Гудошникова Е.В.

ПРОИЗВОДНЫЕ И ПЕРВООБРАЗНЫЕ

Лекции по курсу «Математический анализ».

Часть 2.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

§5. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

п.5.1. Понятие производной

Определение производной.

Производной функции f в точке x называется предел отношения:

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}.$$

отметим два очевидных свойства:

• $c' = 0$ (производная постоянной равна нулю)

• $\big(c\, f(x)\big)' = c\big(f(x)\big)'$ (константу можно выносить за знак производной).

• Пример 1. Найдем производную функции $f(x) = \sin x$:

$$(\sin x)' = \lim_{\delta \to 0} \frac{\sin(x+\delta) - \sin(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \underbrace{\cos\left(\frac{2x+\delta}{2}\right)}_{\substack{\downarrow \\ \cos x}} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \cos x.$$

(Применили первый замечательный предел.)

• Пример 2. Найдем производную функции $f(x) = \cos x$:

$$(\cos x)' = \lim_{\delta \to 0} \frac{\cos(x+\delta) - \cos(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{2x+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\delta} =$$

$$= -\lim_{\delta \to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{2x+\delta}{2}\right)}_{\substack{\downarrow \\ \sin x}} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = -\sin x.$$

(Применили первый замечательный предел.)

• Пример 3. Найдем производную функции $f(x) = a^x$:

$$(a^x)' = \lim_{\delta \to 0} \frac{a^{x+\delta} - a^x}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{a^x \left(a^\delta - 1\right)}{\delta} = a^x \ln a.$$

(Применили четвертый замечательный предел.)

Отсюда, в частности, следует, что $(e^x)' = e^x$.

• Пример 4. Найдем производную функции $f(x) = \log_a x$:

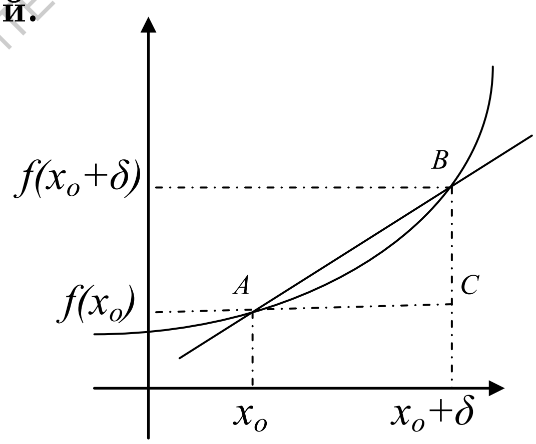
$$(\log_a x)' = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log_a(x+\delta) - \log_a(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log_a \left(\frac{x+\delta}{x}\right)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \left(\frac{x+\delta}{x}\right)}{\ln a \cdot \delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\delta}{x}\right)}{\ln a \cdot x \cdot \frac{\delta}{x}} = \frac{1}{\ln a \cdot x} \ .$$

(Применили третий замечательный предел.)

Отсюда, в частности, следует, что $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Геометрический смысл производной.



Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и точки $A(x_o; f(x_o))$, $B(x_o + \delta; f(x_o + \delta))$, $C(x_o + \delta; f(x_o))$.

Тогда

$AC = \delta$

$BC = f(x_o + \delta) - f(x_o)$

Для треугольника ABC

$\operatorname{tg} \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$ – тангенс угла наклона секущей к графику функции.

Если перейти к пределу при $\delta \to 0$, то секущая перейдет в касательную к графику функции в точке A. Следовательно, $f'(x_o)$ равна тангенсу наклона касательной к графику функции в тоске с абсциссой x_o.

Уравнения касательной и нормали.

Рассмотрим касательную и нормаль к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(x_o; f(x_o))$. Пусть уравнение касательной имеет вид

$$y = k_1 x + b_1,$$

уравнение нормали

$$y = k_2 x + b_2.$$

Во-первых, как следует из геометрического смысла производной, $k_1 = f'(x_o)$.

Во-вторых, так как касательная и нормаль перпендикулярны друг другу, $k_1 k_2 = -1 \implies k_2 = -\dfrac{1}{f'(x_o)}$ (если $f'(x_o) \neq 0$).

В-третьих обе прямые проходят через точку $A(x_o; f(x_o))$, следовательно

$$f(x_o) = k_1 x_o + b_1 \implies b_1 = f(x_o) - k_1 x_o = f(x_o) - f'(x_o) x_o \quad \text{и}$$

$$f(x_o) = k_2 x_o + b_2 \implies b_2 = f(x_o) - k_2 x_o = f(x_o) + \frac{x_o}{f'(x_o)}$$

Подставляя найденные значения, получим

уравнение касательной:

$$y = f'(x_o) x_o + f(x_o) - f'(x_o) x_o \quad \text{или} \quad y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o),$$

уравнение нормали (если $f'(x_o) \neq 0$):

$$y = -\frac{x}{f'(x_o)} + f(x_o) + \frac{x_o}{f'(x_o)} \quad \text{или} \quad y = -\frac{x - x_o}{f'(x_o)} + f(x_o).$$

Если $f'(x_o) = 0$, то касательная параллельна оси OX, а нормаль перпендикулярна. Уравнение вертикальной прямой, проходящей через точку с абсциссой x_o имеет вид: $x = x_o$ – уравнение нормали в случае $f'(x_o) = 0$.

Физический смысл производной.

Рассмотрим движение материальной точки. Обозначим: t – время, $S(t)$ – пройденный путь. Тогда

$$S'(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{S(t + \delta) - S(t)}{\delta} = v(t) \quad - \text{ скорость точки в момент } t.$$

$$v'(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{v(t + \delta) - v(t)}{\delta} = a(t) \quad - \text{ ускорение точки в момент } t.$$

п.5.2. Понятие дифференциала

Определение дифференциала.

Рассмотрим приращение функции: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Если приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \alpha(x), \quad \text{где } A(x) \neq \infty, \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\Delta x} = 0,$$

то главная линейная часть этого приращения $A(x)\Delta x$ называется дифференциалом функции f и обозначается df, а функция называется дифференцируемой.

То есть $\quad \Delta f = df + o(\Delta x)$.

Критерий дифференцируемости.

Функция дифференцируема тогда и только тогда, когда она имеет конечную производную.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема. Тогда существует конечное число A такое, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x) \implies$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \implies$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A, \quad \text{то есть } f'(x) = A,$$

то есть если функция дифференцируема, то она имеет конечную производную.

Пусть теперь функция имеет конечную производную: $f'(x) = A$. То есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A \implies$$

по основной лемме о бесконечно малой

$$\gamma(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - A \text{ есть бесконечно малая} \implies$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + \gamma(x)\Delta x, \text{ причем } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma(x)\Delta x}{\Delta x} = 0,$$

то есть $\gamma(x)\Delta x = o(\Delta x)$, а это и означает, что f дифференцируема. $\square$

Выражение дифференциала через производную.

Из доказательства критерия дифференцируемости видно, что

$$df = f'(x)\Delta x.$$

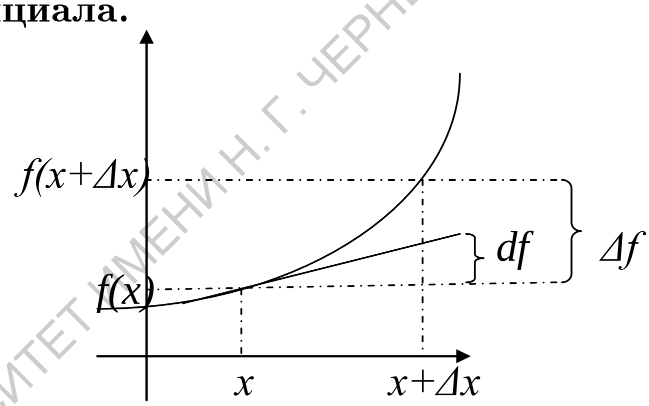
Поскольку $dx = (x + \Delta x) - x = \Delta x$, выражение для дифференциала может быть записано в виде

$$df = f'(x)dx.$$

Геометрический смысл дифференциала.

Рассмотрим график функции.

Поскольку $df = f'(x)dx$, а $f'(x)$ равна тангенсу угла наклона касательной, получаем (см. рисунок), что дифференциал – то приращение, которое получила бы функция, если бы ее графиком была прямая.



п.5.3. Правила вычисления производных и дифференциалов

Производная суммы и разности.

$$\Big(f(x) + g(x)\Big)' = \lim_{\delta\to 0} \frac{\big[f(x+\delta) + g(x+\delta)\big] - \big[f(x) + g(x)\big]}{\delta} =$$
$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{\big[f(x+\delta) - f(x)\big] + \big[g(x+\delta) - g(x)\big]}{\delta} =$$
$$= \lim_{\delta\to 0} \left[\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} + \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta}\right] = f'(x) + g'(x).$$

Аналогично для разности: $\Big(f(x) - g(x)\Big)' = f'(x) - g'(x)$.

Производная произведения.

$$\Big(f(x)g(x)\Big)' = \lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)g(x+\delta)-f(x)g(x)}{\delta} =$$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)g(x+\delta)-f(x)g(x+\delta)+f(x)g(x+\delta)-f(x)g(x)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{\big[f(x+\delta)-f(x)\big]g(x+\delta)+f(x)\big[g(x+\delta)-g(x)\big]}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\,g(x+\delta)+f(x)\,\frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta}\right] =$$

$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Аналогично для любого числа множителей:
$\big(u\,v\,w\,h\big)' = u'\,v\,w\,h + u\,v'\,w\,h + u\,v\,w'\,h + u\,v\,w\,h'$

Производная дроби.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\delta\to 0}\frac{\frac{f(x+\delta)}{g(x+\delta)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)g(x)-f(x)g(x+\delta)}{\delta\,g(x)\,g(x+\delta)} =$$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\delta)}{\delta\,g(x)\,g(x+\delta)} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{\big[f(x+\delta)-f(x)\big]g(x)-f(x)\big[g(x+\delta)-g(x)\big]}{\delta\,g(x)\,g(x+\delta)} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\,g(x)-f(x)\,\frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta}\right]\frac{1}{g(x)g(x+\delta)} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

В частности,

- $$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\big(\sin x\big)'\cos x-\sin x\big(\cos x\big)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- $$(\mathrm{ctg}x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\big(\cos x\big)'\sin x-\cos x\big(\sin x\big)'}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Производная обратной функции.

Если в окрестности точки x_o функция f непрерывна, строго монотонна и дифференцируема, то обратная к ней функция g имеет производную в точке $y_o = f(x_o)$, причем $g'(y_o) = \dfrac{1}{f'(x_o)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим:

$f(x_o) = y_o,\ \ f(x_o+\delta) = y_o + \varepsilon \implies$
$g(y_o) = x_o,\ \ g(y_o+\varepsilon) = x_o + \delta.$

Отметим, что в силу непрерывности, если $\delta \to 0$, то и $\varepsilon \to 0$. Поэтому

$$f'(x_o) = \lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_o+\delta)-f(x_o)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0,\ \varepsilon\to 0}\frac{(y_o+\varepsilon)-y_o}{(x_o+\delta)-x_o} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{g(y_o+\varepsilon)-g(y_o)} = \frac{1}{g'(y_o)},$$

откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

• Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$ и обратную к ней $x = \sin y$ для $x \in [-1;1]$, $y \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

• Рассмотрим функцию $y = \arccos x$ и обратную к ней $x = \cos y$ для $x \in [-1;1]$, $y \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

$$\left(\arccos x\right)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

• Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg} x$ и обратную к ней $x = \operatorname{tg} y$ для $x \in (-\infty;+\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

• Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arcctg} x$ и обратную к ней $x = \operatorname{ctg} y$ для $x \in (-\infty;+\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

$$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = \frac{1}{-\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}} = -\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Производная сложной функции.

Рассмотрим сложную функцию: $h(x) = g\big(f(x)\big)$, где $f(x)$ – функция, дифференцируемая в окрестности точки x_o, $g(y)$ – функция, дифференцируемая в окрестности $y_o = f(x_o)$.

Обозначим $f(x_o + \Delta x) = y_o + \Delta y$. Отметим, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$. Тогда

$$h'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_o + \Delta x) - h(x_o)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\big(f(x_o + \Delta x)\big) - g\big(f(x_o)\big)}{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)} \cdot \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0}} \frac{g(y_o + \Delta y) - g(y_o)}{\Delta y} \cdot \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = g'(y) \cdot f'(x)$$

- Пример 1. Найдем производную степенной функции:

$$\big(x^a\big)' = \Big(\big(e^{\ln x}\big)^a\Big)' = \big(e^{a \ln x}\big)' \underset{y = a\ln x}{=} \big(e^y\big)' \cdot y' = e^y \cdot \big(a \ln x\big)' =$$
$$= e^y \cdot \frac{a}{x} = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

- Пример 2. Найдем производные гиперболических функций:

$$\big(\operatorname{sh} x\big)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$
$$\big(\operatorname{ch} x\big)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

- Выведем формулу для производной степенно-показательного выражения:

$$\big(u^v\big)' = \Big(\big(e^{\ln u}\big)^v\Big)' = \big(e^{v \ln u}\big)' = e^{v \ln u}\big(v \ln u\big)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right)$$

Дифференциал сложной функции.

Пусть h сложная функция x: $h = g(y)$, $y = f(x)$. Тогда

$$dh = h'(x)dx.$$

С другой стороны

$$dh = g'(y)\, f'(x)dx = g'(y)\, dy$$

Получили, что дифференциал записан в том же виде, как и в формуле для дифференциала функции независимой переменной x, хотя аргумент y является не независимой переменной, а функцией.

Следовательно, выражение дифференциала функции в виде произведения производной этой функции на дифференциал её аргумента справедливо независимо от того, является ли аргумент независимой переменной или функцией другой переменной. Это свойство называется инвариантностью (неизменностью) формы дифференциала.

Производная функции, заданной параметрически.

Система уравнений $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где ϕ и ψ дифференцируемые функции и $\phi'(t) \neq 0$, определяет в некоторой области однозначную дифференцируемую функцию $y(x)$, причем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Действительно, так как $\phi'(t) \neq 0$, $x = \phi(t)$ строго монотонна и существует обратная функция $t = t(x)$. Тогда y можно рассматривать как сложную функцию: $y = y(t(x))$ и применяя формулы для производной сложной функции и обратной функции, получаем: $y'(x) = y'(t) \cdot t'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Производная функции, заданной неявно.

Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x; y) = 0$, то производная $y'(x)$ может быть найдена из уравнения $\frac{d}{dx}F(x; y) = 0$.

(доказательство этого утверждение будет дано позже в параграфе "Дифференцирование функции многих переменных")

Пример. Найти $y'(x)$ (в области существования), если $x \sin y + xy = 0$.
Решение. Продифференцируем данное уравнение:

$$x' \sin y + x(\sin y)' + x'y + xy' = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \sin y + x \cos y \cdot y' + y + xy' = 0 \;\;\Rightarrow$$
$$y'(x \cos y + x) = -\sin y - y \;\;\Rightarrow\;\; y' = -\frac{\sin y + y}{x \cos y + x}.$$

Сводная таблица производных и правил. ($a = \mathrm{const}$).

$$a' = 0 \qquad x' = 1 \qquad (z^n)' = nz^{n-1} \cdot z'$$

$$(\sin z)' = \cos z \cdot z' \qquad (\mathrm{sh} z)' = \mathrm{ch} z \cdot z' \qquad (\arcsin z)' = \frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$(\cos z)' = -\sin z \cdot z' \qquad (\mathrm{ch} z)' = \mathrm{sh} z \qquad (\arccos z)' = -\frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$(\mathrm{tg}\, z)' = \frac{z'}{\cos^2 z} \qquad (\mathrm{th} z)' = \frac{z'}{\mathrm{ch}^2 z} \qquad (\mathrm{arctg}\, z)' = \frac{z'}{1 + z^2}$$

$$(\mathrm{ctg}\, z)' = -\frac{z'}{\sin^2 z} \qquad (\mathrm{cth}\, z)' = -\frac{z'}{\mathrm{sh}^2 z} \qquad (\mathrm{arcctg}\, z)' = -\frac{z'}{1 + z^2}$$

$(a^z)' = a^z \ln a \cdot z',\ a > 0,$ в частности $(e^z)' = e^z \cdot z'$

$(\log_a z)' = \dfrac{z'}{z \ln a},\ a > 0,$ в частности $(\ln z)' = \dfrac{z'}{z}$

$$(au)' = a \cdot u' \qquad (u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \qquad (u^v)' = u^v(\ln u \cdot v)'$$

Пример 1. Найти производную $(\sin x^2)'$.

Решение. Такой функции в таблице нет, поэтому сделаем замену $z = x^2$:

$$(\sin x^2)' = (\sin z)' = \cos z \cdot z' = (\text{выполняем обратную замену})$$
$$= \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x \cdot x' = 2x \cos x^2.$$

Пример 2. Найти производную $(\sin^2 x)'$.

Решение. Как и в примере 1, необходима замена. У данной функции "последняя" операция – "квадрат" (в примере 1 "последним" был "синус"). Заменяем все, кроме этой "последней операции": $z = \sin x$. Тогда

$$(\sin^2 x)' = (z^2)' = 2z \cdot z' = (\text{выполняем обратную замену})$$
$$= 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot x' = \sin 2x.$$

Пример 3. Найти производную $(\sin^3 x^4)'$.
Решение. Аналогично примерам 1 и 2:

$$(\sin^3 x^4)' =_{(\text{замена } z=\sin x^4)} = (z^3)' = 3z^2 z' =_{(\text{обратная замена})}$$
$$= 3\sin^2 x^4 \cdot (\sin x^4)' =_{(\text{замена } z=x^4\text{, заменяем только в производной})} =$$
$$= 3\sin^2 x^4 \cdot (\sin z)' = 3\sin^2 x^4 \cdot \cos z \cdot z' =_{(\text{обратная замена})}$$
$$= 3\sin^2 x^4 \cdot \cos x^4 \cdot (x^4)' = 3\sin^2 x^4 \cdot \cos x^4 \cdot 4x^3 \cdot x' = 12x^3 \sin^2 x^4 \cos x^4.$$

Пример 4. Найти производную $(x^5 \sin x)'$.
Решение. У данной функции "последняя" операция – "умножение", поэтому применяем сначала формулу "производная произведения":

$$(x^5 \sin x)' = (x^5)' \sin x + x^5 (\sin x)' = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x.$$

п.5.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Понятие производной n-го порядка.

Производной n-го порядка функции $f(x)$ в точке x называется производная от $(n$-1)-ой производной этой функции и обозначается

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)', \quad f'''(x) = \big(f''(x)\big)', \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)'$$

Последовательным дифференцированием легко получить формулы для производных n-го порядка элементарных функций:

$$\big(\sin x\big)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\big(\cos x\big)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\big(a^x\big)^{(n)} = a^x\big(\ln a\big)^n, \quad \text{в частности } \big(e^x\big)^{(n)} = e^x$$

$$\big(\operatorname{sh} x\big)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & n \text{ четное} \\ \operatorname{ch} x, & n \text{ нечетное} \end{cases}$$

$$\big(\operatorname{ch} x\big)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & n \text{ четное} \\ \operatorname{sh} x, & n \text{ нечетное} \end{cases}$$

Так же очевидно, что $\big(u+v\big)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$.

Производная n-го порядка от произведения (формула Лейбница[1]).

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Замечание. И формула и ее доказательство похожи на бином Ньютона (см. §1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции.

Для $n = 1$ доказываемое равенство примет вид:

$$(f\,g)' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)} = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)} = f g' + f' g,$$

что, очевидно, верно.

Пусть равенство выполнено для некоторого n. Тогда для $n+1$ имеем:

$$(f\,g)^{(n+1)} = \left((f\,g)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \boxed{=}$$

[1] Готфрид Вильгельм Лейбниц 21 июня (1 июля) 1646 - 14 ноября 1716) - немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской Академии наук. Независимо от Ньютона, создал математический анализ, комбинаторику как науку, заложил основы математической логики, описал двоичную систему счисления, в механике ввёл прообраз современного понятия кинетической энергии и сформулировал закон сохранения энергии, в психологии развил учение о бессознательной психической жизни, развил учение об анализе и синтезе, впервые сформулировал закон достаточного основания, ввёл термин "модель", писал о возможности машинного моделирования функций человеческого мозга, высказал идею о превращении одних видов энергии в другие, сформулировал один из важнейших вариационных принципов физики - "принцип наименьшего действия" - и сделал ряд открытий в специальных разделах физики, ввёл идею целостности органических систем, принцип несводимости органического к механическому и высказал мысль об эволюции Земли. (Материал из Википедии)

обозначим в первой сумме $k+1=k^*$ (или $k=k^*-1$)

$$\boxed{=}\sum_{k^*=1}^{n+1}\binom{n}{k^*-1}f^{(k^*)}g^{(n-k^*+1)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}=$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n-k+1)}+\binom{n}{n}f^{(n+1)}g^{(0)}+}_{\substack{\text{первая сумма}\\ \text{(отдельно выписано слагаемое для } k=n+1)}}$$

$$+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}+\binom{n}{0}f^{(0)}g^{(n+1)}}_{\substack{\text{вторая сумма}\\ \text{(отдельно выписано слагаемое для } k=0)}}=$$

$$=\binom{n}{0}f^{(0)}g^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]f^{(k)}g^{(n-k+1)}+$$

$$+\binom{n}{n}f^{(n+1)}g^{(0)}\boxed{=}$$

во-первых, $\displaystyle\binom{n}{0}=1=\binom{n+1}{0}$;

во-вторых, $\displaystyle\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{n+1}{(n-k+1)k}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}$$

в-третьих, $\displaystyle\binom{n}{n}=1=\binom{n+1}{n+1}$;

$$\boxed{=}\binom{n+1}{0}f^{(0)}b^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}+$$

$$+\binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}g^{(0)}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}$$

Таким образом получили:

$$(f\,g)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)},$$

то есть доказываемое равенство выполнено и для $n+1$. $\square$

Дифференциалы высших порядков.

• Определение. Дифференциалом порядка n, где $n > 1$, от функции f в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от дифференциала порядка $(n-1)$, то есть $d^n f = d(d^{n-1} f)$

• Формула. Для функции $f(x)$, зависящей от одной независимой переменной x второй и третий дифференциалы выглядят так:

$d^2 f = d(df) = d(f' dx) = d(f')dx = (f'' dx)dx = f'' dx^2$

$d^3 f = d(d^2 f) = d(f'' dx^2) = d(f'')dx^2 = (f''' dx)dx^2 = f''' dx^3$.

Отсюда можно вывести общий вид дифференциала n-го порядка от функции $f(x)$, при условии, что x - независимая переменная:

$$d^n f = f^{(n)} dx^n.$$

При вычислении дифференциалов высших порядков очень важно, что dx есть произвольное и не зависящее от x приращение переменной, которое при дифференцировании по x следует рассматривать как постоянный множитель. Если x не является независимой переменной, то дифференциал будет другим.

• Нарушение инвариантности. При $n \geq 2$ n-й дифференциал не инвариантен (в отличие от инвариантности первого дифференциала), то есть выражение $d^n f$ зависит, вообще говоря, от того, рассматривается ли переменная x как независимая, либо как некоторая промежуточная функция другого переменного, например, $x = \varphi(t)$. Тогда $d^2 x \neq 0$ (кроме случая линейной функции). В этом случае формула для второго дифференциала будет иметь вид:

$d^2 f = f''(dx)^2 = d(df) = d(f' dx) = f'' (dx)^2 + f' d^2 x$

То есть уже второй дифференциал не обладает свойством инвариантности при замене переменной. Также не инвариантны дифференциалы порядков 3 и выше.

п.5.5. Дифференциальные теоремы о среднем

Теорема Ферма[2]**.**

В точке локального экстремума функции производная (если она существует) равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности x_o – точка локального максимума функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности этой точки и дифференцируемой в x_o. (Случай минимума доказывается аналогично).

$$\text{Для } x > x_o \quad \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} < 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_o+0}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq 0.$$

$$\text{Для } x < x_o \quad \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} > 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_o-0}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq 0.$$

Так как существует $f'(x) = \lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, оба односторонних предела равны друг другу, то есть равны нулю, а следовательно и общий предел, как и производная, так же равны нулю. □

Теорема Ролля[3]**.**

Если функция f непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и на концах отрезка принимает равные значения, то найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

[2] Пьер де Ферма, 17 августа 1601 - 12 января 1665 - французский математик-самоучка, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. Блестящий полиглот. Наиболее известен формулировкой Великой теоремы Ферма, "самой знаменитой математической загадки всех времён": для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет натуральных решений. Теорема была сформулирована им в 1637 году, на полях книги с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно для изложения на полях. Доказательство этого факта до сих пор не найдено (но и не опровергнуто). (Материал из Википедии)

[3] Мишель Ролль, 21 апреля 1652, Амбер - 8 ноября 1719, французский математик. Горячо нападал на дифференциальное исчисление и на анализ Декарта. В 1705 году академия признала Ролля неправым, с чем позднее согласился и сам Ролль. Полемические сочинения Ролля полны ошибок и отличаются темнотой изложения. Несмотря это, он всё-таки заставил Лейбница и его сторонников проявить к логическим основаниям предмета большую внимательность, чем это обыкновенно делается в отношении новых учений. (Материал из Википедии)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По второй теореме Вейерштрасса функция достигает своего минимального и максимального значения.

Если $\min f = \max f$, то $f(x) = \mathrm{const}$ и $f'(x) = 0$ во всех точках.

Если $\min f \neq \max f$, то так как на концах отрезка функция принимает равные значения, экстремум достигается в некоторой точке $\xi \in (a;b)$ и в силу теоремы Ролля в этой точке $f'(\xi) = 0$. $\square$

Теорема Лагранжа[4].

Если функция f непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то найдется точка $\xi \in (a;b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

(формула конечных приращений Лагранжа)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Очевидно, что φ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, при этом

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0 \quad \text{и}$$

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0,$$

то есть φ удовлетворяет теореме Ролля, согласно которой найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $\varphi'(\xi) = 0$.

Так как

$$\varphi'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)' = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Получаем, что

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \implies f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

[4]Жозеф Луи Лагранж, 25 января 1736 - 10 апреля 1813, французский астроном и механик итальянского происхождения, крупнейший математик XVIII века. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала. Внёс огромный вклад в математический анализ, теорию чисел, алгебру, теорию вероятностей и численные методы, создал вариационное исчисление. (Материал из Википедии)

Теорема Коши[5]**.** Если

Если функции f и g непрерывны на $[a;b]$, дифференцируемы на $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0$, то найдется точка $\xi \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$$

Очевидно, что φ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, при этом

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(a)-g(a)\big) = 0 \quad \text{и}$$

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(b)-g(a)\big) = 0,$$

то есть φ удовлетворяет теореме Ролля, согласно которой найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $\varphi'(\xi) = 0$.

Так как

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)' = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{d(b)-g(a)}\, g'(x)$$

Получаем, что

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi),$$

откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

[5] см. п.3.5

п.5.6. Формула Тейлора[6]

Формула Тейлора для многочлена.

Рассмотрим многочлен: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$. Очевидно, что $p(0) = a_0$.

Так как

$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} \implies p'(0) = a_1$

$p''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + ... + n(n-1)a_nx^{n-2} \implies p''(0) = 2a_2$

$p'''(x) = 3\cdot 2a_3 + ... + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \implies p'''(0) = 3\cdot 2\,a_3$

....

аналогично $p^{(n)}(0) = n!\,a_n$

Откуда получаем, что для $k = 0, 1, 2, ..., n$ $a_k = \dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}$, следовательно, многочлен может быть записан в виде:

$$p(x) = \frac{p(0)}{0!} + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + ...\frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k + ... + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Аналогично в общем случае для многочлена:

$p(x) = a_0 + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + a_3(x - x_o)^3 + ... + a_n(x - x_o)^n$ получается представление

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k$$

---

[6]Брук Тейлор, 18 августа 1685 - 29 декабря 1731, английский математик. Получил степень доктора прав, но независимо от этого изучал математику. Известны его статьи относящиеся к весьма разнообразным вопросам: о центре качаний, о полёте снарядов, о взаимодействии магнитов, о капиллярных явлениях, о сцеплении между жидкостями и твёрдыми телами. Ему принадлежит большой трактат, в котором, кроме вывода его знаменитой формулы, находится теория колебания струн, в которой он приходит к тем же самым результатам, к которым впоследствии пришли Даламбер и Лагранж. Он же первый занимался теоретически вопросом об астрономической рефракции в атмосфере. Обладая большими математическими способностями, в то же время был весьма хорошим музыкантом и успешно занимался живописью. Под конец жизни предался исследованиям по вопросам религии и философии. (Материал из Википедии)

Формула Тейлора для произвольной функции.

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_o все производные до n-го порядка включительно. Составим многочлен

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k$$

Обозначим $r_n(x)$ – разность между исходной функцией и составленным многочленом, тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k + r_n(x)$$

Полученное представление называется формула Тейлора порядка n для функции f в окрестности точки x_o. Величина $r_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора порядка n.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано[7].

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_o все производные до n-го порядка включительно.

Для остаточного члена формулы Тейлора имеет место соотношение: при $x \to x_o \quad r_n(x) = o\big((x-x_o)^n\big)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$r_n(x) = f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x-x_o) - \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n \implies r_n(x_o) = 0,$$

$$r_n'(x) = f'(x) - f'(x_o) - \frac{f''(x_o)}{2!}2(x-x_o) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}n(x-x_o)^{n-1} \implies r_n'(x_o) = 0,$$

[7] Джузеппе Пеано, 27 августа 1858 - 20 апреля 1932, итальянский математик. Внёс вклад в математическую логику, аксиоматику, философию математики. Создатель вспомогательного искусственного языка. Более всего известен как автор стандартной аксиоматизации натуральной арифметики. (Материал из Википедии)

$$r_n''(x) = f''(x) - f''(x_o) - \frac{f'''(x_o)}{3!} 3 \cdot 2\,(x - x_o) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} n(n-1)(x - x_o)^{n-2} \implies r_n'(x_o) = 0,$$

и так далее. Таким образом получаем:

$$r_n(x_o) = r_n'(x_o) = r_n''(x_o) = r_n'''(x_o) = \ldots = r_n^{(n)}(x_o) = 0$$

По определению производной

$$\overset{0}{\overset{\|}{r_n^{(n)}(x_o)}} = \lim_{x \to x_o} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - \overset{0}{\overset{\|}{r_n^{(n-1)}(x_o)}}}{x - x_o} \implies \lim_{x \to x_o} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{x - x_o} = 0,$$

то есть $r_n^{(n-1)}(x) = o(x - x_o)$. $\square$

По теореме Лагранжа для некоторой точки ξ, лежащей между точками x и x_o,

$$\frac{r_n^{(n-2)}(x) - \overset{0}{\overset{\|}{r_n^{(n-2)}(x_o)}}}{x - x_o} = r_n^{(n-1)}(\xi) = o(x - x_o)$$
$$\implies r_n^{(n-2)}(x) = o\big((x - x_o)^2\big).$$

Аналогично

$$\frac{r_n^{(n-3)}(x) - r_n^{(n-3)}(x_o)}{x - x_o} = r_n^{(n-2)}(\xi) = o\big((x - x_o)^2\big)$$
$$\implies r_n^{(n-3)}(x) = o\big((x - x_o)^3\big).$$

И так далее, получим $r_n^{(n-n)}(x) = o\big((x - x_o)^n\big)$. $\square$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа[8].

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_o все производные до $(n+1)$-го порядка включительно.

[8]см. п.5.4

Тогда найдется точка ξ, лежащая между точками x и x_o, такая, что для остаточного члена формулы Тейлора имеет место равенство:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции

$\varphi(t) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ и $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$.

найдется точка ξ, лежащая между точками x и x_o, такая, что

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_o)}{\psi(x)-\psi(x_o)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \qquad (*)$$

Подсчитаем все величины, входящие в последнее равенство:

$\varphi(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k =$

(так как слагаемые суммы кроме слагаемого при $k=0$ равны нулю)

$$= f(x) - \frac{f^{(0)}(x)}{0!} = 0,$$

$\varphi(x_o) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = r_n(x),$

$$\varphi'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(f^{(k)}(t)(x-t)^k\right)' =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Bigg(f^{(k+1)}(t)(x-t)^k - \underbrace{f^{(k)}(t)k(x-t)^{k-1}}_{=0 \text{ при } k=0}\Bigg) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k + \sum_{k^*=0}^{n-1} \frac{1}{k^*!} f^{(k^*+1)}(t)(x-t)^{k^*} =$$

$$= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

$$\Longrightarrow \varphi'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

$\psi(x) = (x-x)^{n+1} = 0$

$\psi(x_o) = (x - x_o)^{n+1}$

$\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n \implies \psi'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n$

Подставим найденные величины в выражение (*):

$$\frac{-r_n(x)}{-(x-x_o)^{(n+1)}} = \frac{-\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n} \implies$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \square$$

Единственность разложения по формуле Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_o все производные до n-го порядка включительно, представлена в виде

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_o) + a_2(x-x_o)^2 + ... + a_n(x-x_o)^n + o\big((x-x_o)^n\big)$,

то обязательно $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ – коэффициенты Тейлора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют два представления:

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_o) + a_2(x-x_o)^2 + ... + a_n(x-x_o)^n + o\big((x-x_o)^n\big)$

и

$f(x) = b_0 + b_1(x-x_o) + b_2(x-x_o)^2 + ... + b_n(x-x_o)^n + o\big((x-x_o)^n\big)$

то есть имеется равенство:

$$a_0 + a_1(x-x_o) + a_2(x-x_o)^2 + ... + a_n(x-x_o)^n + o\big((x-x_o)^n\big) =$$
$$= b_0 + b_1(x-x_o) + b_2(x-x_o)^2 + ... + b_n(x-x_o)^n + o\big((x-x_o)^n\big)$$

Подставляя $x = x_o$, получим, что $a_0 = b_0$, значит первые слагаемые можно сократить:

$$a_1(x-x_o) + a_2(x-x_o)^2 + ... + a_n(x-x_o)^n + o\big((x-x_o)^n\big) =$$
$$= b_1(x-x_o) + b_2(x-x_o)^2 + ... + b_n(x-x_o)^n + o\big((x-x_o)^n\big)$$

Поделим все равенство на $(x-x_o)$:

$$a_1 + a_2(x-x_o) + ... + a_n(x-x_o)^{n-1} + o\big((x-x_o)^{n-1}\big) =$$
$$= b_1 + b_2(x-x_o) + ... + b_n(x-x_o)^{n-1} + o\big((x-x_o)^{n-1}\big)$$

Подставляя $x = x_o$, получим, что $a_1 = b_1$ и так далее. Повторяя шаги, получим, что все $a_k = b_k$, значит представление для f единственное. $\square$

Разложение по формуле Тейлора некоторых функций.

- Рассмотрим функцию $\sin x$, $x_o = 0$.

$\sin(0) = 0$

$(\sin x)' = \cos x \implies \sin'(0) = 1$

$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x \implies \sin''(0) = 0$

$(\sin x)''' = (-\sin x)' = -\cos x \implies \sin'''(0) = -1$

$(\sin x)^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x \implies \sin^{(4)}(0) = 0$ и так далее.

Таким образом, получаем представление:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_n(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_n(x)$$

- Рассмотрим функцию $\cos x$, $x_o = 0$.

$\cos(0) = 1$

$(\cos x)' = -\sin x \implies \cos'(0) = 0$

$(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x \implies \cos''(0) = -1$

$(\cos x)''' = (-\cos x)' = \sin x \implies \cos'''(0) = 0$

$(\cos x)^{(4)} = (\sin x)' = \cos x \implies \cos^{(4)}(0) = 1$ и так далее.

Таким образом, получаем представление:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + r_n(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + r_n(x)$$

- Рассмотрим функцию e^x, $x_o = 0$.

$e^0 = 1$

$(e^x)' = e^x \implies (e^x)'_{x=0} = 1$

$(e^x)'' = (e^x)' = e^x \implies (e^x)''_{x=0} = 1$ и так далее.

Таким образом, получаем представление:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x)$$

• Рассмотрим функцию $\ln(1+x)$, $x_o = 0$.

$$\ln(1+x)_{x=0} = 0$$

$$\big(\ln(1+x)\big)' = \frac{1}{1+x} \Longrightarrow \big(\ln(1+x)\big)'_{x=0} = 1$$

$$\big(\ln(1+x)\big)'' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} = \Longrightarrow \big(\ln(1+x)\big)''_{x=0} = -1$$

$$\big(\ln(1+x)\big)''' = \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{2}{(1+x)^3} = \Longrightarrow \big(\ln(1+x)\big)'''_{x=0} = 2$$

$$\big(\ln(1+x)\big)^{(4)} = \left(\frac{2}{(1+x)^3}\right)' = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4} = \Longrightarrow \big(\ln(1+x)\big)^{(4)}_{x=0} = 2\cdot 3$$

и так далее.

Таким образом, получаем представление:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + r_n(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}x^k}{k} + r_n(x)$$

п.5.7. Раскрытие неопределенностей

Первое правило Лопиталя[9] (неопределенности 0/0).

Если выполнены условия:

(1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки a кроме, быть может, самой точки a, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю;

(2) $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в указанной окрестности точки a, причем одновременно не обращаются в ноль при $x \neq a$;

(3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

[9] Гийом Франсуа Лопиталь, 1661 - 1704, французский математик, автор первого учебника по математическому анализу. Сын богатых родителей, маркиз Лопиталь поступил сперва в военную службу, но по слабости зрения вскоре оставил её и посвятил себя наукам. Состоял членом Парижской академии наук. Главная заслуга Лопиталя заключается в первом систематическом изложении математического анализа, данное им в сочинении "Анализ бесконечно малых". Лопиталю принадлежит также решение ряда задач, решение которых помогло ему стать в один ряд с Ньютоном, Лейбницем, Бернулли. (Материал из Википедии)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доопределим функции в точке a. Положим $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $g(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Тогда f и g непрерывны на $[a;b]$ и по теореме Коши найдется точка ξ, лежащая между x и a, такая, что

$$\frac{f(x) - f(a)^{=0}}{g(x) - g(a)_{=0}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \square$$

<u>Пример.</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x+x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0/0$, для которой применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin x)'}{(x+x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+2x} = 2.$$

Повторное правило Лопиталя.

Если выполнены условия:

(1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки a кроме, быть может, самой точки a, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю;

(2) $f'(x)$, $f''(x)$, ... , $f^{(n-1)}(x)$ и $g'(x)$, $g''(x)$, ... , $g^{(n-1)}(x)$ существуют в указанной окрестности точки a, причем
$f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ и
$g'(a) = g''(a) = ... = g^{(n-1)}(a) = 0$

(3) существуют конечные производные $f^{(n)}(a)$ и $g^{(n)}(a)$, причем $g^{(n)}(a) \neq 0$

то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

(То есть правило Лопиталя можно применять несколько раз.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу Тейлора:

$$f(x) = \frac{f(a)^{=0}}{0!} + \frac{f'(a)^{=0}}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)^{=0}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big),$$

аналогично для $g(x)$, поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(a)+o(1)}{g^{(n)}(a)+o(1)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} \qquad \square$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0/0$, для которой применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{\sin x})'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}\cos x}{3x^2}\boxed{=}$$

снова неопределенность $0/0$, применяем правило Лопиталя:

$$\boxed{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{\sin x}\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}\cos^2 x + e^{\sin x}\sin x}{6x}\boxed{=}$$

опять неопределенность $0/0$ и опять применяем правило Лопиталя:

$$\boxed{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{\sin x}\cos^2 x + e^{\sin x}\sin x)'}{(6x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{\sin x}\cos^3 x + 3\cos x\sin x e^{\sin x} + e^{\sin x}\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Второе правило Лопиталя(неопределенности ∞/∞).

Если выполнены условия:

(1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки a кроме, быть может, самой точки a, и при $x\to a$ обе стремятся к бесконечности;

(2) $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в указанной окрестности точки a, причем одновременно не обращаются в ноль при $x\neq a$;

(3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то $\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k, \quad k\neq\infty.$

Тогда $\forall\,\varepsilon>0$ найдется δ_1 такое, что на всем интервале $(a-\delta_1;a+\delta_1)$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right|<\varepsilon \tag{1}$$

Из условия (1) найдется δ_2 такое, что на интервале $(a-\delta_2;a+\delta_2)$

$$g(x)>0 \tag{2}$$

Возьмем $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$, тогда для $x\in(a-\delta;a+\delta)$ будут выполнены оба последних неравенства и для таких x имеем:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-k=\frac{f(x)-f(a+\delta)+f(a+\delta)}{g(x)}-k\left(1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}+\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)=$$

$$=\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}\cdot\frac{g(x)-g(a+\delta)}{g(x)}+\frac{f(a+\delta)}{g(x)}-$$

$$-k\left(1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)-k\left(\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)=$$

$$=\left(\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}-k\right)\left(1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)+\frac{f(a+\delta)-kg(a+\delta)}{g(x)}$$

Во-первых, в силу теоремы Коши, для некоторой точки ξ, лежащей между x и $a+\delta$

$$\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

и в силу неравенства (1)

$$\left(\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}-k\right)\to 0$$

Во-вторых, так как $g(x)\to\infty$,

$$\left(1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)\to 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{f(a+\delta)-kg(a+\delta)}{g(x)}\to 0,$$

следовательно $\dfrac{f(x)}{g(x)}-k\to 0$ и для конечного k утверждение теоремы доказано.

Если же $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=0$ и по доказанному $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0\implies\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty.\quad\square$

Раскрытие неопределенностей другого вида.

Правила Лопиталя дают возможность раскрывать неопределенности вида $0/0$ и ∞/∞. Другие неопределенности сводятся к правилу Лопиталя путем алгебраических преобразований:

• Раскрытие неопределенностей вида $0 \cdot \infty$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

$$\text{Тогда } \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\text{или } \qquad = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

К полученным выражениям применимо правило Лопиталя.

• Раскрытие неопределенности вида $\infty - \infty$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

$$\text{Тогда } \lim_{x\to a}\bigl(f(x) - g(x)\bigr) = \lim_{x\to a} f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right),$$

$$\text{или } \qquad = \lim_{x\to a} g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right).$$

Если выражения, стоящие в скобках, стремятся к нулю, то получаем неопределенность вида $\infty \cdot 0$, которая была рассмотрена выше, в противном случае не получаем неопределенности и можем сразу записать ответ.

• Раскрытие неопределенностей вида $\mathbf{1}^{\infty}$, $\mathbf{0^0}$, $\infty^{\mathbf{0}}$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,
или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln f(x)\cdot g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \ln f(x)\cdot g(x)}$.

И, так как $\ln 1 = 0$, $\ln 0 = -\infty$, $\ln\infty = \infty$, получаем неопределенность вида $\infty \cdot 0$, которая была рассмотрена выше.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0. Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x)} = 1.$$

п.5.8. Применение производной для изучения поведения функции

Связь производных с монотонностью.

• Теорема 1. Если на некотором отрезке $f'(x) > 0$, то функция f на этом отрезке возрастает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа найдется точка ξ, лежащая между x_1 и x_2, такая, что

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \implies f(x_1) < f(x_2),$$

а значит функция возрастает $\square$

Аналогично доказывается

• Теорема 2. Если на некотором отрезке $f'(x) < 0$, то функция f на этом отрезке убывает.

• Теорема 3. Если функция f возрастает и у нее существует производная, то $f'(x) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как f возрастает, $\dfrac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} > 0 \implies$ $\lim\limits_{\delta\to 0} \dfrac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \geq 0 \implies f'(x) \geq 0$ $\square$

Замечание. В формулировке неравенство $f'(x) \geq 0$ нельзя заменить в общем случае на строгое: $f'(x) > 0$.

Действительно, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает при всех x, однако $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$.

Аналогично доказывается

• Теорема 4. Если функция f убывает и у нее существует производная, то $f'(x) \leq 0$.

Связь производных с выпуклостью.

• Теорема 1. Если на некотором отрезке $f''(x) > 0$, то функция f на этом отрезке выпукла вниз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $x_1 < x < x_2$. По теореме Лагранжа найдется точка ξ_1, лежащая между x_1 и x, такая, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1)$$

и точка ξ_2, лежащая между x и x_2, такая, что

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$$

Так как $f''(x) > 0$, $f'(x)$ возрастает, а значит $f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \implies$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

а это и есть условие выпуклости вниз $\square$

Аналогично доказывается

• Теорема 2. Если на некотором отрезке $f''(x) < 0$, то функция f на этом отрезке выпукла вверх.

• Теорема 3. Если функция f выпукла вниз и у нее существует вторая производная, то $f''(x) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как f выпукла вниз, для $x_1 < x < x_2$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Переходя к пределу при $x \to x_1$, получим: $f'(x_1) \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Переходя к пределу при $x \to x_2$, получим: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$.

$\implies$ для всех $x_1 < x_2$ будет $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, следовательно $f'(x)$ возрастает, следовательно $f''(x) \geq 0$. $\square$

Замечание. В формулировке неравенство $f''(x) \geq 0$ нельзя заменить в общем случае на строгое: $f''(x) > 0$.

Действительно, функция $f(x) = x^4$ выпукла вниз при всех x, однако $f''(x) = 12x^2 = 0$ при $x = 0$.

Аналогично доказывается

• Теорема 4. Если функция f выпукла вверх и у нее существует вторая производная, то $f''(x) \leq 0$.

Связь производных с экстремумами.

Пусть функция определена в окрестности точки x_o и имеет в этой точке производную. Если x_o точка экстремума функции, то по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. Это необходимое условие экстремума.

Но обратное утверждение не верно. Если $f'(x_0) = 0$, отсюда вовсе не следует, что x_o является экстремумом. Например, для функции $f(x) = x^3$ производная в нуле равна нулю, но точка $x = 0$ не является экстремумом.

Пусть $f'(x_0) = 0$. Определим дополнительные условия для нахождения экстремума.

• По первой производной.

Возможны три случая:

1) слева и справа от точки x_o $f'(x)$ одного знака $\Longrightarrow$ слева и справа от x_o функция возрастает, или и там, и там убывает, следовательно, экстремума в x_o нет;

2) слева от точки x_o $f'(x) > 0$, слева $f'(x) < 0$ $\Longrightarrow$ слева от x_o функция возрастает, справа от x_o убывает, следовательно, следовательно, x_o точка максимума;

3) слева от точки x_o $f'(x) < 0$, слева $f'(x) > 0$ $\Longrightarrow$ слева от x_o функция убывает, справа от x_o возрастает, следовательно, следовательно, x_o точка минимума.

Итак, если при переходе через точку x_o производная меняет знак с "+" на "−", то x_o – точка максимума, если с "−" на "+" – точка минимума.

• По второй производной (если она существует).

Возможны три случая:

1) $f''(x_0) > 0$ $\Longrightarrow$ функция выпукла вниз, следовательно x_o точка минимума;

2) $f''(x_0) < 0$ $\Longrightarrow$ функция выпукла вверх, следовательно x_o точка максимума;

3) $f''(x_0) = 0$ тогда по второй производной ничего определить нельзя. Действительно, для функций $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$, $h(x) = x^5$ вторые производные в нуле равны нулю, но для функции f точка

$x = 0$ – точка минимума, для g – точка максимума, а для h – не экстремум.

• По старшим производным (если они существуют).

Пусть в точке x_o все производные до $(n-1)$-го порядка включительно равны нулю, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда формула Тейлора примет вид: $f(x) = f(x_o) + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_o)^n + o\big((x - x_o)\big)$ или

$$f(x) - f(x_o) = \frac{1}{n!}\Big[f^{(n)}(x_0) + o(1)\Big](x - x_o)^n$$

и знак левой части совпадает со знаком выражения $f^{(n)}(x_0)(x - x_o)^n$

Если n четное, то знак $f(x) - f(x_o)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$ и если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_o точка минимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_o точка максимума.

Если n нечетное, то знак $f(x) - f(x_o)$ меняется при переходе через точку x_o, следовательно, экстремума в x_o нет.

Построение графика функции.

Для построения графика функции провести следующие исследования:

1). Найти область определения функции и односторонние пределы для всех граничных точек области определения. Сделать вывод о наличии асимптот, руководствуясь правилами:

- ◇ если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = (\pm)\infty$, $(a \neq \infty)$, то прямая $x = a$ – вертикальная асимптота для функции $f(x)$;
- ◇ если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ – горизонтальная асимптота для функции $f(x)$;
- ◇ если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = c$, то прямая $y = kx + c$ – наклонная асимптота для функции $f(x)$.

2). Найти нули функции и построить для нее распределение знаков.

3). Найти $f'(x)$ и построить для нее распределение знаков, сделать вывод о промежутках монотонности, руководствуясь правилами:

- ◇ если $f'(x) > 0$, то функция возрастает;
- ◇ если $f'(x) < 0$, то функция убывает.

4). Найти $f''(x)$ и построить для нее распределение знаков, сделать вывод о промежутках выпуклости, руководствуясь правилами:

- $\diamond$ если $f''(x) > 0$, то функция выпукла вниз;
- $\diamond$ если $f''(x) < 0$, то функция выпукла вверх.

5). Найти "вспомогательные" точки, подставив (если возможно) в $f(x)$ значения $x = 0$, значения x, в которых $f'(x) = 0$ или $f''(x) = 0$.
6). На основании полученных выводов построить график функции.

Пример 1. Построить график функции $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Решение. 1) Область определения функции $x \in (0; \infty)$.

$\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{-\infty}{0} = -\infty$, следовательно, есть вертикальная асимптота $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \dfrac{1}{x} : \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$, следовательно, есть горизонтальная асимптота $y = 0$ на $+\infty$.

(Наклонную асимптоту искать нет смысла, так как уже установлено наличие горизонтальной асимптоты.)

2) функция обращается в 0 при $x = 1$, причем

x :	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f(x)$:	$-$	$+$

3) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, $f'(x) = 0$ при $x = e^2$, причем

x :	$x \in (0; e^2)$	$x \in (e^2; \infty)$
$f'(x)$:	$+$	$-$
$f(x)$:	$\nearrow$	$\searrow$

4) $f''(x) = ... = \dfrac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$, $f''(x) = 0$ при $x = e^{8/3}$, причем

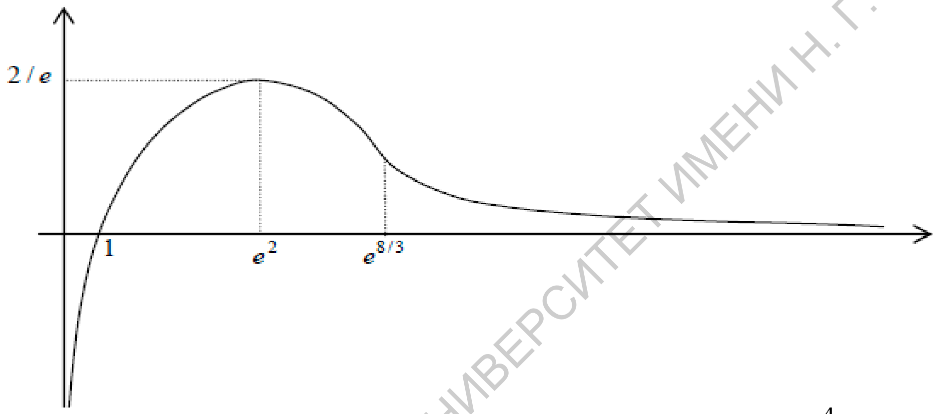
x :	$x \in (0; e^{8/3})$	$x \in (e^{8/3}; \infty)$
$f''(x)$:	$-$	$+$
$f(x)$:	$\frown$	$\smile$

5) $f(e^2) = \frac{2}{e}$ – точка максимума функции. (Точку $x = e^{8/3}$ не подставляем из-за "неудобства" вычислений.)

6) Для удобства соберем все полученные результаты в общую таблицу:

$x:$	$x \to 0$	$x \in (0;1)$	$x \in (1;e^2)$	$x \in (e^2;e^{\frac{8}{3}})$	$x \in (e^{\frac{8}{3}};\infty)$	$x \to \infty$
$f(x):$	асимптота $x=0$	<0	>0	>0	>0	асимптота $y=0$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$\smile$	$\smile$

Следовательно, график функции имеет вид:



Пример 2. Построить график функции $f(x) = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

Решение. 1) Область определения $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x) = +\infty$, следовательно, есть вертикальная асимптота $x = -1$ (слева от асимптоты график функции "уходит вниз", справа – "вверх").

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, следовательно горизонтальной асимптоты нет.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(1+x)^3} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^4}{(1+x)^3} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3 - 3x^2 - x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} =$$

-3, следовательно, есть наклонная асимптота $y = x - 3$ на $\pm\infty$.

2) $f(x) = 0$ при $x = 0$ и имеет место следующее распределение знака:

$x:$	$x \in (-\infty;-1)$	$x \in (-1;0)$	$x \in (0;\infty)$
$f(x):$	$-$	$+$	$+$

3) $f'(x) = ... = \dfrac{x^3(4+x)}{(1+x)^4}$, причем

$x:$	$x \in (-\infty; -4)$	$x \in (-4; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(x):$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x):$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

4) $f''(x) = ... = \dfrac{12x^2}{(1+x)^5}$, причем

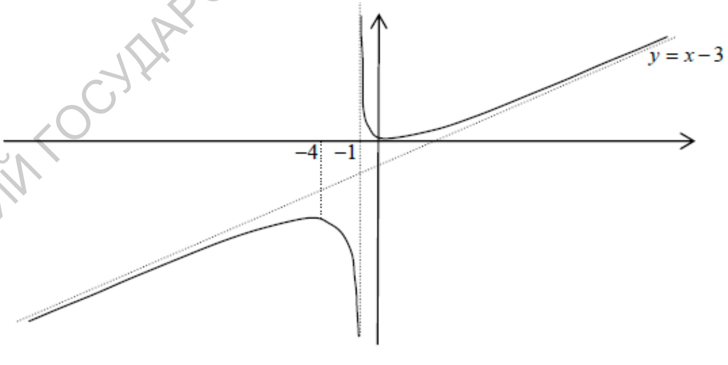
$x:$	$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f''(x):$	$-$	$+$	$+$
$f(x):$	$\frown$	$\smile$	$\smile$

5) $f(-4) = -\frac{256}{27}$ – точка максимума, $f(0) = 0$ – точка минимума.

6) Соберем все полученные результаты в общую таблицу:

$x:$	$x \to -\infty$	$(-\infty; -4)$	$(-4; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; \infty)$	$x \to +\infty$
$f(x):$	асимптота $y = x - 3$	< 0	< 0	> 0	> 0	асимптота $y = x - 3$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$\smile$	$\smile$	$\smile$

Следовательно, график функции имеет вид:



Пример 3. Построить график функции $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. 1) Область определения функции $x \in (-\infty; \infty)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = -1$, следовательно, есть горизонтальная асимптота $y = -1$ на $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = +1$, следовательно, есть горизонтальная асимптота $y = +1$ на $+\infty$.

2) функция обращается в 0 при $x = 2$, причем

$x:$	$x \in (-\infty; 2)$	$x \in (2; \infty)$
$f(x):$	$-$	$+$

3) $f'(x) = ... = \dfrac{1+2x}{(x^2+1)^{3/2}}$, $f'(x) = 0$ при $x = -0,5$, причем

$x:$	$x \in (-\infty; -0,5)$	$x \in (-0,5; \infty)$
$f'(x):$	$-$	$+$
$f(x):$	$\searrow$	$\nearrow$

4) $f''(x) = ... = \dfrac{2-3x-4x^2}{(x^2+1)^{5/2}}$, $f''(x) = 0$ при $x_{1,2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{8}$, причем

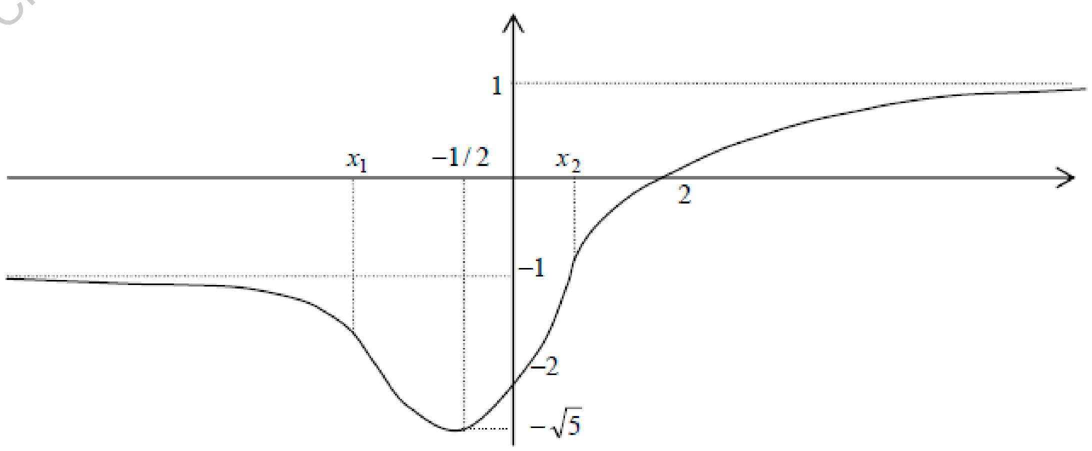
$x:$	$x \in (-\infty; x_1)$	$x \in (x_1; x_2;)$	$x \in (x_2; \infty)$
$f''(x):$	$-$	$+$	$-$
$f(x):$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

5) $f(0) = -2$, $\quad f(-0,5) = -\sqrt{5}$ – точка минимума.

6) Соберем все полученные результаты в общую таблицу:

$x:$	$\to -\infty$	$(-\infty; x_1)$	$(x_1; -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}; x_2)$	$(x_2; 2)$	$(2; \infty)$	$\to +\infty$
$f(x):$	асимптота $y=-1$	< 0	< 0	< 0	< 0	> 0	асимптота $y=1$
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	$\frown$	$\frown$	$\smile$	$\smile$	$\frown$	$\frown$	$\frown$

Следовательно, график функции имеет вид:



п.5.9. Приближенное решение уравнений

Постановка задачи.

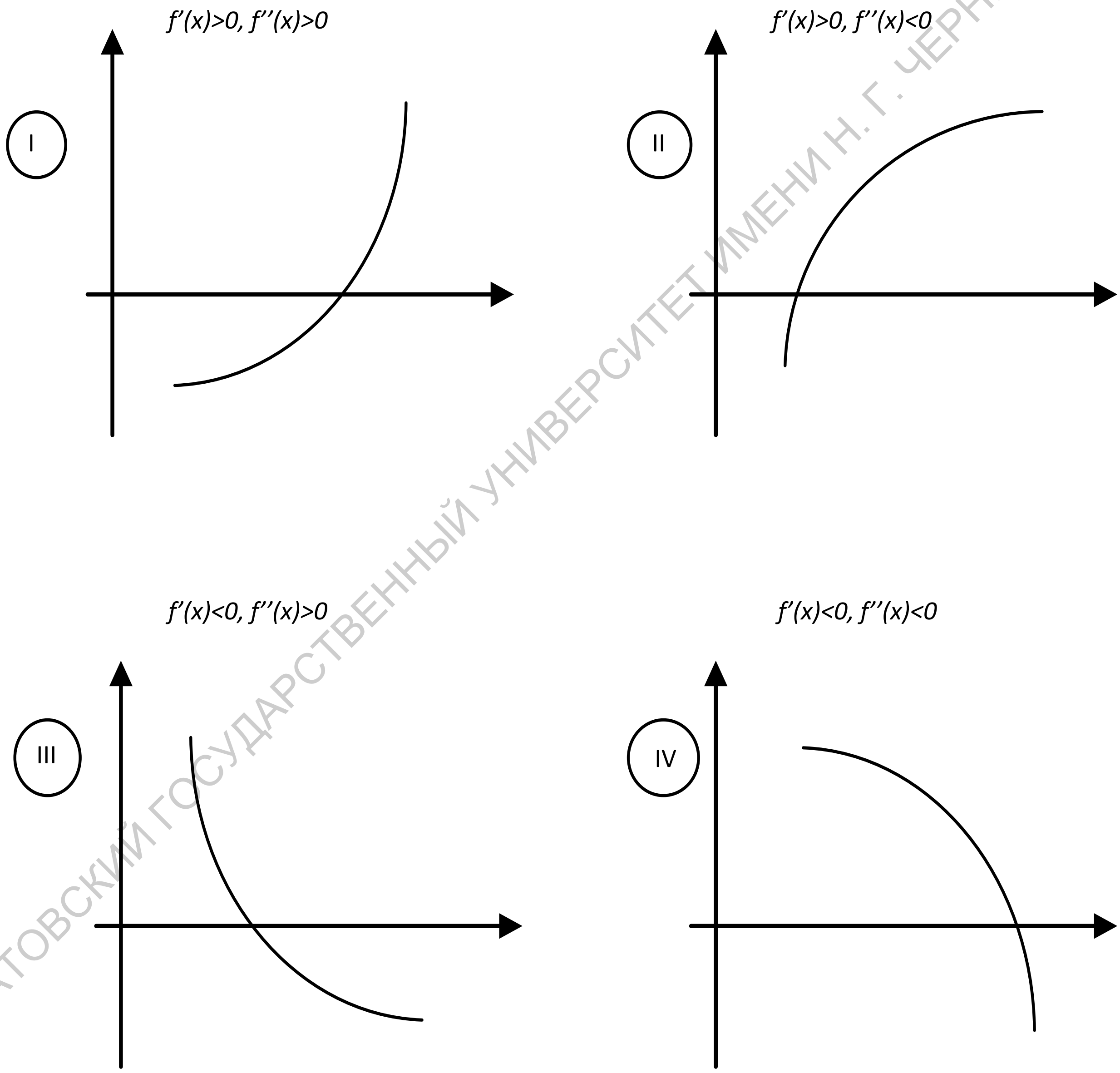
Решаем уравнение $f(x) = 0$. Обозначим его корень α. Наложим дополнительные условия:

1) $\alpha \in [a; b]$, причем других корней не этом отрезке нет;

2) f, f' и f'' непрерывны на $[a; b]$;

3) f' и f'' не меняют знак на $[a; b]$.

Возможны четыре случая:



Метод хорд.

Обозначим $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$. Проведем прямую AB. Ее уравнение: $\dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$.

Пусть x_1 точка пересечения прямой с осью OX: $y = 0 \implies$

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a) = \frac{af(b) - af(a) - bf(a) + af(a)}{f(b)-f(a)} = $$
$$= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)}.$$

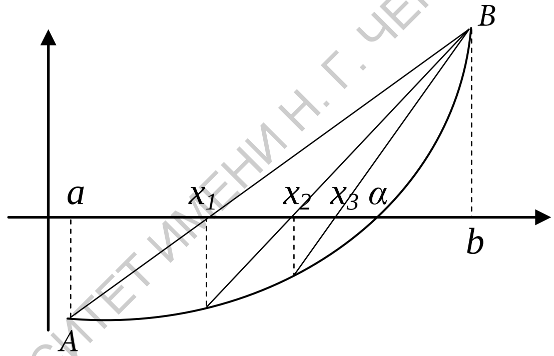
Для случаев (I) и (IV) $x_1 < \alpha < b$. Возьмем вместо отрезка $[a; b]$ отрезок $[x_1; b]$ и проделаем те же шаги. Получим

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

и так далее

....

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(b) - bf(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$



$\{x_n\}$ – возрастающая ограниченная последовательность, значит существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \implies$

$$c = \frac{cf(b) - bf(c)}{f(b)-f(c)} \implies cf(b) - cf(c) = cf(b) - bf(c) \implies$$
$$(b-c)f(c) = 0 \implies f(c) = 0$$

а значит $c = \alpha$, так как на $[a; b]$ есть только один корень уравнения $f(x) = 0$. Следовательно $x_n \to \alpha$.

Аналогично для случаев (II) и (III) $a < \alpha < x_1$. Возьмем вместо отрезка $[a; b]$ отрезок $[a; x_1]$ и проделаем те же шаги. Получим

$$x_2 = \frac{af(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)} \quad \ldots\ldots \quad x_{n+1} = \frac{af(x_n) - x_n f(a)}{f(x_n) - f(a)}$$

$\{x_n\}$ – убывающая ограниченная последовательность, и, проводя аналогичные рассуждения, так же получаем, что $x_n \to \alpha$.

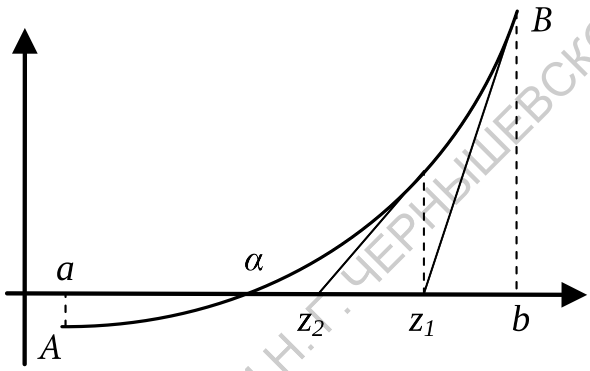
Таким образом построена последовательность приближенных значений решения уравнения $f(x) = 0$, $\alpha \approx x_n$. Причем для случаев (I) и (IV) приближенные значения сходятся к α слева, для случаев (II) и (III) справа.

Метод касательных.

Для случаев (I) и (IV) проведем касательную в точке b. Уравнение касательной: $y = f'(b)(x-b) + f(b)$.

Пусть z_1 точка пересечения касательной с осью OX: $y = 0 \implies f'(b)(z_1 - b) + f(b) = 0 \implies f'(b)z_1 = f'(b)b - f(b) \implies$

$$z_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \ ,$$



причем $\alpha < z_1 < b$.

Проведем касательную в z_1. Получим $z_2 = z_1 - \dfrac{f(z_1)}{f'(z_1)}$ и так далее

....

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

$\{z_n\}$ – убывающая ограниченная последовательность, значит существует $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c \implies c = c - \dfrac{f(c)}{f'(c)} \implies f(c) = 0$.

Значит $c = \alpha$, так как на $[a; b]$ есть только один корень уравнения $f(x) = 0$. Следовательно $z_n \to \alpha$.

Аналогично для случаев (II) и (III) проведем касательную в точке a. Уравнение касательной: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$$z_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \ , \text{ причем } a < z_1 < \alpha, \ldots\ldots , z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

$\{z_n\}$ – возрастающая ограниченная последовательность, и, проводя аналогичные рассуждения, так же получаем, что $z_n \to \alpha$.

Значит $c = \alpha$, так как на $[a; b]$ есть только один корень уравнения $f(x) = 0$. Следовательно $z_n \to \alpha$.

Таким образом построена последовательность приближенных значений решения уравнения $f(x) = 0$, $\alpha \approx z_n$. Причем для случаев (I) и (IV) приближенные значения сходятся к α справа, для случаев (II) и (III) слева .

Комбинированный метод.

Возьмем первые приближенные значения корня, найденные по методу хорд и по методу касательных:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$z_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad \text{(случаи I,IV)}; \quad z_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{(случаи II,III)},$$

причем корень уравнения α в любом случае между x_1 и z_1.

Повторим этот шаг, но только теперь вместо отрезка $[a; b]$ возьмем отрезок $[x_1; z_1]$ (или $[z_1; x_1]$). В любом случае получим

$$x_2 = \frac{x_1 f(z_1) - z_1 f(x_1)}{f(z_1) - f(x_1)}$$

$$z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)}$$

и так далее

....

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(z_n) - z_n f(x_n)}{f(z_n) - f(x_n)}$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

причем последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ с разных сторон сходятся к искомому корню α.

Таким образом в качестве приближенного значения корня можно брать середину отрезка $[x_1; z_1]$ (или $[z_1; x_1]$), то есть $\alpha \approx \frac{x_n + z_n}{2}$, а погрешность оценивать как $\varepsilon = |x_n - z_n|$.

§6. ПЕРВООБРАЗНАЯ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

п.6.1. Понятие первообразной

Определение первообразной.

Первообразной, или неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$. Обозначается $\int f(x)\,dx = F(x)$.

Таблица неопределенных интегралов.

Непосредственно из определения следует:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|\ (x \neq 0)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad \text{в частности} \quad \int e^x\,dx = e^x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$$

Свойства первообразной.

Так же из определения и свойств производной следует:

• *Основное свойство первообразной:* Если $F(x)$ – первообразная $f(x)$, то $F(x) + \mathrm{C}$ (C – произвольная постоянная) так же первообразная функции f.

• *Интегрирование и дифференцирование взаимно-обратные операции:* $\int d\,f(x) = f(x)$.

- *Константу можно выносить за знак интеграла:*
  $\int c \cdot f(x)\,dx = c \int f(x)dx.$
- *Интеграл от суммы равен сумме интегралов:*
  $\int \Big(f(x) + g(x) \Big) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Формула интегрирования по частям.

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv \implies$
$\int d(uv) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv \implies uv = \int v \cdot du + \int u \cdot dv \implies \square$

- Пример 1. Вычислить $\int xe^x\,dx.$

  Решение. Пусть

$$\begin{array}{lcl} u = x & & du = dx \\ & \Longrightarrow & & \Longrightarrow \\ dv = e^x\,dx & & v = \int e^x\,dx = e^x \end{array}$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x.$$

- Пример 2. Вычислить $\int \ln x\,dx.$

  Решение. Пусть

$$\begin{array}{lcl} u = \ln x & & du = d\ln x = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}\,dx \\ & \Longrightarrow & & \Longrightarrow \\ dv = dx & & v = \int dx = x \end{array}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x.$$

- Пример 3. Вычислить $\int e^x \sin x\,dx.$

  Решение. Пусть

$$\begin{array}{lcl} u = e^x & & du = d(e^x) = e^x\,dx \\ & \Longrightarrow & & \Longrightarrow \\ dv = \sin x\,dx & & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{array}$$

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

Применим еще раз формулу интегрирования по частям. Пусть

$$\begin{matrix} u = e^x \\ dv = \cos x\,dx \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} du = d(e^x) = e^x\,dx \\ v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{matrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \quad \Longrightarrow$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x \quad \Longrightarrow$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \tfrac{1}{2}\, e^x(\sin x - \cos x).$$

Замечание о методах нахождения первообразной.

По сути есть три приема для нахождения первообразной:

(1) Алгебраические преобразования подинтегрального выражения с целью получить табличные интегралы.

Например:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx =$$

(получили два табличных интеграла) $\qquad = x - \operatorname{tg} x.$

(2) Замена переменной в интеграле.

Например:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \boxed{=}$$

сделаем замену $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x\,dx$

$$\boxed{=} \int -\frac{dt}{t} = \text{(табличный интеграл)} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|.$$

(3) Применение формулы интегрирования по частям.

Сложность нахождения первообразной в том, чтобы понимать, какой из методов в данном интеграле следует применить, и, соответственно, какие преобразования сделать, какую замену использовать, что взять за u что за dv, чтобы свести интеграл к табличному.

Далеко не все интегралы можно выразить через элементарные функции. Например, $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ в элементарных функциях не выражается.

Существует множество справочников и таблиц для первообразных. Наиболее полный справочник *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.*

п.6.2. Интегрирование рациональных функций

Понятие рациональной функции.

• Рациональной функцией называют дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами.

Например: $R(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + 5x^4 - 2}$.

• Рациональная функция называется правильной, если степень многочлена, стоящего в числителе меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Если дробь неправильная, то есть степень числителя больше или равна степени знаменателя, то можно выполнить деление и представить функцию в виде суммы целой части (многочлена) и правильной дроби.

Например: $\dfrac{x^4 - 6x^3 + 11x - 6}{x^2 - 1} \boxed{=}$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 6x^3 + 11x - 6 & \underline{x^2 - 1} \\
\underline{x^4 - x^2} & x^2 - 6x + 1 \\
\quad -6x^3 + x^2 + 11x - 6 & \\
\quad \underline{-6x^3 + 6x} & \\
\qquad\quad x^2 + 5x - 6 & \\
\qquad\quad \underline{x^2 - 1} & \\
\qquad\qquad 5x - 5 &
\end{array}$$

$$\boxed{=}\; x^2 - 6x + 1 + \frac{5x - 5}{x^2 - 1}$$

• Правильная дробь очередь может быть разложена на сумму так называемых простых (или элементарных) дробей:

$(a)\quad \dfrac{A}{(x + a)^n} \qquad\qquad (b)\quad \dfrac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$ при $p^2 - 4q < 0$

(В знаменателе только один множитель, который уже нельзя разложить на множители).

• Таким образом, интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию многочлена (что элементарно) и простых дробей.

Метод неопределенных коэффициентов.

Одним из способов разложения правильной дроби (степень числителя меньше степени знаменателя) на сумму элементарных (в знаменателе только один множитель) является метод неопределенных коэффициентов, который заключается в следующем.

(1) Разложить знаменатель правильной дроби на множители, вида

$$(a) \quad (x+a)^n \qquad\qquad (b) \quad (x^2+px+q)^m \quad \text{при } p^2-4q<0$$

(2) Выписать сумму элементарных дробей по правилу:

для каждого множителя знаменателя вида (a) выписывается n слагаемых:

$$\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+...+\frac{A_n}{(x+a)^n}$$

для каждого множителя знаменателя вида (b) выписывается m слагаемых:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}$$

где A_k, B_k, C_k – некоторые, неизвестные пока числа.

Например:

$$\frac{x+4}{(x+1)(x-2)^3(x^2-x+3)^2}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{(x-2)^2}+\frac{A_4}{(x-2)^3}+$$
$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2-x+3}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2-x+3)^2}$$

(3) Привести сумму элементарных дробей к общему знаменателю (как у исход-ной дроби), в числителе раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

(4) Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в полученном числителе и числителе исходной правильной дроби.

Например:

$$\frac{4x^3+9x^2+5x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=$$
$$=\frac{A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=$$
$$=\frac{x^3(A+C)+x^2(2A+B+2C+D)+x(2A+B+C+2D)+A+B+D}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+C=4 \\ 2A+B+2C+D=9 \\ 2A+B+C+2D=5 \\ A+B+D=2 \end{cases}$$

(5) Решив получившуюся систему, найти числа A_k, B_k, C_k.

(6) Подставляя полученные значения, записать представление исходной дроби через сумму элементарных дробей.

В предыдущем примере, решая систему, получим $A=1$, $B=2$, $C=3$, $D=-1$. Поэтому

$$\frac{4x^3+9x^2+5x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3x-1}{x^2+x+1}\,.$$

Интегрирование элементарных дробей.

Напомним, элементарными называются дроби вида

$$(a)\quad \frac{A}{(x+a)^n} \qquad \text{и} \qquad (b)\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} \text{ при } p^2-4q<0$$

• Для интегрирования дроби (a) следует выполнить замену $x=t-a$:

$$\int \frac{A}{(x+a)^n}\,dx = A\int \frac{dt}{t^n} = \ldots \text{ (табличный игтеграл)}$$

• Для интегрирования дроби (b) следует сначала выполнить замену $x=t-p/2$:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{Bt-\frac{Bp}{2}+C}{\left((t^2-pt+\frac{p^2}{4})+(pt-\frac{p^2}{2})+q\right)^n}\,dt =$$

$$= \int \frac{Bt+C^*}{\Big(t^2+\underbrace{(q-\frac{p^2}{4})}_{\substack{>0,\\ \text{т.к. } p^2-4q<0}}\Big)^n}\,dt = B\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt + C^*\int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt.$$

• Рассмотрим первый интеграл:

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt \boxed{=} \text{ замена } u=t^2+a^2, \text{ тогда } du=2t\,dt, \quad t\,dt=\tfrac{1}{2}du$$

$$\boxed{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^n} = \ldots \text{ (табличный интеграл)}$$

• Рассмотрим второй интеграл:

$$J_n = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt$$

Для $n = 1$

$$J_1 = \int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt \boxed{=} \quad \text{замена } t = au, \text{ тогда } dt = a\,du$$

$$\boxed{=} \int \frac{a\,du}{a^2u^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2+1} = \tfrac{1}{a}\operatorname{arctg} u = \tfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\tfrac{t}{a}.$$

Для $n > 1$

$$J_n = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\underbrace{\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\,dt}_{=J_{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt \boxed{=}$$

Во втором интеграле применим формулу интегрирования по частям:

$$u = t, \quad dv = \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt \implies$$

$$du = dt,$$

$$v = \int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt = (\text{см. выше}) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\boxed{=} \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\underbrace{\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\,dt}_{=J_{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}J_{n-1}\left(1 + \frac{1}{2(1-n)}\right) + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}$$

Таким образом, получили формулу понижения:

$$J_n = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}$$

(по J_1 можно сосчитать J_2, по J_2 найти J_3 и так далее).

п.6.3. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x)\, dx$.

(Имеется в виду рациональная функция, где вместо переменной x стоит $\sin x$ или $\cos x$, например: $\int \frac{3\cos x + 2\sin x + 1}{4\sin^2 x - 2\sin x + 3\cos^3 x}\, dx$).

• В общем случае рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$ сводится к обычной рациональной функции переменной t при помощи замены

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

$$\Longrightarrow\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ \ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Таким образом, $\int R(\sin x; \cos x)\, dx = \int R^*(t)\, dt$ и дальше применяются методы интегрирования рациональной функции, рассмотренные в предыдущем пункте.

Указанная замена является универсальной. В некоторых частных случаях можно применять другие замены, которые приводят к более простым рациональным функциям, чем получается после универсальной замены:

• если $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, можно применить замену $\cos x = t$ (тогда $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$);

• если $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, можно применить замену $\sin x = t$ (тогда $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$);

• если $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, можно применить замену $\operatorname{tg} x = t$ (тогда $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$);

Интегрирование синусов и косинусов кратных дуг.

$\int \sin ax\, dx \boxed{=}$ (замена $ax = t$) $\boxed{=} \int \sin t \frac{dt}{a} = -\frac{1}{a}\cos t = -\frac{1}{a}\cos ax$

$\int \cos ax\, dx \boxed{=}$ (замена $ax = t$) $\boxed{=} \int \cos t \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\sin t = \frac{1}{a}\sin ax$

Интегралы

$\int \sin ax\, \cos bx\, dx, \int \sin ax\, \sin bx\, dx, \int \cos ax\, \cos bx\, dx,$

сводятся к предыдущим при помощи тригонометрических формул:

$$\sin\alpha\, \cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta),$$
$$\sin\alpha\, \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta),$$
$$\cos\alpha\, \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta),$$

которые известны из школьного курса.

Интегралы $\int \sin^n x\, dx$ и $\int \cos^n x\, dx$.

Рассмотрим $J_n = \int \sin^n x\, dx$

Для $n = 1$ это табличный интеграл.

Для $n = 2$ следует применить формулу: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и проинтегрировать отдельно каждое слагаемое.

Для $n > 2$

$$J_n = \int \sin^{n-2} x\, \sin^2 x\, dx = \int \sin^{n-2} x\,(1-\cos^2 x)\, dx =$$
$$= J_{n-2} - \int \sin^{n-2} x\, \cos^2 x\, dx \boxed{=}$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$u = \cos x,\ \ dv = \sin^{n-2} x\, \cos x\, dx \implies$

$$du = -\sin x\, dx$$
$$v = \int \sin^{n-2} x\, \cos x\, dx = \int \sin^{n-2} x\, d(\sin x) = \frac{\sin^{n-1} x}{n-1}$$

$$\boxed{=} J_{n-2} - \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n-1} - \frac{1}{n-1}\int \sin^n x\, dx$$

Таким образом, получили:

$$J_n = J_{n-2} - \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n-1} - \frac{1}{n-1} J_n \implies$$

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) J_n = J_{n-2} - \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n-1} \implies$$

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} - \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n}$$

Таким образом, получили формулу понижения:

$$\int \sin^n x\, dx = \tfrac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx - \tfrac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x$$

Аналогично (вывести самостоятельно)

$$\int \cos^n x\, dx = \tfrac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx + \tfrac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x$$

Интегралы $\int \frac{1}{\sin^n x}\, dx$ **и** $\int \frac{1}{\cos^n x} dx$**.**

Рассмотрим $J_n = \int \frac{1}{\sin^n x}\, dx$

Для $n = 1$

$$J_1 = \int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{-d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} \underset{\text{замена } \cos x = t}{=}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(t+1)(t-1)}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2} \ln|t+1| = \ln \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}} = \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$$

Для $n = 2$ это табличный интеграл.

Для $n > 2$

$$J_n = \int \frac{1}{\sin^n x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x}\, dx = J_{n-2} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\, dx \boxed{=}$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$u = \cos x, \quad dv = \frac{\cos x}{\sin^n x} \implies$$

$$du = -\sin x\, dx$$

$$v = \int \frac{\cos x}{\sin^n x}\, dx = \int \frac{1}{\sin^n x}\, d(\sin x) = \frac{1}{(1-n)\sin^{n-1} x}$$

$$\boxed{=} J_{n-2} + \frac{\cos x}{(1-n)\sin^{n-1} x} + \int \frac{\sin x}{(1-n)\sin^{n-1} x}\, dx$$

Таким образом, получили:

$$J_n = J_{n-2} + \frac{\cos x}{(1-n)\sin^{n-1} x} + \frac{1}{1-n} J_{n-2}$$

Таким образом, получили формулу понижения:

$$\int \frac{1}{\sin^n x}\, dx = \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\sin^{n-2} x}\, dx - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x}\ .$$

Аналогично (вывести самостоятельно)

$$\int \frac{1}{\cos^n x}\, dx = \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\cos^{n-2} x}\, dx + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x}\ .$$

Интегралы $\int \operatorname{tg}^n x\, dx$ и $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$.

Рассмотрим $J_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx$

Для $n = 1$ $\quad J_1 = \int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \boxed{=}$
сделаем замену $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x\, dx$

$$\boxed{=} \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|.$$

Для $n = 2$

$$J_2 = \int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = x - \operatorname{tg} x.$$

Для $n > 2$

$$J_n = \int \mathrm{tg}^n x\, dx = \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx =$$
$$= \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, dx = \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, d(\mathrm{tg}\, x) - J_{n-2} =$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}$$

Таким образом, получили формулу понижения:

$$\int \mathrm{tg}^n x\, dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, dx\ .$$

Аналогично (вывести самостоятельно)

$$\int \mathrm{ctg}^n x\, dx = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x\, dx\ .$$

п.6.4. Интегрирование гиперболических и показательных функций

Интегралы вида $\int R(e^x)\, dx$.

(Имеется в виду рациональная функция, где вместо переменной x стоит e^x, например: $\int \frac{2e^x+3e^{2x}+1}{4e^{2x}-2e^x+3e^{3x}}\, dx$).

Рациональная функция от e^x сводится к обычной рациональной функции переменной t при помощи замены $e^x = t$ ($x = \ln t,\ dx = \dfrac{dt}{t}$).

Тогда $\int R(e^x)\, dx = \int R^*(t)\, dt$ и дальше применяются методы интегрирования рациональной функции, рассмотренные выше.

Интегралы вида $\int R(\mathrm{sh}\, x; \mathrm{ch}\, x)\, dx$.

Интеграл от функций $\mathrm{sh}\, x$ и $\mathrm{ch}\, x$ (напомним, что $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$) либо так же сводятся к рациональной функции от переменной t при помощи замены $e^x = t$; либо для их интегрирования применяются метода, аналогичные методам интегрирования тригонометрических функций, так как свойства тригонометрических и гиперболических функций очень похожи.

п.6.5. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$**.**

Эти интегралы сводятся к интегрированию рациональной функции от переменной t при помощи замены $x = a \sin t$ (или $x = a \cos t$).

Действительно, если $x = a \sin t$, то так как $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$$

$$dx = a \cos t\, dt$$

и $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2})\, dx = \int R^*(\sin t; \cos t)\, dt$.

Обратная замена очевидна: $t = \arcsin \frac{x}{a}$.

Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2})\, dx$**.**

Эти интегралы сводятся к интегрированию рациональной функции от $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ при помощи замены $x = a \operatorname{sh} t$.

Действительно, если $x = a \operatorname{sh} t$, то так как $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t} = a \operatorname{ch} t$$

$$dx = a \operatorname{ch} dt$$

и $\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2})\, dx = \int R^*(\operatorname{ch} t; \operatorname{sh} t)\, dt$.

Обратная замена:

$$x = \frac{a(e^t - e^{-t})}{2} \implies 2x = ae^t - \frac{a}{e^t} \implies ae^{2t} - 2xe^t - a = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно e^t. $D = (2x)^2 + 4a^2$,

$$\implies e^t = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a},$$

$$\implies t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}.$$

Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{x^2-a^2})\,dx$.

Эти интегралы сводятся к интегрированию рациональной функции от $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ при помощи замены $x = a \operatorname{ch} t$.

Действительно, если $x = a\operatorname{ch} t$, то так как $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{ch}^2 t - a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t} = a\operatorname{sh} t$$
$$dx = a \operatorname{sh} dt$$

и $\displaystyle\int R(x; \sqrt{x^2-a^2})\,dx = \int R^*(\operatorname{ch} t; \operatorname{sh} t)\,dt.$

Обратная замена:

$$x = \frac{a(e^t+e^{-t})}{2} \implies 2x = ae^t + \frac{a}{e^t} \implies ae^{2t} - 2xe^t + a = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно e^t. $D = (2x)^2 - 4a^2$,

$$\implies e^t = \frac{2x+\sqrt{4x^2-4a^2}}{2a} = \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$
$$\implies t = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

Теорема Чебышева[10]: интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ может быть выражен через элементарные функции в следующих случаях:

1) $p \in \mathbb{Z}$ (замена $x = t^s$, где s – общий знаменатель m и n)

2) $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ (замена $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель p)

3) $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ (замена $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель p)

В других случаях указанный интеграл через элементарные функции не выражается.

---

[10]Пафнутий Львович Чебышёв (4 [16] мая 1821 - 26 ноября [8 декабря] 1894) – российский математик и механик, основоположник петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук. Чебышев получил фундаментальные результаты в теории чисел и теории вероятностей, построил общую теорию ортогональных многочленов, теорию равномерных приближений и многие другие. Основал математическую теорию синтеза механизмов и разработал ряд практически важных концепций механизмов.(Материал из Википедии)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в каждом случае исходный интеграл при помощи указанной замены сводится к интегралу от рациональной функции переменной t, который может быть найден изученными ранее методами.

1). Проведем в интеграле указанную замену:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \int t^{ms} (a + bt^{ns})^p s t^{s-1} \, dt$$

Рассмотрим показатели степеней в получившемся выражении:

p – целое по условию;

s – целое по смыслу обозначений;

ms и ns – целые, так как s – общий знаменатель m и n.

Следовательно, получили интеграл от рациональной функции переменной t.

2). Проведем в интеграле указанную замену:

$a + bx^n = t^s \implies x = \left(\dfrac{t^s - a}{b}\right)^{1/n} \implies dx = C\,(t^s - a)^{\frac{1}{n}-1} t^{s-1}\, dt,$

где C – получившийся числовой множитель. Далее так будем обозначать все числовые множители, вынесенные за знак интеграла.

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \mathrm{C} \int (t^s - a)^{\frac{m}{n}}\, t^{sp}\, (t^s - a)^{\frac{1}{n}-1} t^{s-1}\, dt =$$

$$= \mathrm{C} \int (t^s - a)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1}\, t^{sp+s-1}\, dt$$

Рассмотрим показатели степеней в получившемся выражении:

s – целое по смыслу обозначений;

$\frac{m+1}{n} - 1$ – целое по условию;

$sp + s - 1$ – целое, так как s – знаменатель p.

Следовательно, получили интеграл от рациональной функции переменной t.

3). Проведем в интеграле указанную замену:

$ax^{-n}+b=t^s \implies x=\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}} \implies dx=C\,(t^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}t^{s-1}\,dt,$
где C – получившийся числовой множитель. Далее так будем обозначать все числовые множители, вынесенные за знак интеграла.

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \mathrm{C}\int (t^s-b)^{-\frac{m}{n}}\left(a+\frac{ab}{t^s-b}\right)^p(t^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}t^{s-1}\,dt =$$
$$= \mathrm{C}\int (t^s-b)^{-\frac{m}{n}-\frac{1}{n}-1}\left(\frac{at^s}{t^s-b}\right)^p t^{s-1}\,dt = C\int\frac{t^{sp+s-1}}{(t^s-b)^{\frac{m+1}{n}+p+1}}\,dt$$

Рассмотрим показатели степеней в получившемся выражении:

$sp+s-1$ – целое, так как s – знаменатель p,

s – целое по смыслу обозначений;

$\frac{m+1}{n}+p+1$ – целое по условию.

Следовательно, получили интеграл от рациональной функции переменной t.

(Утверждение, что в других случаях, кроме указанных, рассматриваемый интеграл в элементарных функциях выражен быть не может, оставим без доказательства в виду его сложности.)

Интегралы вида $\int R(x;\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

Для нахождения этих интегралов используются так называемые подстановки Эйлера[11]:

1) Если $a>0$, то можно использовать замену

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t \quad (\text{или } \sqrt{ax^2+bx+c}=-\sqrt{a}\,x+t)$$

Тогда

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2 \implies$$
$$x(b-2\sqrt{a}\,t)=t^2-c \implies$$

[11]см. п.3.5.

$$\left.\begin{aligned}
&x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t},\\
&dx=\frac{2t(b-2\sqrt{a}\,t)+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt\\
&\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}+t
\end{aligned}\right\}\text{ – рациональные функции,}$$

следовательно, исходный интеграл сводится к рациональной функции переменной t.

2) Если $c>0$, то можно использовать замену

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}\ \ (\text{или }\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c})$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&ax^2+bx+c=x^2t^2+2\sqrt{c}\,xt+c\implies\\
&ax^2+bx=x^2t^2+2\sqrt{c}\,xt\implies\\
&ax+b=xt^2+2\sqrt{c}\,t\implies
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2},\\
&dx=\frac{2\sqrt{c}(a-t^2)+2t(2\sqrt{c}\,t-b)}{(a-t^2)^2}\,dt\\
&\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{(2\sqrt{c}\,t-b)t}{a-t^2}+\sqrt{c}
\end{aligned}\right\}\text{ – рациональные функции,}$$

следовательно, исходный интеграл сводится к рациональной функции переменной t.

3) Если $D=b^2-4ac>0$, а значит существуют корни x_1, x_2 и $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то можно использовать замену

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)\ \ (\text{или }\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2\implies\\
&a(x-x_2)=t^2(x-x_1)\implies
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&x = \frac{ax_2 - t^2 x_1}{a - t^2},\\
&dx = \frac{-2tx_1(a - t^2) + 2t(ax_2 - t^2 x_1)}{(a - t^2)^2}\,dt\\
&\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\Big(\frac{ax_2 - t^2 x_1}{a - t^2} - x_1\Big)
\end{aligned}\right\} \text{ – рациональные функции,}$$

следовательно, исходный интеграл сводится к рациональной функции переменной t.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Определение производной. Производные функций $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$.
2. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали.
3. Критерий дифференцируемости. Выражение дифференциала через производную. Геометрический смысл дифференциала.
4. Производная суммы и разности, произведения, дроби.
5. Производная обратной функции. Вычисление производных от обратных тригонометрических функций.
6. Производная и дифференциал сложной функции.
7. Формула Лейбница (производная n-го порядка от произведения).
8. Дифференциалы высших порядков. Нарушение инвариантности.
9. Дифференциальные теоремы о среднем (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).
10. Формула Тейлора. Остаточный член в форме Пеано и Лагранжа, единственность разложения, примеры.
11. Первое правило Лопиталя (раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$).
12. Теорема о многократном применении правила Лопиталя.
13. Второе правило Лопиталя (раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$).
14. Связь первой производной с монотонностью функции.
15. Связь второй производной с выпуклостью функции.
16. Определение критических точек по производным первого, второго и n-го порядка.
17. Приближенное решение уравнений методом хорд. Погрешность метода.
18. Приближенное решение уравнений методом касательных. Погрешность метода.
19. Комбинированный метод приближенного решения уравнений.
20. Интегрирование рациональных функций.
21. Интегрирование тригонометрических, показательных и гиперболических функций.
22. Интегрирование иррациональных функций.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

(необходимо знать определения, формулы и формулировки теорем)

1. Определение производной.
2. Геометрический смысл производной
3. Уравнения касательной и нормали
4. Определение дифференциала и дифференцируемости функции
5. Критерий дифференцируемости.
6. Выражение дифференциала через производную.
7. Производная суммы и разности, произведения, дроби
8. Производная обратной функции
9. Таблица производных
10. Теорема Лагранжа
11. Формула Тейлора (остаточный член в форме Пеано и Лагранжа)
12. Формула Тейлора для функций sin x, cos x, ex, ln (1+x)
13. Первое правило Лопиталя (раскрытие неопределенностей вида 0/0)
14. Второе правило Лопиталя (раскрытие неопределенностей вида /)
15. Связь первой производной с монотонностью функции
16. Связь второй производной с выпуклостью функции
17. Определение критических точек по производным
18. Понятие первообразной.
19. Таблица неопределенных интегралов
20. Основные свойства первообразной
21. Формула интегрирования по частям
22. Интегрирование рациональных функций
23. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$, $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$, $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ (прямая и обратная замены).
24. Интегрирование выражений вида $x^m(a + bx^n)^p$ (случаи интегрируемости и замены)

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ-МИНИМУМ

1. *Определение производной.*

Производной функции f в точке x называется

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2. *Геометрический смысл производной.*

Производная функции $f(x)$ равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x.

3. *Уравнения касательной и нормали.*

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции f в точке с абсциссой x_o имеет вид:

$$y_{\text{кас.}} = f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o).$$

Уравнение нормали к графику дифференцируемой функции f в точке с абсциссой x_o имеет вид:

$$y_{\text{норм.}} = f(x_o) - \frac{1}{f'(x_o)} \cdot (x - x_o).$$

4. *Определение дифференциала и дифференцируемости функции.*

Если приращение функции может быть представлено в виде $\Delta f = A(x)\Delta x + \alpha$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$, то главная линейная часть этого приращения $A(x)\Delta x$ называется дифференциалом функции f и обозначается df, а функция называется дифференцируемой.

5. *Критерий дифференцируемости.*

Функция дифференцируема тогда и только тогда, когда она имеет конечную производную.

6. *Выражение дифференциала через производную:* $df = f'(x)dx$.

7. *Производная суммы и разности, произведения, дроби:*

$(u \pm v)' = u' \pm v'$.

$(uv)' = u'v + v'u$.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

8. *Производная обратной функции.*

Для взаимно-обратных функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$ $\quad g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

9. *Таблица производных*

$$(z^n)' = nz^{n-1} \cdot z' \qquad (\sin z)' = \cos z \cdot z' \qquad (\cos z)' = -\sin z \cdot z'$$

$$(a^z)' = a^z \ln a \cdot z', \qquad (\mathrm{sh} z)' = \mathrm{ch} z \cdot z' \qquad (\mathrm{ch}\, z)' = \mathrm{sh} z$$

$$(e^z)' = e^z \cdot z' \qquad (\mathrm{tg}\, z)' = \frac{z'}{\cos^2 z} \qquad (\mathrm{ctg}\, z)' = -\frac{z'}{\sin^2 z}$$

$$(\log_a z)' = \frac{z'}{z \ln a}, \qquad (\arcsin z)' = \frac{z'}{\sqrt{1-z^2}} \qquad (\arccos z)' = -\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$(\ln z)' = \frac{z'}{z} \qquad (\mathrm{arctg}\, z)' = \frac{z'}{1+z^2} \qquad (\mathrm{arcctg}\, z)' = -\frac{z'}{1+z^2}$$

10. *Теорема Лагранжа.*

Если функция непрерывна и дифференцируема на $[a;b]$, то найдется точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a-b).$$

11. *Формула Тейлора(остаточный член в форме Пеано и Лагранжа)*

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$-го порядка включительно, в точке x_0 существуют производные n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$, то имеет место формула:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + r_n(x),$$

где $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$, (т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$) – остаточный член в форме Пеано;

или

если в точке x_0 существует еще и производная n-го порядка, то найдется точка c между x и x_0 такая, что $r_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(c)(x-x_0)^n}{n!}$ – остаточный член в форме Лагранжа.

12. *Формула Тейлора для функций* $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{n+1}(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + r_{n+1}(x);$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_{n+1}(x);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + r_{n+1}(x).$$

13. *Первое правило Лопиталя (неопределенности вида 0/0).*

Если 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки a кроме, быть может, самой точки a;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

3) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в указанной окрестности точки a, причем одновременно не обращаются в ноль при $x \neq a$;

4) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то $\quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

14. *Второе правило Лопиталя (неопределенности вида* ∞/∞*).*

Если 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки a кроме, быть может, самой точки a;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

3) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в указанной окрестности точки a, причем одновременно не обращаются в ноль при $x \neq a$;

4) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то $\quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

15. *Связь первой производной с монотонностью функции.*

Если $f'(x) > 0$, то функция f возрастает. Если функция f возрастает, то $f'(x) \geq 0$.

Если $f'(x) < 0$, то функция f убывает. Если функция f убывает, то $f'(x) \leq 0$.

16. *Связь второй производной с выпуклостью функции.*

Если $f''(x) > 0$, то функция f выпукла вниз. Если функция f выпукла вниз, то $f''(x) \geq 0$.

Если $f''(x) < 0$, то функция f выпукла вверх. Если функция f выпукла вверх, то $f''(x) \leq 0$.

17. *Определение критических точек по производным.*

(по f') Если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через x_0 производная меняет знак с "+" на "−", то x_0 – точка максимума, а если с "−" на"+" – точка минимума.

(по f'') Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0– точка минимума.

18. *Понятие первообразной.*

Первообразной, или неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$. Обозначается $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)$.

19. *Таблица неопределенных интегралов.*

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|\ (x \neq 0)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad \text{в частности} \quad \int e^x\,dx = e^x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$$

20. *Основные свойства первообразной.*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C; \qquad \int d\,f(x) = f(x);$$

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c\int f(x)dx; \quad \int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

21. *Формула интегрирования по частям:*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

22. *Интегрирование рациональных функций.*

Рациональной функцией называют дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами. Если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то следует выполнить деление и представить функцию в виде суммы целой части (многочлена) и правильной дроби (рациональной функции, у которой степень числителя меньше степени знаменателя).

Правильная дробь в свою очередь может быть разложена на сумму так называемых простых дробей:

$$(a)\quad \frac{A}{(x+a)^n} \qquad\qquad (b)\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\ \text{при}\ p^2-4q<0$$

(Одним из способов разложения является метод неопределенных коэффициентов.)

Для интегрирования рациональных функций следует представить дробь в виде суммы многочлена и простых дробей и проинтегрировать отдельно каждое слагаемое, при этом для интегрирования дроби вида (a) следует выполнить замену $x = t - a$, а для интегрирования дроби вида (b) – замену $x = t - p/2$.

23. *Интегрирование выражений $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$, $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$, $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$.*

Выражения вида $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ приводится к рациональной функции от $\sin x$ и $\cos x$ при помощи замены $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$). Обратная замена $t = \arcsin\frac{x}{a}$.

Выражения вида $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ приводится к рациональной функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ при помощи замены $x = a\operatorname{sh} t$. Обратная замена $t = \ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$.

Выражения вида $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ приводится к рациональной функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ при помощи замены $x = a\operatorname{ch} t$. Обратная замена $t = \ln\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$.

24. *Интегрирование выражений вида $x^m(a+bx^n)^p$ (случаи интегрируемости и замены).*

Теорема Чебышева: интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

берется в элементарных функциях только в случаях:

1) $p\in\mathbb{Z}$ (замена $x=z^s$, где s – общий знаменатель m и n),

2) $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ (замена $a+bx^n=z^s$, где s – знаменатель p),

3) $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$ (замена $ax^{-n}+b=z^s$, где s – знаменатель p).

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ УЧЕБНИКИ И ПОСОБИЯ

а) Основная литература:

1. ***Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа*:** учебник в 2ч./Г. М. Фихтенгольц. - 9-е изд., стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008. **Ч. 1**. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008. – 440.
   http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=410
   (электронный ресурс)

2. ***Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа:*** учебник в 2 ч./Г. М. Фихтенгольц. - 9-е изд., стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008. **Ч. 2**. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008. – 463.
   http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=411
   (электронный ресурс)

б) дополнительная литература:

1. ***Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.*** - М., АСТ Астрель, 2007; 2009; 2010 .
2. ***Рудин У. Основы математического анализа***. - СПб., М., Краснодар: Лань, 2004.
3. ***Гудошникова Е.В. Практические занятия по математическому анализу. Часть 2: Производные и их применение***. Учеб. пособие. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. – 20 с.
4. ***Гудошникова Е.В. Практические занятия по математическому анализу. Часть 3: Неопределенные интегралы***. Учеб. пособие. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. – 21 с.