VII

# Частная методика.

## Часть 2. Геометрия

С.В. Лебедева
СГУ им. Н.Г. Чернышевского
Саратов, 2019

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет

# ЧАСТНАЯ МЕТОДИКА
(в вопросах, педагогических задачах и ситуациях)

## ЧАСТЬ 2. ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01 – педагогическое образование, профиль – математическое образование



Саратов, 2019

УДК 51(072.8)

*Рекомендовано к печати*

*научно-методической комиссией механико-математического факультета*

*Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского*

Л 33 Лебедева, С. В. Частная методика (в вопросах, педагогических задачах и ситуациях) в 3-х частях. Часть 2. Геометрия : учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 – педагогическое образование, профиль – математическое образование / С. В. Лебедева. – Саратов, 2019. – 142 с.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для:

– организации практических занятий по дисциплинам «Методика обучения предмету (математика)», «Частная методика обучения математике» и т.п.,

– различных видов текущего контроля,

– подготовки к автоматизированному тестированию, предусмотренному рабочей программой курса «Методика обучения и воспитания (математика)»,

– подготовки к государственному экзамену по методике обучения математике.

Тестовая база может стать основой для разработки тестов остаточных знаний, устных опросов и других форм контроля по дисциплинам «Методика обучения предмету (математика)» и «Частная методика обучения математике» и т.п.

База тестовых заданий представлена тремя типами заданий.

Задания первого типа направлены на проверку знаний основных теоретических положений частной методики обучения математики.

В заданиях второго типа описана некоторая педагогическая ситуация, которую студенту предстоит решить, при этом предлагаются возможные объяснения или варианты решения ситуации, из которых необходимо выбрать подходящий или предложить свой. Если при этом выбранный вариант не совпадает с вариантом автора пособия, то студент должен обосновать: (1) свой выбор письменно и предоставить своё решение преподавателю, или (2) устно и инициировать, таким образом, дискуссию в группе.

Задания третьего типа – педагогические задачи, которые предлагается решить самостоятельно без опоры на прецедент.

Для удобства все вопросы разбиты на темы, соответствующие содержательно-методическим линиям раздела «Геометрия» школьного курса математики, что позволяет использовать пособие в качестве содержательной основы для проведения практических занятий и семинаров по методике обучения математике, организации консультаций в период прохождения студентами педагогических практик, самостоятельного изучения отдельных вопросов частной методики, в том числе в ходе преддипломной практики.

В приложениях даны решения задач типовых и повышенной сложности, демонстрирующие логику изложения соответствующих вопросов школьного курса математики.

## ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

### Основные методические положения

**1.** Накопление геометрических представлений у учащихся посредством вырезания и вычерчивания фигур, получения фигур путем перегибания листа бумаги, упражнений на распознавание фигур на рисунках, чертежах и в окружающей обстановке; знакомство с некоторыми геометрическими понятиями (называя треугольник, прямоугольник и другие фигуры, учащиеся не дают им определений; для выделения этих фигур из числа других они называют избыточные свойства.); овладение элементарными навыками использования простейших чертежных и измерительных инструментов (линейка, циркуль, транспортир); выполнение простейших измерительных работ в классе и на местности. Общие геометрические положения возникают как обобщение опыта, а не в виде теорем, подлежащих доказательству. Всё перечисленное свойственно

а) изучению геометрии в начальной школе
б) изучению геометрии в 5-6 классах
в) изучению геометрии в курсе основной школы (7-9 классы)
г) изучению геометрии в курсе средней (полной) школы (10-11 классы).

**2.** Развитие геометрических представлений у учащихся посредством вырезания и склеивания, рисования и вычерчивания фигур, раскрашивания, получения фигур путем перегибания листа бумаги, измерения, паркетирования, определение места расположения фигуры в пространстве с помощью координатной сетки или полярных координат, упражнений на распознавание фигур на чертежах и в окружающей обстановке. При этом при восприятии конкретных предметов выделяются и абстрагируются их геометрические свойства, создаются геометрические образы. Подготовка учащихся к восприятию систематического курса геометрии посредством расширения круга изучаемых геометрических фигур, реальных определений этих фигур, выявления и обоснования их свойств. Всё перечисленное свойственно

а) изучению геометрии в начальной школе
б) изучению геометрии в 5-6 классах
в) изучению геометрии в курсе основной школы (7-9 классы)
г) изучению геометрии в курсе средней (полной) школы (10-11 классы).

**3.** Систематическое изучение плоских геометрических фигур (их построение, свойства) и скалярных величины (длина, мера угла, площадь) различными методами (в том числе методом геометрических преобразований и векторно-координатным методом) свойственно

а) изучению геометрии в начальной школе
б) изучению геометрии в 5-6 классах
в) изучению геометрии в курсе основной школы (7-9 классы)
г) изучению геометрии в курсе средней (полной) школы (10-11 классы).

**4.** Систематическое изучение пространственных геометрических фигур (их изображение, свойства) и скалярных величины (длина, мера угла, площадь поверхности и объём) различными методами (в том числе методом геометрических преобразований и векторно-координатным методом) свойственно

а) изучению геометрии в начальной школе

б) изучению геометрии в 5-6 классах

в) изучению геометрии в курсе основной школы (7-9 классы)

г) изучению геометрии в курсе средней (полной) школы (10-11 классы).

**5.** Основное учебное назначение первых уроков систематического курса планиметрии – сформировать у учащихся

а) знание о сущности аксиоматического метода построения геометрии;

б) владение методами решения геометрических задач (задач с принципиально новым содержанием и подходами к решению, основанными на высоком уровне строгости логических рассуждений);

в) первоначальное представление о стиле мышления в геометрии, о характере геометрических доказательств (все утверждения, не являющиеся аксиомами, необходимо доказывать, не ссылаясь на очевидность) и положить начало выработке соответствующих умений;

г) ряд новых понятий, терминов, новой символики – основу (синтаксис и семантику) геометрического языка.

**6.** Методика первых уроков систематического курса планиметрии, первых разделов геометрии предполагает

а) аксиоматический подход к изложению геометрического материала;

б) включение учащихся в учебно-исследовательскую деятельность геометрического содержания;

в) логическую деятельность по работе с геометрическими понятиями и их свойствами;

г) постановку и совместное решение учебных и проблемных трёх типов геометрических задач (на доказательство, построение, вычисление);

д) постепенный переход от конкретного к общему, постоянное обращение к наглядности, к окружающей действительности.

**7.** На первых уроках систематического курса геометрии необходимо учитывать, что вначале учащиеся, вынуждаемые обосновывать то, что и «так видно», и не имеющие достаточного опыта в логических рассуждениях, будут испытывать определенные трудности. Для убеждения учащихся учителю целесообразно

а) демонстрировать примеры обоснований и доказательств,

б) показать геометрические иллюзии,

в) советовать/требовать выучивать доказательства, если они непонятны,

г) ссылаться на обязательную дедуктивность в геометрии (доказывается всё, кроме аксиом).

**8.** На первых уроках систематического курса геометрии, давая образцы правильных рассуждений

а) не следует обращать внимания на грамотность математической речи учащихся, синтаксические и семантические ошибки математического языка;

б) не следует сразу же предъявлять слишком высокие требования к ответам учащихся; необходима постоянная помощь учителя;

в) следует обращать внимание на грамотность математической речи учащихся, исправлять синтаксические и семантические ошибки по ходу ответа учащегося;

г) следует сразу предъявлять строгие требования к ответам учащихся; необходимо постоянно подключать учащихся к поиску и исправлению логических ошибок в ответах одноклассников.

**9.** Для того чтобы облегчить учащимся запоминание формулировок, целесообразно

а) заготовить таблицы с текстами аксиом, определений и вывешивать их по мере надобности,

б) использовать игровые семантические упражнения (например, на заполнение пропусков в тексте)

в) использовать игровые синтаксические упражнения (например, на составление текста из его блоков)

г) использовать логические упражнения на усвоение формулировок;

д) переписать их 5-10 раз в тренировочную тетрадь

е) разрешить при устных ответах и комментированном решении задач пользоваться материалом учебника;

ж) устроить хоровое заучивание новой формулировки непосредственно на уроке.

**10.** На первых уроках систематического курса геометрии необходимо обратить внимание на

а) включение новых символов в письменную математическую речь учащихся;

б) выяснение смысла и отработку специфических речевых оборотов, таких как «одна и только одна», «любые две», «найдется» и т.д., используемых в формулировках аксиом;

в) новые термины, для которых всегда указывать этимологию;

г) тщательность в выполнении чертежей и записей по ходу объяснения.

**11.** Уровень овладения геометрическим материалом, на котором информация добывается из опыта, а главные результаты усвоения – наглядно-оперативное знание предмета (без заучивания формулировки) и умение правильно оперировать материалом; – называется ______________________________.

**12.** Уровень овладения геометрическим материалом, на котором даётся полное логическое обоснование изученному материалу, а главные результаты усвоения – установление логических связей между понятиями, владение доказательством большинства теорем, умение правильно оперировать материалом; – называется ______________________________________________________.

**13.** Составьте технологическую цепочку изучения геометрической фигуры.

а) Анализ, обобщение и систематизация изученного, выделение главного.

б) Выявление свойств и признаков фигуры, не указанных в определении путем наблюдения, построения, измерения. Формулировка утверждения, основанного на догадке (гипотезе).

в) Изображение фигуры на основе определения, распознавание на моделях, чертежах и т.п.

г) Итоговый контроль усвоения, определение уровня овладения материалом.

д) Краткая запись и доказательство признаков или свойств (теорем).

е) Описание, введение термина и формулирование определения фигуры, выделение ближайшего рода и видовых отличий.

ж) Подготовительный этап – рассмотрение объектов, имеющих форму данной фигуры, вычерчивание. Моделирование. Конструирование. Выявление характеристических свойств.

з) Рассмотрение свойств для частных случаев (следствий).

и) Решение задач на усвоение каждой теоремы и ее следствий.

к) Решение задач с использованием определения и классификации.

л) Решение математических и прикладных задач с применением всех свойств и признаков фигуры (т.е. на применение изученных теорем).

м) Составление родословной и классификации понятий.

н) Текущий контроль и коррекция знаний и умений.

о) Упражнения на усвоение определения.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | |

**14.** Одним из средств обучения геометрии являются задачи на готовых чертежах, которые образуют, как правило, серии, объединённые некоторым общим (серийным) признаком. При работе с чертежом к геометрической задаче большое значение имеет специальное формирование соответствующих приемов. Приемы работы с чертежом могут быть разной степени сложности и обобщенности. Наиболее обобщенными являются приемы:

а) Подведение геометрической фигуры под понятие, то есть распознавание фигуры.

б) Выделение геометрической фигуры на чертеже. Обнаружение фигуры осуществляется на основе ее зрительного образа, в котором должны быть отражены существенные признаки соответствующего понятия.

Сформулируйте ещё несколько.

**15.** Закончите высказывание Д. Пойа: «Вычерчивание или построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки традиционно занимает большое место в преподавании планиметрии. Простейшие из этих построений используются чертежниками, но в остальном практическая ценность геометрических построений незначительна, а теоретическое значение невелико, И все же место, занимаемое такими построениями в программе обучения, полностью оправдано, так как они …»

а) наилучшим образом демонстрируют основные этапы научного исследования (анализ данных, поиск путей решения, его обоснование и исследование),

б) естественным образом развивают аналитическое мышление,

в) развивают пространственное воображение и формируют пространственное мышление,

г) представляют собой наиболее пригодное средство для ознакомления начинающего с геометрическими фигурами, и лучше всего подходит для освоения путей решения задач,

д) являются одним из основных показателей уровня развития математических способностей, глубины освоения всего учебного материала курса геометрии.

**16.** Большое внимание при изучении геометрии следует уделять умению читать геометрические чертежи. Умение читать чертеж – сложное умение, включающее такие действия:

а) знание сущности условных обозначений (штрихи, штриховка, скобки, стрелки и пр.).

б) изменение взаимного расположения образов;

в) изменение структуры образов;

г) использование чертежных инструментов,

д) оперирование понятиями симметрии, масштаба, линия и т.п.;

е) описание формы, размеров, пропорции фигур;

ж) переосмысление элементов чертежа с точки зрения другого понятия;

з) простое вычленение фигур;

и) распознавание фигур;

к) сопоставимое вычленение фигур;

л) сравнение фигур;

Укажите те из них, которые являются специфическими компонентами пространственного мышления.

______________________________________________

Укажите те из них, которые являются следствием математических знаний.

______________________________________________

Укажите лишнее действие.

______________________________________________

Укажите действие, осваиваемое, в том числе и на других дисциплинах.

______________________________________________

**17.** Учитель на первых уроках систематического курса геометрии познакомил учащихся с одним из видов математической деятельности – геометрическими построениями (форма обучения – лекция):

«Если основными геометрическими фигурами считать точку и отрезки линий (в общем случае сами линии), то под ***конфигурацией*** можно понимать любое пересечение или объединение основных геометрических фигур.

Конфигурацию, имеющую в геометрии устоявшееся название (термин – определение: содержание понятия) будем называть ***геометрической фигурой***.

Под ***геометрическими построениями*** будем понимать построение некоторой конфигурации (в том числе геометрической фигуры) с наперед заданными условиями.

Геометрические построения могут играть вспомогательную роль в решении какой-либо геометрической задачи (например, для иллюстрации решения или для поиска плана решения) или же быть самоцелью. В последнем случае говорят о целом классе задач – ***задачи на построение***.

***Задачей на (геометрическое) построение*** назовем задачу с требованием построить определенную конфигурацию геометрических фигур, удовлетворяющих определенным условиям, с помощью указанных инструментов.

***Решение задачи на (геометрическое) построение*** определим как адекватную геометрическую модель описанной в задаче конфигурации.

Задача считается ***решенной***, если указан способ построения фигуры (конфигурации) и доказательство того, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами».

Насколько целесообразно включение в содержание лекции приведённых дидактических единиц?

а) Нецелесообразно: понятия геометрического построения и задачи на построение интуитивно понятны учащимся.

б) Нецелесообразно: введённые понятия нигде использоваться не будут.

в) С указанными понятиями можно было познакомить учащихся во внеурочное время (а не занимать время урока), например, разработать презентацию по этому материалу и дать ознакомиться с ней в рамках домашней работы.

г) Вполне целесообразно: это добавляет строгости и научности в обучении математике.

д) Вполне целесообразно: это мотивирует учеников к изучению геометрических построений, задаёт нужные ориентиры.

е) Это нужно сделать обязательно: ученики должны осознать специфичность нового для них вида математической деятельности.

**18.** Выделите три наиболее актуальные на сегодняшний день особенности изучения геометрических построений в школьном курсе математики.

а) В курсе информатики и ИКТ базового уровня встречаются элементарные (и простые) задачи на построение в качестве иллюстраций процесса информационного моделирования в среде графического редактора.

б) В последнее время задачи на построение рассматриваются в связи с формированием графической культуры учащихся и информационной культуры (компьютерное моделирование, в том числе в среде «1С: математический конструктор»).

в) Внимание и интерес учителей математики к геометрическим построениям с каждым годом уменьшается, прежде всего, из-за того, что данная тема не подлежит проверке на государственной итоговой аттестации.

г) Задачный материал модуля «Геометрические построения» требует больших затрат времени как на поиск решения, так и на оформление решения задач.

д) Материал модуля «Геометрические построения» в значительной степени проверяется темами «Равенство треугольников», «Решение треугольников», «Свойство вписанной окружности», «Задачи на вычисление углов, длин, площадей». В этом случае геометрические построения проводятся с помощью любых подручных средств, чаще всего, с использованием измерительной линейки или с учетом свойств клетчатой бумаги.

е) Содержание модуля «Геометрические построения» является обязательным к изучению.

ж) На практике к пропедевтике в 7 классе подключается решение задач на построение в курсе 8-9 классов в рамках изучения тем «Многоугольники» и «Геометрические преобразования», в этом случае каждая задача рассматривается с подробным комментарием учителя, чертежи учащимися выполняются с помощью циркуля и линейки.

з) На практике тема изучается учащимися 7 класса на пропедевтическом уровне.

и) На практике учителя математики исключают данную тему из содержания курса планиметрии 7 класса.

к) Умение осуществлять геометрические построения входит в число обязательных умений.

## Простейшие геометрические фигуры и их основные конфигурации

**19.** В учебнике «Математика-5» авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка представление об основных геометрических фигурах даётся в следующей логической последовательности (§ 3. Отрезок. Длина отрезка):

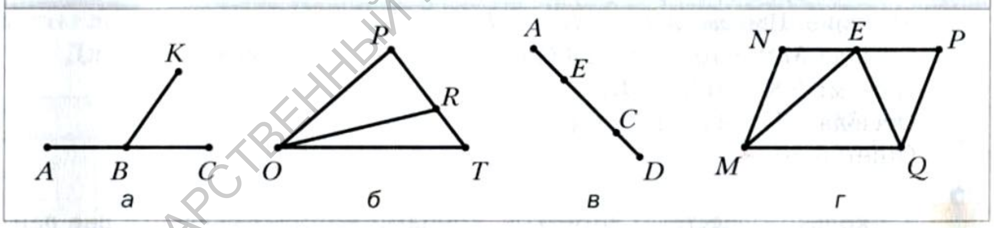
***точка – линия – отрезок (самая короткая линия) – геометрическая фигура – концы отрезка – длина отрезка – единичный отрезок – измерить отрезок – свойства длины отрезка*** (аддитивность) ***– равные отрезки – расстояние между точками – ломаная (её вершины и звенья) – длина ломаной – замкнутая ломаная.***

Приведите пример другой логической последовательности (математической схемы) представления материала темы «Отрезок. Длина отрезка».

**20.** Изменится (как?) ли содержание деятельности учащихся, если в задании 44а изменить условие «изображённые на рисунке» на условие «с вершинами в точках, изображённых на рисунке»?

**44.** Запишите все отрезки, изображённые на рисунке 15.

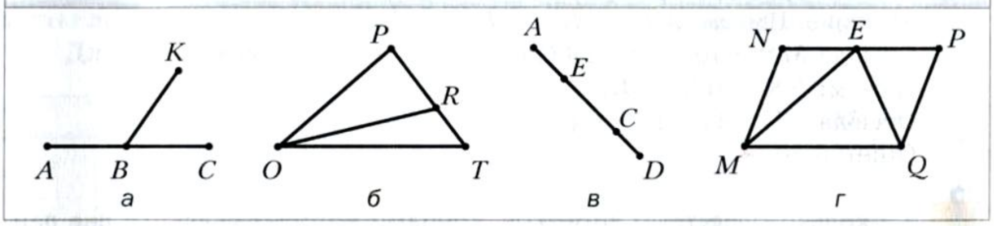
Рис. 15




**21.** Изменится (как?) ли содержание деятельности учащихся, если в задании 44б изменить условие «изображённые на рисунке» на условие «с вершинами в точках, изображённых на рисунке»?

**44.** Запишите все отрезки, изображённые на рисунке 15.

Рис. 15



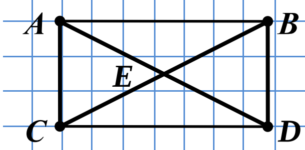
**22.** На основе задачи из учебника «Математика-5»: «Отметьте в тетради точки *A, B, C, D* и соедините их попарно отрезками. Сколько отрезков образовалось? Сколько образовалось отрезков с концами в точке *A*?»; – учитель решил составить практическую работу на 10 минут. Дополните содержание этой работы ещё двумя заданиями. Выполните эту работу в соответствие с требованиями, предъявляемыми к письменным работам пятиклассников.

**23.** Оцените результаты выполнения задания учениками 5 класса: «Отметьте в тетради точки *A, B, C, D* и соедините их попарно отрезками. Сколько отрезков образовалось? Сколько образовалось отрезков с концами в точке *A*?»

*Ученик А*

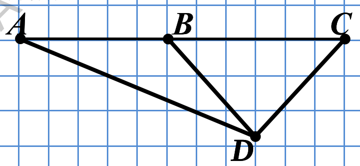

***AB, AC, AD – 3 отрезка***
***BC, BD, CD***
***6 отрезков всего***

*Ученик Б*



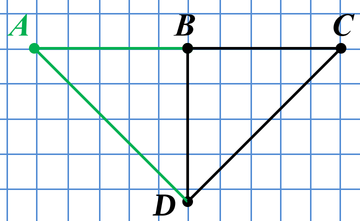

***AB, BD, DC, CA, AD, BC***
***AE, ED, CE, ED – 10 отрезков и***
***4 с концом в точке A***

*Ученик В*



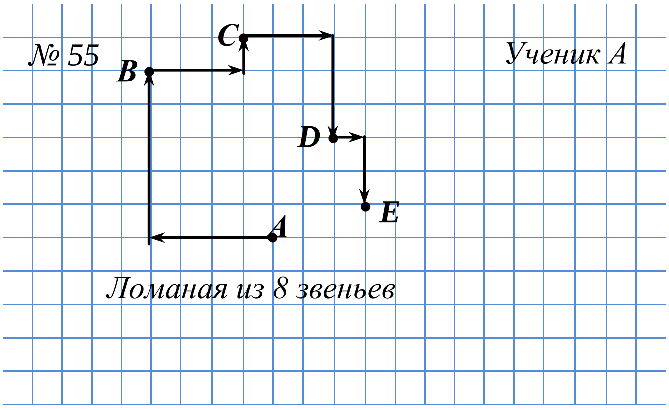

***Отрезки: AD, BD, CD, AB, BC, AC***

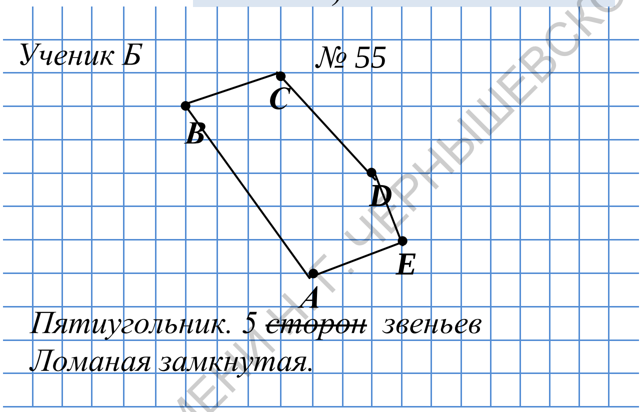
*Ученик Г*



**24.** Ученики 5 класса самостоятельно решали задачу № 55, а затем обменялись тетрадями для взаимоконтроля. Насколько содержание задания соответствует выбранной форме проверки его выполнения? Обоснуйте свой ответ на основании работ двух учеников. Оцените эти работу. Укажите на ошибки (при их наличии).

**55.** Отметьте в узле клеток тетради точку $A$; точку $B$ разместите на 4 клетки левее и на 5 клеток выше точки $A$; точку $C$ — на 3 клетки правее и на 1 клетку выше точки $B$; точку $D$ — на 3 клетки правее и на 3 клетки ниже точки $C$; точку $E$ — на 1 клетку правее и на 2 клетки ниже точки $D$. Соедините последовательно отрезками точки $A$, $B$, $C$, $D$ и $E$. Какая фигура образовалась? Запишите её название и укажите количество звеньев.



**25.** В учебнике «Математика-5» авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка представление об основных геометрических фигурах даётся в следующей логической последовательности (§ 4. Плоскость. Прямая. Луч):

***модель части плоскости (лист бумаги) – бесконечность – изображение/воображение – прямая – отрезок (как часть прямой и изображение прямой) – свойство прямой, проходящей через две точки – луч (с началом в точке).***

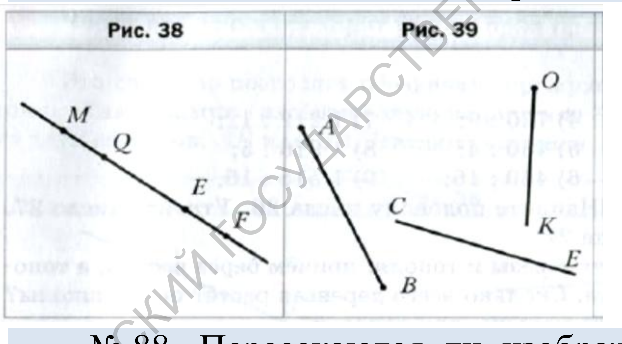
Приведите пример другой логической последовательности (математической схемы) представления материала темы «Плоскость. Прямая. Луч».

В учебнике «Математика-5» авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка представление об основных геометрических фигурах даётся в следующей логической последовательности (§ 4. Плоскость. Прямая. Луч):

***модель части плоскости (лист бумаги) – бесконечность – изображение/воображение – прямая – отрезок (как часть прямой и изображение прямой) – свойство прямой, проходящей через две точки – луч (с началом в точке).***

После этого ученикам предлагается выполнить упражнения на усвоение изученного теоретического материала:

№ 85. Отметьте в тетради точки М и К и проведите через них прямую. Отметьте на отрезке *МК* точку *N*. Принадлежит ли точка *N* прямой *МК*? Отметьте на отрезке *МК* точку *Р*, лежащую вне отрезка *МК*. Запишите все возможные обозначения этой прямой.




№ 87. Рассмотрите рисунок 38. Верно ли утверждение: 1) точка *Q* принадлежит отрезку *ME*; 2) точка *Q* принадлежит лучу *EF*; 3) точка *Q* принадлежит отрезку *FE*; 4) точка *E* принадлежит отрезку *MF* и лучу *FM*; 5) точка *M* принадлежит отрезку *QE*; 6) точка *M* принадлежит прямой *QE*?

№ 88. Пересекаются ли изображённые на рисунке 39: 1) прямая *CE* и отрезок *AB*; 2) луч *OK* и прямая *CE*; 3) луч *OK* и отрезок *AB*?

№ 91. На прямой АВ отмечены две точки М и N. Назовите фигуры, которые при этом образовались.

Отметьте (подчеркните одной чертой) те дидактические единицы, которые не включены в логическую последовательность (математическую схему) изучения темы.

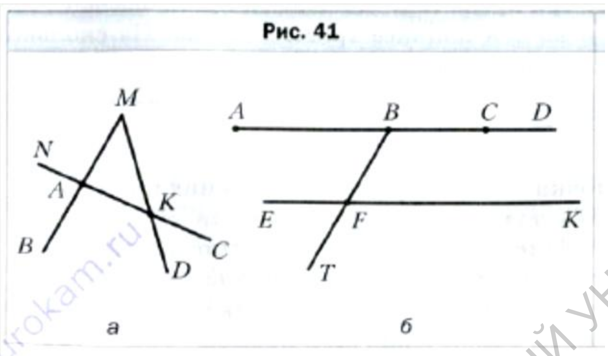
Отметьте (подчеркните двумя чертами) те требования, которые не могут быть выполнены учащимися.

Переформулируйте задания надлежащим образом.

**26.** Учащиеся 5 класса выполняют упражнения на закрепление материала темы «Плоскость. Прямая. Луч» (учебник «Математика-5» авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка).

№ 90. Отметьте в тетради: 1) четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой; 2) пять точке, из которых никакие три не лежат на одной прямой.

По результатам выполненной работы учитель предложил ученикам алгоритмизировать процесс построения указанных точек. Каков этот алгоритм?




**27.** Как наилучшим образом организовать самостоятельную деятельность учащихся по выполнению задания: «Запишите все отрезки, прямые и лучи, изображённые на рисунке 41»?

а) Использовать комбинаторный подход к решению – граф-схему (дерево вариантов).

б) Использовать знания об этих объектах: прямая не имеет концов (не ограничена точками), луч имеет начало в точке (ограничен одной точкой), отрезок имеет концы в точках (ограничен двумя точками).

в) Искать и записывать сначала все прямые, затем все лучи, затем все отрезки.

г) Требование задания «запишите все отрезки, прямые» бессмысленно, так как, согласно тексту параграфа: «Прямая не имеет концов. Она бесконечна. Поэтому на рисунке мы изображаем только часть прямой – отрезок». Исходя из этого, АС – прямая, отрезок и луч одновременно.

д)

**28.** Вопрос о взаимном расположении прямых изучается одним из первых в систематическом курсе планиметрии, так как

а) без знания этих отношений невозможно изучение свойств фигур, познание окружающего мира;

б) именно при изучении параллельности вводится новый метод доказательства (косвенное доказательство – от противного);

в) параллельно рассматривается история геометрии как науки (можно привести примеры неевклидовых геометрий);

г) это самая простая тема школьного курса планиметрии.

**29.** В имеющейся учебно-методической литературе по геометрии представлена различная последовательность изучения вопросов о параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Какова бы ни была последовательность изучения, логическая структура темы должна содержать пять основных элементов;

а) алгебраическую запись (рассмотрение взаимного расположения прямых а системе координат);

б) вопросы взаимосвязи параллельности и перпендикулярности;

в) исследование случаев взаимного расположения более чем двух прямых;

г) определения;

д) признаки;

е) применение к решению задач;

ж) примеры из окружающего мира;

з) свойства;

и) символика;

к) существование (построение);

**30.** Для того, чтобы облегчить учащимся запоминание формулировок, целесообразно

а) включать в систему упражнений на усвоение предложения с пропущенными словами (например, *прямая а … через точку А; точка В … прямой b; прямые a и b … в точке O*);

б) заготовить таблицы с текстами аксиом, определений, теорем и демонстрировать их по мере надобности;

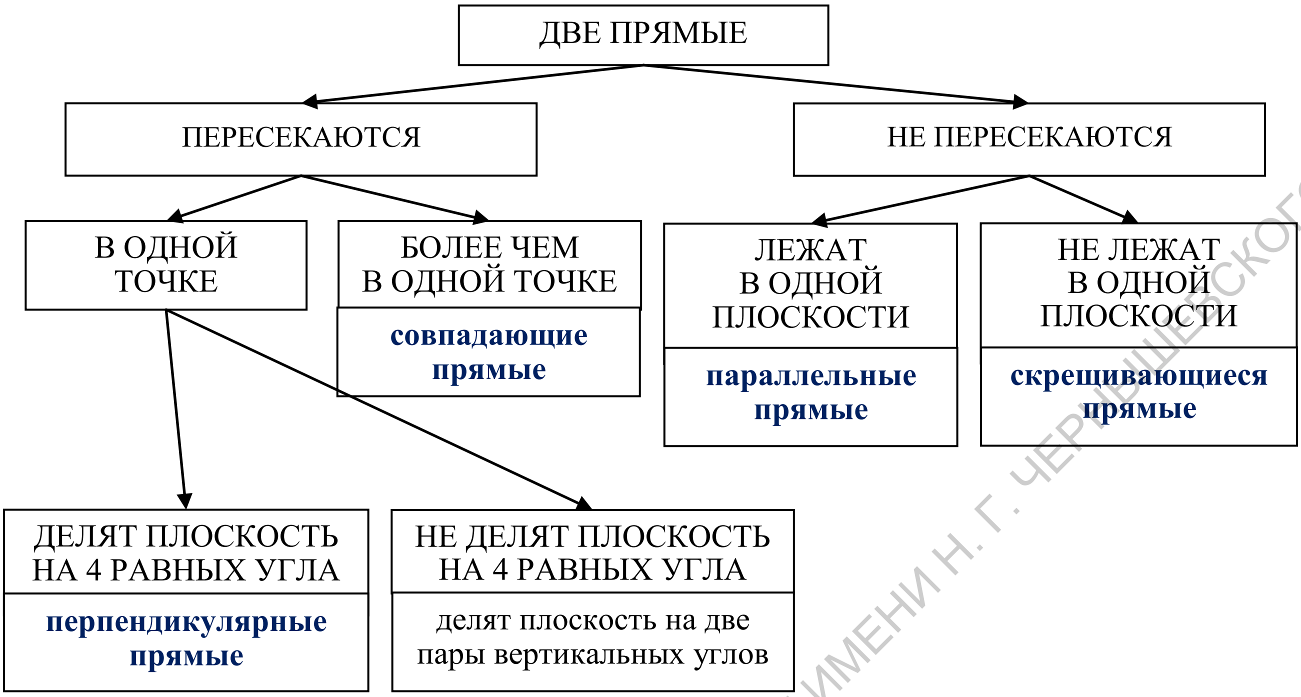
в) использовать для усвоения тетради с печатной основой и интерактивные упражнения;

г) организовывать практические работы, в том числе и по готовым чертежам;

д) проводить регулярно фронтальные опросы и математические диктанты на знание формулировок;

е) рифмовать эти формулировки, использовать любые другие мнемонические приёмы.

**31.** В каких случаях можно использовать следующий конспект опорных сигналов (классификационную схему)?




а) в 7 классе при рассмотрении вопроса о взаимном расположении прямых на плоскости;

б) в 7 классе при рассмотрении вопроса о свойствах углов, образованных пересекающимися прямыми;

в) в 7 классе при изучении свойств и признаков параллельных прямых;

г) в 7-9 классах при доказательстве/опровержении утверждений, связанных с взаимным расположением прямых на плоскости;

д) в 10 классе при изучении способов задания плоскости;

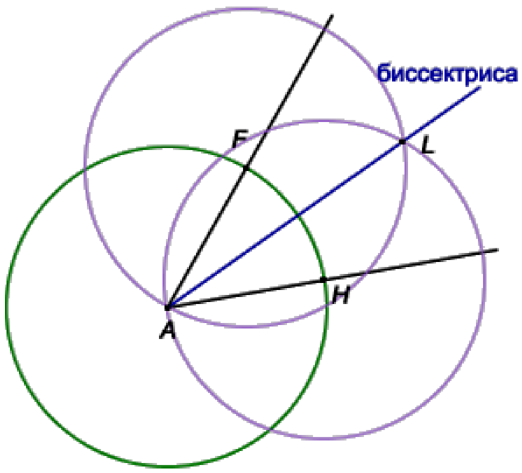
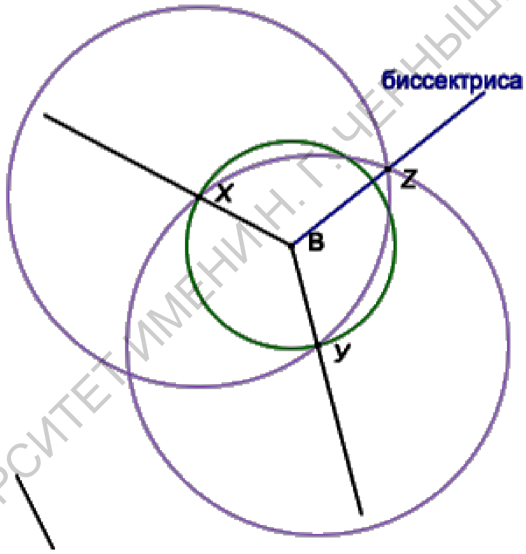
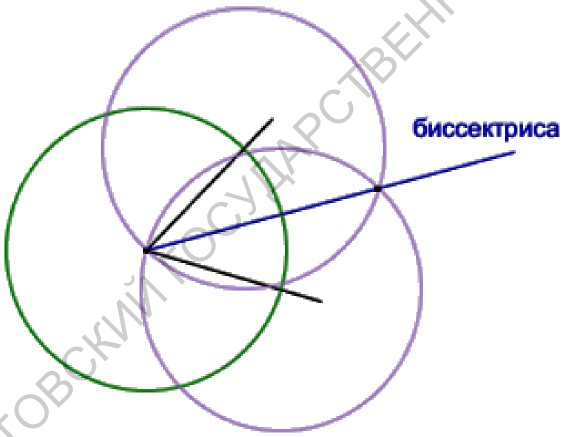
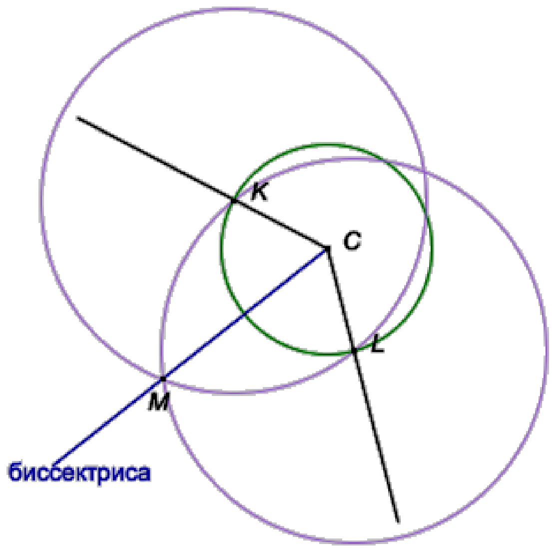
е) в 10 классе при изучении скрещивающихся прямых;

ж) в 10-11 классах при доказательстве/опровержении утверждений, связанных с взаимным расположением прямых в пространстве.

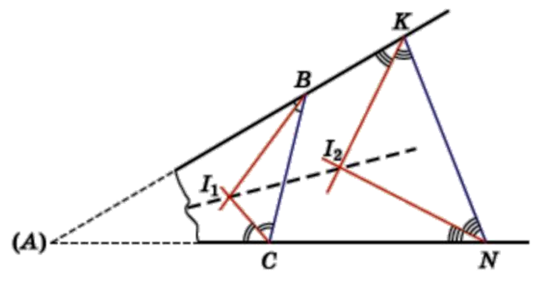
**32.** Учитель для первых уроков геометрии поставил цель – сформировать умение извлекать информацию из условий и требований задачи. Для этого он разработал систему заданий, направленных на овладение этим умением: (1) На луче $AB$ отложен отрезок $AC$. При каких условиях точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$? (2) Даны углы $AOB$ и $AOC$. При каком условии луч $OC$ проходит между сторонами угла $AOB$? (3) Точка $X$ принадлежит отрезку $AB$ и не совпадает с его концами. Что следует из этого? (4) Известно, что сумма двух вертикальных углов равна 180°. Какие выводы можно сделать из этого? (5) Замените требования задачи новыми так, чтобы из них следовали первоначальные требования: отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$, докажите, что если отрезки $AC$, $CB$, $BD$ и $AD$ равны, то прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны. Укажите номер задачи, которая вызовет наибольшую трудность.

**33.** Учитель ввёл в обучение алгоритм построения биссектрисы угла: (1) Построим окружность произвольного радиуса с центром в вершине угла и отметим точки пересечения этой окружности со сторонами угла. (2) Построим две окружности с тем же радиусом, но с центрами в полученных точках на сторонах угла и отметим точку их пересечения. (3) Из вершины угла через полученную точку строим луч – биссектрису угла.

Какие оценки (по 5-балльной шкале) он должен поставить ученикам за самостоятельную работу на усвоение этого алгоритма, если ученики предоставили следующие построения?

<table>
<tr>
<td>Ученик А. Оценка – «  »<br></td>
<td>Ученик Б. Оценка – «  »<br></td>
</tr>
<tr>
<td>Ученик В. Оценка – «  »<br></td>
<td>Ученик Г. Оценка – «  »<br></td>
</tr>
</table>

**34.** Учитель объясняет ученикам 7 класса на уроке «Биссектриса угла» способ построения биссектрисы угла, вершина которого недоступна: «Построим произвольный отрезок *BC*, с концами на сторонах угла. Биссектрисы углов *ABC* и *ACB* определят $I_1$ – точку пересечения биссектрис




треугольник *ABC*. И биссектриса угла *A*, вершина которого недоступна, также проходит через точку $I_1$. Теперь берём произвольный отрезок *KN* с концами на сторонах угла. Проведя аналогичные операции, получим точку $I_2$ – точку пересечения биссектрис треугольника *AKN*. Очевидно, что прямая $I_1I_2$ совпадает с биссектрисой угла *A*». Оцените деятельность учителя.

а) Зачем «изобретать велосипед», когда у учеников уже есть универсальный способ построения биссектрисы угла – достраивание до ромба – основанный на том, что прямая, содержащая биссектрису угла является его осью симметрии?

б) Объяснения исчерпывающи и подкреплены хорошей наглядностью (цветной чертёж).

в) Объяснения немотивированны: ученики, изучая тему «Биссектриса угла» в качестве известных данных всегда имеют дело с «углом при вершине».

г) Объяснения преждевременны: их лучше отложить до изучения модуля «Треугольник», ведь именно там идёт речь о факте пересечения всех биссектрис треугольника в одной точке, на котором строится решение задачи.

д) При объяснении не уделено внимание взаимному расположению отрезков BC и KN. На чертеже он не параллельны, а возможно ли решение задачи в случае, когда BC и KN?

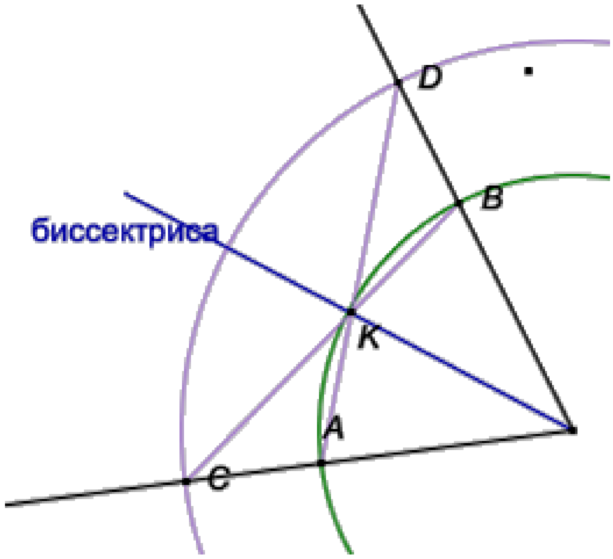
е) С самого начала учитель выступает в роли фокусника, который неизвестно почему начинает строить «произвольный отрезок BC, с концами на сторонах угла». Необходимо подвести учеников к необходимости такого построения или сразу же после решения задачи, предложить им обосновать этот этап решения (например, с помощью вопроса: «Как вы думаете, почему мы начали решение с построения отрезка с концами на сторонах угла»).

ж) Способ построения биссектрисы угла, вершина которого недоступна, лучше оформить в виде алгоритма.

з) Целесообразно предварить задачу проблемной ситуацией, требующей умения строить биссектрису угла, вершина которого недоступна.

и) ______________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

**35.** Ученику для решения задачи нужно было построить биссектрису угла. Он сделал это следующим образом (см. рисунок) следующим образом. Какая реакция учителя на построение будет наиболее адекватной?




а) На каком основании ты осуществил построение? Докажи, что полученный луч – биссектриса угла.

б) Почему ты выбрал именно такой способ построения, на чём он основан? Подготовь к следующему уроку сообщение по этому вопросу, чтобы и другие ученики могли пользоваться этим способом, а пока вернёмся к нашей задаче.

в) Смотрите, ребята, как просто можно построить биссектрису. Давайте запишем алгоритм для этого способа. Может кто-нибудь предложить ещё один способ построения биссектрисы?

г) Сотри с доски этот рисунок и построй биссектрису по тому алгоритму, который мы с вами изучали.

**36.** Вместо запланированных 5 минут на решение задачи: «Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 2 : 3 : 7. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равно 16»; – ученики затратили менее минуты. Как учителю лучше всего распорядиться образовавшимся резервным временем (возможны три наиболее эффективных методических решения)?

а) Дать задание построить описанную в задаче конфигурацию с помощью циркуля и линейки.

б) На основании данных условия задачи сформулировать и выполнить ряд новых требований (форма работы – конструирование задачи).

в) На основании данных условия задачи сформулировать и доказать ряд утверждений о треугольнике, вписанном в окружность.

г) На основании данных условия задачи сформулировать несколько обратных задач и решить некоторые из них (форма работы – конструирование обратной задачи).

д) На основании результатов решения задачи попросить сформулировать математическое утверждение (теорему) и доказать её.

е) Потребовать перечислить все использовавшиеся при решении теоремы, а затем проверить знание способов доказательства некоторых из этих теорем (Математическое изложение: докажите любую из перечисленных вами теорем, задание выполните письменно в тетрадях для проверочных работ).

**37.** Г.Д. Тонких в статье «Роль рефлексии в процессе обучения математике в средней школе» вводит понятие рефлексивной задачи: «под рефлексивными будем понимать задачи, способствующие формированию у учащихся умений осмысливать и контролировать мыслительную деятельность, осуществлять поиск оснований собственных действий. При составлении рефлексивных задач к обычным задачам добавляются вопросы рефлексивной направленности, способствующие осознанию процесса ее решения. К рефлексивным мы также относим задачи, в которых выделена некоторая ситуация, требующая рефлексивного отношения». К рефлексивным задачам Г.Д. Тонких относит задачи: на нахождение ошибок в условии предложенной задачи, на дополнение условия, на нахождение лишних данных в условии, на самостоятельное составление задач, на нахождение других способов решения:

1. Один из смежных углов больше другого на 60°, или в 2 раза. Найдите эти углы. Нет ли в задаче лишних данных? Составьте задачу без лишних данных (возможны различные варианты). Решите ее.

2. Один из смежных углов больше другого на некоторую величину. Найдите эти углы. Хватает ли данных для решения задачи? Дополните условие задачи какими-либо данными и решите ее.

3. Найдите площадь четырехугольника ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны 6 и 8 см. Указание: рассмотрите данный четырехугольник, состоящий из двух треугольников. Нельзя ли решить эту задачу иначе?

4. Составьте задачу, аналогичную задаче 3, в которой бы длины диагоналей задавались в общем виде. Решите эту задачу. Какие способы решения возможны? Какую геометрическую закономерность вы заметили?

Предложите образец рассуждений при решении этих задач.

## Треугольник

**38.** С учащимися 7 класса при изучении темы «Неравенство треугольника» проведена исследовательская работа «Построение треугольника по трём сторонам». Ученикам было предложено исследовательское задание: «Перед вами лежат картонные модели сторон треугольников. Постройте, используя эти модели, треугольники со сторонами: (а) 7, 12, 9; (б) 7, 14, 7; (в) 5, 16, 7.При этом, «проколы» – вершины треугольника – должны совпадать».

Через 1-2 минуты учитель выслушивает версии учеников. В случае затруднения предлагается сравнить длину стороны, построенной первой и сумму двух других сторон треугольника.

Беседа по результатам построения.

– Сколько треугольников вы построили? // Один, со сторонами 7, 12 и 9.

– Почему не удалось построить другие два треугольника?

– Во втором случае вместо треугольника получился отрезок. Почему? // Т.к. три вершины лежат на одной прямой, а треугольник – это фигура, составленная из трех точек, не лежащих на одной прямой, попарно соединенных отрезками. Длина большего отрезка равна сумме длин меньших.

– Можно ли построить треугольник в третьем случае? // В третьем случае треугольник построить нельзя, так как длина большей стороны больше суммы длин меньших сторон.

– Обобщите результаты вашего исследования и сформулируйте вывод. // Если сторона, построенная первой, меньше суммы двух других сторон, то треугольник построить можно.

– Запишем этот вывод в строгой математической формулировке.

Вывод: из трёх отрезков можно построить треугольник только в том случае, если длина каждого отрезка меньше суммы длин двух других.

– Итак, обоснуйте, почему треугольник сторонами *7, 12, 9* мы смогли построить? // Пусть $AB = 9$ *см*, $BC = 7$ *см*, $AC = 12$ *см*. Тогда выполняются следующие неравенства: $AB < BC + AC$, *так как* 9 *см* < 7 *см* + 12 *см*

$BC < AB + AC$, *так как* 7 *см* < 9 *см* + 12 *см*

$AC < AB + BC$, *так как* 12 *см* < 9 *см* + 7 *см*.

– Как называются выражения, записанные на доске? // Неравенства.

– Что связывают эти три неравенства? // Стороны треугольника.

– Какое название можно дать этим неравенствам? // Неравенства треугольника.

– Это и будет предметом изучения на сегодняшнем уроке. Запишите в тетрадях тему урока.

Организованные подобным образом исследовательские работы целесообразны при освоении

а) любого нового геометрического материала;

б) преимущественно знакомого материала, при наличии возможности организовать практическую работу с материальными моделями;

в) преимущественно нового материала, при наличии возможности организовать практическую работу с материальными моделями.

**39.** Понимание теоремы проверяется с помощью следующих вопросов

1) Откуда взялась эта теорема? Почему мы рассматриваем именно ее?

2) Какой факт утверждается? Можно ли переформулировать теорему?

3) Какими условиями обеспечивается заключение теоремы? Являются ли эти условия необходимыми?

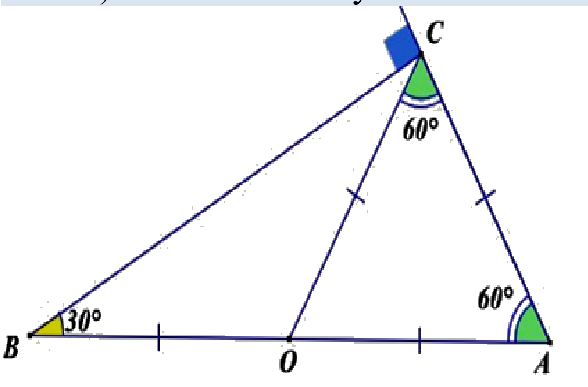
4) Какие факты использованы при доказательстве?

5) Ясна ли логическая схема доказательства? Держится ли она полностью в сознании?

6) Какие следствия возможны из полученного результата?

7) Можно ли обобщить полученный результат?

8) Можно ли получить его как-то иначе?




Этот вопрос всегда уместен. Ведь у наших учеников все, к чему мы так привыкли, – впервые. Теорему: «В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы»; –можно доказать и так:

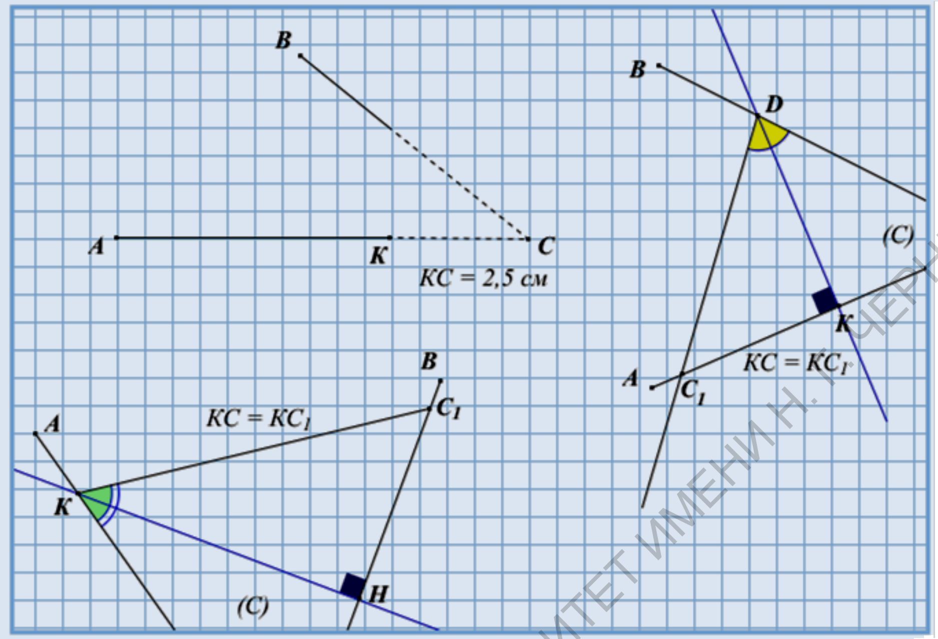
Внутри прямого угла построим угол 60° так, что его вершина совпадает с вершиной прямого угла, а одна из сторон идет по меньшему катету. Тогда исходный треугольник разобьется на два: равносторонний и равнобедренный. Дальше, по известному принципу: «Смотри!»

9) Как можно интерпретировать результат?

10) Как его можно применить?

Примените данную схему к изучению теоремы о катете, лежащее против угла в 30°.

**40.** Учащиеся хорошо усвоили тему «Свойства равнобедренного треугольника», успешно написали проверочную работу, продемонстрировав освоение темы на базовом (обязательном) уровне, поэтому учитель предложил классу задачу: «Дан угол с недоступной вершиной *С* и точка *К* на стороне угла. Определить длину отрезка *КС*». Трудности ученики испытали сразу же, при построении чертежа к задаче: как ни старались не смогли «скрыть» угол *С*.




Тогда учитель предложил изобразить заданную конфигурацию ____________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________.

После этого, ограниченные в выборе способов действия, учащиеся предложили восстановить перпендикуляр. Одни предлагали восстановить перпендикуляр в точке К, а другие – из точки К к другой стороне угла. На этом предложения закончились. И только после указания учителя: «________________
_____________________________________________________________», – учащиеся подошли к способу решения задачи, который оформили в виде алгоритмов:

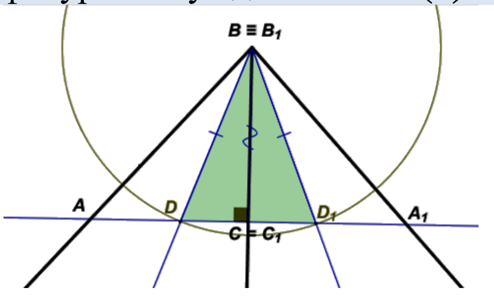
Алгоритм 1 Алгоритм 2

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

На этапе проверки алгоритма многие столкнулись с новой проблемой:
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

Почему? Что в этом случае следует предпринять учителю? _______________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

**41.** Для решения задачи: «В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ углы $C$ и $C_1$ – прямые, $BD$ и $B_1D_1$ – биссектрисы. Докажите, что треугольники равны, если угол $B$ равен углу $B_1$ и $BD = B_1D_1$» – ученик использовал не традиционный метод поиска равных треугольников, а метод построения данных в задаче фигур. Рассуждал он так: (1) построим указанные треугольники так, чтобы они «соединились» катетами, содержащими вершину $B(B_1)$, тогда вершины $B$ и $B_1$ совпадут, а $C$ *и* $C_1$ – будут лежать на прямой, которая будет биссектрисой $\angle ABA_1$; (2) по условию $BD$ и $B_1D_1$ – биссектрисы углов $ABC$ и $A_1BC$ соответственно, построим их; поскольку $BD = B_1D_1$, то *Окр*$(B;\ BD)$ отсечёт от биссектрис $BD$ и $B_1D_1$ равные отрезки; (3) $\Delta\ BDD_1$ – равносторонний, следовательно $BC$ – не только его биссектриса, но и высота; (4) таким образом, построенные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1(A_1BC)$ – прямоугольные с прямыми углами $C$ и $C_1$, равными углами $B$ и $B_1$ и равными биссектрисами $BD$ и $B_1D_1$ – равны «по катету $BC$ и острому углу $\angle B = \angle B_1$» (что и требовалось доказать); теперь можем их «разъединить» и перемещать по плоскости.




Оцените логичность его рассуждений.

а) Логика рассуждений безупречна для ученика 7 класса, решение заслуживает оценки «превосходно» и должно быть продемонстрировано классу.

б) Доказательство интересное, но ученик не пояснил, почему $C$ совпадает с $C_1$, поэтому принять такое доказательство нельзя.

в) Доказательство интересное, но ученик не пояснил, как были построены вершины $A$ и $A_1$, его внимание не было направлено на обоснование и других аспектов. Поскольку доказательство поверхностное, принять его нельзя.

г) Выбранный метод не может быть использован для доказательства, так как в задаче ясно сказано: «докажите», а не «постройте»; построить чертёж – не значит доказать утверждение.

д) Выбранный метод не может быть использован для доказательства, так как ученик рассмотрел частный случай, когда треугольники «соединяются» катетами (а если они «соединяются» гипотенузами?).

е) Выбранный метод не может быть использован для доказательства, так как содержит неопределённые действия «соединить треугольники» и «разъединить и переместить».

ж) Доказательство неуместно, так как мы отрабатываем умение использовать признаки равенства треугольников.

з) ____________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

**42.** Для решения задачи: «В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ углы $C$ и $C_1$ – прямые, $BD$ и $B_1D_1$ – биссектрисы. Докажите, что треугольники равны, если угол $B$ равен углу $B_1$ и $BD = B_1D_1$» – учитель организовал коллективную беседу. Отметьте те вопросы и задания, которые сформулированы некорректно.

а) Какого типа эта задача?

б) Какие фигуры участвуют в задаче?

в) Что известно об этих треугольниках?

г) Сделайте чертеж и нанесите данные.

д) Что требуется доказать?

е) Запишите кратко условие и требование задачи.

ж) В задаче требуется доказать, что $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Чем мы пользуемся для доказательства того, что треугольники равны?

з) Что нужно найти в этих треугольниках, чтобы доказать их равенство?

и) Сколько пар равных элементов нам необходимо найти в этих треугольниках? Почему?

к) Какие равные элементы мы имеем по условию задачи?

л) Каких равных элементов нам не хватает, что бы применить один из признаков?

м) Попробуем доказать равенство катетов $CB$ и $C_1B_1$. Как мы доказываем равенство отрезков?

н) Чтобы доказать равенство катетов $CB$ и $C_1B_1$, какие треугольники следует рассмотреть?

о) Определите вид треугольников.

п) Сколько пар равных элементов нам следует найти в этих треугольниках?

р) Что известно об этих треугольниках по условию?

с) Итак, какой вывод можно сделать о треугольниках $\boldsymbol{CBD}$ и $\boldsymbol{C_1B_1D_1}$?

т) Зачем мы рассматривали треугольники $\boldsymbol{CBD}$ и $\boldsymbol{C_1B_1D_1}$?

у) Значит, какой вывод можно сделать из равенства треугольников?

ф) Зачем мы рассматривали равенство отрезков $CB$ и $C_1B_1$?

х) Итак, какой вывод можно сделать о треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$?

ц) Итак, наметим план решения задачи: (1) Рассмотрим треугольники $\boldsymbol{CBD}$ и $\boldsymbol{C_1B_1D_1}$ и докажем их равенство. Сделаем вывод о равенстве сторон $CB$ и $C_1B_1$. (2) Рассмотрим треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$и установим их равенство.

ч) Оформите решение задачи в тетрадях.

**43.** Для решения задачи: «В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ углы $C$ и $C_1$ – прямые, $BD$ и $B_1D_1$ – биссектрисы. Докажите, что треугольники равны, если угол $B$ равен углу $B_1$ и $BD = B_1D_1$» – учитель организовал коллективную беседу.

Отметьте те вопросы и задания, которые нецелесообразны (затрудняют целостность восприятия ситуации, описанной в задаче, мешают обнаружению идеи решения) и потому могут быть исключены из списка вопросов беседы (корректность постановки вопросов не учитывать!).

а) Какого типа эта задача?

б) Какие фигуры участвуют в задаче?

в) Что известно об этих треугольниках?

г) Сделайте чертеж и нанесите данные.

д) Что требуется доказать?

е) Запишите кратко условие и требование задачи.

ж) В задаче требуется доказать, что $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Чем мы пользуемся для доказательства того, что треугольники равны?

з) Что нужно найти в этих треугольниках, чтобы доказать их равенство?

и) Сколько пар равных элементов нам необходимо найти в этих треугольниках? Почему?

к) Какие равные элементы мы имеем по условию задачи?

л) Каких равных элементов нам не хватает, что бы применить один из признаков?

м) Попробуем доказать равенство катетов $CB$ и $C_1B_1$. Как мы доказываем равенство отрезков?

н) Чтобы доказать равенство катетов $CB$ и $C_1B_1$, какие треугольники следует рассмотреть?

о) Определите вид треугольников.

п) Сколько пар равных элементов нам следует найти в этих треугольниках?

р) Что известно об этих треугольниках по условию?

с) Итак, какой вывод можно сделать о треугольниках $CBD$ и $C_1B_1D_1$?

т) Зачем мы рассматривали треугольники $CBD$ и $C_1B_1D_1$?

у) Значит, какой вывод можно сделать из равенства треугольников?

ф) Зачем мы рассматривали равенство отрезков $CB$ и $C_1B_1$?

х) Итак, какой вывод можно сделать о треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$?

ц) Итак, наметим план решения задачи: (1) Рассмотрим треугольники $CBD$ и $C_1B_1D_1$ и докажем их равенство. Сделаем вывод о равенстве сторон $CB$ и $C_1B_1$. (2) Рассмотрим треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ и установим их равенство.

ч) Оформите решение задачи в тетрадях.

**44.** Для решения задачи: «Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и биссектрисе этого угла.» – учитель организовал коллективную беседу:

– С чего начинается работа над задачей на построение? // С анализа задачи.

– С чего начинается анализ задачи? // Предполагаем задачу решённой и наносим данные на чертёж (рис. 1).

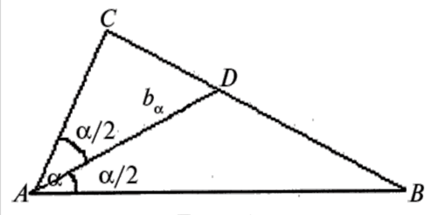


Рис. 1

– Каким методом будем решать задачу? (Этот вопрос задается, если к моменту предъявления задачи их было несколько. В противном случае задается вопрос: «Есть ли треугольник, который можно построить?») // Методом вспомогательного треугольника, так как из рисунка видно, что треугольник ADB можно построить по двум сторонам и углу между ними.

– Выделите вспомогательный треугольник (рис. 2). Если построим вспомогательный треугольник *ADB*, то какие вершины искомого треугольника будут определены, а какие останется построить? // Будут определены вершины A и B, останется построить вершину C.

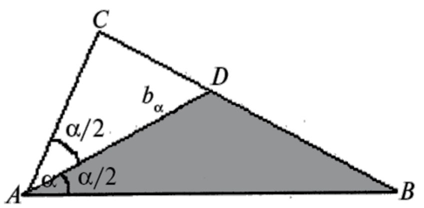


Рис. 2

– Итак, какую точку выберем за искомую? // Точку C.

– Что делают дальше при анализе задачи? // Выбирают два условия, которым должна удовлетворять искомая точка.

– Назовите условия, которым удовлетворяет искомая точка C? // (1) Точка C лежит на луче BD, (2) ∠BAC = α.

– Какой вывод нужно сделать из выделенных условий? // Нужно определить фигуры, на которых лежит искомая точка C.

– Назовите эти фигуры. // Из первого условия – это луч BD, а из второго – луч AK, такой, что ∠KAB = α.

– Итак, назовите план построения. // (1) построим ΔADB; (2) построим луч AK; (3) построим точку C.

Оцените целесообразность задаваемых вопросов и заданий.

а) Все вопросы и задания «работают» на то, чтобы ученики самостоятельно осуществили построение.

б) Имеющиеся вопросы и задания целесообразно разбить на две группы: основные и вспомогательные, и задавать вспомогательные вопросы (задания) только тогда, когда ученики не отвечают на основной вопрос.

в) Беседа не адаптивная: что, если уже при ответе на третий вопрос ученики выйдут на другой метод (например, метод геометрических мест точек).

г) Беседа не адаптивна: что, если уже при ответе на первый вопрос (построить те элементы треугольника, которые даны) ученики могут прийти к решению.

**45.** Решая задачу: «Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и биссектрисе этого угла», – ученик построил (с помощью циркуля и линейки) все данные в условии элементы треугольника (рис. 1), а затем проведя луч BD до пересечения с лучом AC, получил вершину C (рис. 2) и таким образом завершил построение задолго до того, как учитель вместе с классом в ходе коллективной беседы дошли до плана решения задачи методом вспомогательного треугольника.

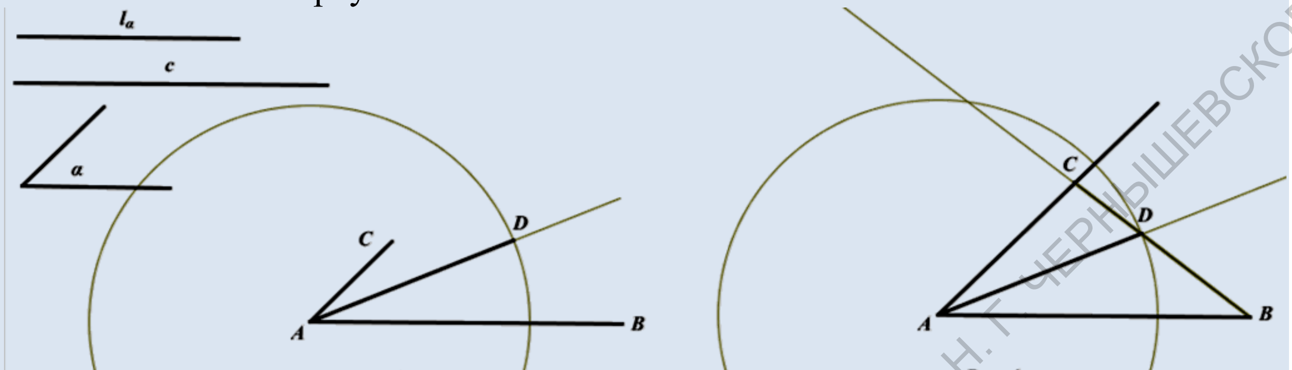



Рис. 1 Рис. 1

Завершив решение, ученик начал отвлекать товарищей, задавая им вопросы не по существу занятия, полушепотом комментировать ответы одноклассников, смешить соседку по парте.

Как в этом случае должен поступить учитель?

а) Сделать запись в дневник о недостойном поведении на уроке.

б) Вступить в диалог с этим учеником и выяснить, на каком основании он отходит от изучаемых алгоритмов и действует по своим собственным.

в) Потребовать от этого ученика составления плана решения вместе со всеми.

г) Вызвать этого ученика к доске для демонстрации своего решения.

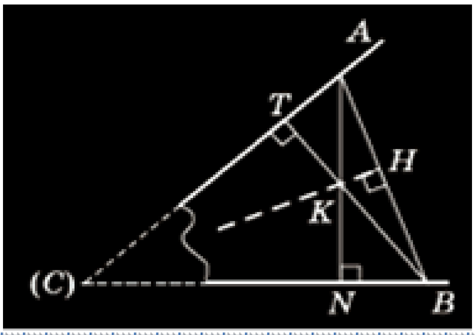
д) Вызвать этого ученика к доске для решения методом построения вспомогательного треугольника

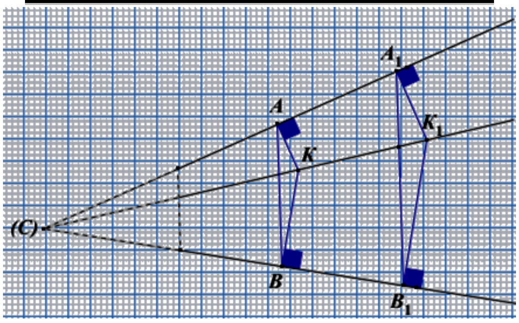
е) Предложить этому ученику самостоятельно провести этапы доказательства и исследования.

ж) Дать этому ученику дополнительные задачи на построение треугольника, например, по стороне, прилежащему углу и биссектрисе другого угла.

**46.** Перед тем, как приступить к решению задачи: «Окружность с центром на стороне *AC* треугольника *ABC* проходит через вершину *C* и касается прямой *AB* в точке *B*. Найдите диаметр окружности, если *AB = 9, AC = 12*»; – учитель провел математический диктант, состоящий из следующих заданий: (1) Постройте окружность с центром в точке *O* произвольного радиуса. (2) Отметьте на окружности хорду *BC*, меньшую диаметра. (3) Проведите касательную *l* к окружности в точке *B*. (4) Постройте точку *A* пересечения касательной *l* и прямой *OC.*

С какой целью был проведён диктант?



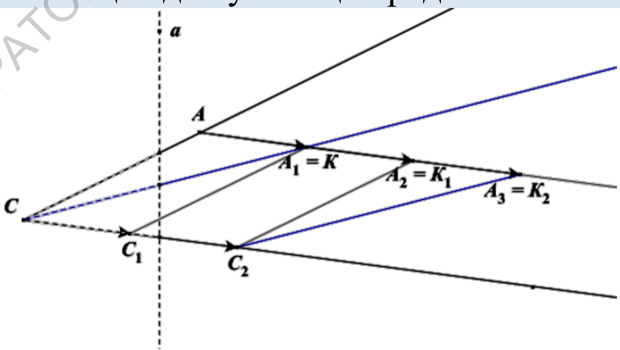




**47.** При изучении свойств высот треугольника учитель предложил классу задачу: «Дан угол *C*, вершина которого недоступна, и точка *K* внутри угла; провести прямую *KC*». Ориентируясь на тему урока, ученики быстро пришли к необходимости рассматривать точку *K* как точку пересечения высот остроугольного треугольника, построению этих высот, определению вершин *A* и *B* треугольника и восстановлению перпендикуляра *KH* к стороне *AB*. *KH* – часть высоты, проведённой из вершины *C* к *AB*, то есть часть искомой прямой. Один из учеников не согласился с решением класса, «потому что ваш способ не подходит для тупого угла» и предложил свой способ построения.

Оцените подход ученика к решению задачи (что бы Вы сказали ученику и классу в этом случае?). ____________________________________________

На каких теоремах геометрии основан второй способ?

Ещё одна ученица предложила свой способ. Оцените его эффективность.



**48.** Перед тем, как приступить к выполнению задания: «В остроугольном треугольнике *ABC* провели высоту *BH*. Из точки *H* на стороны *AB* и *BC* опустили перпендикуляры *HK* и *HM* соответственно. Докажите, что треугольник *MBK* подобен треугольнику *ABC*», – учитель просит учащихся сформулировать всевозможные утверждения, имеющие отношение к ситуации, описанной в этой задаче. Какие ответы учеников необходимо выделить для последующего использования в процессе решения?

а) В прямоугольном треугольнике высота, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

б) В прямоугольном треугольнике катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и собственной проекцией на гипотенузу.

в) В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равно 90°.

г) Высота, проведённая из вершины прямого угла, разбивает прямоугольный треугольник на два подобных, которые ему подобны.

д) Два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой образуют четырёхугольник, вписанный в окружность с центром в середине гипотенузы.

е) Если две стороны одного треугольника пропорциональные двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

ж) Если стороны треугольников пропорциональны, то треугольники подобны.

з) Если треугольники подобны, то соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны.

и) Если углы двух треугольников равны, то треугольники подобны (в этом случае достаточно установить равенство двух углов).

к) Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия этих треугольников.

л) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия этих треугольников.

**49.** Стремясь помочь ученикам решить задачу: «Дан треугольник *ABC*. Постройте отрезок *DE*, параллельный прямой *AC* так, чтобы точки *D* и *E* лежали на сторонах *AB* и *BC*, и *DE* = *AD* + *CE*», – учитель даёт ученикам указание: Предположим, что отрезок DE построен.

а) Докажите, что на DE находится O – центр вписанной окружности: DO = AD, OE = CE.

б) Какие ГМТ следует построить для того, чтобы определить место расположение хотя бы одной точки искомого треугольника?

в) Проведите биссектрисы углов A и C и обратите внимание на точку их пересечения.

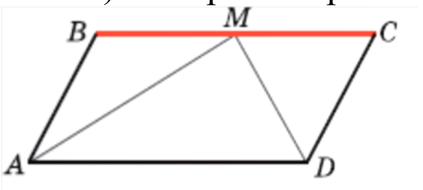
г) Что это значит? Значит, на нём найдётся точка F, такая, что DE = DF + FE, DF = AD, FE = CE. Опустите из точки F отрезки на AC, параллельные сторонам треугольника.

Какое из указаний наиболее целесообразно?

## Параллелограмм

**50.** Перед тем, как приступить к выполнению задания: «Через точку $O$ пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны $AB$ и $CD$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Докажите, что $AE = EF$»; – учитель просит учащихся назвать признак равенства треугольников, которым следует воспользоваться для доказательства утверждения. Какой ответ следует считать верным?

а) по двум сторонам и углу между ними,
б) по стороне и двум прилежащим углам,
в) по трём сторонам.

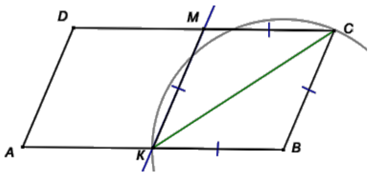



**51.** Оцените деятельность учащихся по решению задачи: «Биссектрисы углов $A$ и $D$ параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне $BC$. Найдите $BC$, если $AB = 30$».

| | |
|---|---|
| а) Оценка «___»<br>*Дано: ABCD – параллелограмм.* $AB = 30$.<br>$M \in BC$. *AM – бисс.* $\angle A$, *DM – бисс.*$\angle D$.<br>*Найти BC.*<br>*Решение.*<br>*Биссектриса параллелограмма делит сторону на пропорциональные отрезки:*<br>$BM : MC = AB : DC$<br>$AB = DC = 30$<br>$BM : MC = 30 : 30 \Rightarrow BC = BM + MC = 60$.<br>*Ответ.* $BC = 60$. | б) Оценка «___»<br>*Решение.*<br>*Биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник, поэтому* $\Delta BAM$ *и* $\Delta CDM$ *– равнобедренные с боковыми сторонами, равными 30, т.е.*<br>$AB = BM = MC = CD = 30$<br>*Следовательно,* $BC = BM + MC = 30 + 30 = 60$.<br>*Ответ.* $BC = 60$. |
| в) Оценка «___»<br>*Дано. ABCD – параллелограмм.* $M \in BC$,<br>*AM – бисс. A, DM – бисс.D,* $AB = 30$.<br>*Найти BC.*<br>*Решение.*<br>1) *AM – бисс. A* $\Rightarrow \angle BAM = \angle DAM = \alpha$<br>*AM – секущая прямых BC и AD,* $BC \parallel AD$<br>$\angle BMA = \angle DAM = \alpha$ *(как накрест лежащие)*<br>$\Delta BAM : \angle BAM = \angle BMA = \alpha$, $AB = 30 \Rightarrow$<br>$\underline{BM = 30}$<br>2) *ABCD – параллелограмм,* $AB = 30 \Rightarrow$<br>$CD = 30$<br>*DM – бисс. D* $\Rightarrow \angle ADM = \angle MD = \beta$<br>*DM – секущая прямых BC и AD,* $BC \parallel AD$<br>$\angle CMD = \angle ADM = \beta$ *(как накрест лежащие)*<br>$\Delta CMD : \angle CMD = \angle CDM = \beta$, $CD = 30 \Rightarrow$<br>$\underline{CM = 30}$<br>3) $BC = BM + MC = 30 + 30 = 60$.<br>*Ответ.* $BC = 60$. | г) Оценка «___»<br>*Дано: ABCD – параллелограмм.* $AB = 30$.<br>$M \in BC$. *AM – бисс.* $\angle A$, *DM – бисс.*$\angle D$.<br>*Найти BC.*<br>*Решение.*<br>$\Delta BAM = \Delta CDM$ *(по стороне и прилежащим – равным углам)*$\Rightarrow AB = BM = MC = CD = 30$<br>*Следовательно* $BC = BM + MC = 30 + 30 = 60$.<br>*Ответ.* $BC = 60$. |

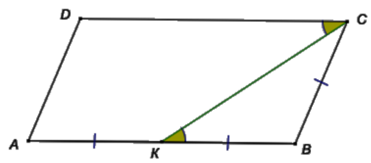
**52.** Оцените деятельность учащихся по решению задачи: «Сторона *AB* параллелограмма *ABCD* вдвое больше стороны *BC*. Точка *K* – середина стороны *AB*. Докажите, что *CK* – биссектриса угла *BCD*».

а) Оценка «___»



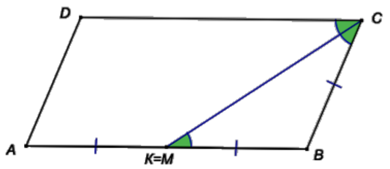

*Дано: ABCD – параллелограмм AB = AK.* **?**
*Доказать: CK – бисс.* $\angle BCD$.
*Доказательство*
*Проведём через K прямую KM ∥ BC:*
*KMCB – ромб, а KC – его диагональ.* **?**
*Известно, что диагонали ромба являются биссектрисами его углов.*
*Следовательно, CK – биссектриса.* $\angle BCD$.

б) Оценка «___»



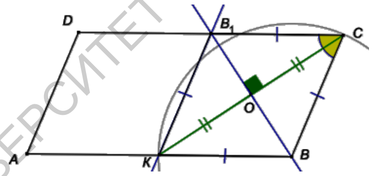

*Дано: ABCD – параллелограмм AB = 2BC, K – серед. AB.*
*Доказать: CK – биссектриса* $\angle BCD$.
*Доказательство.*
*ABCD – параллелограмм* $\Rightarrow AB \parallel CD$, *CK – секущая* $\Rightarrow$
$\underline{\angle KCD = \angle CKB}$ *(как накрест лежащие)*
*K – середина AB* $\Rightarrow AK = KB = 1/2\ AB$
$AB = 2BC \Rightarrow BC = 1/2\ AB$ $\Rightarrow$
$KB = BC \Rightarrow \Delta BKC$ *– равнобедренный* $\Rightarrow$
$\underline{\angle CKB = \angle KCB}$ *(как углы при основании равнобедренного треугольника)*
*Итак,* $\underline{\angle KCD = \angle CKB}$ *и* $\underline{\angle CKB = \angle KCB \Rightarrow}$
$\underline{\angle KCD = \angle KCB} \Rightarrow CK$ *делит* $\angle BCD$ *пополам, следовательно CK – биссектриса.*

в) Оценка «___»




*Дано: ABCD – параллелограмм AB = 2BC, AK = KB.* **?**
*Доказать: CK – биссектриса* $\angle BCD$.
*Доказательство.*
*Проведём CM – биссектрису угла* $\angle BCD$.
*Она разделит* $\angle BCD$ *на два равных угла:* $\underline{\angle MCD = \angle MCB}$. *Кроме того CM – секущая двух параллельных прямых AB и CD, а значит образует равные накрест лежащие углы:* $\underline{\angle MCD = \angle CMB}$.
*<u>Из подчёркнутых равенств</u> следует, что* $\angle MCB = \angle CMB$, *то есть* $\Delta BMC$ *– равнобедренный, а значит BM = BC = ½ AB, то есть точка M – середина AB, а значит совпадает с точкой K.*
*Итак, CK – биссектриса* $\angle BCD$.

г) Оценка «___»




*Дано: ABCD – параллелограмм AB = 2BC, K ∈ AB, AK = KB.*
*Доказать: CK – биссектриса* $\angle BCD$.
*Доказательство.*
*AB = 2BC, K ∈ AB, AK = KB* $\Rightarrow KB = BC \Rightarrow$
*B равноудалена от K и C, проведём серединный перпендикуляр к KC и будем рассматривать KC в качестве оси симметрии:* $B \to B_1$, *причём,*
*если* $B = AB \cap BC$, *то* $B_1 = \mathbf{DC} \cap B_1\mathbf{K}$,
*(по свойству осевой симметрии),* **?**
*значит* $B_1$ *лежит на DC.*
*При осевой симметрии угол переходит в равный ему угол, т.е.* $\underline{\angle KCD = \angle KCB}$,
*а это значит, что CK – биссектриса* $\angle BCD$.

Укажите, какие логические ошибки допустили учащиеся.

______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

## Трапеция

**53.** Какие определения трапеции можно считать правильными (с учётом того, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме)?

а) Возьмём вершину параллелограмма и осуществим её параллельный перенос по прямой, содержащей эту вершину на любой ненулевой вектор; получившаяся в результате этого преобразования фигура называется трапецией.

б) Проведём две параллельные прямые a и b; проведём две непараллельные прямые n и m, пересекающие a и b; обозначим точки пересечения прямых a и b с прямыми n и m; получившийся четырехугольник ABCD – трапеция.

в) Трапецией называется выпуклый четырехугольник имеющий только одну пару параллельных сторон.

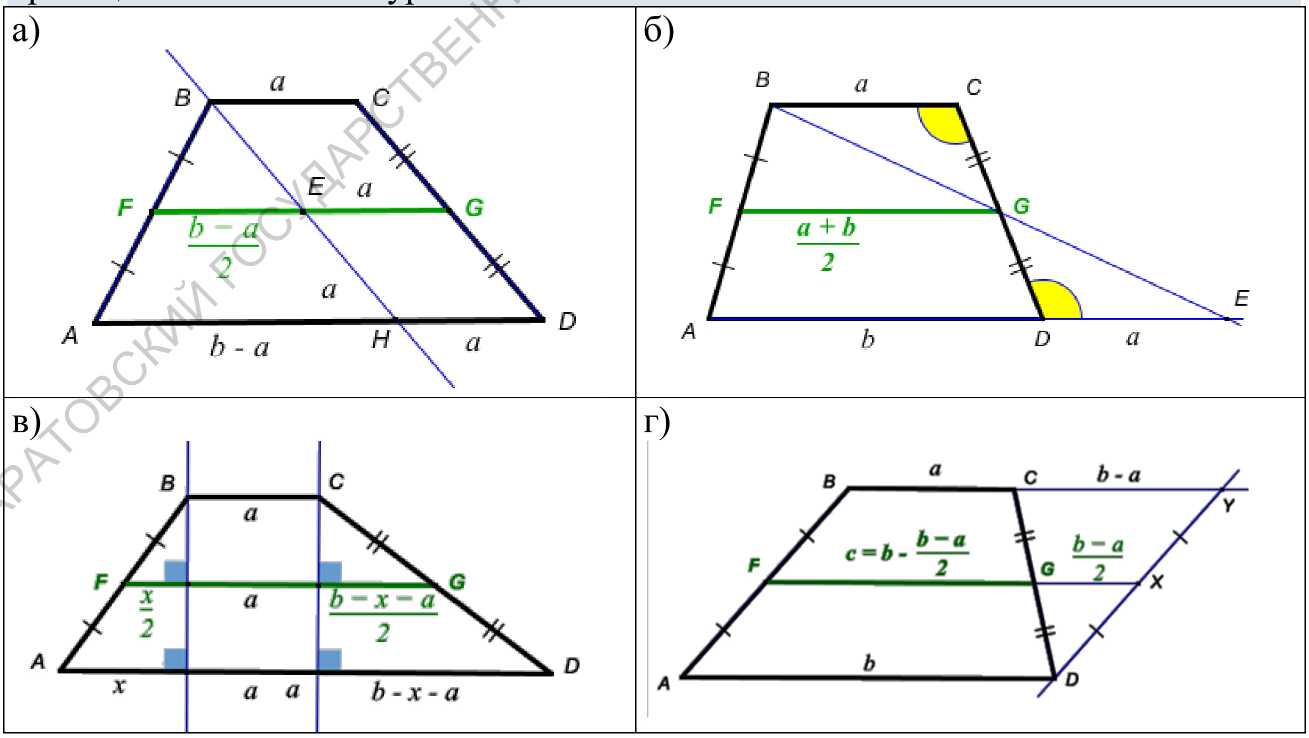
г) Трапецией называется плоский выпуклый четырехугольник имеющий только одну пару параллельных сторон.

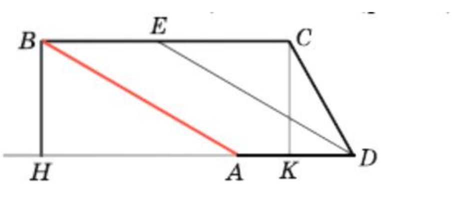
д) Трапецией называется четырехугольник, который образован в результате «отсечения» от треугольника ему подобного.

е) Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

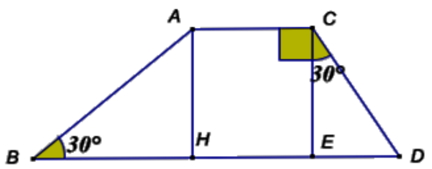
ж) Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

**54.** Доказательство свойств средней линии трапеции проводится различными способами и предполагает использование аналогии в свойствах средней линии трапеции и треугольника. Какая геометрическая модель используется в качестве основной при доказательстве свойств средней линии трапеции в школьном курсе математики?






**55.** Пока класс разбирался с чертежом к задаче: «Найдите боковую сторону *AB* трапеции *ABCD*, если углы *ABC* и *BCD* равны соответственно *30°* и *120°*, а *CD = 29*»; – один ученик завершил решение и был вызван к доске для демонстрации. Записав своё решение на оборотной стороне доски, он занял своё место за партой, а учитель просмотрев решение, решил ...




$$CE = CD\cos 30^\circ = \frac{29\sqrt{3}}{2} = AH = \frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow AB = 29\sqrt{3}$$

а) отказаться от демонстрации, так как решение было ошибочным: ученик рассмотрел другую трапецию, нежели указана в условии задачи;

б) предложить классу сравнить два решения;

в) предложить ученику – автору решения – провести дополнительное построение, доказывающее, что решение можно использовать и для трапеции, описанной в задаче;

г) предложить ученику – автору решения – объяснить, какими теоремами он пользовался при решении задачи;

д) поставить ученику – автору решения – оценку «5», но всему классу решение не демонстрировать.

Выберите наиболее оптимальное для учителя решение.

**56.** Закрепляя умение 9-классников применять свойства подобия треугольников к решению задач, учитель в начале урока предлагает ученикам задачу: «Прямая, параллельная основанию трапеции *ABCD*, пересекает её боковые стороны *AB* и *CD* в точках *E* и *F* соответственно. Найдите длину отрезка *EF*, если *AD = 45, BC = 27, CF : DF = 5 : 4*».

Какую форму работы с классом ему лучше всего выбрать?

а) Вызвать одного ученика к доске для решения задачи с подробным комментарием.

б) Дать задачу для самостоятельного решения с последующей самопроверкой.

в) Дать задачу для самостоятельного решения «на оценку на скорость».

г) Организовать коллективное (или фронтальное) устное решение задачи по готовому чертежу.

д) Организовать коллективный поиск решения задачи, а затем предложить самостоятельно осуществить найденное решение.

е) ______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

**57.** Перед тем, как приступить к выполнению задания: «Основания *BC* и *AD* трапеции *ABCD* равны соответственно *6* и *24*, *BD = 12*. Докажите, что треугольники *CBD* и *ADB* подобны». – учитель просит учащихся назвать признак подобия, которым следует воспользоваться для доказательства утверждения. Какие ответы учеников следует считать верными?

г) отношение длин биссектрис, медиан, высот и серединных перпендикуляров подобных треугольников равно коэффициенту подобия;

д) отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия

е) площади подобных треугольников относятся как квадраты их соответствующих сторон, то есть отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия;

ж) признак подобия по двум сторонам и углу между ними;

з) признак подобия по трём (двум) углам;

и) признак подобия треугольников по стороне и двум прилежащим углам;

к) признак подобия треугольников по стороне и проведённой к ней высоте;

л) признак подобия треугольников по трём сторонам.

**58.** Приведите решение задачи из предыдущего задания.

## Окружность и её конфигурации с другими геометрическими фигурами

**59.** Знание свойств дуг, хорд и углов окружности учитель решил проверить с помощью математического диктанта с единым требованием: верно ли, что:

– если хорды равноудалены от центра окружности, то они равны;

– если хорды равны, то они равноудалены от центра окружности;

– большая из двух хорд находится ближе к центру окружности;

– если диаметр делит хорду пополам, то он перпендикулярен ей;

– если диаметр перпендикулярен хорде, то он делит ее пополам;

– равные дуги стягиваются равными хордами;

– равные хорды стягивают равные дуги;

– дуги, заключенные между параллельными хордами, равны;

– дуги, заключенные между пересекающимися диаметрами, равны;

– вписанный угол, сторона которого является диаметром окружности, является прямым;

– если центральный и вписанный углы опираются на одну хорду, то вписанный угол в два раза меньше центрального;

– если центральный и вписанный углы опираются на одну дугу, то центральный угол в два раза больше вписанного;

– вписанный угол в 2 раза меньше центрального;

– все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны;

– все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, равны;

– все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые;

– любая пара вписанных углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны хорды, составляют в сумме 180°;

– если центральный угол прямой, то найдётся вписанный угол в 45°, который опирается на ту же дугу;

– если центральный угол прямой, то найдётся вписанный угол в 135°, который опирается на ту же дугу;

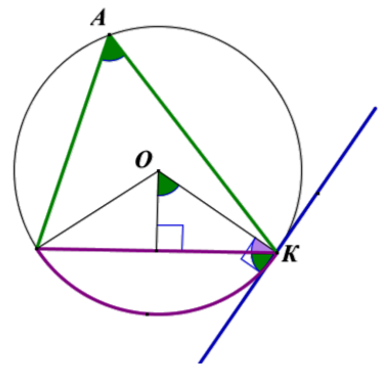
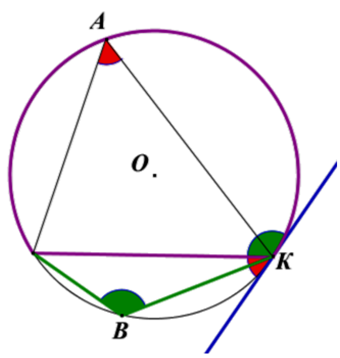
– если центральный угол прямой, то найдётся вписанный угол в 135°, который стягивается той же хордой?

Запишите цифровой код диктанта, используя значения: 0 – утверждение неверно, 1 – утверждение верно.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**60.** Прежде чем приступить к решению задач на применение теоремы: «Угол между касательной к окружности и секущей, проведённой через точку касания, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключённую между касательной и секущей»; – учитель предложил трём ученикам доказать это утверждение устно, на математическом языке и с помощью чертежа. Для чего это было сделано?

**61.** Оцените результаты деятельности учащихся по доказательству теоремы: «Угол между касательной к окружности и секущей, проведённой через точку касания, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключённую между касательной и секущей».

| Ученик | Доказательство | Оценка по 5-б.шкале |
|---|---|---|
| А | По условию, вписанный угол опирается на дугу, заключённую между касательной и секущей, значит он равен половине центрального угла, опирающегося на эту же дугу. Центральный угол вместе с двумя равными углами при его хорде равен, по теореме о сумме углов треугольника, 180°. А половина центрального угла, т.е. вписанный угол, вместе с одним из углов при его хорде равен 90°.<br>С другой стороны, этот центральный угол образует с хордой, стягивающей нашу дугу, равнобедренный треугольник, у которого один из углов при основании вместе с углом между касательной и секущей образует 90°.<br>Итак, вписанный угол, вместе с углом между радиусом и хордой равен 90°, и угол между касательной и секущей вместе с тем же углом равен 90°. Следовательно, угол между касательной к окружности и секущей, проведённой через точку касания, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключённую между касательной и секущей. | |
| Б | Пусть *a* – меньшая дуга, заключённая между касательной к окружности и секущей, проходящей через точку касания, *a′* – соответствующая ей хорда – часть секущей,<br>$\alpha$ – вписанный угол, опирающийся на дугу *a*,<br>$\gamma$ – центральный угол, опирающийся на дугу *a*, со сторонами-радиусами r<br>$\beta$ – угол между касательной *k* к окружности и секущей *a′*, проходящей через точку касания<br>По теореме о вписанном и центральном углах, $\alpha = \gamma/2$. (1)<br>Треугольник со сторонами-радиусами, центральным углом $\gamma$ и основанием *a′* – равнобедренный, значит углы при основании $\tau$ равны, а сумма углов этого треугольника $\gamma + 2\tau = 180°$. (2)<br>Из (1) и (2) следует, что $\alpha = 90° - \tau$. (3)<br>По теореме о радиусе и касательной, проведённой к нему,<br>$\beta + \tau = 90°$, т.е. $\beta = 90° - \tau$. (4)<br>Из (3) и (4), следует, что $\alpha = \beta$. | |
| В |     | |

**62.** Учитель разрабатывает систему разноуровневых заданий к уроку «Свойство касательной к окружности». Какой должна быть формулировка задания для группы учащихся, испытывающих трудности в освоении предмета?

а) Верно ли, что если угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, то расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

б) Изобразите окружность с центром в точке *O* и радиусом 5 см и точку *A*, лежащую за пределами окружности. Проведите через точку *A* касательные к окружности, Обозначьте точки касания – *B* и *C*. Что можно сказать о треугольниках *ABO* и *ACO*? Чему равен отрезок *BC*, если $\angle A = 120^\circ$?

в) Постройте угол *A* в 120°. Впишите в него окружность. Что можно сказать о треугольнике, образованном центром окружности и точками касания?

г) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, докажите, что расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

д) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, найдите расстояние между точками касания?

**63.** Учитель разрабатывает систему разноуровневых заданий к уроку «Свойство касательной к окружности». Какой должна быть формулировка задания для группы учащихся, успешно осваивающих предмет, но испытывающих затруднения при доказательстве математических утверждений?

а) Верно ли, что если угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, то расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

б) Изобразите окружность с центром в точке *O* и радиусом 5 см и точку *A*, лежащую за пределами окружности. Проведите через точку *A* касательные к окружности, Обозначьте точки касания – *B* и *C*. Что можно сказать о треугольниках *ABO* и *ACO*? Чему равен отрезок *BC*, если $\angle A = 120^\circ$?

в) Постройте угол *A* в 120°. Впишите в него окружность. Что можно сказать о треугольнике, образованном центром окружности и точками касания?

г) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, докажите, что расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

д) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, найдите расстояние между точками касания?

е) ____________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

**64.** Учитель разрабатывает систему разноуровневых заданий к уроку «Свойство касательной к окружности». Какой должна быть формулировка задания для группы учащихся, испытывающих затруднения в построении и анализе чертежа?

а) Верно ли, что если угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, то расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

б) Изобразите окружность с центром в точке *O* и радиусом 5 см и точку *A*, лежащую за пределами окружности. Проведите через точку *A* касательные к окружности, Обозначьте точки касания – *B* и *C*. Что можно сказать о треугольниках *ABO* и *ACO*? Чему равен отрезок *BC*, если $\angle A = 120°$?

в) Постройте угол *A* в 120°. Впишите в него окружность. Что можно сказать о треугольнике, образованном центром окружности и точками касания?

г) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, докажите, что расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

д) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, найдите расстояние между точками касания?

**65.** Учитель разрабатывает систему разноуровневых заданий к уроку «Свойство касательной к окружности». Какой должна быть формулировка задания для группы академически успешных учащихся?

а) Верно ли, что если угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, то расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

б) Изобразите окружность с центром в точке *O* и радиусом 5 см и точку *A*, лежащую за пределами окружности. Проведите через точку *A* касательные к окружности, Обозначьте точки касания – *B* и *C*. Что можно сказать о треугольниках *ABO* и *ACO*? Чему равен отрезок *BC*, если $\angle A = 120°$?

в) Постройте угол *A* в 120°. Впишите в него окружность. Что можно сказать о треугольнике, образованном центром окружности и точками касания?

г) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, докажите, что расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

д) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, найдите расстояние между точками касания?

е) ____________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

**66.** Учитель разрабатывает систему разноуровневых заданий (4 уровня/варианта) к уроку «Свойство касательной к окружности». Какой должна быть формулировка задания для последующей домашней работы?

а) Верно ли, что если угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, то расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

б) Изобразите окружность с центром в точке $O$ и радиусом 5 см и точку $A$, лежащую за пределами окружности. Проведите через точку $A$ касательные к окружности, Обозначьте точки касания – $B$ и $C$. Что можно сказать о треугольниках $ABO$ и $ACO$? Чему равен отрезок $BC$, если $\angle A = 120°$?

в) Постройте угол $A$ в 120°. Впишите в него окружность. Что можно сказать о треугольнике, образованном центром окружности и точками касания?

г) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, докажите, что расстояние между точками касания равно радиусу этой окружности?

д) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к данной окружности, равен 120°, найдите расстояние между точками касания?

**67.** Решение задачи: «В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ $AC$. Точка $O$ – центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$. Расстояние от $O$ до точки $A$ и прямых $AD$ и $AC$ соответственно равны «25, 8 и 7. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$»; – учитель решить организовать в форме практической работы. Предваряющим домашним заданием к этой работе может стать (выберите два наиболее целесообразных варианта из числа данных и предложите свой вариант):

а) Изображение в интерактивной среде «1С: математический конструктор» конфигурации, описанной в задаче; распечатка рисунка.

б) Изображение на клетчатой бумаге эскиза конфигурации, описанной в задаче, с использованием свойств клетчатой бумаги.

в) Построение в интерактивной среде «1С: математический конструктор» конфигурации, описанной в задаче; распечатка чертежа.

г) Построение в интерактивной среде «1С: математический конструктор» эскиза конфигурации, описанной в задаче; распечатка эскиза.

д) Построение на листе формата А4 эскиза конфигурации, описанной в задаче, с помощью циркуля, линейки со шкалой, угольников.

е) Построение с помощью циркуля и линейки на листе формата А4 конфигурации, описанной в задаче.

ж) ______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

**68.** Учитель предложил классу одну из задач, содержащихся в «Началах» Евклида: «Дана окружность, центр которой не указан. Циркулем и линейкой построить её центр». Какие из идей учащихся по решению задачи следует считать перспективными?

а) Вписать в окружность квадрат; центр окружности – на пересечении диагоналей квадрата.

б) Вписать в окружность прямоугольник; центр окружности – на пересечении диагоналей прямоугольника.

в) Вписать в окружность прямоугольный треугольник; центр окружности – середина гипотенузы этого треугольника.

г) Найти точку пересечения серединных перпендикуляров любых двух непараллельных хорд.

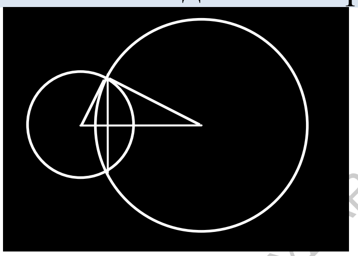
д) Описать около окружности два угла; пересечение биссектрис будет центром этой окружности.

е) Описать около окружности квадрат; центр окружности – на пересечении диагонали квадрата.

ж) Построить любую окружность, пересекающую данную в двух точках А и В и определить центр как точку пересечения перпендикуляра, проведённого к радиусу построенной окружности в точке А, и прямой, содержащего диаметры этих окружностей.

з) Построить сначала ось симметрии окружности, затем на оси отметить центр симметрии – центр окружности.

**69.** Учитель предложил классу одну из задач, содержащихся в «Началах» Евклида: «Дана окружность, центр которой не указан. Циркулем и линейкой построить её центр». Ученики начали устно выдвигать идеи, и только один из них свою идею «изобразил» на доске, а учителю пришлось её озвучивать.



а) Вписать в окружность квадрат; центр окружности – на пересечении диагоналей квадрата.

б) Вписать в окружность прямоугольник; центр окружности – на пересечении диагоналей прямоугольника.

в) Вписать в окружность прямоугольный треугольник; центр окружности – середина гипотенузы этого треугольника.

г) Найти точку пересечения серединных перпендикуляров любых двух непараллельных хорд.

д) Описать около окружности два угла; пересечение биссектрис будет центром этой окружности.

е) Описать около окружности квадрат; центр окружности – на пересечении диагонали квадрата.

ж) Построить любую окружность, пересекающую данную в двух точках А и В и определить центр как точку пересечения перпендикуляра, проведённого к радиусу построенной окружности в точке А, и прямой, содержащего диаметры этих окружностей.

з) Построить сначала ось симметрии окружности, затем на оси отметить центр симметрии – центр окружности.

**70.** Учитель предложил классу одну из задач, содержащихся в «Началах» Евклида: «Дана окружность, центр которой не указан. Циркулем и линейкой построить её центр». Учащихся выдвинули ряд идей по решению задачи. Каким образом учителю следует организовать работу класса по реализации этих идей?

а) Каждый автор идеи собирает группу единомышленников и все вместе реализуют идею решения задачи, оформляют её на чертежных листах и затем афишируют.

б) Следует выбрать наиболее перспективную идею и совместно (ответ у доски с комментарием) её реализовать, все остальные идеи дать для самостоятельной реализации.

в) Следует выбрать три принципиально различные идеи и организовать на их содержании самостоятельную работу (в трёх вариантах) с последующей самопроверкой.

г) Следует выбрать три принципиально различные идеи и организовать на их содержании самостоятельную работу (в трёх вариантах) с последующей взаимопроверкой.

д) Следует выбрать три принципиально различные идеи и организовать на их содержании самостоятельную работу (в трёх вариантах) с последующим сравнением результатов решения задачи.

е) Следует записать все идеи, обсудить с учениками их возможные достоинства и недостатки, затем предоставить каждому выбрать способ решения задачи. После того, как ученики решили задачу каждый своим способом следует организовать беседу по выяснению оправданности выбора способа (на основе той или иной идеи) решения.

ж) Следует записать все идеи, обсудить с учениками их возможные достоинства и недостатки, затем предоставить каждому выбрать два способа решения задачи, решить в рамках домашней работы задачу двумя способами и провести сравнительный анализ решения не менее чем по трём критериям.

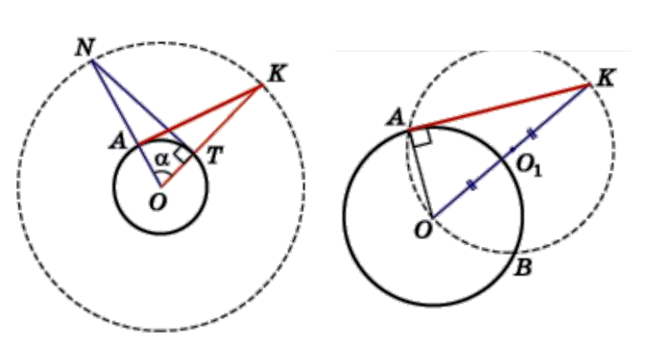
з) Учителю следует продемонстрировать на примере одной идеи способ её реализации, а затем предложить учащимся реализовать самостоятельно понравившуюся идею решения задачи.

и) Учителю следует продемонстрировать на примере одной идеи способ её реализации, а затем предложить учащимся реализовать самостоятельно все оставшиеся идеи решения задачи. Тем, кто реализует больше всего идей выставить оценки «5» и «4» в зависимости от качества выполненной работы.

к) ____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________

**71.** Учитель предложил классу решение одной задачи, содержащееся в «Началах» Евклида:

«Евклид в «Началах» уделял много внимания задачам, стремился к тому, чтобы они были интересными, недлинными по условию, посильными для читателя и красивыми при решении. Вот одна из таких задач: провести касательную к окружности из К вне окружности»: «Пусть КО пересечёт данную окружность в точке Т. построим окружность ω радиуса ОК, концентрическую данной. Проведём TN ⊥ ТО до пересечения с ω в точке N. Отрезок NO пересечёт данную окружность в точке А. Докажем, что КА – касательная. Действительно, треугольники ОАК и OEN равны … назовите признак (по двум сторонам и углу α между ними). Сделайте вывод относительно углов КАО и NTO (раз треугольники равны, то и соответственные углы тоже равны: ∠ КАО = ∠ NTO = 90°, и КА – касательная к данной окружности).




Сейчас касательную проводят проще, чем во времена Евклида. На отрезке КО как на диаметре строят окружность, которая пересекает данную в искомых точках А и В. Самостоятельно объясните (запишите в тетрадь), почему в этом случае АК – карательная».

Как следует поступить учителю далее?

а) Поскольку ученики совместно с учителем участвовали в освоении нового вида деятельности, то после этого уместно предложить им различные задачи на построение с помощью циркуля и линейки, в которых применяется построение касательной к окружности из точки вне окружности.

б) Следует продолжить историческую параллель и предложить ещё несколько задач на построение из «Начал» Евклида.

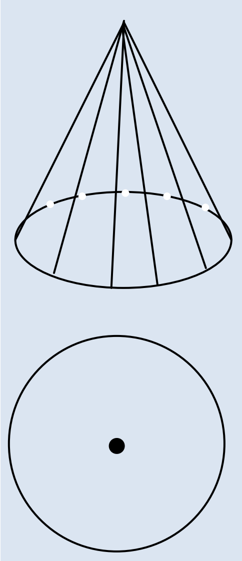
в) Учитель может предложить учащимся самостоятельно, используя эти два способа, построить касательную к окружности из точки вне окружности, определить для себя, какой способ «лучше» и для этого способа разработать алгоритм построения.

г) Учителю совместно с учащимися следует разработать алгоритмы построения касательной к окружности из точки вне окружности и закрепить эти алгоритмы на серии упражнений.

д) ______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

## Многогранники и тела вращения

**72.** Учитель планирует познакомить учащихся 6 класса с конусом. Для этого он запланировал следующую систему задач к уроку.



Задание 1. По рисунку составить словесный образ фигуры.

Задание 2. Посмотрим (мысленно) на фигуру сверху. Что мы увидим?

Задание 3. Посмотрим (мысленно) на фигуру снизу. Что мы увидим?

Задание 4. Как (с какой точки) нужно смотреть на фигуру, чтобы увидеть ее такой, как на первом рисунке?

Задание 5. Какие еще изображения фигуры возможны? Нарисуйте.

Задание 6. Фигура, которую мы сейчас изучаем, называется конусом (по-гречески – «сосновая шишка»).

Задание 7. Как можно «получить» конус (построить, создать, сконструировать)? //

А. Бумажная модель с использованием развертки конуса.

Б. «Ниточная» модель: основание делается из плотного материала; в центре основания вбивается длинный гвоздь; на острие гвоздя – вершина – пластилин; по краю основания – насечки; нить фиксируется в одной из насечек, затем в вершине (на пластилин), затем следующей насечке, еще в одной, опять в вершине и т. д.

В. «Треугольная» модель (устанавливается (клеится) на соответствующее круглое основание):

В.1. Клеевая: вырезаются не менее 8 равносторонних треугольников, перегибаются по высоте (проведенной к основанию), склеиваются один к другому совпадающими половинками.

В.2. Сборная: вырезаются не менее 4 равносторонних треугольников из плотной бумаги (картона), делаются надрезы у одного до середины высоты сверху, у других – снизу. Детали соединяют в местах разреза.

Г. «Виртуальная» модель-вертушка: на проволоку приклеиваются:
– прямоугольник одним из своих катетов к оси;
– равнобедренный треугольник по высоте.

Вращая заготовки можно увидеть конус.

Задание 8. Опираясь на способы конструирования, дайте определение конусу, как некоторому пространственному объекту.

Задание 9. Мысленно будем «разрезать» (рассекать) конус вдоль его основания. Какие фигуры получаются в сечении? Как можно назвать фигуры, получившиеся в результате сечения? Изобразите результат сечения конуса указанным способом, шестью плоскостями (шестикратного разрезания конуса вдоль его основания). // Круги.

Задание 10. Мысленно будем «разрезать» рассекать конус перпендикулярно основанию (под прямым углом к основанию). Какие фигуры получим в сечении? Как можно назвать фигуры, получившиеся в результате сечения? Изобразите результат сечения конуса указанным способом семью плоскостями (семикратное разрезание конуса под прямым углом (к основанию). // Конические треугольники.

Задание 11. Возьмите (мысленно) на поверхности конуса точку и проводите разрезание (сечение) конуса в различных направлениях, но так, чтобы разрез (секущая) обязательно проходил через выбранную вами точку. Зарисуйте получившиеся в сечении фигуры. Сделайте (сформулируйте) вывод.

Задание 12 (для д/з) Как можно использовать сведения о сечениях конуса для создания его моделей? Попробуйте сконструировать конус.

Какие задачи позволяет реализовать предложенная учителем система задач? Выберите две наиболее важные.

а) развивать умения создавать пространственные образы и осуществлять мысленные трансформации объектов и образов;

б) развивать функциональные (конструктивные) способности школьников;

в) развивать практические (чертёжные) умения;

г) сформировать понятие конического сечения;

д) сформировать понятие конуса;

е) формировать исследовательскую культуру;

Будет ли материал освоен шестиклассниками: сформировано понятие конуса и конического сечения?

ж) Ученики будут в состоянии определить конус, установить его принципиальное отличие от других геометрических тел (куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды, шара), научатся правильно его изображать в различных ракурсах.

з) Первоначальное представление о конусе и сечениях конуса плоскостями учащиеся, безусловно получат.

и) Первоначальное представление о конусе, его развертке, сечениях – результат жизненного познавательного опыта учащихся, а не выполнения приведённых выше заданий.

к) Содержание урока направлено на реализацию прежде всего развивающих задач (развитие пространственного мышления), поэтому совершенно неважно, сформированы понятия (и на каком уровне) конуса и конического сечения или нет.

л) Понятия конуса и конического сечения сформированы не будут, ведь в содержание урока не включены даже термины (понятия) как высота конуса, образующая конуса, поверхность конуса (основание и образующая поверхность) и пр.

м) Никакого контроля по ходу урока нет, а значит, ничего не будет усвоено.

н) ____________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**73.** Окружающая действительность дает широкое поле для исследования в области математики. Например, как вычислить высоту горы, видимой из окна поезда или какова вероятность того, что через два года учащихся в школе станет больше? Иногда текст учебника по математике подсказывает возможность применения исследовательского метода. Например «Исследование расположения параболы в прямоугольной системе координат» или «Исследование свойств функций» и т.д. Исследовательскую задачу по математике можно получить из типовой задачи посредством изменения компонентов, входящих в её условие. Например

Типовая учебная задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $M$ расположена на ребре $BB_1$. Постройте сечение куба плоскостью, содержащей точку $M$ и вершины $A$ и $C$ данного куба.

Задача для группового исследования. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$точка $M$ движется по прямой, содержащей ребро $BB_1$. Исследуйте вид сечения данного куба плоскостью $AMC$ в зависимости от положения точки $M$.

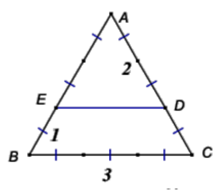
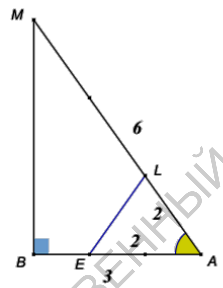
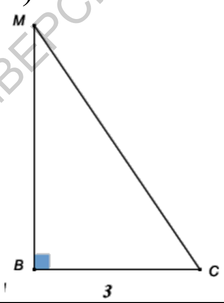
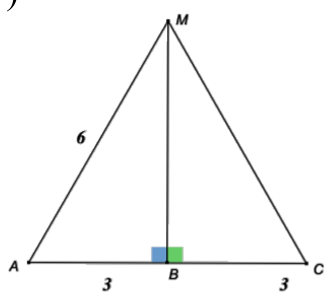
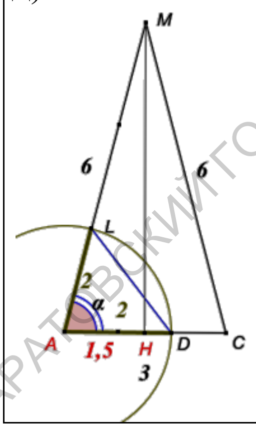
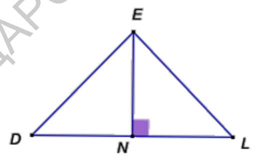
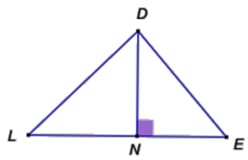
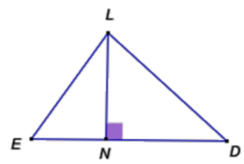
При решении первой задачи деятельность учащихся организуется на репродуктивном, а затем при решении второй задачи на частично-поисковом (или исследовательском) уровне.

Преобразуйте любую другую типовую учебную задачу по теме «Пирамида» в задачу для группового исследования.

**74.** В треугольной пирамиде *MABC* основанием является правильный треугольник *ABC*, ребро *MB* перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны *3*, а ребро *MA* равно *6*. На ребре *AC* находится точка *D*, на ребре *AB* находится точка *E*, а на ребре *AM* – точка *L*. Известно, что *AD=AL=2* и *BE=1*. Какой фигурой является сечение пирамиды плоскостью *EDL*?

а) Правильный треугольник.
б) Прямоугольный треугольник с гипотенузой *DL*.
в) Прямоугольный треугольник с гипотенузой *ED*.
г) Прямоугольный треугольник с гипотенузой *EL*.
д) Равнобедренный треугольник с основанием *DL*.
е) Равнобедренный треугольник с основанием *ED*.
ж) Равнобедренный треугольник с основанием *EL*.
з) Разносторонний треугольник.

**75.** Для решения задачи: «В треугольной пирамиде *MABC* основанием является правильный треугольник *ABC*, ребро *MB* перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны *3*, а ребро *MA* равно *6*. На ребре *AC* находится точка *D*, на ребре *AB* находится точка *E*, а на ребре *AM* – точка *L*. Известно, что *AD=AL=2* и *BE=1*. Какой фигурой является сечение пирамиды плоскостью *EDL*? Найдите площадь этого сечения». – целесообразно использовать выносные чертежи. Какие из чертежей следует использовать?

| | | | |
|---|---|---|---|
| а)  | б)  | в)  | г)  |
| д)  | е)  | ж)  | з)  |

## ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

**76.** Измерение геометрических величин (длины, площади, объема) изучается в школьном курсе дважды, на двух различных уровнях. На первом уровне (1-6 классы) учатся измерять длины отрезков, площади простейших плоских фигур и объёмы простейших пространственных тел. На этом уровне не дается определений длины, площади и объема. Цель состоит в том, чтобы создать у учащихся ясные интуитивные понятия. Этот уровень носит название ________________________________.

**77.** Измерение геометрических величин (длины, площади, объема) изучается в школьном курсе дважды, на двух различных уровнях. На первом уровне (1-6 классы) учатся измерять длины отрезков, площади простейших плоских фигур и объёмы простейших пространственных тел. Второй уровень (7-11 классы) характеризуется единым подходом к измерению геометрических величин и называется ______________________________.

**78.** Школьная теория измерения геометрических величин должна строиться с сохранением некоторой общей схемы. Это относится, прежде всего,

а) к описанию процедуры измерения отрезков, углов, площадей, объёмов;

б) к определению длины отрезка как вещественного числа, удовлетворяющего условиям понятия меры;

в) к определению понятий «длины», «площадь», «объем» (каждое из трёх понятий определятся как вещественное число, удовлетворяющее условиям, которые характеризуют общие понятия меры множества);

г) к установлению существования и единственности (с использованием аксиомы Архимеда) длины отрезка, величины угла, площади фигуры и объёма тела при данном выборе единицы измерения;

д) к установлению существования отрезка, длина которого при данном выборе единицы измерения ровна любому, наперед заданному положительному числу (с использованием аксиомы Кантора, геометрического эквивалента аксиомы непрерывности).

**79.** При решении различных математических задач часто бывает полезно использовать различные эвристические приёмы, например, рассмотреть какой-либо вспомогательный элемент, не присутствующий в формулировке задачи. Такие приёмы существуют и для измерения величин. Наибольшее их число приходится на нахождение площади, что позволяет выделить именно эту тему в качестве ведущей в линии измерения величин.

Приём, в ходе которого данная фигура разбивается на конечное число фигур, из которых составляется новая фигура, площадь которой легко найти, пользуясь известными данными, называется приёмом ______________________.
__________________________________________________________________.

**80.** При решении различных математических задач часто бывает полезно использовать различные эвристические приёмы, например, рассмотреть какой-либо вспомогательный элемент, не присутствующий в формулировке задачи. Такие приёмы существуют и для измерения величин. Наибольшее их число приходится на нахождение площади, что позволяет выделить именно эту тему в качестве ведущей в линии измерения величин.

Приём, в ходе которого данная фигура разбивается на конечное число фигур, вычисляется площадь каждой части, а затем результаты суммируются, называется приёмом ______________________________________.

**81.** При решении различных математических задач часто бывает полезно использовать различные эвристические приёмы, например, рассмотреть какой-либо вспомогательный элемент, не присутствующий в формулировке задачи. Такие приёмы существуют и для измерения величин. Наибольшее их число приходится на нахождение площади, что позволяет выделить именно эту тему в качестве ведущей в линии измерения величин.

Приём, в ходе которого на основании построенного по условию задачи чертежа устанавливается отношения сторон через площади треугольников, а затем вычисляется по известным формулам площадь искомой фигуры, называется ____________________________________________________________.

**82.** При решении различных математических задач часто бывает полезно использовать различные эвристические приёмы, например, рассмотреть какой-либо вспомогательный элемент, не присутствующий в формулировке задачи. Такие приёмы существуют и для измерения величин. Наибольшее их число приходится на нахождение площади, что позволяет выделить именно эту тему в качестве ведущей в линии измерения величин.

Приём, в ходе которого по данным условия задачи можно записать площадь некоторой фигуры двумя способами, и из получившегося равенства найти неизвестную величину, называется _________________________________.

**83.** При решении различных математических задач часто бывает полезно использовать различные эвристические приёмы, например, рассмотреть какой-либо вспомогательный элемент, не присутствующий в формулировке задачи. Такие приёмы существуют и для измерения величин. Наибольшее их число приходится на нахождение площади, что позволяет выделить именно эту тему в качестве ведущей в линии измерения величин.

Приём, применимый к симметричным фигурам, суть которого в том, что находится сначала площадь «симметричной части», а затем умножением на число таких частей вычисляется площадь искомой фигуры, называется _________________________________.

## Вычисление длин и углов

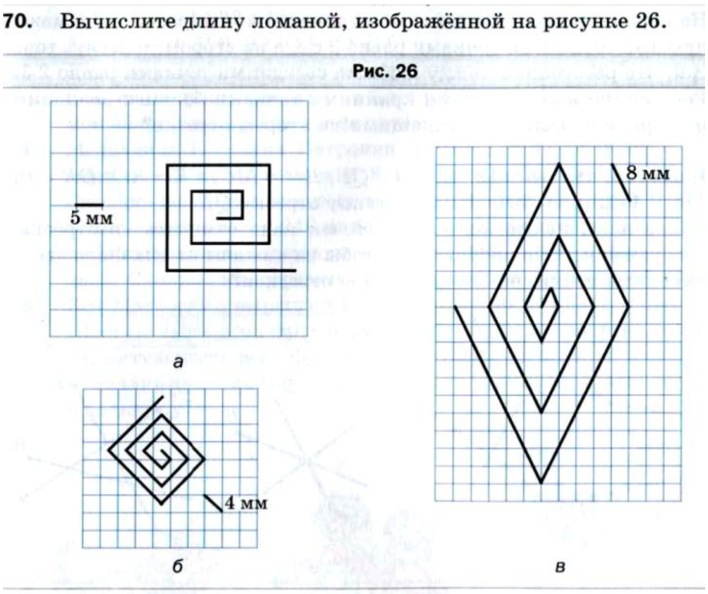

70. Вычислите длину ломаной, изображённой на рисунке 26.

Рис. 26



**84.** В 5 классе школьники учатся находить длину ломаной как сумму длин всех её звеньев. Каким образом лучше всего организовать работу учащихся на уроке по решению задачи № 70?

а) Групповая исследовательская работа.

б) Индивидуальная исследовательская работа.

в) Исследовательская работа в парах.

г) Коллективный поиск решения (коллективная исследовательская работа на основе рефлексирующего наблюдения).

д) Ответ у доски с комментарием.

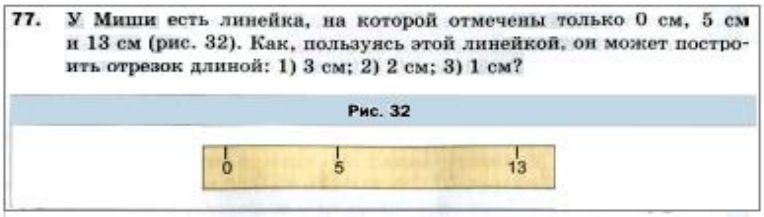
е) Практическая работа.

ж) Самостоятельная работа контролирующего характера.

з) Самостоятельная работа с последующим взаимоконтролем.

и) Самостоятельная работа с последующим самоконтролем.

Дайте образец решения задачи № 70 б.



**77.** У Миши есть линейка, на которой отмечены только 0 см, 5 см и 13 см (рис. 32). Как, пользуясь этой линейкой, он может построить отрезок длиной: 1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?

Рис. 32



**85.** Учитель организовал исследовательскую работу в парах по решению задачи № 77. Каждая пара получила по листу нелинованной чертёжной бумаги и картонную линейку «такую, как у Миши». Большая часть пар тут же, используя шкалированную линейку нанесли на картонные заготовки недостающие деления и выполнили требуемые построения. Другие учащиеся построили отрезки в 3 см (13 – 5 – 5 см) и в 2 см (5 + 5 + 5 – 13 см).

Как учителю действовать в сложившейся ситуации?

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

**86.** Проверяется домашняя работа учащихся: один ученик у доски демонстрирует решение задачи: «Известно, что *MF = 43 см*, *ME = 26 см*, *KE = 18 см* (рис. 24). Найдите длины отрезков *MK и EF*».

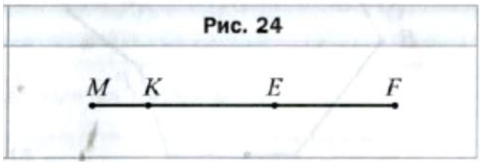


Рис. 24



*Тема урока. Отрезок. Длина отрезка.*

*№ 62*
*43 – 26 = 17 см – EF*
*18 – 17 = 1 см – MK*
*Ответ. 17 см и 1 см*

Как учителю следует отреагировать на предоставленное решение?

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

**87.** Урок закрепления материала по теме «Отрезок. Длина отрезка» (5 класс) учитель начал с устной работы по решению задачи: «Известно, что *KP = PE = EF = FT = 2 см* (рис. 29). Какие ещё равные отрезки есть на этом рисунке? Найдите их длины». Какой обобщающий вывод следует сделать после решения этой задачи?

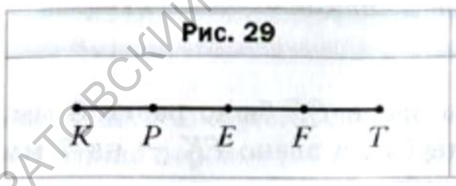


Рис. 29



______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

**88.** Цель урока изучения нового материала по теме «Теорема Пифагора» (8 класс) – изучение и усвоение теоремы Пифагора до уровня применения. В начале урока учитель организовал коллективную проверку домашнего задания (5 минут). Домашнее задание представлено четырьмя задачами на построение прямоугольного треугольники по известным катетам и измерение гипотенузы построенного треугольника. Проверка осуществляется путем заполнения учителем поля «Гипотенуза» (столбец 3 таблицы), по результатам устных ответов учащихся.

Значение сторон прямоугольного треугольника

| Катет (меньший) | Катет (больший) | Гипотенуза | Соотношение между сторонами треугольника |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | **5** | |
| 5 | 12 | **13** | |
| 6 | 8 | **10** | |
| 8 | 15 | **17** | |

Такая коллективная форма проверки домашнего задания является

– одной из наиболее удачных: перед всем классом поставлена общая цель: проверка результатов домашнего задания. Если у кого-то из учеников по ходу заполнения таблицы возникают вопросы, помочь с ответом сможет любой одноклассник. Учитель при этом только контролирует деятельность класса, заполняя таблицу и задавая наводящие вопросы;

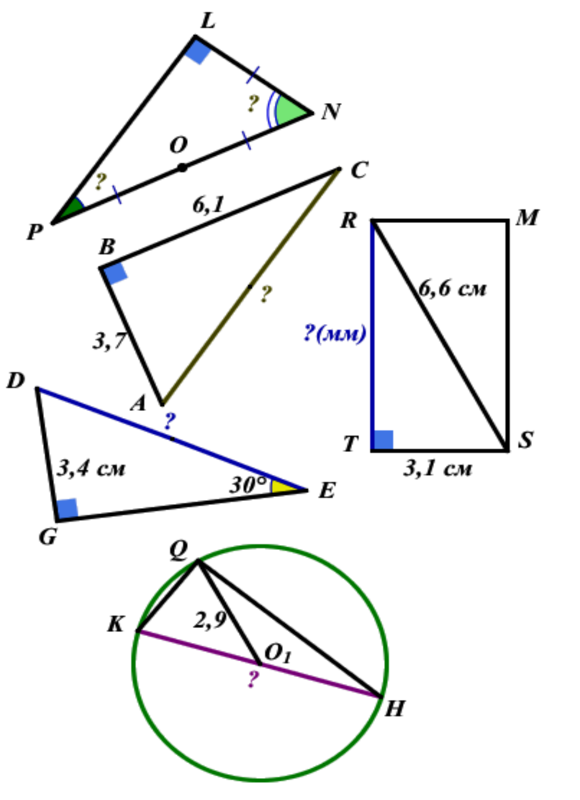
– вполне приемлемой: в ходе проверки результатов домашнего задания. ученики осуществляют рефлексию и вместе с тем – базовое повторение (необходимый этап, предшествующий изучению нового материала);

– допустимой, но есть и более оптимальные формы проверки, например, спросить, у кого какие вопросы возникли в ходе выполнения домашнего задания, а затем разрешить эти вопросы;

– неприемлемой: тратится много времени от собственно изучения нового материала; вместо этого можно под конец урока пройтись между рядами и проверить наличие домашнего задания или собрать тетради на проверку.

После того, как проверка домашнего задания окончена, учитель формулирует проблемную задачу: каким равенством связаны между собой длины сторон треугольника (заполняется поле «Соотношение между сторонами треугольника» – столбец 4 таблицы). Путём размышлений и манипуляций с числами учащиеся приходят к выводу, что сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы (указание: если не получается связать числовые данные с помощью сложения/вычитания, умножения/деления, пробуют работать с квадратами/кубами этих чисел). На этапе изучения нового материала учащиеся самостоятельно выводят теорему Пифагора, а затем доказывают ее.

**89.** Дифференцированная самостоятельная работа по теме «Прямоугольный треугольник: вычисление длин, углов, площади» для учащихся 8 класса представлена серией заданий.




1. На рисунке изображены треугольники, найдите длины указанных отрезков (1 балл за каждое правильно выполненное задание).

2. Найти неизвестный катет, если известный катет равен 5, а гипотенуза 7 (1 балл).

3. Найти катет, прилежащий к углу в 60°, если гипотенуза равна 8 (1 балл); постройте геометрическую модель задачи, используя транспортир (1 балл), свойства клетчатой бумаги (2 балла), циркуль и линейку (3 балла).

4. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 3 дм; найти площадь треугольника (3 балла).

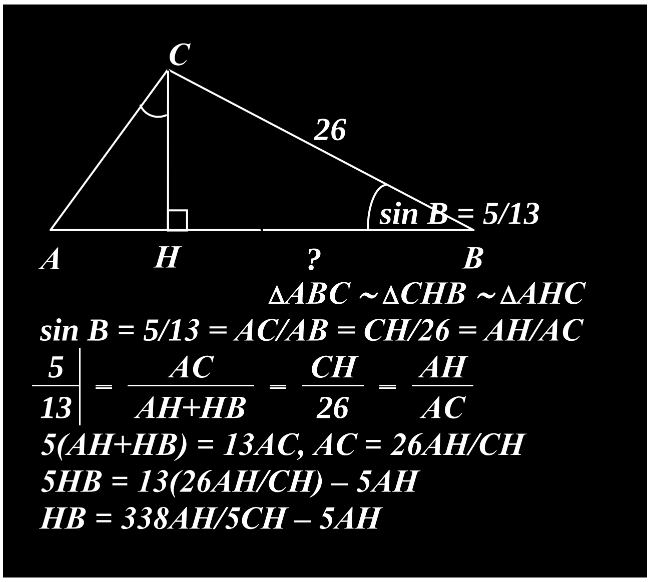
5. Найти площадь прямоугольного треугольника, если его катеты относятся как 3:4, а гипотенуза равна 25 см (4 балла).

6. Доказать, что в прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту к ней (5 баллов).

7. Дан равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 6 см, а угол при основании 30 градусов; найти:
высоту, проведенную к основанию (3 балла);
медиану, проведённую к основанию (4 балла);
площадь треугольника (5 баллов),
расстояние между серединой основания и боковой стороной (6 баллов),
радиус описанной около треугольника окружности (7 баллов):
радиус вписанной в треугольник окружности (8 баллов).

8. Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от боковых сторон (9 баллов). Что нужно изменить в условии задачи, чтобы расстояние между серединой основания и боковой стороной было равно половине боковой стороны? (10 баллов).

Оценка «3» ставится за верное выполнение ____________________
Оценка «4» ставится за верное выполнение ____________________
Оценка «5» ставится за верное выполнение _________ или ________________
Выполнение 7-8 заданий оценивается следующим образом:
____________________________________________________________________________
____________________________________________________________________________.




**90.** Ученик у доски решал задачу: «В треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$, $\sin B = 5/13$ и катетом $BC = 26$ провели высоту $CH$. Найдите длину отрезка $BH$». Выявите причину его затруднений.

а) Ученик применил неэффективный метод решения (использование свойств подобия треугольников), приведший к громоздким выкладкам.

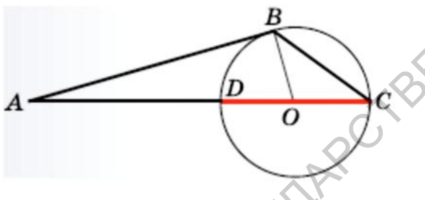
б) Ученик сделал неверный вывод из основного равенства.

в) Ученик не сделал нужного вывода из основного равенства.

г) Ученик не выразил тангенс угла $B$ ($AH/CH$) из последнего равенства, значит плохо знает основные тригонометрические формулы.

**91.** Задача: «Высота $AH$ ромба $ABCD$ делит сторону $CD$ на отрезки $DH = 8$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба»; – наиболее подходит для (выберите два подходящих варианта ответа):

а) устной работы (возможно по готовому чертежу),
б) решения у доски с комментарием,
в) самостоятельной работы с последующей самопроверкой,
г) самостоятельной работы с последующей взаимопроверкой,
д) проверочной работы,
е) домашней работы.




**92.** Учащиеся предложили следующие идеи решения задачи: «Окружность с центром на стороне $AC$ треугольника $ABC$ проходит через вершину $C$ и касается прямой $AB$ в точке $B$. Найдите диаметр окружности, если $AB = 9$, $AC = 12$». Отметьте наиболее перспективные из идей:

а) Доказать, что $\Delta DBC$ – прямоугольный с прямым углом $B$, найти $DC$ из теоремы Пифагора.

б) Доказать, что $\Delta ABO$ – прямоугольный с прямым углом $B$, найти $BO$ (радиус) из теоремы Пифагора, затем $DC = 2BO$.

в) Доказать, что $\Delta ABC$ – прямоугольный с прямым углом $B$, найти $BC$ из теоремы Пифагора, затем радиус из равнобедренного $\Delta OBC$.

г) Обозначить радиус окружности – $x$ и использовать теорему: если из точки $A$ проведены к окружности касательная $AB$ и секущая $AC$, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной, то есть $AC \cdot AD = AB^2$.

**93.** Как можно использовать способ вычисления дальности горизонта $L = \sqrt{2Rh}$, где $R$ – радиус земного шара (около 6400 км), а $h$ – возвышение наблюдателя над земной поверхностью:

а) совместно с учащимися вычислить дальность горизонта из окна классного кабинета;

б) определить дальность горизонта, видимого с самой высокой точки города;

в) определить дальность горизонта, видимого с самой высокой точки планеты;

г) совершить с этой целью математическую экскурсию в Парк Победы (мемориальный комплекс построенный в городе Саратов на Соколовой горе в 1975 году в честь 30-летия победы в Великой Отечественной войне);

д) ________

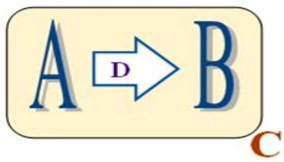
**94.** Учитель перед очередной экскурсией по городу предложил ученикам выяснить, с какого расстояния лучше всего разглядывать памятник/статую: «Пусть памятник/статуя высотой $a$ м возвышается на постаменте высотой $b$ м. На каком расстоянии от основания памятника/статуи должен встать наблюдатель, рост которого до уровня глаз $h$ м, $h < b$, чтобы видеть памятник/статую под наибольшим углом?». Какого решения он ждёт от учеников? Приведите это решение.

**95.** Экскурсия в музей. Решаем задачу: с какого расстояния лучше всего рассматривать картину, если радиус круга поля зрения $R$, зрительное расстояние $d$ и угол зрения $\alpha$ связаны между собой зависимостью $R : d = tg\,\dfrac{\alpha}{2}$?

Постройте чертёж, произведите нужные расчёты и решите проблему.

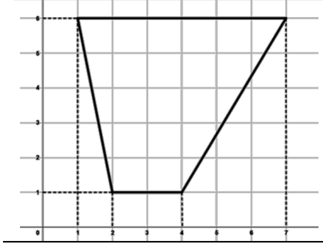
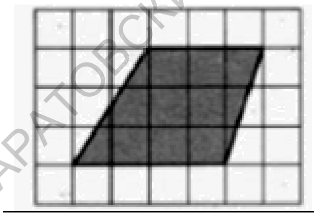
## Вычисление площадей

**96.** Выделим из задач школьного курса математики те, в которых требуется так или иначе найти (измерить, вычислить) площадь плоской фигуры ограниченной некоторой линией; будем называть такие задачи задачами на вычисление площади. Из введённого определения следует структура задач на вычисление площади, представленная компонентами A, B, C и D (см. рисунок). Охарактеризуйте эти компоненты.




A – ______________________________________________________________
______________________________________________________________;
B – ______________________________________________________________
______________________________________________________________;
C – ______________________________________________________________
______________________________________________________________;
D – ______________________________________________________________
______________________________________________________________.

**97.** В зависимости от способа представления условия задачи на вычисление площадей можно выделить: символизированные [математические] задачи, текстовые математические задачи, текстовые практические задачи, задачи на готовых чертежах и задачи на клетчатой бумаге. Определите принадлежность следующих задач к одному из перечисленных классов.

| | |
|---|---|
|  Вычислить площадь трапеции, изображённой на рисунке | |
| Длина стороны квадрата равна $a$, каждые две его противоположные вершины служат вершинами двух равных ромбов; найти площадь общей части ромбов, если площадь каждого из них равна половине площади квадрата | |
| Найти площадь фигуры, заданной точками её вершин $(3;\ 0)$, $(-3;\ 0)$, $(0;\ -3)$, $(0;\ 3)$ | |
|  На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ изображена трапеция; найти ее площадь | |
| Прямоугольное основание садового домика $6 \times 8$ (м$^2$); крыша наклонена под углом 45° к основанию; найти площадь крыши [укажите приближенное значение, равное целому числу квадратных метров] | |

**98.** В символизированных задачах фигуры, площадь которых нужно найти, задаются: координатами своих вершин (в случае многоугольников) или других, принадлежащих фигуре точек (например, окружность можно задать тремя точками) – задачи I типа; уравнениями контура – задачи II типа; уравнениями и координатами – задачи смешанного типа. Определите принадлежность следующих задач к одному из перечисленных классов – укажите тип.

| | |
|---|---|
| Известно, что график функции $y = (x - 2)(x^2 - 3a^2x - 2x + 2a^4 + 3a^2 + 1)$ пересекает оси координат ровно в трех точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках (Приложение 4). | |
| Найти площадь параллелограмма, у которого известны вершины A(2; – 4) и B(1; 5) и точка O(3; 7) пересечения диагоналей | |
| Найдите площадь треугольника $CDE$, где $C$ и D – точки пересечения прямых $2x + y + 4 = 0$ и $y - x - 5 = 0$ с осью $Ox$, а $E$ – точка пересечения этих прямых | |
| Найти площадь треугольника, образованного прямой $x + y + 10 = 0$ и осями координат | |
| Найти площадь фигуры, заданной точками её вершин $\left(\sqrt{2}; 0\right)$, $\left(0; \sqrt{3}\right)$, $(-2; 0)$, $(0; -1)$ | |
| Найти площадь фигуры ограниченной $y = 9 - x^2$ и осью абсцисс | |
| Окружность, проходит через точки (1; 2), (2; 3) и (3; – 1); найти площадь круга, ограниченного этой окружностью | |

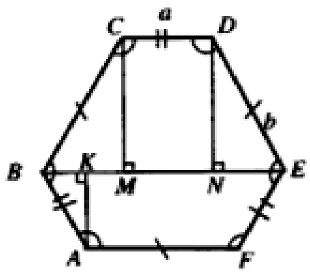
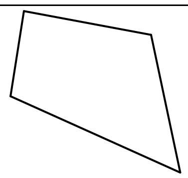
**99.** Рассмотрим символизированные задачи I типа, выделив следующие классы задач: I.1 – нахождение площади многоугольника с целочисленными вершинами; I.2 – нахождение площади многоугольника, у которого хотя бы одна вершина имеет координату, не являющуюся целым числом; I.3 – нахождение площади многоугольника определённого вида (например, параллелограмма), данные о котором выражены в координатной форме; I.4 – нахождение площади круга, заданного тремя точками соответствующей окружности.

Хотя все задачи типа I имеют прямое отношение к аналитической геометрии и координатному методу, задачи класса I.1 могут быть решены ______________________________________________________________

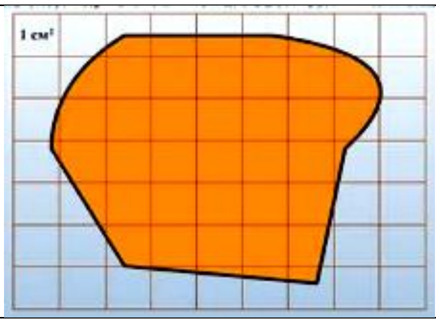
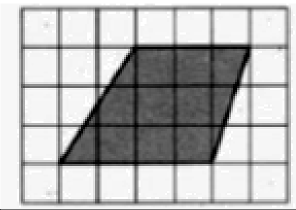
Укажите метод/способ решения.

Если известны координаты всех вершин, то площадь треугольника, прямоугольника, трапеции, параллелограмма и т.п можно найти по «стандартным» формулам, предварительно вычислив необходимые длины сторон, высот и прочих отрезков и углы с использованием формул расстояния между точками $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$: ______________________________ и косинуса угла $AOB$ с вершиной в начале координат ____________________.

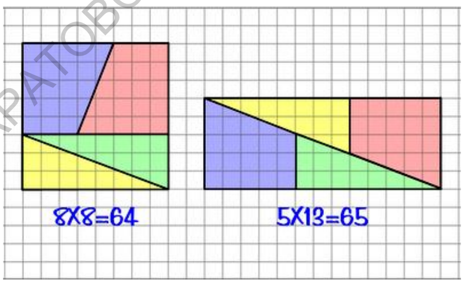
**100.** В зависимости от требования задачи на вычисление площадей можно выделить: задачи, сформулированные в общем виде; частные задачи; задачи на поиск/обоснование нового метода/способа вычисления; задачи на изменение значения площади при изменении линейных или угловых размеров фигуры; практические задачи на выбор и измерение линейных и угловых размеров фигуры с последующим вычислением её площади. Определите принадлежность следующих задач к одному из перечисленных классов.

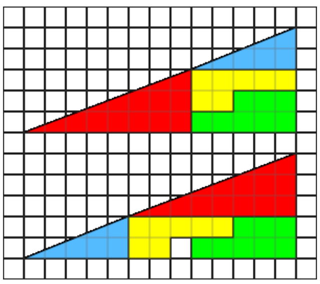
| | |
|---|---|
| В параллелограмме ABCD точка K – середина AB, точка M – середина CD; CK и BM пересекаются в точке P; AM и DK пересекаются в точке N; найти площадь четырехугольника KPMN, если площадь треугольника BCP равна S | |
|   В равноугольно-полуправильном шестиугольнике ABCDEF: $AB = CD = EF = a;$ $BC = DE = FA = b$. Вычислите его площадь | |
| Докажите формулу Герона для площади треугольника: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $a, b, c$ – длины сторон треугольника, $p$ – полупериметр | |
| Вычислить площадь треугольника с вершинами в основания биссектрис треугольника со сторонами 5, 6 и 7 | |
|  Вычислите площадь четырёхугольника, изображенного на рисунке, проведя как можно меньше измерений с помощью линейки и транспортира | |
| Как измениться площадь равнобедренного треугольника при увеличении боковой стороны в 2 раза? | |
| Как измениться площадь равностороннего треугольника при уменьшении угла при основании в 2 раза? | |
| Найдите площадь трапеции, диагонали которой перпендикулярны и равны m и n | |
| Найдите площадь треугольника по стороне $a$ и прилежащим к ней углам $\gamma$ и $\beta$ | |
| Найдите площадь треугольника со сторонами 5, 6 и $\sqrt{7}$ | |

**101.** В зависимости от способа решения задачи на измерение площадей можно выделить: задачи, решаемые исключительно теоретическими методами; задачи, решаемые исключительно практическими методами; задачи, решаемые теоретическими методами после найденного практического решения. Определите принадлежность следующих задач к одному из перечисленных классов.

| | |
|---|---|
| Найти площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны и равны $d_1$ и $d_2$ | |
|   Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке | |
|  На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ изображена трапеция; найти ее площадь | |
| На сторонах AB, BC, и CA треугольника ABC взяты точки K, L и M так, что AK=2KB, 2BL=3LC, 3CM=4MA; площадь треугольника ABC равна 35; чему равны площади треугольников AKM, BKL, CLM, KLM? | |
| Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма ABCD, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится ими на 4 четырёхугольника. Два из них пересекаются диагональю AC, третий имеет площадь, равную 5; чему равна площадь четвёртого? | |
| Как измениться площадь равнобедренного треугольника при увеличении боковой стороны в 2 раза? | |

**102.** Мотивируя учеников к запоминанию и использованию формул для вычисления площадей многоугольников, учитель предложил объяснить результаты (см. рисунок).



В какой форме ему лучше всего организовать работу учащихся?

а) исследовательская работа,

б) мозговой штурм,

в) практическая работа,

г) устный опрос.

**103.** Вычисления с использованием клетчатой бумаги или палетки проводятся:

(а) для любых многоугольников с вершинами в узлах сетки клетчатой бумаги – ________________________;

(б) для любых других плоских фигур – ________________________.

Укажите, в каком случае вычисления будут точными, а в каких – приближёнными.

**104.** Обучая решению задач на вычисление площадей по данным рисунка, представляющем собой изображение фигуры на клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1 × 1, учитель демонстрирует учащимся ___ способов решения для любых многоугольников с вершинами в узлах сетки клетчатой бумаги, и ___ способа для любых других плоских фигур:

Способ 1. Вписываем данную фигуру в прямоугольник, площадь которого вычисляется умножением длины на ширину, затем находим площади «лишних» прямоугольных треугольников, как половины произведения их катетов. И, наконец, вычисляем из площади прямоугольника площади «лишних» треугольников и получаем площадь искомой фигуры.

Способ 2. Выделяем из нашего многоугольника прямоугольники, площади которых легко найти, затем находим площади «оставшихся» прямоугольных треугольников, и все значения площадей складываем.

Способ 3 – комбинация 1 и 2.

Способ 4 основан на разбиении только на прямоугольные треугольники.

Способ 5 – формула Пика: площадь многоугольника с целочисленными вершинами равна $В+\frac{Г}{2}-1$, где В – количество целочисленных узлов внутри многоугольника, а Г – количество целочисленных узлов на границе многоугольника.

Способ 6. При измерении подсчитывается число квадратиков (а значит, и их площадь) целиком содержащихся в фигуре, а также примерная площадь квадратиков, частично входящих в измеряемую фигуру. Суммируя подсчеты, находят приближенное значение площади фигуры.

Способ 7. Находим среднее арифметическое между вписанным клетчатым многоугольников и описанным клетчатым многоугольником

**105.** Решите задачи на вычисление площадей по данным рисунков из заданий **97-101**, представляющих собой изображения фигуры на клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1 × 1.

**106.** Метод разрезания и складывания основан на принципах проведения простых геометрических построений и использования простейших свойств площади. Так, например, если удается разбить два многоугольника на одинаковые части, то отсюда вытекает, что их площади равны. Иногда проще дополнить фигуры некоторыми одинаковыми частями, чтобы убедиться, что они равновелики.

Способ 1 сводится к следующим операциям: (а) фигура разбивается на такие фигуры, площадь которых умеем вычислять; (б) находим площадь каждой фигуры, на которые разбили данную; (в) находим сумму площадей фигур; полученная сумма и является площадью данной фигуры.

Способ 2 сводится к следующим операциям: (а) данная фигура разбивается на фигуры, из которых (б) составляется новая фигура, площадь которой умеем находить; (в) площадь новой фигуры является площадью исходной.

Решите задачу: «Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма ABCD, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится ими на 4 четырёхугольника. Два из них пересекаются диагональю AC, третий имеет площадь, равную 5; чему равна площадь четвёртого?»; – методом разрезания и складывания.

**107.** Составьте две обращённые задачи к задаче из задания **106**.

**108.** Алгебраический метод основан на преобразовании формул, использовании уравнений, неравенств и их систем, составленных по условию задачи на основании теорем геометрии. Проиллюстрируйте на примере задачи: «Найти, как измениться площадь равнобедренного треугольника при увеличении боковой стороны в 2 раза»; – суть алгебраического метода.

**109.** Отнесём к практическим задачам на вычисление площадей задания лабораторных работ и задачи реальной математики на вычисление площадей. Определите цель и функции практических задач.

**110.** Охарактеризуйте задание: «В квартире две прямоугольные комнаты, размеры первой комнаты 4 м × 6 м, а размеры второй комнаты – 3 м × 7 м. Какая из этих комнат больше по площади?»

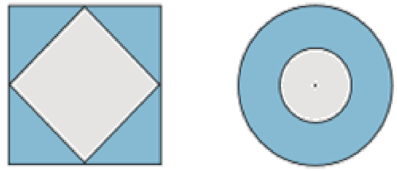
а) Задание на построение и исследование простейших математических моделей.

б) Несложная задача по планиметрии, связанная с практическими расчётами длин, углов, площадей.

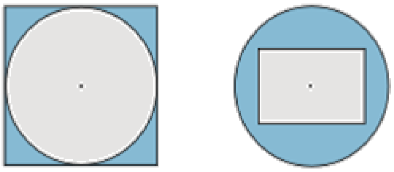
в) Проблемная задача, позволяющая ввести понятие площади (НШ).

г) Проблемная задача, позволяющая ввести понятие умножение (НШ).

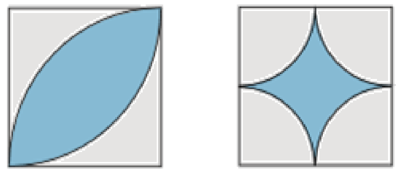
В-1



В-2



В-3



**111.** Перед вами данные к лабораторной работе, требование которой: выполнить необходимые измерения и найти площадь закрашенной части фигуры. Как следует оценивать результаты?

**112.** Учитель приводит решение практической задачи: «Вам нужно огородить забором фиксированной длины прямоугольный участок. Каким должен быть этот участок, чтобы его площадь была наибольшей?»

*Решение.*

*1 этап. Выберем значение периметра в пределах 30, например, $p = 24$, и проведём ряд экспериментов. Результаты будем оформлять в таблицу.*

| *a* | b | S |
|---|---|---|
| 1 | 11 | 11 |
| 2 | 10 | 20 |
| 3 | 9 | 27 |
| 4 | 8 | 32 |
| 5 | 7 | 35 |
| 6 | 6 | 36 |

*2 этап. Формулируем гипотезу: из всех прямоугольников фиксированного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.*

*3 этап. Докажем гипотезу.*

*Введём и исследуем функцию зависимости площади прямоугольника от его стороны a при постоянном периметре p: $S = a(p/2 - a)$; – и исследуем получившуюся функцию относительно переменной a.*

*$S(a) = -a^2+0{,}5pa$ – квадратичная функция, график – парабола, ветви которой направлены вниз, а вершина в точке $\left(\frac{p}{4}; \frac{p^2}{16}\right)$. Это значит, что из всех прямоугольников фиксированного периметра наибольшую площадь имеет квадрат, так как величина площади прямоугольника достигает наибольшего значения $\frac{p^2}{16}$ при $a = \frac{p}{4}$; $\frac{p}{2} - a = \frac{p}{4}$. Отсюда, $\frac{p}{2} - a = a$.*

Насколько представленная схема имеет общий вид?

**113.** Учитель разрабатывает серию практических задач на вычисление площадей, каждой из которых даёт название. Доведите число задач в серии до 10. Приведите решение одной задачи.

1. Не мала ли салфетка? Можно ли завернуть единичный кубик в квадратную салфетку размером $3 \times 3$?

2. Прямоугольник из треугольника. Из прямоугольного треугольника нужно вырезать прямоугольник так, чтобы одна из его вершин совпадала с вершиной прямого угла треугольника, две другие вершины лежали на катетах и одна вершина на гипотенузе, а площадь его была наибольшей

3. Наименьший круг. Из какого наименьшего бумажного круга можно вырезать треугольник, стороны которого равны 2, 3 и 4?



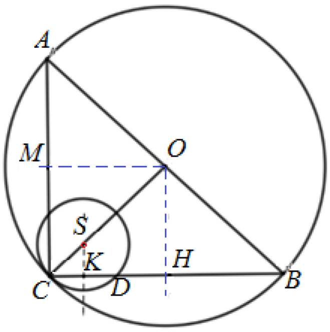
**114.** Текстовые математические задачи составляют большинство всех задач на вычисление площади школьного курса планиметрии. Залогом успеха решения неприведённых задач являются:

а) математическая интуиция,

б) полный анализ данных условия,

в) правильно построенный чертёж к задаче,

г) рациональный выбор формул и составление на их основе разрешающей алгебраической модели задачи.




**115.** Ученик у доски решает задачу: «В треугольнике *ABC* угол *C* – прямой, *CA* = *4*; на стороне *CB* взята точка *D* так, что *CD* = *1*; через *C* и *D* проходит окружность радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , которая касается в точке *C* описанной около треугольника *ABC* окружности. Найти площадь треугольника *ABC*».

Правильно ли построен чертёж?________

Удачна ли выбранная конфигурация для дальнейшего анализа? _________

Верен ли полученный учеником ответ: площадь Δ *ABC* равна 4. ________

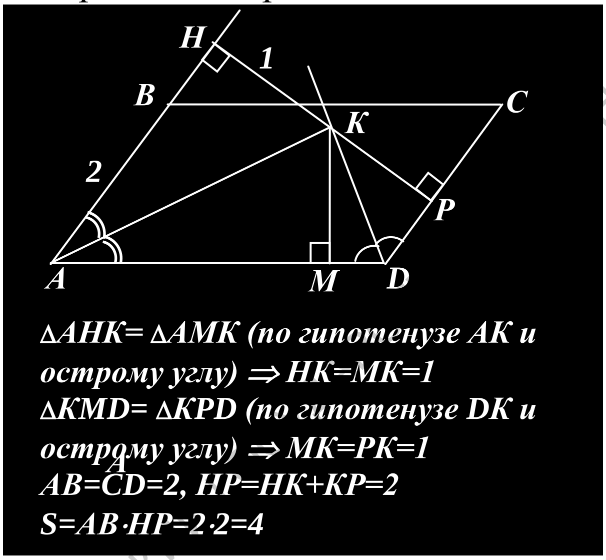
**116.** В проверочную работу по теме «Площадь параллелограмма» учитель включил задачу «Найти высоту параллелограмма со сторонами 18 см и 30 см, если вторая высота параллелограмма – 6 см». Часть учеников получила ответ: «Искомая высота равна 10 см», а часть – «Искомая высота равна 3,6 см». Почему получились разные ответы?

а) Допущена вычислительная ошибка.

б) Допущена логическая ошибка, связанная с выбором и применением формул.

в) Задача имеет два решения.

г) Учащиеся в своих рассуждениях опирались не неправильно построенный чертёж.




**117.** На уроке по теме «Площадь параллелограмма» решается задача «Биссектрисы углов *A* и *D* параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *K*, расстояние от которой до стороны *AB* равно *1*. Найдите площадь параллелограмма, если *DC* = *2*». Для организации самопроверки учитель вызвал одного ученика к доске продемонстрировать решение. Насколько записи на доске соответствуют этой цели?

а) Вполне соответствуют, так как отражают основные этапы решения.

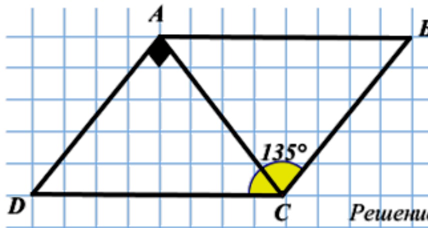
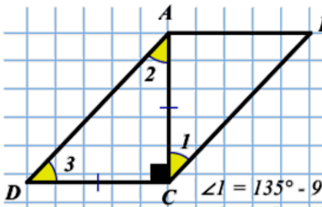
б) Чертёж не совсем верен, не отмечены равные отрезки, а в целом записи логичны, а вычисления безошибочны. Если подправить чертёж, то запись решения можно использовать для самопроверки.

в) При обосновании равенства треугольников не доказано, что они прямоугольные, т.е. нарушена логика умозаключений. Для её восстановления необходимы устные комментарии.

г) Поскольку не все этапы решения задачи отражены в записях на доске, их нельзя признать соответствующими цели самопроверки.

**118.** В самостоятельную работу по теме «Площадь параллелограмма» учитель включил задачу: «В параллелограмме с углом в 135° одна из диагоналей перпендикуляра стороне. Найти длины сторон параллелограмма, если его площадь равна 49 см».

Результаты самостоятельной работы трёх учащихся представлены ниже. Выделите те оценки, с которыми вы согласны.

| Ученик | Решение | Оценка |
|---|---|---|
| А | <br><br>*Дано.*<br>*ABCD - параллелограмм,*<br>*AC - диагональ, AC⊥DC*<br>*S = 49 см², ∠ A*<br>*Решение*<br>*∠D = 180° - ∠ C = 180° - 135° = 45° (св-во параллелограмма).*<br>*∠DAC = 90° (по условию). ∠DCA = 45° ⇒ Δ ACD - равнобедренный.*<br>*Пусть AD = x см, тогда AC = x см.*<br>*$S_{парал.}$ = AD AC,*<br>*x x = 49. x = 7.* | *Где ответ на требование задачи? На чертеже желательно указывать равные углы и равные отрезки; в остальном решение правильное, но неполное; оценка – «удовлетворительно».* |
| Б | <br><br>*Дано.*<br>*ABCD - параллелограмм,*<br>*AC - диагональ, AC⊥DC*<br>*S = 49 см²,*<br>*∠ C = 135°*<br>*Решение.*<br>*∠1 = 135° - 90° = 45°*<br>*∠2 = ∠1 = 45° (как внетренние накрест лежащие)*<br>*∠3 = 90° - 45° = 45° (по свойтву острых углов прямоуг. треугольника)*<br>*Δ ACD - прямоугольный равнобедренный: AC = DC*<br>*Но AC = сторона параллелограмма, а DC - высота к неё проведйнная, значит, S = AC DC =DC² = 49. DC = 7.*<br>*AC - гипотенуза равнобедр. прямоуг.треугольника, значит AC = DC$\sqrt{2}$. AC = 7$\sqrt{2}$.* | *Оценка «отлично», но в следующий раз используй не свойства параллельных прямых, а свойства параллелограмма.* |
| В | ***Поскольку диагональ перпендикулярна стороне, то она является высотой параллелограмма и разбивает его тупые углы на два накрест лежащих угла – в 90° и в 45°. Эта же диагональ делит треугольник на два прямоугольных треугольника с острым углом в 45°, т.е. на два прямоугольных равнобедренных треугольника, поэтому, разрезав параллелограмм по этой диагонали на треугольники и соединив эти треугольники гипотенузами, получим квадрат равновеликий параллелограмму, т.е. площадью 49 см², а значит со стороной в 7 см.***<br>***Сторона этого квадрата –меньшая сторона параллелограмма, диагональ квадрата – большая сторона параллелограмма – равна $7\sqrt{2}$ (т.е. в 7 раз больше диагонали единичного квадрата).***<br>***Ответ. Меньшая сторона параллелограмма равна 7 см, большая сторона – $7\sqrt{2}$ см.*** | *Где чертёж, краткая запись и решение? Что значит: «разрежем и соединим»?.. Ничего не понятно! Всё нужно переделать.* |

Сформулируйте общие рекомендации для учащихся по решению аналогичных задач.

_______________________________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

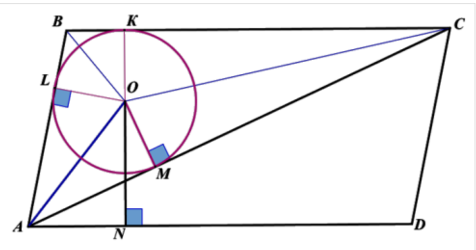
_______________________________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

**119.** Решение задачи: «В параллелограмме *ABCD* проведена диагональ *AC*. Точка *O* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Расстояние от *O* до точки *A* и прямых *AD* и *AC* соответственно равны *25*, *8* и *7*. Найдите площадь параллелограмма *ABCD*»; – учитель решить организовать в форме практической работы. В рамках домашней работы ученики разработали геометрические модели задачи (чертежи, эскизы, рисунки). Первое задание практической работы должно привести к визаулизации данных условия, ближайших следствий из них и требованию задачи; для этого вводится цветовые обозначения отрезков и углов. Продолжите формулировку задания 1 на основании того результата, который должны получить ученики, выполнив это задание (см. рисунок).




<u>Задание 1</u>. Отметьте черным цветом данные, соответствующие условию: … ______________________

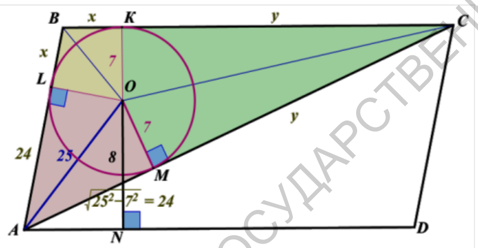
синим цветом данные, соответствующие следствию из условия: … ______________________

красным цветом данные, соответствующие следствию из условия: … ______________________

жирно выделите данные, соответствующие условию: … ______________________

отметьте необходимые для решения задачи прямые углы. ______________________

Следующее задание направлено на построение адекватной алгебраической модели задачи и касается введения неизвестных. Продолжите формулировку задания 2 на основании того результата, который должны получить ученики, выполнив это задание (см. рисунок).




<u>Задание 2</u>. Рассмотрите $\Delta ABC$. Используя три разных цвета, выделите в этом треугольнике три пары равных треугольников, причём красным цветом выделите треугольники, в которых известны две стороны и можно найти третью. ______________________

______________________

Последнее задание предусматривает построение и решение алгебраической модели. Сформулируйте его.

<u>Задание 3</u>. Выразите площадь параллелограмма *ABCD* двумя способами, как ______________________
и как ______________________

**120.** На уроке по теме «Площадь трапеции» в ходе коллективной беседы вырабатывается план решения задачи: «На средней линии трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* выбрали произвольную точку *K*. Докажите, что сумма площадей треугольников *BKC* и *AKD* равна половине площади трапеции»; – основными этапами которого являются:

а) Построение геометрической модели (чертежа) задачи.

б) Введение обозначений: $AD = a$, $BC = b$, $h$ – высота трапеции.

в) Перевод условия и требования задачи на язык формул с учётом введённых обозначений и формул площади треугольника и площади трапеции.

г) Доказательство утверждения: высота трапеции делится средней линией пополам (по теореме Фалеса).

д) Доказательство утверждения: если в прямоугольной трапеции *K* – середина боковой стороны, то площадь треугольника построенного на другой боковой стороне трапеции и с вершиной в точке *K* равна половине площади трапеции.

е) Обоснование истинности данного (сформулированного в задаче) утверждения на основании пункта (г).

ж) Обоснование истинности данного (сформулированного в задаче) утверждения на основании пункта (д).

з) Оформление доказательства.

и) Исследование утверждения для частных случаев.

к) Формулировка и решение задачи на вычисление площади на основании доказанного утверждения.

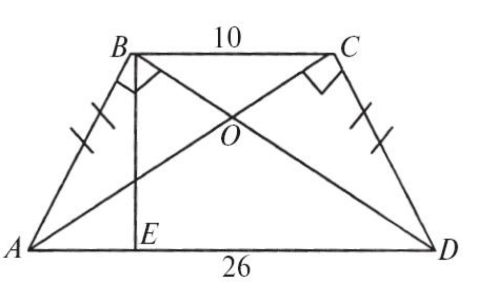
Запишите основные этапы, используя заглавные буквы, например, АБВЗ.

______________________________

**121.** На уроке по теме «Площадь трапеции» в ходе коллективной беседы вырабатывается план решения задачи: «Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, делит её на две равные части». Опишите основные этапы этого решения.

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

**122.** Для решения задачи: «Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 10 см и 26 см, а диагонали перпендикулярны к боковым сторонам» – учитель организовал коллективную беседу:




– Что требуется найти? // Площадь трапеции.

– По какой формуле находится площадь трапеции? /Для того чтобы найти искомое – площадь трапеции, необходимо воспользоваться формулой: $S = ½\,(BC + AD)\cdot BE$, где *BC* и *AD* известны, *BE* неизвестно.

– Из какой фигуры можно найти BE? // BE можно найти из $\Delta\,ABE$, $BE^2 = AB^2 + AE^2$, где *AB* и *AE* неизвестны.

– Из какой фигуры можно найти *AB*? // *AB* можно найти из $\Delta\,ABD$: $AB^2 = AE\cdot AD$, где *AE* неизвестно, *AD* известно.

– Как в трапеции находят длину отрезка *AE*? // *AE* находим по опорной задаче: $AE = ½\,(AD – BC)$, где *AD* и *BC* известны.

Как называется используемый учителем метод поиска решения задачи?

а) аналитический

б) комбинированный

в) метод аналогии

г) метод математического моделирования (составление алгебраической модели – системы уравнений

д) синтетический

**123.** Для решения задачи: «Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны *10 см* и *26 см*, а диагонали перпендикулярны к боковым сторонам» – учитель организовал коллективную беседу:

– Что можно найти, зная основания равнобокой трапеции? // Длину отрезков большего основания, которые отсекаются высотами трапеции, к нему проведенными.

– Что можно найти, зная в прямоугольном треугольнике *ABD* длины отрезков, на которые разбивает гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла? // Можно найти высоту треугольника, значит, и высоту трапеции.

Как называется используемый учителем метод поиска решения задачи?

а) аналитический

б) комбинированный

в) метод аналогии

г) метод математического моделирования (составление алгебраической модели – системы уравнений

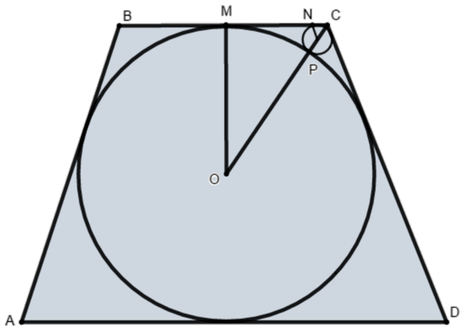
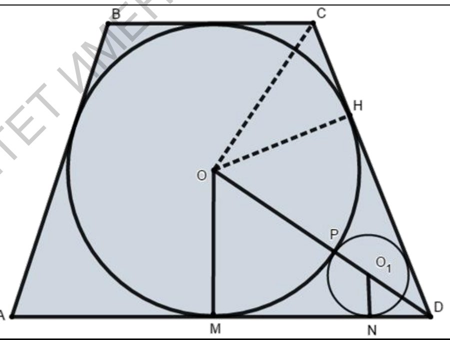
д) синтетический?

**124.** Для урока одной задачи учитель выбрал задачу: «В равнобокой трапеции лежат две окружности. Одна из них радиуса 1, вписана в трапецию, а вторая касается двух сторон трапеции и первой окружности. Расстояние от вершины угла, образованного двумя сторонами трапеции, касающийся второй окружности, до точки касания окружностей вдвое больше диаметра второй окружности. Найти площадь трапеции».

В ходе коллективной беседы учащиеся выяснили, что непосредственно из условия задачи не ясно, в какой из углов трапеции – в тупой или в острый – вписана вторая окружность. Решили изобразить обе возможности и проводить рассуждения сразу по двум чертежам, пытаясь выяснить, какой из них согласуется с конкретными числовыми соотношениями, указанными в условии. Для удобства условились записывать решение в таблицу сравнений.

Завершите анализ – заполняйте таблицу, пока не придёте к выводу относительно чертежа согласованного числовыми соотношениями условия

*Решение*. Пусть $O$ – центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, а точка $O_1$ – центр второй окружности, касающийся в точке $P$ первой окружности и касающийся двух сторон трапеции; радиус этой окружности обозначим через $r$.

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Соединив центры окружностей с точками качания $M$ и $N$, мы получим два подобных прямоугольных треугольника $OMC$ и $O_1NC$</td><td>Соединив центры окружностей с точками качания $M$ и $N$, мы получим два подобных прямоугольных треугольника $OMD$ и $O_1ND$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

**125.** Используя чертёж адекватный условию задачи из предыдущего задания, завершите её решение.

**126.** По окончании урока одной задачи учитель в качестве домашнего задания предложил решить задачу: «Дан параллелограмм *ABCD*, у которого *AB=1, BC=2* и угол *ABC* – тупой. Через каждую из точек *B* и *D* проведено по две прямых, одна из которых перпендикулярна к стороне *AB*, а другая – к стороне *BC*. В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму *ABCD*. Найти площадь параллелограмма *ABCD*». Почему?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**127.** Постройте чертёж к задаче их предыдущего задания.

Запишите ответ: площадь параллелограмма равна ___________.

## Применение подобия к решению задач

**128.** Перед тем, как приступить к выполнению задания: «В остроугольном треугольнике *ABC* провели высоту *BH*. Из точки *H* на стороны *AB* и *BC* опустили перпендикуляры *HK* и *HM* соответственно. Найдите отношение площади треугольника *MBK* к площади четырёхугольника *AKMC*, если *BH* = 2, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC* равен 4»; – учитель просит учащихся сформулировать всевозможные утверждения, имеющие отношение к ситуации, описанной в этой задаче. Какие ответы учеников необходимо выделить для последующего использования в процессе решения?

а) В прямоугольном треугольнике высота, проведённая из вершины прямого угла есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

б) В прямоугольном треугольнике катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и собственной проекцией на гипотенузу.

в) В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равно 90°.

г) Высота, проведённая из вершины прямого угла разбивает прямоугольный треугольник на два подобных, которые ему подобны.

д) Два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой образуют четырёхугольник, вписанный в окружность с центром в середине гипотенузы.

е) Если две стороны одного треугольника пропорциональные двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

ж) Если стороны треугольников пропорциональны, то треугольники подобны.

з) Если треугольники подобны, то соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны.

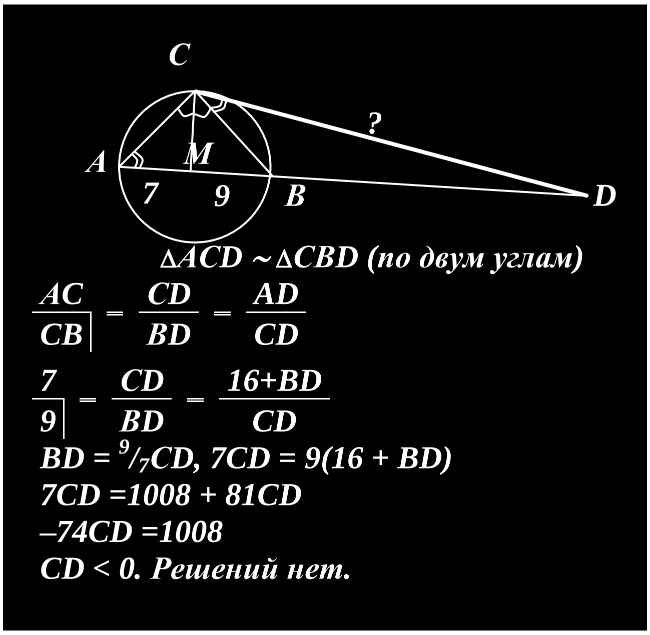
и) Если углы двух треугольников равны, то треугольники подобны (в этом случае достаточно установить равенство двух углов).

к) Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия этих треугольников.

л) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия этих треугольников.

м) Отношение соответствующих отрезков (биссектрис, медиан и пр.) в подобных треугольниках равно коэффициенту подобия этих треугольников.

н) Центр описанной около треугольника окружности лежит на точке пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.




**129.** Ученик у доски решал задачу: «Биссектриса *CM* треугольника *ABC* делит сторону *AB* на отрезки *AM* = 7 и *MB* = 9. Касательная к описанной окружности треугольника *ABC*, проходящая через точку *C*, пересекает прямую *AB* в точке *D*. Найдите *CD*». Выявите причину его затруднений.

а) Ученик допустил вычислительную ошибку.

б) Ученик допустил логическую ошибку: не обосновал местоположение точки D.

в) Ученик применил неэффективный метод решения (использование свойств подобия треугольников), приведший к громоздким выкладкам.

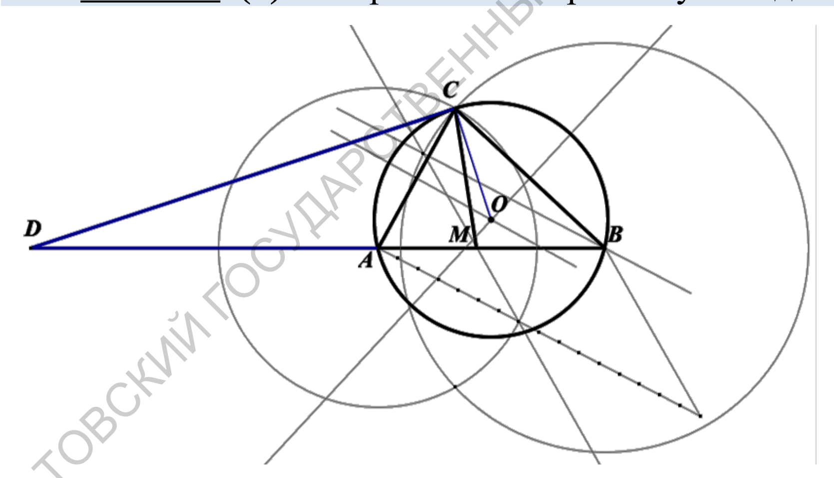
г) Ученик сделал неверный вывод из подобия треугольников.

д) Ученик сделал неверный вывод на основании чертежа.

е) Ученик сделал неверный чертёж, на основании которого построил неверную алгебраическую модель.

**130.** Оцените деятельность ученика при решении задачи: «Биссектриса *CM* треугольника *ABC* делит сторону *AB* на отрезки *AM* = 7 и *MB* = 9. Касательная к описанной окружности треугольника *ABC*, проходящая через точку *C*, пересекает прямую *AB* в точке *D*. Найдите *CD*».

<u>Решение</u>. (1) Построим геометрическую модель задачи по данным условия.




(2) $DC^2 = AD \cdot BD$ (по свойству касательной и секущей). В нашем случае, $DC^2 = AD(AD + 16)$.

(3) Рассмотрим треугольники с углом *D*: $\Delta DAC$ и $\Delta DCB$. Угол между касательной *CD* и секущей *AC*, равен вписанному в окружность углу *B*, следовательно $\Delta DAC \sim \Delta DCB$ по двум углам, а значит стороны этих углов пропорциональны: $AC : BC = AD : DC$.

(4) По свойству биссектрисы, $AC : BC = AM : MB$, т.е. $AC : BC = 7 : 9$.

(5) Из (3) и (4) следует, что $AD : DC = 7 : 9$, или, $AD = 7DC/9$.

(6) Из (2) и (5) следует: $DC^2 = \frac{7DC}{9}\left(\frac{7DC}{9} + 16\right)$, или $DC = \frac{7}{9}\left(\frac{7DC}{9} + 16\right)$.

$DC = 63/2 =$ <u>***31,5***</u>.

Оценка: ___ .

**131.** Учитель организовал проверочную работу по теме «Применение подобия к решению геометрических задач». Работа представлена двумя вариантами.

Вариант 1. Из вершины прямого угла *C* треугольника *ABC* проведена высота *CH*. Радиус окружности, вписанной в треугольник *BCH* равен *60*, тангенс угла *BAC* равен *4/3*. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Вариант 2. Из вершины прямого угла *C* треугольника *ABC* проведена высота *CH*. Радиус окружности, вписанной в треугольник *BCH* равен *60*, тангенс угла *BAC* равен *4/3*. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ACH*.

Спустя 8 минут учитель проверил решения; выяснилось, что у большей части учеников вне зависимости от варианта ответы совпали: радиус оказался равен *80*.

Объясните результат.

а) Все ученики, получившие в результате 80, выполнили задание верно.

б) Все ученики, получившие в результате 80, допустили вычислительную ошибку.

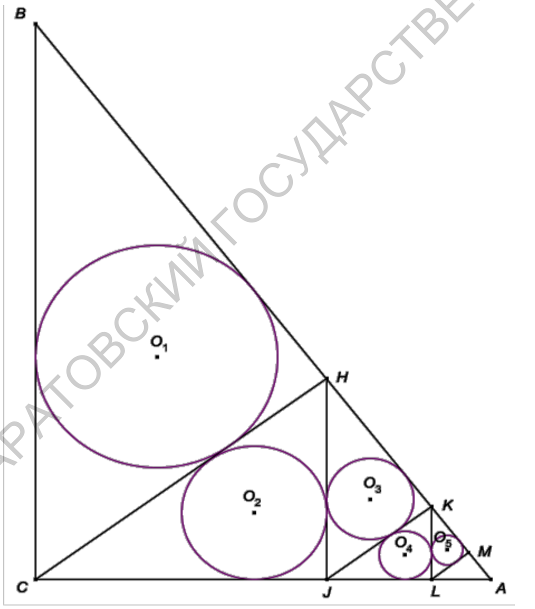
в) Все ученики, получившие в результате 80, допустили логическую ошибку.

г) Ученики, выполняющие задание второго варианта допустили вычислительную ошибку.

д) Ученики, выполняющие задание второго варианта допустили логическую ошибку: неверно применили свойство подобия.

е) Ученики, выполняющие задание первого варианта допустили вычислительную ошибку.

ж) Ученики, выполняющие задание первого варианта допустили логическую ошибку: неверно применили свойство подобия.




**132.** Учитель организовал проверочную работу по теме «Применение подобия к решению геометрических задач». Работа представлена двумя вариантами и расчитана на 8 минут. Задача: Из вершины прямого угла *C* треугольника *ABC* проведена высота *CH*. Радиус окружности, вписанной в треугольник *BCH* равен *60*, тангенс угла *BAC* равен *4/3*. Вариант 1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Вариант 2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ACH*. Тем, кто выполнил задание, учитель предложил расширить требование задачи и найти радиусы окружностей с центрами $O_2$, $O_3$, $O_4$, $O_5$ (см. рисунок). С какой целью разработано расширяющееся задание?

**133.** Решение задачи: «Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке *O*. Прямая *BD*, перпендикулярная прямой *OA*, пересекает сторону *AC* в точке *D*. Найдите *CD*, если *AB = 8, AC = 64*»; – учитель организовал, используя приёмы работы в паре. Один партнёр решает задачу при условии, что *AC* – большая из сторон треугольника, другой – что *AC* таковой не является. После этого результаты сравниваются и обобщаются: формулируется теорема. Оптимальна ли выбранная форма работы?

а) Да, она позволяет включиться школьникам в процесс учебного исследования, развивает их математические способности (в том числе к обобщению).

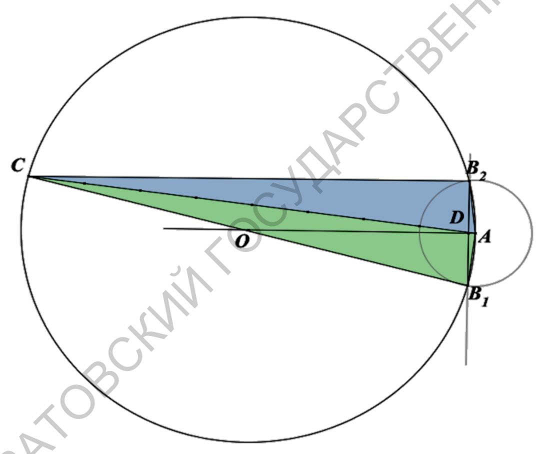
б) Не совсем оптимальна, поскольку при подобной постановке исследовательских заданий у школьников возникнут сложности с построением геометрических моделей: чертежи будут «слепыми», трудными для чтения и анализа.

в) Не совсем оптимальна: задача сложна для анализа, её лучше всего решать с комментарием у доски.

г) Не совсем оптимальна: дополнительные условия не равнозначны, условие «*AC* – большая из сторон треугольника» сложнее для восприятия и анализа конфигурации. Ученики затратят различное время на решение.

д) Нет. Числовые данные не позволяют получить чертёж, с которым можно было бы работать на этапе анализа данных условия, проведения дополнительных построений и пр. Оптимальным было бы сначала решить задачу в общем виде, а затем для случая, указанного в условии задачи.

**134.** Наиболее подходящей для решения геометрической моделью задачи: «Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке *O*. Прямая *BD*, перпендикулярная прямой *OA*, пересекает сторону *AC* в точке *D*. Найдите *CD*, если *AB = 8, AC = 64*»; – является




а) модель, учитывающая все данные условия и построенная с помощью циркуля и линейки,

б) модель, учитывающая все данные условия и построенная с помощью интерактивной среды, например, «1С: Математический конструктор» (см. рис),

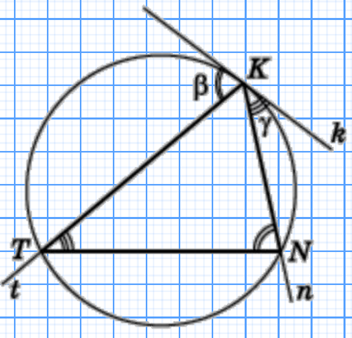
в) модель, не учитывающая числовые данные условия и построенная с помощью циркуля и линейки,

г) модель, не учитывающая числовые данные условия и построенная с помощью интерактивной среды, например, «1С: Математический конструктор»,

д) модель, не учитывающая числовые данные условия и построенная с использованием свойств клетчатой бумаги,

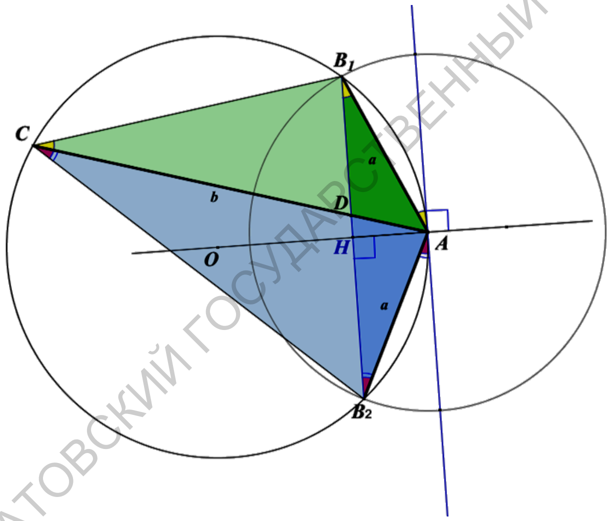
е) модель, приблизительно описывающая данные условия (использование цветовых выделений, отметка штриховкой равных величин, перпендикулярности прямых и пр.) и построенная «от руки».

**135.** Оцените деятельность ученика по решению задачи: «Вписать в окружность треугольник KNT, подобный данному треугольнику ABC».




*Решение.*
*Обозначим углы данного $\Delta ABC$: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.*
*На окружности отметим точку K и проведём через неё прямую k касательную к окружности.*
*Из точки K под углом $\beta$ к прямой k проведём луч t; он пересечёт окружность в точке T.*
*Из точки K под углом $\gamma$ к прямой k проведём луч n; он пересечёт окружность в точке N.*
*$\Delta$ KTN – искомый.*

**136.** Одним из основных образовательных результатов решения задачи: «Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке *O*. Прямая *BD*, перпендикулярная прямой *OA*, пересекает сторону *AC* в точке *D*. Найдите *CD*, если *AB = 8, AC = 64*»; – является



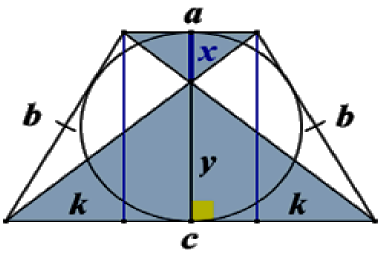

а) мотивация к использованию интерактивных сред, например, «1С: Математический конструктор», для построения геометрических моделей (см. рис.);

б) развитие геометрических представлений;

в) стремление рассмотреть всевозможные конфигурации данных, описанных в тексте задачи;

г) формирование убеждения в том, что если числовые данные задачи не способствуют скорейшему нахождению пути её решения, то следует попробовать решить задачу в общем виде;

д) формирование умений решать задачи на использование подобия треугольников к вычислению длин, углов и площадей.




**137.** Для решения задачи: «В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания»; – учитель решил использовать «готовый чертёж». Почему?

а) Вероятность того, что ученики ошибутся в построении чертежа крайне невелика, поэтому им можно предоставить готовый чертёж.

б) Используя готовые чертежи за один урок можно решить до 7 задач на вычисление длин, углов, площадей и объёмов.

в) Решение задачи по готовому чертежу – наиболее эффективный метод решения типовых несложных задач на вычисление длин, углов, площадей и объёмов.

г) Так проще и быстрее организовать беседу по поиску решения и составлению плана решения.

д) Ученикам сложно сделать аккуратный и относительно точный чертёж, позволяющий отыскать решение задачи. Для этого им необходимо использовать циркуль и линейку, а это занимает много времени. Готовый чертёж решит указанные проблемы.

е) Не важно, кто и как строит чертёж к задаче, главное, чтобы он был адекватен самой задаче и позволил найти идею её решения.

**138.** Решение задачи: «В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания»; – учитель начал с заполнения таблицы по готовому чертежу:

| № | Этап решения задачи | Запись на алгебраическом языке | Действия |
|---|---|---|---|
| 1 | Дано | $a + 2b + c = 120$ (1)<br>$(a + c)(x + y) : 2 = 540$ (2)<br>$c = 2k + a$ (3) | Использовать условие «можно вписать окружность». |
| 2 | Условие вписанной в четырёхугольник окружности | $a + c = 2b$ (4) | Найти $b$ из (1) и (4). Найти другие полезные отношения величин. |
| | | $4b = 120$, $\mathbf{b = 30}$<br>$a + c = 60$ (5)<br>$30(x + y) = 540$<br>$x + y = 18$ (6) | Выразить $k$, по теореме Пифагора |
| 3 | Выразить $k$, по теореме Пифагора | $b^2 = k^2 + (x + y)^2$<br>$900 = k^2 + 324$, $\mathbf{k = 24}$ | Зная $k$, найти $c$ из (3) и (5). |
| 4 | Найти $c$ из (3) и (5). | $c = 2k + a$ (3)<br>$a + c = 60$ (5)<br>$a + 2k + a = 60$,<br>$a + k = 30$, $k = 24$, $\mathbf{a = 6}$ | |
| 5 | Из подобия (синих) треугольников следует, что зная $a$, $c$ и $y$ можно найти $x$. | $x : y = a : c$ (7)<br>$x = ay : (2k + a)$ (8)<br>$k = 24$, $a = 6$<br>$x = y : 9$ (9) | Доказать, что треугольники подобны. Найти $x$. |
| 6 | Найти $x$ из (6) и (9). | $x = (18 - x) : 9$<br>$9x = 18 - x$, $10x = 18$, $\mathbf{x = 1{,}8}$ | Записать ответ. |

После этого он попросил учащихся выделить центральный этап решения задачи. Укажите этот этап.____________ .

## Координатный метод решения задач на вычисление площадей

**139.** Самостоятельная работа. Ученики 9 класса решают задачу: «Найти площадь треугольника *ABC*, если *A*(*2*; *3*), *B*(*6*; *7*), *C*(*5*; *0*)». Оцените результаты самостоятельной работы.

Ученик А. Оценка ______.

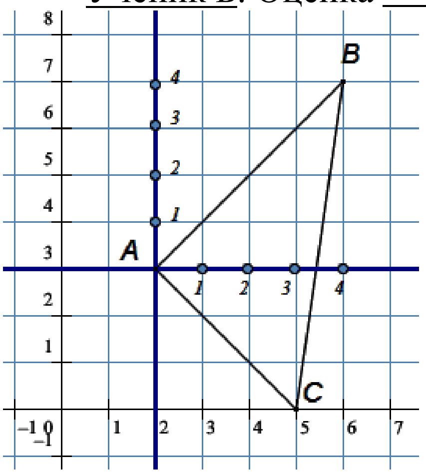
$AB=\sqrt{(2-6)^2+(3-7)^2}=4\sqrt{2}$;

$AC=\sqrt{(2-5)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$;

$BC=\sqrt{(6-5)^2+(7-0)^2}=5\sqrt{2}$.

Стороны пропорциональны $\sqrt{2}$, значит, можно найти площадь треугольника со сторонами 3, 4 и 5 (это прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4), а затем умножить на квадрат коэффициента пропорциональности, то есть на 2. Итак, получаем, что *площадь треугольника ABC равна 12*.

Ученик Б. Оценка ______.




Сместим начало координат в точку *A*, которая будет иметь нулевые координаты, а точки В и С в «новой» системе координат будут иметь координаты соответственно (*4*; *4*) и (*3*; – *3*).

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin BAC.$$

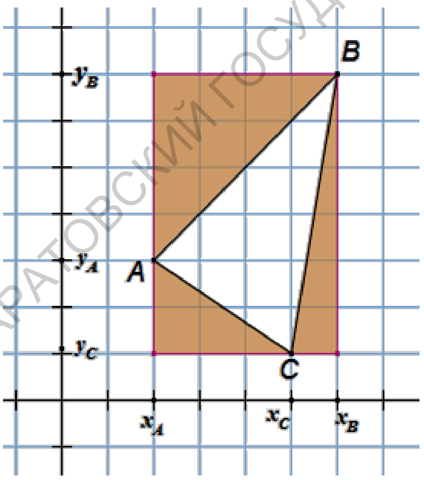
$$AB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2},$$

$$AC=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$$

$$\cos BAC=\frac{4\cdot 3+4\cdot(-3)}{4\sqrt{2}+3\sqrt{2}}=0 \;\Rightarrow\; \cos BAC=0 \;\Rightarrow$$

$\angle BAC=90°\Rightarrow \sin BAC=1.$

$$S=\frac{1}{2}4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 1=12.$$




Ученик В. Оценка ______.

$$S=24-\frac{4\cdot 4}{2}-\frac{2\cdot 3}{2}-\frac{6\cdot 1}{2}=12.$$

Ученик Г. Оценка ______.

Формула площади Гаусса:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|2(7-0)+6(0-3)+5(3-7)\right|=12$$

Ученик Д. Оценка ______.

Формула Пика: $S=B+\frac{Г}{2}-1$. $S=9+\frac{8}{2}-1=12$.

**140.** Учитель, столкнувшись с фактом применения некоторыми учениками формулы площади Гаусса, решил сделать формулу достоянием всех. Для этого он сообщил ученикам следующую информацию:

«Площадь треугольника через координаты вершин можно найти по формуле площади Гаусса (ещё он известна как формула землемера или алгоритм шнурования): если даны координаты трех вершин треугольника $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, то площадь такого треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot \left| x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B) \right|$. В зависимости от значений координат и от порядка их нумерации в правой части под модулем может получиться как положительная, так и отрицательная величина. Однако площадь геометрической фигуры всегда положительная, поэтому результат вычисления следует брать по абсолютной величине».

Достаточно ли этой информации?

а) Вполне достаточно: формула проста в использовании и легко запоминается.

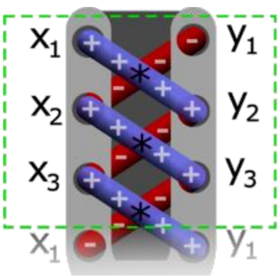
б) Формулу желательно доказать.

в) Желательно предложить два варианта формулы:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B) \right|$$

и $S = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3 \right|$.

г) Учащимся следует предложить попробовать вывести формулу в ходе исследовательской работы, где они должны умело сочетать координатный метод и практический способ вычитания из площади описанного около треугольника прямоугольника площадей «лишних» треугольников.




д) Следует ввести обобщённую формулу Гаусса для любого многоугольника и демонстрацию алгоритма шнурования для n-угольника с вершинами в точках $(x_n; y_n)$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 y_2 + x_2 y_3 + \ldots + x_{n-1} y_n + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \ldots - x_n y_{n-1} - x_1 y_n \right|.$$

На рисунке показан алгоритм шнурования для треугольника.

е) Классу следует предложить в ходе исследовательской работы вывести формулу для треугольника, произвольного четырёхугольника, выпуклого и невыпуклого пятиугольников.

ж) В классе следует предложить ученикам формулу Гаусса для любого многоугольника и демонстрацию алгоритма шнурования для n-угольника с вершинами в точках $(x_n; y_n)$, а в качестве домашнего задания – вывести формулу для какого-нибудь (по желанию учащихся) многоугольника.

з) ______________________________________________________________
________________________________________________________________
________________________________________________________________
________________________________________________________________

**141.** Учитель организовал соревнование по вычислению (на скорость) площади фигуры, заданной точками её вершин $\left(\sqrt{2};0\right)$, $\left(0;\sqrt{3}\right)$, $(-2; 0)$, $(0; -1)$.

Первым оказался ученик, который нашёл эту площадь как сумму площадей прямоугольных треугольников с вершинами в начале координат и катетами равными абсолютным величинам соответствующих координат, то есть $S=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}+\frac{1\cdot\sqrt{2}}{2}$.

Вторым – ученик, использовавший формулу площади Гаусса; его результат: $S=1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$.

Третьим – ученик, использовавший формулу площади треугольника, вычисляемую как полупроизведение основания на высоту, если рассматривать в качестве основания отрезок с концами в точках $\left(\sqrt{2};0\right)$ и $(-2; 0)$, а высотами считать отрезки с концами в точках $(0; 0)$ и $\left(0;\sqrt{3}\right)$, и $(0; 0)$ и $(0; -1)$. Этот ученик получил $S=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Баллы начислялись за скорость (10, 9, …), за рациональность (15, 14, …) и верный результат (10 – безошибочный, 9-6 – с арифметическими и/или синтаксическими ошибками, 5-0 – решение не доведено до конца или дан неверный ответ, полученный вследствие неверного решения.

Кто победил в соревновании? Ответ аргументируйте. Приведите все три решения.

**142.** Дайте рекомендации (указания) учащимся к решению задачи: «Найти площадь параллелограмма, у которого известны вершины A(2; – 4) и B(1; 5) и точка O(3; 7) пересечения диагоналей». Для этого достаточно указать: а) базис решения задачи; б) способы решения.

**143.** Ученик решил задачу из задания **139**. Оцените это решение.

*Решение*

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2},\ y_O = \frac{y_B + y_D}{2}\ и\ x_O = \frac{x_A + x_C}{2},\ y_O = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

$$3 = \frac{1 + x_D}{2},\ 7 = \frac{5 + y_D}{2}\ и\ 3 = \frac{2 + x_C}{2},\ 7 = \frac{-4 + y_C}{2} \Rightarrow C(4;\ 18)\ и\ D(5;\ 9).$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|x_A(y_B - y_D) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_D - y_B) + x_D(y_A - y_C)\right|$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|2(5-9) + 1(18+4) + 4(9-5) + 5(-4-18)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|-8 + 22 + 16 - 110\right| = 40$$

Оценка ____. Обоснование: ______________________________

**144.** Учитель даёт алгоритмическое предписание к решению задачи: «Требуется найти значение площади круга, заданного тремя точками ($x_1;\ y_1$), ($x_2;\ y_2$) и ($x_3;\ y_3$) соответствующей окружности».

*Поскольку площадь круга равна $\pi R^2$, то наша задача сводится к вычислению квадрата радиуса описанной около треугольника окружности. Поиску радиуса помогает уравнение окружности с центром в точке ($x_0;\ y_0$) и радиусом R: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Нам не известны ни ($x_0;\ y_0$), ни $R^2$, но их можно найти из системы трёх уравнений, подставляя в уравнение окружности координаты данных точек:*
$$\begin{cases}(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2\\(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = R^2\\(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 = R^2\end{cases}.$$

Что бы вы добавили или изменили в этом предписании?

**145.** Учение, пользуясь предписанием к вычислению площади круга, заданного тремя точками соответствующей окружности решил задачу: «Окружность проходит через точки (1; 2), (2; 3) и (3; – 1). Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью». Оцените его решение.

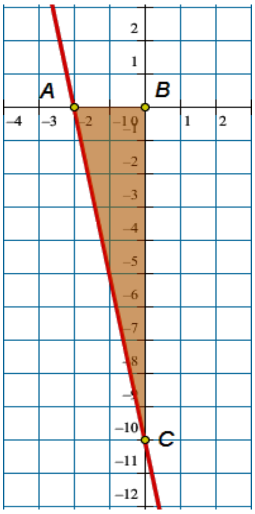
*Решение.*

$$\begin{cases} (1-x_0)^2+(2-y_0)^2=R^2 \\ (2-x_0)^2+(3-y_0)^2=R^2 \\ (3-x_0)^2+(-1-y_0)^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow R^2=4{,}42, \Rightarrow S_{кр}=4{,}42\pi.$$

*Ответ:* $4{,}42\pi$.

Оценка ____. Обоснование: ____________________________________________

______________________________________________________________________




**146.** Учитель демонстрирует способ нахождения площади многоугольника, заданного уравнениями прямых, на примере задачи: найти площадь треугольника, образованного прямой $5x + y + 10 = 0$ и осями координат.

*Можно начать решение с построения чертежа, в надежде на целочисленные значения координат вершин заданного аналитически треугольника.*

*По чертежу находим A(– 2; 0), B(0; 0) и C(0; – 10). Теперь можно использовать весь арсенал методов и способов вычисления площади, самый рациональный – найти полупроизведение катетов и выяснить, что площадь нашего треугольника равна 10 = (2 · 10) : 2.*

Что бы вы добавили или изменили в этой демонстрации?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**147.** Ученик, прослушав объяснение учителя (см. задание **143**), предоставил такое решение задачи: найти площадь треугольника, образованного прямой $5x + y - 10 = 0$ и осями координат.

*Решение.*

$$\begin{cases} 5x+y-10=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(2;\ 0) \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B(0;\ 0)$$

$$\begin{cases} 5x+y-10=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow C(0;\ 10). \qquad S=\frac{1}{2}\cdot\left|\underbrace{x_Ay_B}_{0}+\underbrace{x_By_C}_{0}+\underbrace{x_Cy_A}_{0}-\underbrace{x_By_A}_{0}-\underbrace{x_Cy_B}_{0}-x_Ay_C\right|.$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|-x_Ay_C\right|.\ S=\frac{1}{2}\cdot\left|-2\cdot 10\right|=10.\ Ответ:\ 10\ кв.ед.$$

Оцените это решение в контексте объяснения учителя.

Оценка ____. Обоснование: ____________________________________________

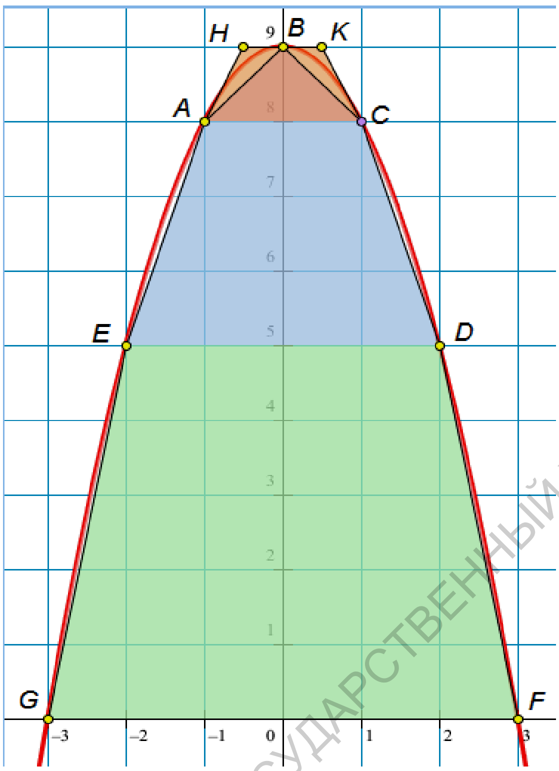
______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**148.** Учитель вводит в курс геометрии основной школы задачи на нахождение площади фигуры, заданной уравнениями контура и отличной от многоугольника. Несмотря на то, что использовать методы математического анализа (позволяют вычислять точное значение площади в большинстве «школьных» случаев) учащиеся не могут, задачи этого типа имеют численное решение, которое учитель демонстрирует на примере задача: найти площадь фигуры ограниченной $y = 9 - x^2$ и осью абсцисс.

*Точное решение основано на использовании определённого интеграла и описывается цепочкой равенств:* $S = 2\int_0^3 \left(9 - x^2\right)dx = 2\left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) = 2 \cdot 18 = 36.$

*Смысл этой записи вы узнаете в 11 классе. А сейчас решим задачу численными методами.*




*Приближённое, численное решение связано с использованием аддитивности площади, свойств клетчатой бумаги, нахождением площади вписанного многоугольника, среднего площадей вписанного и описанного многоугольника и т.п.*

*Покажу лишь два варианта решения, основанных на построении графика функции* $y = 9 - x^2$ *в системе координат и геометрической модели.*

*1 вариант:*

$S \approx S_{ABC} + S_{ACDE} + S_{EDFG} = 1 + 9 + 25 = 35.$

*2 вариант:*

$S \approx \frac{S_{ABC} + S_{ACKH}}{2} + S_{ACDE} + S_{EDFG} =$

$= \frac{1 + 1{,}5}{2} + 9 + 25 = 35{,}25.$

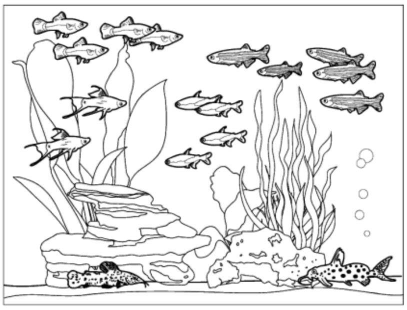
*Ещё более точное численное решение даёт построение модели на масштабной (миллиметровой бумаге).*

Что бы вы добавили или изменили в этой демонстрации?

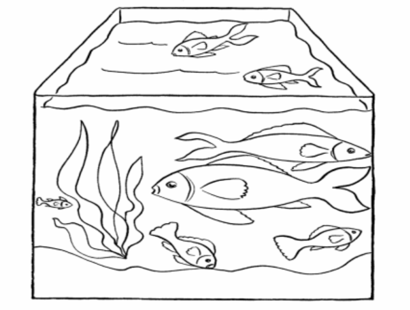
## Вычисление длин, углов, площадей и объёмов пространственных тел

**149.** Урок ИНМ в 5 классе по теме «Объём прямоугольного параллелепипеда» учитель начал с проблемной задачи[1]: «Сколько воды надо влить в аквариум, длина которого – 90 см, ширина – 40 см, а высота – 60 см, чтобы уровень воды был ниже верхнего края аквариума на 10 см?»

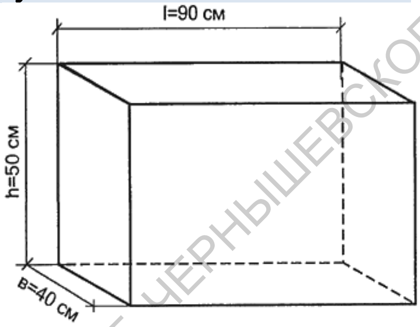
Если ученики не могут предложить приемлемых способов решения задачи, можно попросить изобразить «сюжет задачи» в виде рисунка.



(а)



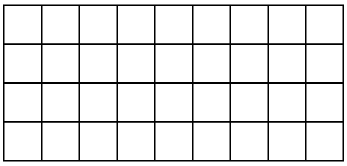
(б)

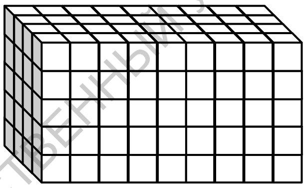



(в)

Специально оговаривается условие «чтобы уровень воды был ниже верхнего края аквариума на 10 см», которое приводит к построению модели, изображённой на рисунке (в).

Далее, ученикам предлагается вспомнить, как они находили площадь прямоугольника: разбивали на клеточки – квадраты – со стороной в 1 единицу (1 м, 1 дм, 1 см, 1 мм), а затем считали число квадратов, а для прямоугольника, умножали число квадратов в строке на число квадратов в столбце, – и поступить по аналогии для нахождения объёма. Только теперь разбиваем на кубики – кубы – со стороной в 1 единицу (1 м, 1 дм, 1 см, 1 мм), а затем считали число кубов.





При подсчёте числа кубов, ученики должны действовать рационально, и сначала подсчитать число кубов, лежащее в основании параллелепипеда (то есть найти площадь прямоугольника: 90 · 40 = 3600 кв.см или, по рисунку, 9 · 4 = 36 кв.дм), а затем умножить это число на «высоту» (3600 · 50 = 180000 куб.см или, по рисунку, 36 · 5 = 180 куб.дм).

Сопоставляя решение задачи в см и дм, ученики приходят

а) к алгоритму вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда, основанному на его разбиении на единичные кубы;

б) к определению объёма геометрического тела: V > 0; единица измерения – 1 куб со стороной, равной 1; если тело разбито на n непересекающихся тел, то его объём равен сумме объёмов n непересекающихся тел;

в) к формуле объёма прямоугольного параллелепипеда: V = a·b·c;

г) к формуле перевода единиц измерения объёма:

| | | |
|---|---|---|
| 90 · 40 = 3600 кв.см | 9 · 4 = 36 кв.дм | 100 кв.см = 1 кв.дм |
| 3600 · 50 = 180000 куб.см | 36 · 5 = 180 куб.дм | **1000 куб.см = 1 куб.дм**. |

[1] Учащиеся ещё не умеют находить объем прямоугольного параллелепипеда, поэтому задание носит для них проблемный характер

**150.** Опишите логику решения задачи: «В треугольной пирамиде *MABC* основанием является правильный треугольник *ABC*, ребро *MB* перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны *3*, а ребро *MA* равно *6*. На ребре *AC* находится точка *D*, на ребре *AB* находится точка *E*, а на ребре *AM* – точка *L*. Известно, что *AD=AL=2* и *BE=1*. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью *EDL*».

а) Построить чертёж к задаче.

б) Определить вид каждой боковой грани.

в) Выяснить, что в сечении – треугольник.

г) Найти стороны сечения, используя теорему косинусов.

д) Найти стороны сечения, используя свойства прямоугольных, равнобедренных и равносторонних треугольников и теорему косинусов.

е) Вычислить площадь сечения по формуле Герона.

ж) Вычислить площадь сечения как произведения половины основания на высоту.

**151.** Для решения задачи: «В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 64 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 4 раза больше диаметра первого?» – учитель организовал базовое повторение. Отметьте два наиболее важных вопроса этой беседы, позволяющих наметить план решения задачи.

а) Как найти объём цилиндра?

б) Как найти объём кругового цилиндра?

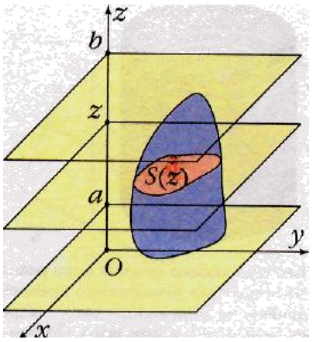
в) Как найти площадь круга с диаметром D?

г) Как изменится площадь круга, если его диаметр увеличится в n раз?

д) Как изменится объём кругового цилиндра, если его площадь увеличится в n раз?

е) Какой пропорцией (прямой или обратной) связаны площади и высоты двух цилиндров одинакового объёма?

Приведите решение задачи.




**152.** Учитель планирует организовать работу по усвоению алгоритма вычисления объёмов геометрических тел с помощью определённого интеграла:

1. Ввести систему координат так, что ось *OX* перпендикулярна основанию геометрического тела.

2. Найти пределы интегрирования $a$ и $b$.

3. Провести сечение плоскостью перпендикулярно оси *OX* через точку с абсциссой $x$. Определить вид сечения, задать формулой его площадь как функцию $S(X)$.

4. Проверить непрерывность функции $S(X)$ на $[a;b]$.

5. Использовать для вычисления формулу: $V = \int_a^b S(x)dx$.

С чего ему начать этой работу?

а) С вывода объёма шара.

б) С демонстрации алгоритма на конкретном примере.

в) С повторения основных понятий интегрального исчисления.

г) С повторения понятий площади плоской фигуры, площади поверхности и объёма тела.

д) С повторения приёмов измерения величин (аддитивность, инвариантность перемещений и пр.).

е) С повторения способов вычисления определённого интеграла.

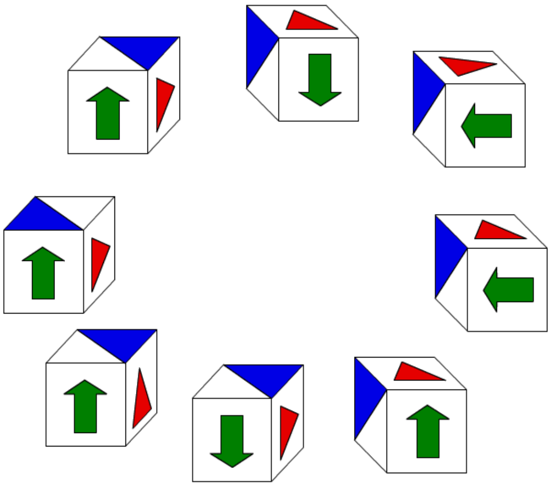
ж) С проверки домашнего задания.

з) С самостоятельной практической работы учащихся по вычислению объёмов тел вращения.

и) С самостоятельной практической работы учащихся по вычислению объёмов многогранников.

к) ____________________________________________
____________________________________________
____________________________________________
____________________________________________
____________________________________________

**153.** Развитием пространственного мышления учитель занимается ежеурочно, предлагая ученикам 5 класса разнообразные упражнения.



Упражнение «Найди два одинаковых кубика». Учащимся предлагается изображение восьми кубиков. У всех кубиков видны только три из шести сторон. По условию три невидимые стороны у всех восьми кубиков одинаковые. Одна из видимых сторон у всех 8 кубиков закрашена по диагонали, на двух других изображены стрелка и треугольник. Требуется найти два полностью одинаковых кубика.

Этим упражнением учитель решает следующую развивающую задачу:

а) Активизация образов памяти, в результате которого ученик проводит поиск в своем банке образов памяти и путем сличения предлагаемого образа с имеющимся в памяти распознает искомую форму.

б) Классификация и упорядочение изучаемых объектов.

в) Создание образов воображения

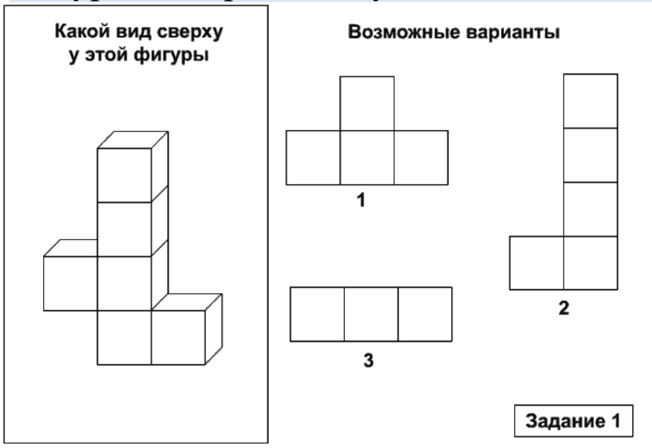
г) Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали.

д) Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является «творческим отделом мозга», специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей.

е) Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ученик не будет «терять» при различных её перемещениях в дальнейшем.

Приведите образец рассуждений, который удовлетворит учителя. Учащиеся должны догадаться: каким-либо образом обозначить рисунки кубиков для удобства формулировки ответа на поставленное требование задачи.

**154.** Развитием пространственного мышления учитель занимается ежеурочно, предлагая ученикам 5 класса разнообразные упражнения.




Упражнение «Найти вид объемной фигуры сверху». Учащимся предлагается одна объемная фигура и даны три возможных варианта вида этой фигуры сверху. Необходимо найти правильный вариант.

Свой выбор ученик должен обязательно обосновать. На первых порах учитель должен планировать серию вспомогательных вопросов, помогающих ученику аргументировать своё решение. Приведите примеры таких вопросов.

Этим упражнением учитель решает следующую развивающую задачу:

а) Активизация образов памяти, в результате которого ученик проводит поиск в своем банке образов памяти и путем сличения предлагаемого образа с имеющимся в памяти распознает искомую форму.

б) Классификация и упорядочение изучаемых объектов.

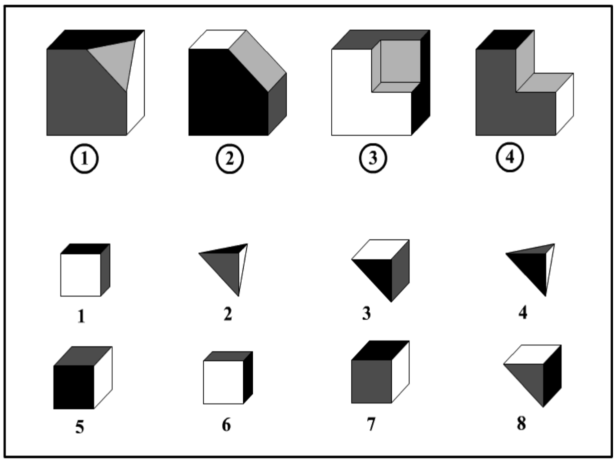
в) Создание образов воображения

г) Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали.

д) Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является «творческим отделом мозга», специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей.

е) Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ученик не будет «терять» при различных её перемещениях в дальнейшем.

**155.** Развитием пространственного мышления учитель занимается ежеурочно, предлагая ученикам 5 класса разнообразные упражнения.




Упражнение «Найти отрезанный (вырезанный) от каждого кубика фрагмент». На рисунке представлены 4 кубика, у каждого из них отрезан (или вырезан) фрагмент определенной формы. Видимые стороны (срезы) кубиков окрашены в разные цвета (белый, черный, темно-серый, светло-серый). Ниже изображены 8 фрагментов, из которых нужно выбрать недостающие части кубиков.

Этим упражнением учитель решает следующую развивающую задачу:

а) Активизация образов памяти, в результате которого ученик проводит поиск в своем банке образов памяти и путем сличения предлагаемого образа с имеющимся в памяти распознает искомую форму.

б) Классификация и упорядочение изучаемых объектов.

в) Создание образов воображения

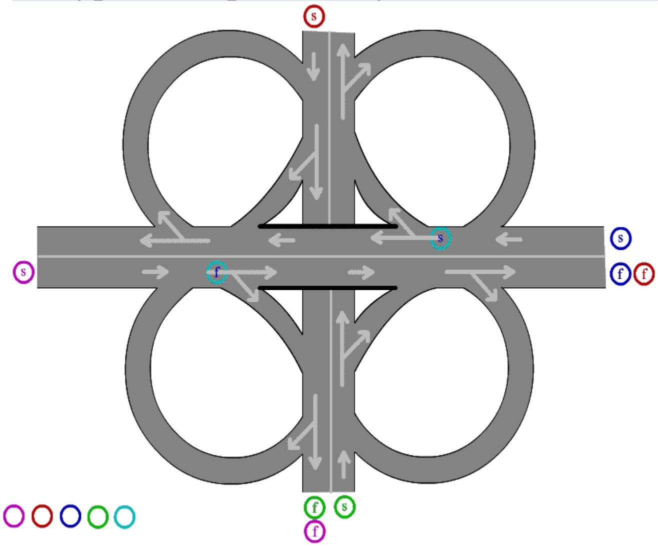
г) Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали.

д) Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является «творческим отделом мозга», специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей.

е) Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ученик не будет «терять» при различных её перемещениях в дальнейшем.

Для четырёх лишних деталей изобразите сообветствующие дополняющие до куба франменты.

**156.** Развитием пространственного мышления учитель занимается ежеурочно, предлагая ученикам 5 класса разнообразные упражнения.



Упражнение «Транспортная развязка». Учащимся предлагается изображение типичной транспортной развязки. На рисунке также имеются условные обозначения в виде цветных кружков (сиреневого, красного, синего, зеленого и голубого цветов) с буквой «S» или «F» внутри. Буква «S» означает «старт» (начало пути), а буква «F» – финиш (конец пути). Необходимо на воображаемом автомобиле «проехать» все 5 маршрутов (начинается маршрут с буквы «S» определенного цвета, заканчивается буквой «F» того же цвета). Естественно, что «двигаться на автомобиле» нужно согласно стрелкам и нельзя пересекать сплошную линию разметки.

Этим упражнением учитель решает следующие развивающие задачи:

а) Активизация образов памяти, в результате которого ученик проводит поиск в своем банке образов памяти и путем сличения предлагаемого образа с имеющимся в памяти распознает искомую форму.

б) Классификация и упорядочение изучаемых объектов.

в) Создание образов воображения.

г) Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали.

д) Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является «творческим отделом мозга», специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей.

е) Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ученик не будет «терять» при различных её перемещениях в дальнейшем.

Упражнение рассчитано на пятерых человек. Что если желающих его выполнить будет больше?

**157.** Развитием пространственного мышления учитель занимается ежеурочно, предлагая ученикам 5 класса разнообразные упражнения и развивающие игры.

Игра «Зоркий глаз». Внимательно рассмотрите репродукции Д. Арчимбольдо и выделите знакомые вам объекты. Как бы вы назвали эти репродукции?

Эта дидактическая игра решает следующую развивающую задачу:

а) Активизация образов памяти, в результате которого ученик проводит поиск в своем банке образов памяти и путем сличения предлагаемого образа с имеющимся в памяти распознает искомую форму.

б) Классификация и упорядочение изучаемых объектов.

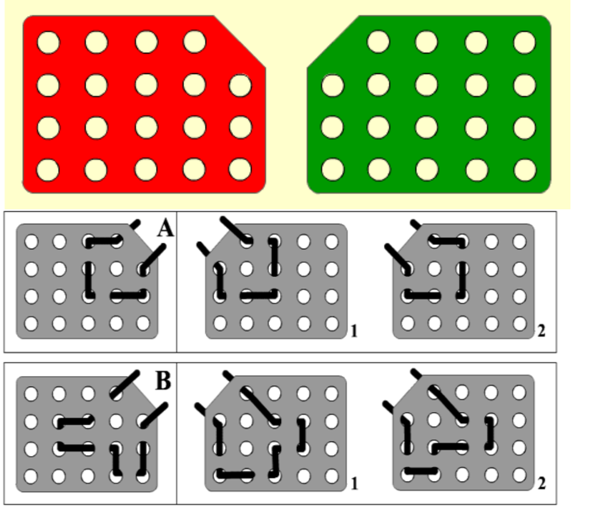
в) Создание образов воображения.

г) Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали.

д) Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является «творческим отделом мозга», специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей.

е) Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ученик не будет «терять» при различных её перемещениях в дальнейшем.

**158.** Развитием пространственного мышления учитель занимается ежеурочно, предлагая ученикам 5 класса разнообразные упражнения и развивающие игры.




Игра «Решето». Двум ученикам А и В выдаются изготовленные из плотного картона пластины прямоугольной формы с отверстиями (стороны пластинки должны быть разных цветов, один угол срезан) и шнурок. Ученики А и В продевают шнурок точно таким же образом, как это показано на рисунке, после чего предъявляют классу красную сторону решета и предлагают определить, как с обратной стороны будет выглядеть решето, как рисунок 1 или 2? Ученики класса выбирают подходящий вариант из двух предложенных. После этого, перевернув пластинку, проверяется правильность решения.

Эта дидактическая игра решает следующие развивающие задачи:

а) Активизация образов памяти, в результате которого ученик проводит поиск в своем банке образов памяти и путем сличения предлагаемого образа с имеющимся в памяти распознает искомую форму.

б) Классификация и упорядочение изучаемых объектов.

в) Создание образов воображения.

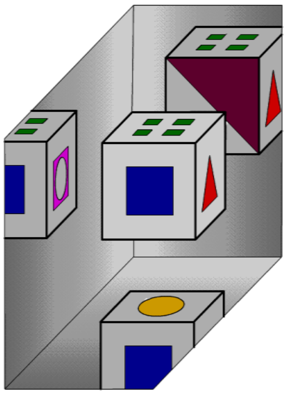
г) Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали.

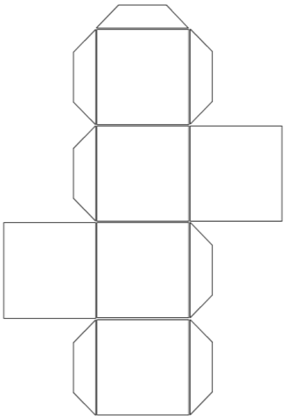
д) Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является «творческим отделом мозга», специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей.

е) Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ученик не будет «терять» при различных её перемещениях в дальнейшем.

Предложите свой вариант развивающей игры с данными игровыми средствами.

**159.** Развитием пространственного мышления учитель занимается ежеурочно, предлагая ученикам 5 класса разнообразные упражнения. Так, в конце одного из уроков математики учитель предложил упражнение «Зеркало».





Дани изображение куба, помещенного рядом с тремя зеркалами, и развертка к нему (развёткка, цветные маркеры и клей – у каждого ученика). Задание: перенести рисунок с куба на развертку. Проверяется правильность выполнения задания путём сравнения макета куба, склеенного из развёркти с оригиналом (комбинацией куба и зеркал).

Этим упражнением учитель решает следующие развивающие задачи:

а) Активизация образов памяти, в результате которого ученик проводит поиск в своем банке образов памяти и путем сличения предлагаемого образа с имеющимся в памяти распознает искомую форму.

б) Классификация и упорядочение изучаемых объектов.

в) Создание образов воображения.

г) Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали.

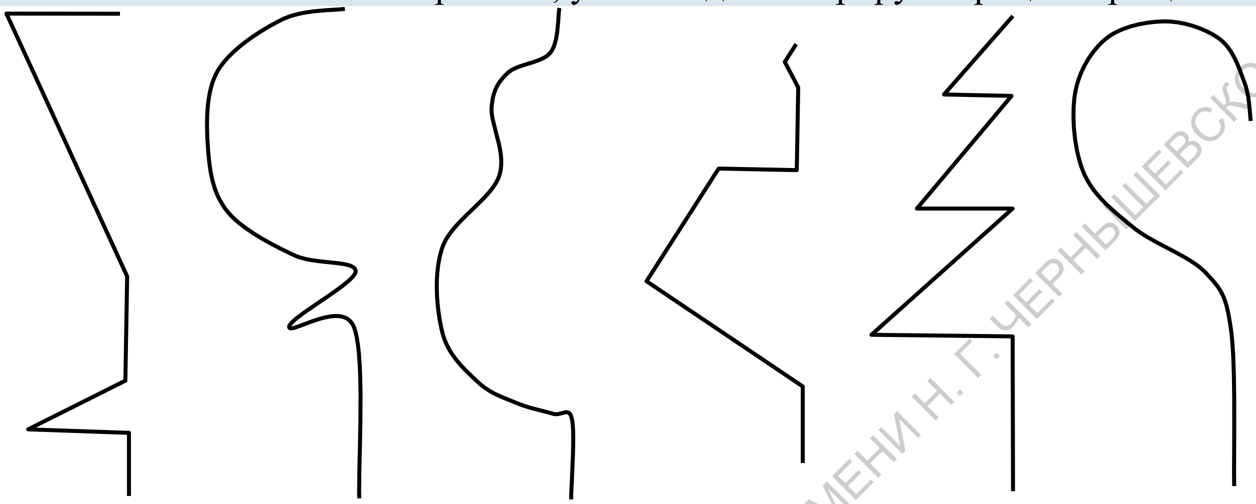
д) Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является «творческим отделом мозга», специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей.

е) Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ученик не будет «терять» при различных её перемещениях в дальнейшем.

Предложите свой вариант разивающего упражнения с зеркалами.

**160.** Развитием пространственного мышления учитель занимается ежеурочно, предлагая ученикам 5 класса разнообразные упражнения.

Упражнение «Тела вращения». Учитель демонстрирует ученикам проволочные заготовки и предлагает угадать, какая фигура получится при вращении каждой из заготовок вокруг своей оси. После того, как будут высказаны все возможные варианты, учитель демонстрирует процесс вращения.



рюмка шарик груша юла елка сердечко

Этим упражнением учитель решает следующую развивающую задачу:

а) Активизация образов памяти, в результате которого ученик проводит поиск в своем банке образов памяти и путем сличения предлагаемого образа с имеющимся в памяти распознает искомую форму.

б) Классификация и упорядочение изучаемых объектов.

в) Создание образов воображения.

г) Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали.

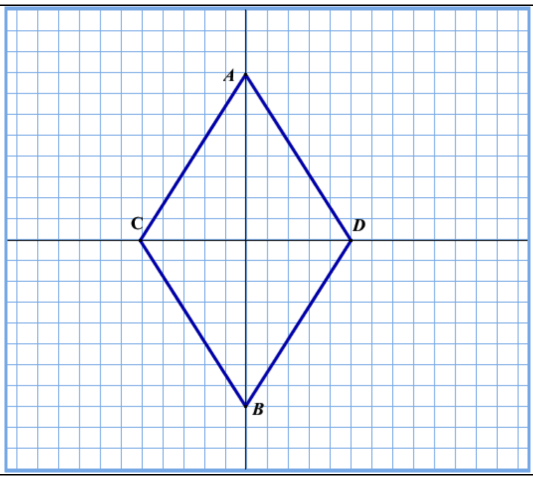
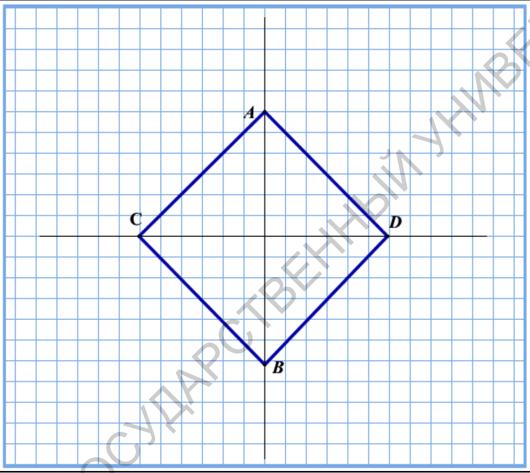
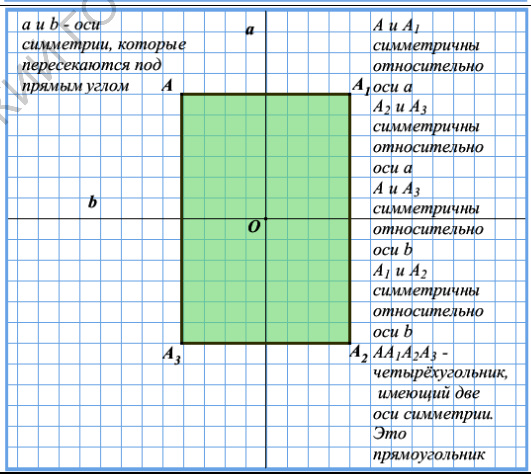
д) Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является «творческим отделом мозга», специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей.

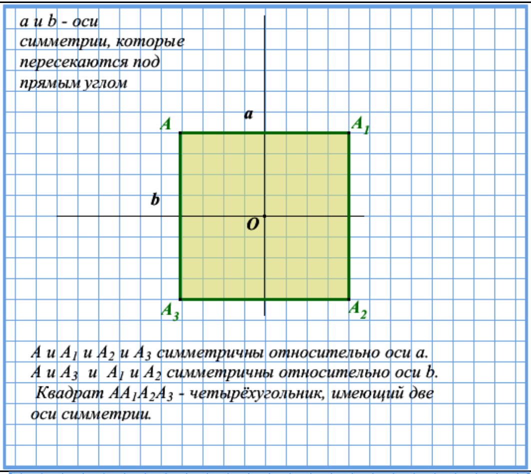
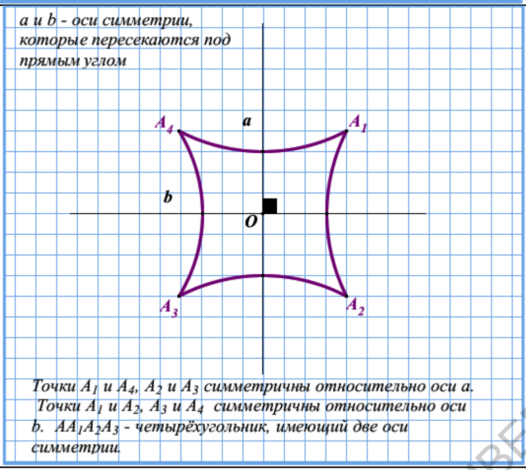
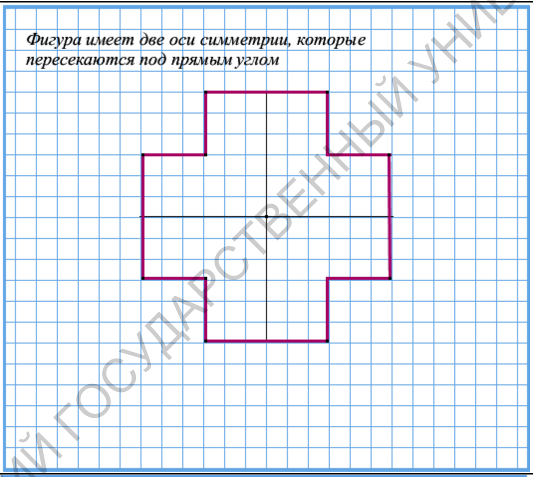
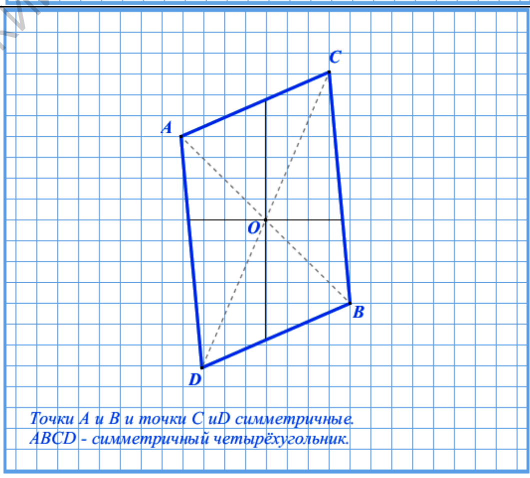
е) Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ученик не будет «терять» при различных её перемещениях в дальнейшем.

Предложите свой вариант развивающей игры с данными игровыми средствами.

**161.** В 6 классе при изучении темы «Осевая симметрия» учитель предложил классу задание: «Изобразить фигуру, о которой известно, что она имеет две оси симметрии, расположенные под прямым углом, и известно, что это четырехугольник».

Дайте качественную оценку (удовлетворительно, неудовлетворительно, хорошо, отлично, превосходно) результатам деятельности школьников по выполнению задания. В случае неудовлетворительного результата сформулируйте уточняющий, корректипующий вопрос, позволяющий ученику осознать и исправить ошибку.

| Ученик | Решение | Оценка |
| --- | --- | --- |
| А |   | |
| Б |   | |
| В |   | |

<table>
<tr><th>Ученик</th><th>Решение</th><th>Оценка</th></tr>
<tr><td>Г</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Д</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Е</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Ж</td><td>
</td><td></td></tr>
</table>

**162.** Первое знакомство с геометрическими преобразованиями в курсе основной школы учитель начал с монолога:

«С реальными преобразованиями предметов мы имеем дело постоянно: изображая пространственные фигуры, мы преобразуем эти фигуры в плоские, при освещении различных предметов возникают их тени, глядя в зеркало, мы видим образы отраженных в нем предметов. Когда строят здания, электростанции, корабли и т.п., то сначала делают их уменьшенные модели, а затем эти модели преобразуют в сами эти объекты.

Понятие геометрического преобразования очень похоже на понятие *числовой функции*. Напомним известное из курса алгебры определение функции:

Если каждому числу $x$ из некоторого множества чисел $M$ поставлено в соответствие определенное число, обозначаемое $f(x)$, то говорят, что на множестве $M$ задана функция $f$.

А теперь сформулируем определение *преобразования фигуры*.

Если каждой точке $X$ некоторой фигуры Ф поставлена в соответствие определенная точка, обозначаемая $f(X)$, то говорят, что задано *преобразование $f$ множества* Ф.

Сравнив эти два определения, видим их полную аналогию. Но в определении функции речь идет о сопоставлении числам $x$ из множества $M$ *чисел $f(x)$*, а в определении преобразования говорится о сопоставлении точкам $X$ фигуры Ф *точек $f(X)$*. Число $f(x)$ называется значением функции $f$ для аргумента $x$, а точка $f(X)$ называется образом точки $X$ при преобразовании $\boldsymbol{f}$.

Можно даже сказать, что преобразование фигуры – это задание на ней функции, аргументами и значениями которой являются точки. С другой стороны, задав функцию $f(x)$ на некотором числовом множестве, например, на отрезке $[a,b]$, мы можем также считать, что задали преобразование отрезка $[a,b]$. В этом случае график функции $f(x)$ помогает нам определить положение образа любой точки этого отрезка.

Примером преобразования фигуры является проектирование ее на прямую или на плоскость. Вспомните, что проектирование фигуры Ф на прямую (на плоскость) состоит в том, что каждой точке $X$ фигуры Ф сопоставляется ее проекция $X_1$ на эту прямую (на эту плоскость)».

Насколько уместно в этом случае обращение к понятию числовой функции?

а) Неуместно: это только сбивает учеников с толку, поскольку в дальнейшем данное определение использоваться не будет.

б) Эту информацию можно дать учащимся в ознакомительных целях, введённое определение преобразования фигуры усвоению не подлежит.

в) Информация полезна, так как в ней содержится некоторое обобщение известных учащимся понятий и представлений.

г) Обращение к понятию числовой функции обязательно: аналогия полезна для восприятия и запоминания новой информации.

**163.** К первому уроку изучения преобразований движения учитель попросил ученика подготовить сообщение по теме на 5 минут. В отведённое для этого время урока ученик выступил с таким докладом:

«Преобразования могут быть очень разнообразны: есть преобразования, которые изменяют форму фигуры. Есть преобразования, которые, хоть и меняют форму фигуры, но сохраняют «прямолинейность». Есть преобразования, которые сохраняют форму фигуры, но изменяют ее размеры. И, наконец, есть преобразования, которые сохраняют не только форму, но и размеры фигуры, а меняют лишь ее положение в пространстве.

Знакомство с геометрическими преобразованиями начинают с класса тех преобразований, которые сохраняют все свойства фигур, поскольку любое геометрическое свойство можно выразить через расстояния между точками, через длины соединяющих эти точки отрезков. Поэтому те преобразования, которые сохраняют расстояния, сохраняют и все другие свойства геометрических фигур. Такие преобразования называют движениями.

Понятие движения сформировалось путем абстракции реальных перемещении твердых тел.

Движение евклидова пространства – геометрическое преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками. Движение есть ортогональное преобразование.

Важную роль понятие движение играет в римановых пространствах теории относительности (сильная асимметрия гравитационных полей накладывает ограничения на движения твёрдых тел в таких пространствах).

Движение может быть принято в качестве основного понятия при аксиоматическом построении геометрии. В этом случае вместо аксиом равенства вводятся аксиомы движения. Равенство отрезков, углов и др. фигур определяется через понятие движения (фигуры называются равными, если одна переходит в другую при помощи некоторого движения).

Совокупность движений образует группу».

Как учителю подвести итог сказанному и перейти к изучению нового материала?

а) Выяснить, что из доклада осталось непонятным и ликвидировать эти пробелы.

б) Предоставить ученикам возможность обратиться с вопросами к докладчику.

в) Проиллюстрировать основные положения доклада примерами всех заявленных преобразований.

г) Организовать работу над усвоением материала доклада: выяснить, как учащиеся поняли определение движения.

д) Сразу перейти к объяснению нового материала (особенно, если определение движения несколько отличается от того, которое прозвучало в докладе).

е) Организовать работу с учебным текстом: составить конспект параграфа учебника.

**164.** Для изучение поворота (9 класс) учитель выбрал дедуктивный метод: изложил материал строго (в форме лекции):

«Поворот плоскости вокруг центра О на угол α.

Обозначение: $R_O^\alpha$ или $R^\alpha$.

Свойство поворотов: $R_O^{\alpha+360^\circ\cdot n} = R_O^\alpha$ ($n$ – целое).

Поворот является движением.

Композиция поворотов (свойства):

$R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^\alpha \circ R_O^\beta$,

$R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^{\alpha+\beta}$,

$R_O^{-\alpha} \circ R_O^\alpha = E$ (тождественное преобразование).

Координатные формулы поворота на угол α. Если $R_O^\alpha(P) = P_1$, $P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$, то при повороте вокруг точки $O(0, 0)$:

$x_1 = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$,

$y_1 = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$;

при повороте вокруг точки $O(x_0, y_0)$:

$x_1 = (x - x_0) \cdot \cos\alpha - (y - y_0) \cdot \sin\alpha$,

$y_1 = (x - x_0) \cdot \sin\alpha + (y - y_0) \cdot \cos\alpha$ ».

Достаточно ли теоретического материала лекции для решения задач, связанных с поворотом?

а) Нет: неясно, как построить образ точки при повороте.

б) Нет: неясно, как определить, обладает ли фигура «поворотной симметрией».

в) Нет: нужной (базовой) информации нет (как построить образ точки, как определить, обладает ли фигура «поворотной симметрией» и т.п.), зато много избыточной, дополнительной (свойства композиции поворотов, координатные формулы).

г) Да: предыдущих знаний и материала лекции вполне достаточно для решения учебных математических задач.

д) Да: предыдущих знаний и материала лекции вполне достаточно для решения учебных математических и практических задач.

е) Да: дана основная (базовая) информация, всё остальное можно при необходимости вывести из неё (сформулировав и решив соответствующие задачи).

ж) ____________________________________________________________

________________________________________________________________

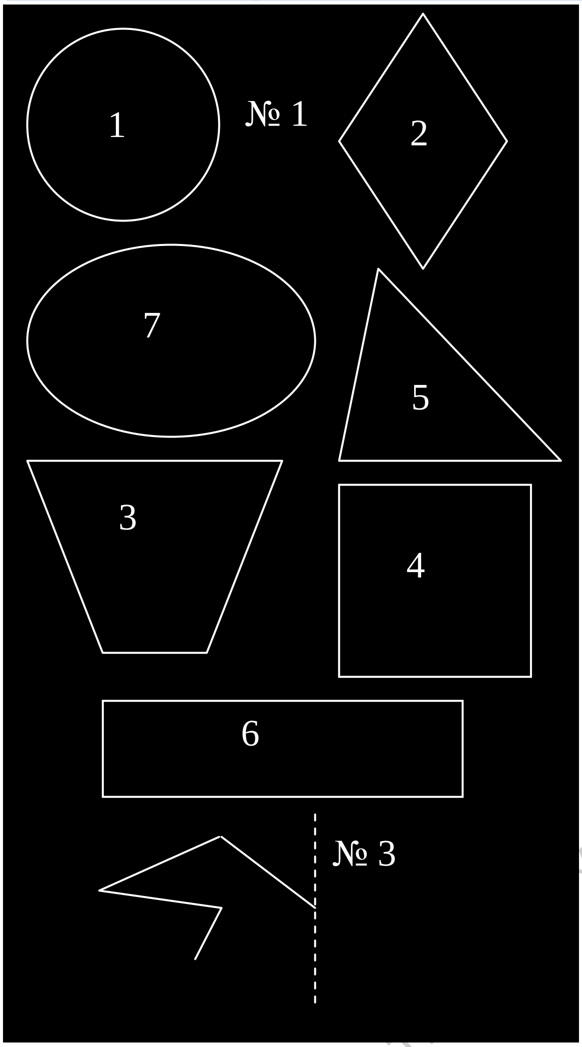
________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

**165.** Учитель разработал систему задач, позволяющих выявить суть некоторых видов движений.

Задачи, позволяющие выявить суть симметрии относительно прямой (осевая симметрия);




№ 1. На доске изображены фигуры. Найдите фигуры, у которых нет оси симметрии, только 1 ось симметрии, которые имеют 2, 3 и 4 оси симметрии. Есть ли фигура, у которой более 4 осей симметрии? Сколько осей симметрии можно провести в круге?

№ 2. Начертите все оси симметрии у каждой фигуры 2-6.

№ 3. Нарисуйте в тетрадях фигуру, которая имеет 2 оси симметрии; 4 оси симметрии. По шаблонам обведите в тетрадь фигуры (прямоугольник, квадрат, равнобедренный треугольник). Проведите оси симметрии.

№ 4. Дорисуйте рисунок, чтобы пунктирная линия стали его осью симметрии.

№ 5. Запишите все печатные цифры и буквы, которые имеют оси симметрии.

№ 6 (индивидуаьная практическая работа). Проведите все оси симметрии у декоративных элементов, украшающих праздничные и обыденные костюмы разных народов.




Достаточно ли упражнений для достижения поставленной цели?

а) Более чем достаточно: их число позволяет не только уяснить суть осевой симметрии, но и овладеть умением осуществлять построение симметричных фигур.

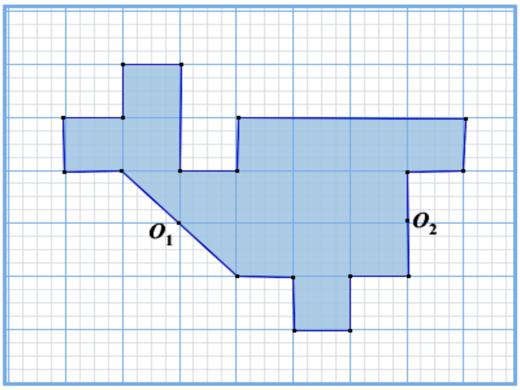
б) Достаточно.

в) Вполне достаточно для интуитивного понимания сути осевой симметрии: нет задач на построение образов точки, отрезка, луча, прямой при различных конфигурациях этих фигур и оси симметрии.

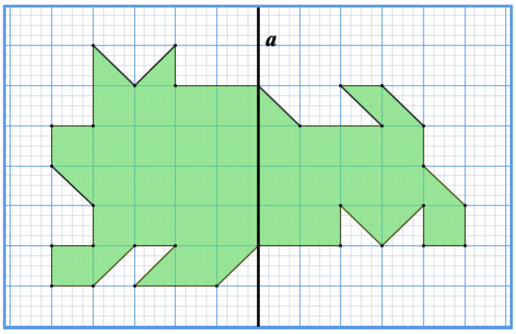
г) Недостаточно: нет упражнений на подведение под понятие, задания на поиск и устранение ошибок и т.п. В задании № 1 все фигуры выпуклые и замкнутые, что не позволит учащимся распространить имеющие знания на «объекты любой природы».

**166.** Учитель разработал систему заданий, позволяющих выявить суть некоторых видов движений.

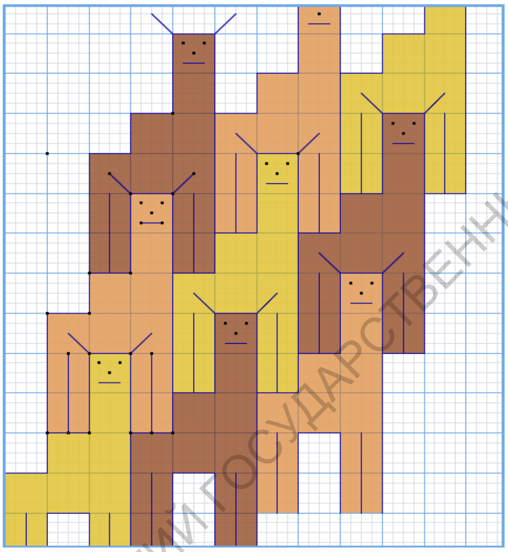
Задания, позволяющие выявить суть симметрии относительно точки (центральная симметрия) и параллельного переноса.




№ 1. Постройте фигуру $Ф_2$, симметричную данной $Ф_1$, I вариант – относительно точки $О_1$, II вариант – точки $О_2$. Заполните данной фигурой плоскость, закрашивая синим цветом фигуры $Ф_1$, другим цветом – фигуры $Ф_2$.




№ 2. Постройте фигуру, симметричную данной, относительно прямой *а*. Сместите полученную фигуру на 4 клетки вниз. Заполните предложенной фигурой плоскость, получив паркет. Определите схему паркета. Какие виды преобразований необходимо применить, чтобы получить этот паркет?



№ 3. С помощью какого геометрического преобразования получен паркет «Жирафы»? Что представляет собой элемент паркета? Чтобы получить этот паркет надо перенести фигурку на три клетки вправо и на одну клетку вверх, то есть этот перенос задается парой чисел (3;1). Есть ли другие переносы, позволяющие получить данный паркет? Задайте эти переносы парой чисел.

Достаточно ли упражнений для достижения поставленной цели?

а) Более чем достаточно: их число позволяет не только уяснить суть центральной симметрии и параллельного переноса, но и овладеть умением конструировать паркеты.

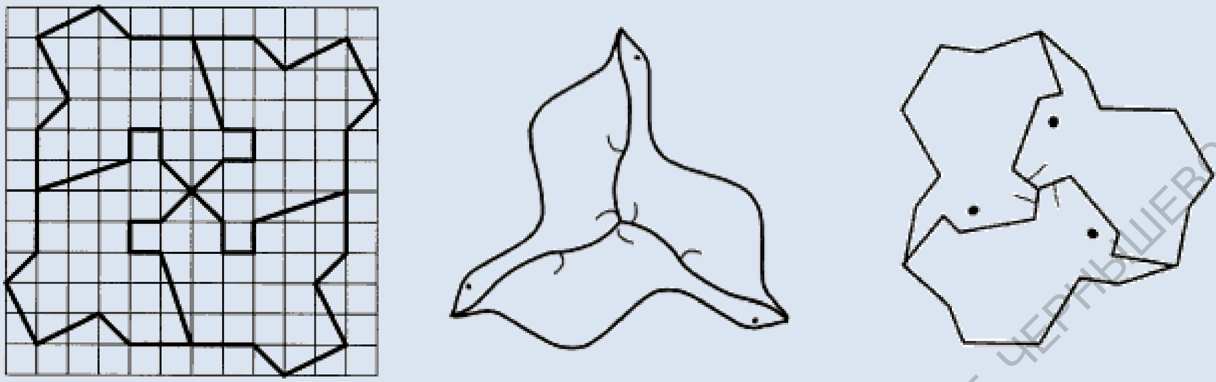
б) Достаточно.

в) Вполне достаточно для интуитивного понимания сути центральной симметрии и параллельного переноса: нет задач на построение образов точки, отрезка, луча, прямой при различных конфигурациях этих фигур и центра симметрии, вектора параллельного переноса.

г) Недостаточно: нет упражнений на подведение под понятие, задания на поиск и устранение ошибок и т.п. Центральная симметрия вообще рассмотрена «слабо». Задания имеют отдалённое отношение к изучаемому материалу, носят скорее развивающий, а не обучающмй характер и связаны, прежде всего, с изучением и проектированием паркетов (мозаики)

**167.** Учитель разработал систему заданий, позволяющих выявить суть некоторых видов движений.

Задания, позволяющие выявить суть поворота: укажите центры и углы поворотов, переводящих одну фигуру в другую. Заполните плоскость фигурами, получив паркеты.



Достаточно ли упражнений для достижения поставленной цели?

а) Более чем достаточно: их число позволяет не только уяснить суть центральной поаорота, но и овладеть умением конструировать паркеты.

б) Достаточно.

в) Вполне достаточно для интуитивного понимания сути поворота: нет задач на построение образов точки, отрезка, луча, прямой при различных конфигурациях этих фигур и центра и угла поворота.

г) Недостаточно: нет упражнений на подведение под понятие, задания на поиск и устранение ошибок и т.п. центральная симметрия вообще рассмотрена «слабо». Задания имеют отдалённое отношение к изучаемому материалу, носят скорее развивающий, а не обучающмй характер и связаны, прежде всего, с изучением и проектированием паркетов (мозаики).

д) Недостаточно: заданий и конфигураций вообще недостаточно для формирования чего-либо. Представленные конфигурации не удовлетвоярют принципу вариативности. Возможно только первичное знакомство с изучаемым преобразованием движения.

Предложите задание, выявляющее суть поворота.

**168.** В целях усвоения понятия «симметрия фигуры» учитель включает в урок практические работы по определению симметрий различных геометрических фигур. Пример такой практической работы приведён ниже.

Тема: Симметрия треугольника.

Цель: Изучить виды симметрий треугольника.

Оборудование: 3 шаблона треугольников: равносторонний (правильный), равнобедренный, общего вида; ножницы, чертёжные принадлежности.

Ход работы:

1. Найдите оси симметрии каждого из треугольников (перегибанием). Сколько осей симметрии у каждого из треугольников? Сделайте вывод.

2. Есть ли у каждого из 3-х треугольников центр симметрии? Сделайте вывод.

3. Обладает ли каждый из этих треугольников поворотной симметрией? Если обладает, то какого порядка является поворотная симметрия? Сделайте вывод.

4. Результаты исследования представьте в виде математического изложения по данной теме.

Приведите образец математического изложения достойный отметки «5».

**169.** Учитель проводит исследовательские работы по изучению свойств (наличие симметрий) различных геометрических фигур, начиная с простейших.

Тема 1: Симметрия отрезка, луча, прямой, угла.

Цель: выяснить, сколько осей симметрии имеет каждая из фигур.

Оборудование: Веревочные модели отрезка, прямой, луча; 3 бумажные модели углов (острый, прямой, тупой); изображения отрезка, прямой, параллельных прямых, луча на отдельных листах бумаги (на кальке или прозрачной плёнке).

Ход работы:

1. Сложите веревочную модель отрезка (луча, прямой) таким образом, чтобы точкой перегиба модель разделилась пополам. Сделайте вывод для каждой модели.

2. Сложите лист бумаги с изображением отрезка (прямой, параллельных прямых, луча) с той же целью, что и в задании 1. Подумайте, как еще можно сложить лист бумаги, чтобы отрезок (прямая, пара параллельных прямых, луч) совместился сам с собой?. Сделайте вывод.

3. Можно ли разделить угол  (перегибанием модели угла) так, чтобы эти две части совпали? Сколькими способами можно это сделать? Сделайте вывод.

Зависит ли количество осей симметрии угла от его вида?

Вывод: Сколько осей симметрии имеет отрезок, прямая, луч, угол? Как можно назвать по-другому ось симметрии угла?

Оцените содержание исследовательской работы, выделив её несомненные лостоинства и недостатки.

Дополните содеожание исследовательской работы несколькими заданиями.

**170.** После изучения темы «Многоугольники» (обучение ведется по учебнику «Геометрия 7-11» Погорелова А.В) учитель предложид ученикам исследовательскую работу на 20 минут по теме «Симметрия правильного шестиугольника».

Цель: Выяснить все виды симметрии правильного шестиугольника.

Оборудование: 3 заготовки правильного шестиугольника, ножницы.

Ход работы:

1. Обозначьте вершины шестиугольника соответственно A, B, C, Д, E, F.

2. а) Свернуть заготовку по АД. Сделать вывод.

   б) Свернуть заготовку по BE. Сделать вывод.

   в) Свернуть заготовку по CF. Сделать вывод.

3. Обозначить через точку O точку пересечения диагоналей АД, BE, CF.

4. Вырезать треугольник AOB.

5. Оставляя точку O неподвижной (можно воткнуть иголку), перемещайте ∆ AOB до совмещения с ∆ BOC, ∆ COД и т.д. Сделайте вывод.

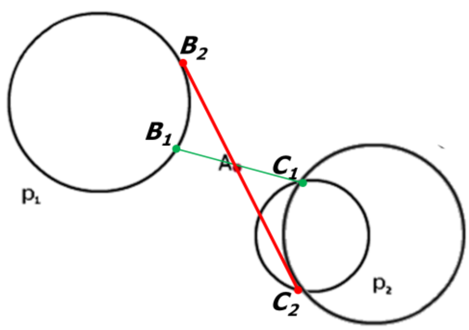
6. Вырезать из второй заготовки ромб ABCO. Оставляя точку O неподвижной, перемещайте ромб до совмещения с фигурами CДEO и EFAO. Сделайте вывод.

7. Проделайте аналогичную операцию с трапецией ABCД. Сделайте вывод.

8. Можно ли еще согнуть заготовку правильного шестиугольника каким-либо образом до полного совмещения (его половинок). Ответ обоснуйте и сделайте вывод.

9. Сделайте общий вывод относительно всех симметрий правильного шестиугольника.

Приведите образец результата исследования достойный отметки «5».




**171.** В ходе анализа задачи: «Даны точка $A$ и две окружности $p_1$ и $p_2$. Построить отрезок $BC$, концы которого лежат соответственно на окружностях $p_1$ и $p_2$, а серединой которого является точка $A$»; – учитель продемонстрировал чертёж. Какой уточняющий вопрос должен задать учитель ученикам, читающим чертёж?

а) Какое из данных условия или требований позволяет определиться с методом решения задачи? // А – середина ВС.

б) Что можно сказать о равных окружностях? // Они симметричны относительно точки А.

в) Как построить окружность симметричную данной относительно точки? // Сначала строится центр этой окружности – точка центрально симметричная центру данной окружности, затем из этого центра проводится окружность радиусом равным радиусу данной окружности.

г) Что можно сказать об отрезках $B_1C_1$ и $B_2C_2$? // Их концы лежат соответственно на окружностях $p_1$ и $p_2$, а серединами является точка $A$

д) Почему $B_1C_1$ и $B_2C_2$ удовлетворяют требованию задачи? // Потому что $B_1$ и $B_2$ лежат на окружности $p_1$, $C_1$ и $C_2$ – на окружности симметричной $p_1$ относительно А и на окружности $p_2$.

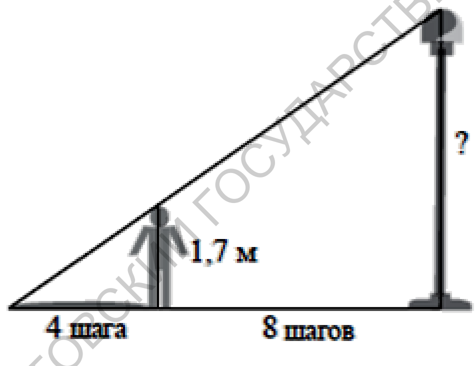
е) Опишите план построения требуемых отрезков (план решения задачи).

ж) Сколько решений имеет задача?

з) При каких условиях задача имеет одно решение?

и) При каких условиях задача имеет два различных решения?

к) При каких условиях задача не имеет решения?




**172.** Оцените по 5-балльной шкале решение учащимся 9 класса задачи: «Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Человек отбрасывает тень длиной 4 шага. На какой высоте расположен фонарь?».

Решение.

$1{,}7 \cdot (8 : 4) = 3{,}4$ (м)

Ответ. на высоте 3,4 м.

а) Ученик верно составил алгебраическую модель задачи, оценка «5».

б) Ученик не обосновал, но верно составил алгебраическую модель задачи, оценка «4».

в) Ученик формально манипулировал с числовыми данными, поэтому ошибся в вычислениях, но идея использовать свойства подобия была верна, оценка «3».

г) Задача решена неверно, оценка «2».

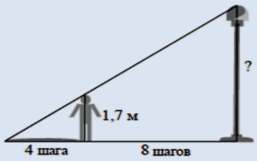
**173.** При изучении преобразования подобия учитель разработал и выдал учащимся памятку.

**Подобие с коэффициентом k**

Обозначение: $F^k$

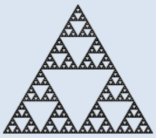
Определение: если $k>0$ и $X_1 = F^k(X)$ и $Y_1 = F^k(Y)$, то $X_1Y_1 = k\,XY$.

Композиция преобразования подобия: $F^{k_2} \circ F^{k_1} = F^{k_1 \cdot k_2}$.




**Гомотетия**

Гомотетией с центром $O$ и ненулевым коэффициентом $k$ называется такое преобразование фигуры, которое каждой ее точке $X$ сопоставляет такую точку $X_1$, что выполняется равенство: $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$.



**Подобное преобразование** фигуры $\Phi_1$ в фигуру $\Phi_2$ с коэффициентом $k$ можно представить как композицию гомотетии с коэффициентом $k$ и движения.

**Подобные фигуры**

Обозначение: $\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi_2$ (фигура $\Phi_1$ подобна фигуре $\Phi_2$ с коэффициентом $k$).

Свойства подобных фигур:

| рефлексивность | симметричность | соотношение площадей |
|---|---|---|
| $\Phi_1 \overset{1}{\sim} \Phi_2$ | $\left(\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi_2\right) \Leftrightarrow \left(\Phi_2 \overset{\frac{1}{k}}{\sim} \Phi_1\right)$ | $\left(\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi_2\right) \Leftrightarrow \left(S_1 : S_2 = k^2\right)$ |

Как эта памятка может быть использована в процессе изучения материала на базовом уровне?

а) Большая часть информации носит необязательный для изучения характер, поэтому памятка не может быть использована в процессе изучения материала на базовом уровне.

б) В качестве конспекта опорных сигналов.

в) В качестве справочного материала.

г) В качестве учебного текста.

д) Как основа для организации проектной деятельности.

е) Как основа для организации учебного исследования.

**174.** После того, как ученики справились с задачей: «Основания $BC$ и $AD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 и 24, $BD = 12$. Докажите, что треугольники $CBD$ и $ADB$ подобны»; – учитель попросил учащихся решить обратную задачу: дан треугольник $CBD$ такой, что $BC = 6$, $BD = 12$, $\angle B = \beta$, $\beta < 90°$, с помощью композиции каких геометрических преобразований из треугольника $CBD$ можно получить треугольник $ADB$ подобный данному с коэффициентом подобия равным 2 и расположенный на плоскости таким образом, что два треугольника $CBD$ и $ADB$ образуют трапецию с основаниями $BC$ и $AD$ и диагональю $BD$.

Предложите свой вариант решения обратной задачи.

## МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

**175.** Аналитическая геометрия как содержательно-методическая линия сформировалась совсем недавно в результате включения в итоговую аттестацию за курс алгебры основной школы раздела «Координаты и графики». Расширение требований к уровню подготовки по алгебре выпускников основной общей школы за счёт включения в текст итоговой аттестационной работы задач по аналитической геометрии потребовало от учителей целенаправленной работы по формированию соответствующего комплекса знаний, умений и навыков. Вырисовывается следующая последовательность изучения элементов аналитической геометрии в школьном курсе математики:

а) Точка – $(x,y)$ – ______

б) Прямая

$y=kx+b$ или $ax+by=c$ или $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ –________

$ax+by+c=0$, $a\cdot b\cdot c\neq 0$ –________

$ax+by+cz+d=0$, $a\cdot b\cdot c\cdot d\neq 0$ –_______

в) Парабола – $y=ax^2$, $a\neq 0$ – _________

г) Гипербола – $y=a/x$, где $a\neq 0$ –________

д) Окружность

$x^2+y^2=R^2$ (с центром в начале координат) –________

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (с центром в точке $(a,b)$) – ________

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ –________

е) Параллельные прямые – $\begin{cases} y=kx+b \\ y=kx+c \end{cases}$; –_______

ж) Перпендикулярные прямые – $\begin{cases} y=k_1x+b \\ y=k_2x+c \\ k_1\cdot k_2=-1 \end{cases}$; –_______

з) Точка пересечения прямых –_________

и) Точка касания прямой и окружности –_________

к) Точки пересечения прямой и окружности –________

л) Точки пересечения двух геометрических фигур, заданных аналитически –__________

м) Декартовы координаты на плоскости – ________

н) Векторы на плоскости – _________

о) Векторно-координатный метод решения геометрических задач – ______

п) Декартовы координаты в пространстве –_______

р) Векторы в пространстве –__________

Укажите школьный предмет и год обучения, например, М-5, А-7, Г-10 – математика 5 класс, алгебра 7 класс, геометрия 10 класс.

**176.** В 1963 году В. Г. Болтянский и И. М. Яглом написали новый учебник геометрии для IX классов, отличающийся методической последовательностью и продуманностью введения векторов в типично школьную тематику, а также оригинальной системой задач, в которых применялись векторы. Для полного представления о содержании математического образования школьников, отнесённого к разделу «Векторная алгебра», приведём систему задач к теме «Сумма векторов» главы 1 «Сложение и вычитание векторов»:

№ 168. Пусть *ABCD* – произвольный четырехугольник. Докажите, что $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{DC}$.

№ 169. Пусть *ABCDE* – произвольный пятиугольник. Выразите векторы $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CA}$, $\overline{DA}$ в виде сумм векторов, по величине и направлению совпадающих со сторонами пятиугольника.

№ 170. Докажите, что: а) если векторы $a$ и $b$ параллельны и одинаково направлены, то вектор $a + b$ также параллелен им, направлен в ту же сторону и имеет длину $a$ и $b$; б) если векторы $a$ и $b$ параллельны и противоположно направлены, причем, $a > b$, то вектор $a + b$ также параллелен $a$ и $b$, его направление совпадает с направлением вектора $a$, а длина равна $a – b$.

№ 171. Докажите, что для любых векторов $a$ и $b$ справедливы неравенства: $a – b \le | a+b | \le a + b$. В каком случае справедливы равенства: 1) $| a+b | = a + b$; 2) $| a+b | = a – b$?

№ 172. а) На числовой оси с нулевой отметкой в точке $O$ взяты точки $A$ и $B$, которым соответствуют числа $a$ и $b$. Точку, которой соответствует число $a + b$, обозначим через $C$. Докажите, что $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$. Рассмотрите случаи: 1) $a=2, b=3$; 2) $a=3, b=–2$; 3) $a=2, b=–6$; 4) $a=–2, b=5$; 5) $a=–1, b=–3$.

б) На числовой оси с нулевой отметкой в точке $O$ взяты точки $A$ и $B$, которым соответствуют числа $a$ и $b$. Отложим от точки $B$ вектор, равный $\overline{OA}$. В какой точке окончится полученный вектор?

№ 173. Может ли длина вектора $a + b$ быть меньше, чем длина каждого из векторов $a$ и $b$?

№ 174. Векторы $\overline{AB}=p$ и $\overline{AF}=q$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника *ABCDEF*. Выразите через $p$ и $q$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{ED}$, идущие по сторонам этого шестиугольника.

№ 175. Точки *A, B, C, D* – вершины прямоугольника, *O* – его центр. Какие векторы, начинающиеся и кончающиеся в точках *A, B, C, D, O*, равны между собой? Какие из них представляются в виде суммы двух других?

Решите эти задачи и выявите теоретические и операциональные знания, формируемые этой задачной конструкцией. ________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

Определите вид задачной конструкции ________________________________.

**177.** В течение 15 лет работы по этому учебнику и согласованному с ним учебнику по стереометрии под редакцией З. А. Скопеца «была еще раз проверена и подтверждена жизненность и важность понятия вектора для школьной геометрии, всем стала ясна польза векторного метода в школьном преподавании, важность межпредметных связей с курсом физики, научность, дельность и простота курса геометрии, достигаемая введением векторов» (Глейзер, Г. Д. К истории вопроса об изучении вектора / Г.Д. Глейзер, Г. И. Кеян // Математика в школе. 1986. № 5, с.57). С каким учебным пособием по геометрии связывают введение векторов в школьное математическое образование? Назовите автора.

а) Атанасян Л. С.

б) Болтянский, В. Г.

в) Колмогоров, А. Н.

г) Погорелов А. В.

д) Шарыгин И. Ф.

**178.** Тема «Векторы» в современных учебниках изучается в девятом классе, исключение составляет учебник «Геометрия», где тема «Векторы» изучается в 8 классе. Назовите автора учебника (первый в списке авторов).

а) Л. С. Атанасян

б) А. В. Берсенев

в) В. Ф. Бутузов

г) С. А. Козлова

д) А. Г. Мерзляк

е) А. В. Погорелов

ж) И. М. Смирнова

з) И. Ф. Шарыгин

**179.** Во всех / в некоторых (ненужное – вычеркнуть!) современных учебниках вектор определяется как

а) n-ка чисел проекций радиус-вектора на оси координат или коэффициентов его разложения по базисным векторам;

б) геометрическое число, которому свойственны размер и направление;

в) класс направленных отрезков одинаковой длины и направления (свободный вектор);

г) направленный отрезок (а затем вводятся его координаты и рассматривается векторно-координатный метод решения задач);

д) параллельный перенос;

е) упорядоченная пара точек, первая из которых есть начало вектора, вторая – его конец, например, $\overrightarrow{AB}: A(3; 4)$ – начало, $B(– 1; 8)$;

ж) элемент абстрактного (определяемого лишь его свойствами, сформулированными в аксиомах) векторного пространства.

**180.** В основной школе можно выделить четыре типа задач по теме «Векторы»:

а) учебные математические задачи векторной алгебры, сформулированные в терминах направленного отрезка,

б) учебные математические задачи векторной алгебры, сформулированные в координатах,

в) задача на «скалярное произведение векторов»,

г) задачи классической геометрии, решаемые векторным или векторно-координатным методом,

д) задачи на векторное доказательство алгебраических неравенств,

е) физические задачи, решаемые с использованием векторов.

**181.** Эффективность (сфера применимости) векторного метода:

а) выяснение принадлежности трёх точек одной прямой,

б) доказательство зависимостей между длинами отрезков,

в) доказательство параллельности прямых и отрезков,

г) доказательство перпендикулярности прямых и отрезков,

д) нахождение величины угла,

е) нахождение геометрических мест точек,

ж) обоснование зависимости между элементами фигур (между длинами, в частности),

з) обоснование утверждения о делении отрезка данной точкой в указанном отношении.

**182.** Эффективность (сфера применимости) координатного метода:

а) выяснение принадлежности трёх точек одной прямой,

б) доказательство зависимостей между длинами отрезков,

в) доказательство параллельности прямых и отрезков,

г) доказательство перпендикулярности прямых и отрезков,

д) нахождение величины угла,

е) нахождение геометрических мест точек,

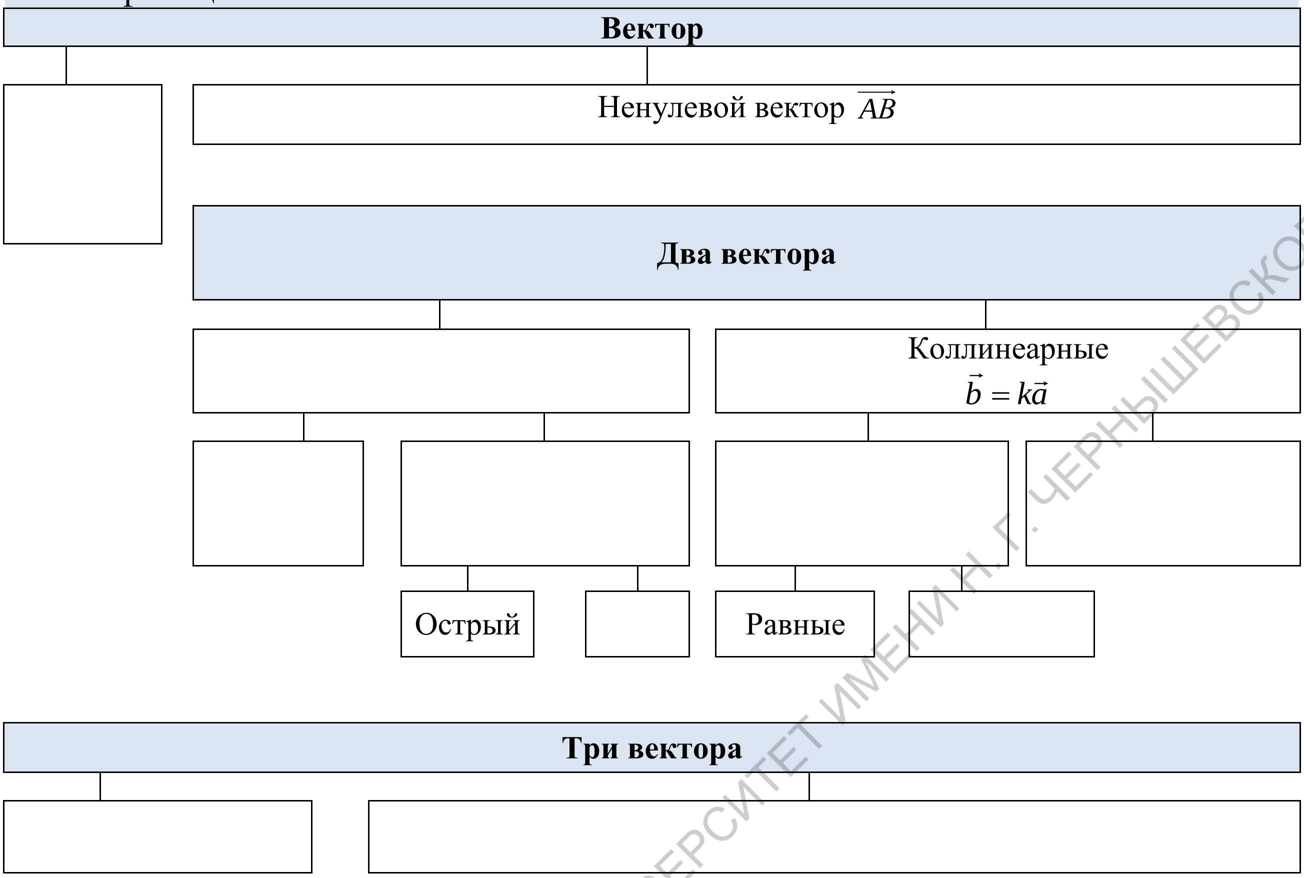
ж) обоснование зависимости между элементами фигур (между длинами, в частности),

з) обоснование утверждения о делении отрезка данной точкой в указанном отношении.

**183.** Формируя понятие о векторе учитель объясняет: «Вектором называется направленный отрезок. Направление вектора определяется указанием его начала и конца. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет началом точку $A_1(x_1; y_1)$, а концом – точку $A_2(x_2; y_2)$. Координатами вектора $\vec{a}$ будем называть числа ________________________________. Координаты вектора будем ставить рядом с буквенным обозначением вектора, в данном случае __________________________.

Заполните пропуски

**184.** Проведите классификацию векторов – заполните пустые блоки классификационной схемы.



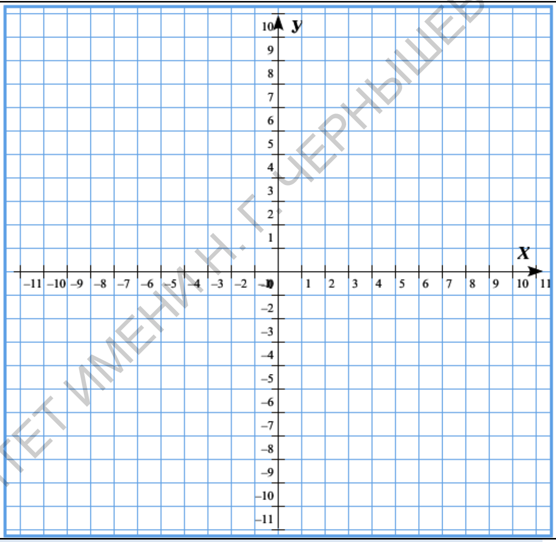

**185.** Учитель целенаправленно формирует умения, позволяющие применять векторный метод в различных ситуациях:

1. Строить адекватные информационные модели геометрических задач на векторном языке (осуществлять переход от соотношения между фигурами к соотношению между векторами и обратно).
2. Выполнять операции с векторами (находить сумму, разность векторов, произведение вектора на число).
3. Представлять вектор в виде суммы векторов, разности векторов.
4. Представлять вектор в виде произведения вектора на число.
5. Преобразовывать векторные равенства.
6. Переходить от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот.
7. Выражать длину вектора через его скалярный квадрат.
8. Выражать величину угла между векторами через их скалярное произведение.

Перечислите (в порядке возрастания) умения, которые формируются при изучении темы «Векторы. Действия над векторами»: ______________

Перечислите (в порядке возрастания) умения, которые формируются при изучении темы «Скалярное произведение векторов»: ______________

**186.** При закреплении материала темы «Координатная плоскость» с целью овладения учениками математической символикой, запоминания и воспроизведения алгоритма построения точки с заданными координатами, учитель проводит дидактическую игру «Соревнование художников» (продолжительность игры 10 минут). Ученику выдается карточка, где записаны координаты точек, нужно отметить на координатной плоскости каждую точку и соединить с предыдущей точкой отрезком.

<table>
<tr><td colspan="3">Задание. Изобразите фигуру на координатной плоскости, приняв за единичный отрезок один сантиметр. Чьё изображение вы получили?</td></tr>
<tr><td>Голова</td><td>(-4; 9), (-4; 5), (-3; 5), (-3; 9), (-2; 7), (-2; 5), (-1; 3), (-2; 2), (-5; 2), (-6; 3), (-5; 5), (-5; 7), (-4; 9).</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Мордочка</td><td>(-5; 3,5), (-4,5; 4), (-4; 3,5), (-5; 3,5);<br>(-3; 3,5), (-2,5; 4), (-2; 3,5), (-3; 3,5);<br>(-3,5; 3), (-3,5; 2,5);<br>(-4,5; 3), (-4; 2,5), (-3; 2,5), (-2,5; 3).</td></tr>
<tr><td>Туловище</td><td>(-4; 2), (-5; 1), (-7; 1), (-7; 0), (-5; 0), (-5; -2), (-7; -2), (-7; -3), (-5; -4), (-7; -4), (-7; -4,5), (-4; -4,5), (-4; -3), (-3; -3), (-3; -4,5), (0; -4,5), (0; -4), (-2; -4), (0; -3), (0; -2), (-2; -2), (-2; 0), (0; 0), (0; 1), (-2; 1), (-3; 2).</td></tr>
</table>

Эту игру можно провести

а) в форме «перевёртышей»: строить, например, зеркальное или перевёрнутое отображение некоторой наперёд заданной фигуры.

б) на парной сотруднической основе: в заданной системе координат, по очереди, один называет координаты точки, другой её строит, в итоге должен получиться некоторый наперёд заданный объект;

в) с обратным заданием: в заданной системе координат нарисовать любой рисунок, имеющий конфигурацию ломаной и записать координаты вершин;

г) с произвольной системой координат: на клетчатой бумаге нарисовать любой рисунок, имеющий конфигурацию ломаной, выбрать систему координат произвольным образом и записать координаты вершин;

В каком из перечисленных вариантов дидактическая задача остаётся прежней (овладение математической символикой, запоминание и воспроизведение алгоритма), а игровая задача меняется?

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

**187.** Переведите на язык векторов следующие предложения

| Язык [классической] геометрии | Язык векторов |
|---|---|
| $AB \parallel CD$ | $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD},\ k \neq 0$ |
| $AB \perp CD$ | $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ |
| Точка $C$ принадлежит прямой $AB$: $C \in AB$ | |
| | $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$, где $O$ – произвольная точка, $p + q = 1$ |
| $M$ – середина отрезка $AB$ | |
| | $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, где $O$ – произвольная точка |
| Точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $AC : CB = m : n$ | |
| | либо $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, где $O$ – произвольная точка |
| $M_1$ – середина отрезка $A_1B_1$ <br> $M_2$ – середина отрезка $A_2B_2$ | |
| $M$ – центроид [точка пересечения медиан] треугольника $ABC$ | |
| | $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где $O$ – произвольная точка |
| $ABCD$ – параллелограмм | |
| | $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$, где $M$ – произвольная точка, а $O$ – точка пересечения диагоналей параллелограмма |
| $AB \perp a$, $CD$ и $MK$ – пересекающиеся прямые плоскости $a$ | |
| $O$, $A$, $B$, $C$ – точки одной плоскости | |

**188.** Как в учебном процессе может быть использована таблица адекватности информационных моделей из предыдущего задания? Укажите наиболее эффективный вариант использования.

а) Как база заданий для создания тестов.

б) Как основа для дидактической игры «Математическое лото».

в) Как основа для листа самоконтроля.

г) Как основа для листов взаимоконтроля.

д) Как основа для организации учебного исследования (результаты которого позволят «продолжить» таблицу).

е) Как ряд опорных задач, являющихся ключом к решению более сложных задач векторным методом.

ж) Как своеобразный конспект опорных сигналов.

з) Как справочный материал при решении задач векторным методом.

и) Как средство для освоения векторного языка.

к) Как средство для развития математической речи.

л) Как стационарное средство наглядности (таблица в кабинете математики).

**189.** Переведите на язык координат следующие предложения

| Язык геометрии | Язык координат |
|---|---|
| Длина отрезка $AB$ | |
| Площадь треугольника $ABC$ | $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 \end{vmatrix}$, где $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ |
| Точка $M(x;y)$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda$, т. е. $\frac{AM}{MB}=\lambda$ | |
| Точка $M(x;y)$ – середина отрезка $AB$ | |
| Прямая $AB$ | |
| Прямая пересекает ось $Ox$ под углом $a\neq 90^0$ | $y=kx+b$, где $k$ – угловой коэффициент прямой, $b$ – ордината точки пересечения прямой осью $Oy$ $(k\neq 0)$ |
| Прямая проходит через точку $(x_1; y_1)$ | |
| Прямая $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны | |
| Прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны | |
| Прямая параллельна оси $Ox$ | |
| Прямая параллельна оси $Oy$ | |
| Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ | |
| Окружность с центром в начале координат и радиусом $R$ | |
| Окружность с центром в точке $M$ и радиусом $R$ | |

**190.** Какие из приведённых в таблице дидактических единиц изучаются на базовом уровне? Перечислите их.

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

**191.** Какие из приведённых в таблице дидактических единиц изучаются на углубленном уровне? Перечислите их.

______________________________________________

______________________________________________

**192.** Учитель вводит понятие суммы векторов (в координатах): «Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами $(a_1, a_2)$ и $(b_1, b_2)$, называется ______________ ________________________________________________________________________.

Для любых векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$, $\vec{c}(c_1; c_2)$ справедливы равенства: ________________________________________________________ ».

Заполните пропуски.

**193.** Учитель вводит понятие умножения вектора на число (в координатах): «Произведением вектора $\overline{(a_1; a_2)}$ на число $\lambda$ называется ______________ ________________________________________________________________________. По определению ___________________________. Умножение вектора на число подчиняется трём законам:

________________________________________________________________________;

________________________________________________________________________;

________________________________________________________________________;

кроме того $1\vec{a} = \vec{a}$ для всех $\vec{a}$ ».

Заполните пропуски.

**194.** Формализуйте доказательство теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам:

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ .– отличные от нуля коллинеарные векторы. Докажем, что существует число $\lambda$ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ . Допустим, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены. Векторы $\vec{b}$ и $\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right)\vec{a}$ одинаково направлены и имеют одну и ту же абсолютную величину $|\vec{b}|$. Значит, они равны: $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} = \lambda\vec{a}$, $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. В случае противоположно направленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ аналогично заключаем, что $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} = \lambda\vec{a}$, $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, ч. т. д.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ .– отличные от нуля неколлинеарные векторы. Докажем, что любой вектор $\vec{c}$ можно представить в виде $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ . Пусть $A$ и $B$ – начало и конец вектора $\vec{c}$ . Проведем через точки $A$ и $B$ прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ . Они пересекутся в некоторой точке $C$ . Имеем: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Так как векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{AC} = \lambda\vec{a}$. Так как векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{CB} = \mu\vec{b}$ . Таким образом, $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ , ч. т. д.

| ШАГ | УТВЕРЖДЕНИЕ | ОБОСНОВАНИЕ |
|---|---|---|
| 1 | | Дано |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

**195.** Учитель, обучая координатному методу, поставил цель сформировать умения:

1. Строить адекватные информационные модели геометрических задач на языке координат.
2. Отмечать в системе координат точку по заданным координатам.
3. Находить координаты заданных точек.
4. Вычислять расстояния между точками, заданными координатами.
5. Оптимально выбирать систему координат.
6. Составлять уравнения заданных фигур.
7. Видеть за уравнением конкретный геометрический образ.
8. Выполнять преобразования алгебраических выражений.

Какие умения (указать номера) учитель может начать формировать уже на уроках математики в 5-6 классах? ______

Какое из умений формируется в рамках линии тождественных преобразований? ______

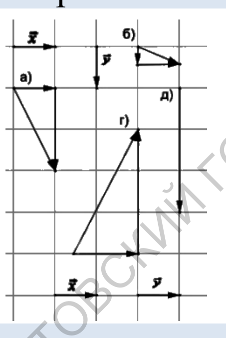
Какое умение формируется преимущественно на уроках геометрии? ____

**196.** Восстановите фрагмент лекции по теме «Скалярное произведение векторов»: «Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1;a_2)$ и $\vec{b}(b_1;b_2)$ называется ________________ Для скалярного произведения векторов такая же запись, как и для __________________. Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ обозначается______и называется __________________. Очевидно, $\vec{a}^2 =$ _____ . Скалярное произведение векторов равно ________________________________ ____________________________. Отсюда следует полезное свойство: если вычисляя скалярное произведение в координатах мы получаем _____________

___________________________________________________________________

___________________________________________________________________

**197.** Учебные задачи векторной алгебры, сформулированные в терминах направленного отрезка составляют, как правило, содержание практикумов (практических работ) и тренировочных работ. Ученик, выполняя задание: «Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и постройте векторы:




а) $\vec{x}+2\vec{y}$; б) $\frac{1}{2}\vec{y}+\vec{x}$; в) $3\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$;

г) $1\frac{1}{2}\vec{x}-3\vec{y}$; д) $0\vec{x}+4\vec{y}$; е) $-2\vec{x}+0\vec{y}$»; –

представил на проверку работу (см. рисунок).

Оцените эту работу и, при необходимости, дайте советы (указания) по выполнению аналогичных заданий.

___________________________________________________________________

___________________________________________________________________

___________________________________________________________________

___________________________________________________________________

___________________________________________________________________

**198.** Оцените самостоятельную работу ученика.

<u>Задача</u>. Пусть $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n},\ \vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$ . Выразите через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы: а) $2\vec{x}-2\vec{y}$; б) $2\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; в) $-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

<u>Решение.</u>

а) $2\vec{x}-2\vec{y}=2(\vec{x}-\vec{y})=2((\vec{m}+\vec{n})-(\vec{m}-\vec{n}))=2(2\vec{n})=4\vec{n}$

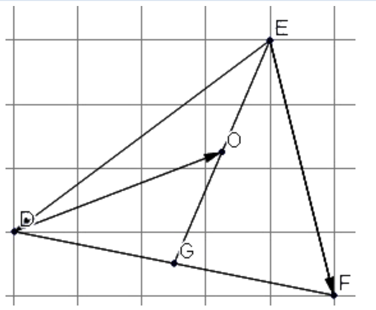
б) $2\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}=2(\vec{m}+\vec{n})+\frac{1}{2}(\vec{m}-\vec{n})=2\vec{m}+2\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}=\frac{3}{2}\vec{m}+\frac{5}{2}\vec{n}$

в) $-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}=-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}=-(\vec{m}+\vec{n})-\frac{1}{3}(\vec{m}+\vec{n})=-\vec{m}-\vec{n}-\frac{1}{3}\vec{m}-\frac{1}{3}\vec{n}=-\frac{4}{3}\vec{m}-\frac{4}{3}\vec{n}$

Оценка _____. Обоснование: ________________________________________

________________________________________________________________

**199.** Оцените, насколько целесообразен образец ответа, данный учителем и выполните его задание. «Пусть известно, что точка $O$ – середина медианы $EG$ треугольника $DEF$; и нам нужно выразить вектор $\overrightarrow{DO}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{ED}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{EF}$.




Построим геометрическую (векторную) модель задачи и проанализируем её.

С учётом того, что $O$ – середина медианы $EG$, а значит делит медиану пополам, имеем: $\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{OG}$.

С учётом того, что $EG$ – медиана к стороне $DF$, а значит $G$ делит $DF$ пополам, имеем: $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{GF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$.

$$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DG}\right)-\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}\right)-\overrightarrow{ED}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}\right)\right)-\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\right)-\vec{a}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1\right)\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}.$$

Итак, $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}$.

А теперь, если нет вопросов, выразите вектор $\overrightarrow{OF}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{ED}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{EO}$».

**200.** Восстановите чертёж к задаче и решите задачу.

Задача. Пусть $O$ – точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. Найти сумму: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

Решение. Пусть $E$, $F$, $G$, $H$ – середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ и отрезки $EG$ и $FH$ пересекаются в точке $O$.

**201.** Дайте образец ответа задачи на доказательство: «Точка $C$ – середина отрезка $AB$, $O$ – произвольная точка плоскости. Доказать, что $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$».

**202.** Общая схема решения учебных задач векторной алгебры, сформулированных в терминах направленного отрезка, состоит из пяти этапов. Восстановите эту схему. Ответ запишите числовым кодом.

1. Анализ данных задачи, привязка искомых величин к элементам чертежа или запись векторных равенств – следствий из данных условия.
2. Выделение необходимых теоретических и операциональных знаний – теоретического и практического базиса задачи.
3. Выполнение действий с координатами.
4. Выполнение чертежа к задаче с буквенными обозначениями.
5. Запись всех условий и следствий в координатной форме.
6. Интерпретация (при необходимости) полученного результата.
7. Реализация плана решения.
8. Составление плана решения.

Ответ: ________________________

**203.** Оцените решение учеником задачи

*Дано*: $A(1;1)$, $B(-1;0)$, $C(0;1)$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

*Найти*: $D(x;y)$.

*Решение.*

$\overrightarrow{AB}(-1-1;\ 0-1)=\overrightarrow{AB}(-2;-1)$.

$\overrightarrow{CD}(x-0;\ y-1)=\overrightarrow{CD}(x;\ y-1)$.

$x-0=-2,\quad y-1=-1$

$D:\quad x=-2,\quad y=0$.

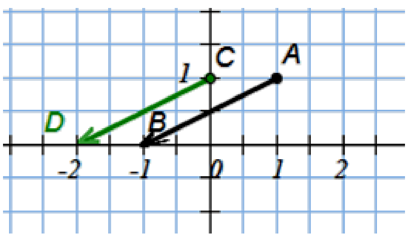
*Ответ*. $D(-2;0)$.

Оценка: _________________. Обоснование: ______________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**204.** Оцените решение ученикoм задачи.




*Дано*: $A(1;1)$, $B(-1;0)$, $C(0;1)$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

*Найти*: $D(x;y)$.

*Ответ*. $D(-2;0)$.

Оценка: _________________.

Обоснование: ______________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**205.** Оцените решение учеником задачи: «Даны точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ противоположно направлены».

*Дано*: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$

*Доказать*: $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{BA}$

*Доказательство.*

*Найдём координаты векторов*: $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ *и* $\overrightarrow{BA}(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$.

$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ y_2-y_1)=\overrightarrow{AB}(-(x_1-x_2);\ -(y_1-y_2))=-1\cdot\overrightarrow{BA}$.

*Итак*, $\overrightarrow{AB}=(-1)\overrightarrow{BA}$, *значит векторы* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{BA}$ *противоположно направлены.*

Оценка: ___________________.

Обоснование: ________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**206.** Общая схема решения учебных задач векторной алгебры, сформулированных в координатах, состоит из трёх этапов. Восстановите эту схему. Ответ запишите числовым кодом.

1. Анализ данных задачи, привязка искомых величин к элементам чертежа или запись векторных равенств – следствий из данных условия.
2. Выделение необходимых теоретических и операциональных знаний – теоретического и практического базиса задачи.
3. Выполнение действий с координатами.
4. Выполнение чертежа к задаче с буквенными обозначениями.
5. Запись всех условий и следствий в координатной форме.
6. Интерпретация (при необходимости) полученного результата.
7. Реализация плана решения.
8. Составление плана решения.

Ответ: ___________________________

**207.** Выберите задачи классической геометрии, решаемые векторным или векторно-координатным методом:

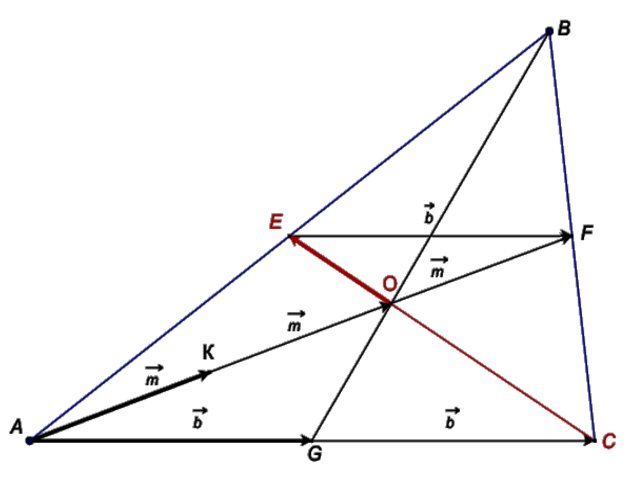
а) выяснение принадлежности трех точек одной прямой,
б) доказательство зависимости между длинами отрезков,
в) доказательство параллельности прямых и отрезков,
г) доказательство перпендикулярности прямых и отрезков,
д) нахождение величины угла,
е) обоснование утверждения о делении отрезка данной точкой в указанном отношении;
ж) построение треугольника по трём его элементам
з) решение треугольников

**208.** Ученик у доски доказывает обратную теорему Пифагора: треугольник $ABC$ является прямоугольным с прямым углом $A$, если $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Оцените его ответ.

| Объяснение ученика | Запись на доске |
|---|---|
| Дано | *Дано*<br>$\Delta ABC\!:\ BC^2 = AB^2 + AC^2$ |
| Нужно доказать, что угол А – прямой. | $\angle A$ – прямой |
| Доказательство. Как известно | $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ |
| поэтому | $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ |
| Отсюда получаем | $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2$ |
| | $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ |
| Из условия задачи следует | $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0$ |
| Подставляем в равенство и получаем | $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ |
| Произведение векторов равно нулю, значит | $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ |
| то есть | $\angle A$ – прямой |

Оценка: ___. Обоснование: ________________________________________

**209.** Учитель доказывает теорему: медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.




Рассмотрим разбиение медианы *AF* точкой *O* в отношении *FO* : *OF* = *1* : *2* (строится чертёж).

Введём обозначения (на чертеже), выберем два неколлинеарных вектора $\vec{m}$ ($\vec{m}=\overrightarrow{OF}$) и $\vec{b}$ ($\vec{b}=\overrightarrow{EF}$, где *EF* – средняя линия треугольника), и представим векторы $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{CE}$ суммой этих неколлинеарных векторов (что возможно единственным образом).

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OE}}=\vec{\boldsymbol{m}}-\vec{\boldsymbol{b}} \qquad (1).$$

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CF}-\vec{b}=\ldots \qquad (2)$$

(FE – средняя линия треугольника, поэтому она параллельна его основанию и равна половине основания. Следовательно, $\overrightarrow{FE}=-\vec{b}$ ).

$$\ldots=-2\vec{b}+3\vec{m}-\vec{b}=3\left(\vec{m}-\vec{b}\right). \qquad (2)$$

Итак, $\overrightarrow{\boldsymbol{CE}}=3\left(\vec{\boldsymbol{m}}-\vec{\boldsymbol{b}}\right)$. (3)

Следовательно, $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{OE}$, (4)

что означает: точка *O* лежит на отрезке *CE* и делит его в отношении 2 к 1, считая от вершины *C*, то есть

*EO* + *OC* = *EC* и *EO* : *OC* = *1* : *2*. (5)

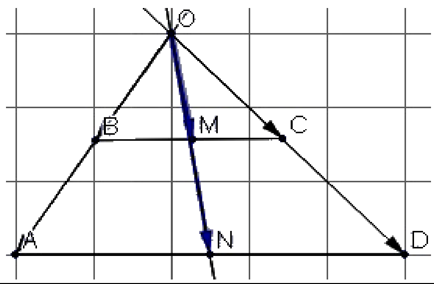
Аналогично доказывается для *BG*.

На доске остаются чертёж и формулы (1)-(5). Оцените оформление доказательства как образца ответа.

**210.** Формализуйте доказательство теоремы из предыдущего задания.

| ШАГ | УТВЕРЖДЕНИЕ | ОБОСНОВАНИЕ |
|---|---|---|
| 1 | | Дано |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| | | |

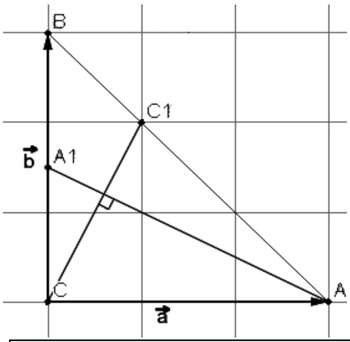
**211.** Учитель при решении задач целенаправленно формирует математическую речь учащихся, для чего использует приём «шифровка – дешифровка»: учащимся предлагается, используя чертёж и объяснения учителя, записать решение задачи на языке формул. Например, при решении задачи: «Доказать, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон»; – строится чертёж, учитель произносит математические предложения, а ученики записывают их в тетради, используя математический язык.




| Объяснение учителя | Записи учеников в тетрадях |
|---|---|
| Докажем, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон | |
| Пусть $ABCD$ – данная трапеция, $M$ и $N$ – середины оснований $BC$ и $AD$, а $O$ – точка пересечения прямых $AB$ и $CD$ | $ABCD$: $BC \parallel AD$, $AB \cap CD = O$, $M \in BC$, $BM = MC$; $N \in AD$, $AN = ND$ |
| Докажем, что точка $O$ лежит на прямой $MN$. На векторном языке это значит … | |
| Треугольники $OAD$ и $OBC$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому | |
| Так как векторы ОВ и ОА сонаправлены и векторы ОС и OD сонаправлены, то… Обозначим эти равенства (1) | |
| Точка $M$ – середина отрезка $BC$, поэтому… Обозначим это равенство (2) | |
| Точка $N$ – середина отрезка $AD$, поэтому… Обозначим это равенство (3) | |
| Подставив в равенство (3) равенства (1) получим … | |
| После преобразования этого равенства получим … | |
| Подставив сюда равенство (2) получим … | |

Заполните таблицу.

**212.** Учитель при решении задач целенаправленно формирует математическую речь учащихся, для чего использует приём «шифровка – дешифровка»: учащимся предлагается, используя чертёж и язык формул, записать решение задачи на естественном языке. Например, при решении




задачи: «Дан равнобедренный прямоугольный треугольник $ABC$ ($\angle C = 90^0$). Построен отрезок $CC_1$ ($C_1 \in AB$), перпендикулярный медиане $AA_1$. Найдите отношение $BC_1 : C_1A$ »; – строится чертёж, учитель записывает математический текст решения, а ученики, используя этот текст, рассказывают о способе решения.

| Решение | Объяснение |
|---|---|
| Найдите отношение $BC_1 : C_1A$ в равнобедренном прямоугольном треугольнике $ABC$, в котором $\angle C = 90°, CC_1 \perp AA_1, C_1 \in AB,$ $AA_1$ – медиана. | |
| $\Delta ABC$: $\angle C = 90°$,<br>$A_1 \in BC$, $BA_1 = A_1C$;<br>$CC_1 \perp AA_1, C_1 \in AB.$ | В равнобедренном треугольнике проведена медиана $AA_1$ к стороне ВС. Из вершины С к медиане $AA_1$ проведен перпендикуляр, продолжение которого – точка $C_1$ – лежит на стороне АВ |
| $BC_1 : C_1A = ?$ | |
| $\overrightarrow{CA} = \vec{a},\ \overrightarrow{CB} = \vec{b}$<br>$a = b$ (1) | |
| $\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{\vec{b}}{2} - \vec{a}$ (2) | |
| $\overrightarrow{BC_1} : \overrightarrow{C_1A} = k \Rightarrow \overrightarrow{CC_1} = \dfrac{1}{k+1}\vec{b} + \dfrac{k}{k+1}\vec{a}$ (3) | |
| $\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0$ (4)<br>$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (5) | |
| $\left(\dfrac{1}{k+1}\vec{b} + \dfrac{k}{k+1}\vec{a}\right) \cdot \left(\dfrac{\vec{b}}{2} - \vec{a}\right) = 0$ | |
| $\dfrac{1}{k+1} \cdot \vec{b} \cdot \dfrac{\vec{b}}{2} + \dfrac{k}{k+1} \cdot \vec{a} \cdot \dfrac{\vec{b}}{2} - \dfrac{1}{k+1} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a} - \dfrac{k}{k+1} \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ | |
| $\dfrac{1}{2(k+1)} b^2 - \dfrac{k}{k+1} a^2 = 0$ | |
| $\dfrac{1}{2(k+1)} = \dfrac{k}{k+1}$ | |
| $k = \dfrac{1}{2}$ | |

Заполните таблицу.

**213.** Составьте общую схему решения задач классической геометрии векторно-координатным методом

1) ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

2) ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

3) ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

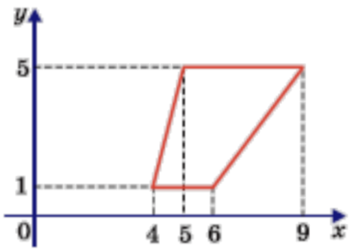
4) ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

5) ______________________________________________

______________________________________________




**214.** Обучая решению задач на вычисление площадей по данным рисунка, представляющим собой изображение фигуры на координатной плоскости, учитель организовал практическую работу, состоящую из пяти задач. Условие второй задачи представлено рисунком, требуется найти площадь трапеции. Какими должны быть первая, третья, четвёртая и пятая задачи этой работы, согласно принципу вариативности?

*1 задача*

*3 задача*

*4 задача*

*5 задача*

Дайте образец решения пятой задачи.

**215.** Задача: «Доказать, что угол $\theta$ между противолежащими ребрами $a$, $a'$ тетраэдра вычисляется по формуле $cos\,\theta = \dfrac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}$, где $b$ и $b'$, $c$ и $c'$ – длины двух других пар противоположных ребер»; – включена в зачётную карточку по теме «Векторы и координаты в пространстве». Какие теоретические, операциональные и практические знания может проверить учитель с помощью этой задачи? Приведите решение задачи с указанием его базиса.

**216.** Задача: «Даны треугольник $ABC$ и точка $O$ пространства. Доказать, что точка $O$ является центром тяжести треугольника $ABC$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ »; – включена в зачётную карточку по теме «Векторы и координаты в пространстве». Какие теоретические, операциональные и практические знания может проверить учитель с помощью этой задачи? Приведите решение задачи с указанием его базиса.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1. Возможные методические подходы к построению школьного курса геометрии

Извлечения из одноимённого раздела пособия *Методика изучения математики в основной школе [Электронный ресурс]: курс лекций для организации самостоятельной работы студентов по вопросам частных методик/ ГЛ. Васильева [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2011. – 96 с. – Режим доступа: [http://www.iprbookshop.ru/32214](http://www.iprbookshop.ru/32214). – ЭБС «IPRbooks», по паролю. – С. 58-61.*

<…> Одним из основных методов построения школьного курса геометрии является аксиоматический метод. идея аксиоматического построения геометрии была предложена <…> и реализована Евклидом. Она состоит в том, что если мы не можем определить, что представляет собой исследуемый объект, то следует определить его свойства. Выделить существенное и абстрагироваться от несущественного (вместо того, чтобы говорить о том, что такое точка, прямая, плоскость, можно говорить о свойствах, которыми они обладают). Аксиомы позволяют лучше понять основания геометрии. Наличие аксиом (определённых правил) должно подкрепляться соответствующими интуитивными представлениями. Отсутствие сформулированных в том или ином учебнике аксиом на самом деле означает, что аксиомы просто не выделены. Всё равно какие-то свойства приходится принимать без доказательства.

Одной из проблем школьного курса геометрии является выбор такой аксиоматики, которая была бы пригодна для первоначального изучения геометрии.

Проблема в том, что содержание школьного курса геометрии должно соответствовать уровню развития современной геометрии и одновременно бвть доступно для усвоения учащимися. Где есть проблема, там есть варианты её решения, там есть развитие методики.

Итак, основные идеи и периоды развития методики преподавания геометрии в школе.

1. Конец XIX – начало XX века. Все преподавание должно быть основано на решении задач, а не на объяснении теории учителем или изучении текста учебника. Учащиеся являются не только *свидетелями* математических открытий, но и *активными участниками* самого процесса открытия. Теория появляется в процессе решения задач. Эти идеи реализованы в учебниках математики того периода (напр., С.И. Шохор-Троцкий «Геометрия на задачах»), в современных учебниках часть теоретических знаний тоже вводится в процессе решения задач. Такой индуктивный метод изучения используется и сейчас в проблемном изложении.

Н.А. Извольский (в то же время) подчёркивал роль логической структуры курса геометрии для сознательного усвоения. Логика в курсе геометрии, по мнению Н.А. Извольского, должна проявляться двояко: (1) в плане построения курса и (2) в силлогизмах, служащих для доказательства теорем. Наибольшее значение имеет первое проявление логики. Однако невозможно построить полностью строго логический школьный курс геометрии.

2. Период использования в школе учебников А.П. Киселёва, в которых курс геометрии строился на неполной системе аксиом (1-е издание – в 1893 г., последующие – вплоть до начала 60-х годов XX века). Теоретической основой учебника А.П. Киселёва были «Начала» Евклида, которые сочетали в себе наглядность и убедительность. Сложные в теоретическом плане вопросы обоснования взаимного расположения фигур («лежать между») решались на основе наглядности; существование фигур – на основе построения, равенство фигур – на основе интуитивного понятия совмещения (как совмещения физических объектов). Основные теоретические знания при доказательстве теорем и решении задач – признаки равенства и подобия треугольников. В процессе дедуктивных рассуждений приходилось прибегать к интуитивным представлениям, так как система аксиом была неполной, школьный курс геометрии строился частично на интуитивной основе и на основе наглядных представлений. Учебник А.П. Киселёва отличался единством формы и содержания, согласованностью содержания и методического изложения. Теория и применяемые в ней методы органически сочетались с набором задач, которые рождались вместе с теорией и вместе с ней развивались. Одни и те же методы доказательства теорем и решения задач обеспечивали дидактическое единство курса. Чем лучше усваивались доказательства, тем успешнее решались задачи и наоборот: решение задач способствовало доказательству теорем. <…>

3. Период внедрения в школьный курс геометрии новых разделов (60-е годы XX века): элементов теории множеств, геометрических преобразований, векторной алгебры и т.д. (В.Г. Болтянский, А.И. Фетисов, И.М. Яглом и др).

4. «Колмогоровский период» (1965-1980[2]гг.) характеризуется осмыслением всей структуры школьной математики в целом и геометрии в частности:

1) А.Н. Колмогоров прежде всего хотел «навести порядок» с *единым* математическим языком и системой обозначений в геометрии. С этой целью был предложен теоретико-множественный подход к изложению курса (язык + символика: множество, элемент множества, пересечение, объединение множеств; геометрическая фигура – множество точек; обозначения – отрезок [AB][3], длина отрезка |AB|).

2) Общее единство курсу математики придавал функциональный подход. Всё изложение – на основе геометрических преобразований (Преобразование как отображение плоскости на себя, преобразование множества точек плоскости).



---

[2] Точнее, 1965-1982 гг.

[3] А также, прямая (AB), луч [AB).

Курс геометрии строился на основе аксиоматики, состоящей из 12 аксиом[4], однако не являлся строго аксиоматическим, потому что полный список аксиом появлялся лишь в конце планиметрии.

Курс планиметрии и идейно подчинённый ему курс стереометрии З.А. Скопеца нельзя рассматривать в отрыве от общей концепции А.Н. Колмогорова о построении школьного курса математики в целом. АО многом Колмогорову удалось упростить геометрические доказательства, но в его учебнике теоретико-множественный подход затмил геометрическое содержание. Значительное время уходило на его усвоение и незначительное – на решение содержательных геометрических задач.

<…> геометрия А.Н. Колмогорова оказалась трудной для учащихся, перегруженной теорией, которая усваивалась далеко не всеми учениками.

5. Период современных учебников для массовой школы (Л.С. Атанасян и др; А.В. Погорелов; И.Ф. Шарыгин; А.Д. Александров и др.). появление этих учебников было связано с желанием авторов вернуться к более традиционному (чем у А.Н. Колмогорова) подходу к изучению школьного курса геометрии (80-е годы XX века и далее):

а) геометрия А.В. Погорелова выстроена строго дедуктивно. Все аксиомы объявлены с самого начала как известные свойства геометрических фигур. Раскыто, что такое «доказательство» (рассуждение, цель которого – установить истину на основе аксиом, определений, теорем <…>); главное – научить учащихся рассуждать, анализировать, доказывать, то есть геометрия рассматривается как средство развития мышления учащихся;

б) в геометрии Л.С. Атанасяна аксиомы вводятся постепенно и формулируются не все, необходимые для построения планиметрии, хотя некоторые и используются при изложении курса. В приложении к курсу приводятся все аксиомы. Значительно усилена практическая направленность курса (развитие умений и навыков плюс доступность изложения).

<…>

6. В течение последних десяти[5] лет возникли новые проблемы: определить уровни и профили обучения, понять соотношение влияния математических знаний на развитие личности человека и мн. Др. Это привело к появлению достаточно большого количества новых *авторских проектов* (А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот; В.А. Гусев, В.А. Смирнов, И.М. Смирнова и др).

<…>



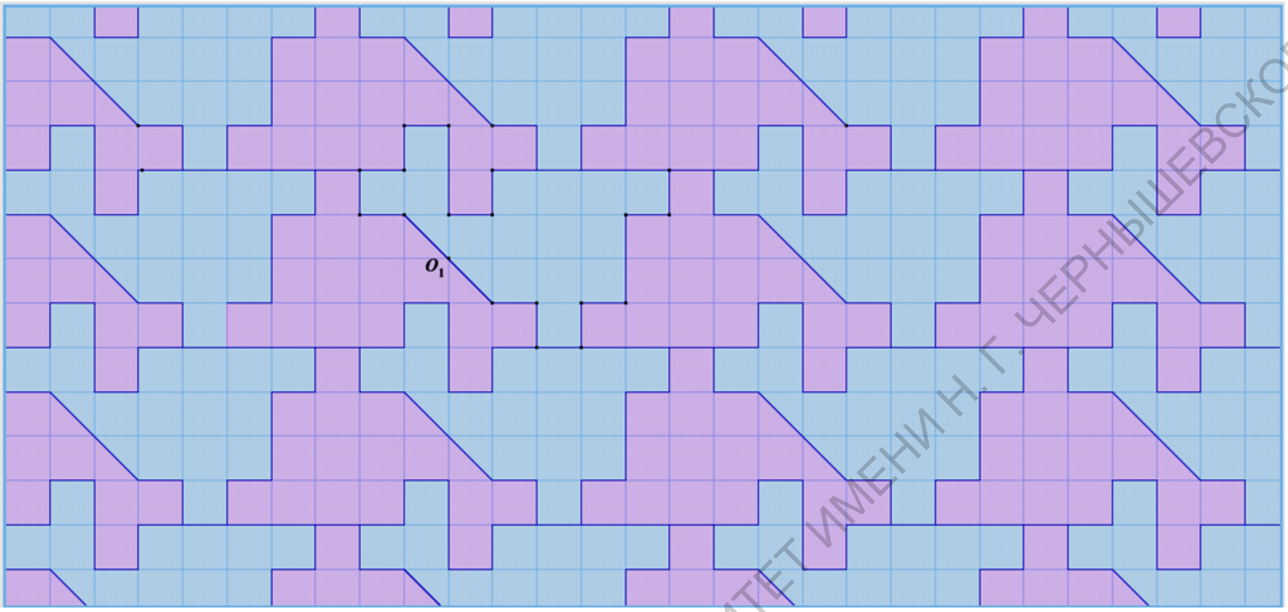
---

[4] Точнее, курс планиметрии. Двенадцать аксиом этой системы разделены на пять групп: три аксиомы принадлежности, три аксиомы расстояния, четыре аксиомы порядка, аксиома подвижности и аксиома параллельных (Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия. Учебное пособие для 6-8 классов средней школы. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1979).

[5] Этап стандартизации образования, с 2004 года (первое поколение образовательных стандартов общего образования)

## Приложение 2. Паркет

Результат выполнения задания 1 практической работы «Центральная симметрия и параллельный перенос» (вариант 1) в программе «1С: Математический конструктор».



## Приложение 3. Понятие о конструктивной геометрии

Раздел геометрии, в котором изучаются геометрические построения, называют *конструктивной геометрией*. Основным понятием конструктивной геометрии является понятие *построить геометрическую фигуру*. Конкретный его смысл известен из практики, где оно означает то же, что «начертить» (линию), «отметить» (точку) и т.п. Основные требования (постулаты) конструктивной геометрии выражают в абстрактной форме наиболее существенные моменты чертёжной практики. Они являются аксиомами, принимаются без доказательства и служат в дальнейшем логической основой геометрии.

Если о какой-либо фигуре сказано, что она дана, то при этом подразумевается, что она уже изображена, начерчена, т.е. построена. Таким образом, основные требования конструктивной геометрии состоят в следующем:

I. Каждая данная фигура построена.

II. Если построены две (или более) фигуры, то построено и соединение этих фигур.

III. Если построены две фигуры, то можно установить, является ли их разность пустым множеством или нет.

IV. Если разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то эта разность построена.

V. Если две фигуры построены, то можно установить, является ли их пересечение пустым множеством или нет.

VI. Если пересечение двух построенных фигур не пусто, то оно построено.

VII. Можно построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют.

VIII. Можно построить точку, заведомо принадлежащую построенной фигуре.

IX. Можно построить точку, заведомо не принадлежащую построенной фигуре.

Сформулируем систему четырех аксиом, из которой следуют или содержатся в ней все аксиомы I-IX.

<u>Аксиома 1</u>. Основная плоскость построена.

<u>Аксиома 2</u>. Если построены две фигуры, то можно установить является ли их разность пустым множеством или нет.

<u>Аксиома 3</u>. Если разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то эта разность также построена.

Следствие 1. Если две фигуры построены, то можно считать известным, является ли их пересечение пустым множеством или нет.

Следствие 2. Если построены две фигуры и их пересечение не пусто, то это пересечение должно считаться построенным.

Следствие 3. Если построены две фигуры, то их соединение должно считаться построенным.

<u>Аксиома 4</u>. Если построены две фигуры, пересечение которых не пусто, то можно построить, по крайней мере, одну точку, принадлежащую этому пересечению.

Следствие 4. Если построены две фигуры и n–какое-либо натуральное число, то всегда можно построить, по крайней мере, n различных точек или оно содержит менее, чем n, точек.

Следствие 5. Можно построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют.

Следствие 6. Можно построить точку, заведомо принадлежащую построенной фигуре.

Аксиомы VII и VIII устанавливают возможность строить точки, принадлежащие уже построенной фигуре.

Аксиома IX позволяет строить некоторые новые точки, но этим точкам не приписывается никаких определённых свойств, кроме свойства быть новыми, ранее не построенными точками. Для построения новых точек, обладающих некоторыми определёнными, указанными свойствами, а также для построения линий пользуются различными «инструментами геометрических построений.

Наиболее употребительными инструментами геометрических построений являются: линейка (односторонняя), циркуль, двусторонняя линейка (с параллельными краями) и некоторые другие.

Сформулируем соответствующие аксиомы.

<u>А. Аксиома линейки</u>. Линейка позволяет выполнить следующие геометрические построения:

a) Построить отрезок, соединяющий две построенные точки;

b) Построить прямую, проходящую через две построенные точки;

c) Построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

<u>Б. Аксиома циркуля</u>. Циркуль позволяет выполнить следующие геометрические построения:

a) Построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности (или его концы);

b) Построить любую из двух дополнительных дуг окружности и концы этих дуг.

<u>В. Аксиома двусторонней линейки</u>. Двусторонняя линейка позволяет:

a) Выполнить любое построений, перечисленных в аксиоме А;

b) В каждой из полуплоскостей, определённых построенной прямой, построить прямую, параллельную этой прямой и проходящую от неё на расстоянии h, где h – фиксированный для данной линейки отрезок (ширина линейки);

c) Если построены две точки А и В, то установить, будет ли АВ больше некоторого фиксированного отрезка h (ширина линейки), и если $AB>h$, то построить две пары параллельных прямых, проходящих соответственно через точки А и В и отстоящих одна от другой на расстоянии h.

<u>Г. Аксиома прямого угла.</u> Прямой угол позволяет:

a) Выполнить построения, перечисленные в аксиоме линейки;

b) Через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную некоторой построенной прямой;

c) Если построены отрезок АВ и некоторая фигура Ф, то установить, содержит ли фигура Ф точку, из которой этот отрезок виден под прямым углом, и если такая точка существует, то построить такую точку.

Помимо перечисленных инструментов, для геометрических построений можно пользоваться и другими инструментами: произвольным углом, угольником, линейкой с отметками, парой прямых углов, различными приспособлениями для вычерчивания специальных кривых и др.

Построения, о возможности которых сказано в аксиомах, вместе с построениями, перечисленными в аксиомах тех инструментов, которые избраны для построения, называют *основными построениями для данного набора инструментов*.

Предложенные аксиоматики являются теоретической основой *геометрических построений в школьном курсе математики*, где определяются, как явные или неявные задачи на построение чертежа, удовлетворяющего определённым данным и выполненного оговоренными инструментами.

В 5-6 классах, чертежи выполняются с помощью чертёжных и измерительных инструментов: линейки (со шкалами и без таковых) и угольники (равносторонние и с острыми углами в 30° и 60°), транспортир, циркуль, а также с помощью шаблонов (пластина (лекало, трафарет и т. п.) с вырезами, по контуру которых изготовляются чертежи, как правило, иллюстрирующие геометрические преобразования движения).

В школьном курсе планиметрии 7 класса рассматриваются следующие опорные/базовые задачи на построение с помощью циркуля и линейки: построение отрезка, равного данному; построение угла, равного данному; построение биссектрисы угла, перпендикулярных прямых и середины отрезка; построение параллельных прямых по заданной прямой и точке; построение треугольника по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по трем сторонам. Все остальные задачи на построение сводятся к различным комбинациям опорных.

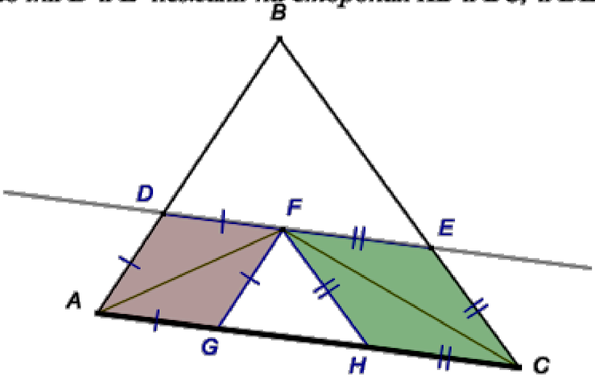
В курсе планиметрии 8 класса рассматриваются задачи на построение прямоугольника, ромба и квадрата, параллелограмма и трапеции по различным элементам, рассматриваются задача на построение треугольника по данным отношениям, задача о проведении касательной к окружности через данную точку.

В курсе планиметрии 9 класса рассматривается построение правильных многоугольников. Предлагается с помощью циркуля и линейки вписать в окружность различные правильные многоугольники. А также задачи на построение, решение которых основано на свойствах симметрии, поворота и параллельного переноса.

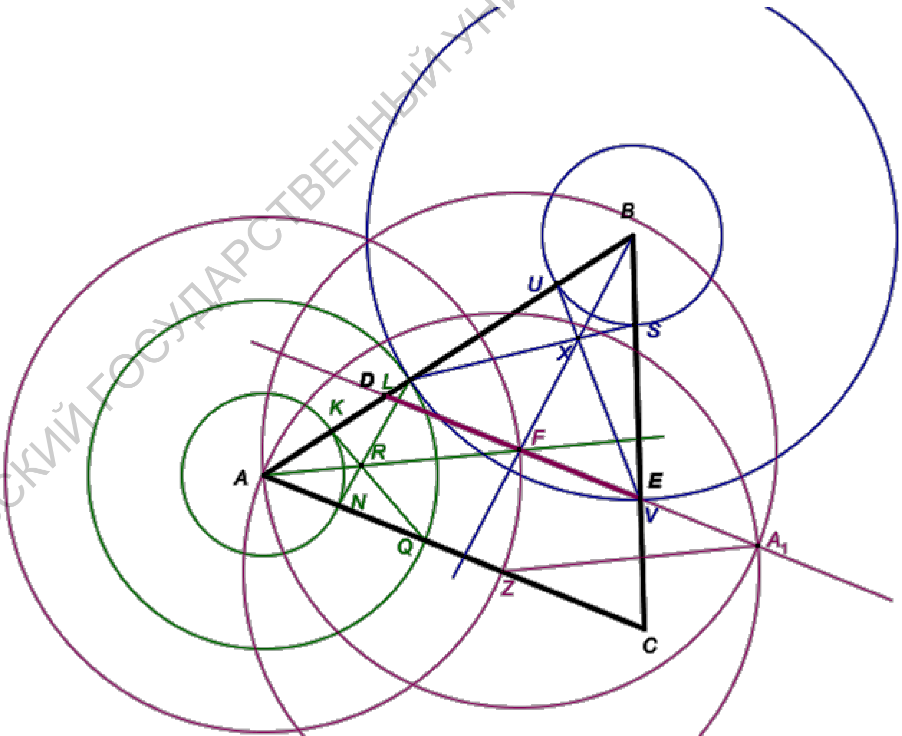
В задачах на построение неизвестные величины определяются в результате выполнения ряда геометрических построений (с помощью допустимых геометрических инструментов). Результатом геометрического построения является *чертёж*.

## Приложение 4. Задача на построение отрезка, стягивающего стороны треугольника

*15. Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE, параллельный прямой AC, так, чтобы точки D и E лежали на сторонах AB и BC, и DE = AD + CE.*

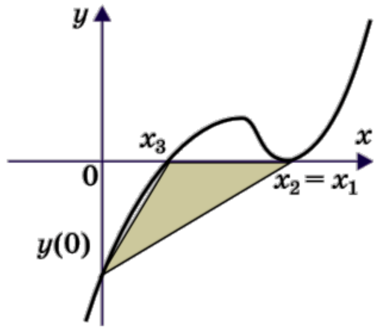



*Анализ.*
*Предположим, что искомый отрезок DE ∥ AC, построен, значит на нём найдётся точка F такая, что DE = DF + FE, DF = AD, FE = CE.*
*Проведём через точку F две прямые, параллельные сторонам AB и BC.*
*Эти прямые пересекутся с AC в точках G и H так, что ADFE и CEFH - ромбы. Точка F - точка пересечения больших диагоналей этих ромбов, а как известно, диагонали росба яаляются его биссектрисами.*
*Следовательно, точка F - точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности) треугольника ABC.*
*Для построения отрезка DC достаточно построить точку F пересечения двух любых биссектрис треугольника ABC (построение биссектрисы угла - элементарное построение, способ: две концентрические окружности), а затем построить прямую, параллельную AC и проходящую через точку F (элементарное построение, способ: построение ромба).*

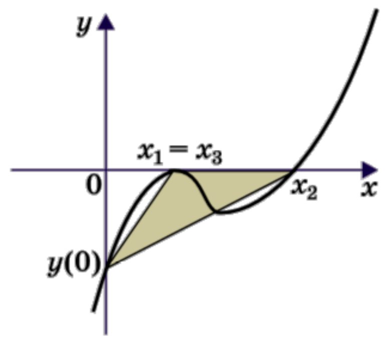


## Приложение 5. Решение задачи с параметром на нахождение площади

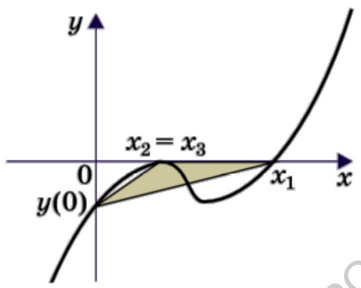
Известно, что график функции $y = (x - 2)(x^2 - 3a^2x - 2x + 2a^4 + 3a^2 + 1)$ пересекает оси координат ровно в трех точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.




а




б




в

Для данной функции имеем:
$y(0) = -2(2a^4 + 3a^2 + 1)$.

Найдем нули функции:

$$\left[\begin{array}{c} x_1=2 \\ x^2-3a^2x-2x+2a^4+3a^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2 = 2a^2+1. \\ x_3 = a^2+1 \end{array}\right.$$

График функции пересекает оси координат в трех точках, следовательно, должны совпадать два из трех нулей функции. Получаем три случая – рисунки а-в, в каждом из которых применима формула площади треугольника через полупроизведение его основания на высоту $S = \dfrac{|x_i - x_j| \cdot |y(0)|}{2}$:

а) $x_1 = x_2 = 2$, тогда $2 = 2a^2 + 1$. Отсюда $a^2 = 1/2$, значит, $x_3 = 3/2$, $y(0) = -6$, следовательно, $S = \dfrac{|x_1 - x_3| \cdot |y(0)|}{2}$; вычисляем и получаем:

$$S = \frac{\left|2 - \frac{3}{2}\right| \cdot |-6|}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

б) $x_1 = x_3 = 2$, тогда $2 = a^2 + 1$. Отсюда $a^2 = 1$, значит, $x_2 = 3$, $y(0) = -12$, следовательно, $S = \dfrac{|x_1 - x_2| \cdot |y(0)|}{2}$; вычисляем и получаем: $S = \dfrac{|2 - 3| \cdot |-12|}{2} = 6$.

в) $x_2 = x_3$, тогда $2a^2 + 1 = a^2 + 1$. Отсюда $a = 0$, значит, $x_2 = x_3 = 1$, $y(0) = -2$, следовательно, $S = \dfrac{|x_1 - x_2| \cdot |y(0)|}{2}$; вычисляем и получаем: $S = \dfrac{|2 - 1| \cdot |-2|}{2} = 1$.

Ответ. Задача имеет три решения:

1) площадь треугольника с вершинами в точках (2; 0) (3/2; 0) и (0; – 6) равна 3/2;

2) площадь треугольника с вершинами в точках (2; 0) (3; 0) и (0; – 12) равна 6;

3) площадь треугольника с вершинами в точках (1; 0) (2; 0) и (0; – 2) равна 1.

## Приложение 6. Задачи на плоских решётках

По материалам статьи: *Елизарова, Н. Г. Магия плоских решеток / Н. Г. Елизарова, Р. С. Понарядова, М. А. Палкина // Математика, 2016. – С. 4-7.*

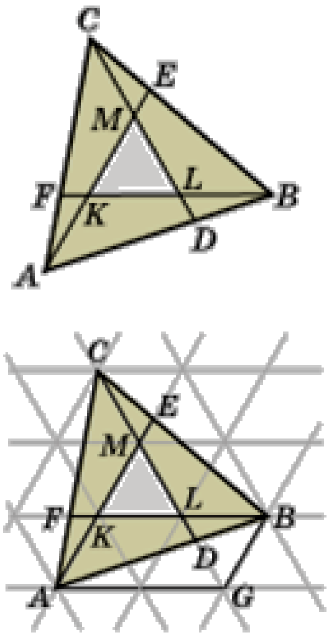


Чертёж к задаче 1

Задача 1. Точки $D$, Е и $F$ равностороннего треугольника АВС лежат на сторонах АВ, ВС и СА соответственно, причем $DB = \frac{1}{3}AB, CE = \frac{1}{3}BC, FA = \frac{1}{3}AC$. Отрезки АЕ, В$F$ и С$D$ пересекаются в точках $K$, $L$ и М. Во сколько раз площадь треугольника АВС больше площади треугольника $KL$М?

Решение. Построим чертёж к задаче, а затем – разместим нашу конфигурацию в решетке из равносторонних треугольников, равных внутреннему треугольнику. Пусть площадь треугольника $KL$М равна $S$, тогда площадь треугольника АВ$K$ равна $2S$ (как половина площади параллелограмма А$G$В$K$).

Аналогично, площади треугольников ВС$L$ и САМ тоже равны $2S$. Следовательно, площадь $S_{ABC} = 7S$, так что площадь треугольника АВС больше площади треугольника $KL$М в 7 раз.

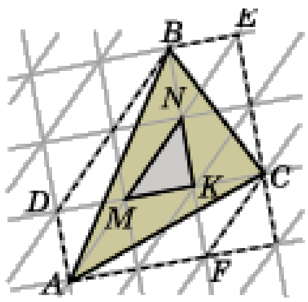


Чертёж к задаче 2

Задача 2 (Вариант 67 по подготовке к ЕГЭ-2014, Alexlarin.net). В произвольном треугольнике *ABC* на сторонах *AB*, *BC* и *CA* отложены соответственно отрезки $AD = \frac{1}{3}AB, BE = \frac{1}{3}BC, CF = \frac{1}{3}CA$.

Докажите, что *SAMC = SANB = SBKC,* где *M = AE∩CD, K=CD∩BF, N=AE∩BF*. Какую часть площади треугольника *ABC* составляет площадь треугольника $MNK$.

Решение. Построим решетку из треугольников, равных треугольнику М$KN$.

Пусть площадь треугольника М$KN$ равна $S$, тогда $S_{BFC} = 2S$, $S_{ACM} = 2S$, $S_{ABN} = 2S$, таким образом, $S_{ABC} = 7S$.

Следовательно, $S_{MNK}: S_{ABC} = 1: 7$.

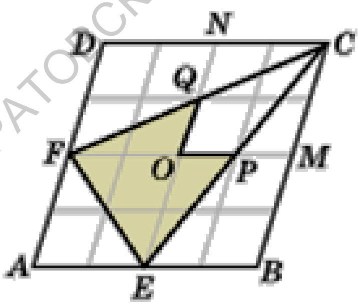


Чертёж к задаче 3

Задача 3: В параллелограмме АВС$D$ точки Е и $F$ – середины сторон АВ и А$D$ соответственно, Р и $Q$ – середины отрезков ЕС и $F$С соответственно, О – точка пересечения диагоналей параллелограмма Найдите отношение площадей четырехугольника ОРС$Q$ и пятиугольника ЕРО$QF$.

*Способ I.* Разделив каждую сторону параллелограмма на 4 равные части, проведем через полученные точки прямые, параллельные сторонам параллелограмма.

Пусть площадь одного маленького параллелограмма – ячейки сетки – равна $S$. Тогда площадь параллелограмма $\mathrm{OMC}N$ равна $4S$, а площадь каждого из треугольников PMC и $QN\mathrm{C}$ равна $S$. Значит, площадь четырехугольника $\mathrm{O}Q\mathrm{CP}$ равна $4S - 2S = 2S$. Аналогично определяем площадь пятиугольника $\mathrm{EPO}QF$, она равна $4S$. Итак, искомое отношение равно $2S : 4S = 1 : 2$.

*Способ II.* Используем свойство медиан в треугольнике. AC и $\mathrm{B}D$ – диагонали параллелограмма, точка O – точка их пересечения, тогда $\mathrm{E}F$ – средняя линия треугольника $\mathrm{A}D\mathrm{B}$, а $AC \cap EF = K$, где $FK = KE$, тогда $\mathrm{C}K$ – медиана, а $\mathrm{CO} : \mathrm{O}K = 2 : 1$, то есть O – точка пересечения медиан треугольника $\mathrm{EC}F$, следовательно, $\mathrm{O} \in EQ$ и $\mathrm{O} \in FP$ (см. рисунок 27).

Медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников. Четырехугольник $\mathrm{O}Q\mathrm{CP}$ состоит из двух таких треугольников, а пятиугольник FQOPE – из четырех, поэтому искомое отношение равно $1 : 2$.

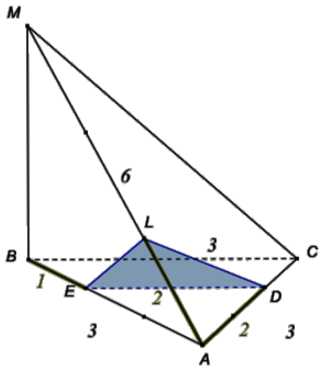
Примеры приведенных задач демонстрируют возможности применения плоских решеток, связанных с геометрическими фигурами, для простого решения геометрических задач разного уровня сложности, а изящество этого метода позволяет еще раз понять и подчеркнуть глубину геометрических рассуждений.

## Приложение 7. Решение задачи о площади сечения пирамиды

В треугольной пирамиде *MABC* основанием является правильный треугольник *ABC*, ребро *MB* перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны *3*, а ребро *MA* равно *6*. На ребре *AC* находится точка *D*, на ребре *AB* находится точка *E*, а на ребре *AM* – точка *L*. Известно, что *AD=AL=2* и *BE=1*. Какой фигурой является сечение пирамиды плоскостью *EDL*?

Идея. Два условия: (1) перпендикулярность одного из боковых рёбер плоскости основания, (2) в основании – правильный треугольник, – позволяют свести решение задачи к совокупности планиметрических задач: рассматривать отдельно треугольники, являющиеся гранями пирамиды, для чего сначала определить вид этих треугольников.

Решение (по выносным чертежам).




1. По условию задачи построим чертёж.

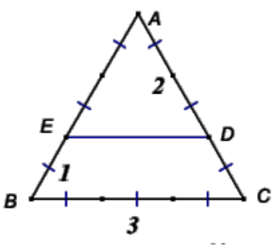
Анализируя чертёж, приходим к необходимости рассмотреть треугольники:

ABC – для нахождения длины ED,

ABM – для нахождения длины EL,

ACM – для нахождения длины LD,

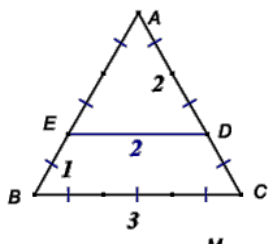
ELD – для вычисления его площади.

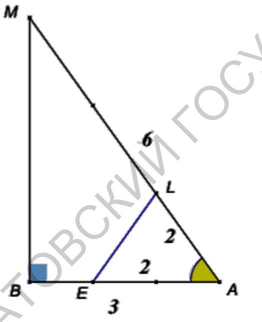



2. Δ ABC – правильный, по условию.

Δ AED ~ Δ ABC, по двум сторонам AE:AB=AD:AC=2:3 и углу A между ними,

Следовательно, третьи стороны находятся в том же отношении ED:BC=2:3, BC=3, значит, ***ED* = 2.**

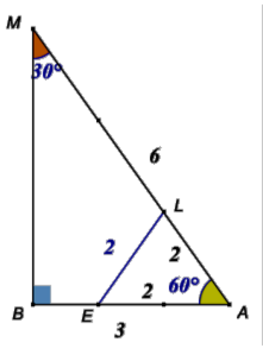


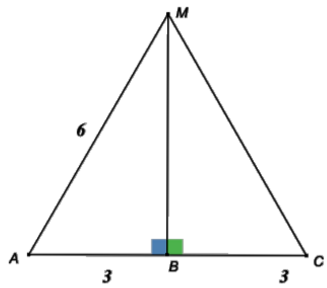




3. Δ MBA – прямоугольный, с прямым углом B, катетом AB=3 и гипотенузой AM=6.

Известно, что катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы. Следовательно, ∠ B = 30°, а ∠ A = 60°.

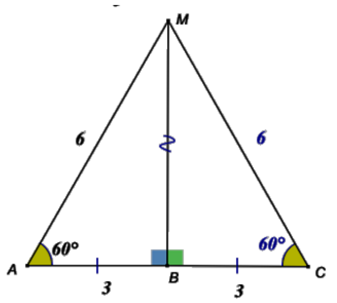
В равнобедренном Δ AEL один из углов равен 60°, значит, этот треугольник – правильный, следовательно, ***EL* = 2.**





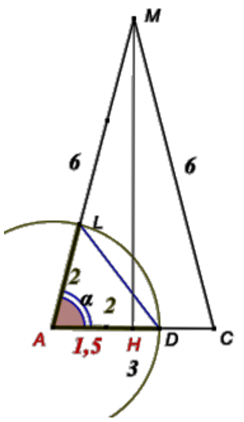

4. Чтобы определить вид Δ MAC необходимо знать длину стороны MC.

Рассмотрим Δ MBA и Δ MBC, для удобства совместив их общей стороной MB, и получив таким образом $\Delta MAC_B$ (индекс указывает на основание высоты, проведённой из вершины M).




<u>1 способ</u>. Δ MBA = Δ MBC, по двум катетам: AB=BC, BM – общий, – следовательно их гипотенузы равны: MA=MC=6.

<u>2 способ</u>. MA = 6, AC = AB + BC = 3 + 3 = 6, ∠ A = 60°, следовательно $\Delta MAC_B$ – правильный и MC=6.

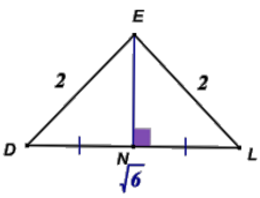



5. Теперь можно рассмотреть $\Delta MAC_H$ (индекс указывает на основание высоты, проведённой из вершины M). Чтобы найти LD (по теореме косинусов) достаточно вычислить cos α из прямоугольного Δ AMH: cos α = AD/AM = 1,5 / 6 = ¼.

По теореме косинусов,

$$LD = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{6}.$$

Итак, $\boldsymbol{LD = \sqrt{6}}$.




6. Изобразим теперь треугольник, площадь которого нужно найти, зная, длины его сторон: $\boldsymbol{LD = \sqrt{6}}$ – основание, $\boldsymbol{EL = ED = 2}$ – боковые стороны.

Можно использовать формулу Герона, но поскольку одна из сторон выражена квадратным корнем, в ходе вычислений площади придётся проводить преобразование иррациональных выражений: $S = \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)^2\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}\right)} = \ldots$

Используем основную формулу площади треугольника, для чего найдём его высоту по следствию из теоремы Пифагора для Δ EDN:

$$EN = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{60}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

<u>Ответ</u>. $\boldsymbol{S_{DEL} = \frac{\sqrt{15}}{2}}$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Светлана Владимировна Лебедева

# ЧАСТНАЯ МЕТОДИКА
(в вопросах, педагогических задачах и ситуациях)
ЧАСТЬ 2. Геометрия

Работа издана в авторской редакции

На обложке – репродукция с картины «Дети с грифельной доской», Albert Anker

Подписано в печать
Усл. печ. л. 8,875

Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$
Гарнитура Times