МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
Балашовский институт (филиал)

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по направлению
44.03.05 «Педагогическое образование»
(с двумя профилями подготовки),
профили «Математика и информатика»,
«Математика и физика»

Саратов
2019

УДК 51
ББК 22.1я73
П69

Автор-составитель:
В. В. Кертанова

В учебно-методическом пособии приведены основные понятия, теоретические сведения, методы решения типовых задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложений, подобраны задачи для самостоятельного решения студентами.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и информатика»; «Математика и физика».

Рекомендуется к опубликованию в электронной библиотеке кафедрой математики Балашовского института (филиала) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Работа представлена в авторской редакции.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА 6

Основные определения и понятия 6
Уравнения с разделяющимися переменными 11
Однородные уравнения 17
Уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям 21
Линейные уравнения 28
Уравнение Бернулли 35
Уравнения в полных дифференциалах 40
Интегрирующий множитель 45
Определение типа дифференциальных уравнений первого порядка и их решение 51
Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям первого порядка 55

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ 64

Уравнения, допускающие понижение порядка 64
Однородные линейные уравнения 68
Неоднородные линейные уравнения 72

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ 75

Однородные уравнения 75
Неоднородные уравнения 79

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 81

ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ 81

Однородные уравнения 81
Неоднородные уравнения 84
ГЛАВА 5. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 96
ПРИМЕРНЫЙ ТЕСТ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ……………………98

ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений дает углубленные знания о природе и является средством для построения математических моделей различных процессов. Дифференциальные уравнения используют для решения не только математических, но и биологических, химических, физических задач. Многие процессы, происходящие в природе и изучаемые в таких науках как биология и химия, невозможно объяснить и разрешить, не зная, что такое дифференциальные уравнения и способы их решения.

Содержание учебно-методического пособия соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки).

Материал учебно-методического пособия разбит на параграфы, в каждом из которых даются краткие теоретические сведения, приводятся типовые задачи с решениями и содержится достаточное количество задач для решения на практических занятиях для самостоятельной работы студентов, приведены задания для контрольных работ и тестов. Основное внимание уделяется приобретению практических навыков, поэтому большая часть теоретического материала представлена в курсе без доказательств, но снабжена достаточным количеством примеров.

Основной целью данного пособия является попытка помочь студентам в формировании их математического мышления, выработке практических навыков решения дифференциальных уравнений.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

R – множество действительных чисел;

N – множество натуральных чисел;

Z — множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

$\{ a, b, c, \dots \}$ – множество, состоящее из элементов a, b, c, …;

$\varnothing$ – пустое множество;

$\in$ – знак принадлежности множеству;

$\notin$ – знак непринадлежности множеству;

$\{x | x \in N \}$ – множество элементов x, удовлетворяющих условию $x \in N$;

$\cap$ – знак пересечения множеств;

$\cup$ – знак объединения множеств;

$\setminus$ – знак разности множеств $(A \setminus B)$;

$\subset$ – знак включения;

$\overline{A}$ – дополнение множества A в множестве X;

$\wedge$ – союз «и»;

$\vee$ – союз «или»;

$\times$ – знак прямого (декартового) произведения;

$\forall$ – квантор общности;

$\exists$ – квантор существования;

$\Rightarrow$ – знак логического следования;

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности (эквивалентности);

d – дифференциал;

$\frac{d}{dt}$ – дифференцирование (производная) по t;

$\frac{d^k}{dt^k}$ – дифференцирование (производная) k-го порядка по t;

y_x' – частная производная по x.

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Основные определения и понятия

При рассмотрении многих геометрических, физических и инженерных задач не всегда удается установить непосредственную зависимость между величинами, описывающими реальное явление или процесс. При этом можно установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других переменных величин. Эти уравнения, содержащие производные (или дифференциалы) неизвестных функций, называются *дифференциальными уравнениями*. Дифференциальное уравнение, описывающее реальный эволюционный процесс, называется *дифференциальной моделью* этого процесса.

Чтобы дать определение дифференциального уравнения и связанных с ним понятий, рассмотрим простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение S материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени t и вычисляется по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где V_0 – скорость материальной точки, a – ускорение материальной точки. В свою очередь, скорость V является производной по времени t от перемещения S, а ускорение a является производной по времени t от скорости V, то есть

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = V_0 t + \frac{S'' \cdot t^2}{2}$ – уравнение связывает функцию $S = S(t)$ независимой переменной t и производной второго порядка $S'' = \frac{d^2S}{dt^2}$ этой функции. Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением.

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F\left(y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ (1) между независимой переменной x, функцией $y = f(x)$ и производными этой функции $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Если уравнение $F\left(y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ можно разрешить относительно старшей производной $y^{(n)}$, то его записывают в виде: $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$. О таком уравнении можно сказать, что оно записано в нормальной форме.

Если правая часть уравнения линейна относительно $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, то такое уравнение называется линейным.

Если независимых переменных две или больше, то уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Например,

уравнение $-3x + y - 2y' = 5$ — дифференциальное уравнение первого порядка;

уравнение $-3x + y''' - 2y' = 5$ — дифференциальное уравнение третьего порядка.

Определение. Решением дифференциального уравнения $F\left(y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ называется такая дифференцируемая n раз функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает это уравнение в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Определение. Кривая, соответствующая решению обыкновенного дифференциального уравнения, называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Обычно дифференциальные уравнения имеют бесконечное множество решений. Основной задачей теории дифференциальных уравнений является отыскание всех решений данного дифференциального уравнения.

Определение. Множество всех решений дифференциального уравнения называют общим решением дифференциального уравнения.

Определение. Всякое решение $y = \varphi(x, C)$, получающееся из общего решения дифференциального уравнения при конкретном значении $C=C_0$, называется частным решением дифференциального уравнения.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, называется *задачей Коши*.

Геометрически речь идет о нахождении интегральной кривой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (2)$$

где x — независимая переменная, $y = y(x)$ — неизвестная функция от переменной x.

Если уравнение (2) можно разрешить относительно производной y', то его записывают в виде:

$$y' = f(x, y) \text{ или } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. О таком уравнении говорят, что оно записано в нормальной форме.

Геометрически общее решение $y = y(x, C)$ дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости *Oxy*.

Определим связь между уравнением $y' = f(x, y)$ и его интегральными кривыми. Пусть правая часть уравнения определена и непрерывна в области D и пусть $y = y(x)$ – интегральная кривая этого уравнения, проходящая через данную точку *P(x;y)*. Проведем касательную к данной интегральной кривой в точке *P* и обозначим через α – угол, образованный данной касательной с положительным направлением оси *OX*. Тогда $y'(x) = tg\alpha$. Но

$$y' = f(x, y) \quad \Rightarrow y' = f(x, y(x)) \quad \Rightarrow tg\alpha = f(x, y(x)).$$

Определение. Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т. е. в окрестности некоторой точки этого решения (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной *C*. Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной *C*. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается, по крайней мере, одной интегральной кривой. Не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Пример 1. Показать, что функция $y = Cx^3$, где C — произвольная постоянная, является решением дифференциального уравнения $xy' - 3y = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию *y*(*1*) = *2*.

Решение. Вычислим производную от функции $y = Cx^3$ и подставим данную функцию $y = Cx^3$ и ее производную в уравнение $xy' - 3y = 0$:

$$y = Cx^3 \Rightarrow y' = 3Cx^2,$$

$$x\left(3Cx^2\right) - 3\left(Cx^3\right) = 0,$$

$0 = 0$ – верное равенство. Следовательно, функция $y = Cx^3$ является решением дифференциального уравнения $xy' - 3y = 0$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию *y*(*1*) = *2*: $2 = C \cdot 1^3 \Rightarrow C = 2$.

Частное решение имеет вид $y = 2x^3$.

Пример 2. Проверить, является ли функция $y = arctg\,(x + y) + C$ при любом $C \in R$ решением дифференциального уравнения $(x + y)^2 \dfrac{dy}{dx} = 1$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию *y*(*1*)=0.

Решение. Вычислим производную от функции $y = arctg\,(x + y) + C$ и подставим данную функцию $y = arctg\,(x + y) + C$ и ее производную в уравнение $\left(x + y\right)^3 \dfrac{dy}{dx} = 1$:

$$y = arctg(x + y) + C \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + (x + y)^2}\left(1 + y'\right) = \frac{1}{1 + (x + y)^2} + \frac{y'}{1 + (x + y)^2},$$

$$y' - \frac{y'}{1 + (x + y)^2} = \frac{1}{1 + (x + y)^2},$$

$$y'\left(1 - \frac{1}{1 + (x + y)^2}\right) = \frac{1}{1 + (x + y)^2},$$

$$y'\left(\frac{1 + (x + y)^2 - 1}{1 + (x + y)^2}\right) = \frac{1}{1 + (x + y)^2},$$

$$y'\left(\frac{1 + (x + y)^2 - 1}{1 + (x + y)^2}\right) = \frac{1}{1 + (x + y)^2},$$

$$y'\,\frac{x^2 + 2xy + y^2}{1 + (x + y)^2} = \frac{1}{1 + (x + y)^2},$$

$$y' = \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2}.$$

$$(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 1,$$

$$(x+y)^2 y' = 1,$$

$$(x+y)^2 \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2} = 1,$$

$$(x+y)^2 \frac{1}{(x+y)^2} = 1,$$

$1=1$ – верное равенство. Следовательно, функция $y = arctg\,(x+y) + C$ является решением дифференциального уравнения $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 1$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$: $0 = arctg\,(1+0) + C \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{\pi}{4}$.

Частное решение имеет вид $y = arctg\,(x+y) - \frac{\pi}{4}$.

Пример 3. Доказать, является ли функция, заданная параметрически $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, решением дифференциального уравнения $(1+xy)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$.

Решение. Вычислим производную от функции $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ и подставим данную функцию $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ и ее производную в уравнение $(1+xy)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$:

$$\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-e^{-t}}{e^t + te^t} = \frac{-1}{e^t e^t (1+t)} = \frac{-1}{e^{2t}(1+t)},$$

$$\left(1 + te^t e^{-t}\right)\frac{-1}{e^{2t}(1+t)} + \left(e^{-t}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{-1-t}{e^{2t}(1+t)} + e^{-2t} = 0,$$

$$\frac{-1}{e^{2t}} + e^{-2t} = 0,$$

$$-e^{-2t} + e^{-2t} = 0,$$

$0=0$ – верное равенство. Следовательно, функция $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ является решением дифференциального уравнения $(1+xy)\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$.

Уравнения с разделяющимися переменными

<u>Определение.</u> Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)dy+f_2(x)\varphi_2(y)dx=0,$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Если ни одна из функций не равна тождественно нулю, то в результате преобразований получаем

$$\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy+\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx=0.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Интегрируя левую и правую части, получим общее решение дифференциального уравнения, где C — произвольная постоянная:

$$\int\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy=\int\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx+C.$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $(x+1)dx+(y-1)dy=0$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку $(0,0)$.

Решение. Общий интеграл этого уравнения

$$\int(x+1)dx+\int(y-1)dy=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+x+\frac{y^2}{2}-y=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+x-y=C\cdot$$

Полагая в этом равенстве $x=0,\ y=0$, получим C = 0. Частное решение уравнения имеет вид $x^2+y^2+2x-2y=0$ или $(x+1)^2+(y-1)^2=2$. Интегральная кривая — окружность с центром в точке $(-1,1)$ и радиусом, равным $\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x\left(1+y^2\right)dx-y\left(1+x^2\right)dy=0.$$

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$y\left(1+x^2\right)dy = x\left(1+y^2\right)dx$$

Разделим данное уравнение на произведение $\left(1+y^2\right)\cdot\left(1+x^2\right)$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{xdx}{1+x^2}$$

Интегрируем

$$\int\frac{ydy}{1+y^2} = \int\frac{xdx}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln C,$$

$$\ln\left(1+y^2\right) = \ln\left(1+x^2\right)C$$

$1+y^2 = \left(1+x^2\right)C$ – общее решение уравнения.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $(2+x)ydx - x(1-y)dy = 0$.

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные и получим уравнение с разделенными переменными:

$$x(1-y)dy = (2+x)ydx$$

$$\frac{(1-y)dy}{y} = \frac{(2+x)dx}{x}$$

$$\int\frac{(1-y)dy}{y} = \int\frac{(2+x)dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy = \int\left(\frac{2}{x}+1\right)dx$$

Интегрируя, получим

$$\ln y - y = 2\ln x + x + C,$$

$\ln\dfrac{x^2}{y} + x + y = C$ – общий интеграл данного уравнения.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y' = xy^2 + 3xy$.

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные и получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{dx} = xy(y+3),$$

$$\frac{dy}{y(y+3)} = xdx .$$

Интегрируем

$$\int \frac{dy}{y(y+3)} = \int xdx .$$

Чтобы вычислить интеграл в левой части равенства, разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{y(y+3)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y+3} = \frac{a(y+3)+by}{y(y+3)} = \frac{ay+3a+by}{y(y+3)} = \frac{(a+b)y+3a}{y(y+3)}.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Таким образом, получили

$$\frac{1}{y(y+3)} = \frac{1/3}{y} - \frac{1/3}{y+3} .$$

Интегрируем

$$\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y} - \frac{1}{3}\int\frac{dy}{(y+3)} = \int xdx ,$$

$$\frac{1}{3}\ln|y| - \frac{1}{3}\ln|y+3| = \frac{x^2}{2} + \ln C ,$$

$$\ln|y| - \ln|y+3| = \frac{3x^2}{2} + 3\ln C ,$$

$$\ln\frac{|y|}{|y+3|} = \frac{3x^2}{2} + \ln C^3,$$

$\dfrac{|y|}{|y+3|} = C^3 \cdot e^{\frac{3x^2}{2}}$ – общий интеграл данного уравнения.

Заметим, что $y=0$; $y=-3$ также являются решениями уравнения.

Пример 5. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$ при $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные и получим уравнение с разделенными переменными:

$$x\frac{dy}{dx}+y=0\ ,$$

$$xdy=-ydx\ ,$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\ .$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}\ ,$$

$$\ln y=-\ln x+\ln C\ ,$$

$$\ln y+\ln x=\ln C\ ,$$

$$\ln xy=\ln C\ ,$$

$$xy=C\ ,$$

$y=\dfrac{C}{x}$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Подставим в полученное дифференциальное уравнение начальные условия: $x_0=1,\quad y_0=2$. Имеем $2=\dfrac{C}{1}\Rightarrow\quad C=2$.

Таким образом, частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши): $y=\dfrac{2}{x}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнения:

1. $(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0.$
2. $y(1+x^2)y'=1+y^2$.
3. $y\cdot y'=\dfrac{1-2x}{y}$.
4. $y'=y^2\cos x$.
5. $(x+xy^2)dx+(y+yx^2)dy=0$.
6. $y'=\dfrac{4}{x^2-4}$.
7. $\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=-\sin x\,dx$.

8. $y' = \dfrac{y+3}{x+3}$.

9. $\left(1+x^2\right)dy = 2xydx$.

10. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{dy}{x}$.

11. $y' + y = 0$.

12. $yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$.

13. $y' = y^{2/3}$.

14. $y' = x(y^2+1)$.

15. $2xe^{-x^2} + \dfrac{y'}{y} = 0$.

16. $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$.

2. Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

17. $e^x dx - \left(1+e^x\right)ydy = 0, \quad y(0) = 1$.

18. $\left(1+x^2\right)y^3 dx - \left(y^2-1\right)x^3 dy = 0, \quad y(1) = 1$.

19. $ydx + ctgxdy = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$.

20. $\sin y \cdot \cos xdy = \cos y \cdot \sin xdx, \quad y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

21. $\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right)y' - y = 0, \quad y(1) = 1$.

22. $y' = -\dfrac{x}{y} \quad (y \neq 0), \quad y(3) = -4$.

23. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0), \quad y(2) = 3$.

24. $y' = 4x^3, \quad y(0) = 0$.

25. $y'tgx = y + 1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

26. $\dfrac{ydx}{\ln x} = xdy, \quad y(e) = 1$.

27. $\dfrac{y}{y'} = \ln y, \quad y(2) = 1$.

28. $\frac{yy'}{x}+e^{y}=0,\quad y(1)=0$.

29. $y'\cos x=(y+1)\sin x,\qquad y(0)=0$.

30. $20xdx-3ydy=3x^{2}ydy-5xy^{2}dx,\quad y(1)=0$.

Ответы

1.

1. $y(1-Cx)=x+C$.
2. $1+y^{2}=Ce^{2arctgx}$.
3. $y^{3}=3x-3x^{2}+C$.
4. $y=\frac{1}{C-\sin x}$.
5. $\left(1+x^{2}\right)\left(1+y^{2}\right)=C$.
6. $y=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$.
7. $y=\frac{(\cos x+C)^{2}}{4}$.
8. $y=(x+3)C-3$.
9. $y=\left(x^{2}+1\right)C$.
10. $y=-\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}+C$.
11. $y=C\cdot e^{-x}$.
12. $y\sin y+\cos y+x^{2}+C=0$.
13. $y=\frac{1}{27}(x+C)^{3}$.
14. $y=tg\left(\frac{x^{2}}{2}+C\right)$.
15. $y=C\cdot e^{e^{-x^{2}}}$.
16. $(x^{2}-1)(y^{2}-1)=C$.

2.

17. $y^{2}=1+2\ln\frac{1+e^{x}}{2}$.

18. $x^{-2}+y^{-2}=2\left(1+\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$.

19. $y=-2\cos x$.

20. $\cos x=\sqrt{2}\cos y$.

21. $2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=0$.

22. $x^2+y^2=25$.

23. $xy=6$.

24. $y=x^4$.

25. $y=2\sin x-1$.

26. $y=\ln x$.

27. $2(x-2)=\ln^2 y$.

28. $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$.

29. $y=\frac{1}{\cos x}-1$.

30. $y=\sqrt{5\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}-4}$.

Однородные уравнения

Определение. Функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условию $f(tx,ty)=t^n f(x, y)$ для любого значения параметра t (кроме нуля), называется однородной функцией степени n (или порядка n).

Пример 1. Является ли однородной функция $f(x, y)=x^3+3x^2y$?

Решение.

$f(tx,ty)=(tx)^3+3(tx)^2ty=t^3x^3+3t^3x^2y=t^3(x^3+3x^2y)=t^3 f(x, y)$.

Таким образом, функция $f(x, y)$ является однородной 3-го порядка.

Пример 2. Является ли однородной функция $f(x, y)=x^2-5y$?

Решение. $f(tx,ty)=(tx)^2-5ty=t^3x^3-5ty=t(t^2x^3-5y)$.

Таким образом, функция $f(x, y)=x^2-5y$ не является однородной функцией.

Свойства однородных функций

1. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции степени n (или порядка n), то функция $f(x,y)=\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ есть однородная функция нулевой степени.

2. Если функция $f(x,y)$ — однородная функция нулевой степени, то она зависит только от отношения переменных $\dfrac{x}{y}$.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется однородным дифференциальным уравнением, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными функциями одной и той же степени n.

Учитывая свойства однородных функций, можно однородное дифференциальное уравнение определить иначе.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x,y)$ называется однородным, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевой степени относительно своих аргументов.

Чтобы решить однородное дифференциальное уравнение, нужно свести его к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $u=\dfrac{y}{x}$. Тогда $y = ux,\ y' = u'x + ux'$, где u — некоторая функция аргумента x.

Пример 3. Решить уравнение $(x+y)dx+(x-y)dy=0$

Решение. Обозначим $P(x, y) = x + y$ и $Q(x, y) = x - y$. Данное уравнение будет однородным, так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции первой степени.

Полагаем $u=\dfrac{y}{x}$; $y = ux$; $y' = u'x + u$, тогда подставляя в исходное уравнение, получим:

$$(x+ux)dx+(x-ux)(xdu+udx)=0;$$

$$(1-u)xdu+\left(1+2u-u^2\right)dx=0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, находим:

$$\frac{(1-u)du}{1+2u-u^2}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{(1-u)du}{1+2u-u^2} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+2u-u^2\right)}{1+2u-u^2} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right| = -\ln x + \frac{1}{2}\ln C,$$

$$\left(1+2u-u^2\right)x^2 = C.$$

Подставляя вместо *u* его значения, получим

$$\left(1+2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)x^2 = C\cdot$$

Разделяя переменные, делим обе части уравнения на $\left(1+2u-u^2\right)$. Нужно проверить, не являются ли корни уравнения $1+2u-u^2=0$ решениями нашего дифференциального уравнения. Легко видеть, что числа $u=1\pm\sqrt{2}$ действительно являются корнями уравнения. Так как $u=\frac{y}{x}$, то $y=\left(1\pm\sqrt{2}\right)x$ — решения исходного дифференциального уравнения. Можно заметить, что эти решения содержатся в полученном нами равенстве $x^2+2xy-y^2=C$ при $C=0$, поэтому общий интеграл уравнения имеет вид $x^2+2xy-y^2=C$.

Пример 4. Решить однородное уравнение $y'=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$.

Решение. Введем вспомогательную функцию *u*:

$$u=\frac{y}{x};\quad y=ux;\quad y'=u'x+u,$$

$$u'x+u=u(\ln u+1),$$

$$u'x+u=u\ln u+u,$$

$$u'x=u\ln u.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln\left|\ln u\right|=\ln\left|x\right|+C,$$

$$\ln u = Cx,$$
$$u = e^{Cx}.$$

Переходя к функции y, получаем общее решение: $y = xe^{Cx}$.

Пример 5. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

Решение. Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Сделаем замену $u = \frac{y}{x}$, где u — некоторая функция от аргумента x. Тогда

$$y = ux,\ y' = u'x + ux' = u'x + u.$$

Исходное уравнение приобретает вид:

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \sin\frac{ux}{x},$$
$$u'x + u = u + \sin u,$$
$$\frac{du}{dx}x = \sin u,$$
$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{du}{\sin u} = \int\frac{dx}{x}.$$

Получим:

$$\ln tg\frac{u}{2} = \ln(xC),$$
$$tg\frac{u}{2} = xC,$$
$$tg\frac{y}{2x} = xC,$$
$$\frac{y}{2x} = arctg(xC),$$
$$y = 2x\cdot arctg(xC),$$

$y = 2x\cdot arctgxC$ — общее решение уравнения.

Пример 6. Решить уравнение: $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}$

Решение. Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Сделаем замену

$u=\dfrac{y}{x}$, где u — некоторая функция от аргумента x. Тогда $y=ux,\ y'=u'x+u$.

Исходное уравнение приобретает вид:

$$u'x+u=\frac{ux}{x}+\sqrt{1-\frac{u^2x^2}{x^2}},$$

$$u'x+u=u+\sqrt{1-u^2},$$

$$\frac{du}{dx}x=\sqrt{1-u^2},$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{dx}{x}.$$

Получим:

$$\arcsin u=\ln(xC),$$

$$u=\sin(\ln(xC)).$$

$$\frac{y}{x}=\sin(\ln(xC)),$$

$$y=x\sin(\ln(xC)),$$

$y=x\sin(\ln(xC))$ — общее решение уравнения.

Уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут быть приведены к однородным.

Это уравнения вида $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$.

<u>1 случай.</u> Если определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой $x=x_1+\alpha;\quad y=y_1+\beta$, где α и β — решения системы уравнений $\begin{cases} a_1\cdot\alpha+b_1\cdot\beta+c_1=0 \\ a_2\cdot\alpha+b_2\cdot\beta+c_2=0 \end{cases}$.

Пример 1. Решить уравнение $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0.$

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y+1}{x-2y+3}.$$

Вычислим определитель: $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0\cdot$

Следовательно, данное уравнение можно свести к однородному.

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -2\alpha-\beta+1=0 \\ \alpha-2\beta+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=1-2\alpha \\ \alpha-2+4\alpha+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1/5 \\ \beta=7/5 \end{cases}.$$

Применяем подстановку

$x=x_1-1/5,\quad y=y_1+7/5,\quad dy=dy_1,\quad dx=dx_1:$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{-2\left(x_1-\frac{1}{5}\right)-y_1-\frac{7}{5}+1}{x_1-\frac{1}{5}-2\left(y_1+\frac{7}{5}\right)+3}=\frac{-2x_1-y_1}{x_1-2y_1}.$$

Получили однородное уравнение, которое решим с помощью подстановки

$$y_1=ux_1,\ \frac{dy_1}{dx_1}=\frac{du}{dx_1}x_1+u\cdot$$

Имеем:

$$\frac{du}{dx_1}x_1+u=\frac{-2x_1-ux_1}{x_1-2ux_1}=\frac{2+u}{2u-1}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{dx_1}x_1=\frac{2+u}{2u-1}-u=\frac{2+u-2u^2+u}{2u-1}=\frac{2(1+u-u^2)}{2u-1},$$

$$\frac{2u-1}{2\left(1+u-u^2\right)}du=\frac{dx_1}{x_1},$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1-2u}{1+u-u^2}dt=\int\frac{dx_1}{x_1},$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+u-u^2\right|=\ln|x_1|+\frac{1}{2}\ln C,$$

$$\ln\left|1+u-u^2\right|=-2\ln|x_1|+\ln C,$$

$$\ln\left|1+u-u^2\right| = \ln\left|\frac{C}{x_1^{\ 2}}\right|,$$

$$1+u-u^2 = \frac{C}{x_1^{\ 2}}.$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x:

$$y_1 = ux_1, \quad u = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1},$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{C}{\left(x+\frac{1}{5}\right)^2},$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C,$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C,$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C + 55,$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C + \frac{55}{25}.$$

Пусть $C + \dfrac{55}{25} = C_1$. Таким образом, $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_1$ — общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

2 случай. В случае, когда в исходном уравнении вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$ переменные могут быть разделены подстановкой $a_1x + b_1y = t.$

Пример 2. Решить уравнение $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0$, $y(0) = 2$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$2(x+y)dy = (-3x-3y+1)dx, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-3x-3y+1}{2x+2y}.$$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6 = 0.$

Применяем подстановку

$$3x+3y = t,\ x+y = \frac{t}{3},\ y = \frac{t}{3} - x,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{3dx} - 1:$$

$$\frac{dt}{3dx}-1=\frac{-3t+3}{2t}, \quad \frac{dt}{3dx}=\frac{-3t+3}{2t}+1, \quad \frac{dt}{3dx}=\frac{-3t+3+2t}{2t},$$

$$\frac{dt}{3dx}=\frac{-t+3}{2t}, \quad \frac{tdt}{t-3}=-\frac{3}{2}dx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{tdt}{t-3} = -\int \frac{3dx}{2},$$

$$\int \frac{(t-3+3)dt}{t-3} = -\frac{3}{2}\int dx,$$

$$\int \left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx,$$

$$t+3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C.$$

Возвращаемся к первоначальной функции y и переменной x.

$$3x+3y+3\ln|3x+3y-3| = -\frac{3}{2}x + C,$$

$$x+y+\ln|3x+3y-3| = -\frac{1}{2}x + C,$$

$$2x+2y+2\ln|3(x+y-1)| = -x+2C,$$

$$3x+2y+2\ln 3+2\ln|x+y-1| = 2C,$$

$3x+2y+2\ln|x+y-1| = 2C-2\ln 3$ — общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Таким образом, получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Чтобы найти частное решение, подставим начальные условия:

$$3\cdot 0+2\cdot 2+2\ln|0+2-1| = 2C-2\ln 3,$$

Получили $4=2C-2\ln 3, \quad C=2+\ln 3.$

Таким образом, мы получим частное решение исходного дифференциального уравнения:

$$3x+2y+2\ln|x+y-1| = 2(2+\ln 3)-2\ln 3,$$

$$3x+2y+2\ln|x+y-1| = 4.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить однородные дифференциальные уравнения:

1. $y' = \dfrac{x+2y}{-x}$.

2. $y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$.

3. $xd\,y - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

4. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

5. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

6. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

7. $x\,y\,y' = x^2 - y^2$.

8. $y' = \dfrac{2x + y}{x - y}$.

9. $\dfrac{dx}{y + x} = \dfrac{dy}{y - x}$.

10. $y' = \dfrac{x + 2y}{2x - y}$.

11. $xy' + xtg\,\dfrac{y}{x} = y$.

12. $y' = \dfrac{x + 8y}{8x + y}$.

13. $xy' + y\ln\dfrac{y}{x} = 0$.

14. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$.

15. $x\,y\,y' = x^2 + y^2$.

16. $xy' + y\ln^2\dfrac{y}{x} = 0$.

17. $xy'\ln\dfrac{y}{x} = x + y\ln\dfrac{y}{x}$.

18. $xy' = y + 2xctg\,\dfrac{y}{x}$.

19. $x\,y\,y' = 2x^2 + y^2$.

20. $x^2 y' = y^2 + xy + x^2$.

21. $(2x + y)y' = x + 2y$.

22. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}$.

23. $(x - 2y)y' = x + y$.

24. $xy' = y + 3x \cdot \sin\dfrac{y}{x}$.

25. $xy' = y + y\ln\dfrac{y}{x}$.

26. $(3x + y)y' = x + 3y$.

27. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

28. $\left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(y^2 + 2xy - x^2\right)dy = 0$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку (1; 1).

29. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку (1; 1).

2. Решить уравнения, сведя их к однородным:

30. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$.

31. $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

32. $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$.

33. $(-7x + 3y + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$.

34. $(2x + 8)dx + (-5x + 3y - 11)dy = 0$.

Ответы

1.

1. $y = \dfrac{C}{x^2} - \dfrac{1}{3}x \quad (x \neq 0)$.

2. $x^2 - 2xy + 2y^2 = C$.

3. $y = \dfrac{Cx^2}{2} - \dfrac{1}{2C} \quad (x = 0)$.

4. $y = x - \dfrac{2x}{\ln|x| + C}$.

5. $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$.

6. $y + \sqrt{3x^2 + y^2} = Cx^3$.

7. $y = \sqrt{\dfrac{x^4C^4 - 1}{2x^2C^4}}$.

8. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} arctg \dfrac{y}{x\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}\ln\left|2x^2 + 2y^2\right| = \ln C$.

9. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+arctg\,\frac{y}{x}=C$.

10. $2arctg\,\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=C$.

11. $y=x\arcsin\,\frac{C}{x}$.

12. $\frac{(y+x)^4}{(y-x)^4\left(y^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=C$.

13. $y=xe^{\frac{1-xC}{xC}}$.

14. $y=2x\cdot arctgxC$.

15. $y=\pm x\sqrt{2\ln xC}$.

16. $y=xe^{tg(\ln\frac{1}{xC})}$.

17. $y\ln y-y\ln x-y=x\ln xC$.

18. $y=x\arccos\frac{1}{(xC)^2}$.

19. $y=\pm 2x\sqrt{\ln xC}$.

20. $y=xtg\left(\ln xC\right)$.

21. $\frac{(y+x)^2}{(x-y)^3}=C^2$.

22. $y=x\sin\left(\ln xC\right)$.

23. $\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2y^2\right)=C$.

24. $y=2xarctg(xC)$.

25. $y=xe^{xC}$.

26. $\frac{y+x}{(y-x)^2}=C$.

27. $arctg\,\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=C$.

28. $x^2+y^2=x+y$.

29. $y^2=2x^2\cdot\ln x+x$.

2.

30. $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$,

31. $x+2y+5\ln|x+y-3|=C$,

32. $x^2+xy+y^2+x-y=C_1, \quad C_1=C^2-1$,

33. $x^2+2xy-y^2-4x+8y-6=0$,

34. $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$.

Линейные уравнения

Если уравнение $F(x,y,y')=0$, где x — независимая переменная, $y=y(x)$ — неизвестная функция от x, можно разрешить относительно производной y', то его записывают в виде:

$$y'=f(x,y) \text{ или } \frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

Уравнение $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. О таком уравнении говорят, что оно записано в нормальной форме.

Если правая часть уравнения линейна относительно y, то его можно записать в виде $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$.

<u>Определение.</u> Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{1}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции аргумента x, непрерывные на интервале $(a;\, b)$.

Если правая часть $q(x)$ равна нулю, то такое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением.

Если правая часть $q(x)$ не равна нулю, то такое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением.

Рассмотрим два основных метода решения линейных уравнений.

1. <u>Метод Бернулли</u>

Решение уравнения ищем в виде $y=uv$, где $u(x), v(x)$ — неизвестные пока функции. Найдем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u \text{ или } y'=u'v+v'u$$

Подставляя в уравнение (1), получим

$$\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u+puv=q$$

$$\frac{du}{dx}v+u\left(\frac{dv}{dx}+pv\right)=q.$$

Функцию $v(x)$ выбираем как одно из решений уравнения

$$\frac{dv}{dx}+p(x)v=0$$

в виде $v(x)=e^{-\int p(x)dx}$.

Тогда $u(x)$ находим из уравнения

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{du}{dx}=q(x),$$

то есть $u(x)=C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$, где C — произвольная постоянная. Перемножая $u(x)$ и $v(x)$, получим $y(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $y'+\frac{y}{x}=x$.

Решение. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:

$$y=u(x)\cdot v(x), \text{ тогда } y'=u'v+v'u.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$u'v+v'u+\frac{1}{x}uv=x$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{1}{x}v\right)=x\cdot$$

Выберем функцию так, чтобы

$$v'+\frac{1}{x}v=0\cdot$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=0,$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x}v,$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=-\ln|x|,$$

$$v=\frac{1}{x}\cdot$$

Функцию u находим из уравнения

$$u'\frac{1}{x}=x,$$

$$\frac{du}{dx}=x^2,$$

$$u=\int x^2dx+C,$$

$$u=\frac{x^3}{3}+C\cdot$$

Тогда $y=uv=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)\cdot\frac{1}{x}$, $y=\frac{x^2}{3}+\frac{C}{x}$ — общее решение уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $x^2y'+y=ax^2e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду:

$$y'+\frac{1}{x^2}y=ae^{\frac{1}{x}}.$$

Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:

$$y=u(x)\cdot v(x), \text{ тогда } y'=u'v+v'u.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$u'v+v'u+\frac{1}{x^2}uv=ae^{\frac{1}{x}}$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{1}{x^2}v\right)=ae^{\frac{1}{x}}.$$

Выберем функцию так, чтобы

$$v'+\frac{1}{x^2}v=0.$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x^2}v=0,$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x^2}v,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x^2},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x^2},$$

$$\ln|v| = \frac{1}{x},$$

$$v = e^{\frac{1}{x}}.$$

Функцию u находим из уравнения

$$u' e^{\frac{1}{x}} = a e^{\frac{1}{x}},$$

$$\frac{du}{dx} = a,$$

$$du = a dx,$$

$$u = a\int dx + C,$$

$$u = ax + C.$$

Тогда $y = uv = (ax + C)\cdot e^{\frac{1}{x}}$ — общее решение уравнения.

2. <u>Метод Лагранжа</u> (метод вариации произвольной постоянной).

Требуется найти решение уравнения $y' + p(x)y = q(x)$.

Основная идея этого метода состоит в том, что решение неоднородного линейного уравнения ищем в том же виде, что и общее решение однородного дифференциального уравнения, только считаем, что постоянная интегрирования есть функция от *x*.

При этом будем использовать следующую теорему о структуре общего решения неоднородного уравнения.

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения есть сумма общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

В качестве примера рассмотрим уравнение из примера 1.

Пример 3. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x$.

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего данному линейного однородного уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C,$$

$$y = \frac{C}{x}.$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения будем искать в том же виде, только постоянную C будем считать функцией от x:

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

Найдем производную

$$y' = C'(x) \cdot \frac{1}{x} - C(x) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Подставив y и y' в исходное уравнение, будем иметь:

$$C'(x) \cdot \frac{1}{x} - C(x) \cdot \frac{1}{x^2} + C(x) \cdot \frac{1}{x^2} = x,$$

$$C'(x) \cdot \frac{1}{x} = x,$$

$$C'(x) = x^2,$$

$$C(x) = \frac{x^3}{3} + \overline{C}, \text{ где } \overline{C} = const.$$

Тогда $y = \left(\dfrac{x^3}{3} + \overline{C}\right) \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{\overline{C}}{x}$ — общее решение уравнения.

Задание. Сравнить ответы и основные этапы решения уравнения двумя рассмотренными способами.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

1. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3.$

2. $y'x + y\dfrac{y}{x} = x^2 e^{\frac{x}{2}}$.

3. $y' - y\sin x = \sin x \cdot \cos x$.

4. $y' + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{1}{x^2}$.

5. $xy' - y = x^3$.

6. $y' + y = 2e^x$.

7. $\dfrac{dy}{dx} = x + y$.

8. $y' + x^2 y = x^2$.

9. $y' + \dfrac{y}{x+1} + x^2 = 0$.

10. $y' = 2\sin x + 5y$.

11. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

12. $y' - y = e^x$.

13. $y' - \dfrac{y}{x} = x \cdot \cos x$.

14. $y' - \dfrac{y}{\sin x} = tg\dfrac{x}{2}$.

15. $xy' - x - 5y = 0$.

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

16. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$.

17. $xy' = x + \dfrac{1}{2}y, \quad y(1) = 0$.

18. $xy' + y = \ln x, \quad y(1) = 0$.

19. $xy' - x^2 - 5y = 0$.

20. $xy' - y = x^2 \cos x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

21. $\dfrac{dy}{dx} + y - x = 2, \quad y(0) = 2$.

22. $y' \cos^2 x + y = tgx, \quad y(0) = 0$.

Ответы

1.

1. $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{C}{x^2}$.

2. $y=\frac{\left(2x^2-8x+16\right)e^{\frac{x}{2}}}{x}+\frac{C}{x}$,

3. $y=Ce^{-\cos x}-\cos x+1$,

4. $y=\frac{1}{x}\left(-\ln x+C\right)$,

5. $y=\frac{x^3}{2}+Cx$,

6. $y=e^x+Ce^{-x}$,

7. $y=Ce^x-x-1$,

8. $y=1+Ce^{-\frac{x^3}{3}}$,

9. $y=\frac{C-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4}{x+1}$,

10. $y=Ce^{5x}-\frac{5}{13}\left(\sin x+\frac{1}{5}\cos x\right)$,

11. $y=\left(\frac{x^2+2x}{2}+C\right)(x+1)^2$,

12. $y=(x+C)e^x$,

13. $y=x(\sin x+C)$,

14. $y=(x+C)tg\frac{x}{2}$,

15. $y=Cx^5-\frac{x}{4}$

2.

16. $y=-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}$,

17. $y=\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-2\right)$,

18. $y=\ln x-1+\frac{C}{x}$, $\quad y=\ln x-1+\frac{1}{x}$,

19. $y=-\frac{1}{3}x^2+Cx^5$,

20. $y=x(\sin x+C), \quad y=x\sin x$,

21. $y=Ce^{-x}+x+1, \quad y=e^{-x}+x+1$,

22. $y=tgx-1+e^{-tgx}$.

Уравнение Бернулли

Определение. Уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha},$$

где $p(x), q(x)$ — известные непрерывные на интервале (a; b) функции, α — любое действительное число, отличное от 0 и 1, называется уравнением Бернулли.

С помощью подстановки $z=y^{1-\alpha}=\frac{1}{y^{\alpha-1}}$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению. Отсюда $y=z^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $y'=\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\cdot z'$. Подставим y, y' в уравнение Бернулли:

$$\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\cdot z'+pz^{\frac{1}{1-\alpha}}=qz^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\cdot z'+pz=q,$$

$z'+(1-\alpha)pz=(1-\alpha)q$ — линейное дифференциальное уравнение.

Пример 1. Решить уравнение $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$

Решение. Разделим обе части уравнения на x:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}.$$

С помощью подстановки $z=\sqrt{y}, \quad y=z^2, \quad y'=2z\cdot z'$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению:

$$2z\cdot z'-\frac{4}{x}z^2=x\cdot z,$$

$$z'-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2},$$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:

$$z=u(x)\cdot v(x),$$

тогда $z'=u'v+v'u$.

Подставим в исходное уравнение:

$$u'v+v'u-\frac{2}{x}uv=\frac{x}{2},$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=\frac{x}{2}.$$

Выберем функцию так, чтобы

$$v'-\frac{2}{x}v=0.$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v=0,$$

$$\frac{dv}{v}=2\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln v=2\ln x,$$

$$\ln v=\ln x^2,$$

$$v=x^2.$$

Функцию u находим из уравнения

$$u'x^2=\frac{x}{2},$$

$$du=\frac{dx}{2x},$$

$$\int du=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x},$$

$$u=\frac{\ln x}{2}+C,$$

Тогда $z=uv=\left(\frac{\ln x}{2}+C\right)\cdot x^2$.

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\sqrt{y} = \left(\frac{\ln x}{2} + C\right) \cdot x^2,$$

$$y = \left(\frac{\ln x}{2} + C\right)^2 \cdot x^4$$ — общее решение уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1$.

Решение. С помощью подстановки $z = \frac{1}{y}$ преобразуем уравнение Бернулли в линейное уравнение. Имеем, $y = \frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{1}{z^2} z'$. Подставим $y,\ y'$ в уравнение Бернулли:

$$-\frac{1}{z^2} z' + \frac{1}{zx} = \frac{1}{z^2} \ln x.$$

Умножим обе части уравнения на $-z^2$, получим

$z' - \frac{1}{x} z = -\ln x$ — линейное дифференциальное уравнение.

Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:

$z = u(x) \cdot v(x)$, тогда $z' = u'v + v'u$. Подставим в исходное уравнение:

$$u'v + v'u - \frac{1}{x} uv = -\ln x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x} v\right) = -\ln x.$$

Выберем функцию так, чтобы

$$v' - \frac{1}{x} v = 0.$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = \ln|x|,$$

$$v = x.$$

Функцию u находим из уравнения

$$u'x = -\ln x,$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\ln x}{x},$$

$$du = -\frac{\ln x}{x}dx,$$

$$\int du = -\int \frac{\ln x}{x}dx.$$

Вычислим интеграл $-\int \frac{\ln x}{x}dx$ с помощью замены переменной. Применим подстановку $t = \ln x$. Тогда $dt = \frac{dx}{x}$. Имеем:

$$-\int \frac{\ln x}{x}dx = -\int tdt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Таким образом, получаем:

$$u = -\frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Тогда $z = uv = \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right) \cdot x$.

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Таким образом, $y = \dfrac{1}{x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)}$ — общее решение исходного уравнения.

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{1\left(-\frac{\ln^2 1}{2} + C\right)} \Rightarrow C = 1.$$

Итак, $y = \dfrac{1}{x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + 1\right)}$ — частное решение исходного уравнения.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение Бернулли:

1. $yy' - xe^{2\sqrt{x}} = \frac{y^2}{2\sqrt{x}}$.

2. $y' = x^4 y^2 - \frac{2y}{x}$.

3. $xy' + y = y^2 \ln x$.

4. $y' + 2y - y^2 e^{-x} = 0$.

5. $y' = 2\sqrt{\frac{x}{y^3} - \frac{y}{x}}$.

6. $y' - ytgx = -y^2 \cos x$.

7. $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

8. $x^3 y' = y\left(x^2 + y^2\right)$..

9. $xy' - x^2 y^3 - 5y = 0$.

10. $y' - y + y^2 e^{-x} \cdot \cos x = 0$.

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

11. $y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3 e^{x+1} y^2,\ y(0) = 1$.

12. $xy' = \frac{y^2}{x} + y, \quad y(1) = 1$.

13. $y'\left(1 + x^2\right) = xy + 2x, \quad y(0) = 0$.

14. $y' y^2 \sqrt{x^2 - 3} + 1 - y^3 = 0, \quad y(2) = 2$.

15. $x^2 y' = y^2 - 3xy,\ y\left(\frac{1}{4}\right) = -1$.

16. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1$.

Ответы

1.

1. $y^2 = \left(x^2 + C\right)e^{2\sqrt{x}}$.

2. $y = -\frac{3}{x^5 + 3Cx^2}$.

3. $y = \frac{1}{\ln x + Cx + 1}$.

4. $y = \frac{3e^x}{1 + Ce^{3x}}$.

5. $y=\frac{1}{x}\left(\frac{5}{4}x^4+C\right)^{\frac{2}{5}}$.

6. $y=\frac{1}{\cos x(x+C)}$.

7. $y=\frac{x^4\ln^2|Cx|}{4}$.

8. $y^2=\frac{x^2}{\ln\left|Cx^{-2}\right|}$..

9. $y=Cx^5-\frac{x}{4}$.

10. $y^2=\frac{6x^{10}}{-x^2+6C}$.

2.

11. $y=(x+1)^{-2}\left[e^{x+1}-(x+1)e^{x+1}+1\right]^{-1}$.

12. $y=\frac{x}{1-\ln x}$.

13. $y=2\sqrt{x^2+1}-2$.

14. $\sqrt[3]{y^3-1}=\frac{\sqrt[3]{7}}{3}\left(x+\sqrt{x^2}-3\right)$.

15. $\sqrt[4]{1-\frac{4x}{y}}=4x\sqrt{2}$.

16. $y=\frac{1}{-\ln x-1+2x}$

Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$.

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области *D*.

Для того чтобы выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ было полным дифференциалом функции $F(x,y)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) можно представить в виде $dF(x, y)=0$.

Следовательно, $F(x, y)=C$ — общее решение уравнения (1).

Чтобы найти общее решение уравнения в полных дифференциалах, нужно найти функцию $F(x,y)$ по известным функциям $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Пусть условие (2) выполняется, тогда, интегрируя уравнение (1), найдем общий интеграл по формулам:

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy=C \qquad (3)$$

или

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy=C \qquad (4),$$

где (x_0, y_0) — произвольная точка области *D*.

Пример 1. Решить уравнение $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$.

Решение. Проверим условие $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Имеем $P(x, y)=x+y+1, \quad Q(x, y)=x-y^2+3$.

Отсюда находим:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1, \ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1.$$

Условие выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Общее решение найдем по формуле (4), выбирая $(x_0, y_0)=(0,1)$:

$$\int_0^x (x+2)dx+\int_1^y (x-y^2+3)dy=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+2x+xy-\frac{y^3}{3}+3y-x+\frac{1}{3}-3=C\,,$$

$$\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=C_1\,.$$

Таким образом, $\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=C_1$ — общий интеграл данного уравнения.

Для решения уравнений в полных дифференциалах можно использовать более удобный способ, без применения формул (3) и (4).

Функцию $F(x,y)$ найдем по функциям $P(x,y)$ и $Q(x,y)$:

$$dF=Pdx+Qdy \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial F}{\partial x}=P(x,\,y),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,\,y)\cdot$$

Интегрируя первое равенство, получим

$$F(x,y)=\int P(x,\,y)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция аргумента *y*.

Из второго равенства имеем

$$Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,\,y)dx\right)+\varphi'(y)\,.$$

Отсюда находим функцию $\varphi'(y)$, а следовательно, и функцию $F(x,y)$.

Пример 2. Решить уравнение $(3x^2+10xy)dx+(5x^2-1)dy=0$.

Решение. Проверим условие $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial(3x^2+10xy)}{\partial y}=10x\,,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(5x^2-1\right)}{\partial x}=10x\,.$$

Условие выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,\,y)=3x^2+10xy\,,$$

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx=\int(3x^2+10xy)dx=x^3+5x^2y+\varphi(y).$$

Продифференцируем это равенство по *y*:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=5x^2+\varphi'(y).$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,\, y)=5x^2-1\,.$$

Следовательно, $5x^2+\varphi'(y)=5x^2-1$.

Отсюда $\varphi'(y)=-1, \quad \Rightarrow \varphi(y)=\int(-1)dy=-y+C_1$.

Таким образом, $F(x,\, y)=x^3+5x^2y-y+C_1$.

Общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x^3+5x^2y-y=C\,.$$

Задания для самостоятельного решения

1. $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$.
2. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$.
3. $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$.
4. $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$.
5. $(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4})dx=\frac{2ydy}{x^3}$.
6. $\frac{x^2dy-y^2dx}{(x-y)^2}=0$.
7. $xdx+ydy=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$.
8. $(3xy^2+x^3)dx+(3x^2y+y^3)dy=0$.
9. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$.
10. $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0$.
11. $(y\cos x+2xy^2)dx+(\sin x-a\sin y+2x^2y)dy=0$.
12. $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$.

13. $\dfrac{(2x+y)dy+xdx}{(x+y)^2}=0$.

14. $\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy+\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=0$.

15. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.

16. $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$.

17. $(3x\sin y+1)dx+(\frac{3}{2}x^2\cos y+3)dy=0$.

18. $(\sin xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xydy=0$.

19. $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$.

20. $\left(x+y^2\right)dx+2yxdy=0$.

21. $\left(y^2-2x-2\right)dx+2yxdy=0$.

Ответы

1. $\dfrac{x^3}{3}+xy-y^2=C$.

2. $x^2-xy+y^2+x-y=C$.

3. $2y^2-xy+x^3=C$.

4. $x^4+3x^2y^2+y^3=C$.

5. $x^2+y^2=Cx^3$.

6. $\dfrac{xy}{x-y}=C$.

7. $x^2+y^2-2arctg\dfrac{x}{y}=C$.

8. $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2y^2}{2}+\dfrac{y^4}{4}=C$.

9. $x+e^{\frac{x}{y}}y=C$.

10. $x-\dfrac{y^2}{x}=C$.

11. $y\sin x+x^2y^2+a\cos y=C$.

12. $x^y=C$.

13. $\ln(x+y)+\dfrac{y}{x+y}=C$.

14. $x+\dfrac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{y^2}{2}=C$.

15. $x^3+3x^2y^2+y^4=C$.

16. $\sqrt{x^2+y^2}-\ln x+\dfrac{x}{y}+\ln y=C$.

17. $\dfrac{3}{2}x^2\sin y+x+3y=C$.

18. $x\sin xy=C$.

19. $e^x+yx+x\sin y+e^y=C$.

20. $\dfrac{x^2}{2}+xy^2=C$.

21. $xy^2-x^2-2x=C$

Интегрирующий множитель

Пусть левая часть дифференциального уравнения первого порядка

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

не является полным дифференциалом. Иногда удается найти такую функцию $\mu(x,y)$, после умножения на которую левая часть уравнения (1) становится полным дифференциалом. Функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем* уравнения (1).

Заметим, что общее решение уравнения, полученного после умножения на $\mu(x,y)$, совпадает с общим решением исходного уравнения.

Интегрирующим множителем уравнения (1) является всякая функция $\mu(x,y)$, удовлетворяющая уравнению

$$P\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}-Q\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (2)$$

В общем случае нахождение интегрирующего множителя для уравнения (1) является сложной задачей. Поэтому рассмотрим частные случаи, когда уравнение (1) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от *x* или только от *y*.

Если выражение

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x} \qquad (3)$$

не зависит от y, а зависит только от x, то можно найти *интегрирующий множитель*, зависящий только от x.

Если выражение

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y} \qquad (4)$$

не зависит от x, а зависит только от y, то можно найти *интегрирующий множитель*, зависящий только от y.

Пример 1. Решить уравнение $(xy^2+y)dx=xdy$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(xy^2+y)dx-xdy=0,$$

тогда

$P(x,y)=xy^2+y, \quad Q(x,y)=-x,$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy+1, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1, \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Проверим, не имеет ли это уравнение интегрирующий множитель, зависящий только от одной из переменных.

Заметим, что $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=\dfrac{-1-2xy-1}{xy^2+y}=\dfrac{-2(xy+1)}{y(xy+1)}=-\dfrac{2}{y}$, тогда уравнение (1) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от y.

Найдем этот множитель

$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}=\frac{-2}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln\mu=-2\ln y,$$

тогда $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$.

Умножив все члены уравнения на полученный интегрирующий множитель, имеем уравнение:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0.$$

Легко проверить, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Решим это уравнение.

Найдем такую функцию $F(x, y)$, для которой левая часть дифференциального уравнения будет полным дифференциалом, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x + \frac{1}{y}.$$

Интегрируя по *x*, получим

$$F(x, y) = \int \left(x + \frac{1}{y} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + \varphi(y).$$

Чтобы найти $\varphi(y)$, используем условие

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y).$$

Сравнивая два последних выражения, получим:

$$-\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Следовательно, $\varphi'(y) = 0$. Тогда $\varphi(y) = C_1$.

Окончательно получаем

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + C_1.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C \text{ или } y = -\frac{2x}{x^2 + 2C}.$$

Пример 2. Решить уравнение $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$.

Решение. Пусть $P(x, y) = x^2 - \sin y^2$, $Q(x, y) = x \sin 2y$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2\sin y \cdot \cos y = -\sin 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Проверим, не имеет ли это уравнение интегрирующий множитель, зависящий только от одной из переменных.

Выражение $$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{-\sin 2y-\sin 2y}{x\sin 2y}=\frac{-2\sin 2y}{x\sin 2y}=-\frac{2}{x},$$
значит интегрирующий множитель, зависящий только от x, найдем из дифференциального уравнения
$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{-2}{x}\quad\Rightarrow\quad \ln\mu=-2\ln x\quad\Rightarrow\quad \mu(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Умножим исходное уравнение на полученный интегрирующий множитель:
$$\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+\frac{\sin 2y}{x}dy=0\cdot$$

Это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Можно решить его вышеизложенным методом. Но, если представить его в виде
$$dx+\frac{x\cdot\sin 2y\,dy-\sin^2 y\,dx}{x^2}=0,$$
то левая часть этого уравнения есть полный дифференциал
$$d\left(x+\frac{\sin^2 y}{x}\right)=0\cdot$$

Отсюда
$$x+\frac{\sin^2 y}{x}=C$$ — общее решение уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$.

Решение. Имеем $P(x,y)=1-x^2y,\quad Q(x,y)=x^2(y-x)$, следовательно, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-x^2,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xy-3x^2,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Проверим, не имеет ли это уравнение интегрирующий множитель, зависящий только от одной из переменных.

Заметим, что
$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{-x^2-2xy+3x^2}{x^2(y-x)}=\frac{2x^2-2xy}{x^2(y-x)}=\frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)}=-\frac{2}{x},$$
тогда уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x.

Найдем этот множитель

$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{-2}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln\mu=-2\ln x,$$

тогда $\mu(y)=\frac{1}{x^2}$.

Умножив все члены уравнения на полученный интегрирующий множитель, получаем уравнение:

$$\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=0.$$

Легко проверить, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Решим это уравнение: найдем такую функцию $F(x,y)$, для которой левая часть дифференциального уравнения будет полным дифференциалом, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-y.$$

Интегрируя по *x*, получим

$$F(x,y)=\int\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx=-\frac{1}{x}-yx+\varphi(y).$$

Чтобы найти $\varphi(y)$, используем условие

$$\frac{\partial F}{\partial y}=y-x.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-x+\varphi'(y).$$

Сравнивая два последних выражения, получим:

$$-x+\varphi'(y)=y-x.$$

Следовательно, $\varphi'(y)=y$, тогда $\varphi(y)=\frac{y^2}{2}+C_1$.

Окончательно получаем

$$F(x,y)=-\frac{1}{x}-xy+\frac{y^2}{2}+C_1$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$-\frac{1}{x}-xy+\frac{y^2}{2}=C.$$

Задания для самостоятельного решения

Решить дифференциальные уравнения:

1. $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0.$
2. $xy'+\left(\sin y-3x^2\cos y\right)\cos y=0.$
3. $2ydx=(2x+1+\ln y)dy.$
4. $\left(x^2+y^2\right)dx-2yxdy=0.$
5. $2xydx+\left(y^2-3x^2\right)dy=0.$
6. $\frac{ydx}{x}+\left(y^3-\ln x\right)dy=0.$
7. $y(1-xy)dx-xdy=0.$
8. $\left(xy^2-y^3\right)dx+\left(1-y^2x\right)dy=0.$
9. $y^2dx+(yx-1)dy=0.$
10. $\left(2y+xy^3\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0.$
11. $\left(1+x^2y\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0.$
12. $xdx+ydy=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}.$
13. $ydy=(xdy+ydx)\sqrt{1+y^2}.$
14. $2xy\ln ydx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0.$

Ответы

1. $ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=C.$
2. $xtgy-x^3=C.$
3. $\frac{\ln y+2x+2}{y}=C.$
4. $x-\frac{y^2}{x}=C.$
5. $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$

6. $\dfrac{\ln x}{y}+\dfrac{y^2}{2}=C$.

7. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=C$.

8. $x^2y-2xy^2-2-2Cy=0$.

9. $xy-\ln y=C$.

10. $3x^2y+x^3y^3=C$.

11. $xy+y^2-\dfrac{2}{x}=C$.

12. $x^2+y^2-2arctg\dfrac{x}{y}=C$.

13. $xy-\sqrt{1+y^2}=C$.

14. $x^2\ln y+\dfrac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}=C$.

Определение типа дифференциальных уравнений первого порядка и их решение

Для решения дифференциального уравнения первого порядка сначала надо определить тип, к которому оно относится. Необходимо разрешить его относительно первой производной, то есть привести его к виду $y'=f(x,y)$, и по виду правой части определить тип уравнения.

В некоторых случаях удобно приводить дифференциальное уравнение к виду:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

чтобы проверить, не является ли это уравнение однородным (если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные функции одного порядка) или уравнением в полных дифференциалах (если выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $\sin^2 3x\cdot y'=\cos 3x$.

Решение. Имеем дифференциальное уравнение первого порядка. Разрешим его относительно первой производной y'. Для этого разделим обе части на $\sin^2 3x$. Заметим, что $\sin^2 3x\neq 0$, так как

$\sin 3x$

и $\cos 3x$ одновременно в нуль не обращаются. Уравнение примет вид:

$$y' = \frac{\cos 3x}{\sin^2 3x}.$$

Так как правая часть этого уравнения зависит только от *x*, то оно относится к виду $y' = f(x)$. Это простейшее уравнение решается интегрированием:

$$y = \int \frac{\cos 3x}{\sin^2 3x}\, dx;$$

$$y = \frac{1}{3}\int \frac{d(\sin 3x)}{\sin^2 3x};$$

Таким образом, $y = -\dfrac{1}{3\sin 3x} + C$ — общее решение уравнения.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $(4x - y)dx + (2y - x)dy = 0$.

Решение. Это уравнение не является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Коэффициенты $P(x, y) = 4x - y$ и $Q(x, y) = 2y - x$ — являются однородными функциями первого порядка. Следовательно, данное дифференциальное уравнение является однородным. Но это уравнение является также уравнением в полных дифференциалах, так как $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$, т. е. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Решим его как уравнение в полных дифференциалах с помощью формулы

$$\int_0^x (4x - y)dx + \int_0^y (2y - 0)dy = C;$$

Откуда имеем общее решение:

$$2x^2 - xy + y^2 = C.$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y' + \dfrac{2y}{x} - xy^2 = 0$.

Решение. Заметим, что это уравнение не относится ни к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными, ни к однородным, ни к линейным. Запишем его в виде

$$y' + \frac{2}{x}y = xy^2.$$

Это уравнение Бернулли $(\alpha = 2)$. Выше показано, что с помощью подстановки $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = y^{-1}$ уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению. Но можно это уравнение решить непосредственно с помощью подстановки $y = uv$. Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u$ или $y' = u'v + v'u$.

Подставляя в уравнение, получим

$$u'v + v'u + \frac{2}{x}uv = (uv)^2 x$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = (uv)^2 x.$$

Выберем функцию так, чтобы

$$v' + \frac{2}{x}v = 0.$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x}v,$$

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln v = -2\ln x,$$

$$v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в последнее уравнение, находим:

$$u'v = (uv)^2 x,$$

$$u'\frac{1}{x^2} = u^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 x,$$

$$\frac{du}{dx} = u^2\frac{1}{x^2}x,$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u}=\ln|x|+\ln C,$$

$$-\frac{1}{u}=\ln|xC|,$$

$$u=-\frac{1}{\ln|xC|}.$$

Отсюда имеем $y=uv=-\dfrac{1}{x^2\ln|xC|}$.

Задания для самостоятельного решения

Определить тип дифференциальных уравнений первого порядка и решить их:

1. $\left(x^2+y\right)dx+(x-2y)dy=0$.
2. $(y\ln x-2)ydx = xdy$.
3. $xyy'=1-x^2$.
4. $xy'+y=y^2, \quad y(1)=\frac{1}{2}$.
5. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(x^2y-y\right)dy=0, \quad y(0)=1$.
6. $(x-y+1)y'=x+y+1$.
7. $(x+y)\dfrac{dy}{dx}=(y-x)$.
8. $xy'-y=x^2\cos x$.
9. $x^2y'=xyy'-y^2$.
10. $\left(y^3-x\right)y'=y$.
11. $(y-3)dx+x^2dy=0$.
12. $y'=\dfrac{x-1}{y}$.

Ответы

1. $\frac{1}{3}x^2 + xy - y^2 = C$.

2. $y(Cx + \ln|x| + 1) = 1$.

3. $x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)$.

4. $y(1 - Cx) = 1$.

5. $1 + y^2 = \frac{2}{1 - x^2}$.

6. $(x+1)^2 - (y-1)^2 = C$.

7. $arctg\, \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = C$.

8. $y = Cx + x\sin x$.

9. $y = Ce^{\frac{y}{x}}, \quad y = 0$.

10. $y^4 = 4xy + C$.

11. $y - 3 = Ce^{\frac{1}{x}}$.

12. $y^2 = x^2 - 2x + C$.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям первого порядка

Составление дифференциальной модели реального эволюционного процесса состоит из следующих этапов:

1) составление дифференциального уравнения;
2) решение полученного уравнения;
3) исследование решения.

Таким образом, получаем определенную функциональную характеристику изучаемого процесса. Для построения математической модели требуется достаточно полная информация о течении этого процесса. При решении геометрических задач пользуемся геометрическим смыслом производной (тангенс угла наклона касательной); при решении физических задач учитываем физический смысл производной (скорость протекания процесса) или используем известные физические законы и т. п.

Задача 1 (о распаде радия). Известно, что скорость распада радия пропорциональна его количеству. Требуется найти зависимость количества радия от времени t, если известно его первоначальное количество m_0 и период полураспада T.

Решение. Пусть $m(t)$ — функция, описывающая количество радия
в момент времени t. Скорость распада радия $\frac{dm}{dt}$ является отрицательной, так как $m(t)$ — убывающая функция.

Из условия задачи известно, что скорость распада радия пропорциональна его количеству, поэтому получим уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Мы получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение

$$\frac{dm}{m} = -kdt,$$

$$\int \frac{dm}{m} = -k\int dt,$$

$$\ln m = -kt + \ln C,$$

$m = C \cdot e^{-kt}$ — общее решение дифференциального уравнения.

Найдем постоянные C и k Для определения C воспользуемся начальным условием

$$m(0) = m_0.$$

Подставляя в общее решение, получим $C = m_0$. Следовательно, $m = m_0 e^{-kt}$.

Для определения k воспользуемся дополнительным условием

$$t = T, \quad m(T) = \frac{1}{2} m_0.$$

Подставим в последнее равенство

$$\frac{1}{2} m_0 = m_0 \cdot e^{-kt},$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{2},$$

$$-kT = \ln \frac{1}{2},$$

$$k = \frac{1}{T} \ln 2.$$

В итоге получим $m = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$ — закон зависимости количества радия m от времени t.

Задача 2 (о законе движения некоторых типов парашютов).

С некоторой высоты сброшено тело массой m. Найти закон изменения скорости v падения этого тела, если на него, кроме силы тяжести, действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости.

Решение. Применим второй закон Ньютона

$$F = ma \text{ или } F = m\frac{dv}{dt},$$

где F — сила, действующая на тело в направлении движения, $a = \dfrac{dv}{dt}$ — ускорение тела. Сила F есть сумма двух сил: силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха kv (сила направлена в сторону, противоположную движению тела).

В итоге получим уравнение:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \cdot$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $v(t)$, которое часто называют уравнением движения некоторых типов парашютов.

Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Решим его методом Бернулли. Перепишем уравнение в виде:

$$m\frac{dv}{dt} + kv = mg,$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \cdot$$

Пусть $v = p(t)q(t)$, где $p(t)$ и $q(t)$ — неизвестные пока функции аргумента t.

Найдем производную

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}q + \frac{dq}{dt}p \cdot$$

Подставим в уравнение

$$\frac{dp}{dt}q + \frac{dq}{dt}p + \frac{k}{m}pq = g;$$

$$\frac{dp}{dt}q+p\left(\frac{dq}{dt}+\frac{k}{m}q\right)=g\cdot$$

Найдем q такое, чтобы

$$\frac{dq}{dt}+\frac{k}{m}q=0\cdot$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dq}{q}=-\frac{k}{m}dt\,;$$

$$\int\frac{dq}{q}=-\frac{k}{m}\int dt\,;$$

$$\ln q=-\frac{k}{m}t\,;$$

$$q=e^{-\frac{k}{m}t}\,.$$

Учитывая вид функции q, найдем p:

$$\frac{dp}{dt}e^{-\frac{k}{m}t}=g\,;$$

$$\frac{dp}{dt}=ge^{\frac{k}{m}t}\,;$$

$$p=g\int e^{\frac{k}{m}t}dt=\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C\,,$$

где C — произвольная постоянная. В итоге получим общее решение нашего уравнения:

$$v(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}\cdot$$

Чтобы найти искомую зависимость v от t, надо выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$t=0,\quad v(0)=v_0\,,$$

где v_0 — начальная скорость тела.

Подставляя $t=0$ в формулу для общего решения, получим

$$C=v_0-\frac{mg}{k}\cdot$$

Искомая зависимость v от t имеет вид:

$$v(t)=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\cdot e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}\cdot$$

Из этой формулы видно, что при достаточно больших t скорость движения тела v мало зависит от начальной скорости v_0.

Задача 3. Лодка под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки, замедляет свое движение от начальной скорости, равной 3м/с, до скорости, равной 1 м/с, за 6 с. Через сколько секунд скорость лодки будет равна 1/9 м/с^2. Какой путь пройдет лодка до остановки?

Решение. Пусть $v = v(t)$ — скорость лодки в момент времени t. По условию задачи, сила, действующая на лодку, пропорциональна скорости лодки и препятствует движению. Поэтому, согласно второму закону Ньютона, получим уравнение

$$m\frac{dv}{dt} = -kv,$$

где m — масса лодки, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Это уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение этого уравнения:

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Используя начальное условие $v(0) = 3$, найдем $C = 3$, тогда $v = 3e^{-\frac{k}{m}t}$. Воспользуемся дополнительным условием задачи $v(6) = 1$:

$$3e^{-\frac{k}{m}t} = 1,$$

$$e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{k}{m} = \frac{\ln 3}{6}.$$

Скорость лодки определяется формулой

$$v(t) = 3e^{-\frac{\ln 3}{6}t} = 3\cdot\left(e^{\ln 3}\right)^{-\frac{t}{6}} = 3\cdot 3^{-\frac{t}{6}} = 3^{1-\frac{t}{6}}.$$

Найдем время T, через которое скорость лодки будет равна 1/9 м/с, из уравнения

$$\frac{1}{9} = 3^{1-\frac{T}{6}},$$

$$3^{-2} = 3^{1-\frac{T}{6}},$$

$$1-\frac{T}{6}=-2,$$

$$T=18\ c.$$

Путь, пройденный лодкой до остановки, вычислим по формуле

$$S(t)=\int_0^t v(x)dx=\int_0^t 3^{1-\frac{x}{6}}dx=-\frac{6}{\ln 3}\cdot 3^{1-\frac{x}{6}}\Bigg|_0^t=\frac{6}{\ln 3}\cdot\left(3-3^{1-\frac{t}{6}}\right)=\frac{18}{\ln 3}\left(1-3^{-\frac{t}{6}}\right).$$

Из этого равенства следует, что лодка может пройти путь, не больший $\frac{18}{\ln 3}\approx 16{,}4$.

Задача 4. Скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. При температуре воздуха, равной 20 °С, тело в течение 20 мин охлаждается с 100 °С до 60 °С. Через какое время температура тела понизится до 30 °С?

Решение. Используя закон Ньютона, составим дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20),$$

где $T(t)$ — температура тела в момент времени t, k — коэффициент пропорциональности.

Решим это уравнение:

$$\frac{dT}{(T-20)}=k\,dt,$$

$$\int\frac{dT}{(T-20)}=k\int dt,$$

$$T-20=Ce^{\kappa t},$$

$$T=Ce^{\kappa t}+20.$$

Используя дополнительные условия $T(0)=100$, $T(20)=60$, получим

$$\begin{cases}100=20+C\\60=20+C\,e^{20k}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=80\\40=80\,e^{20k}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=80\\\frac{1}{2}=e^{20k}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=80\\e^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}\end{cases}.$$

Отсюда имеем

$$T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Полагая $T=30$, получим

$$30=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}},$$

$$80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}=10,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3},$$

$$\frac{t}{20}=3,$$

$$t=60\ \textit{мин}.$$

Задача 5. Кривая $y=f(x)$ проходит через точку $M_0(2;\ 3)$. Каждая касательная к этой кривой пересекает прямую $y=2$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. Найти кривую $y=f(x)$.

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ произвольная точка на искомой кривой. Уравнение касательной к этой кривой в точке M имеет вид:

$$Y-y=y'(x)(X-x),$$

где X, Y — текущие координаты точек касательной.

Из условия задачи известно, что касательная пересекает прямую $y=2$ в точке с абсциссой $2x$, тогда уравнение касательной примет вид:

$$2-y=y'(2x-x),$$

$$2-y=y'x.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{dy}{dx}=2-y.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\frac{dy}{2-y}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dy}{2-y}=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\ln|2-y|=\ln|x|+\ln C,$$

$$y-2=\frac{C}{x}$$ — общее решение уравнения.

Так как искомая кривая проходит через точку $M_0(2;\,3)$, то $C = 2$. Тогда искомая кривая имеет вид

$$y = 2 + \frac{2}{x} \text{ — гипербола.}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти кривую, проходящую через очку $M_0(0;\,-2)$ так, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на 3.

2. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(1;\,1)$ так, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке был пропорционален квадрату ординаты этой точки.

3. Найти кривую, для которой угловой коэффициент касательной
в любой ее точке в 3 раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

4. Определить кривую, для которой отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью, проведенной в произвольной точке кривой, равен расстоянию этой точки от начала координат.

5. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1;\,2)$ и обладающей тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении 2:3, считая от оси координат.

6. Найти кривую, проходящую через точку $A(2;\,4)$ зная, абсцисса точки пересечения касательной в произвольной точке кривой с осью Ox равна удвоенной абсциссе точки касания.

7. Найти время, за которое вода, заполняющая полусферическую чашу радиуса 1 м, вытечет через круглое отверстие в дне чаши радиусом 0,1 м.

8. Пуля, летящая со скоростью 200 м/с, пробивает доску, толщиной 40 см и вылетает с другой стороны доски со скоростью 80 м/с. За какое время пуля пробила доску, если сопротивление доски движению пули пропорционально скорости доски?

9. Экспериментально установлено, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. За какое время количество бактерий увеличится в 100 раз по сравнению с их начальным количеством?

10. Из эксперимента известно, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству вещества. Доказать, что период полураспада вещества не зависит от его начального количества.

Ответы

1. $y = e^x - 3$.
2. $k(x-1)y - y + 1 = 0$.
3. $y = Cx^3$.
4. $x^2 = C(2y + C)$ $\left(Уравнение\, y + \dfrac{x}{y'} = \sqrt{x^2 - y^2} \right)$.
5. $y = 2x^{-\frac{2}{3}}$,
6. $y = \dfrac{8}{x}$.
7. $35{,}2\; c$.
8. $2\ln\dfrac{5}{2}\; c$.
9. $T = \dfrac{\ln 100}{k}$.
10. $T = \dfrac{\ln 2}{k}$.

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим общий вид уравнения n-го порядка

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где x — независимая переменная, y — искомая функция.

При интегрировании дифференциальных уравнений n-го порядка иногда удается получить уравнение более низкого порядка, эквивалентное исходному. Оба уравнения будут иметь одни и те же решения, но уравнение более низкого порядка должно содержать уже некоторое число произвольных постоянных. Такие уравнения более низкого порядка часто называют промежуточными интегралами.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка, то есть уравнения, для которых существуют промежуточные интегралы.

1. Уравнение содержит только производную n-го порядка искомой функции и независимую переменную:

$$y^{(n)} = f(x). \qquad (1)$$

Интегрируя последовательно, получим общее решение уравнения (1) в виде

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x) dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

Пример. Решить уравнение $y''' = \sin x$.

Решение. Интегрируя трижды исходное уравнение, получим

$$\int y''' dx == \int \sin x dx,$$

$$y'' = -\cos x + C_1,$$

$$\int y'' dx = \int (-\cos x + C_1) dx,$$

$$y' = -\sin x + C_1 x + C_2,$$

$$\int y' dx = \int (-\sin x + C_1 x + C_2) dx,$$

$y = \cos x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ — общее решение уравнения.

2. Дифференциальное уравнение не содержит искомой функции и ее производных до $(k-1)$-го порядка включительно, то есть уравнение имеет вид:

$$F(x, y^{(\mathrm{k})}, y^{(\mathrm{k}-1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2)$$

Порядок уравнения может быть понижен до (n – k)-того порядка с помощью подстановки

$$y^{(k)} = p\,.$$

Подставим в уравнение (2):

$$F(x, p, p', p'', \ldots, p^{(n-k)}) = 0\,.$$

Если удается найти общее решение этого уравнения (n – k)-того порядка, содержащее *(n–k)* произвольных постоянных

$$p = \varphi(x, C_1, C_2, \ \ldots \ , C_{n-k})\,,$$

то, используя подстановку $y^{(k)} = p,\ p = p(x)$, получим уравнение вида

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ \ldots \ , C_{n-k})$$

и задача сводится к первому случаю.

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x) dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n\,.$$

Пример. Решить уравнение $y^{(IV)} - \dfrac{1}{x} y''' = 0$.

Решение. Дифференциальное уравнение относится к виду (2), поэтому используем подстановку $y''' = p$:

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 0\,.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}\,,$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}\,,$$

$$\ln p - \ln C_1 = \ln x\,,$$

$$\frac{p}{C_1} = x\,,$$

$$p = C_1 x\,.$$

Первый промежуточный интеграл имеет вид:

$$y''' = C_1 x\,.$$

Интегрируя три раза, имеем:

$$y'' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2\,,$$

$$y' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3\,,$$

$$y(x) = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$ — общее решение уравнения.

3. Дифференциальное уравнение не содержит независимой переменной, то есть имеет вид:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (3)$$

Порядок дифференциального уравнения можно понизить с помощью подстановки

$$y' = p,$$

где p — новая неизвестная функция переменной y.

Выразим производные функции y по переменной x через p и производные функции p по переменной y:

$$y' = p,$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right)}{dy}\frac{dy}{dx} = p\left(\left(\frac{dp}{dy}\right) + p\frac{d^2 p}{dy^2}\right)$$

и т. д.

Отсюда видно, что все производные от y по переменной x выражаются через производные от p по переменной y порядков на единицу меньших, поэтому данная подстановка снижает порядок дифференциального уравнения на единицу.

Пример. Решить уравнение $y \cdot y'' - (y')^2 = 0$.

Решение. Дифференциальное уравнение не содержит переменную x, поэтому относится к виду (3). Используем подстановку:

$$y' = p, \text{ где } p = p(y),\ y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0,$$

$$p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0.$$

Отсюда находим p:

$$p = 0,\ y' = 0,\ y = C$$

или

$$y\frac{dp}{dy}-p=0,$$

$$\frac{dp}{dy}=\frac{p}{y},$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y},$$

$$\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y},$$

$$p=C_1y.$$

Возвращаемся к замене:

$$\frac{dy}{dx}=C_1y,$$

$$\frac{dy}{y}=C_1dx,$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int C_1dx,$$

$$\ln y=C_1x+\ln C_2,$$

$$\ln y-\ln C_2=C_1x,$$

$$\ln\frac{y}{C_2}=C_1x,$$

$$y=C_2\cdot e^{C_1x}.$$

4. Левая часть дифференциального уравнения является точной производной от некоторой функции $\Phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, то есть уравнение имеет вид:

$$\left(\Phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})\right)'=0 \qquad (4)$$

Отсюда

$$\Phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=C \qquad (5)$$

является первым интегралом уравнения.

Если уравнение (5) в свою очередь является уравнением в точных производных, то можно найти второй интеграл и т. д.

Пример. Решить уравнение $y\cdot y''+\left(y'\right)^2=0$.

Решение. Можно заметить, что левая часть данного дифференциального уравнения есть производная от функции $y \cdot y'$, следовательно, уравнение можно записать в виде:

$$\left(y \cdot y'\right)' = 0.$$

Отсюда

$$y \cdot y' = C_1,$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = C_1,$$

$$ydy = C_1 dx,$$

$$\int ydy = C_1 \int dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2,$$

$y^2 = 2C_1 x + 2C_2$ — общее решение уравнения.

Однородные линейные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

где $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные на интервале (a, b) функции.

Если $f(x) = 0$, то уравнение (1) называется однородным; если $f(x) \neq 0$, то — неоднородным. Однородное уравнение имеет вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) имеет единственное решение $y = y(x)$, определенное на всем интервале (a, b) и удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad x_0 \in (a; b) \qquad (3)$$

Линейное уравнение особых решений не имеет, всякое его решение является частным решением этого уравнения.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \ (2)$$

Это уравнение имеет единственное решение на интервале (a, b), удовлетворяющее начальным условиям **(3)**. Если начальные условия нулевые, то уравнение **(2)** имеет только нулевое решение.

Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются решениями уравнения (2), то их линейная комбинация

$$C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, также является решением уравнения (2).

Рассмотрим понятие линейной зависимости и линейной независимости системы функций.

Определение. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a, b), если одна из функций системы является линейной комбинацией других для всех $x \in (a, b)$.

Таким образом, функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a, b), если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно не равно нулю, такие, что

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) + \ldots + \alpha_n \cdot y_n(x) = 0, \quad x \in (a; b) \quad (4)$$

Определение. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно независимыми на интервале (a, b), если равенство (4) выполняется лишь в том случае, когда все $\alpha_к = 0$.

Определение. Фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения (2) с непрерывными на интервале (a, b) коэффициентами называется система из *n* линейно независимых на интервале (a, b) решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ этого уравнения.

Для того чтобы решить уравнение (2), нужно найти его фундаментальную систему решений. Если найдена фундаментальная система решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ однородного уравнения (2), то функция

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x), \qquad (5)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, есть общее решение этого уравнения.

Можно показать, что всякое решение уравнения (2) на интервале (a, b) содержится в решении (5) при конкретных значениях $C_к$.

Чтобы система решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы определитель вида

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке из интервала (a, b). Определитель был введен в математику польским ученым Ю. Вронским (1776—1853 гг.) и называется определителем Вронского или вронскианом.

Примеры

1. Функции $y_1 = 1$ и $y_2 = x$ линейно независимы на любом интервале (a, b), так как определитель Вронского $W(x)=\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

2. Покажем, что функции $e^{\kappa_1 x}$ и $e^{\kappa_2 x}$ линейно независимы на любом интервале (a, b), если k_1 и k_2 — различные действительные числа. Для этого покажем, что их определитель Вронского $W(x)\neq 0$ для любых $x\in(a, b)$.

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2)x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}=(k_2-k_1)\cdot e^{(k_1+k_2)x}\neq 0 \cdot$$

3. Функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ $(\beta\neq 0)$ линейно независимы на любом интервале (a, b), так как их определитель Вронского отличен от нуля:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha cos\beta x-\beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta cos\beta x) \end{vmatrix}=$$

$$=e^{2\alpha x}\cdot\begin{vmatrix} cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha cos\beta x-\beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x+\beta cos\beta x \end{vmatrix}=$$

$$=\beta\cdot e^{2\alpha x}\neq 0.$$

4. Функции $e^{\kappa x}$ и $xe^{\kappa x}$ линейно независимы на любом интервале (a, b), так как линейная независимость функций *1* и x показаны в примере 1, и имеем

$$\alpha_1 e^{\kappa x} + \alpha_2 e^{kx} = e^{kx}(\alpha_1 + \alpha_2 x), \quad e^{kx} \neq 0 .$$

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного уравнения).

Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимые на интервале (a, b) решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (2) с непрерывными коэффициентами, то функция

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x), \ x \in (a, b),$$

где C_κ — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (2).

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать, что функции $e^x, xe^x, x^2 e^x$ линейно независимы при любых x.
2. Найти определитель Вронского системы функций $5, \cos^2 x, \sin^2 x, x \in R$. Являются ли эти функции линейно независимыми?
3. Составить однородное линейное дифференциальное уравнение, если задана его фундаментальная система решений:
   a) $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x$;
   b) $y_1 = e^{-3x}, y_2 = xe^{-3x}$;
   c) $y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x$.
4. Доказать, что функция $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}$ является общим решением дифференциального уравнения $y'' + 3y' - 10y = 0$.
5. Найти фундаментальную систему решений уравнения $y'' + y = 0$.

Ответы

2. $W(x) = 0$.
3.
$y'' - y = 0$,
$y'' + 6y' + 9y = 0$,
$y'' + 4y = 0$.
5. $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$.

Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (2).$$

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения).

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1) является суммой общего решения соответствующего линейного однородного уравнения (2) и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (1).

Замечание. Если правая часть неоднородного уравнения (1) состоит из нескольких слагаемых и для неоднородных уравнений с той же левой частью, равной каждому из этих слагаемых в отдельности, можно найти частное решение, то сумма этих частных решений будет частным решением всего уравнения (1).

В общем случае, нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения представляет большие трудности, поэтому рассмотрим метод нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения, если известны фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (2), а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Тогда общее решение линейного однородного уравнения (2) имеет вид:

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x). \qquad (6)$$

Основная идея метода состоит в том, что решение линейного неоднородного уравнения (1) ищем в виде:

$$z(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) + \ldots + C_n(x) \cdot y_n(x), \qquad (7)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции. Эти функции находят из следующей системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 + \quad \dots \quad + C_n'(x)\cdot y_n = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' + \quad \dots \quad + C_n'(x)\cdot y_n' = 0 \\ ------------------------- \\ C_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \qquad (8)$$

Определитель этой системы является определителем Вронского для фундаментальной системы функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ и поэтому отличен от нуля. Система (8) однозначно разрешима относительно неизвестных функций $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$.

Найдем и сами функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ в виде:

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx + A_1,$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)dx + A_2,$$

$$-------------$$

$$C_n(x) = \int C_n'(x)dx + A_n,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — произвольные постоянные.

Подставляя эти значения $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ в формулу (7), получим общее решение неоднородного уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$.

Решение. Составим соответствующее однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Ниже покажем, что фундаментальная система решений этого уравнения имеет вид:

$$y_1 = e^{-2x},\ y_2 = xe^{-2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x}.$$

Функции $C_1'(x), C_2'(x)$ найдем из системы (см (8)):

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{-2x} + C_2'(x)\cdot xe^{-2x} = 0 \\ -2C_1'(x)\cdot e^{-2x} + C_2'(x)\cdot(1-2x)e^{-2x} = e^{-2x} \end{cases}.$$

Отсюда $C_1'(x) = -x; C_2'(x) = 1$.

Интегрируя, получим

$$C_1(x) = -\frac{x^2}{2} + A_1;\ C_2(x) = x + A_2 \cdot$$

Тогда

$y(x) = A_1 e^{-2x} + A_2 x e^{-2x} + \frac{x^2}{2} e^{-2x}$ — общее решение неоднородного уравнения.

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Однородные уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (1),$$

где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа. Это уравнение имеет фундаментальную систему решений, которая состоит из степенных, показательных и тригонометрических функций.

Общее решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+\ldots+C_n\cdot y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — некоторые постоянные, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения (1).

Для построения фундаментальной системы решений будем использовать метод Эйлера. Для этого частное решение уравнения (1) ищется в виде

$$y=e^{kx}, \qquad (2)$$

где k — некоторое число (действительное или комплексное), которое требуется найти.

Подставим (2) в уравнение (1):

$$\left(\kappa^n+a_1\kappa^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\kappa+a_n\right)\cdot e^{\kappa x}=0\,.$$

Сокращая на $e^{\kappa x}$, получим:

$$\kappa^n+a_1\kappa^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\kappa+a_n=0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется характеристическим уравнением, его корни называются характеристическими числами.

Вид общего решения уравнения (1) зависит от корней характеристического уравнения (3).

Возможны три случая:

1. Все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — действительны и различны.

Фундаментальной системой решений будут функции

$$y_1=e^{k_1x},\ y_2=e^{k_2x},\ \ldots,\ y_n=e^{k_nx}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{\kappa_1x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+C_ne^{k_nx}.$$

2. Все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, ..., k_n$ — различны, но среди них имеются комплексные.

Пусть $k_1 = a - bi, \quad k_2 = a + bi$ — комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения. Этим корням соответствуют два линейно независимых частных решения:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx.$$

Чтобы получить фундаментальную систему решений, выпишем линейно-независимые частные решения, соответствующие другим сопряженным парам комплексных корней и всем действительным корням характеристического уравнения. Общее решение уравнения (1) есть линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами. При этом корням $k_1 = a - bi, \quad k_2 = a + bi$ в формуле общего решения соответствует выражение вида

$$e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx).$$

3. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные (эти корни могут быть действительными и комплексными)

Пусть k_1 — действительный корень уравнения (3) кратности m, тогда ему соответствует m линейно-независимых частных решений вида

$$e^{k_1x}, xe^{k_1x}, x^2e^{k_1x}, \ \ldots \ , x^{m-1}e^{k_1x},$$

а в формуле общего решения — выражение вида

$$e^{k_1x}\left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_mx^{m-1}\right).$$

Если $k_1 = a - bi, \quad k_2 = a + bi$ — комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения кратности m, то им соответствуют $2m$ линейно-независимых частных решения вида:

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{m-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{m-1}e^{ax}\sin bx \end{cases}$$

В формуле общего решения этим корням соответствуют выражения вида

$$e^{ax}\left(\left(C_1 + C_2x + \ldots + C_mx^{m-1}\right)\cos bx + \left(C_{m+1} + C_{m+2}x + \ldots + C_{2m}x^{m-1}\right)\sin bx\right).$$

Линейная комбинация линейно-независимых частных решений указанного выше вида, соответствующих всем простым и кратным действительным и комплексным корням дает общее решение уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$k^2(k-2) - (k-2) = 0,$$
$$(k-2)(k^2 - 1) = 0,$$
$$(k-2)(k-1)(k+1) = 0,$$
$$k_1 = -1; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 2.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^3 - 2k^2 + 4k - 8 = 0$$
$$k^2(k-2) + 4(k-2) = 0,$$
$$(k-2)(k^2 + 4) = 0,$$
$$k_1 = 2; \quad k_{2,3} = \pm 2\imath$$

.

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Пример 3. Решить уравнение $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} - 8y''' + 4y'' = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^6 - 4k^5 + 8k^4 - 8k^3 + 4k^2 = 0$$
$$k^2(k^4 - 4k^3 + 8k^2 - 8k + 4) = 0,$$
$$k^2(k^4 + 4k^2 + 4 - 4k^3 + 4k^2 - 8k) = 0,$$
$$k^2(k^2 - 2k + 2)^2 = 0,$$
$$k_1 = k_2 = 0; \quad k_3 = k_4 = 1 + \imath; \quad k_5 = k_6 = 1 - \imath.$$

Фундаментальная система решений уравнения имеет вид:

$$1,\ x,\ e^x \cos x,\ e^x \sin x,\ \ xe^x \cos x,\ xe^x \sin x.$$

Отсюда получим общее решение уравнения

$$y = C_1 + C_2 x + e^x\left(C_3 \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \cos x + C_6 x \sin x\right).$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $y'' - 64y = 0.$

2. $y^{(4)} - y''' = 0.$

3. $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0.$

4. $y'' + 4y' + 5y = 0.$

5. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0.$

6. $y''' - 4y'' - 5y' = 0.$

7. $y''' - y' = 0.$

8. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$

9. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y''' + y'' = 0.$

10. $y''' - 8y = 0.$

11. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$

12. $y^{(4)} - 16y = 0.$

2. Решить задачу Коши:

13. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

14. $y''' + y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2.$

15. $y''' + y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 3.$

Ответы

1.

1. $y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-8x}.$

2. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x.$

3. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x.$

4. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$

5. $y = (C_1 + C_2 x)\cos\sqrt{2}x + (C_3 + C_4 x)\sin\sqrt{2}x.$

6. $y = C_1 + C_2 e^{5x} + C_3 e^{-x}.$

7. $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}.$

8. $y = e^{x}(C_1 + C_2 x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$

9. $y = C_1 + C_2 x + e^{-x}(C_3 + C_4 x + C_5 x^2).$

10. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x).$

11. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}.$

12. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$

2.

13. $y = 2e^{2x} - e^{3x}$.

14. $y = e^{-x} - \cos x + 2\sin x$.

15. $y = (1+2x)e^{-x} - e^{x}$.

Неоднородные уравнения

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \qquad (4)$$

где $f(x)$ — непрерывная на интервале (a, b) функция.

Для соответствующего однородного дифференциального уравнения всегда можно найти фундаментальную систему решений, поэтому уравнение (4) может быть решено с помощью метода вариации произвольных постоянных (метода Лагранжа). На практике этим методом пользоваться не всегда удобно. В некоторых случаях для неоднородного уравнения (4) удается найти частное решение методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим эти случаи и укажем соответствующие им виды частных решений.

1.Функция $f(x) = P(x)$, где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ — многочлен степени m (в частности, он может быть постоянным числом, отличным от нуля). Возможны два случая:

a) если число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (4) ищем в виде

$$\bar{y} = Q(x),$$

где $Q(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами;

b) если число 0 является корнем характеристического уравнения кратности m, то частное решение уравнения (4) ищем в виде

$$\bar{y} = x^m Q(x).$$

2. Функция $f(x) = P(x)e^{ax}$, где a — некоторое число.

Возможны два случая:

a) если число a не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (4) имеет вид:

$$\bar{y} = e^{ax} Q(x);$$

b) если число a является корнем характеристического уравнения кратности m, то частное решение уравнения (4) имеет вид:

$$\bar{y} = x^m e^{ax} Q(x).$$

3. Функция $f(x)$ имеет вид $f(x)=e^{ax}\left(P_1(x)\cos bx+P_2(x)\sin bx\right)$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены соответственно (в частности, они могут быть постоянными числами и один из них может быть нулем).

Пусть число r — наивысшая степень многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Возможны два случая:

а) если число $a+bi$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (4) имеет вид:

$$\bar{y}=e^{ax}\left[Q_1(x)\cos bx+Q_2(x)\sin bx\right],$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — многочлены степени r с неопределенными коэффициентами;

b) если число $a+bi$ является корнем характеристического уравнения кратности m, то частное решение уравнения (4) имеет вид:

$$\bar{y}=x^m e^{ax}\left[Q_1(x)\cos bx+Q_2(x)\sin bx\right].$$

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

То есть если уравнение имеет вид:

$$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f_1(x)+f_2(x),$$

то частное решение этого уравнения будет $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2$, где $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ — частные решения вспомогательных уравнений $L(y)=f_1(x)$ и $L(y)=f_2(x)$.

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка находят широкое применение в различных приложениях, например, в физике при изучении колебательных процессов. Поэтому остановимся на этом виде уравнений подробнее.

Однородные уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

где p, q — некоторые действительные числа.

Для отыскания общего решения уравнения (1) нужно найти два его линейно независимых решения. Решение уравнения (1) будем искать
в виде

$$y = e^{kx}, \qquad (2)$$

где k — постоянная, которую нужно найти.

Подставим (2) в уравнение (1):

$$y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx},$$

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется характеристическим уравнением для уравнения (1).

При решении характеристического уравнения возможны три случая (в зависимости от знака дискриминанта D квадратного уравнения.

1. Корни характеристического уравнения k_1 и k_2 — действительны и различны ($D > 0$).

В этом случае получаем два линейно независимых частных решения:

$$y_1 = e^{k_1 x}; \qquad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Корни характеристического уравнения $k_1 = k_2 = k$ — действительные и равны ($D = 0$).

В этом случае получаем только одно частное решение: $y_1 = e^{kx}$. Нетрудно показать, что решением уравнения (1) будет и функция $y_2 = xe^{kx}$. Ранее показано, что функции $y = e^{kx}$ и $y = xe^{kx}$ линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} \text{ или}$$

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

3. Корни характеристического уравнения $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ — комплексные сопряженные.

Общее решение уравнения (1) в этом случае имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 4k + 4 = 0; \qquad k_1 = k_2 = 2.$$

Так как корни уравнения действительные и равны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 + 2k + 5 = 0; \qquad D = -16; \qquad k_1 = -1 + 2i; \qquad k_2 = -1 - 2i.$$

Так как корни уравнения являются комплексными числами, то общее решение имеет вид:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \; k_1 = 1; \quad k_2 = 6.$$

Так как корни уравнения действительные и различны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}.$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - k - 2 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = 2;$$

Так как корни уравнения действительные и различны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Пример 5. Решить уравнение $y'' - 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 9 = 0; \; k_1 = 3; \qquad k_2 = -3.$$

Так как корни уравнения действительные и различны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 10y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 + 2k + 10 = 0; \quad D = 4 - 40 = -36 = 36i^2, \; k_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i,$$

$$k_2 = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i.$$

Данное уравнение не имеет вещественных корней. В этом случае общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x.$$

Вычислим производную данной функции:

$$y' = -C_1 e^{-x} \cos 3x - 3C_1 e^{-x} \sin 3x - C_2 e^{-x} \sin 3x + 3C_2 e^{-x} \cos 3x$$

Для нахождения значений C_1 и C_2, воспользуемся начальными условиями. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} \cos \frac{3\pi}{2} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \\ -C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} \cos \frac{3\pi}{2} - 3C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} \sin \frac{3\pi}{2} - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} \sin \frac{3\pi}{2} + 3C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} \cos \frac{3\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = 0 \\ 3C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ 3C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3} \end{cases}$$

Искомое решение приобретает вид: $y = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3} e^{-x} \cos 3x$.

Неоднородные уравнения

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (4)$$

где p, q — постоянные действительные числа.

Чтобы найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения, нужно выполнить следующие действия:

1) найти общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения;

2) найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения;

3) написать общее решение неоднородного дифференциального уравнения в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Частное решение уравнения (4) можно найти методом вариации произвольных постоянных. Однако, на практике этим методом пользоваться не всегда удобно. Если в правой части уравнения (4) стоит многочлен, показательная функция, тригонометрические функции синус или косинус, произведение их или линейные комбинации, то для отыскания частного решения применяют метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим три случая.

1. Правая часть уравнения (4) есть многочлен n-степени $f(x) = P(x)$:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0 \cdot$$

В этом случае частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения ищут также в виде многочлена. В зависимости от коэффициентов p и q уравнения (4) частное решение нужно искать в виде:

Если $q \neq 0$, то $\bar{y} = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$
Если $q = 0,\ p \neq 0$, то $\bar{y} = x\left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n\right)$
Если $q = 0,\ p = 0$, то $\bar{y} = x^2\left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n\right)$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$, нужно подставить $\bar{y}$ в уравнение (4) вместо неизвестной функции. В левой части уравнения (4), как и в правой части, получится многочлен, коэффициентами которого являются линейные комбинации коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$. Приравнивая коэффициенты при x в одинаковых степенях в левой и правой части равенства, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$. Решая систему, найдем эти коэффициенты и запишем частное решение уравнения (4).

Пример 1. $y'' - 4y' = x$.

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения: $y'' - 4y' = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k = 0$$

$$k(k-4) = 0$$

$$k_1 = 0,\ k_2 = 4$$

Так как корни характеристического уравнения действительные и не равные, то общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y^* = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения. В правой части уравнения стоит многочлен первой степени $P(x) = x$. Так как $p = -4, q = 0$, то частное решение будем искать в виде

$$\bar{y} = x\,(Ax + B) \text{ или}$$

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx\ .$$

Определим неизвестные коэффициенты A и B. Вычислим первую
и вторую производные и подставим их в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$\bar{y}' = 2Ax + B; \quad \bar{y}'' = 2A.$$

$$2A - 8Ax - 4B = x.$$

Составим систему: $\begin{cases} -8A = 1 \\ 2A - 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{8} \\ B = -\dfrac{1}{16} \end{cases}$.

Итак, частное решение: $\bar{y} = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x$. Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x.$$

2. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения (4) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ — многочлен n-степени.

При выборе частного решения в этом случае удобно пользоваться следующими указаниями:

1) Если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид: $\bar{y}(x) = e^{\alpha x}\left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n\right).$
2) Если α является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид: $\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot x\left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n\right).$
3) Если α является кратным корнем характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид: $\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot x^2\left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n\right).$

Пример 2. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{-x}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 5k + 6 = 0,\quad D = 25 - 24 = 1,\quad k_1 = \frac{5+1}{2} = 3,\quad k_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Так как корни характеристического уравнения действительны и различны, то общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y^* = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения. Правая часть данного неоднородного уравнения относится к случаю 2:

$$f(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}, \quad f(x) = 2x\cdot e^{-x},$$

следовательно, $P_n(x) = 2x, \quad \alpha = -1$.

Так как $\alpha = -1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид:

$$\bar{y}(x) = e^{-x}(Ax + B).$$

Найдем производные первого и второго порядка данной функции:

$$\bar{y}'(x) = A\cdot e^{-x} - (Ax + B)\cdot e^{-x},$$

$$\bar{y}''(x) = -A\cdot e^{-x} - A\cdot e^{-x} + (Ax + B)\cdot e^{-x}$$

Подставим $\bar{y}'(x)$, $\bar{y}''(x)$, $\bar{y}(x)$ в исходное уравнение и получим:

$$-A\cdot e^{-x} - A\cdot e^{-x} + (Ax + B)\cdot e^{-x} - 5\left(A\cdot e^{-x} - (Ax + B)\cdot e^{-x}\right) + 6\left(e^{-x}(Ax + B)\right) = 2x\cdot e^{-x}.$$

Разделим обе части уравнения на $e^{-x} \neq 0$:

$$-A - A + Ax + B - 5A + 5Ax + 5B + 6Ax + 6B = 2x,$$

$$12Ax - 7A + 12B = 2x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях и получим систему:

$$\begin{cases} 12A = 2 \\ -7A + 12B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = \dfrac{7}{72} \end{cases}$$

Таким образом, получаем: $\bar{y}(x) = \left(\dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{72}\right)\cdot e^{-x}$.

Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = y^*(x) + \bar{y}(x), \text{ то есть}$$

$$y(x) = C_1\cdot e^{3x} + C_2\cdot e^{2x} + \left(\frac{1}{6}x + \frac{7}{72}\right)\cdot e^{-x}.$$

3. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$$

где $P_n(x)$ — многочлен n-степени от x, $Q_m(x)$ — многочлен m-степени от x.

Для нахождения частного решения удобно пользоваться следующими рекомендациями:

Из коэффициентов α и β составляем числа вида $\alpha \pm i\beta$.

1) Если $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид: $$\bar{y} = e^{\alpha x}\left(S_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x\right).$$
2) Если $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид: $$\bar{y} = xe^{\alpha x}\left(S_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x\right).$$

$S_k(x)$, $N_k(x)$ — многочлены степени k от x, где $k = \max\{m, n\}$.

Замечание. Если в выражении для $f(x)$ $P_n(x) \equiv 0\left(Q_m(x) \equiv 0\right)$, то частное решение все равно ищут по указанным выше формулам.

Пример 3. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 16y = 7\cos 3x$. Найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$.

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$y'' + 16y = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 16 = 0$$

$$k^2 - 16i^2 = 0$$

$$(k - 4i)(k + 4i) = 0$$

$$k_1 = 4i,\ k_2 = -4i.$$

Так как корни характеристического уравнения комплексные, то общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y^* = e^{0x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right) = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x.$$

Найдем частное решение исходного неоднородного уравнения. Правая часть данного неоднородного уравнения относится к случаю 3.

В общем виде

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right).$$

По условию

$$f(x) = 7\cos 3x,$$

то есть $P_n(x) = 7\ (n = 0),\ Q_m(x) \equiv 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 3$.

Так как числа $\alpha \pm i\beta = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, $k = 0$, то частное решение имеет вид:

$$\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$$

Найдем производные первого и второго порядка этой функции:

$$(\bar{y})' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$$

$$(\bar{y})'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

Подставим $\bar{y}, (\bar{y})', (\bar{y})''$ в исходное уравнение и преобразуем это выражение.

Получим:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 16A\cos 3x + 16B\sin 3x = 7\cos 3x$$

$$7A\cos 3x + 7B\sin 3x = 7\cos 3x$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 7A = 7 \\ 7B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получаем: $\bar{y} = \cos 3x$

Общее решение имеет вид: $y = y^* + \bar{y} = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + \cos 3x$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1,\quad y'(0) = 4$:

$$y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + \cos 3x,$$

$$y' = -4C_1\sin 4x + 4C_2\cos 4x - 3\sin 3x.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1\cos 0x + C_2\sin 0x + \cos 0x = 1 \\ -4C_1\sin 0x + 4C_2\cos 0x - 3\sin 0x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 1 \\ 4C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, $y = -\cos 4x + \sin 4x + \cos 3x$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 4. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + y = \cos 2x + \sin x$. Найти общее решение уравнения.

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$y'' + y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 1 = 0,$$

$$k^2 - i^2 = 0,$$

$$(k - i)(k + i) = 0,$$

$$k_1 = i,\ k_2 = -i.$$

Так как корни характеристического уравнения комплексные, то общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение однородного уравнения будем искать в виде

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2,$$

где $\bar{y}_1$ — частное решение уравнения $y'' + y = \cos 2x$, $\bar{y}_2$ — частное решение уравнения $y'' + y = \sin x$.

Рассмотрим отдельно эти уравнения.

1) $y'' + y = \cos 2x$.

Так как числа $\alpha \pm i\beta = \pm 2i \quad (\alpha = 0,\ \beta = 2)$ не являются корнями характеристического уравнения, $k = 0$, то частное решение имеет вид:

$$\bar{y}_1 = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Найдем производные первого и второго порядка этой функции:

$$(\bar{y}_1)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$(\bar{y}_1)'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Подставим $\bar{y}_1, (\bar{y}_1)', (\bar{y}_1)''$ в исходное уравнение и преобразуем это выражение.

Получим:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = \cos 2x,$$

$$-3A\cos 2x - 2B\sin 2x = \cos 2x.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение уравнения $y''+y=\cos 2x$ имеет вид: $\bar{y}_1=-\frac{1}{3}\cos 2x$.

2) $y''+y=\sin x$.

Так как числа $\alpha\pm i\beta=\pm i$ $(\alpha=0,\beta=1)$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид:

$$\bar{y}_2=x\left(A\cos x+B\sin x\right).$$

Найдем производные первого и второго порядка этой функции:

$$\bar{y}_2{}'=A\cos x+B\sin x+x\left(-A\sin x+B\cos x\right),$$

$$\bar{y}_2{}''=-2A\sin x+2B\cos x+x\left(-A\cos x-B\sin x\right).$$

Подставим $\bar{y},(\bar{y})',(\bar{y})''$ в исходное уравнение и преобразуем это выражение.

Получим:

$$-2A\sin x+2B\cos x+x\left(-A\cos x-B\sin x\right)+x\left(A\cos x+B\sin x\right)=\sin x,$$

$$-2A\sin x+2B\cos x-Ax\cos x-Bx\sin x+Ax\cos x+Bx\sin x=\sin x.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}-2A=1\\ 2B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\ B=0\end{cases}.$$

Таким образом, частное решение уравнения $y''+y=\sin x$ имеет вид: $\bar{y}_2=-\frac{1}{2}x\cos x$.

Тогда частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\bar{y}=-\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y=y^*+\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить однородные линейные дифференциальные уравнения:

1. $y''-7y'+12y=0$.
2. $y''+y=0$.
3. $y''-y=0$.

4. $y'' - y' = 0$.

5. $y'' = 9y$.

6. $y'' - 6y' + 8y = 0$.

7. $y'' + 3y' + 2y = 0$.

8. $y'' - 2y' = 0$.

9. $y'' + 16y = 0$.

10. $y'' + 6y' + 10y = 0$.

2. Решить задачу Коши:

11. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$.

12. $y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 8$.

13. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -1$.

14. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 4$.

3**.** Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения методом неопределенных коэффициентов:

15. $y'' - 2y' + y = 4e^x$.

16. $y'' + 2y' + y = 3x^2 + x - 4$.

17. $y'' - y = 8xe^x$.

18. $y'' + 2y' + y = x^2 \sin x$.

19. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$.

20. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

21. $y'' - 4y' = 2x^2 - 5x + 1$.

22. $y'' - 2y' + y = \dfrac{1-x}{e^x}$.

23. $y'' + y + 4x \sin x = 0$.

24. $y'' + y' = x + e^x$.

25. $y'' - 3y' = 6x + 1 + e^{3x}$.

26. $y'' + 9y = \cos 3x + 3$.

27. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$.

28. $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x$.

29. $y'' - y = \cos^2 x$.

30. $y'' + y = \sin x \cos 3x$.

4. Решить задачи Коши:

31. $y'' - 2y' = e^x\left(x^2 + x - 3\right), \quad y(0) = y'(0) = 2$.

32. $y'' + y = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

33. $y'' + y = 6\cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$.

34. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x}{e^x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

5. Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных:

35. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

36. $y'' + y = tgx$.

37. $y'' + 9y = tg3x$.

38. $y'' + y = 2ctgx$.

39. $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

40. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

Ответы

1. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.
2. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
3. $y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x$.
4. $y = C_1 + C_2 e^x$.
5. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.
6. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.
7. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.
8. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.
9. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.
10. $y = e^{-3x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.
11. $y = 2xe^{3x}$.
12. $y = e^{2x}\left(\cos 3x + 2\sin 3x\right)$.
13. $y = \left(3 + 2x\right)e^{-x}$.
14. $y = -\cos x + 2\sin x$.

15. $y = e^x(C_1 + C_2 x) + 2x^2 e^x$.

16. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + 3x^2 - 11x + 12$.

17. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^x(2x^2 - 2x)$.

18. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cos x + \left(x - \frac{3}{2}\right)\sin x$.

19. $y = x^3 + x + C_1 + C_2 e^{4x}$.

20. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7$.

21. $y = C_1 + C_2 e^{4x} + x\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$.

22. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + e^x)$.

23. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 \cos x - x \sin x$.

24. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + e^x)$.

25. $y = C_1 + C_2 e^{3x} - x^2 - x + \frac{1}{3}xe^{3x}$.

26. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{6}x \sin 3x + \frac{1}{3}$.

27. $y = \frac{1}{3}xe^{3x} + 3x^2 + 2x + C_1 + C_2 e^{3x}$.

28. $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{3}e^x \sin 3x$,

29. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cos 2x$.

30. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{30}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 2x$.

31. $y = (1 - x - x^2)e^x + e^{2x}$.

32. $y = \cos x + \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}x \cos x$.

33. $y = 2\cos x - 3\sin x + 3x \sin x$.

34. $y = 2e^{-x} - 2e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x$.

35. $y = (C_1 + C_2 x)e^x - xe^x + xe^x \ln|x|$.

36. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln\left| tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$.

37. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{18}\cos 3x \cdot \ln\left|\frac{\sin 3x - 1}{\sin 3x + 1}\right|$,

38. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|$.

39. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 4\sqrt{x}$.

40. $y = e^{x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{x}$.

ГЛАВА 5. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}\,y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}\,y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты a_{ij} — некоторые действительные числа, x — аргумент, $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ — искомые функции.

Система (1) называется *системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*.

Рассмотрим метод Эйлера, который позволяет найти решение системы (1), не сводя ее к уравнению n-го порядка.

Решение системы будем искать в виде

$y_1 = \gamma_1 e^{\kappa x}, y_2 = \gamma_2 e^{\kappa x}, \ldots, y_n = \gamma_n e^{\kappa x}$, где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \kappa$ — некоторые постоянные.

Подставив эти функции в систему (1) и поделив на $e^{\kappa x}$, получим систему уравнений относительно неизвестных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\gamma_1 + a_{12}\,\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - k)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\,\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\gamma_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) имеет ненулевое решение при таких k, при которых определитель этой системы равен 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Уравнение (3) называется *характеристическим* уравнением для системы (1), корни этого уравнения $k_1, k_2, \ldots, k_n$ называются *характеристическими числами* системы (1).

Возможны три случая:

1. Корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots, k_n$ **действительные и различные.**

Для каждого из корней k_i составляем систему (2), из которой находим коэффициенты $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$.

Решение однородной системы (1), соответствующее корню k_i, имеет вид:

$$y_{1i} = \alpha_{1i}\, e^{\kappa_i x}, \; y_{2i} = \alpha_{2i}\, e^{\kappa_i x}, \ldots, y_{ni} = \alpha_{ni} e^{\kappa_i x}.$$

То есть:

1 решение, соответствующее корню k_1 имеет вид:

$$y_{11} = \gamma_{11}\, e^{\kappa_1 x}, \; y_{21} = \gamma_{21}\, e^{\kappa_1 x}, \ldots, y_{n1} = \gamma_{n1} e^{\kappa_1 x}.$$

2 решение, соответствующее корню k_2 имеет вид:

$$y_{12} = \gamma_{12}\, e^{\kappa_2 x}, \; y_{22} = \gamma_{22}\, e^{\kappa_2 x}, \ldots, y_{n2} = \gamma_{n2} e^{\kappa_2 x}.$$

- -

n-ое решение, соответствующее корню k_n имеет вид:

$$y_{1n} = \gamma_{1n}\, e^{\kappa_n x}, \; y_{2n} = \gamma_{2n}\, e^{\kappa_n x}, \ldots, y_{nn} = \gamma_{nn} e^{\kappa_n x}.$$

Фундаментальная система решений имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\, e^{\kappa_1 x}, \alpha_{12}\, e^{\kappa_1 x}, \ldots, \alpha_{1n} e^{\kappa_1 x}, \\ \alpha_{21}\, e^{\kappa_2 x}, \alpha_{22}\, e^{\kappa_2 x}, \ldots, \alpha_{2n} e^{\kappa_2 x}, \\ ----------------- \\ \alpha_{n1}\, e^{\kappa_n x}, \alpha_{n2}\, e^{\kappa_n x}, \ldots, \alpha_{nn} e^{\kappa_n x}. \end{cases}$$

Общее решение системы (1) имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1\, \alpha_{11}\, e^{\kappa_1 x} + C_2\, \alpha_{12}\, e^{\kappa_2 x} + \ldots + C_n\, \alpha_{1n}\, e^{\kappa_n x}, \\ y_2 = C_1 \alpha_{21}\, e^{\kappa_1 x} + C_2\, \alpha_{22}\, e^{\kappa_2 x} + \ldots + C_n\, \alpha_{2n}\, e^{\kappa_n x}, \\ ------------------------------ \\ y^n = C_1\, \alpha_{n1}\, e^{\kappa_1 x} + C_2 \alpha_{n2}\, e^{\kappa_2 x} + \ldots + C_n\, \alpha_{nn}\, e^{\kappa_n x}. \end{cases}$$

2. Корни характеристического уравнения различны, но среди них есть комплексные.

Пусть среди корней характеристического уравнения есть два комплексно-сопряженных корня $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$. Этим корням будут соответствовать решения:

$$y_{11} = \alpha_{11} e^{(\alpha+i\beta)x}, y_{21} = \alpha_{21} e^{(\alpha-\beta i)x}, \ldots, y_{n1} = \alpha_{n1} e^{(\alpha+i\beta)x}$$
$$y_{12} = \alpha_{12} e^{(\alpha+i\beta)x}, y_{22} = \alpha_{22} e^{(\alpha+i\beta)x}, \ldots, y_{2n} = \alpha_{2n} e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Коэффициенты α_{j1}, α_{j2} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы уравнений (2). Отделяя в этих решениях действительную и мнимую часть, получим два действительных линейно-независимых частных решения системы (1).

Линейные комбинации построенных линейно-независимых частных решений войдут в общее решение системы.

3. Среди корней характеристического уравнения есть кратные.

Пусть *k_1* есть корень кратности *m,* тогда ему соответствует решение

$$y_1 = P_1(x)e^{k_1 x}, y_2 = P_2(x)e^{k_1 x}, \ldots, y_n = P_n(x)e^{k_1 x},$$

где $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ многочлены от *x*, степень которых не превышает *m–1*.

Заметим, что *m* коэффициентов этих многочленов являются произвольными, а остальные коэффициенты через них выражаются.

Полагая поочередно один из произвольных коэффициентов равным 1, а остальные коэффициенты — равными 0, получим *m* линейно-независимых частных решений.

Кратный корень *k_1* может быть действительным или комплексным.

Если *k_1* — действительный корень, то построенные частные решения также будут действительными.

Если *k_1* — комплексный корень вида $k_1 = \alpha + i\beta$, то сопряженное число $k_2 = \alpha - i\beta$ также будет корнем характеристического уравнения, причем той же кратности *m*. Можно найти изложенным выше методом *m* линейно-независимых комплексных частных решений для корня $k_1 = \alpha + i\beta$ и, отделив в них действительные и мнимые части, построить 2*m* линейно-независимых действительных частных решений (решения для корня $k_2 = \alpha - i\beta$ будут линейно-зависимыми с решениями для корня $k_1 = \alpha + i\beta$).

Взяв линейную комбинацию всех построенных частных решений, получим общее решение системы (1).

Пример 1. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2\,y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 3\,y_2. \end{cases}$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\kappa & 2 \\ 1 & 3-\kappa \end{vmatrix} = 0$$

или $k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\, k_2 = 4$.

Частное решение системы ищем в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\kappa x},\, y_2 = \gamma_2 e^{\kappa x}.$$

Построим частное решение для корня $k_1 = 1$. Числа γ_1, γ_2 будем искать из системы (2):

$$\begin{cases} \gamma_1 + 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

Откуда $\gamma_1 = -2\gamma_2$, поэтому одно из чисел γ_1, γ_2 можно выбирать произвольно. Пусть $\gamma_2 = 1$, тогда $\gamma_1 = -2$. Таким образом, числу $k_1 = 1$ соответствует частное решение $y_{11} = -2\,e^x,\, y_{12} = e^x$.

Аналогично найдем частное решение для корня $k_2 = 4$. Числа γ_1, γ_2 будем искать из системы (2):

$$\begin{cases} -2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

Откуда $\gamma_1 = \gamma_2$. Полагая $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, получим второе частное решение $y_{21} = e^{4x},\, y_{22} = e^{4x}$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = -2C_1\, e^x + C_2\, e^{4x}, \\ y_2 = C_1\, e^x + C_2\, e^{4x}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти решение системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2, \end{cases}$, удовлетворяющее начальному условию $y_1(0) = 1,\, y_2(0) = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\kappa & 1 \\ -1 & 1-\kappa \end{vmatrix} = 0$$

или

$(3-k)(1-k)+1=0,\ k^2-4k+4=0,\ (k-2)^2=0 \Rightarrow k_1=k_2=2$, то есть имеем случай кратных корней. Найдем одно из решений системы в виде:

$$y_1=\gamma_1 e^{2x},\ y_2=\gamma_2 e^{2x}.$$

Коэффициенты γ_1, γ_2 будем искать из системы (2):

$$\begin{cases} \gamma_1+\gamma_2=0, \\ -\gamma_1-\gamma_2=0, \end{cases} \Rightarrow \gamma_1=-\gamma_2.$$

Полагая $\gamma_2=-1$, получим $\gamma_1=1$. Тогда первое частное решение системы имеет вид:

$$y_{11}=e^{2x},\ y_{12}=-e^{2x}.$$

Второе частное решение системы будем искать в виде:

$$y_{21}=(A_1x+A_2)e^{2x},$$

$$y_{22}=(B_1x+B_2)e^{2x}.$$

Подставим эти выражения в исходную систему. Сокращая на e^{2x} и приравнивая коэффициенты при x и свободные члены, получим систему:

$$\begin{cases} A_1-A_2+B_1=0, \\ A_2+B_2=0, \end{cases}$$

откуда $A_2=-B_2,\ A_1=-B_1-B_2$, где B_1, B_2 — произвольные.

В качестве линейно-независимых решений этой системы можно взять $A_1=1;\ A_2=0,\ B_1=-1;\ B_2=0$ и $A_1=1;\ A_2=1,\ B_1=0;\ B_2=-1$.

Тогда линейно-независимые частные решения исходной системы имеют вид:

$$y_{11}=e^{2x},\ \ y_{21}=-e^{2x},$$

$$y_{12}=(1+x)e^{2x},\ y_{22}=-xe^{2x}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1=C_1e^{2x}+C_2(1+x)e^{2x}, \\ y_2=-C_1e^{2x}-C_2\,x\,e^{2x}. \end{cases}$$

Найдем теперь решение системы, удовлетворяющее начальному условию $y_1(0)=1,\ y_2(0)=0$.

Составим систему и решим ее:

$$\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ -C_1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=1, \\ C_1=0. \end{cases}$$

Искомое частное решение имеет вид:

$$\begin{cases} y_1=(1+x)e^{2x}, \\ y_2=-x\,e^{2x}. \end{cases}$$

Пример 3. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=-7y_1+y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=-2y_1-5y_2. \end{cases}$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -7-\kappa & 1 \\ -2 & -5-\kappa \end{vmatrix}=0$$

или

$$(-7-k)(-5-k)+2=0,\ k^2+12k+37=0,\ \Rightarrow k_1=-6+i;\ k_2=-6-i$$
.

То есть корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные. Решение системы ищем в виде:

$$y_1=\gamma_1 e^{kx},\ y_2=\gamma_2 e^{kx}.$$

Коэффициенты γ_1,γ_2 для корня $k_1=-6+i$ будем искать из системы (2):

$$\begin{cases} (-1-i)\gamma_1+\gamma_2=0, \\ -2\gamma_1-(1-i)\gamma_2=0, \end{cases} \Rightarrow \gamma_1=1;\ \gamma_2=1+i.$$

Решение системы:

$$y_{11}=e^{(-6+i)x},\ \ y_{21}=(1+i)e^{(-6+i)x}.$$

Составим систему (2) для корня $k_2=-6-i$

$$\begin{cases} (-1+i)\gamma_1+\gamma_2=0, \\ -2\gamma_1+(1+i)\gamma_2=0, \end{cases} \Rightarrow \gamma_1=1;\ \gamma_2=1-i.$$

Вторая система решений:

$$y_{12}=e^{(-6-i)x},\ \ y_{22}=(1-i)e^{(-6-i)x}$$

Частные решения можно записать в виде:

$$y_{11} = e^{-6x}\cos x,\;\; y_{21} = e^{-6x}(\cos x - \sin x),$$
$$y_{12} = e^{-6x}\sin x,\;\; y_{22} = e^{-6x}(\cos x + \sin x).$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-6x}\cos x + C_2\, e^{-6x}\sin x, \\ y_2 = C_1 e^{-6x}(\cos x - \sin x) + C_2\, e^{-6x}(\cos x + \sin x). \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 10y_1 - 4y_2 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = -4y + 4z \end{cases}.$

4. $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -6y - 3z \end{cases}.$

5. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y \end{cases}.$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}.$

8. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases}.$

9. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}.$

10. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z \end{cases}.$

2. Найти решение системы уравнений, удовлетворяющее начальному условию:

11. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}, \; y_1(0) = 0, \; y_2(0) = -1 .$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}, \; x(0) = 1, \; y(0) = 1.$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}, \; x(0) = 1, \; y(0) = -5 .$

Ответы

1.

1. $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \\ y_2 = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x} \end{cases}.$

2. $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} \\ y_2 = 2C_1 e^{x} + 5C_2 e^{-2x} \end{cases}.$

3. $\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{5x} \\ z = C_1 - 4C_2 e^{5x} \end{cases}.$

4. $\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{-x} \\ z = -2C_1 - 3C_2 e^{-x} \end{cases}.$

5. $\begin{cases} y_1 = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \\ y_2 = e^{2x}(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x) \end{cases}.$

6. $\begin{cases} x = 5C_1 \cos 2t + 5C_2 \sin 2t \\ y = (-4C_1 + 2C_2)\cos 2t - (2C_1 + 4C_2)\sin 2t \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x = e^{-t}(C_1 + C_2 t) \\ y = e^{-t}(2C_1 + C_2(2t - 1)) \end{cases}.$

8. $\begin{cases} x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ y = (C_1 - 2C_2)\cos 2t + (2C_1 + C_2)\sin 2t \end{cases}.$

9. $\begin{cases} y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) \\ z = e^{-2x}(-C_1 + C_2(1-x)) \end{cases}.$

10. $\begin{cases} y = C_1 e^{x} + C_2\, e^{2x} \\ z = -C_1 e^{x} - \dfrac{3}{2} C_2\, e^{2x} \end{cases}.$

2.

11. $\begin{cases} y_1 = e^{2x} - e^{3x} \\ y_2 = e^{2x} - 2e^{3x} \end{cases}.$

12. $\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}.$

13. $\begin{cases} x = 2e^{t} - e^{3t} \\ y = -4e^{t} - e^{3t} \end{cases}.$

ТЕСТ 1

1. Определить порядок дифференциального уравнения

$$y'' - 2x + 5y''' + y = 0:$$

1) 0; **2)** 1; **3)** 2; **4)** 3.

2. Среди указанных функций найдите решение уравнения

$$y' - 2y = 0:$$

1) $\sin x$; **2)** e^x; **3)** e^{2x}; **4)** x.

3. При каком значении k функция $y = kx^2$ является решением дифференциального уравнения $xy' - 2y = 0$ с начальным условием $y(1) = 3$:

1) 3; **2)** 0; **3)** –1; **4)** –3.

4. Известно общее решение $y = Cx^3$ дифференциального уравнения. Укажите его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 8$:

1) $2x^3$; **2)** $8x^3$; **3)** x^3; **4)** $-x^3$.

5. Найдите дифференциальное уравнение семейства линий $y = Cx$.

1) $y' = x$; **2)** $y = y'x$; **3)** $y' = y$; **4)** $y' = xy$.

6. Даны дифференциальные уравнения:

1) $y' - \sqrt{y} = x$, 2) $xdx - ydy = 0$, 3) $(x + y)y' = 1$,

4) $xy'' - y' = 0$, 5) $x^2y' + 2y = 3$.

Функция $y = x^2$ является решением

1) 1 и 3 дифференциальных уравнений
2) 2, 4 и 5 дифференциальных уравнений
3) 2 дифференциального уравнения
4) 1 и 4 дифференциальных уравнений
5) 4 и 5 дифференциальных уравнений

7. Общим решением уравнения $xydx + (x+1)dy = 0$ является

1) $xy - x - C = 0$ 2) $y + x + C = 0$ 3) $\ln(xy) = C$

4) $\ln y + x = C$ 5) $y = C(x+1)e^{-x}$

8. Дифференциальное уравнение $(2xy + y^2)y' = x^2 + y^2$ является

1) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными
2) однородным дифференциальным уравнением
3) линейным дифференциальным уравнением

4) уравнением Бернулли
5) дифференциальным уравнением в полных дифференциалах

9. Дифференциальное уравнение $y'\operatorname{ctg} x + \ln y = 2$ является
1) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными
2) однородным дифференциальным уравнением
3) линейным дифференциальным уравнением
4) уравнением Бернулли
5) дифференциальным уравнением в полных дифференциалах

10. Дифференциальное уравнение $(x^2+6xy^2)dx+(6x^2y-y^3)dy=0$ является
1) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными
2) однородным дифференциальным уравнением
3) линейным дифференциальным уравнением
4) уравнением Бернулли
5) дифференциальным уравнением в полных дифференциалах

11. Дифференциальное уравнение $y' + y\cos x = \cos x$ является
1) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными
2) однородным дифференциальным уравнением
3) линейным дифференциальным уравнением
4) уравнением Бернулли
5) дифференциальным уравнением в полных дифференциалах

12. Дифференциальное уравнение $y' = y + xy^2$ является
1) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными
2) однородным дифференциальным уравнением
3) линейным дифференциальным уравнением
4) уравнением Бернулли
5) дифференциальным уравнением в полных дифференциалах

13. Общим решением уравнения $xydx+(x+1)dy=0$ является

1) $xy-x-C=0$ 2) $y+x+C=0$ 3) $\ln(xy)=C$

4) $\ln y + x = C$ 5) $y=C(x+1)e^{-x}$

14. Общим решением уравнения $(x+2y)dx-xdy=0$ является

1) $xy=Cx+y$ 2) $y=Cx^2-x$ 3) $C(x+y)=xy$

4) $x^2+y^2=C$ 5) $y=C(x^2+x)$

15. Общим решением уравнения $xy' - 2y = 2x^4$ является

1) $y = Cx^2 - xy$ 2) $y = x^2 + Cx^4$ 3) $y = x^2 + Cxy$

4) $x + 2y = C$ 5) $y = Cx^2 + x^4$

16. Общим решением уравнения $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$ является

1) $xe^{-y} - y^2 = C$ 2) $2y + xe^{-y} = C$ 3) $Cy + xe^{-x} = 0$

4) $xe^{-y} + Cy^2 = 1$ 5) $x^2 + Ce^{-y} = y$

17. Решением задачи Коши $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0{,}5$ является функция

1) $y = x^2 - 1$ 2) $y(2 - x) = 1$ 3) $y(1 + x) = 1$ 4) $y = x^2 + 1$ 5) $y(1 + x) = 3$

18. Решением задачи Коши $y' = 2xe^{-x^2}, \quad y(0) = -1$ является функция

1) $y = e^{-x^2}$ 2) $y = x - e^{-x^2}$ 3) $y = x - 1$ 4) $y = -e^{-x^2}$

5) $y = x^3 + x - 1$

19. График функции, являющейся решением задачи Коши $y + \operatorname{ctg} x \cdot y' = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$ пересекает ось Oy в точке

1) (0;–2) 2) (0;–1) 3) (0; 2) 4) (0; 3) 5) (0; –3)

Тест 2

Часть А

1. Решением дифференциального уравнения $y' = 2\sqrt{y}$ является

1) $y = \frac{1}{2}y^2$ 3) $y = \sin x + C$

2) $y = (x + C)^2$ 4) $y = C \cdot \sqrt{x}$.

2. Общим решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ является

1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 3) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

2) $y = Ce^x$ 4) $y = C_1\left(e^{2x} + x\right)$.

3. Дифференциальное уравнение $(2x - y)dy + (x + 3y)dx = 0$ является:
1) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;
2) однородным дифференциальным уравнением;
3) линейным дифференциальным уравнением;
4) уравнением Бернулли.

4. Общим решением уравнения $y' - 2xy = 2x$ является:

1) $y = 5x + C$ 3) $y = Ce^{x^2} - 1$

2) $y = Cx^2 + 1$ 4) $x + 2y = C$.

5) Фундаментальную систему решений уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ образуют функции:

1) $y_1 = x^2,\ y_2 = x$ 3) $y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{2x}$

2) $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{5x}$ 4) $y_1 = \sin 2x,\ y_2 = \cos 2x$.

Часть В

1. Какое уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением?
2. Какое решение дифференциального уравнения называется частным? В чем его геометрический смысл?
3. Сколько решений может иметь дифференциальное уравнение?
4. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?
5. Дать определение частного решения. Как оно связано с формулой общего решения?
6. Какое решение дифференциального уравнения первого порядка называется особым?
7. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным? Приведите пример.
8. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным? Как его решают?
9. Сформулируйте условие, при выполнении которого левая часть уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является полным дифференциалом некоторой функции.
10. Какой вид имеет общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах?
11. Как понижают порядок дифференциального уравнения, если

оно не содержит явно искомой функции?

12. Запишите общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения.

13. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного уравнения.

10. Запишите определитель Вронского для системы решений y_1, y_2, y_3 линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка.

11. В чем заключается идея метода вариации постоянных?

12. Какой вид имеет общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

13. При каких видах правой части для отыскания частного решения удобно пользоваться методом неопределенных коэффициентов?

Учебно-методическое издание

Автор-составитель:
Кертанова Валерия Викторовна.

Практикум по решению дифференциальных уравнений

Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по направлению
44.03.05 «Педагогическое образование»
(с двумя профилями подготовки),
профили «Математика и информатика»,
«Математика и физика»