Гудошникова Е.В.

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лекции по курсу «Математический анализ».

Часть 1.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

§1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

п.1.1. Целые числа и метод математической индукции

Обозначения.

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел: $\{1; 2; 3; ...\}$;

$\mathbb{N}_o$ – множество целых неотрицательных чисел: $\{0; 1; 2; 3; ...\}$;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел: $\{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; ...\}$;

Метод математической индукции.

Пусть надо доказать некоторое утверждение (равенство или неравенство) для любого натурального числа. В этом случае можно применить метод математической индукции, который заключается в следующем:

1. проверяют, что доказываемое утверждение верно для $n = 1$;

2. предполагая, что утверждение верно для некоторого n_o, доказывают его для следующего значения $n_o + 1$.

• Пример 1. Для всех $n \in \mathbb{N}$ доказать неравенство:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \text{ для всех } x \geq -1.$$

Док-во. Применим метод математической индукции.

Для $n = 1$ доказываемое неравенство примет вид: $1 = x \geq 1 + x$, что, очевидно, верно.

Пусть неравенство выполнено для некоторого n. Тогда для $n + 1$ имеем:

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq$

вторая скобка неотрицательна, так как $x \geq -1$, к первой скобке применим неравенство, которое по предположению выполняется

$$\geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq$$
$$\geq 1 + nx + x = 1 + (n + 1)x.$$

Получили: $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$, то есть доказываемое неравенство выполнено и для $n + 1$. □

• Пример 2. Для всех $n \in \mathbb{N}$ доказать равенство:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Док-во. Применим метод математической индукции.

Для $n = 1$ доказываемое равенство примет вид: $1 = \frac{1}{2}1(1+1)$, что, очевидно, верно.

Пусть равенство выполнено для некоторого n. Тогда для $n+1$ имеем:

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = (n+1)(\tfrac{1}{2}n + 1) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) = \tfrac{1}{2}(n+1)((n+1)+1),$$

то есть доказываемое равенство выполнено и для $n+1$. □

• Пример 3. Для всех $n \in \mathbb{N}$ доказать равенство:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2.$$

Док-во. Применим метод математической индукции.

Для $n = 1$ доказываемое равенство примет вид: $1 = 1^2$, что, очевидно, верно.

Пусть равенство выполнено для некоторого n. Тогда для $n+1$ имеем:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2,$$

то есть доказываемое равенство выполнено и для $n+1$. □

• Пример 4. Для всех $n \in \mathbb{N}$ доказать равенство:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1).$$

Док-во. Применим метод математической индукции.

Для $n = 1$ доказываемое равенство примет вид: $1 = 1^2$, что, очевидно, верно.

Пусть равенство выполнено для некоторого n. Тогда для $n+1$ имеем:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) =$$
$$= (n+1)(n+2) = (n+1)((n+1)+1),$$

то есть доказываемое равенство выполнено и для $n+1$. □

• Пример 5. Для всех $n \in \mathbb{N}$ доказать равенство:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Док-во. Применим метод математической индукции.

Для $n = 1$ доказываемое равенство примет вид: $1 = 1^2$, что, очевидно, верно.

Пусть равенство выполнено для некоторого n. Тогда для $n+1$ левая часть доказываемого равенства примет вид:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = ...$$
$$... = \tfrac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6),$$

Запишем правую часть доказываемого равенства для $n+1$:

$$\tfrac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) = ... = \tfrac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6),$$

Сравнивая получившиеся выражения, заключаем, что доказываемое равенство выполнено и для $n+1$. □

Факториал и число сочетаний (биномиальные коэффициенты). Напомним известные из школы факты и обозначения:

для $n \in \mathbb{N}$ обозначим $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$; (читается n-факториал)

по определению $0! = 1$;

основное свойство факториала: $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$;

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент или число сочетаний из n по k (то есть сколькими способами можно выбрать k объектов из имеющихся n объектов);

отметим, что $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$ и $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!}$

Бином Ньютона[1]**.** Для всех $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции.

Для $n=1$ доказываемое равенство примет вид:

$$a+b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b+a,$$

что, очевидно, верно.

Пусть равенство выполнено для некоторого n. Тогда для $n+1$ имеем:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \boxed{=}$$

обозначим в первой сумме $k+1 = k^*$ (или $k = k^* - 1$)

$$\boxed{=} \sum_{k^*=1}^{n+1} \binom{n}{k^*-1} a^{k^*} b^{n-(k^*-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0}_{\substack{\text{первая сумма} \\ \text{(отдельно выписано слагаемое для } k=n+1)}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}}_{\substack{\text{вторая сумма} \\ \text{(отдельно выписано слагаемое для } k=0)}} =$$

[1] Исаак Ньютон, 4 января 1643 года - 31 марта 1727 года (по григорианскому календарю) - английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда "Математические начала натуральной философии", в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета, заложил основы современной физической оптики, создал многие другие математические и физические теории. (Материал из Википедии)

$$= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \boxed{=}$$

во-первых, $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$;

во-вторых, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \dfrac{n!}{k!(n-k)!} =$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{n+1}{(n-k+1)k} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

в-третьих, $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$;

$$\boxed{=} \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$$

Таким образом получили:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},$$

то есть доказываемое равенство выполнено и для $n+1$. $\square$

п.1.2. Рациональные числа

Понятие рационального числа.

Рациональными называются числа, которые могут быть записаны в виде дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Например: $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{5}$, $\frac{3}{1}$.

Понятие иррационального числа.

Числа не являющиеся рациональными, называются иррациональными.

Например, $\sqrt{2}$ – не рациональное число.

Действительно, предположим, что мы смогли записать $\sqrt{2}$ в виде дроби: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, причем эта дробь уже несократима. Тогда

$$\sqrt{2}\, q = p \implies 2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ четное} \implies p \text{ четное} \implies p = 2k$$

но тогда

$$\sqrt{2}\, q = 2k \implies 2q^2 = 4k^2 \implies q^2 = 2k^2 \implies q^2 \text{ четное} \implies q \text{ четное}$$

Получили, что и p, и q четные, а это противоречит тому, что дробь $\frac{p}{q}$ несократима, значит $\sqrt{2}$ – не рациональное число.

Представление рационального числа десятичной дробью.

Рассмотрим рациональное число $\frac{p}{q}$. Выполним деление "уголком". Возможны два варианта:

1. В какой-то момент получили остаток ноль. Значит, результат деления – конечная десятичная дробь.

2. При делении все время получается ненулевой остаток. Но так как делим на q, остатками могут быть только числа меньше q: $1, 2, ..., q-1$. Этих чисел конечное число, значит в какой-то момент получим остаток, который уже был раньше, а значит и цифры частного начнут повторяться, то есть получится бесконечная периодическая дробь.

Следовательно, любое рациональное число может быть представлено конечной или бесконечной периодической десятичной дробью.

Перевод десятичной дроби в обыкновенную.

Конечная десятичная дробь элементарно переводится в обыкновенную, например: $2,34 = 2\frac{34}{100} = \frac{234}{100}$.

Рассмотрим бесконечную периодическую дробь:

$$x = 0, a_1 a_2 ... a_n (b_1 b_2 ... b_m)$$

тогда $\quad 10^n x = a_1 a_2 ... a_n, (b_1 b_2 ... b_m)$

$$10^n 10^m x = a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m, (b_1 b_2 ... b_m)$$

$$10^n 10^m x - 10^n x = a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m - a_1 a_2 ... a_n$$

$$x = \frac{a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m - a_1 a_2 ... a_n}{10^n (10^m - 1)}$$

или

$$x = \frac{\text{(цифры до периода и цифры периода)} - \text{(цифры до периода)}}{\underbrace{99..............................9}_{\text{сколько цифр в периоде}}\,\underbrace{00...........................0}_{\text{сколько цифр до периода}}}$$

Например: $0,123(45) = \dfrac{12345 - 123}{99000} = \dfrac{12222}{99000}$;

$$6,123(45) = 6 + 0,123(45) = ...$$

Замечание. Нет числа с периодом (9).

Действительно, рассмотрим $x = 0,(9)$. Тогда $10x = 9,(9)$ и, вычитая эти выражения, получим $9x = 9$, то есть $0,(9) = 1$.

п.1.3. Действительные числа

Понятие действительного числа.

Действительные числа – это числа, которые могут быть представлены конечной или бесконечной десятичной дробью. Обозначается множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

$$\{\text{рациональные числа}\} \cup \{\text{иррациональные числа}\} = \mathbb{R}$$

Числовая прямая.

Рассмотрим числовую ось. Очевидно, что любое действительное число может быть представлено точкой на этой прямой.

Покажем обратное. Пусть M – некоторая точка на числовой прямой, OE – единичный отрезок. Возможны два случая:

1) OE укладывается в OM целое число раз a_0 без остатка;

2) OE укладывается в OM целое число раз a_0 с некоторым остатком NM, которые меньше OE.

В первом случае точке M соответствует число a_0 со знаком "+", если M лежит правее нуля и со знаком "−", если M левее нуля.

Во втором случае выясним, сколько раз в отрезке NM укладывается $\frac{1}{10}OE$. Снова возможны два случая:

1) или $\frac{1}{10}OE$ укладывается в NM целое число раз a_1 без остатка (причем $a_1 \leq 9$), и тогда точке M соответствует число a_0, a_1 со знаком "$+$", если M лежит правее нуля и со знаком "$-$", если M левее нуля;

2) или $\frac{1}{10}OE$ укладывается в NM целое число раз a_1 ($a_1 \leq 9$) с некоторым остатком N_1M, которые меньше $\frac{1}{10}OE$, тогда рассуждения будут продолжены с $\frac{1}{100}OE$.

Продолжая этот процесс получим или конечную, или бесконечную десятичную дробь.

Следовательно, между точками прямой и множеством $\mathbb{R}$ можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Расширенная числовая прямая.

Введем в рассмотрение числа:

$+\infty$ – число, которое больше любого действительного числа;

$-\infty$ – число, которое меньше любого действительного числа.

Определим арифметические действия с этими числами:

$$\infty + \infty = \infty \qquad c \cdot \infty = \infty \quad (c \neq 0) \qquad c^{\infty} = \begin{cases} \infty, & \text{если } c > 1 \\ 0, & \text{если } |c| < 1 \end{cases}$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \qquad c : \infty = 0$$

Не определены операции: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty : \infty$, ∞^0, 1^{∞}.

п.1.4. Счетные и несчетные множества

Понятие мощности множества.

Рассмотрим конечное множество A. Его мощностью будем называть количество его элементов. Два конечных множества будем называть равномощными или эквивалентными, если они имеют одинаковую мощность, то есть содержат одинаковое количество элементов. В этом случае каждому элементу первого множества можно поставить в соответствие один элемент второго множества и наоборот, то есть между элементами множеств можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Аналогично, два бесконечных множества будем называть эквивалентными, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Самым простым бесконечным множеством является $\mathbb{N}$.

Множества, эквивалентные множеству $\mathbb{N}$ называются счетными. Остальные бесконечные множества называются несчетными.

Множество рациональных чисел счетно.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем все рациональные числа (возможно с повторениями):

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\
\dots & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \dots \\
\dots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Укажем один из способов пересчитать эти числа (то есть установить взаимно-однозначное соответствие с натуральными числами). Начиная с нуля, будем двигаться в направлении стрелки, считая впервые встречающиеся числа и пропуская те, которые встретились повторно:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & -3 & -2 & \leftarrow -1 & 0 \rightarrow & 1 & 2 \rightarrow & 3 & \dots \\
\dots & \dots & \downarrow & \uparrow & & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \dots \\
\dots & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \dots \\
\dots & \dots & \downarrow & & & & \uparrow & \downarrow & \dots \\
\dots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \rightarrow -\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} \rightarrow & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \downarrow & \text{и т.д.}
\end{array}$$

Таким образом, установлено взаимно-однозначное соответствие между рациональными и натуральными числами, то есть множество рациональных чисел счетно. □

Множество действительных чисел несчетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим числа интервала $(0;1)$. Предположим, что мы смогли пронумеровать все числа этого интервала. Выпишем их в порядке нумерации:

$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...$

$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...$

$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...$

...

Запишем число $y = 0, b_1 b_2 b_3...$, где

b_1 – любая цифра, кроме a_{11}, 0 и 9;

b_2 – любая цифра, кроме a_{22}, 0 и 9;

b_3 – любая цифра, кроме a_{33}, 0 и 9;

и т.д.

Число $y \in (0;1)$, при этом y отличается от x_1 первой цифрой после запятой, от x_2 второй, от x_3 третьей и т.д. Значит этого числа нет среди пересчитанных чисел, значит числа интервала $(0;1) \in \mathbb{R}$ нельзя пересчитать, а значит и все множество $\mathbb{R}$ несчетно. $\square$

п.1.5. Ограниченные множества

Понятие ограниченности.

Множество называется ограниченным сверху, если найдется такое конечное число B, что для всех чисел x из этого множества выполнено неравенство $x \leq B$.

Множество называется ограниченным снизу, если найдется такое конечное число A, что для всех x из этого множества $x \geq A$.

Множество называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Замечание. Если множество X не ограничено сверху, то число $+\infty \in X$. И наоборот, если $+\infty \in X$, то множество X не ограничено сверху. Аналогично для $-\infty$ и неограниченности снизу.

Точные грани множества.

Точной верхней гранью множества X называется наименьшее из чисел, ограничивающее X сверху. Обозначается $\sup X$ ("супремум").

Характеристическое свойство верхней грани:

$$a = \sup X \iff \begin{cases} \forall x \in X, \quad x \leq a \ \ (a \text{ ограничевает } X \text{ сверху}) \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in X: \ x > a - \varepsilon \ (a \text{ нельзя уменьшить}) \end{cases}$$

Точной нижней гранью множества X называется наибольшее из чисел, ограничивающее X снизу. Обозначается $\inf X$ ("инфинум").

Характеристическое свойство нижней грани:

$$a = \inf X \iff \begin{cases} \forall x \in X, \quad x \geq a \ \ (a \text{ ограничевает } X \text{ снизу}) \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in X: \ x < a + \varepsilon \ (a \text{ нельзя увеличить}) \end{cases}$$

Теорема о существовании точных граней.

Непустое, ограниченное сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что среди элементов множества X есть положительные числа.

Рассмотрим целые части положительных элементов множества X. Выберем наибольшую. Обозначим ее x_0.

Отберем те элементы множества X, у которых целая часть равна x_0. У отобранных элементов рассмотрим первые цифры после запятой, выберем наибольшую, обозначим ее x_1.

Оставим из выбранных элементов только те, у которых первая цифра после запятой равна x_1. И так далее.

Число $a = x_0, x_1 x_2 ...$ по построению будет больше или равно всех чисел множества X (то есть a ограничивает множество X сверху).

С другой стороны любое число a^*, которое меньше a должно иметь хоть одну цифру, меньше соответствующей цифры a, а среди элементов множества есть число, у которого все цифры как у a, значит оно больше a^* (то есть a нельзя уменьшить).

Следовательно, a точная верхняя грань.

Если все элементы множества X отрицательны, то доказательство проводится точно так же, только вместо наибольшей цифры надо брать наименьшую.

Аналогично для нижней грани ограниченного снизу множества. $\square$

§2. ФУНКЦИИ

п.2.1. Основные понятия

Понятие функции.

Функцией называется правило, по которому каждому числу x из некоторого множества X ставится в соответствие единственное число y из множества Y.

X называется областью определения функции, Y – множеством значений.

Основные способы задания функции.

• *Графически.* Функция задана своим графиком, то есть набором точек координатной плоскости.

• *Явно.* Функция задана уравнением вида $y = f(x)$.

Например $y = x^2 + x - 3$ (графиком является парабола).

• *Параметрически.* Функция задана системой: $\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \\ t \in [t_1; t_2] \end{cases}$

Например $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ (графиком является часть единичной окружности, расположенная в первой четверти).

• *Неявно.* Функция задана уравнением вида $F(x; y) = 0$.

Например $x^2 + y^2 = 1$ $y > 0$ (графиком является часть единичной окружности, расположенная в верхней полуплоскости).

Ограниченность функции.

Функция называется ограниченной, если ограничено множество ее значений. (Аналогично ограничена снизу, сверху).

Например:

$y = x^3$ – неограниченная функция $\big(y \in (-\infty; +\infty)\big)$;

$y = x^2$ – ограничена снизу, неограничена сверху $\big(y \in [0; +\infty)\big)$;

$y = -x^2$ – ограничена сверху, неограничена снизу $\big(y \in (-\infty; 0]\big)$;

$y = \sin x$ – ограниченная функция $\big(y \in [-1; 1]\big)$;.

Монотонность.

Функция f называется возрастающей на множестве X, если для всех $x_1 < x_2$ из этого множества $f(x_1) < f(x_2)$.

Аналогично: невозрастающей, если $f(x_1) \geq f(x_2)$;
убывающей, если $f(x_1) > f(x_2)$;
неубывающей, если $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Все эти функции называются монотонными. (Возрастающие и убывающие строго монотонными).

Экстремумы.

Точка x_o называется точкой локального максимума функции f, если найдется число $\delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in (x_o - \delta; x_o + \delta)$ будет $f(x) < f(x_o)$.

Точка x_o называется точкой локального минимума функции f, если найдется число $\delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in (x_o - \delta; x_o + \delta)$ будет $f(x) > f(x_o)$.

Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Обратные функции.

Функция g является обратной к функции f на множестве J, если $\forall x \in J$ выполняются тождества $f(g(x)) = x$ и $g(f(x)) = x$.

Чтобы у функции f на на множестве J существовала обратная функция, надо, чтобы f была строго монотонна на J (чтобы каждому y соответствовал только один x).

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Например:
$f = x^2$ и $g = \sqrt{x}$ взаимно обратные функции на $[0; \infty)$;
$f = \sin x$ и $g = \arcsin x$ взаимно обратные функции на $[-\pi/2; \pi/2]$;
$f = x^3$ и $g = \sqrt[3]{x}$ взаимно обратные функции на $\mathbb{R}$.

п.2.2. Выпуклые функции

Понятие выпуклости.

Функция f называется выпуклой вверх на множестве X, если для всех x_1 и x_2 из этого множества график функции между точками $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$ лежит выше отрезка AB.

Функция f называется выпуклой вниз на множестве X, если для всех x_1 и x_2 из этого множества график функции между точками $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$ лежит ниже отрезка AB.

Первая лемма о выпуклости.

Функция $f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[x_1; x_2]$, тогда и только тогда, когда $\forall\ \alpha \in [0; 1]$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \tag{1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Тогда

$$\alpha = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad 1 - \alpha = 1 - \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$$

и неравенство (1) примет вид

$$f(x) < \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2) \tag{2}$$

$y = f(x)$ – это сама функция;

$y = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2)$ – это уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$ (так как это уравнение первого порядка, значит задает прямую, и подстановкой легко проверить, что координаты точек A и B удовлетворяют этому уравнению).

Но тогда неравенство (2) означает, что график функции лежит ниже отрезка AB, то есть функция выпукла вниз. $\square$

Аналогично: функция $f(x)$ выпукла вверх на отрезке $[x_1; x_2]$, тогда и только тогда, когда $\forall\ \alpha \in [0; 1]$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Вторая лемма о выпуклости.

Функция $f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[x_1; x_2]$, тогда и только тогда, когда $\forall\ x \in [x_1; x_2]$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [x_1; x_2]$. По предыдущей лемме для выпуклой вниз функции имеет место неравенство (2):

$$f(x) < \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2)$$

Умножим это неравенство на знаменатель (так как $x_1 < x_2$ знак неравенства меняется), от обеих частей отнимем $xf(x)$ и попарно сгруппируем слагаемые:

$$\underline{x_1 f(x)} - \underline{\underline{x_2 f(x)}} - \underline{xf(x)} > xf(x_1) - x_2 f(x_1) + \underline{\underline{\underline{x_1 f(x_2)}}} - \underline{\underline{\underline{xf(x_2)}}} - \underline{\underline{xf(x)}}$$

$$\Longrightarrow\ \underline{(x_1 - x)f(x)} - (x_2 - x)f(x) > (x - x_2)f(x_1) + \underline{(x_1 - x)f(x_2)}$$

$$\Longrightarrow\ (x_1 - x)\Big(f(x) - f(x_2)\Big) > (x_2 - x)\Big(f(x) - f(x_1)\Big)$$

$$\Longrightarrow\ (x - x_1)\Big(f(x_2) - f(x)\Big) > (x_2 - x)\Big(f(x) - f(x_1)\Big)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} > \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \ \Longrightarrow\ (3). \qquad \square$$

Аналогично: функция $f(x)$ выпукла вверх на отрезке $[x_1; x_2]$, тогда и только тогда, когда $\forall\ x \in [x_1; x_2]$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Неравенство Иенсена[2]**.**

Если функция $f(x)$ выпукла вниз на $[a;b]$, то $\forall\ x_1, x_2, ..., x_n \subset [a;b]$ и $\forall\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \geq 0,\ \ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$, выполнено неравенство:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции.

При $n = 1$ доказываемое утверждение примет вид:

$$\alpha_1 = 1, \quad f(\alpha_1 x_1) \leq \alpha_1 f(x_1),$$

что, очевидно, верно.

При $n = 2$ доказываемое утверждение примет вид:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

а это, по сути, неравенство для выпуклой вниз функции из первой леммы о выпуклости.

Пусть неравенство выполнено для некоторого n. Рассмотрим

$\alpha_1 x_1 + \underbrace{\alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}}_{= \beta y}$, где $\alpha_1 + \underbrace{\alpha_2 + ... + \alpha_n + \alpha_{n+1}}_{= \beta} = 1$,

то есть $\beta = 1 - \alpha_1,\ y = \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + ... + \frac{\alpha_{n+1}}{\beta} x_{n+1}$, причем $\frac{\alpha_2}{\beta} + ... + \frac{\alpha_{n+1}}{\beta} = 1$.

Тогда по предположению индукции для n слагаемых

$$f(y) = f(\tfrac{\alpha_2}{\beta} x_2 + ... + \tfrac{\alpha_{n+1}}{\beta} x_{n+1}) \leq \tfrac{\alpha_2}{\beta} f(x_2) + ... + \tfrac{\alpha_{n+1}}{\beta} f(x_{n+1}) \qquad (4)$$

для двух слагаемых

$$f(\alpha_1 x_1 + \beta y) \leq \alpha_1 f(x_1) + \beta f(y) \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 &+ \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + \beta \left(\tfrac{\alpha_2}{\beta} f(x_2) + ... + \tfrac{\alpha_{n+1}}{\beta} f(x_{n+1}) \right) = \\ &\qquad = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

и доказываемое неравенство так же выполнено. $\square$

[2] Давид Иванович Йенсен, 7 (19) ноября 1816 -10 (23) января 1902 - датский скульптор, с 1841 года живший и работавший в Санкт-Петербурге, работал в области монументально-декоративной скульптуры, преимущественно по заказам императорского двора. (Материал из Википедии)

Аналогично: если функция $f(x)$ выпукла вверх то

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$$

Следствие из неравенства Иенсена. $\forall x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

(среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического).
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $f(x) = \ln x$ – выпуклая вверх функция. В силу неравенства Иенсена

$$\ln(\tfrac{1}{n}x_1 + \tfrac{1}{n}x_2 + ... + \tfrac{1}{n}x_3) \geq \tfrac{1}{n}\ln x_1 + \tfrac{1}{n}\ln x_2 + ... + \tfrac{1}{n}\ln x_n =$$
$$= \tfrac{1}{n}\ln(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n) = \ln(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)^{1/n}$$

$$\Longrightarrow \ln \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \ln(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)^{1/n}$$

откуда, так как $y = \ln x$ возрастающая функция, следует доказываемое неравенство. $\square$

п.2.3. Элементарные функции

Понятие элементарной функции.

Элементарные функции – это функции, которые можно получить с помощью конечного числа алгебраических действий и композиций из следующих функций:

степенная функция;

показательная и логарифмическая функции;

тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Степенная функция $y = x^a$.

В зависимости от a может иметь областью определения

$(-\infty; +\infty)$, например, $y = x^2$;

$[0; +\infty)$, например, $y = x^{1/2}$;

$(-\infty; 0) \cap (0; +\infty)$, например, $y = x^{-1}$;

$(0; +\infty)$, например, $y = x^{-1/2}$.

Основное свойство степенной функции $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$. (В п.2.4. будет доказано, что это единственная функция, обладающая таким свойством.)

Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0)$**.**

Область определения $(-\infty; +\infty)$.

Основное свойство показательной функции $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. (В п.2.4. будет доказано, что это единственная функция, обладающая таким свойством.)

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ – показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить x.

Логарифмическая функция обратная к показательной.

Область определения $(0; +\infty)$.

Основное свойство логарифмической функции $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$. (В п.2.4. будет доказано, что это единственная функция, обладающая таким свойством.)

Основные тригонометрические функции.

$y = \sin x$ (ордината точки пересечения единичной окружности и луча, выходящего их начала координат под углом x к положительной части оси OX. Область определения $(-\infty; +\infty)$;

$y = \cos x$ (абсцисса точки пересечения единичной окружности и луча, выходящего их начала координат под углом x к положительной части оси OX. Область определения $(-\infty; +\infty)$;

Основное свойство: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Производные тригонометрические функции.

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z});$$

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq \pi + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z});$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (x \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z});$$

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \quad (x \neq \pi + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z});$$

Обратные тригонометрические функции.

$y = \arcsin x$ – функция, обратная к функции $y = \sin x$;

$y = \arccos x$ – функция, обратная к функции $y = \cos x$;

$y = \operatorname{arctg} x$ – функция, обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$;

$y = \operatorname{arcctg} x$ – функция, обратная к функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Кроме перечисленных, в математике используют обозначения для так называемых гиперболических функций (см. ниже), которые являются комбинациями показательной.

Гиперболические функции.

$y = \mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус;

$y = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус.

По аналогии с тригонометрическими функциями, определяются гиперболический тангенс ($\mathrm{th}\, x$) и гиперболический котангенс ($\mathrm{cth}\, x$)

Основное свойство: $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Замечание. Гиперболические функции имеют много свойств, похожих на свойства тригонометрических функций, такие как функции двойного угла, суммы и разности аргументов и другие (отсюда и названия "гиперболический синус и косинус". Эта схожесть становится понятной при изучении комплексного анализа, в котором функции $\sin x$ и $\cos x$ определяются равенствами, похожими на определение $\mathrm{sh}x$ и $\mathrm{ch}x$: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ $(i^2 = -1)$.

п.2.4. Функциональные уравнения

Замечание. В этом пункте будем искать функции, удовлетворяющие некоторому уравнению. Договоримся, что нас не интересуют функции, которые задаются по разному для рациональных и иррациональных x, а также функции, тождественно равные какому-либо числу.

Уравнение $f(x+y) = f(x)+f(y)$. (1)

1) $f(x + x) = f(x) + f(x)$, то есть $f(2x) = 2f(x)$.
Аналогично $f(3x) = f(x + 2x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x)$, и так далее.

Получаем, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = nf(x)$.

2) $f(x) = f(n \cdot \frac{1}{n} x) = (\text{по п.1}) = nf(\frac{1}{n} x) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ f(\frac{1}{n} x) = \frac{1}{n} f(x)$.

3) $f(\frac{m}{n} x) = f(m \cdot \frac{1}{n} \cdot x) = (\text{по п.1 и 2}) = m \cdot \frac{1}{n} \cdot f(x) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}\ f(\frac{m}{n} x) = \frac{m}{n} f(x)$.

4) $f(0) = f(2\cdot 0) = 2f(0) \implies f(0) = 0 \implies f(0\cdot x) = 0\cdot f(x)$

5) $f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) = (\text{по п.4}) = 0 \implies f(-x) = -f(x)$

Из 1-5 получаем, что для любого рационального числа r (а, значит, и для любого действительного числа, см. замечание) $f(rx) = rf(x)$. В частности $f(x\cdot 1) = xf(1) \implies f(x) = cx$ $(c = f(1))$ – единственная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

Уравнение $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$**.** (2)

1) $f(x) = f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})\cdot f(\frac{x}{2}) = \big(f(\frac{x}{2})\big)^2 \geq 0.$

2) Возьмем x_o, для которого $f(x_o) \neq 0$.

Тогда $f(x_o) = f(x+(x_o-x)) = f(x)\cdot f(x-x_o) \neq 0 \implies f(x) \neq 0 \;\; \forall x$.

Из 1-2 получаем, что $f(x) > 0$.

Обозначим $\varphi(x) = \ln f(x)$. Тогда

$\varphi(x+y) = \ln f(x+y) = \ln\big(f(x)\cdot f(y)\big) = \ln f(x) + \ln f(y) = \varphi(x)+\varphi(y)$, следовательно $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1), а значит $\varphi(x) = cx$

$\implies \ln f(x) = cx \implies f(x) = e^{cx} = a^x$ $(a = e^c)$.

Так как $c = \varphi(1)$, $a = e^{\varphi(1)} = e^{\ln f(1)} = f(1)$.

Таким образом, $f(x) = a^x$ $(a = f(1))$ – единственная функция, удовлетворяющая уравнению (2).

Уравнение $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$**.** (3)

1) Если $x = 0$, то $f(0\cdot y) = f(0) + f(y) \implies f(y) = 0 \;\; \forall y$. А так как нас не интересуют функции, тождественно равные нулю, получаем, что $0 \notin$ области определения функции f.

2) Пусть $x > 0$. Обозначим $\alpha = \ln x$, $\varphi(\alpha) = f(e^\alpha) = f(x)$. Тогда

$$\varphi(\alpha+\beta) = f(e^{\alpha+\beta}) = f(e^\alpha\cdot e^\beta) = f(e^\alpha) + f(e^\beta) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta),$$

следовательно $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1), а значит $\varphi(\alpha) = c\alpha$, где $c = \varphi(1) = f(e)$, а $f(x) = c\ln x = \dfrac{\ln x}{1/c} = \dfrac{\ln x}{\ln e^{1/c}} = \log_{e^{1/c}} x$.

Таким образом, при $x > 0$ $\;\; f(x) = \log_a x$, где $a = e^{1/f(e)}$.

3) Пусть x любое число $\neq 0$.

С одной стороны $f(x^2) = f(x\cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$,

с другой стороны $f(x^2) = f((-x)\cdot(-x)) = f(-x) + f(-x) = 2f(-x)$,

следовательно, $f(x) = f(-x)$, то есть f – четная функция.

Из 1-3 получаем, что $f(x) = \log_a|x|$ $\;(a = e^{1/f(e)},\;\; x \neq 0)$ – единственная функция, удовлетворяющая уравнению (3).

Уравнение $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. (4)

1) Пусть $x > 0$. Обозначим $\alpha = \ln x$, $\varphi(\alpha) = f(e^\alpha) = f(x)$. Тогда
$$\varphi(\alpha+\beta) = f(e^{\alpha+\beta}) = f(e^\alpha \cdot e^\beta) = f(e^\alpha) \cdot f(e^\beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta),$$
следовательно $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2), а значит $\varphi(\alpha) = b^\alpha$, $b = \varphi(1) = f(e)$, а $f(x) = b^{\ln x} = (e^{\ln b})^{\ln x} = (e^{\ln x})^{\ln b} = x^{\ln b}$.

Таким образом, $f(x) = x^a \quad (a = \ln f(e))$ единственная функция с областью определения $x > 0$, удовлетворяющая уравнению (4).

2) Если $x = 0$, то $f(0 \cdot y) = f(0) \cdot f(y) \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(y) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(0) = 0$ (так как нас не интересуют функции, тождественно равные 1).

3) С одной стороны $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) \cdot f(x) = \big(f(x)\big)^2$, с другой стороны $f(x^2) = f((-x) \cdot (-x)) = f(-x) \cdot f(-x) = \big(f(-x)\big)^2$,
$$\Longrightarrow \big(f(x)\big)^2 = \big(f(-x)\big)^2 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = f(-x), \\ f(x) = -f(-x), \end{array}\right.$$
то есть функция f может быть как четной, так и нечетной.

Из $1-3$ получаем, что $\quad f(x) = \begin{cases} f(x) = x^a \ (a = \ln f(e)), \text{ при } x \geq 0 \\ 0, \text{ при } x = 0, \\ |x|^a \text{ или } -|x|^a, \quad \text{при } x < 0. \end{cases}$

Уравнение $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$. (5)

При $x = y = 0$ получим:
$$f(0) + f(0) = 2f(0)f(0) \Longrightarrow f(0) = \big(f(0)\big)^2 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0, \\ f(0) = 1. \end{array}\right.$$

Если $f(0) = 0$, то
$$f(x+0) + f(x-0) = 2f(x)f(0) = 0 \quad \forall x \Longrightarrow f(x) \equiv 0.$$

Следовательно, $f(0) = 1$. Можно доказать, что

а) если в некоторой точке x_0 в окрестности нуля $f(x_o) < 1$, то уравнение (5) задает функцию $f(x) = \cos x$;

б) если в некоторой точке x_0 в окрестности нуля $f(x_o) > 1$, то уравнение (5) задает функцию $f(x) = \operatorname{ch} x$.

§3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

п.3.1. Основные понятия

Понятие последовательности.

Последовательностью называется бесконечное упорядоченное множество чисел: $x_1, x_2, x_3, \ldots$, которое обозначается $\{x_n\}$. Число x_n называется n-ным членом последовательности.

Каждую последовательность можно рассматривать как функцию с областью определения $\mathbb{N}$: $f(n) = x_n$. Поэтому понятия ограниченность и монотонность для последовательности те же, что и для функции. А именно:

• последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если найдется конечное число B такое, что $\forall n \;\; |x_n| \le B$;

• последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если
$$\forall n \;\; x_n < x_{n+1};$$

• последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей, если
$$\forall n \;\; x_n > x_{n+1};$$

Для задания последовательности $\{x_n\}$ необходимо указать формулу или правило вычисления ее n-го члена x_n.

Например:

(1) Пусть $x_n = n^2 - 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Получаем последовательность $0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ \ldots$

(2) Пусть $x_1 = 1$, $x_n = \dfrac{1}{2} x_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Получаем последовательность $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{32},\ \ldots$

(3) Пусть x_n – n-й знак после запятой в десятичной записи числа $\pi = 3,141592...$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Получаем последовательность $1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ 2,\ \ldots$

Понятие окрестности.

Пусть ε – некоторое положительное число. ε-окрестностью числа a называется:

для конечного a интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$;

для $a=+\infty$ интервал $(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$;

для $a=-\infty$ интервал $(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$.

ε-окрестностью числа a будем обозначать $U(a;\varepsilon)$.

Определение предела последовательности.

Число a называется пределом последовательности если для любой окрестности a найдется номер n_0 такой, что все члены последовательности с номерами больше n_0 попадают в выбранную окрестность.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a, n \to \infty$. (Читается: "x_n стремится к a при n стремящемся к бесконечности".)

Последовательности, имеющие конечный предел будем называть сходящимися.

Математическая запись определения.

для конечного a :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 :\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon;$$

для $a=+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 :\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>n_0 \Rightarrow x_n>1/\varepsilon;$$

для $a=-\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 :\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>n_0 \Rightarrow x_n<-1/\varepsilon.$$

• Пример 1. Доказать,что $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Док-во. Возьмем любое $\varepsilon>0$ и рассмотрим неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, где $x_n=1/n$, $a=0$. Имеем:

$$|x_n-a|<\varepsilon \iff |1/n-0|<\varepsilon \iff |1/n|<\varepsilon \iff$$
$$1/n<\varepsilon \iff n>1/\varepsilon.$$

Возьмем $n_0=[1/\varepsilon]+1$. Тогда $n_0>1/\varepsilon$ и для всех $n>n_0$ выполнено неравенство $|1/n-0|<\varepsilon$. И по определению предела заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$. $\square$

• Пример 2. Доказать,что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1.$

Док-во. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, где $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, $a = 1$. Имеем

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Возьмем $n_0 = [1/\varepsilon]+1$. Тогда $n_0 > 1/\varepsilon$ и для всех $n > n_0$ выполнено неравенство $\left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$. И по определению предела заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. □

• Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+4) = \infty$.

Док-во. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство $|n^2+4| > 1/\varepsilon$.

$$|n^2+4| > 1/\varepsilon \Longleftarrow n^2+4 > 1/\varepsilon \Longleftarrow n^2 > 1/\varepsilon \Longleftarrow n > \sqrt{1/\varepsilon}.$$

Возьмем $n_0 = [\sqrt{1/\varepsilon}] + 1$. Тогда $n_0 > \sqrt{1/\varepsilon}$ и для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|n^2+4| > 1/\varepsilon$, что по определению предела означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+4) = \infty$. □

п.3.2. Бесконечно малые последовательности

Определение бесконечно малой.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Основная лемма о бесконечно малой.

Утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(a \neq \pm\infty)$ эквивалентно тому, что $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff |x_n - a| < \varepsilon \iff |(x_n - a) - 0| < \varepsilon \iff$$
$$\iff \lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0 \iff \alpha_n = x_n - a \text{ бесконечно малая. } \square$$

Теорема о сумме бесконечно малых.

Сумма бесконечно малых есть бесконечно малая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые. Тогда $\forall \varepsilon > 0$

1) $\exists n_1$ такой, что $\forall n > n_1 \;\; |\alpha_n| < \varepsilon$;

2) $\exists n_2$ такой, что $\forall n > n_2 \;\; |\beta_n| < \varepsilon$.

Но тогда $\forall n > \max\{n_1; n_2\} \quad |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon^*$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = 0$, то есть $\{\alpha_n + \beta_n\}$ бесконечно малая. $\square$

Теорема об умножении на бесконечно малую.

Если $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, а $\{x_n\}$ ограниченная, то $\{\alpha_n x_n\}$ бесконечно малая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Так как $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_o : \;\; \forall n > n_0 \;\; |\alpha_n| < \varepsilon$.

2) Так как $\{x_n\}$ ограниченная $\exists B : \;\; |x_n| \leq B \;\; \forall n$.

Но тогда $\forall n > n_0 \;\; |\alpha_n x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \varepsilon B = \varepsilon^*$,
то есть $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n x_n) = 0$, то есть $\{\alpha_n x_n\}$ бесконечно малая. $\square$

Теорема об ограниченности бесконечно малой.

Бесконечно малая последовательность является ограниченной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая.

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists n_0 : \;\; \forall n > n_0, \;\; |\alpha_n| < 1$.

Обозначим $B = \max\{1; |\alpha_1|; |\alpha_2|; ...; |\alpha_{n_0}|\}$.

Тогда $|\alpha_n| \leq B \;\; \forall n$, то есть $\{\alpha_n\}$ ограниченная. $\square$

Замечание. Из двух последних теорем следует, что произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

п.3.3. Бесконечно большие последовательности

Определение бесконечно большой.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Связь бесконечно большой и бесконечно малой.

• ТЕОРЕМА 1. Если $\{\alpha_n\}$ бесконечно большая, то $\{1/\alpha_n\}$ бесконечно малая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty, \quad \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 : \quad \forall n > n_0, \quad \alpha_n > 1/\varepsilon \implies 0 < 1/\alpha_n < \varepsilon \implies |1/\alpha_n| < \varepsilon$, то есть $\{1/\alpha_n\}$ бесконечно малая. $\square$

• ТЕОРЕМА 2. Если $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то $\{1/|\alpha_n|\}$ бесконечно большая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 : \quad \forall n > n_0, \quad |\alpha_n| < \varepsilon \implies |1/\alpha_n| > 1/\varepsilon$, то есть $\{1/\alpha_n\}$ бесконечно большая. $\square$

Связь с ограниченностью.

Из определения следует, что любая бесконечно большая последовательность не ограничена. Обратное не верно: последовательность может быть не ограничена, но не являться бесконечно большой.

Например: 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, ...

Сумма с бесконечно большой.

• ТЕОРЕМА 1. Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно большие последовательности, то и $\{\alpha_n + \beta_n\}$ бесконечно большая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varepsilon > 0$.

1) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty, \quad \exists n_1 : \quad \forall n > n_1, \quad \alpha_n > 1/\varepsilon.$

2) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty, \quad \exists n_2 : \quad \forall n > n_2, \quad \beta_n > 1/\varepsilon.$

Но тогда $\forall n > \max\{n_1; n_2\}$ будет $\alpha_n + \beta_n > 1/\varepsilon + 1/\varepsilon = 2/\varepsilon = 1/\varepsilon^*$, то есть $\{\alpha_n + \beta_n\}$ бесконечно большая. $\square$

• ТЕОРЕМА 2. Если $\{\alpha_n\}$ бесконечно большая, а $\{\beta_n\}$ ограниченная, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно большая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Так как $\{\beta_n\}$ ограниченная, $\exists B : \ |\beta_n| \le B \implies -B \le \beta_n \le B.$

2) Возьмем $\varepsilon \in (0; 1/B)$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty, \quad \exists n_0 : \ \forall n > n_0, \ \ \alpha_n > 1/\varepsilon.$

Но тогда $\forall n > n_0$ будет $\alpha_n \pm \beta_n > \dfrac{1}{\varepsilon} \mp B = \dfrac{1 \mp \varepsilon B}{\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon^*}$, то есть $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно большая. $\square$

• *Замечание.* Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно большие последовательности, то про последовательность $\{\alpha_n - \beta_n\}$ заранее ничего определенного сказать нельзя. Возможны разные ситуации.

Например:

$\alpha_n = (n+1)^2$, $\beta_n = 2n+1$, тогда $\alpha_n - \beta_n = n^2 \to \infty$;

$\alpha_n = (n+1)^2$, $\beta_n = n^2 + 2n$, тогда $\alpha_n - \beta_n = 1$;

$\alpha_n = n + 1/n$, $\beta_n = n$, тогда $\alpha_n - \beta_n = 1/n \to 0$.

(Как уже говорилось, выражение вида $\infty - \infty$ называют неопределенностью.)

Умножение на бесконечно большую.

• ТЕОРЕМА. Если $\{\alpha_n\}$ бесконечно большая, а $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = b \neq 0$, то $\{\alpha_n\beta_n\}$ бесконечно большая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varepsilon > 0$.

1) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, $\quad \exists n_1 : \quad \forall n > n_1, \quad \alpha_n > 1/\varepsilon$.

2) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = b$, $\quad \exists n_2 : \quad \forall n > n_2, \quad |\beta_n - b| < \varepsilon \implies$

$$\implies b - \varepsilon < \beta_n < b + \varepsilon.$$

Но тогда $\forall n > \max\{n_1; n_2\}$ будет $\alpha_n\beta_n > \dfrac{b-\varepsilon}{\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon^*}$, то есть $\{\alpha_n\beta_n\}$ бесконечно большая. $\square$

• *Замечание.* Если $\{\alpha_n\}$ бесконечно большая, а $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, то про последовательность $\{\alpha_n - \beta_n\}$ заранее ничего определенного сказать нельзя. Возможны разные ситуации.

Например:

$\alpha_n = n^2$, $\beta_n = 1/n$, тогда $\alpha_n\beta_n = n \to \infty$;

$\alpha_n = n$, $\beta_n = 1/n$, тогда $\alpha_n\beta_n = 1$;

$\alpha_n = n$, $\beta_n = 1/n^2$, тогда $\alpha_n\beta_n = 1/n \to 0$.

(Как уже говорилось, выражение вида $\infty \cdot 0$ называют неопределенностью.)

п.3.4. Теоремы о пределе последовательности

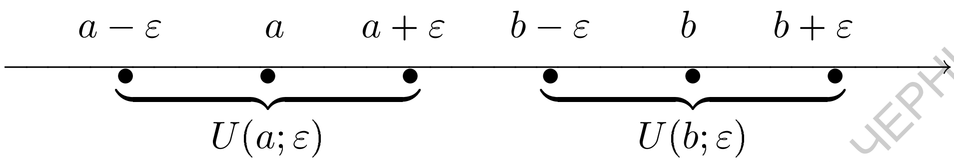
Теорема о единственности предела.

Если у последовательности существует предел, то он единственный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$.

Пусть для определенности $a < b$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{3}(b-a)$. Тогда



1) так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists n_1 : \ \forall n > n_1, \ x_n \in U(a;\varepsilon)$;

2) так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\exists n_2 : \ \forall n > n_2, \ x_n \in U(b;\varepsilon)$,

тогда $\forall n > \max\{n_1; n_2\}$, $x_n \in U(a;\varepsilon)$ и $x_n \in U(b;\varepsilon)$, но это не возможно, так как $U(a;\varepsilon)$ не пересекается с $U(b;\varepsilon)$.

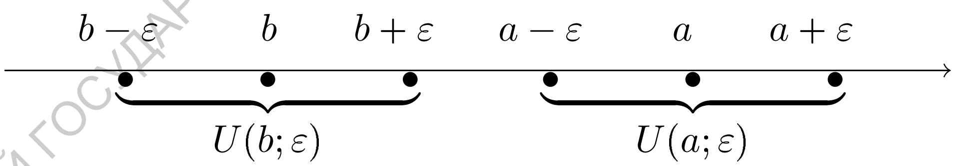
Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теорема о переходе к пределу в неравенстве.

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\forall n \ \ x_n < y_n$ (или $x_n \leq y_n$), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Предположим противное: пусть $a > b$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{3}(a-b)$. Тогда



1) так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists n_1 : \ \forall n > n_1, \ x_n \in U(a;\varepsilon)$;

2) так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $\exists n_2 : \ \forall n > n_2, \ y_n \in U(b;\varepsilon)$,

тогда $\forall n > \max\{n_1; n_2\}$, $x_n \in U(a;\varepsilon)$ и $y_n \in U(b;\varepsilon)$, значит x_n лежит правее y_n, а это противоречит тому, что $x_n < y_n$.

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Замечание. При переходе к пределу в неравенстве в общем случае строгое неравенство заменяется на не строгое, так как возможна ситуация: $x_n < y_n$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Например: $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Теорема о двух милиционерах.

Если $\forall n,\ x_n \le y_n \le z_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$ то и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \exists n_1 : \quad \forall n > n_1, \quad |x_n - a| < \varepsilon$

$$\Longrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{1}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a, \quad \exists n_2 : \quad \forall n > n_1, \quad |z_n - a| < \varepsilon$

$$\Longrightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \tag{2}$$

Тогда $\forall n > \max\{n_1; n_2\}$

$$a - \varepsilon \overset{(1)}{<} \underbrace{x_n \le y_n \le z_n}_{\text{(по условию)}} \overset{(2)}{<} a + \varepsilon$$

$\Longrightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Longrightarrow |y_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$ $\square$

Теорема о пределе суммы.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$ (то есть предел суммы равен сумме пределов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для бесконечно больших последовательностей это утверждение было доказано раньше. Пусть теперь x_n и y_n имеют конечные пределы.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow$ (по основной лемме о бесконечно малой)

$$x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n \text{ – бесконечно малая.}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Longrightarrow$ (по основной лемме о бесконечно малой)

$$y_n = y + \beta_n, \text{ где } \beta_n \text{ – бесконечно малая.}$$

Тогда

$$x_n + y_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n),$$

а так как $(\alpha_n + \beta_n)$ бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b.$ $\square$

Замечание. В утверждении теоремы существенно, что предел суммы равен сумме пределов только если предел каждой последовательности существует. Обратное не верно.

Например: возьмем $x_n: \ 1, \ -1, \ 1, \ -1, \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \ \nexists$

$$y_n: \ -1, \ 1, \ -1, \ 1, \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty} y_n \ \nexists$$

Тогда $x_n + y_n: \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 0.$

Теорема о пределе произведения.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$ (то есть предел произведения равен произведению пределов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для бесконечно больших последовательностей это утверждение было доказано раньше. Пусть теперь x_n и y_n имеют конечные пределы.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies$ по основной лемме о бесконечно малой

$$x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n \text{ – бесконечно малая.}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \implies$ по основной лемме о бесконечно малой

$$y_n = y + \beta_n, \text{ где } \beta_n \text{ – бесконечно малая.}$$

Тогда

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n \beta_n,$$

а так как по свойствам бесконечно малых $\alpha_n b$, $a\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$ бесконечно малые, то и их сумма бесконечно малая и $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$. □

Замечание. В утверждении теоремы существенно, что предел произведения равен произведению пределов только если предел каждой последовательности существует. Обратное не верно.

Например: возьмем $x_n: \ 1, \ 0, \ 1, \ 0, \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \ \nexists$

$$y_n: \ 0, \ 1, \ 0, \ 1, \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty} y_n \ \nexists$$

Тогда $x_n y_n: \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0.$

Теорема о пределе частного.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, a и b конечные числа, и $\forall n\ y_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b$ (то есть предел отношения равен отношению пределов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies$ по основной лемме о бесконечно малой

$$x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n \text{ – бесконечно малая.}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \implies$ по основной лемме о бесконечно малой

$$y_n = y + \beta_n, \text{ где } \beta_n \text{ – бесконечно малая.}$$

Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \left(\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}\right),$$

У дроби $c_n = \dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}$ числитель стремится к 0, знаменатель стремится к $b^2 \neq 0$, значит $c_n \to 0 \implies \dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$. □

Замечание. В утверждении теоремы существенно, что предел отношения равен отношению пределов только если предел каждой последовательности существует. Обратное не верно.

Например: возьмем $x_n: \ 2,\ 4,\ 2,\ 4, \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \not\exists$

$y_n: \ 1,\ 2,\ 1,\ 2, \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty} y_n \not\exists$

Тогда $x_n/y_n: \ 2,\ 2,\ 2,\ 2, \ldots \implies \lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = 2.$

п.3.5. Свойства сходящихся последовательностей

Теорема об ограниченности.

Если последовательность сходится, то она ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $(a \neq \pm\infty)$.

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists n_0 : \ \forall n > n_0,\ |x_n - a| < 1,\ a-1 < x_n < a+1$.

Обозначим

$m = \min\{a-1;\ |x_1|;\ |x_2|;\ \ldots;\ |x_{n_0}|\}$.

$M = \max\{a+1;\ |x_1|;\ |x_2|;\ \ldots;\ |x_{n_0}|\}$.

Тогда $m \leq |x_n| \leq M \ \ \forall n$, то есть $\{x_n\}$ ограниченная. □

Теорема о монотонной последовательности.

Любая монотонная ограниченная последовательность сходится (то есть имеет конечный предел).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_n\}$ – возрастающая последовательность, ограниченная сверху. Поскольку у ограниченного множества существует точная верхняя грань, существует и $\sup x_n = a$.

По характеристическому свойству верхней грани,

$$\begin{aligned} &\forall n \quad x_n \le a; \\ &\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_o : \quad a - \varepsilon < x_{n_o}. \end{aligned} \tag{1}$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ возрастающая,

$$a - \varepsilon < x_{n_o} < x_{n_o+1} < x_{n_o+2} < x_{n_o+3} < \ldots \tag{2}$$

Из (1)-(2) следует, что $\forall n \ge n_o$ будет $a - \varepsilon < x_n \le a$,

значит $x_n \in U(a; \varepsilon)$,

значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Аналогично доказывается существование предела убывающей последовательности, ограниченной снизу. $\square$

Понятие подпоследовательности.

Пусть есть некоторая последовательность. "Вычеркнем" из нее какие-то элементы (можно конечное, можно бесконечное число, но так, чтобы бесконечно много элементов осталось). Оставшаяся последовательность называется подпоследовательностью исходной последовательности.

Например, последовательность четных чисел является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

Замечание. Из определения очевидно, что если последовательность имеет предел, то и любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

Теорема Больцано[3]–Вейерштрасса[4].

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$.

Обозначим $a_1 = \inf x_n$ и $b_1 = \sup x_n$. Тогда $\forall n \quad x_n \in [a_1; b_1]$. Выберем любой элемент последовательности x_{n_1} и обозначим его y_1.

Разделим $[a_1; b_1]$ пополам. По крайней мере в одной половине лежит бесконечно много точек последовательности. Выберем эту половину и обозначим ее $[a_2; b_2]$. Выберем любой элемент последовательности $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$, $n_2 > n_1$ и обозначим его y_2.

Разделим $[a_2; b_2]$ пополам. По крайней мере в одной половине лежит бесконечно много точек последовательности. Выберем эту половину и обозначим ее $[a_3; b_3]$. Выберем любой элемент последовательности $x_{n_3} \in [a_3; b_3]$, $n_3 > n_2$ и обозначим его y_3.

И так далее. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим последовательности:

$\{a_n\}$ – левые концы отрезков, причем $a_n \le a_{n+1}$ и $a_n < b_1$;

$\{b_n\}$ – правые концы отрезков, причем $b_n \ge b_{n+1}$ и $b_n > a_1$;

$\{y_n\}$, $y_n \in [a_n; b_n]$.

Следовательно,

$\{a_n\}$ – возрастающая, ограниченная сверху последовательность $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

[3]Бернард Больцано, 5 октября 1781 - 18 декабря 1848 - чешский математик, философ и теолог, автор первой строгой теории вещественных чисел и один из основоположников теории множеств. При жизни Больцано опубликовал только пять небольших работ по математике и несколько анонимных философских трактатов. Они значительно опередили научный уровень того времени и не привлекли внимания научной общественности. Только в конце XIX века, когда эти идеи независимо переоткрыли Вейерштрасс и Дедекинд, историки обнаружили и оценили по заслугам сочинения Больцано. (Материал из Википедии)

[4]Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс, 31 октября 1815 - 19 февраля 1897 - немецкий математик, основоположник современного анализа. До Вейерштрасса оснований анализа фактически не существовало. Вейерштрасс завершил построение фундамента математического анализа. Его определения предела, непрерывной функции, сходимости ряда и равномерной сходимости функций воспроизводятся без всяких изменений в современных учебниках. Кроме того достиг результатов в геометрии, линейной алгебре, комплексном анализе. (Материал из Википедии)

$\{b_n\}$ – бывающая, ограниченная снизу последовательность $\Longrightarrow\ \exists\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n)$.
С одной стороны,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = b - a, \tag{1}$$

с другой стороны, $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$, $b_3 - a_3 = \dfrac{b_1 - a_1}{2^2}$, ...

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0 \tag{2}$$

Из (1)-(2) получаем, что $a = b$, и по теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a = b$, то есть, $\{y_n\}$ – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. $\square$

Критерий Коши[5].

Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists n_o$: $\forall\ n > n_o$, $\forall\ m > n_o$ будет $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists n_o$: $\forall\ n > n_o\ \ |x_n - a| < \varepsilon$.
Возьмем $m > n_o$, имеем

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \le |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon^*,$$

и прямое утверждение теоремы доказано.

Обратно: пусть $\forall\ n > n_o$, $\forall\ m > n_o$ будет $|x_n - x_m| < \varepsilon$,
в частности, $|x_n - x_{n_o+1}| < \varepsilon \Longrightarrow x_{n_o+1} - \varepsilon < x_n < x_{n_o+1} + \varepsilon$,

[5] Огюстен Луи Коши, 21 августа 1789 - 23 мая 1857 - французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий. Разработал фундамент математического анализа, один из основоположников механики сплошных сред, внёс огромный вклад в алгебру, математическую физику, комплексный анализ и многие другие области математики и физики. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни. Коши написал свыше 800 работ, полное собрание его сочинений содержит 27 томов. (Материал из Википедии)

значит последовательность $\{x_n\}$ ограничена и по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$.

Для $n_k > n_o$ будет $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к $\lim\limits_{k\to\infty} ...$, получим $|x_n - a| < \varepsilon$, таким образом обратное утверждение теоремы также доказано. $\square$

Замечание. Критерий Коши похож на определение предела последовательности. Но чтобы установить факт, что последовательность имеет конечный предел по критерию Коши, в отличие от определения предела, вовсе не обязательно знать чему этот предел равен.

Например, рассмотрим $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$. Определим, является ли эта последовательность сходящейся. Для этого рассмотрим $x_m - x_n$. Пусть для определенности $m > n$. Тогда

$$x_m - x_n = \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ... + \frac{1}{m(m+1)}\right) - \\ - \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \\ = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{1}{m(m+1)} =$$

$$= \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{(n+3)-(n+2)}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{(m+1)-m}{m(m+1)} = \\ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + ... + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = \\ = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}$$

Откуда

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right| \le \left|\frac{1}{n+1}\right| + \left|\frac{1}{m+1}\right|$$

$\forall\, \varepsilon > 0$ возьмем n_o такой, что $n_o + 1 > 1/\varepsilon$, тогда для $m > n > n_o$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon^*,$$

значит в силу критерия Коши последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся. (Мы установили, что предел существует, хотя и не знаем его значение.)

Определение числа e.

Последовательность $(1+\frac{1}{n})^n$ имеет конечный предел. Этот предел обозначают e.

($e = 2,7182818284590...$, обычно берут приближенное значение 2,7.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Покажем, что последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ возрастает. Для этого рассмотрим отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{(n+2)^n n^n}{((n+1)^2)^n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n^2+2n\overset{+1-1}{\checkmark}}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \boxed{\geq}$$

В п 1.1. было доказано неравенство: $(1+x)^n \geq 1+nx$ $(n\in\mathbb{N}, x\geq -1)$, применяя которое, получим:

$$\boxed{\geq}\ \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2+2n+1)} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

$\Longrightarrow$ $x_{n+1} > x_n \Longrightarrow$ последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ возрастает.

2) Покажем, что последовательность $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ убывает. Для этого рассмотрим отношение $\dfrac{y_n}{y_{n+1}}$:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{((n+1)^2)^{n+1}}{n^{n+1}(n+2)^{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \boxed{\geq}$$

Вновь применяя неравенство: $(1+x)^n \geq 1+nx$, получим:

$$\boxed{\geq} \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = $$
$$= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

$\Longrightarrow y_n > y_{n+1} \Longrightarrow$ последовательность $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ убывающая.

3) Очевидно, что $x_n < y_n$. Из 2) $\Longrightarrow \forall n \;\; y_n \leq y_1 = (1+1)^2 = 4$, следовательно $x_n < 4$, то есть $\{x_n\}$ ограниченная сверху, и по 1) возрастающая последовательность, значит (по теореме о монотонной последовательности) имеет конечный предел. $\square$

Постоянная Эйлера[6].

Последовательность
$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n$$
имеет конечный предел. Этот предел обозначают γ (или C).

$(\gamma = 0,5772156649....)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ убывает. Для этого рассмотрим разность $x_{n+1}-x_n$:

$$x_{n+1}-x_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right) -$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n = \frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}.$$

[6]Леонард Эйлер 15 апреля 1707 - 7 (18) сентября 1783 - швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук, а также физики, астрономии и ряда прикладных наук, автор более чем 850 работ, включая два десятка фундаментальных монографий по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и другим областям. Он глубоко изучал медицину, химию, ботанику, воздухоплавание, теорию музыки, множество европейских и древних языков. Академик Петербургской, Берлинской, Туринской, Лиссабонской и Базельской академий наук, иностранный член Парижской академии наук. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки. (Материал из Википедии)

В предыдущей теореме было показано, что $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > e \implies$ $(n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > 1 \implies \ln\dfrac{n+1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$, значит, $x_{n+1}-x_n<0$ или $x_{n+1}<x_n$, то есть последовательность $\{x_n\}$ убывает.

2) Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. В предыдущей теореме было показано, что $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} < e$

$\implies n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 1 \implies \ln\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{n}$. Значит,

$$\begin{array}{cccccccccc} x_n = & 1 & + & \dfrac{1}{2} & + & \dfrac{1}{3} & + \ldots + & \dfrac{1}{n} & -\ln n > \\ & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ & \ln\frac{2}{1} & & \ln\frac{3}{2} & & \ln\frac{4}{3} & & \ln\frac{n+1}{n} & \end{array}$$

$$> \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n =$$
$$= \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}-\ln n = \ln(n+1)-\ln n > 0,$$

значит, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу.

Из 1) и 2) получаем утверждение теоремы. $\square$

Итерационная формула Герона[7].

$\forall a>0,\ x_1>0$ последовательность $x_n:\ \ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ сходится к $\sqrt{a}$.

---

[7]Герон Александрийский - греческий математик и механик. Время жизни отнесено ко второй половине I века н. э. Герона относят к величайшим инженерам за всю историю человечества. Он первым изобрёл автоматические двери, автоматический театр кукол, автомат для продаж, скорострельный самозаряжающийся арбалет, паровую турбину, автоматические декорации, прибор для измерения протяжённости дорог и др. Первым начал создавать программируемые устройства: вал со штырьками с намотанной на него верёвкой. Занимался геометрией, механикой, гидростатикой, оптикой. Многие из его книг безвозвратно утеряны (свитки содержались в Александрийской библиотеке). В средние века многие из его изобретений были отвергнуты, забыты или не представляли практического интереса. (Материал из Википедии)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Покажем, что $\{x_n\}$ ограничена снизу:

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-\sqrt{a}=\frac{x_n^2-2\sqrt{a}\,x_n+a}{2x_n}=$$
$$=\frac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n}\geq 0 \implies x_{n+1}\geq\sqrt{a},$$

следовательно $\forall\ n\ \ x_n\geq\sqrt{a}$.

2) Покажем, что $\{x_n\}$ убывает:

$$x_n-x_{n+1}=x_n-\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left(x_n-\frac{a}{x_n}\right)=\frac{x_n^2-a}{2x_n}\overset{\text{см. 1)}}{\geq}0,$$

следовательно, $x_n\geq x_{n+1}$, то есть $\{x_n\}$ убывает.

Из 1) и 2) следует, что последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел. Обозначим этот предел c. Тогда, переходя к пределу в равенстве $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$, получим $\text{c}=\dfrac{1}{2}\left(\text{c}+\dfrac{a}{\text{c}}\right)\implies 2c^2=c^2+a$ $\implies c^2=a\implies c=\sqrt{a}$. $\square$

§4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

п.4.1. Определение предела функции

Определение предела функции по Гейне[8].

Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_o, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_o, последовательность $\{f(x_n)\}$, сходится к a.

Обозначается $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = a$ или $f(x) \to a$ при $x \to x_o$.

• Пример 1. Рассмотрим $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x_o = 0$.
Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n+1}{x_n-1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1} = -1,$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.

• Пример 2. Рассмотрим $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x_o = 0$.
Возьмем две последовательности: $x_n' = \dfrac{1}{2\pi n}$ и $x_n'' = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$.
Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$, при этом

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n + \pi/2) = 1,$$

следовательно, не существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

[8]Генрих Эдуард Гейне, 15 марта 1821 - 21 октября 1881 - немецкий математик, занимался преимущественно теорией потенциала, теорией функций и дифференциальными уравнениями. (Материал из Википедии)

Определение предела функции по Коши[9]**.**

Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in U(x_0)$ будет $f(x) \in U(a)$.

• Пример. Рассмотрим $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, $x_o = 1$.
Покажем, что $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$:

$$f(x) \in U(2;\varepsilon) \iff \left|\frac{x+1}{x} - 2\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1-x}{x}\right| < \varepsilon \iff$$

$$-\varepsilon < \frac{1-x}{x} < \varepsilon \iff \begin{cases} \dfrac{1-x}{x} + \varepsilon > 0, \\ \dfrac{1-x}{x} - \varepsilon < 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x+x\varepsilon > 0, \\ 1-x-x\varepsilon < 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 > x(1-\varepsilon), \\ 1 < x(1+\varepsilon), \end{cases} \iff$$

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{1+\varepsilon} & < x < & \dfrac{1}{1-\varepsilon} \\ \| & & \| \\ 1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} & & 1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{array} \qquad (1)$$

Возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Тогда для $x \in U(1;\delta)$

$$1-\delta < x < 1+\delta < 1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

то есть x удовлетворяет неравенству (1), а значит $f(x) \in U(2;\varepsilon)$ и по определению Коши $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

Эквивалентность определений по Коши и по Гейне.

Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны, то есть, если установлено, что число a является пределом функции в точке x_o по определению Коши, то a так же является пределом функции в точке x_o по определению Гейне, и наоборот.

[9]см. п.3.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Пусть $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = a$ по Коши.

Возьмем произвольную окрестность $U(a;\varepsilon)$ и найдем δ такое, что для всех $x \in U(x_o;\delta)$ будет $f(x) \in U(a;\varepsilon)$.

Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_o. По определению предела последовательности, найдется номер, начиная с которого $x_n \in U(x_o;\delta)$, но тогда $f(x_n) \in U(a;\varepsilon)$, а это значит, что последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к a, а значит a – предел функции f в точке x_o по Гейне.

2)Пусть $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = a$ по Гейне.

Предположим, что a не является пределом функции в точке x_o по определению Коши. Это значит, что для любого числа ε и для любого сколь угодно малого числа δ найдется такое значение x, что $x \in U(x_o;\delta)$, но $f(x) \notin U(a;\varepsilon)$.

Возьмем любое ε и $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. По сделанному предположению, для каждого n найдется такое значение x_n, что $x_n \in U(x_o;\delta)$, но $f(x_n) \notin U(a;\varepsilon)$. Так как $\delta_n \to 0$, $x_n \to x_o$, но $f(x_n) \not\to a$, а это противоречит тому, что a является пределом функции в точке x_o по Гейне. Значит, предположение не верное, значит a является пределом функции в точке x_o по определению Коши. $\square$

Односторонние пределы.

(по Гейне)

Число a называется левым пределом функции $f(x)$ в точке x_o, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_o и состоящей из чисел, меньших x_o, последовательность $\{f(x_n)\}$, сходится к a.

Число a называется правым пределом функции $f(x)$ в точке x_o, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_o и состоящей из чисел, больших x_o, последовательность $\{f(x_n)\}$, сходится к a.

(по Коши)

Число a называется левым пределом функции $f(x)$ в точке x_0 если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такое δ, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_o)$ будет $f(x) \in U(a)$.

Число a называется правым пределом функции $f(x)$ в точке x_0 если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такое δ, что для всех $x \in (x_o; x_0 + \delta;)$ будет $f(x) \in U(a)$.

Левый предел обозначается $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) = a$;

правый предел обозначается $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) = a$.

Замечание 1. Очевидно, что если существует предел функции $f(x)$ в точке x_0, то в этой точке существуют левый и правый пределы и эти пределы равны. Верно и обратное.

Замечание 2. По сути, предел при $x \to +\infty$ всегда понимается как левый предел, а при $x \to -\infty$ как правый.

Математическая запись определения предела функции.

Для $x_o, a \neq \infty$:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) :\ \forall\ |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Если $x_o = +\infty$, то вместо $|x - x_o| < \delta$ следует писать $x > 1/\delta$, а для $x_0 = -\infty$ пишут $x < -1/\delta$.

Если $a = +\infty$, то вместо $|f(x) - a| < \varepsilon$ следует писать $f(x) > 1/\varepsilon$, а для $a = -\infty$ пишут $f(x) < -1/\varepsilon$.

Если $x \to x_o - 0$ то вместо $|x - x_o| < \delta$ следует писать $x \in (x_o - \delta; x_0)$.

Если $x \to x_o + 0$ то вместо $|x - x_o| < \delta$ следует писать $x \in (x_0; x_o + \delta)$.

О-символика.

По аналогии с последовательностями, будем говорить, что функция $\alpha(x)$ бесконечно малая в окрестности x_o, если $\lim\limits_{x \to x_o} \alpha(x) = 0$ и бесконечно большая, если $\lim\limits_{x \to x_o} \alpha(x) = \infty$.

Часто возникает необходимость сравнить бесконечно малые или бесконечно большие величины. Для этого применяют специальные обозначения:

если $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то пишут $\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big)$ при $x \to x_o$;

если $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathrm{const} \neq 0$, то пишут $\alpha(x) = O\big(\beta(x)\big)$ при $x \to x_o$.

Например:

$x^2 = o(x)$ при $x \to 0$;

$x + 1 = O(x)$ при $x \to \infty$.

Отметим некоторые свойства:

- $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$;
- $O(\alpha) + O(\alpha) = O(\alpha)$;
- $o(\alpha) + O(\alpha) = O(\alpha)$;
- $o(\alpha) \cdot o(\alpha) = o(\alpha^2)$;
- $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$

и т.д.

п.4.2. Непрерывность и разрывы функции

Понятие непрерывной функции.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной слева точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример. Функция $y = \sin x$ непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо доказать, что $\lim\limits_{x\to x_o} \sin x = \sin x_o$.

Рассмотрим $|\sin x - \sin x_o| =$

$$= |2\sin\frac{x - x_o}{2} \cdot \cos\frac{x + x_o}{2}| = 2\underbrace{|\sin\frac{x - x_o}{2}|}_{\leq\left|\frac{x-x_o}{2}\right|} \cdot \underbrace{|\cos\frac{x + x_o}{2}|}_{\leq 1} \leq |x - x_o|,$$

следовательно, если $x \to x_o$, то $\sin x \to \sin x_o$. $\square$

Замечание. Можно доказать, что все элементарные функции непрерывны на всей области своего определения.

Понятие равномерной непрерывности.

Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве J. Это значит, что

$$\forall x', x'' \in J,\ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta:\ \text{если } |x' - x''| < \delta,\ \text{то } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

(где δ зависит от ε и, вообще говоря, от x' и x'').

Если же можно утверждать, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta:\ \text{если } |x' - x''| < \delta,\ \text{то } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\ \ \forall x', x'' \in J,$$

(то есть можно указать одно и то же δ для всех точек множества J), то говорят, что функция f равномерно непрерывна на множестве J.

Например, рассмотрим $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Тогда

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \left|\frac{x'' - x'}{x'x''}\right| < \varepsilon,\ \ \text{если } |x'' - x'| < \varepsilon|x'x''|.$$

Возьмем $J = (1;2)$.

Тогда для $\delta = \varepsilon$, $x', x'' \in J$, если $|x'' - x'| < \delta$, то, тем более, $|x'' - x'| < \varepsilon|x'x''|$, значит функция f равномерно непрерывна на интервале $(1;2)$.

Возьмем $J = (0;1)$. Чем ближе точка к нулю, тем меньше надо брать δ, чтоб выполнить условие $|x'' - x'| < \delta < \varepsilon|x'x''|$, значит функция f не является равномерно непрерывной на интервале $(0;1)$.

Теорема Кантора[10].

Функция, непрерывная на $[a;b]$ равномерно непрерывна на нем (что нельзя утверждать для $(a;b)$, см. предыдущий пример).

[10]Георг Кантор, 3 марта 1845 - 6 января 1918 - немецкий математик, ученик Вейерштрасса. Наиболее известен как создатель теории множеств. Основатель и первый президент Германского математического общества, инициатор создания Международного конгресса математиков. Кантор впервые определил сравнение произвольных множеств, включая бесконечные, по их мощности через понятие взаимно-однозначного соответствия между множествами. Теория Кантора о трансфинитных числах первоначально была воспринята как нарушение многовековых традиций, заложенных ещё древними греками и отрицающих актуальную бесконечность как легальный математический объект. Со временем канторовская теория множеств была поставлена на аксиоматическую основу и стала краеугольным камнем в современном построении оснований математики, на неё опираются математический анализ, топология, функциональный анализ, теория меры и многие другие разделы математики. (Материал из Википедии)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: функция не является равномерно непрерывной на $[a;b]$, значит

$$\exists\varepsilon > 0: \ \forall\delta, \ \exists\ x', x'' \in [a;b] \text{ такие, что } |x' - x''| < \delta,$$
$$\text{но } |f(x') - f(x'')| > \varepsilon.$$

Возьмем $\delta_n = \frac{1}{n}$. По предположению $\exists\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ такие, что

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \text{ но } |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon$$

Так как $\{x'_n\}$ ограничена, по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$, причем и для этой подпоследовательности

$$|x'_{n_k} - x''_n| < \frac{1}{n}, \text{ но } |f(x'_{n_k}) - f(x''_n)| > \varepsilon \qquad (*)$$

Обозначим $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_o$. Но тогда в силу непрерывности функции $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_o)$, и переходя в (*) к пределу, получим

$$|x_o - x''_n| < \frac{1}{n}, \text{ но } |f(x_o) - f(x''_n)| > \varepsilon \qquad (**)$$

Так как $|x_o - x''_n| < \frac{1}{n} \implies x_o - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} < x''_n < x_o + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} \implies x''_n \to x_o$ и в силу непрерывности функции $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = f(x_o)$, а это противоречит утверждению (**). Следовательно, сделанное предположение не верно. □

Точки разрыва и их классификация.

Отметим, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если для некоторого $\varepsilon > 0$ функция непрерывна на множестве $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, но не является непрерывной в точке x_0 (то есть не выполнено соотношение (1)).

Различают следующие три ситуации:

1) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$. Тогда x_0 называется устранимой точкой разрыва.

Например: $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ для } x\neq 0, \\ 1 \text{ для } x=0. \end{cases}$ $x=0$ – устранимая точка разрыва.

2) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ но оба предела существуют и конечны. Тогда x_0 называется точкой разрыва первого рода.

Например: $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ для } x\leq 0, \\ 2 \text{ для } x>0. \end{cases}$ $x=0$ – точка разрыва первого рода.

3) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$. Тогда x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Например: $f(x)=\dfrac{1}{x}$. $x=0$ – точка разрыва второго рода.

п.4.3. Теоремы о пределе функции

Основные свойства предела функции.

Определение предела по Гейне позволяет перенести свойства предела последовательности на предел функции. А именно:

• *Теорема о единственности предела.* Если у функции в точке существует предел, то он единственный.

• *Теорема о переходе к пределу в неравенстве.* Если в некоторой окрестности x_o $f(x)<g(x)$ (или $\leq$), то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

• *Теорема о двух милиционерах.* Если в некоторой окрестности x_o $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$.

• *Теорема о пределе суммы (разности), произведения, частного.* Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, то

$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\pm g(x))=a\pm b$;

$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x))=ab$;

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$ (при дополнительном условии $b\neq 0$).

• *Теорема об ограниченности.* Если функция в точке x_o имеет конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема об односторонних пределах монотонной функции.

Если функция $f(x)$ монотонна на $[a;b]$, то в каждой точке $(a;b)$ она имеет конечный предел, а так же в a и b соответственно правый и левый пределы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $f(x)$ не убывает. Возьмем $c \in (a;b]$ и рассмотрим множество $J = \{f(x),\ x \in [a;\mathrm{c})\}$. Так как $f(a) \leq f(x) \leq f(c)$, J – ограниченное множество, значит $\exists\ \sup J = s$. По свойству sup:

1) $\forall y \in J\ \ y \leq s \implies f(x) \leq s\ \ \forall\ x \in [a;\mathrm{c})$;

2) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists y_0 \in J$ такой, что $s - \varepsilon < y_0 < s \implies$ $\exists\ x_0 \in [a;\mathrm{c})$ такой, что $s - \varepsilon < f(x_0) < s$.

Из (1) и (2) следует, что

$$\text{для } x \in (x_0; c) \quad s - \varepsilon < f(x_0) < f(x) \leq s < s + \varepsilon.$$

Обозначим $\delta = c - x_0$. Тогда последнее неравенство перепишется в виде:

$$\text{для } x \in (c - \delta; c) \quad s - \varepsilon < f(x) < s + \varepsilon,$$

а это означает, что $s = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, то есть левый предел существует.

Аналогично доказывается существование правого предела. $\square$

Разрывы монотонной функции.

Монотонная функция может иметь разрывы только первого рода, причем их не более, чем счетное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности функция f неубывающая, x_o – ее точка разрыва. В предыдущей теореме было показано, что у функции f в каждой точке, в том числе и в x_o, есть левый и правый пределы, причем оба они конечны. Значит, x_o не может быть точкой разрыва второго рода.

Так как $\quad f(x_o - \delta) \leq f(x_o) \leq f(x_o + \delta) \implies$

$$\implies \lim_{\delta \to 0} f(x_o - \delta) \leq f(x_o) \leq \lim_{\delta \to 0} f(x_o + \delta) \implies$$

$$\implies \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_o) \leq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

и если оба пределы равны, то функция непрерывна в точке x_o, а это противоречит тому, что x_o точка разрыва. Значит, x_o не может быть устранимым разрывом.

Таким образом x_o может быть только разрывом первого рода.

Каждой точке разрыва поставим в соответствие интервал $\big(f(x_o-0); f(x_o+0)\big)$, на каждом интервале выберем одно рациональное число. Так как рациональных чисел счетное множество, значит интервалов, а, следовательно, и точек разрыва, не более, чем счетное множество. $\square$

Первый замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим единичную окружность и угол x:

$S_{\triangle OAC} < S_{\text{сектора } OAC} < S_{\triangle OBC}$

$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OC\sin x=\frac{1}{2}\sin x;$$

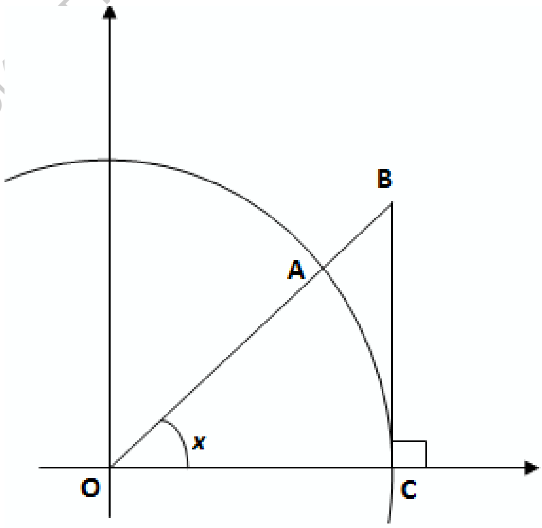
$$S_{\text{сектора } OAC}=\frac{\pi r^2}{2\pi}\cdot x=\frac{1}{2}x;$$

$$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot BC=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot(OC\mathrm{tg}x)=\frac{1}{2}\mathrm{tg}x;$$

$$\Longrightarrow \sin x < x < \mathrm{tg}x \quad \Big/ : \sin x$$

$$\Longrightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$



Так как $\dfrac{1}{\cos x}\to 0$ при $x\to 0$, $\Longrightarrow$ $\dfrac{x}{\sin x}\to 0$ при $x\to 0$. $\square$

Следствие. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$$

Так как $\cos x\to 1$ при $x\to 0$, получаем требуемое. $\square$

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Надо доказать, что для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к 0,

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e$$

Ранее это было доказано для одной последовательности. А именно, для $x_n = \frac{1}{n}$ доказано: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (определение числа e). Теперь надо доказать для всех последовательностей, сходящихся к 0.

Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0.

Возьмем $m_n = [1/x_n]$ (целая часть). Тогда

$$m_n \le \frac{1}{x_n} < m_n + 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{m_n+1} < x_n \le \frac{1}{m_n}$$

$\{m_n\}$ – подпоследовательность натуральных чисел, а значит, по доказанному ранее $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{m_n} = 0$.

Поэтому

$$(1+x_n)^{1/x_n} < \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1} = \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n}\left(1+\frac{1}{m_n}\right) \to e$$

и

$$(1+x_n)^{1/x_n} > \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1}\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{-1} \to e$$

По теореме о двух милиционерах $\Longrightarrow$ $(1+x_n)^{1/x_n} \to e$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{1/x} = e \tag{1}$$

Пусть теперь $\{x_n\}$ – произвольная последовательность отрицательных чисел, сходящаяся к 0.

Возьмем $y_n = -\frac{x_n}{1+x_n}$. Тогда $y_n + y_n x_n = -x_n$, $x_n = -\frac{y_n}{1+y_n}$.

Очевидно, что $\{y_n\}$ бесконечно малая последовательность положительных чисел. Тогда по доказанному $\lim\limits_{n\to\infty} (1+y_n)^{1/y_n} = e$ и

$$(1+x_n)^{1/x_n} = \left(1 - \frac{y_n}{1+y_n}\right)^{-\frac{1+y_n}{y_n}} = \left(\frac{1}{1+y_n}\right)^{-(1+\frac{1}{y_n})} =$$
$$= (1+y_n)(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} \to e$$

Следовательно,
$$\lim_{x\to 0-0} (1+x)^{1/x} = e \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем доказываемое равенство. $\square$

Следствие (третий замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1. \ \square$$

Следствие (четвертый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполним замену: $a^x - 1 = y$. Тогда $y \to 0$, $x = \log_a(y+1) = \dfrac{\ln(y+1)}{\ln a}$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y \cdot \ln a}{\ln(y+1)} = \ln a \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = \ln a. \ \square$$

п.4.4. Примеры вычисления пределов

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^3+1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+1) = \infty$, то имеем неопределенность вида ∞/∞. Преобразуем выражение $\dfrac{x^2}{x^3+1}$, разделив числитель и знаменатель на x^3, т.е. на старшую степень переменной x, которая содержится в данном выражении. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}} = (\text{подставляем } x=\infty) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n} - n)$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Умножим и разделим выражение, задающее последовательность, на сопряженное выражение: $\sqrt{n^2+3n}+n$. Тогда получим

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n}+\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{3}{2}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+11x-6}$.

Решение. Любым известным способом разложим числитель и знаменатель на множители. Например, в числителе можно при помощи дискриминанта найти корни x_1, x_2 квадратного трехчлена и применить равенство: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Знаменатель можно поделить "уголком" на $x-1$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+11x-6 & \underline{x-1} \\
\underline{x^3-x^2} & x^2-5x+6 \\
-5x^2+11x-6 & \\
\underline{-5x^2+5x} & \\
6x-6 & \\
\underline{6x-6} & \\
0 &
\end{array}$$

В результате получим:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+11x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2-5x+6)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt[3]{x-1}-1}$.

Решение. Чтобы в числителе применить формулу "разность квадратов": $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю. Чтобы в знаменателе применить формулу "разность кубов": $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, домножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы знаменателя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt[3]{x-1}-1}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)\cdot\left((\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x-1}-1\right)\cdot\left((\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left((x+7)-9\right)\cdot\left((\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}+1\right)}{\left((x-1)-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\cdot\left((\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}+1\right)}{\left(x-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{1+1+1}{3+3}=\frac{1}{2}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\,\mathrm{tg}2x}{1-\cos 4x}$.

Решение. Чтобы свести к первому замечательному пределу и следствию из него, выполним очевидные преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\,\mathrm{tg}2x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x\cdot\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x\cdot 2x}\cdot 2x}{\dfrac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\cdot(4x)^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2\cdot\dfrac{1}{\cos 2x}}{\dfrac{1}{2}\cdot(4x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{8\cos 2x}=\frac{3}{4}.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{1-\cos 4x\cos 5x}$.

Решение. Чтобы свести к следствию из первого замечательного предела, выполним очевидные преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{1-\cos 4x\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1+1-\cos 3x}{1-\cos 4x+\cos 4x-\cos 4x\cos 5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos 2x-1}{(2x)^2}\cdot(2x)^2+\dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot(3x)^2}{\dfrac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\cdot(4x)^2+\dfrac{\cos 4x(1-\cos 5x)}{(5x)^2}\cdot(5x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}\cdot(2x)^2+\dfrac{1}{2}\cdot(3x)^2}{\dfrac{1}{2}\cdot(4x)^2+\dfrac{1}{2}\cos 4x\cdot(5x)^2}=\frac{-\dfrac{4}{2}+\dfrac{9}{2}}{\dfrac{16}{2}+\dfrac{25}{2}}=\frac{5}{41}.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{2\sin x-\sqrt{2}}$.

Решение. Чтобы свести к первому замечательному пределу и следствию из него, сделаем замену $x-\pi/4=t$, тогда $x=t+\pi/4$, $t\to 0$ и исходный предел примет вид:

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{2\sin x-\sqrt{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos(t+\pi/4)-\sqrt{2}}{2\sin(t+\pi/4)-\sqrt{2}}=$$

(применяем формулы косинус суммы и синус суммы и подставляем табличные значения $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\cos t-\sqrt{2}\sin t-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2}\cos t-\sqrt{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1-\sin t}{\sin t+\cos t-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\cos t-1}{t^2}\cdot t^2-\dfrac{\sin t}{t}\cdot t}{\dfrac{\sin t}{t}\cdot t+\dfrac{\cos t-1}{t^2}\cdot t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}\cdot t^2-t}{t-\dfrac{1}{2}\cdot t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-t^2-2t}{2t-t^2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-t-2}{2-t}=-1.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\Big(\dfrac{x+1}{3x-1}\Big)^{1/(x-1)}$.

Решение. Преобразуем выражение так, чтобы получился второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x+1}{3x-1}\Big)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left(1+\Big(\frac{x+1}{3x-1}-1\Big)\right)^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2(1-x)}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{2(1-x)}\cdot\frac{2(1-x)}{3x-1}\cdot\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{-\frac{2}{3x-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^{\sin x}-1)(3^{x^2}-3^x)}{\ln(\cos x)}$.

Решение. Домножив и разделив на недостающие выражения, сведем знаменатель к третьему замечательному пределу, а множители числителя к четвертому замечательному пределу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2^{\sin x}-1)(3^{x^2}-3^x)}{\ln(\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{3^x(3^{x^2-x}-1)}{x^2-x}\cdot(x^2-x)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+(\cos x-1))}\cdot\frac{1}{\cos x-1}\right) =$$

$$= \ln 2\cdot\ln 3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x\cdot 3^x\cdot(x^2-x)}{\cos x-1}\right) =$$

$$= \ln 2\cdot\ln 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}\cdot x\cdot 3^x\cdot x(x-1)}{\dfrac{\cos x-1}{x^2}\cdot x^2} =$$

$$= \ln 2\cdot\ln 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 3^x\cdot(x-1)}{-0,5\cdot x^2} = 2\cdot\ln 2\cdot\ln 3.$$

п.4.5. Теоремы о непрерывной функции

Простейшие свойства.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_o, то и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ (при дополнительном условии $g(x_o) \neq 0$) непрерывны в точке x_o.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_o, а $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_o)$, то и функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_o.

Первая теорема Вейерштрасса[11].

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Замечание. Для $(a; b)$ (а так же $[a; b)$, $(a; b]$) подобного утверждать нельзя. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ непрерывна на $[0; 1)$, но, очевидно, не является ограниченной так как $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть f не ограничена сверху на $[a; b]$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n \in [a; b]$ такая, что $f(x_n) > n$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

Поскольку $\{x_n\}$ ограниченная последовательность, из нее, по теореме Больцано-Вейерштрасса, можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Тогда, в силу непрерывности, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_o)$.

Но $\{f(x_{n_k})\}$ – подпоследовательность $\{f(x_n)\}$, предел которой равен $+\infty$, следовательно и $f(x_{n_k})$ должна стремится к $+\infty$.

Получили противоречие, значит сделанное предположение не верно, значит f ограничена сверху.

Аналогично доказывается ограниченность снизу. $\square$

Вторая теорема Вейерштрасса.

Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке она достигает своего максимума и минимума.

Замечание. Для $(a; b)$ (а так же $[a; b)$, $(a; b]$) подобного утверждать нельзя.

[11] см. п.3.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $M = \sup f(x)$. Предположим противное: $\forall x \ \ f(x) < M$ (нет "=", то есть у f есть sup но нет max).

Тогда $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывная функция и по первой теореме Вейерштрасса φ ограничена, значит найдется конечное число B такое, что $\varphi(x) \le B \implies \dfrac{1}{M - f(x)} \le B \implies 1 \le BM - Bf(x) \implies f(x) \le M - \dfrac{1}{B}$, а это противоречит тому, что M точная верхняя грань, то есть самое маленькое из чисел, ограничивающих f сверху.

Значит, сделанное предположение не верно. $\square$

Теорема о промежуточном значении.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ $(A \ne B)$, то для любого числа C между A и B, найдется точка $x_o \in (a;b)$ такая, что $f(x_o) = C$ (то есть функция принимает все значения между крайними).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $A < C < B$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$.

$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$,

$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$.

Обозначим J – множество точек отрезка $[a;b]$, в которых $\varphi(x) < 0$, $\sup J = x_o$ (sup существует, так как J ограниченное).

Допустим, что $\varphi(x_o) < 0$. Возьмем $\varepsilon = -\frac{1}{2}\varphi(x_o)$. Так как φ непрерывна, найдется δ такое, что для всех $x \in (x_o - \delta; x_o + \delta)$ будет

$$\varphi(x) \in \Big(\varphi(x_o) - \varepsilon \ ; \ \varphi(x_o) + \varepsilon\Big) = \Big(\tfrac{3}{2}\varphi(x_o) \ ; \ \underbrace{\tfrac{1}{2}\varphi(x_o)}_{<0}\Big).$$

Получается, что справа от x_o есть точки, множества J, а это противоречит тому, что $x_o = \sup J$. Значит $\varphi(x_o) \not< 0$.

Допустим, что $\varphi(x_o) > 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}\varphi(x_o)$. Так как φ непрерывна, найдется δ такое, что для всех $x \in (x_o - \delta; x_o + \delta)$ будет

$$\varphi(x) \in \Big(\varphi(x_o) - \varepsilon \ ; \ \varphi(x_o) + \varepsilon\Big) = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\varphi(x_o)}_{>0} \ ; \ \tfrac{3}{2}\varphi(x_o)\Big).$$

Получается, что слева от x_o есть точки, множества J, а это противоречит тому, что $x_o = \sup J$. Значит $\varphi(x_o) \not> 0$.

Остается единственный вариант: $\varphi(x_o) = 0 \implies f(x_o) = C$. $\square$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Метод математической индукции. Примеры применения. Бином Ньютона.
2. Рациональные и иррациональные числа
3. Счетные и несчетные множества. Счетность рациональных чисел. Несчетность иррациональных чисел.
4. Понятие inf и sup. Определение и характеристическое свойство. Теорема о существовании inf и sup.
5. Простейшие свойства функций. Аналитическая запись условия выпуклости (две формы)
6. Функциональные уравнения, задающие элементарные функции.
7. Бесконечно малые последовательности
8. Бесконечно большие последовательности.
9. Теорема о единственности предела последовательности.
10. Переход к пределу в неравенствах
11. Теорема о двух милиционерах
12. Теоремы о пределе суммы (разности), произведения, частного.
13. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности
14. Теорема Больцано-Вейерштрасса
15. Существование предела монотонной последовательности
16. Число e (определение и доказательство корректности определения)
17. Постоянная Эйлера (определение и доказательство корректности определения)
18. Первый замечательный предел. Следствие.
19. Второй замечательный предел. Следствия.
20. Ограниченность непрерывной функции (первая теорема Вейерштрасса)
21. Теорема о промежуточном значении.
22. Теорема о наибольшем и наименьшем значении (вторая теорема Вейерштрасса)

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

(необходимо знать определения, формулы и формулировки теорем)

1. Арифметические действия с числами $\pm\infty$
2. Определение ограниченного множества
3. Определение функции
4. Определение последовательности
5. Определение ограниченной функции
6. Определение возрастающей и убывающей функции
7. Определение выпуклой вниз и выпуклой вверх функции
8. Определение предела последовательности. Математическая запись
9. Теорема о единственности предела
10. Теорема о переход к пределу в неравенствах
11. Теорема о двух милиционерах
12. Теоремы о пределе суммы (разности), произведения, частного
13. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности
14. Теорема о существовании предела монотонной последовательности
15. Определение предела функции. Математическая запись
16. Определение непрерывной функции
17. Точки разрыва и их классификация
18. Первый замечательный предел, следствие.
19. Второй замечательный предел
20. Третий замечательный предел
21. Четвертый замечательный предел
22. Ограниченность непрерывной функции (первая теорема Вейерштрасса)
23. Теорема о наибольшем и наименьшем значении (вторая теорема Вейерштрасса)
24. Теорема о промежуточном значении.

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ-МИНИМУМ

1. *Арифметические действия с числами $\pm\infty$.*

$$\infty + c = \infty; \qquad c \cdot \infty = \infty; \qquad c/\infty = 0;$$

$$\infty + \infty = \infty; \qquad \infty \cdot \infty = \infty; \qquad c/0 = \infty;$$

$$\infty^c = \infty,\ c > 0; \qquad c^\infty = \infty,\ c > 1;$$

$$\infty^c = 0,\ c < 0; \qquad c^\infty = 0,\ |c| < 1.$$

Не определены операции $0/0;\ \infty/\infty;\ \infty - \infty;\ 0 \cdot \infty;\ 1^\infty;\ 0^0;\ \infty^0$.

2. *Определение ограниченного множества.*

Множество X называется ограниченным если найдется конечное число B такое, что для всех $x \in X$ будет $|x| \le B$.

3. *Определение функции.*

Функцией называется правило, по которому каждому числу x из некоторого множества X ставится в соответствие единственное число y из множества Y. X называется областью определения функции, Y – множеством значений.

4. *Определение последовательности*

Последовательностью называется бесконечное упорядоченное множество чисел: $x_1, x_2, x_3, \ldots$, которое обозначается $\{x_n\}$. Число x_n называется n-ным членом последовательности.

5. *Определение ограниченной функции.*

Функция называется ограниченной, если ограничено множество ее значений.

6. *Определение возрастающей и убывающей функции.*

Функция $f(x)$ называется возрастающей на множестве G, если для всех $x_1, x_2 \in G$ таких, что $x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$. (Если $f(x_1) \le f(x_2)$ не строго возрастающей или неубывающей.)

Функция $f(x)$ называется убывающей на множестве G, если для всех $x_1, x_2 \in G$ таких, что $x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$. (Если $f(x_1) \ge f(x_2)$ не строго убывающей или невозрастающей.)

7. *Определение выпуклой вниз и выпуклой вверх функции.*

Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх на множестве G, если для всех $x_1, x_2 \in G$ график функции между точками $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$ лежит выше отрезка AB.

Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на множестве G, если для всех $x_1, x_2 \in G$ график функции между точками $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$ лежит ниже отрезка AB.

8. *Определение предела последовательности.*

Число a называется пределом последовательности если для любой окрестности a найдется номер n_0 такой, что все члены последовательности с номерами больше n_0 попадают в выбранную окрестность.

Математическая запись:

для конечного a: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon;$

для $a = +\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow x_n > 1/\varepsilon;$

для $a = -\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow x_n < -1/\varepsilon.$

9. *Теорема о единственности предела.*

Если предел существует, то он единственный.

10. *Теорема о переход к пределу в неравенствах.*

Если в окрестности точки x_0 $f(x) < g(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

11. *Теорема о двух милиционерах.*

Если в окрестности точки x_0 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

12. *Теоремы о пределе суммы (разности), произведения, частного.*

Предел суммы, разности, произведения, частного равен, соответственно, сумме, разности, произведению, частному пределов, при условии, что каждый из них существует.

13. *Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.*

Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

14. *Теорема о существовании предела монотонной последовательности.*

Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.

15. *Определение предела функции. Математическая запись.*

(по Гейне) Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$, сходится к a.

(по Коши) Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in U(x_0)$ будет $f(x) \in U(a)$.

Математическая запись (для $x_0, a \neq \infty$): $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta(\varepsilon) : \ \forall|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Если $x_0 = +\infty$, то вместо $|x - x_0| < \delta$ следует писать $x > 1/\delta$, а для $x_0 = -\infty$ пишут $x < -1/\delta$.

Если $a_0 = +\infty$, то вместо $|f(x) - a| < \varepsilon$ следует писать $f(x) > 1/\varepsilon$, а для $a = -\infty$ пишут $f(x) < -1/\varepsilon$.

16. *Определение непрерывной функции.*

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

17. *Точки разрыва и их классификация.*

Функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0, если для некоторого $\varepsilon > 0$ она непрерывна в каждой точке множества $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, но не является непрерывной в точке x_0.

x_0 называется устранимой точкой разрыва, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0).$$

x_0 называется точкой разрыва первого рода, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

но оба предела существуют и конечны.

x_0 называется точкой разрыва второго рода, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty.$$

<u>18. *Первый замечательный предел:*</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Следствие: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

<u>19. *Второй замечательный предел:*</u> $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

<u>20. *Третий замечательный предел:*</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

<u>21. *Четвертый замечательный предел:*</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$

<u>22. *Ограниченность непрерывной функции (первая теорема Вейерштрасса).*</u>

Если функция непрерывна на замкнутом отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

<u>23. *Теорема о наибольшем и наименьшем значении (вторая теорема Вейерштрасса).*</u>

Если функция непрерывна на замкнутом отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке у нее есть точка максимума и точка минимума.

<u>24. *Теорема о промежуточном значении.*</u>

Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого числа C между числами A и B найдется точка $x_0 \in [a; b]$, в которой $f(x_0) = C$.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ УЧЕБНИКИ И ПОСОБИЯ

а) Основная литература:

1. ***Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа*****:** учебник в 2ч./Г. М. Фихтенгольц. - 9-е изд., стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008. **Ч. 1**. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008. – 440. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=410 (электронный ресурс)

2. ***Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа:*** учебник в 2 ч./Г. М. Фихтенгольц. - 9-е изд., стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008. **Ч. 2**. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008. – 463. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=411 (электронный ресурс)

б) дополнительная литература:

1. ***Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.*** - М., АСТ Астрель, 2007; 2009; 2010 .
2. ***Рудин У. Основы математического анализа***. - СПб., М., Краснодар: Лань, 2004.
3. ***Гудошникова Е.В. Практические занятия по математическому анализу. Часть 1***: ***Вычисление пределов***. Учеб. пособие. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. – 20 с.