Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
**«Саратовский государственный университет
имени Н.Г.Чернышевского»**

Кафедра общей физики

**Руководство к лабораторной работе по курсу
общей физики «Механика»**

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ МЕТОДОМ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

(учебно - методическое пособие)

Составители: **Л.Л Страхова , А.Л .Хвалин , Л.С.Сотов**

Под ред. проф. А.А. Игнатьева

Саратов 2011

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ МЕТОДОМ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

(учебно - методическое пособие)

Цель работы: изучение закона сохранения импульса системы тел, абсолютно упругого и неупругого ударов, ознакомление с баллистическим методом измерения, определение скорости полета пули с помощью баллистического маятника, оценка точности метода измерения.

Принадлежности: баллистический маятник, пружинная пушка, шкала для отсчета, шомпол, набор пуль, технические весы, набор гирь и разновесов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие импульса является одним из фундаментальных понятий физики. *Импульсом тела* **p** называется векторная величина, равная произведению массы тела m на его скорость **v**

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Второй закон Ньютона может быть записан в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \qquad (1)$$

В этом выражении **p** представляет собой импульс тела, **F** – силу, действующую на тело.

Если система состоит из *N* тел, то импульсом системы называется векторная сумма импульсов тел, образующих систему

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i.$$

Центром масс системы материальных точек* является точка, положение которой в пространстве задается радиус-вектором $\mathbf{r}_c$, определяемым следующим образом

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i}{m},$$

где m_i – масса i-ого тела, $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор, определяющий положение i-ого тела в пространстве, m – масса системы. В однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.

Скорость центра масс определяется по формуле

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \ldots + m_N\frac{d\mathbf{r}_N}{dt}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i}{m}.$$

Отсюда импульс системы **p** равен произведению массы системы на скорость ее центра масс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c$.

Тела, входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. Силы, с которыми тела системы взаимодействуют между собой, называются *внутренними силами*. *Внешними силами* называются силы, с которыми воздействуют на тела системы другие тела, не принадлежащие системе.

Система называется *замкнутой* или *изолированной*, если внешние силы отсутствуют.

В некоторых случаях движение системы в определенных направлениях можно рассматривать как движение изолированной системы, хотя в целом система заведомо не является изолированной.

Внутренние силы не могут изменить импульс системы в целом. Покажем это на примере системы, состоящей из трех тел (рис.1).

*- материальной точкой называется тело, формой и размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

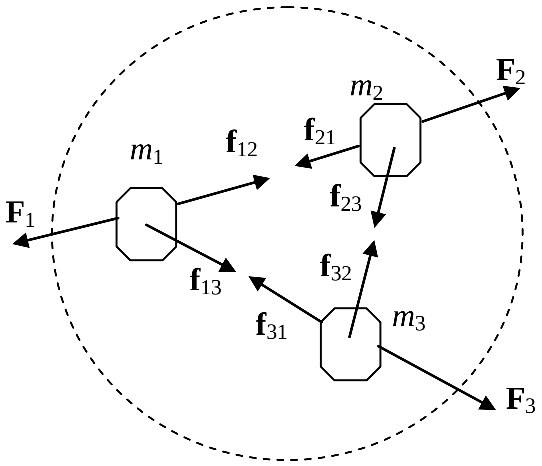

Рис. 1

Запишем для каждого из трех тел уравнение движения (второй закон Ньютона (1))

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{F}_1; \\ \dfrac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23} + \mathbf{F}_2; \\ \dfrac{d\mathbf{p}_3}{dt} = \mathbf{f}_{31} + \mathbf{f}_{32} + \mathbf{F}_3, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ – внешние силы, $\mathbf{f}_{12}$, $\mathbf{f}_{21}$, $\mathbf{f}_{31}$, $\mathbf{f}_{13}$, $\mathbf{f}_{23}$, $\mathbf{f}_{32}$ – внутренние силы.

По третьему закону Ньютона $\mathbf{f}_{12} = -\,\mathbf{f}_{21}$, $\mathbf{f}_{13} = -\,\mathbf{f}_{31}$, $\mathbf{f}_{32} = -\,\mathbf{f}_{23}$. Сложив уравнения системы (2) почленно

$$\frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3,$$

получим

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}_i, \tag{3}$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$ – импульс системы, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ – равнодействующая внешних сил, действующих на тела системы. Таким образом, импульс системы изменяется только под действием внешних сил, действующих со стороны тел, не входящих в систему. Иными словами, внутренние силы не могут изменить полного импульса системы.

При отсутствии внешних сил $\mathbf{F} = 0$ из соотношения (3) получим

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \text{ и } \mathbf{p} = const. \qquad (4)$$

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел остается постоянным (4).

Для материальной точки закон сохранения импульса означает, что в отсутствие внешних сил она движется равномерно и прямолинейно. Для системы материальных точек из закона сохранения импульса следует, что центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно.

Из соотношения (3) получим $d\mathbf{p} = \mathbf{F} \cdot dt$, где $d\mathbf{p}$ – элементарное изменение импульса системы, $\mathbf{F} \cdot dt$ – элементарный импульс силы.

Изменение импульса системы

$$\Delta\mathbf{p} = \int_1^2 d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_0^\tau \mathbf{F}\,dt, \qquad (5)$$

где $\int_0^\tau \mathbf{F}\,dt$ – *импульс внешних* сил, τ – время действия внешних сил на систему.

Соотношение (5) в декартовых координатах имеет вид

$$\Delta p_x = \int_0^\tau F_x\,dt,$$
$$\Delta p_y = \int_0^\tau F_y\,dt, \qquad (6)$$
$$\Delta p_z = \int_0^\tau F_z\,dt.$$

Из соотношений (5), (6) видно, что изменение импульса системы равно нулю, если импульс внешних сил равен нулю. Это возможно в следующих случаях:

1) внешние силы отсутствуют $\mathbf{F} = 0$;

2) время действия внешних сил стремится к нулю $\tau \to 0$;

3) составляющая внешних сил по одной из координат равна нулю, например $F_x = 0$, тогда из (6) $\Delta p_x = 0$, и по оси x система ведет себя как замкнутая.

Закон сохранения импульса является фундаментальным законом природы. Он позволяет рассматривать общие свойства движения без решения уравнений движения и информации о развитии процессов во времени.

Другим фундаментальным законом является закон сохранения энергии.

Полной механической энергией системы называется сумма кинетической и потенциальной энергий

$$W = W_к + W_p.$$

Закон сохранения механической энергии: полная механическая энергия замкнутой системы, между телами которой действуют только консервативные силы, остается постоянной

$$W = W_к + W_p = const \qquad (7)$$

Если в замкнутой системе, кроме консервативных сил действуют неконсервативные силы (например, сила трения), то полная механическая энергия изменяется.

Ударом принято называть кратковременное взаимодействие тел, в результате которого их скорости испытывают значительные изменения.

Во время соударения между телами действуют кратковременные ударные силы, зависимость от времени которых, как правило, неизвестна. Рассматривать такое взаимодействие непосредственно с помощью законов Ньютона затруднительно. Применение законов сохранения энергии и импульса во многих случаях позволяет получить связь между скоростями тел до и после соударения, не рассматривая подробно этот процесс во времени.

Рассмотрим процесс соударения тел, имеющих форму шара.

Центральным ударом называется удар, при котором шары до соударения движутся вдоль прямой, проходящей через их центры. При центральном ударе соударение может произойти, если один из шаров догоняет другой (Рис.2а) или шары движутся навстречу друг другу (Рис.2б).

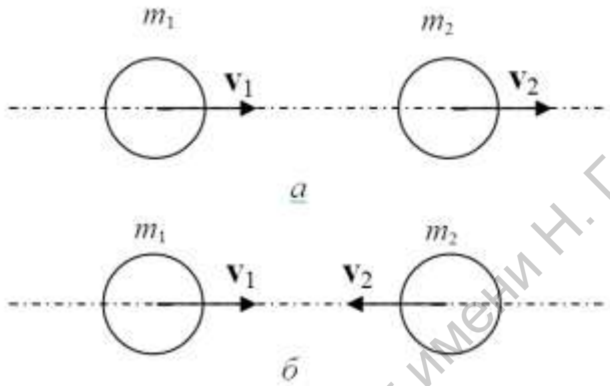

Рис. 2

В механике часто используются две модели ударов – *абсолютно неупругий* и *абсолютно упругий*.

Абсолютно неупругим ударом называется удар, после которого тела движутся с одинаковой скоростью.

При абсолютно неупругом ударе выполняется только закон сохранения импульса, а закон сохранения механической энергии не выполняется, так как часть энергии переходит во внутреннюю энергию.

Абсолютно неупругий удар может произойти, если соударяющиеся тела обладают определенными свойствами: возникающие при деформации тел силы зависят не от величины деформации, а от скорости её изменения.

При соударении возникают быстрые деформации, и тела начинают быстро сжиматься. При этом возникают значительные силы, которые сообщают телам ускорения, направленные в противоположные стороны. Так будет продолжаться до тех пор, пока скорости шаров не окажутся равными. В этот момент деформации перестают изменяться, а, следовательно, исчезают и силы. При абсолютно неупругом ударе тела не восстанавливают свою форму.

Примером абсолютно неупругого удара является столкновение шаров из мягкой глины или пластилина. При абсолютно неупругом ударе выполняется только закон сохранения импульса

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1+m_2)\mathbf{u}, \tag{8}$$

,

где $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ – скорости шаров до столкновения, $\mathbf{u}$ – скорость шаров после столкновения

При абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не выполняется, а выполняется более общий закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} + W_{внутр}, \tag{9}$$

где $W_{внутр}$ – внутренняя энергия.

В этом случае сохраняется полная энергия системы, включающая внутреннюю энергию. На примере неупругого удара пули и маятника расчёт доли кинетической энергии системы, перешедшей во внутреннюю энергию, дан в Приложении 1.

Абсолютно упругий удар рассмотрен в Приложении 2.

БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ

Измерение ряда физических величин может быть сведено к измерению пропорционального им импульса силы. Если на находящийся в равновесии маятник воздействовать силой так, что маятник за время ее действия не успевает существенно отклониться от положения равновесия, то первое максимальное отклонение маятника от полученного толчка – баллистический отброс, пропорционально импульсу силы (см.

Приложение 3). Следовательно, измерение физической величины тогда можно свести к измерению баллистического отброса. В этом и состоит *баллистический метод измерения*, используемый в таких приборах, как баллистический гальванометр, баллистические весы и динамометр, баллистический маятник.

Скорость полёта пули обычно достигает значительной величины: у духового ружья она составляет (150–200) м/с, а у боевой винтовки – (800–1000) м/с и выше. Прямое измерение скоростей пуль, т.е. определение времени, за которое пуля проходит известное расстояние, весьма сложно. Гораздо проще измерять скорость пули косвенными методами, среди которых широко распространены методы, использующие неупругие соударения, в результате которых столкнувшиеся тела соединяются вместе и продолжают движение как целое. К числу методов, основанных на этой идее, относятся методы баллистического и крутильного маятников. В данной работе использован метод баллистического маятника, позволяющий свести измерение скорости пули к измерению отклонения сравнительно медленно движущегося маятника после абсолютно неупругого удара с пулей.

Баллистический маятник – прибор, применяемый для измерения начальных скоростей пуль и снарядов. Он представляет собой тяжёлый металлический цилиндр массы M, заполненный вязким веществом, подвешенный на четырёх нерастяжимых нитях.

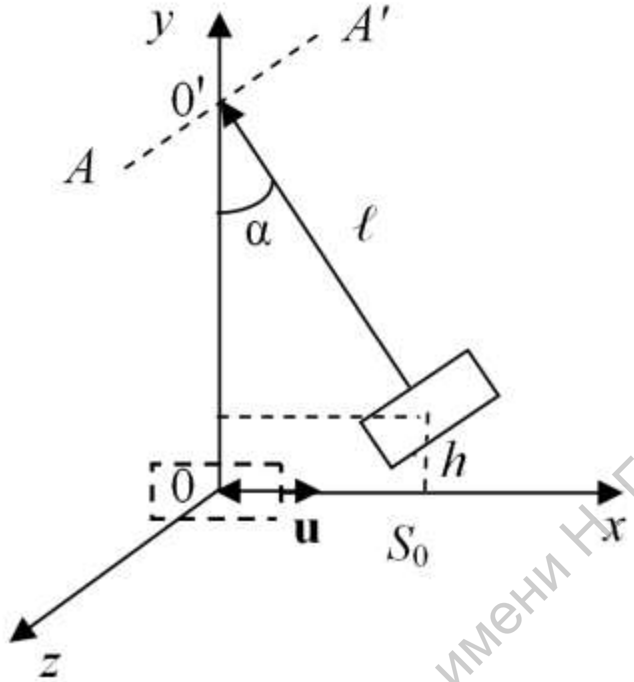

Рис. 3 – Схема баллистического маятника

Пуля массы m, летящая со скоростью v, попадает в покоящийся маятник массы M, застревает в нем. В результате чего маятник с пулей приобретает некоторую начальную скорость u и затем отклоняется на расстояние S_0 (рис. 3). По отклонению маятника можно определить скорость пули.

Удар пули и маятника в общем случае рассмотрен в Приложении 4.

Как известно, закон сохранения импульса справедлив только для замкнутой системы тел, для которой сумма внешних сил равна нулю. Для системы маятник–пуля внешними силами являются сила тяжести, сила натяжения нитей, а также мгновенная ударная сила, возникающая в общем случае в точке подвеса маятника во время удара. Силой сопротивления воздуха пренебрегаем. Во время удара и после него эта система является незамкнутой, так как внешние силы, действующие на маятник с пулей, не скомпенсированы и сумма их не равна нулю.

Систему маятник- пуля можно считать замкнутой в горизонтальном направлении (в котором внешние силы не действуют) при выполнении следующих условий:

1) вектор скорости пули в момент удара должен быть направлен по прямой, проходящей через центр тяжести маятника (точнее, через центр качания маятника, который для математического маятника совпадает с центром тяжести). При невыполнении этого условия часть импульса ударной силы $m\mathbf{v} - m\mathbf{u} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}dt$ будет передаваться точке подвеса маятника;

2) вектор **v** должен быть направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат ось качания и точка центра тяжести покоящегося маятника, то есть в направлении оси *x*. В противном случае, маятнику будет сообщаться вращательное движение относительно других осей помимо оси качания, перпендикулярной вектору скорости **v**;

3) время τ соударения пули с маятником должно быть значительно меньше периода собственных колебаний маятника *T*, чтобы маятник за время соударения не успевал заметно отклониться от положения равновесия.

Практически третье условие обеспечивается выбором достаточно длинной нити подвеса маятника и высокой вязкостью вещества в маятнике.

При выполнении перечисленных условий закон сохранения импульса для системы маятник–пуля может быть записан в проекции на горизонтальное направление (ось X), в котором на систему не действуют внешние силы:

$$m\text{v} = (M+m)\text{u} \qquad (10)$$

Отсюда скорость пули находится следующим образом

$$\text{v} = \frac{(M+m)\text{u}}{m} \qquad (11)$$

где u – скорость маятника с пулей сразу после удара.

После удара маятник повернется вокруг горизонтальной оси АА' и его центр тяжести поднимется на высоту *h*, соответствующую максимальному отклонению S_0 маятника от положения равновесия. При этом кинетическая энергия маятника с пулей полностью перейдет в потенциальную энергию. Закон сохранения механической энергии после удара запишется в виде

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = (M+m)gh,$$

где h – максимальная высота подъема центра тяжести маятника с пулей, g – ускорение свободного падения. Отсюда

$$u = \sqrt{2gh}. \qquad (12)$$

Из Рис. 3 видно, что

$$h = \ell - \ell\cos\alpha = 2\ell\sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ и } \sin\alpha = \frac{S_0}{\ell}, \qquad (13)$$

где α – максимальный угол отклонения, ℓ – расстояние от оси вращения до центра тяжести маятника, S_0 – максимальное отклонение маятника с пулей после удара. Учтём, что ввиду малости угла α можно полагать

$$\sin\alpha \cong \alpha = \frac{S_0}{\ell}, \; 2\sin\frac{\alpha}{2} \cong 2\frac{\alpha}{2} = \alpha. \qquad (14)$$

Тогда из соотношения (12) с учетом (13) и (14) для скорости маятника получим выражение

$$u = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{g\ell} = S_0\sqrt{\frac{g}{\ell}}. \qquad (15)$$

Подставив значение скорости u из соотношения (15) в формулу (11), получим *рабочую формулу* для определения скорости полета пули v:

$$v = \frac{M+m}{m} S_0 \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \qquad (16)$$

где S_0 – максимальное отклонение (баллистический отброс) маятника с пулей после удара, M – масса маятника, m – масса пули, g – ускорение свободного падения, ℓ – длина нитей подвеса маятника.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Баллистический маятник представляет собой систему из тяжелого полого цилиндра, подвешенного на четырех длинных нитях, закрепленных на кронштейне под потолком. Длина каждой нити регулируется. Полость цилиндра до половины заполнена ветошью, в которой и застревает пуля после выстрела. Горизонтальное смещение маятника измеряется по шкале с помощью визира, закрепленного на нижней части цилиндра.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Измерить на весах массы пуль (масса цилиндра и длина нитей маятника указаны на установке).

2. Отрегулировать длину нитей так, чтобы геометрическая ось маятника была направлена горизонтально, параллельно стволу пушки.

3. Установить шкалу, предназначенную для определения отклонения маятника, параллельно оси маятника вблизи визира маятника.

4. Сжать пружину пушки и зафиксировать штифтом ее положение. Вставить пулю в дуло пушки и дослать ее шомполом до упора.

5. Поднятием штифта произвести выстрел и снять отсчет максимального отклонения S_0 маятника по шкале.

6. Опыты проводить с тремя пулями различной массы. С каждой пулей произвести не менее пяти выстрелов.

7. По рабочей формуле (16) вычислить скорость пули при каждом выстреле. Для каждой пули найти среднее значение скорости пули и среднюю абсолютную погрешность измерения. Данные наблюдений и расчетов занести в таблицу:

Измеренные и рассчитанные величины

Номер опыта	m, г	S_0, мм	v, м/с	$\bar{v}$, м/с	$\lvert\Delta v\rvert$, м/с	$\lvert\Delta\bar{v}\rvert$, м/с

8. Подсчитать максимальную относительную погрешность метода измерений по формуле

$$[illegible], \qquad (17)$$

где в качестве погрешностей измерений m, S_0 следует подставлять погрешности соответствующих измерительных средств. В качестве погрешностей табличных величин M, g, ℓ принимается единица последнего разряда в численном значении. Из формулы (17) определить максимальную абсолютную погрешность метода.

$$|\Delta v| = \left|\frac{\Delta v}{v}\right| v.$$

Сравнить полученный результат со средней абсолютной погрешностью из п. 7

9. Окончательный результат для каждой пули записать в виде

$$v = \bar{v} \pm |\Delta v|,$$

где $|\Delta v|$ – наибольшее значение абсолютной погрешности.

Указания по технике безопасности

Запрещается производить выстрел без предварительной проверки направленности ствола пушки вдоль геометрической оси мишени.

Контрольные вопросы

1. Дайте понятия импульса тела, импульса системы тел.
2. Какая система тел называется замкнутой или изолированной?

3. Показать, что внутренние силы не изменяют импульс системы тел. Чем определяется изменение импульса системы?
4. Сформулируйте законы сохранения импульса и механической энергии.
5. Определите понятия центрального, абсолютно упругого, абсолютно неупругого ударов на примере столкновения шаров.
6. В чем заключается баллистический метод измерения скорости полета пули?
7. В каком случае систему маятник–пуля можно считать замкнутой?
8. При каких условиях в баллистическом методе для расчёта скорости пули можно использовать закон сохранения импульса вместо закона сохранения момента импульса?
9. Определить долю кинетической энергии пули, перешедшей во внутреннюю энергию системы маятник–пуля после неупругого удара.
10. Как определяется максимальная относительная погрешность метода измерений?
11. Какими факторами ограничивается точность измерения скорости полета пули в опыте?

Литература

1. *Сивухин Д.В*. Механика. Том 1 М.: Физматлит, 2002, С. 560
2. Удар твердых тел. – В кн.: Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1983.
3. Физический практикум. Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И. Ивероновой. М., Наука, 1967, задача 19.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Расчёт доли кинетической энергии пули, перешедшей во внутреннюю энергию системы

При абсолютно неупругом ударе пули и маятника часть кинетической энергии пули переходит во внутреннюю энергию системы маятник–пуля (9). Кинетическая энергия системы маятник–пуля до удара равна кинетической энергии пули $\frac{m\mathrm{v}^2}{2}$. Кинетическая энергия системы маятник–пуля сразу после удара равна $\frac{(M+m)u^2}{2}$. Во внутреннюю энергию переходит разность этих энергий

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2}-\frac{(M+m)u^2}{2}=\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\cdot\frac{M}{M+m}.$$

Следовательно, во внутреннюю энергию переходит доля кинетической энергии пули, равная

$$\frac{M}{M+m}=\frac{1}{1+\frac{m}{M}}.$$

При $m << M$ почти вся кинетическая энергия пули переходит во внутреннюю энергию. При $m = M$ во внутреннюю энергию переходит половина первоначальной кинетической энергии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Абсолютно упругий удар

Абсолютно упругим ударом называется удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие виды энергии. При таком ударе на первой стадии кинетическая энергия полностью или частично переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Во время сближения шаров силы, действующие на них, увеличиваются пропорционально деформации в соответствии с законом Гука. Скорости обоих шаров становятся одинаковыми в момент их максимальной деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга, а потенциальная энергия переходит в кинетическую. Тела разлетаются со скоростями, величины и направления которых зависят от законов сохранения полной механической энергии и системы тел.

Хорошим примером абсолютно упругого удара является столкновение бильярдных шаров или упругих мячиков.

При абсолютно упругом ударе выполняются и закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2,$$
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \qquad (18)$$

где m_1, m_2 массы сталкивающихся шаров, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ – скорости шаров до столкновения, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ – скорости шаров после столкновения.

Решая систему уравнений (18), получаем

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2},$$
$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}.$$

При абсолютно упругом ударе пули о маятник выполняются законы сохранения импульса и механической энергии.

$$mv = mv' + MV',$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{MV'^2}{2}.$$

где **v** – скорость пули до удара, **v′** – скорость пули после удара, **V′** – скорость маятника после удара.

Из этих соотношений в проекции на горизонтальное направление получаем, что импульс, приобретаемый маятником при таком ударе

$$MV' = m(2v - V'),$$

откуда

$$v = \frac{1}{2}\frac{M+m}{m}V' \qquad (19)$$

Из закона сохранения энергии маятника *после удара* начальная скорость маятника равна

$$V' = \sqrt{2gh} = S_0'\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \qquad (20)$$

где S_0' – баллистический отброс в случае абсолютно упругого удара. Подставляя выражение (20) в (19), получаем

$$v = \frac{1}{2}\frac{M+m}{m}\sqrt{2gh} = \frac{M+m}{2m}S_0'\sqrt{\frac{g}{\ell}}. \qquad (21)$$

Из соотношений (19) и (21) следует, что при абсолютно упругом ударе скорость маятника $V' = 2v\frac{m}{M+m}$ и баллистический отброс $S_0' = 2v\frac{m}{M+m}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ в два раза больше, чем при абсолютно неупругом ударе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Пропорциональность максимального отклонения маятника импульсу силы при баллистическом методе измерения

При малом угле отклонения маятник после удара продолжает свое движение по гармоническому закону

$$S = S_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$$

где S_0 – максимальное отклонение маятника от положения равновесия (амплитуда колебания), T – период колебания, равный

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Мгновенное u_t и максимальное u_{max} значения скорости маятника соответственно запишутся следующими соотношениями:

$$u_t = \frac{dS}{dt} = \frac{2\pi}{T} S_0 \cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$u_{max} = \frac{2\pi}{T} S_0 = S_0\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (22)$$

Импульс ударной силы равен изменению импульса маятника

$$\int_0^\tau F\,dt = uM, \qquad (23)$$

где u – начальная скорость маятника с пулей сразу после удара.

Скорость маятника u сразу после удара будет практически равна максимальной скорости u_{max}, с которой маятник должен проходить положение равновесия при гармонических колебаниях.

Подставляя в (23) выражение для скорости u_{max} из (22), получим

$$\int_0^\tau F\,dt = M S_0\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \qquad (24)$$

Из последнего равенства видим, что максимальное отклонение маятника S_0 пропорционально импульсу ударной силы. Это свойство метода измерения очень ценно на практике.

Соотношение (23) лежит в основе баллистического метода измерения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Удар пули и маятника в общем случае

В общем случае при ударе пули и физического маятника при решении задачи необходимо пользоваться законом сохранения момента импульса. В нашем случае, когда баллистический маятник можно рассматривать как математический (размеры маятника малы по сравнению с длиной нитей подвеса) возможно использование закона сохранения импульса. Действительно, закон сохранения момента импульса для системы маятник–пуля можно записать в следующем виде

$$m\mathrm{v}\ell \cdot = J\omega$$

где $m\mathrm{v}\ell$ – момент импульса пули до удара, $J\omega$ – момент импульса системы маятник–пуля после удара, J – момент инерции маятника с пулей относительно оси вращения AA', $\omega = \frac{\mathrm{u}}{\ell}$ – угловая скорость, ℓ – расстояние от центра тяжести системы маятник–пуля до точки подвеса.

Так как размеры маятника малы по сравнению с длиной нити подвеса, то его момент инерции можно определить как момент инерции материальной точки

$$J = (M+m)\ell^2.$$

Подставляя выражения для угловой скорости ω и момента инерции маятника с пулей J в (10), получим

$$m\mathrm{v}\ell = (M+m)\ell^2 \cdot \frac{\mathrm{u}}{\ell}.$$

После преобразований последнее выражение принимает вид закона сохранения импульса для случая абсолютно неупругого удара:

$$m\mathrm{v} = (M+m)\mathrm{u}.$$