны действительной оси, является областью однолистности функции $w = e^z$.

2. *Геометрическое поведение.* При отображении $w = e^z$ начало координат w-плоскости не принадлежит образу конечной z-плоскости ($\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$); образом прямой $y = a$ является луч, выходящий из начала координат под углом a к положительному направлению действительной оси; образом прямой $x = d$ является окружность с центром в начале координат и радиусом e^d.

Пример 18. *Найти образ области* $D = \{z : \ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \ \operatorname{Re} z > 0\}$ *при отображении функцией* $w = e^z$.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции w:

$$u = \operatorname{Re} w = e^x \cos y, \ v = \operatorname{Im} w = e^x \sin y.$$

Найдем образ границы области D: луч $y = 2\pi, \ 0 < x < \infty$, отображается в луч $v = 0, \ 1 < u < \infty$; отрезок $x = 0, \ 0 \leq y \leq 2\pi$, отображается в окружность единичного радиуса ($e^z = e^{iy}$); луч $y = 0, \ 0 < x < \infty$, отображается в луч $v = 0, \ 1 < u < \infty$. По принципу соответствия границ образом области D является вся плоскость с разрезом по лучу $v = 0, \ 1 < u < \infty$, и удаленным единичным кругом $|w| \leq 1$.

Задача 21. *Найти образы следующих областей при отображении указанной функцией:*

1. $D = \{z : \ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $w = e^z$;
2. $D = \left\{z : \ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = e^{2z}$;
3. $D = \left\{z : \ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{6}, \operatorname{Re} z > 0\right\}$, $w = e^{3z}$;
4. $D = \{z : \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = e^{iz}$;
5. $D = \left\{z : \ \ln 2 < \operatorname{Re} z < \ln 3, \ \frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = e^z$;
6. $D = \{z : \ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = e^z$.

3.5. Логарифмическая функция

Логарифмической функцией комплексного аргумента называется функция, обратная к показательной, т.е. определяемая уравнением $e^w = z$, $z \neq 0$, и обозначаемая $w = \operatorname{Ln} z$.

Справедлива формула

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \left(\arg z + 2\pi k\right), \ k \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Каждое значение функции $w = \operatorname{Ln} z$ называется *логарифмом комплексного числа.* Значение логарифма комплексного числа z, $z \neq 0$, которое соответствует $\ln|z| + i\arg z$, называется *главным значением логарифмической функции* $w = \operatorname{Ln} z$ и обозначается $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \ -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Поэтому

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

В области D, являющейся комплексной плоскостью с разрезом по лучу, выходящему под углом α к действительной оси, существует бесчисленное множество разных однозначных ветвей функции $w = \operatorname{Ln} z$. Каждая из этих ветвей отображает область D на одну из полос

$$D_k = \{z : \ \alpha + 2\pi k < \operatorname{Im} w < \alpha + 2(k+1)\pi\}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Для выделения однозначной ветви логарифмической функции $w = \operatorname{Ln} z$ достаточно определить полосу D_k, на которую эта ветвь отображает область D. Ветвь логарифмической функции, отображающая область D на полосу D_0, является главной ветвью $\ln z$, остальные однозначные непрерывные ветви функции $w = \operatorname{Ln} z$ в этой области (отображающие D на D_k) имеют вид

$$\operatorname{Ln}_k z = \ln z + 2\pi k i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Основные свойства логарифмической функции

1. Логарифмическая функция определена на всей комплексной плоскости с выколотой точкой $z = 0$, бесконечно значна, и разные ее значения отличаются на $2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. *Конформность.* Отображение, осуществляемое каждой ветвью логарифмической функции, является конформным для всех точек $z \in D$.

Пример 19. *Найти образ области* $D = \{z : \ 2 < |z| < 4, \ z \notin [-4, -2]\}$ *при отображении ветвью логарифмической функции* $w = \operatorname{Ln} z$, *определяемой значением* $w(1) = -2\pi i$.

Решение. Ветвь, определяемая уравнением $\operatorname{Ln} 1 = -2\pi i$, имеет вид

$$\operatorname{Ln}_{-1} z = \ln|z| + i\arg z - 2\pi i.$$

При этом отображении образом области $\Delta = \{z : \ -\pi < \arg z < \pi\}$ является полоса $G_{-1} = \{w : \ -3\pi < \operatorname{Im} w < -\pi\}$. Образом дуги окружности $|z| = 2$, $-\pi < \arg z < \pi$, является отрезок $u = \ln 2$, $-3\pi < v < -\pi$, а образом дуги окружности $|z| = 4$, $-\pi < \arg z < \pi$, является отрезок $u = \ln 4$, $-3\pi < v < -\pi$. Поэтому образом области D является прямоугольник $\ln 2 < u < \ln 4$, $-3\pi < v < -\pi$.

Задача 22. *Найти образы следующих областей D при отображении ветвью логарифмической функции* $w = \operatorname{Ln} z$, *определяемой ее значением в указанной точке:*

1. $D = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(i) = \dfrac{\pi i}{2}$;

2. $D = \{z:\ |z| < 1,\ z \notin [0,\ 1]\}$, $w(-1+0) = -\pi i$;

3. $D = \{z:\ z \notin [-\infty, 0] \cup [1, +\infty]\}$, $w(i) = \dfrac{\pi i}{2}$;

4. $D = \{z:\ z \notin [0, +\infty]\}$, $w(-1) = -\pi i$;

5. $D = \{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(i - i0) = -\dfrac{3\pi i}{2}$.

3.6. Тригонометрические и гиперболические функции

Напомним, что *тригонометрические функции* задаются формулами:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right),\ \ \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right),\ \ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

гиперболические функции определяются по формулам:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right),\ \ \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right),\ \ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Известные из тригонометрии соотношения между тригонометрическими функциями действительного аргумента сохраняются и в комплексной области.

Из определения следуют очевидные соотношения:

- $\cos z = \operatorname{ch}(iz),\ \ \operatorname{ch} z = \cos(iz)$;
- $\sin z = -i \operatorname{sh}(iz),\ \ \operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$;
- $\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} z,\ \ \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg}(iz)$;
- $\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth}(iz),\ \ \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg}(iz)$.

Основные свойства тригонометрических функций

1. Функции $\sin z$, $\cos z$ непрерывны во всей комплексной плоскости.

2. Функции $\sin z$, $\cos z$ принимают все значения, т.е. для любого комплексного числа A уравнения $\sin z = A$, $\cos z = A$ имеют решения.

3. *Конформность* $w = \sin z$. Отображение $w = \sin z$ конформно во всех точках z-плоскости, кроме $z = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. *Геометрическое поведение* $w = \sin z$. Отображение $w = \sin z$ переводит ортогональную сетку прямых, параллельных координатным осям, в сетку гипербол и эллипсов с общими фокусами ± 1.

5. Отображение $w = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ сводится к сдвигу $\xi = z + \frac{\pi}{2}$ плоскости в направлении действительной оси и отображению $w = \sin\xi$.

Свойства функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ непосредственно вытекают из свойств функций $\sin z$ и $\cos z$.

Пример 20. *Найти образ области* $D = \left\{z: \ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\right\}$ *при отображении* $w = \operatorname{ctg} z$.

Решение. Представим функцию $w = \operatorname{ctg} z$ в виде композиции функций:

$$\xi = 2iz, \ \ \eta = e^{\xi}, \ \ w = i\frac{\eta+1}{\eta-1}.$$

Функция $\xi = 2iz$ отображает область D в область

$$G_1 = \left\{\xi: \ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$$

(равномерное растяжение области D в 2 раза и поворот вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки).

Функция $\eta = e^{\xi}$ отображает область G_1 на область

$$G_2 = \{\eta: \ \operatorname{Re}\eta > 0\}.$$

Наконец, дробно-линейная функция $w = i\dfrac{\eta+1}{\eta-1}$ отображает область G_2 на внешность единичного круга $|w| > 1$.

Задача 23. *Найти образы следующих областей D при отображениях указанными функциями:*

1. $D = \left\{z: \ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = \operatorname{th} z$;
2. $D = \{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = \sin z$;
3. $D = \left\{z: \ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $w = \operatorname{ch} 3z$;
4. $D = \{z: \ 0 < \operatorname{Im} z < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \operatorname{ch} \pi z$;
5. $D = \left\{z: \ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z > 0\right\}$, $w = \operatorname{sh} z$.

Пример 21. *Решить уравнение* $\cos z = \frac{5}{3}$.

Решение.

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \frac{5}{3} \ \Leftrightarrow \ e^{iz} + e^{-iz} = \frac{10}{3} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} w = e^{iz} \\ w^2 - \frac{10}{3}w + 1 = 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w = e^{iz} \\ w_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{iz} = 3 \\ e^{iz} = \frac{1}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{iz} = e^{\ln 3 + 2k\pi i} \\ e^{iz} = e^{-\ln 3 + 2k\pi i} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ z = \pm i \ln 3 + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) .$$

Задача 24. *Найти все решения следующих уравнений:*

1. $\cos z = \dfrac{3i}{4}$; *3.* $\operatorname{sh} z = \dfrac{i}{2}$; *5.* $\sin z = \dfrac{5}{3}$;

2. $\operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}$; *4.* $\operatorname{ctg} z = -\dfrac{3i}{5}$; *6.* $\sin z = \dfrac{4i}{3}$.

3.7. Построение конформных отображений

Теорема 2 (Римана о существовании конформного отображения)**.** *Каждую односвязную область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит более одной точки, можно конформно отобразить на круг с центром в начале координат.*

Теорема 3 (единственности для конформного отображения)**.** *Существует лишь одна функция $F(z)$, конформно отображающая область G на круг $\{w : \ |w| < 1\}$ и удовлетворяющая условиям*

$$F(z_0) = 0 \ \text{и} \ F'(z_0) > 0,$$

где z_0 — заданная конечная точка области G.

При фактическом построении функции, реализующей конформное отображение данной области G на круг или на полуплоскость, используются уже изученные примеры конформных отображений путем суперпозиции подходящих отображений.

Пример 22. *Отобразить конформно и однолистно множество*

1. $E = \{z : \ z \notin \{\operatorname{Re} z = 0, \ -1 < \operatorname{Im} z < 2\}\}$;

2. $E = \{z : \ |z| < 1, \ |z + i| > 1\}$;

3. $E = \{z : \ \operatorname{Im} z < 2, \ -1 < \operatorname{Re} z < 3\}$;

4. $E = \{z : \ |z + i| > 1, \ |z + 3i| > 1\}$

на верхнюю полуплоскость.

Решение. 1. Множество E представляет собой плоскость с разрезом вдоль отрезка $[-i,\ 2i]$ мнимой оси. Переведем разрез в разрез по лучу с началом в точке 0. Это можно сделать с помощью дробно-линейного отображения

$$w_1 = \frac{z+i}{z-2i}.$$

Так как точка $0 \in [-i,\ 2i]$ при этом отображении перейдет в точку $-\frac{1}{2}$, $\left(w_1(0) = -\frac{1}{2}\right)$, то разрез переходит в отрицательную часть действительной оси.

Выделим в полученной области (плоскости с разрезом) однозначную ветвь функции $w_2 = \sqrt{w_1}$ требованием $\sqrt{1} = 1$. Поскольку область в плоскости w_1 задается неравенствами $-\pi < \arg w_1 < \pi$, то ее образ будет задаваться неравенствами $-\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}$, т.е. является правой полуплоскостью.

Последнее отображение — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, $w = e^{i\frac{\pi}{2}} w_2 = iw_2$.

Окончательный ответ имеет вид

$$w = i\sqrt{\frac{z+i}{z-2i}},$$

где ветвь корня выделяется условием $\sqrt{1} = 1$.

2. Область E представляет собой «круговую луночку», т.е. ограничена дугами двух окружностей. В этой ситуации целесообразно отобразить точки пересечения окружностей в 0 и ∞.

Найдем точки пересечения окружностей $|z| = 1$ и $|z+i| = 1$:

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+i| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

откуда искомыми точками являются $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Отображение задается формулой

$$w_1 = \frac{z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}.$$

Так как $w_1(0) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то дуга окружности $|z+1| = 1$ отобразится на луч $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$. Поскольку $w_1(i) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то дуга окружности $|z| = 1$ отобразится на луч $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Положительному обходу границы луночки $z_1 \to i \to z_2 \to 0$ соответствует обход $\infty \to \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \to 0 \to -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому область, являющаяся образом E, будет углом

$$\left\{-\frac{2\pi}{3} < \arg w_1 < -\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Отображение $w = w_1^3$ переведет этот угол в

$$\{-2\pi < \arg w < -\pi\} = \{0 < \arg w < \pi\},$$

т.е. искомое отображение имеет вид

$$w = \left(\frac{z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}\right)^3.$$

3. Способ 1. Отобразим данную полуполосу на горизонтальную полуполосу шириной π. Для этого надо применить параллельный перенос $w_1 = z + 1 - 2i$, поворот $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}w_1 = iw_1$ и сжатие $w_3 = \frac{\pi}{4}w_2$. Результатом будет полуполоса

$$\{w_3 :\ \operatorname{Re} w_3 > 0,\ 0 < \operatorname{Im} w_3 < \pi\}.$$

Отображение $w_4 = e^{w_3}$ переведет ее в «круговую луночку»

$$\{w_4 :\ |w_4| > 1,\ 0 < \arg w_4 < \pi\},$$

одна из граничных «окружностей» которой — действительная ось.

Применим дробно-линейное отображение

$$w_5 = \frac{w_4 - 1}{w_4 + 1}.$$

Так как $w(\infty) = 1$, то образом объединения двух полупрямых

$$\{w_4 :\ \operatorname{Im} w_4 = 0,\ \operatorname{Re} w_4 \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$$

будет луч $[0, +\infty)$; аналогично из равенства $w_5(i) = i$ следует, что верхняя полуокружность

$$\{w_4 :\ |w_4| = 1,\ \operatorname{Im} w_4 \geq 0\}$$

переходит в луч $[0, +\infty i)$. Учитывая, что $w_5(2i) = 3 + 4i$, найдем — образом «круговой луночки» будет первая четверть

$$\{w_5 :\ \operatorname{Re} w_5 > 0,\ \operatorname{Im} w_5 > 0\} = \left\{w_5 :\ 0 < \arg w_5 < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Наконец, отображение $w = w_5^2$ дает требуемое.

Способ 2. Отобразим данную полуполосу на горизонтальную полуполосу шириной 2π. Для этого надо применить аналогично первому способу следующие отображения:

$$w_1 = z + 1 - 2i,\ w_2 = iw_1 \text{ и } w_3 = \frac{\pi}{2}w_2.$$

Результатом будет полуполоса

$$\{w_3 :\ \operatorname{Re} w_3 > 0,\ 0 < \operatorname{Im} w_3 < 2\pi\}.$$

Отображение $w_4 = e^{w_3}$ переведет ее в область

$$\{w_4 : \ |w_4| > 1, \ 0 < \arg w_4 < 2\pi\},$$

т.е. внешность единичного круга с разрезом вдоль $[1, +\infty)$.

Функция Жуковского $w_5 = \frac{1}{2}\left(w_4 + \frac{1}{w_4}\right)$ отображает внешность единичного круга во внешность отрезка $[-1, \ 1]$, а полупрямую $[1, +\infty)$ — в себя. Таким образом, в плоскости w_5 получаем внешность полупрямой $[-1, +\infty)$.

Сдвиг $w_6 = w_5 + 1$ отобразит ее на область

$$\{w_6 : \ 0 < \arg w_6 < 2\pi\},$$

а применение отображения $w = \sqrt{w_6}$ с выделением ветви $\sqrt{-1} = i$ дает искомое отображение.

4. Данная область представляет собой внешность двух кругов, касающихся между собой в точке $z = -2i$. Поэтому отображение

$$w_1 = \frac{1}{z + 2i}$$

переводит обе граничные окружности в прямые, не имеющие конечных точек пересечения, т.е. параллельные. Так как

$$w_1(-i + 1) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \ \ w_1(0) = -\frac{i}{2},$$

то одна из этих прямых — $\left\{w_1 : \ \operatorname{Im} w_1 = -\frac{1}{2}\right\}$, а поскольку $w_1(-4i) = \frac{i}{2}$, то другая прямая — $\left\{w_1 : \ \operatorname{Im} w_1 = \frac{1}{2}\right\}$. Бесконечная точка принадлежит данной области, $w_1(\infty) = 0$, поэтому образом области является полоса

$$\left\{w_1 : \ \left|\operatorname{Im} w_1\right| < \frac{1}{2}\right\}.$$

Применяя растяжение $w_2 = \pi w_1$, получим полосу

$$\left\{w_2 : \left|\operatorname{Im} w_2\right| < \frac{\pi}{2}\right\}$$

шириной π.

Теперь функция $w_3 = e^{w_2}$ отображает эту полосу на правую полуплоскость

$$\left\{w_3 : \ \left|\arg w_3\right| < \frac{\pi}{2}\right\},$$

поворачивая которую с помощью $w = iw_3$, найдем искомое отображение.

Пример 23. *Отобразить верхнюю полуплоскость на единичный круг* $|w| < 1$ *так, чтобы* $w(2i) = 0$ *и* $\arg w'(2i) = 0$.

Решение. Так как точка $-2i$ симметрична точке $2i$ относительной действительной оси (границы указанной области), то ее образ $w(-2i)$ должен быть симметричен центру окружности $|w| = 1$ относительно этой окружности, т.е $w(-2i) = \infty$. Любая дробно-линейная функция, осуществляющая такое отображение двух точек, имеет вид

$$w = k\frac{z - 2i}{z + 2i}.$$

Чтобы найти k, прежде всего заметим, что образ точки $z = 0$, т.е. точка $w(0) = -k$, должен находиться на единичной окружности, т.е. $k = e^{i\theta}$. Чтобы найти θ, найдем

$$w'(2i) = e^{i\theta}\frac{4i}{(z = 2i)^2}\bigg|_{z=2i} = -e^{i\theta}\frac{i}{4},$$

откуда

$$\arg w'(2i) = \pi + \theta + \frac{\pi}{2}.$$

По условию $\arg w'(2i) = 0$, откуда $\theta = -\frac{3\pi}{2}$, или $e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, т.е. искомое отображение имеет вид

$$w = i\frac{z - 2i}{z + 2i}.$$

Задача 25. *Найти функцию $w = w(z)$, конформно отображающую область D на область G и удовлетворяющую указанным условиям:*

1. $D = \{z : |z| < 1\}$, $G = \{w : |w| < 1\}$, $w(i) = i$, $w\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{4}{5}i$;

2. $D = \{z : |z| < 1\}$, $G = \{w : |w| < 1\}$, $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$;

3. $D = \{z : |z| < 1\}$, $G = \{w : |w| < 1\}$, $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = -\dfrac{\pi}{3}$;

4. $D = \{z : |z| < 1\}$, $G = \{w : |w| < 1\}$, $w(i) = \dfrac{3i - 4}{5}$, $w(1) = 1$, $w(-1) = -1$;

5. $D = \{z : |z| < 1\}$, $G = \{w : |w| < 1\}$, $w\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

6. $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(-1) = 0$, $w(0) = 2$, $w(1) = \infty$;

7. $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{w : |w| < 1\}$, $w(0) = -i$, $w(2i) = \dfrac{i}{3}$;

8. $D=\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{w:\ |w|<1\}$, $w(1+i)=0$, $\arg w'(1+i)=\pi$;

9. $D=\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{w:\ \operatorname{Im} w>0\}$, $w(-1)=-2$, $w(-2+i)=1+3i$;

10. $D=\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$, $G=\{w:\ \operatorname{Im} w>0\}$, $w(1+i)=i$, $\arg w'(1+i)=\dfrac{\pi}{2}$.

Глава 4

Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть $f(z)$ — непрерывная функция в области D комплексной плоскости, L — спрямляемая кривая, лежащая в области D, с началом в точке z_0 и концом в точке z.

Разобьем кривую L точками $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z$ произвольным образом на n частей $\gamma_0,\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. На каждой из частей γ_k выберем точку ξ_k и составим сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right) \Delta z_k,$$

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k,\ k = \overline{0,\ n-1}$.

Обозначим через l_k длину кривой $\gamma_k,\ k = \overline{0,\ n-1}$, $\lambda = \max\limits_k l_k$.

Интегралом от функции $f(z)$ *по кривой* L называется

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right) \Delta z_k = \int\limits_L f(z) dz.$$

Если через L^- обозначить ту же кривую L, но с противоположным направлением обхода, то

$$\int\limits_{L^-} f(z) dz = -\int\limits_L f(z) dz.$$

Если $f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$, то

$$\int\limits_L f(z) dz = \int\limits_L u(x,\ y) dx - v(x,\ y) dy + i \int\limits_L v(x,\ y) dx + u(x,\ y) dy. \qquad (4.1)$$

Некоторые свойства интеграла от функции комплексного переменного

1. $\int\limits_L (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int\limits_L f(z) dz + \beta \int\limits_L g(z) dz;$

2. $\int\limits_{L_1+L_2} f(z) dz = \int\limits_{L_1} f(z) dz + \int\limits_{L_2} f(z) dz,$

где $L_1 + L_2$ — кривая, составленная из дуг L_1 и L_2 так, что конец L_1 совпадает с началом L_2;

3. *Связь с определенным интегралом.* Пусть L — гладкая кривая, задаваемая уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$, тогда

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_a^b f\left(z(t)\right) z'(t)dt. \tag{4.2}$$

Теорема 4 (интегральная теорема Коши для простого контура). *Если $f(z)$ — функция, аналитическая в некоторой односвязной области D, Γ — замкнутый, жордановый, кусочно-гладкий контур, лежащий в D, то*

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Теорема 5 (интегральная теорема Коши для составного контура). *Пусть $f(z)$ — аналитическая в области D функция; Γ и γ_k $(k = \overline{1,\ n})$ — замкнутые, спрямляемые, жордановые кривые, лежащие в D, такие, что γ_k $(k = \overline{1,\ n})$ принадлежат внутренности Γ, и каждая γ_i лежит во внешности γ_k $(i, k = \overline{1,\ n},\ i \ne k)$. Пусть многосвязная область G, ограниченная кривыми Γ, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, принадлежит области D.*

Тогда

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz$$

(все кривые обходятся в одном направлении).

Теорема 6 (интегральная формула Коши). *Пусть функция $f(z)$ — однозначная и аналитическая в области G и L — замкнутая, жорданова, спрямляемая кривая, принадлежащая G вместе со своей внутренностью D.*

Тогда для всякой точки $z \in D$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f\left(\xi\right)}{\xi - z} d\xi. \tag{4.3}$$

Интегральная формула Коши выражает значения функции внутри области через значения на границе.

Следствие 1. *Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в замкнутой области $\overline{D}$ с границей L, обладает внутри этой области производными всех порядков, причем эти производные представляются формулами*

$$f^{(n)}\left(z\right) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f\left(\xi\right)}{\left(\xi - z\right)^{n+1}} d\xi.$$

Пример 24. *Вычислить интеграл:*

1. $\int\limits_L (z-a)^n\,dz$, $L=\{z:\ |z-a|=\rho\}$ *— окружность, проходимая против часовой стрелки,* $n\in\mathbb{Z}$;

2. $\int\limits_L \left(z^2+z\cdot\overline{z}\right)dz$, $L=\left\{z:\ \operatorname{Im} z=(\operatorname{Re} z)^2,\ 0\le \operatorname{Re} z\le 1\right\}$, *начало пути в* $z=0$.

Решение. 1. Параметрическое уравнение окружности L имеет вид

$$z=a+\rho e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Тогда $dz=i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ и по формуле (4.2) находим

$$\int\limits_L (z-a)^n\,dz=i\rho^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}d\varphi=\begin{cases}2\pi i, & \text{если } n=-1\\ \frac{\rho^{n+1}}{n+1}e^{i(n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi}=0, & \text{если } n\ne -1.\end{cases}$$

2. Выделим действительную и мнимую части подынтегральной функции:

$$z^2+z\cdot\overline{z}=(x+iy)^2+(x+iy)(x-iy)=2x^2+2ixy,$$

т.е. $u(x,\ y)=2x^2,\ v(x,\ y)=2xy.$

По формуле (4.1) имеем $(y=x^2,\ dy=2xdx)$:

$$\int\limits_L \left(z^2+z\cdot\overline{z}\right)dz=\int\limits_L 2x^2dx-2xydy+i\int\limits_L 2xydx+2x^2dy=$$

$$=2\int\limits_0^1\left(x^2-2x^4\right)dx+6i\int\limits_0^1 x^3dx=-\frac{2}{15}+\frac{3}{2}i.$$

Задача 26. *Вычислить интеграл:*

1. $\int\limits_L |z|\,dz$, $L=\{z:\ |z|=1,\ 0\le\arg z\le\pi\}$, *начало пути в* $z=1$;

2. $\int\limits_L |z|\,dz$, $L=\left\{z:\ |z|=1,\ -\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{\pi}{2}\right\}$, *начало пути в* $z=-i$;

3. $\int\limits_L |z|\,dz$, $L=\{z:\ |z|=2\}$;

4. $\int\limits_L \frac{z}{\overline{z}}\,dz$, *$L$ — граница полукольца* $\{z:\ 1 \le |z| \le 2,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$;

5. $\int\limits_L |z|\overline{z}\,dz$, *$L$ — замкнутый контур, состоящий из полуокружности* $\{z:\ |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi\}$ *и отрезка* $= \{z:\ -1 \le \operatorname{Re} z \le 1,\ \operatorname{Im} z = 0\}$;

6. $\int\limits_L \frac{dz}{\left|\operatorname{Re} z\right| + \left|\operatorname{Im} z\right|}$, *$L$ — квадрат с вершинами в точках* $1,\ i,\ -1,\ -i$, *проходимый против часовой стрелки*;

7. $\int\limits_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$, $L = \{z:\ |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$, $\sqrt{1} = 1$;

8. $\int\limits_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$, $L = \{z:\ |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \le 0\}$, $\sqrt{1} = 1$.

Пример 25. *Доказать, что*

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Решение. Проинтегрируем аналитическую во всей комплексной плоскости функцию $f(z) = e^{-z^2}$ по контуру L прямоугольника $|x| \le R$, $0 \le y \le b$:

$$\int\limits_L e^{-z^2}dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + \int\limits_0^b e^{-(R+iy)^2}i\,dy + \int\limits_R^{-R} e^{-(x+ib)^2}dx + \int\limits_b^0 e^{-(-R+iy)^2}i\,dy =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + i\int\limits_0^b e^{-R^2+y^2}e^{-2iRy}dy + \int\limits_R^{-R} e^{-x^2+b^2}e^{-2ibx}dx + i\int\limits_b^0 e^{-R^2+y^2}e^{2iRy}dy =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx - i\int\limits_0^b e^{-R^2+y^2}\left(e^{2iRy} - e^{-2iRy}\right)dy +$$

$$+ \int\limits_R^0 e^{-x^2+b^2}e^{-2ibx}dx + \int\limits_0^{-R} e^{-x^2+b^2}e^{-2ibx}dx =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2} dx + 2\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2+y^2} \sin(2Ry)\, dy - \int\limits_{0}^{R} e^{-x^2+b^2} e^{-2ibx} dx - \int\limits_{0}^{R} e^{-x^2+b^2} e^{2ibx} dx =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2} dx + 2\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2+y^2} \sin(2Ry)\, dy - 2\int\limits_{0}^{R} e^{-x^2+b^2} \cos(2bx)\, dx.$$

Но по интегральной теореме Коши $\int\limits_{L} e^{-z^2} dz = 0.$

Таким образом,

$$\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2} dx + 2\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2+y^2} \sin(2Ry)\, dy - 2\int\limits_{0}^{R} e^{-x^2+b^2} \cos(2bx)\, dx = 0.$$

При $R \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{b} e^{-R^2+y^2} \sin(2Ry)\, dy = 0,$$

поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2+b^2} \cos(2bx)\, dx = 2e^{b^2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx.$$

Учитывая,что интеграл Эйлера—Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

окончательно получаем

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

Задача 27. *Доказать равенства*:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \cos x^2 dx = \int\limits_{0}^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Указание. Интегрировать функцию $f(z) = e^{iz^2}$ *по границе сектора*

$$\{z:\ 0 \le |z| \le R,\ 0 \le \arg z \le \pi\}.$$

Пример 26. *Используя интегральную формулу Коши, вычислить*:

1. $\displaystyle\int\limits_L \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz,\ L=\left\{z:\ |z-1-i|=\sqrt{2}\right\};$

2. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}.$

Решение. 1. В круге $|z-1-i|<\sqrt{2}$ лежат две точки, в которых знаменатель обращается в нуль: $z_1=1$ и $z_2=i$, поэтому воспользоваться непосредственно интегральной формулой Коши невозможно. Разложим функцию на сумму простых дробей

$$\frac{z}{(z^2+1)(z-1)}=-\frac{z-1}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2(z-1)}.$$

Тогда, применяя формулу (4.3) к каждому из интегралов, имеем

$$\int\limits_L \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz=-\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{(z-1)e^z}{z^2+1}\,dz+\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{e^z}{z-1}\,dz=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{\frac{(z-1)e^z}{z+i}}{z-i}\,dz+\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{e^z}{z-1}\,dz=-\pi i\frac{(z-1)e^z}{z+i}\bigg|_{z=i}+\pi i e^z\bigg|_{z=1}=$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)e^i+\pi e i.$$

2. Заменой $z=e^{i\varphi}$ сведем интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ к интегралу по контуру от функции комплексной переменной. Так как

$$d\varphi=\frac{dz}{iz},\quad \cos\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

то

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}=\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$z^2+2az+1=(z-z_1)(z-z_2),$$

где

$$z_1=-a-\sqrt{a^2-1},\ z_2=-a+\sqrt{a^2-1}.$$

Так как $z_1 \in \{z: \ |z|>1\}$, $z_2 \in \{z: \ |z|<1\}$, то функция

$$\frac{1}{z+a+\sqrt{a^2-1}}$$

является аналитической в круге $\{z: \ |z|<1\}$, и по формуле (4.3) имеем

$$\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}=\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\frac{1}{z+a+\sqrt{a^2-1}}}{z+a-\sqrt{a^2-1}}\,dz=$$

$$=\frac{2}{i}\cdot\frac{2\pi i}{z+a+\sqrt{a^2-1}}\bigg|_{z=-a+\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Задача 28. *Используя интегральную формулу Коши, вычислить*:

1. $\displaystyle\int\limits_L\frac{ze^z}{(z^2+1)\,(z-1)}\,dz,\ L=\{z: \ |z-1|=1\};$

2. $\displaystyle\int\limits_L\frac{\sin z}{z+i}\,dz,\ L=\{z: \ |z+i|=3\};$

3. $\displaystyle\int\limits_L\frac{z\,dz}{z^4-1},\ L=\{z: \ |z-2|=2\};$

4. $\displaystyle\int\limits_L\frac{z\sin z}{(z-\pi)^3}\,dz,\ L=\{z: \ |z|=4\};$

5. $\displaystyle\int\limits_L\frac{ze^z}{(z-2)^3}\,dz,\ L=\{z: \ |z|=3\};$

6. $\displaystyle\int\limits_L\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz,\ L=\{z: \ |z|=4\};$

7. $\displaystyle\int\limits_L\frac{1}{(z+1)\,(z-1)^3}\,dz,\ L=\{z=: \ |z+1|=1\};$

8. $\displaystyle\int\limits_L\frac{1}{(z-2)^2\,(z-4)}\,dz,\ L=\{z=: \ |z|=3\};$

9. $\displaystyle\int\limits_L\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz,\ L=\left\{z: \ |z|=\frac{1}{2}\right\};$

10. $\displaystyle\int\limits_L \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz,\ L=\left\{z:\ |z-1|=\frac{3}{2}\right\};$

11. $\displaystyle\int\limits_L \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz,\ L=\{z:\ |z-1|=\tfrac{1}{2}\};$

12. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin^4\varphi\,d\varphi.$

Глава 5

Степенные ряды. Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n , \qquad (5.1)$$

где $z_0,\ c_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — фиксированные числа.

Множеством сходимости степенного ряда называется множество точек z, при которых ряд (5.1) сходится.

Будем в дальнейшем считать, что $\dfrac{1}{0} = \infty,\ \dfrac{1}{\infty} = 0.$

Теорема 7 (Коши–Адамара). *Если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} \quad (0 \le R \le \infty)\,,$$

то

1) при $R = \infty$ ряд (5.1) сходится во всей комплексной плоскости;

2) при $R = 0$ ряд (5.1) сходится только в точке $z = z_0$ и расходится при $z \ne z_0$;

3) при $0 < R < \infty$ ряд (5.1) сходится абсолютно в круге $\left|z - z_0\right| < R$ и расходится во внешности этого круга.

Круг $\{z :\ |z - z_0| < R\}$, внутри которого ряд (5.1) сходится, а во внешности расходится, называется *кругом сходимости*, число R — *радиусом сходимости*. Поведение ряда (5.1) на границе круга сходимости может быть различным: он может расходиться во всех точках границы, сходиться во всех точках границы, наконец, может расходиться в одних и сходиться в других точках границы. Характер сходимости — абсолютный, условный — также может быть различным (хотя, очевидно, одним и тем же для всех точек границы, в которых ряд сходится).

Пример 27. *Найти радиусы сходимости рядов*:

$$\mathit{1.}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n; \quad \mathit{2.}\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{n^3}.$$

Решение. 1. По формуле Коши–Адамара имеем

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Для вычисления последнего предела воспользуемся формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n+\theta_n/12n},\ \ \theta_n \in (0,\ 1).$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n+\theta_n/12n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{2\pi n}}{e^{1-\theta_n/12n^2}} = e^{-1},$$

откуда $R = e$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n z^{n^3}$ — степенной ряд, у которого многие коэффициенты равны нулю. Воспользуемся формулой Коши–Адамара, записав предварительно выражения коэффициентов c_k этого ряда через номер коэффициента k (здесь c_k — коэффициент при z^k):

$$c_k = \begin{cases} 3^n,\ k = n^3,\ n = 0, 1, \ldots \\ 0,\ k \neq n^3, \end{cases}$$

тогда

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^3]{|c_{n^3}|} = \lim_{n\to\infty} (3^n)^{\frac{1}{n^3}} = 1.$$

Значит, $R = 1$.

Задача 29. *Найти радиусы сходимости рядов*:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$; *2.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; *3.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; *4.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$; *5.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; *6.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$;

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$; *8.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$; *9.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$; *10.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n\, z^n$.

Пример 28. *Найти множество сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}\ \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Решение. Определим круг сходимости данного степенного ряда:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{\alpha}{n}} = 1,$$

т.е. $R = 1$, поэтому $\{z:\ |z| < 1\}$ — круг сходимости.

На окружности $|z| = 1$ имеем

$$\left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha},$$

поэтому при $\alpha > 1$ ряд абсолютно сходится во всех ее точках, а при $\alpha \leq 0$ расходится. При $0 < \alpha \leq 1$ и $z = 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

расходится. В остальных точках окружности ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$ сходится, так как при $z = e^{i\varphi}$ $(0 < \varphi < 2\pi)$ имеем:

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{e^{ik\varphi}}{k^\alpha} =$$

$$= e^{i(n+1)\varphi} \left\{ \sum_{j=0}^{p-2} \sigma_j \left[\frac{1}{(n+j+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+j+2)^\alpha} \right] + \frac{\sigma_{p-1}}{(n+p)^\alpha} \right\},$$

$$\sigma_j = 1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots + e^{ji\varphi} = \frac{1 - e^{i(j+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = e^{ji\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin \frac{j+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Так как $\left|\sigma_j\right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}$, то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{e^{ik\varphi}}{k^\alpha}\right| < \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left\{ \sum_{j=0}^{p-2} \left[\frac{1}{(n+j+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+j+2)^\alpha} \right] + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^\alpha \sin \frac{\varphi}{2}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Задача 30. *Исследовать поведение степенного ряда на границе круга сходимости*:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n;$ *2.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n};$ *3.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n;$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}.$

Теорема 8 (о почленном дифференцировании степенных рядов). *В круге сходимости* $|z-z_0| < R$ $(R > 0)$ *степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *его сумма* $f(z)$ *является аналитической функцией, причем производная* $f'(z)$ *может быть получена путем почленного дифференцирования* (5.1), *т.е.*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Теорема 9 (о единственности разложения в степенной ряд). *Если функция* $f(z)$ *в круге* $\{z : \ |z - z_0| < R\}$ *представима как сумма степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n,$$

то коэффициенты этого ряда однозначно определяются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Теорема 10 (о разложении функции в ряд Тейлора). *Если функция* $f(z)$ *— аналитическая в области* D, $z_0 \in D$, *то ее можно представить в любом круге* $\{z : \ |z - z_0| < R\} \subset D$ *в виде суммы сходящегося степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n, \tag{5.2}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\left(\xi - z_0\right)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{5.3}$$

$$\left(\gamma_r = \{\xi : \ |\xi - z_0| = r < R\}\right).$$

Ряд (5.2), коэффициенты которого определены формулами (5.3), называется *рядом Тейлора функции* $f(z)$ *с центром в точке* z_0.

Как правило, прямое вычисление коэффициентов ряда Тейлора через производные высших порядков затруднительно, поэтому прибегают к различным искусственным приемам. Важную роль в этих вопросах играет теорема единственности разложения функции в степенной ряд.

Будем использовать следующие *основные разложения*:

1. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} \quad (|z| < +\infty)$;

2. $\sin z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|z| < +\infty);$

3. $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty);$

4. $\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|z| < +\infty);$

5. $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty);$

6. $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{n}}{n} \quad (|z| < 1);$

7. $(1+z)^a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_a^n z^n \quad (|z| < 1),$

$$C_a^n = \begin{cases} \dfrac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}, \ n = 1, 2, \dots, \\ 1, \ n = 0; \end{cases}$$

8. $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$

Пример 29. *Разложить указанные функции в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:*

1. $e^z \cos z, \ z_0 = 0;$

2. $\cos z, \ z_0 = \frac{\pi}{4};$

3. $\frac{1}{z^2+1}, \ z_0 = 0;$

4. $\frac{1}{(1-z)^2}, \ z_0 = 0;$

5. $\frac{z}{1-z+z^2}, \ z_0 = 0;$

6. $\frac{z-1}{2z^2+5z+2}, \ z_0 = -1;$

7. Главная ветвь $\ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right), \ z_0 = 0.$

Решение. 1. По формуле Эйлера $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$, поэтому

$$e^z \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{z(1+i)+e^{z(1-i)}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{n!} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} e^{i\pi n/4} + 2^{n/2} e^{-i\pi n/4}}{2n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos \frac{\pi n}{4}\, z^n.$$

Разложение сходится во всей комплексной плоскости ($R = \infty$).

2. Пользуясь тригонометрическими формулами, получаем

$$\cos z = \cos\left(\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Учитывая основные разложения, можем записать

$$\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Окончательно имеем

$$\cos z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^n \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right).$$

Разложение сходится во всей комплексной плоскости ($R = \infty$).

3. Для $|z| < 1$ имеем:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

4. Из теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов и разложения 8 для $|z| < 1$ имеем:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

5. Записав данную функцию в виде

$$\frac{z}{1-z+z^2} = \frac{z(z+1)}{(z+1)\left(z^2-z+1\right)} = \frac{z(z+1)}{1+z^3}$$

и воспользовавшись разложением 8, для $|z|<1$ имеем

$$\frac{z(z+1)}{1+z^3}=(z^2+z)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n}=$$

$$=z+z^2-z^4-z^5+z^7+z^8-z^{10}-z^{11}+\ldots+(-1)^n z^{3n+1}+(-1)^n z^{3n+2}+\ldots$$

6. Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, разложим функцию на простейшие дроби:

$$\frac{z-1}{2z^2+5z+2}=\frac{z-1}{(z+2)(2z+1)}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{2z+1}.$$

Применим разложение 8 к каждой из полученных дробей:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{1-(-(z+1))}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n,\quad |z+1|<1,$$

$$\frac{1}{2z+1}=\frac{1}{2(z+1)-1}=-\frac{1}{1-2(z+1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z+1)^n,\quad |z+1|<\frac{1}{2}.$$

Отсюда для всех точек круга $|z+1|<\frac{1}{2}$

$$\frac{z-1}{2z^2+5z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n+(-1)^n\right)(z+1)^n.$$

7. Продифференцируем функцию $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$:

$$F(z)=\left(\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right)'=\frac{1}{z+\sqrt{1+z^2}}\left(1+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Воспользовавшись разложением 7, будем иметь

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{-\frac{1}{2}}^{k}\,t^k\quad(|t|<1)\,,$$

$$C_{-\frac{1}{2}}^{k}=\begin{cases}(-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{k!\,2^k},\ k=1,2,\ldots,\\ 1,\quad k=0.\end{cases}$$

Тогда

$$\left(1+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}z^{2k}\quad(|z|<1)\,.$$

Проинтегрировав почленно последнее равенство, получим

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\int\limits_0^z F(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}\,z^{2k+1},$$

где $|z|<1$.

Задача 31. *Разложить указанные функции в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и найти радиус сходимости*:

1. $f(z)=\frac{1}{(1+z)^2}$, $z_0=0$;
2. $f(z)=\frac{1}{(1-z^2)^2}$, $z_0=0$;
3. $f(z)=\dfrac{z}{z^4+1}$, $z_0=0$;
4. $f(z)=\dfrac{1}{1+z+z^2}$, $z_0=0$;
5. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$, $z_0=0$;
6. $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$, $z_0=0$;
7. $f(z)=\sin^2 z$, $z_0=0$;
8. $f(z)=e^z\sin z$, $z_0=0$;
9. $f(z)=\operatorname{ch} z\cdot\cos z$, $z_0=0$;
10. $f(z)=\sin z$, $z_0=\frac{\pi}{4}$;
11. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+5}$, $z_0=1$;
12. $f(z)=\ln\dfrac{1+z}{1-z}$, $z_0=0$.

Пример 30. *Найти первые три отличные от нуля члена разложения в ряд Тейлора по степеням z функции*

$$f(z)=\frac{z}{\ln(1+z)}.$$

Решение. Пусть искомое разложение имеет вид

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$$

Тогда

$$z=\left(c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots\right)\ln(1+z).$$

Так как ряды в круге сходимости сходятся абсолютно, то перестановки членов законны. Поэтому

$$z=\left(c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots\right)\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots\right)=$$

$$=c_0z+\left(c_1-\frac{c_0}{2}\right)z^2+\left(c_2-\frac{c_1}{2}+\frac{c_0}{3}\right)z^3+\ldots$$

В силу теоремы о единственности разложения функции в степенной ряд справедливы равенства:

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_1 - \frac{c_0}{2} = 0, \\ c_2 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{3} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1, \\ c_1 = \frac{1}{2}, \\ c_2 = -\frac{1}{12}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{z}{\ln(1+z)} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \ldots$$

Задача 32. *Найти первые три отличные от нуля члена разложения в ряд Тейлора по степеням z следующих функций:*

1. $f(z) = \operatorname{tg} z$; *2.* $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{arctg} z}$; *3.* $f(z) = e^z \ln(1+z)$.

Теорема 11 (о разложении функции в ряд Лорана)**.** *Любую функцию $f(z)$, аналитическую в кольце*

$$V = \{z: \ r < |z - z_0| < R\}, \ \ 0 \le r < R \le \infty,$$

можно в этом кольце представить как сумму сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{5.4}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \ \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{5.5}$$

где $r < \rho < R$.

Ряд (5.4), коэффициенты которого определяются по формулам (5.5), называется *рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце V.*

Выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{5.6}$$

называется *правильной частью ряда Лорана*, выражение

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-3}}{(z - z_0)^3} + \ldots \tag{5.7}$$

— *главной частью ряда Лорана.*

Ряд (5.5) называют *сходящимся*, если сходятся оба ряда (5.6) и (5.7), при этом его суммой называют сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty} + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}$.

Замечание 1. *Если $z_0 = \infty$, то рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки называется ряд*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

при этом правильной его частью называется выражение

$$f_1 = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots,$$

а главной —

$$f_2 = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$$

По формуле Коши–Адамара

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad \frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

Теорема 12 (о единственности разложения в ряд Лорана). *Всякий сходящийся ряд по отрицательным и положительным степеням $z - z_0$ является рядом Лорана своей суммы, т.е. если функция $f(z)$ в кольце V представима рядом вида* (5.4), *то коэффициенты этого ряда определяются по формулам* (5.5).

Приемы разложения функций в ряды Тейлора и Лорана имеют много общего.

Пример 31. *Найти всевозможные разложения функции*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

в ряд Лорана по степеням z.

Решение. Функция

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

является однозначной и аналитической в областях $V_1 = \{z: \ |z| < 1\}$, $V_2 = \{z: \ 1 < |z| < 2\}$, $V_3 = \{z: \ |z| > 2\}$. Найдем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в этих областях. Используя метод неопределенных коэффициентов, представим функцию $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}. \tag{5.8}$$

Если $|z| < 1$, то

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{5.9}$$

если же $|z| > 1$, то

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n. \tag{5.10}$$

Аналогично в круге $|z| < 2$ имеем разложение

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \tag{5.11}$$

если же $|z| > 2$, то

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^{n+1}}. \tag{5.12}$$

В области $V_1 = \{z:\ |z| < 1\}$ в силу формул (5.8), (5.9), (5.11) функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Данный ряд не содержит отрицательных степеней z.

В области $V_2 = \{z:\ 1 < |z| < 2\}$ разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана (формулы (5.8), (5.10), (5.11)) имеет следующий вид:

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Этот ряд содержит как отрицательные, так и положительные степени z.

В области $V_3 = \{z:\ |z| > 2\}$ функция $f(z)$ представляется рядом Лорана, содержащим только отрицательные степени z (см. формулы (5.8), (5.10), (5.12))

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n.$$

Пример 32. *Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0:*

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z-3}$, $z_0 = 1$;

2. $f(z) = \cos\dfrac{z}{z+1}$, $z_0 = -1$.

Решение. 1. Используя метод неопределенных коэффициентов, разложим функцию $f(z)$ на сумму простых дробей:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z-3} = \frac{1}{(z-1)(z+3)} = \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{4(z+3)} = f_1(z) - f_2(z).$$

Функция $f_2(z)$ аналитическая в круге $|z-1| < 4$, поэтому в окрестности $z_0 = 1$ ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$f_2(z) = \frac{1}{4(z+3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{4}\right)^n.$$

Функция $f_1(z)$ аналитическая в кольце $|z-1| > 0$ и уже записана рядом Лорана по степеням $(z-1)$. Окончательно получаем:

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z) = \frac{1}{4(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{4^{n+2}} = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{4^{n+2}},$$

где $0 < |z-1| < 4$.

2. Так как $\dfrac{z}{z+1} = 1 - \dfrac{1}{z+1}$, то

$$\cos\left(\frac{z}{z+1}\right) = \cos\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \cos 1 \cos\left(\frac{1}{z+1}\right) + \sin 1 \sin\left(\frac{1}{z+1}\right).$$

Воспользуемся основными разложениями 2 и 3:

$$\cos\left(\frac{z}{z+1}\right) = \cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\frac{1}{(z+1)^{2n}} + \sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{(z+1)^{2n+1}},$$

где $|z+1| > 0$.

Пример 33. *Разложить функцию* $\ln\dfrac{z+1}{z-1}$ *в ряд Лорана в кольце*

$$V = \{z:\ 1 < |z| < \infty\}.$$

Решение.

$$F(z) = \left(\ln\frac{z+1}{z-1}\right)' = \frac{-2}{z^2-1} = \frac{-2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = -\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}}.$$

Этот ряд равномерно сходится на любой гладкой кривой, соединяющей точку z с ∞. Интегрируя почленно, находим

$$\ln\frac{z+1}{z-1} = \int_{\infty}^{z}F(t)dt = -2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\infty}^{z}\frac{dt}{t^{2n}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)z^{2n-1}}.$$

Задача 33. *Разложить следующие функции в ряд Лорана по степеням* $z - z_0$ *в кольце* D:

1. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$, $D = \{z:\ 0 < |z| < \infty\}$;

2. $f(z) = z^2 \sin \pi \dfrac{z+1}{z}$, $z_0 = 0$, $D = \{z:\ 0 < |z| < \infty\}$;

3. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$, $z_0 = 0$, $D = \{z:\ 1 < |z| < 2\}$;

4. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$, $z_0 = 0$, $D = \{z:\ 1 < |z| < 2\}$;

5. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$, $z_0 = 0$, $D = \{z:\ |z| > 2\}$;

6. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$, $z_0 = 1$, $D = \{z:\ 1 < |z-1| < 2\}$;

7. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2-9)}$, $z_0 = 1$, $D = \{z:\ 1 < |z-1| < 2\}$;

8. $f(z) = z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$, $D = \{z:\ 0 < |z-2| < \infty\}$;

9. $f(z) = \dfrac{1 - e^{-z}}{z^3}$, $z_0 = 0$, $D = \{z:\ 0 < |z| < \infty\}$;

10. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$, $z_0 = 1$, $D = \{z:\ 0 < |z-1| < 1\}$.

Глава 6

Изолированные особые точки однозначного характера. Вычет, вычисление вычетов

Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует такая проколотая окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична.

В зависимости от поведения функции $f(z)$ при приближении к такой точке различают три типа особых точек.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

- *устранимой точкой*, если существует конечный предел
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A;$$
- *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;
- *существенной особой точкой*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Изолированные особые точки могут быть классифицированы по виду лорановского разложения функции в проколотой окрестности этой точки.

Теорема 13 (критерий устранимой точки). *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана для этой функции в проколотой окрестности точки z_0 является тождественным нулем, т.е.*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Теорема 14 (критерий полюса). *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения этой функции в проколотой окрестности точки z_0 имеет конечное число отличных от нуля членов, т.е.*
$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Номер N старшего члена главной части ряда Лорана функции $f(z)$ в проколотой окрестности полюса называют *порядком полюса*. Полюс первого порядка называют *простым полюсом*. Порядок полюса функции $f(z)$ равен кратности нуля функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ в этой точке.

Теорема 15 (критерий существенно особой точки)**.** *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является существенно особой тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана для этой функции в проколотой окрестности точки z_0 содержит бесконечно много отличных от 0 членов, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Эти критерии справедливы и для случая $z_0 = \infty$ с учетом определения ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Пример 34. *Найти особые точки функций, выяснить их характер*:

1. $f(z) = \dfrac{z}{e^z + 1}$; *2.* $f(z) = \dfrac{z^5}{(1-z)^3}$; *3.* $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3}$;

4. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1} \cos \dfrac{\pi z}{z + 1}$; *5.* $f(z) = \dfrac{z^3}{\sin^2 \frac{1}{z+1}}$.

Решение. 1. Все конечные особые точки $z = z_0$ находятся из уравнения

$$e^{z_0} + 1 = 0.$$

Таким образом, $z_0 = (2k+1)\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$. Так как

$$\lim_{z \to \pi i} f(z) = \infty$$

и

$$\lim_{z \to \pi i} (z - \pi i) f(z) = \lim_{z \to \pi i} \frac{z(z - \pi i)}{-e^{z - \pi i} + 1} = -\pi i,$$

то $z_0 = \pi i$ — простой полюс. В силу $2\pi i$ периодичности функции e^z то же верно для остальных точек $(2k+1)\pi i$.

Точка $z_0 = \infty$ не является изолированной особой точкой: в любой ее окрестности есть полюса вида $(2k+1)\pi i$.

2. Так как

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \infty$$

и

$$\lim_{z \to 1} (z - 1)^3 f(z) = \lim_{z \to 1} z^5 = -1,$$

то $z_0 = 1$ — полюс 3-го порядка.

Точка $z_0 = \infty$ является полюсом 2-го порядка, так как

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$$

и

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^2} f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z^3}{(1-z)^3} = -1.$$

3. Из уравнения $e^{z_0}-1=0$ находим конечные особые точки функции $f(z)$:

$$z_0=2k\pi i \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Так как при $z\to 0$ имеем

$$1-\cos z\sim\frac{z^2}{2},\ \ (e^z-1)^3\sim z^3,\ \text{т.е. } f(z)\sim\frac{1}{2z},$$

то $z=0$ — простой полюс функции $f(z)$.

Точки $z_k=2k\pi i \quad (k=\pm1,\pm2,\ldots)$ являются нулями третьего порядка функции $(e^z-1)^3$, при этом функция $(1-\cos z)$ в этих точках не обращается в 0, значит, для $f(z)$ точки $z_k=2k\pi i \quad (k=\pm1,\pm2,\ldots)$ — полюсы третьего порядка.

Точка $z_0=\infty$ не является изолированной особой точкой: в любой ее окрестности есть полюса вида $2k\pi i$.

4. Очевидно, что конечные особые точки — это ±1. Так как

$$\lim_{z\to1}\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{\cos\dfrac{\pi z}{z+1}}{z-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(-\sin\frac{\pi z}{z+1}\cdot\frac{\pi}{(z+1)^2}\right)=-\frac{\pi}{8},$$

то $z_0=1$ — устранимая особая точка.

Точка $z_0=-1$ — существенно особая, так как $\lim\limits_{z\to-1}f(z)$ не существует. Действительно, положим

$$z_n=-1+\frac{2}{2n+1},\ \ z_n^*=-1-\frac{1}{2n-1}\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{-8n}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\pi n\right)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n^*)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{4n-1}\cos\left(2\pi n\right)=+\infty.$$

Наконец, так как

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=0,$$

то $z=\infty$ — устранимая особая точка.

5. Для функции

$$f(z)=\frac{z^3}{\sin^2\dfrac{1}{z+1}}$$

точки $z_k=-1+\dfrac{1}{k\pi} \quad (k=\pm1,\pm2,\ldots)$ являются полюсами второго порядка, $z=-1$ не является изолированной особой точкой (является предельной точкой или точкой накопления полюсов), а точка $z=\infty$ — полюс пятого порядка, так как при $z \to \infty$

$$\sin\frac{1}{z+1} \sim \frac{1}{z}, \quad f(z) \sim z^5.$$

Других особых точек у функции $f(z)$ нет.

Задача 34. *Найти изолированные особые точки функций, выяснить их характер*:

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^6 - z^2}$; *2.* $f(z) = \dfrac{z^4}{(z-2)^3}$; *3.* $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$;

4. $f(z) = ze^{-z}$; *5.* $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$; *6.* $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$;

7. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$; *8.* $f(z) = \operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$; *9.* $f(z) = z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right)$;

10. $f(z) = \sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$.

Пусть $z_0 \neq \infty$ — изолированная особая точка однозначной и аналитической в проколотой окрестности точки z_0 функции $f(z)$, L — замкнутый жордановый кусочно-гладкий контур, содержащий внутри себя точку z_0 и лежащий целиком в окрестности z_0.

Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется интеграл от этой функции по контуру L, деленный на $2\pi i$:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(z)dz. \tag{6.1}$$

Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ равен коэффициенту при первой отрицательной степени $(z-z_0)^{-1}$ в ее лорановском разложении в окрестности z_0:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Если $z_0 = \infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, то *вычетом в бесконечности* называется величина

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(z)dz, \tag{6.2}$$

где L^- — замкнутый жордановый кусочно-гладкий контур, содержащий внутри себя начало координат и полностью лежащий в окрестности бесконечно удаленной точки $\{z: \ R < |z| < \infty\}$, где $f(z)$ — аналитическая, причем L^- означает, что обход контура L осуществляется в отрицательном направлении.

Из определения вычета в бесконечности следует, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1},$$

где c_{-1} — коэффициент при z^{-1} в лорановском разложении функции в окрестности бесконечно удаленной точки.

Вычисление вычетов в конечных точках

1. Если z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

2. Если z_0 — полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{(z-z_0)^n f(z)\right\}^{(n-1)}. \tag{6.3}$$

В частности, если z_0 — простой полюс, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z). \tag{6.4}$$

Приведем также две модификации этих формул.

Если в окрестности точки z_0

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические функции в точке z_0, причем

$$\varphi(z_0) \neq 0,\ \psi(z_0) = 0,\ \psi'(z_0) \neq 0,$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{6.5}$$

Если

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n},$$

где функция $\varphi(z)$ — аналитическая в точке z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\, \varphi^{(n-1)}(z_0). \tag{6.6}$$

3. Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то, раскладывая $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$, находят c_{-1} и применяют формулу

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Вычисление вычетов в бесконечности

1. Если $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(f(\infty) - f(z)\right), \tag{6.7}$$

где $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Если точка $z_0 = \infty$ — нуль n-го порядка для функции $f(z)$, и при $z \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$f(z) \sim \frac{A}{z^n},$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} -A, \; n = 1, \\ 0, \; n \geq 2. \end{cases} \tag{6.8}$$

2. Если $z_0 = \infty$ — полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z\to\infty} z^{n+2} f^{(n+1)}(z). \tag{6.9}$$

3. Если $z_0 = \infty$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то применяется формула

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Теорема 16 (основная теорема о вычетах). *Если $z_1, \ldots, z_n$ — конечные изолированные особые точки функции $f(z)$, аналитической, за исключением этих точек, во всей комплексной плоскости, то*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Пример 35. *Вычислить вычет функций $f(z)$ в указанных точках:*

1. $f(z) = \sin z \sin \dfrac{1}{z}$, *во всех изолированных особых точках функции;*

2. $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2+1}$, $z_0 = i$;

3. $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$, $z_0 = 0$;

4. $f(z) = \dfrac{\cos^2 \dfrac{\pi}{z}}{z+1}$, *во всех изолированных особых точках функции;*

5. $f(z) = \dfrac{\sin\dfrac{1}{z}}{z-1}$, $z_0 = \infty$;

6. $f(z) = \ln z \cdot \sin\dfrac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$ (*выбирается главная ветвь логарифма*);

7. $f(z) = \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$, $z_0 = 0$.

Решение. 1. Функция $f(z) = \sin z \sin\dfrac{1}{z}$ имеет две особые точки — $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$, обе существенно особые. Разложения в ряд Лорана данной функции для этих точек совпадают и содержат в силу четности исходной функции лишь четные степени z, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

2. Точка $z_0 = i$ — простой полюс данной функции, поэтому, воспользовавшись формулой (6.4), получим

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)ze^{iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{ie^{-1}}{i+i} = \frac{1}{2e}.$$

3. Для данной функции точка $z_0 = 0$ — полюс 2-го порядка. Применим формулу (6.3):

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(z^2\operatorname{ctg}^2 z\right)' = \lim_{z\to 0}\left(2z\operatorname{ctg}^2 z - \frac{2z^2\operatorname{ctg} z}{\sin^2 z}\right) =$$

$$= 2\lim_{z\to 0} z\operatorname{ctg} z\left(\frac{\cos z\sin z - z}{\sin^2 z}\right) = 2\lim_{z\to 0}\frac{(\cos z\sin z - z)'}{\left(\sin^2 z\right)'} =$$

$$= 2\lim_{z\to 0}\frac{-\sin^2 z + \left(\cos^2 z - 1\right)}{2\sin z\cos z} = -2\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\cos z} = 0.$$

4. Особыми точками функции являются $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = \infty$. Точка $z_1 = -1$ — простой полюс, поэтому по формуле (6.4) имеем:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}\cos^2\frac{\pi}{z} = 1.$$

Так как при $z \to \infty$

$$\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{z}}{z+1} \sim \frac{1}{z},$$

то $z_3 = \infty$ — устранимая особая точка (нуль первого порядка), и по формуле (6.8) получаем

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1.$$

Точка $z_2 = 0$ — существенно особая. По основной теореме о вычетах:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\left(\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right) = 0.$$

5. Так как

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z(z-1)} = 0,$$

то $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка. По формуле (6.7) найдем

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(0 - \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}\right) = -\lim_{z\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}}\,\frac{1}{z-1} = 0.$$

6. Точка $z_0 = 1$ — существенно особая. Разложим данную функцию в ряд, воспользовавшись соответствующими основными разложениями:

$$\ln z = \ln\left(1 + (z-1)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k} =$$

$$= (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \ldots,$$

$$\sin\frac{1}{z-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2k-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \ldots$$

Перемножая два ряда, найдем коэффициент при первой отрицательной степени $(z-z_0)^{-1}$:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\cdot 3!} - \frac{1}{4\cdot 5!} + \frac{1}{6\cdot 7!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n\,(2n+1)!}.$$

7. Точка $z_0 = 0$ — полюс исследуемой функции, однако непосредственное применение формулы (6.4) затруднено. Преобразуем числитель и знаменатель дроби, пользуясь формулой Тейлора:

$$\frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)} = \frac{\left(3z - \frac{(3z)^3}{3!} + o(z^3)\right) - 3\left(z - \frac{z^3}{3!} + o(z^3)\right)}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + o(z^3)\right)\left(-\frac{z^3}{3!} + o(z^3)\right)} =$$

$$= \frac{-4 + o(z)}{z\left(-\frac{1}{6} + o(z)\right)} \sim \frac{24}{z} \quad (z\to 0).$$

Таким образом, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 24$.

Задача 35. *Найти вычеты следующих функций в указанных точках:*

1. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, *во всех конечных особых точках*;

2. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)\,(z-1)^2}$, *во всех конечных особых точках*;

3. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$, *во всех конечных особых точках*;

4. $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$, $z_0 = 1$;

5. $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$, $z_0 = 0$;

6. $f(z) = \cos \pi \dfrac{z+2}{2z}$, $z_0 = \infty$;

7. $f(z) = z \cos^2 \dfrac{\pi}{z}$, $z_0 = \infty$;

8. $f(z) = z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$, *во всех изолированных особых точках*;

9. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$, *во всех изолированных особых точках*;

10. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$, *во всех изолированных особых точках*;

11. $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}$, $z_0 = 0$;

12. $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{ch} z - 1 - \dfrac{z^2}{2}}$, $z_0 = 0$.

Глава 7

Вычисление интегралов с помощью вычетов

При вычислении интегралов по замкнутому контуру от функции комплексной переменной применяется так называемая теорема Коши о вычетах.

Теорема 17. *Интеграл от функции $f(z)$, взятый по замкнутому контуру Γ, содержащемуся в области D, где функция является однозначной и аналитической, за исключением изолированных особых точек однозначного характера, и не проходящему через особые точки, равен произведению суммы вычетов функции относительно всех особых точек $z_1, \ldots, z_n$, заключенных внутри Γ, на $2\pi i$:*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{7.1}$$

Пример 36. *Вычислить интегралы:*

1. $\displaystyle\int\limits_L \frac{z^2+1}{z^2(z-2)}\,dz,\ L=\{z:\ |z+1|+|z-1|=6\};$

2. $\displaystyle\int\limits_L \frac{1}{z}\,e^{\frac{1}{1-z}}\,dz,\ L=\{z:\ |z+i|+|z-i|=4\};$

3. $\displaystyle\int\limits_L \frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z}\,dz,\ L=\{z:\ |z-1-i|=2\};$

4. $\displaystyle\int\limits_L (2z-1)\cos\frac{z}{z-1}\,dz,\ L=\{z:\ |z|=2\}.$

Решение. 1. Особыми точками подынтегральной функции являются $z_1 = 0$ — полюс 2-го порядка, $z_2 = 2$ — простой полюс, $z_3 = \infty$ — устранимая особая точка. Точки $z_1,\ z_2 \in D$, $z_3 \notin D$ (D — область, ограниченная контуром L). Воспользовавшись формулой (6.3), подсчитаем вычеты в точках $z_1,\ z_2$:

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{z^2+1}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2+1}{z-2}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{z^2-4z-1}{(z-2)^2} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{z=2} \frac{z^2+1}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{z^2+1}{z^2} = \frac{5}{4}.$$

Тогда по теореме Коши о вычетах будем иметь

$$\int\limits_L \frac{z^2+1}{z^2(z-2)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right) = 2\pi i.$$

2. Согласно теореме Коши о вычетах и основной теореме о вычетах

$$I = \int\limits_L \frac{1}{z}\,e^{\frac{1}{1-z}}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z} + \operatorname*{res}_{z=1}\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z}\right) = -2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z}.$$

Но при $z\to\infty$

$$\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z}\sim\frac{1}{z},$$

поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z} = -1, \quad \text{и} \quad I = 2\pi i.$$

3. Так же как и в предыдущем примере

$$\int\limits_L \frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z} + \operatorname*{res}_{z=0}\frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z}\right) =$$

$$= -2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{1}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z} = -2\pi i\lim_{z\to\infty}\frac{-z}{iz+1}\,\cos\frac{1}{z} = \frac{2\pi i}{i} = 2\pi.$$

4. По теореме Коши о вычетах

$$I = \int\limits_L (2z-1)\cos\frac{z}{z-1}\,dz = 2\pi i\operatorname*{res}_{z=1}(2z-1)\cos\frac{z}{z-1},$$

так как подынтегральная функция аналитична в круге $|z|<2$, кроме точки $z=1$, которая является существенно особой. Имеем

$$\cos\frac{z}{z-1} = \cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = \cos 1\cdot\cos\frac{1}{z-1} - \sin 1\cdot\sin\frac{1}{z-1} =$$

$$= \cos 1\left(1-\frac{1}{2(z-1)^2}+\ldots\right) - \sin 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-3)^3}+\ldots\right),$$

$$2z-1 = 2(z-1)+1,$$

откуда находим коэффициент c_{-1} при $(z-1)^{-1}$ ряда Лорана для подынтегральной функции:

$$c_{-1} = -\left(\cos 1+\sin 1\right).$$

Следовательно, $I = -2\pi i\,(\cos 1+\sin 1)$.

Наиболее популярный в математическом анализе путь вычисления определенных интегралов через формулу Ньютона—Лейбница может оказаться неэффективным, особенно если первообразная подынтегральной функции не является элементарной функцией. Применение теории вычетов в ряде случаев гораздо эффективней, так как позволяет избежать трудностей вычисления первообразной.

Пусть $R(u, v)$ — рациональная функция аргументов u, v, не имеющая особенностей на окружности $u^2 + v^2 = 1$. Тогда

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$$

заменой $z = e^{i\varphi}$ сводится к интегралу по замкнутому контуру от функции комплексной переменной, который легко вычисляется с помощью вычетов. При указанной замене

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad d\varphi = \frac{dz}{iz},$$

а когда φ меняется от $-\pi$ до π, точка z пробегает окружность $|z| = 1$ в положительном направлении, и

$$I = \int_{|z|=1} R_1(z) dz,$$

где $R_1(z) = -\dfrac{i}{z} R\left[\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \ \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right]$ — рациональная функция от z. По теореме Коши о вычетах

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R_1(z),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все полюсы рациональной функции $R_1(z)$, лежащие в круге $|z| < 1$.

Пример 37. *Вычислить интегралы*:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2}, \ \rho \in \mathbb{C}, \ |\rho| \neq 1;$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a - x)\sqrt{1 - x^2}}, \ a > 1.$

Решение. 1. Сделав замену переменной $z = e^{i\varphi}$, получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{\rho z^2 - (1+\rho^2)z + \rho}.$$

Точки $z = \rho,\ z = \frac{1}{\rho}$ — простые полюсы подынтегральной функции, причем только один лежит в круге $|z| < 1$. Если $|\rho| < 1$, то в круге $|z| < 1$ лежит полюс $z = \rho$ и

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\rho} \frac{i}{\rho z^2 - (1+\rho^2)z + \rho} = \frac{2\pi}{1-\rho^2}.$$

Если $|\rho| > 1$, то в круге $|z| < 1$ лежит полюс $z = \dfrac{1}{\rho}$ и

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\frac{1}{\rho}} \frac{i}{\rho z^2 - (1+\rho^2)z + \rho} = \frac{2\pi}{\rho^2 - 1}.$$

2. Заменой переменной $x = \cos\varphi$ приведем исходный интеграл к виду

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a - \cos\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a - \cos\varphi}.$$

Выполнив теперь замену переменной $z = e^{i\varphi}$, находим

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a - \cos\varphi} = -\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2az + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Теорию вычетов можно использовать при вычислении несобственных интегралов по вещественной оси, если методы действительного анализа оказываются неэффективными.

1. Если функция $f(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости, за исключением особых точек z_k, $\operatorname{Im} z_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, непрерывная в замкнутой полуплоскости, за исключением тех же точек, и

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \geq 0)\,,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Для нижней полуплоскости правую часть последней формулы нужно брать с минусом.

2. Если функция $f(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости, за исключением особых точек z_k, $\operatorname{Im} z_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, непрерывная в замкнутой полуплоскости, за исключением тех же точек, и

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \geq 0)\,,$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{imz} \quad (m > 0).$$

Если, кроме того, функция $f(z)$ вещественна на действительной оси, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\, dx = -2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{imz} \quad (m > 0),$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\, dx = 2\pi \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{imz} \quad (m > 0).$$

Пример 38. *Вычислить интегралы:*

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$; *2.* $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix}}{x^2+1}\,dx$; *3.* $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx$.

Решение. 1. В верхней полуплоскости находится единственный полюс подынтегральной функции $z = i$ порядка n. Найдем $\operatorname*{res}_{z=i} f(z)$ по формуле для вычета в полюсе порядка n:

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \left(\left(\frac{z-i}{z^2+1} \right)^n \right)^{(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \left((z+i)^{-n} \right)^{(n-1)} = \frac{-n(n+1)\ldots(2n-2)i}{2^{2n-1}(n-1)!}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{(2n-2)!\pi}{((n-1)!)^2\, 2^{2n-2}}.$$

2. Единственная особая точка, лежащая в верхней полуплоскости, — это простой полюс $z = i$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix}}{x^2+1}\,dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{ze^{2iz}}{z^2+1} = 2\pi i \left.\frac{ze^{2iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = \frac{\pi i}{e^2}.$$

3. В верхней полуплоскости находится единственный полюс подынтегральной функции $z = 3i$, поэтому

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx = -\pi \operatorname{Im} \operatorname*{res}_{z=3i} \frac{e^{iz}}{z^2+9} = -\pi \operatorname{Im} \frac{e^{-3}}{6i} = \frac{\pi}{6e^3}.$$

Задача 36. *Вычислить интегралы*:

1. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz;$

2. $\displaystyle\int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)};$

3. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}\ \ (D:\ |z-1|<1);$

4. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}\ \ (D:\ |z|<2);$

5. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\operatorname{ctg} z}{z}\,dz\ \ (D:\ |z|>1);$

6. $\displaystyle\int_{\partial D} z\sin\frac{z+1}{z-1}\,dz\ \ (D:\ |z|<2);$

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\ \ (0<\varepsilon<1);$

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi\,d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\ \ (a\in\mathbb{C},\ |a|\neq 1);$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx;$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx;$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4ix-5)^2}\,dx;$

12. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^3}\,dx;$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2-2ix-2};$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+4ix-5)^3};$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5}\,dx;$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx;$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx;$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5}\,dx;$

19. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+1}\,dx;$

20. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2}\,dx.$

Ответы к задачам

Задача 1.

1. $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -1$;
2. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$;
3. $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$;
4. $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = \frac{3}{2}$;
5. $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = 0$;
6. $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -8$.

Задача 3.

1. $|z| = 2$, $\arg z = \pi$;
2. $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$;
3. $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$;
4. $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = -\frac{\pi}{4}$;
5. $|z| = 1$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$;
6. $|z| = 4$, $\arg z = \pi$;
7. $|z| = 1$, $\arg z = \frac{6\pi}{7}$;
8. $|z| = 2\cos\frac{\pi}{18}$, $\arg z = -\frac{\pi}{18}$.

Задача 4.

1. -8;
2. $i\sqrt{3}$;
3. $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$;
4. 1;
5. $108i$;
6. $\frac{1}{2}$.

Задача 5.

1. 1; $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
2. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; $-i$;
3. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1} + i\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$;
4. $z_k = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi+8\pi k}{12}}$, $(k = 0,\ 1,\ 2)$;
5. $z_k = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi+4\pi k}{8}}$, $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$;
6. $\pm(2+i)$.

Задача 6.

1. $\{1 \pm i\}$;
2. $\{1 \pm i\sqrt{3},\ -2\}$;
3. $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$;
4. $\{\pm 2,\ \pm 2i\}$;
5. $\left\{\frac{3}{2} - 2i\right\}$;
6. $\{0,\ \pm 1,\ \pm i\}$.

Задача 7.

1. Нижняя полуплоскость, включая действительную ось;
2. Полоса, состоящая из точек, расстояние которых до мнимой оси меньше 1;
3. Вся плоскость, из которой удалён круг радиуса 1 с центром в точке i (точки окружности включаются);

4. Кольцо между окружностями радиусов 1 и 2 с общим центром в точке $z = -i$ (окружности не включаются);
5. Полуплоскость, лежащая ниже прямой $y = x + 2$;
6. Угол раствора $\frac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z = 0$, расположенный выше действительной оси, являющейся одной из его сторон (стороны угла не включаются);
7. Эллипс с фокусами в точках $z = \pm 1$ и большой полуосью 2;
8. Часть плоскости, лежащая слева от левой ветви гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 2$ и действительной полуосью $\frac{3}{2}$;
9. Правая половина круга радиуса 1 с центром в точке $z = 0$;
10. Четыре угла раствора $\frac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z = 0$, биссектрисами которых являются лучи $\arg z = -\frac{\pi}{16} + \pi k,\ k = \overline{0,3}$, (во всех случаях точки граничных линий не включаются).

Задача 8.

1. $\varnothing$; 2. $\mathbb{C}$; 3. $\varnothing$; 4. $\mathbb{C}$; 5. $z = 0$; 6. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Задача 9.

1. $f(z) = z^2 + 2z + 1$;
2. $f(z) = (1+i)z^2$;
3. $f(z) = 5 - z^2$;
4. $f(z) = z^3 + i$;
5. $f(z) = \frac{1}{z}$;
6. $f(z) = ze^z + 3i$;
7. $f(z) = z \ln z$;
8. $f(z) = e^{\frac{z^2}{2}}$.

Задача 10.

1. $8\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}$; 2. $1, \frac{\pi}{2}$; 3. $48, \pi$; 4. $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}$.

Задача 11.
Для угла — в точках прямой $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z - 1$ с выколотой точкой $z = -i$; для коэффициента — в точках окружности $|z + i| = \sqrt{2}$.

Задача 12.

1. сжатие при $|z| < \frac{1}{2}$, растяжение при $|z| > \frac{1}{2}$;
2. сжатие при $|z - 1| < \frac{1}{2}$, растяжение при $|z - 1| > \frac{1}{2}$;
3. сжатие при $|z| > 1$, растяжение при $|z| < 1$;
4. сжатие при $\operatorname{Re} z < 0$, растяжение при $\operatorname{Re} z > 0$.

Задача 13.

1. $G = \{w: \ |w-1-i| = 1\};$
2. $G = \{w: \ \operatorname{Re} w = \frac{1}{2}\};$
3. $G = \{w: \ |w| \leq 1\};$
4. $G = \{w: \ |w| \geq 3\};$
5. $G = \{w: \ |w| < 1\};$
6. $G = \{w: \ \operatorname{Re} w < 1, \ |w - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\};$
7. $G = \{w: \ \operatorname{Re} w > \frac{1}{2}, \ |w - \frac{4}{3}| > \frac{2}{3}\};$
8. $G = \{w: \ \operatorname{Re} w > 0, \ \operatorname{Im} w < 0\}.$

Задача 14.

1. $w = 2iz + 4; \quad G = \{w: \ |w-2| < 2\};$
2. $w = \frac{2z}{z-1}; \quad G = \{w: \ |w-2| > 2\};$
3. $w = \frac{2}{2-z}; \quad G = \{w: \ |w - 1 - \frac{1}{2}i| < \frac{1}{2}\};$
4. $w = \frac{(1-i)z}{z-1-i}; \quad G = \{w: \ \operatorname{Re} w > 0\}.$

Задача 15.

1. $w = \frac{z-i}{z+i}; \quad G = \{w: \ |w| < 1\};$
2. $w = \frac{z-i}{iz-1}; \quad G = \{w: \ |w| < 1\};$
3. $w = 2i\frac{z-1}{z+1}; \quad G = \{w: \ \operatorname{Re} w < 0\};$
4. $w = (1+i)\frac{z+i}{z-1}; \quad G = \{w: \ \operatorname{Re} w > 1\}.$

Задача 16.

1. $G = \{w: \ w \notin [0, +\infty]\};$
2. $G = \{w: \ w \notin [-\infty, 0]\};$
3. $G = \{w = u + iv: \ v^2 + 16u = 64\};$
4. $G = \{w: \ |w| > 4, \ w \notin [-\infty, -4]\};$
5. $G = \{w: \ 1 < |w| < 16, \ \operatorname{Im} w > 0\};$
6. $G = \{w = u + iv: \ v^2 + 4u > 4\}.$

Задача 17.

1. $G = \{w: \ -\frac{3\pi}{4} < \arg w < -\frac{\pi}{4}\};$
2. $G = \{w: \ \operatorname{Im} w < 0\};$
3. $G = \{w: \ \operatorname{Re} w > 0, \ w \notin [0, 1]\};$
4. $G = \{w: \ \frac{2\pi}{3} < \arg w < \pi\};$
5. $G = \{w: \ \operatorname{Im} w < -\frac{\sqrt{2}}{2}\};$
6. $G = \{w: \ \operatorname{Re} w > 0, \ \operatorname{Im} w > 1\}.$

Задача 18.

1. $-\sqrt{3}+i$; 2. $1-i$; 3. -4; 4. $-2\sqrt{2}(1+i)$;

5. $-\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{2}$.

Задача 19.

1. $G=\{w=u+iv:\ u^2-v^2=\frac{1}{2},\ \operatorname{Re} w>0\}$;

2. $G=\{w=u+iv:\ \frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2>1\}$;

3. $G=\{w:\ w\notin[-1,+\infty]\}$;

4. $G=\{w:\ w\notin[-\frac{5}{4},+\infty]\}$;

5. $G=\{w:\ 0<\arg w<\frac{\pi}{2}\}$;

6. $G=\{w=u+iv:\ \frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2<1,\ \operatorname{Im} w>0\}$.

Задача 20.

1. $G=\{w:\ \frac{\pi}{3}<\arg w<\frac{2\pi}{3}\}$;

2. $G=\{w:\ |w|<1,\ \operatorname{Im} w<0\}$;

3. $G=\{w:\ \operatorname{Im} w>0\}$;

4. $G=\{w:\ |w|<1,\ -\frac{\pi}{6}<\arg w<0\}$.

Задача 21.

1. $G=\{w:\ \operatorname{Im} w>0\}$;

2. $G=\{w:\ w\notin[-\infty,0]\}$;

3. $G=\{w:\ |w|>1,\ 0<\arg w<\frac{\pi}{2}\}$;

4. $G=\{w:\ |w|<1,\ \operatorname{Im} w>0\}$;

5. $G=\{w:\ 2<|w|<3,\ \frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{2}\}$;

6. $G=\{w=:\ |w|>1,\ w\notin[1,+\infty]\}$.

Задача 22.

1. $G=\{w:\ 0<\operatorname{Im} w<\pi\}$;

2. $G=\{w:\ -2\pi<\operatorname{Im} w<0,\ \operatorname{Re} w<0\}$;

3. $G=\{w:\ |\operatorname{Im} w|<\pi,\ w\notin[0,+\infty]\}$;

4. $G = \{w: \ -2\pi < \operatorname{Im} w < 0\}$;

5. $G = \{w: \ -2\pi < \operatorname{Im} w < -\pi, \ \operatorname{Re} w < 0\}$.

Задача 23.

1. $G = \{w: \ \operatorname{Im} w > 0\}$;

2. $G = \{w: \ \operatorname{Re} w > 0, \ w \notin [0,1]\}$;

3. $G = \{w: \ w \notin [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$;

4. $G = \{w: \ \operatorname{Im} w > 0\}$;

5. $G = \{w: \ 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}\}$.

Задача 24.

1. $z = \pm\left(\frac{\pi}{2} - i\ln 2\right) + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$;

2. $z = \pm\frac{\pi i}{3} + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$;

3. $z = (-1)^k \frac{\pi i}{6} + \pi k i, \ k \in \mathbb{Z}$;

4. $z = i\ln 2 + \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$;

5. $z = \pm i\ln 3 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$;

6. $z = i(-1)^k \ln 3 + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$.

Задача 25.

1. $w = \frac{2z+i}{2-iz}$; 2. $w = \frac{2z-1}{2-z}$; 3. $w = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z$;

4. $w = \frac{2z-1}{2-z}$; 5. $w = \frac{(5-3i)z-4}{4z-5-3i}$; 6. $w = \frac{2z+2}{1-z}$;

7. $w = \frac{iz+1}{z+i}$; 8. $w = \frac{i-1-iz}{z-1+i}$; 9. $w = \frac{z-1}{z+2}$;

10. $w = \frac{z}{2-z}$.

Задача 26.

1. 2; 2. $2i$; 3. 0; 4. $\frac{4}{3}$;

5. πi; 6. 0; 7. $-2(1-i)$; 8. $-2(1+i)$.

Задача 28.

1. $\pi i e$; 2. $2\pi \operatorname{sh} 1$; 3. $\frac{\pi i}{2}$; 4. $-2\pi i$;

5. $4\pi i e^2$; 6. 0; 7. $-\frac{\pi i}{4}$; 8. $-\frac{\pi i}{2}$;

9. $2\pi i$; 10. $\pi i(2-e)$; 11. $-\pi i e$; 12. $\frac{3\pi}{4}$.

Задача 29.

1. ∞; 2. 1; 3. ∞; 4. 2; 5. 0;

6. $\dfrac{1}{4}$; 7. 1; 8. 1; 9. 1; 10. $\dfrac{1}{4}$.

Задача 30.

1. расходится во всех точках;

2. сходится во всех точках, кроме $z=1$;

3. сходится во всех точках, кроме $z=-1$;

4. сходится во всех точках, кроме точек $z=-1$ и $z=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Задача 31.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$;

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{2n}$;

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{4n+1}$;

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(z^{3n}-z^{3n+1}\right)$;

5. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}-2^{-n-1}\right)z^n$;

6. $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n-1}+3^{-n-1}\right)z^n$;

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$;

8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{z^n}{n!}$;

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(4n)!}z^{4n}$;

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$;

11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z-1)^n$;

12. $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

Задача 32.

1. $z+\dfrac{1}{3}z^2+\dfrac{2}{15}z^5+\ldots$;

2. $1+\dfrac{1}{3}z^2-\dfrac{4}{45}z^4+\ldots$;

3. $z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{2z^3}{3!}+\ldots$.

Задача 33.

1. $z^3+z^2+\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{6}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)!z^n}$;

2. $-\pi z-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!z^{2n-1}}$;

3. $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3}z^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3\cdot 2^{n+1}}z^n$;

4. $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{5}z^{2n}+\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{2(-1)^{n-1}}{5}z^{2n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{5\cdot 2^n}z^n$;

5. $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{5}z^{2n}+\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{2(-1)^{n-1}}{5}z^{2n+1}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{(-1)^n}{2^n}z^n$;

6. $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{9}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3n+5}{9\cdot 2^{n+2}}(z-1)^n$;

7. $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{9}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{27\cdot 2^{2n+3}}(z-1)^n$;

8. $$(z-2)^3+6(z-2)^2+\frac{23}{2}(z-2)+5+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{48n^2+72n+23}{(2n+2)!}(z-2)^{-2n+1}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+2)!}\left(16n^2+24n+5\right)(z-2)^{2n};$$

9. $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{(n+3)!}$;

10. $-\dfrac{1}{z-1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$.

Задача 34.

1. $z=0$ — полюс 2-го порядка; $z=\pm 1$, $z=\pm i$ — простые полюсы;

2. $z=2$ — полюс 3-го порядка; $z=\infty$ — простой полюс;

3. $z = \pm i$ — простые полюсы; $z = \infty$ — существенно особая точка;

4. $z = \infty$ — существенно особая точка;

5. $z = 0$ — существенно особая точка; $z = \infty$ — простой полюс;

6. $z = 0$ — полюс 2-го порядка; $z = \infty$ — существенно особая точка;

7. $z = 0$ — полюс 3-го порядка; $z = \pi k$, $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ — простые полюсы;

8. $z = 0$ — устранимая особая точка; $z = \pi k$, $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ — простые полюсы;

9. $z = 0$ — существенно особая точка; $z = \infty$ — устранимая особая точка;

10. $z = 0$ — существенно особая точка.

Задача 35.

1. $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 1$, $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -1$;

2. $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \frac{1}{4}$;

3. $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 0$;
4. $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{3}{2}$;

5. $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{n!}$;
6. $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \pi$;

7. $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \pi^2$;
8. $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{143}{24}$;

9. $\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = -\frac{i}{4e}$; $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$;

10. $\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = -\frac{1}{4e}$; $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2e}$;

11. $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{4}{3}$;
12. $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\frac{4}{5}$.

Задача 36.

1. $-\pi i$; 2. $-\frac{\pi i}{2}$; 3. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$; 4. 0; 5. 0; 6. $4\pi i(\cos 1 - \sin 1)$; 7. $\frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$; 8. $\frac{\pi\left(a^6+1\right)}{1-a^2}$ (при $|a| < 1$) и $\frac{\pi\left(a^6+1\right)}{a^6(a^2-1)}$ (при $|a| > 1$); 9. $\frac{5\pi}{12}$; 10. $\pi\sqrt{2}$; 11. 0; 12. $\frac{\pi}{2}$; 13. $-\frac{2\pi}{e}\sin 1$; 14. 0; 15. $\pi(1-i)e^{-3i-6}$; 16. $\pi e^{-2}\cos 2$; 17. $\frac{\pi}{3}e^{-2}(4-e)$; 18. $\pi e^{-2}(\cos 4 - \sin 4)$; 19. $\frac{\pi}{2}e^{-3}$; 20. $\frac{7\pi}{108}e^{-8}$.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, если $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$.

2. Решить уравнение:
$$z^4 + 16i = 0.$$

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:
$$|z - 1| \leq |z + 1|.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по её действительной части
$$u(x, y) = x^2 - y^2 - e^x \sin y,$$
если $f(0) = i$.

5. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:
   a. $D = \{z : \ 1 < |z| < 2\}$, $w = \frac{z+1}{z-1}$;
   b. $D = \left\{z : \ |z| < \frac{1}{3}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
   c. $D = \{z : \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \ \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = \cos z$.

6. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:
$$f(z) = \frac{z - 1}{(z - 3)(z - 4)}, \ z_0 = 0.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$ в кольце D:
$$f(z) = \frac{1}{(z + 1)(z - 2)}, \ z_0 = 0, \ D = \{z, z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}.$$

8. Вычислить: $\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} z$.

9. Вычислить интеграл:
$$\int\limits_{\partial D} \frac{z^3 dz}{z^4 - 1}, \ D = \{z, z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2\}.$$

Вариант 2

1. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, если $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

2. Решить уравнение:
$$z^4 - 81i = 0.$$

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:
$$|z+1| \leq |2-z|.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по её действительной части
$$u(x,y) = x^2 - y^2 - \frac{y}{x^2+y^2},$$
если $f(i) = -2$.

5. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

   a. $D = \left\{z:\ \frac{1}{2} \leq |z| < 1\right\}$, $w = \frac{z}{z+1}$;

   b. $D = \{z:\ |z| > 3\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;

   c. $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $w = \cos \pi z$.

6. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:
$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)},\ z_0 = 0.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$ в кольце D:
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)},\ z_0 = 0,\ D = \{z, z \in \mathbb{C}:\ 1 < |z| < 2\}.$$

8. Вычислить: $\operatorname*{res}_{z=2} \cos\frac{1}{z-2}$.

9. Вычислить интеграл:
$$\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}} dz,\ D = \left\{z, z \in \overline{\mathbb{C}}:\ |z| > 4\right\}.$$

Вариант 3

1. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, если $z = (1+i)^3$.

2. Решить уравнение:
$$z^4 - 16i = 0.$$

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:
$$|z-1| \leq |z-i|.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по её действительной части
$$u(x,y) = 4 + x^2 - y^2,$$
если $f(0) = 4$.

5. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

   a. $D = \{z:\ 1 < |z| < 3\}$, $w = \frac{z-3}{z+3}$;

   b. $D = \{z:\ |z| < 2\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;

   c. $D = \left\{z:\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $w = \cos z$.

6. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:
$$f(z) = \frac{2z-5}{z^2-5z+6},\ z_0 = 0.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$ в кольце D:
$$f(z) = \frac{z+5}{(z+2)(z-1)},\ z_0 = -1,\ D = \{z, z \in \mathbb{C}:\ 1 < |z+1| < 2\}.$$

8. Вычислить: $\operatorname*{res}\limits_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

9. Вычислить интеграл:
$$\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{e^{z^2}-1} dz,\ D = \{z, z \in \mathbb{C}:\ |z| < 4\}.$$

Вариант № 4.

1. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, если $z = (1-i)^3$.

2. Решить уравнение:
$$z^4 + 81i = 0.$$

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:
$$|z+i| \leq |z+1|.$$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по её мнимой части
$$v(x,y) = x + y - 6,$$
если $f(0) = -6i$.

5. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:
   a. $D = \{z : 1 < |z| < 2\}$, $w = \frac{z}{z-1}$;
   b. $D = \left\{z :\ |z| > \frac{1}{2}\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;
   c. $D = \{z :\ 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$, $w = \cos z$.

6. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:
$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2 - 3z + 2},\ z_0 = 0.$$

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$ в кольце D:
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)},\ z_0 = 0,\ D = \{z, z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < 3\}.$$

8. Вычислить: $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \frac{1}{z^3 - z^5}$.

9. Вычислить интеграл:
$$\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz,\ D = \left\{z, z \in \mathbb{C} :\ (\operatorname{Re} z)^{2/3} + (\operatorname{Im} z)^{2/3} < 2^{2/3}\right\}.$$

Список литературы

1. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. 5-е изд. М. : Мир, 2006.

2. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. 12-е изд. М. : Наука, 1977.

3. *Свешников А. Г.*, *Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. 6-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010.

4. *Сидоров Ю. В.*, *Федорюк М. Ф.*, *Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. 3-е изд. М. : Наука, 1989.

5. *Волковыский Л. И.*, *Лунц Г. Л.*, *Араманович И. Г.* Сборник задач по функций комплексного переменного. 4-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.

6. *Евграфов М. А.*, *Бежанов К. А.*, *Сидоров Ю. В.*, *Федорюк М. Ф.*, *Шабунин М. И.* Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. М. А. Евграфова. 2-е изд. М. : Наука, 1972.