\

Ю. В. Шевцова

Алгебраические методы в математике Древнего мира

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Саратов 2019

Хронология

Основные периоды в истории математики

В истории математики принято различать **четыре периода**:

1. Период накопления начальных математических сведений.
2. Период математики постоянных величин.
3. Период математики переменных величин.
4. Период современной математики.

Хронологические рамки основных периодов:

1. Период накопления начальных математических сведений
   $\approx$700 (500) тыс. л. до н.э. -- $\approx$VII в. до н.э.
2. Период математики постоянных величин
   VII в. до н.э. – XVI в. н. э.
3. Период математики переменных величин
   XVII в. – XVIII в.
4. Период современной математики
   с XIX в. до н.в.

1. Период накопления начальных математических сведений

Три стадии формирования понятия числа

- умение считать;
- умение называть числа;
- умение фиксировать результаты счета.

Способы фиксации результатов счета

- изображения чисел завязыванием узлов на веревке, называемого *квипусом,*
- нанизывание на шнурок или палочку косточек, раковин или кусочков дерева, называемого *четником*,
- фиксации чисел путем нанесения на палочки или кости зарубок (позже палочки получили название *бирка*).

Пальцево-ручная арифметика

В процессе счета многие народы используют пальцевую арифметику – пальцы рук и ног, что привело позднее к использованию систем счисления с основаниями 5 и 10. Пальцевая арифметика служила для установления взаимно однозначного соответствия при счете, обмене предмета на предмет, позволяя фиксировать количество отсчитанных предметов. Также она применялась для выполнения некоторых арифметических действий, в частности, умножения. Рассмотрим некоторые приемы умножения на пальцах.

1. Умножение чисел от 1 до 9 на 9.

Пример 1. Умножить число 3 на число 9.

Решение.

1) Перенумеруйте пальцы обеих рук.
2) Загните палец №3 (соответствует числу 3).
3) Слева будет 2 незагнутых пальца – количество десятков искомого произведения. Справа будет 7 незагнутых пальцев – количество единиц искомого произведения.

Ответ: $3 \times 9 = 27$

Пример 2. Умножить число 7 на число 9.

Решение.

1) Перенумеруйте пальцы обеих рук.
2) Загните палец №7 (соответствует числу 7).
3) Слева 6 незагнутых пальцев - количество десятков искомого произведения. Справа будет 3 незагнутых пальцев – количество единиц искомого произведения.

Ответ: $7 \times 9 = 63$.

2. Умножение числа a на число b, где 5<a<10, 5<b<10.

Пример 1. Умножить число $a = 6$ на $b = 8$.

Решение.

1) Найдем числа x и y, на которые данные числа a, b больше пяти:

$x = a - 5 = 6 - 5 = 1$

$y = b - 5 = 8 - 5 = 3$.

2) Сожмем руки в кулак и разогнем на одной руке 1 палец ($x = 1$), а на другой руке 3 пальца $(y = 3)$.

3) Количество загнутых пальцев на первой руке $z = 4$, количество незагнутых пальцев на второй руке $t = 2$.
4) Сложим числа x и y: $x + y = 1 + 3 = 4$ - количество десятков искомого произведения.
5) Перемножим числа z и t: $z \times t = 4 \times 2 = 8$ - количество единиц искомого произведения.

Ответ: $6 \times 8 = 48$.

Задание 1. Докажите справедливость данного способа умножения.

Ответ: $(x+y)\times 10 + z \times t = [(a-5)+(b-5)]\times 10 + [5-(a-5)]\times[5-(b-5)] = (a+b-10)\times 10 + (10-a)\times(10-b) = 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab = ab$.

2. Математика Древнего мира

Достижения древнеегипетской математики

1. Создание десятичной системы счисления.
2. Выделение основных арифметических операций с натуральными и дробными числами.
3. Разработка общих правил и некоторых методов решения типовых задач.
4. Найдены: алгоритм нахождения объема усеченной пирамиды, эмпирические формулы для нахождения площади круга, объема и поверхности полушара.
5. Некоторые геометрические задачи содержат зачатки тригонометрии.

Достижения древневавилонской математики

- **В арифметике:**

1. Создание позиционной системы счисления, в поздние времена – введение специального символа для обозначения отсутствующего разряда внутри числа – «нуля».

2. Создание шестидесятеричной нумерации, используемой в астрономии до настоящего времени.
3. Разработка строгой системы мер.

- **В алгебре:**

1. Разработка методов решения линейных и квадратных уравнений, а также простейших уравнений высоких степеней.
2. Выработаны некоторые алгебраические методы, общие правила и приемы решения систем уравнений.

- **В геометрии:**

1. Открытие теоремы Пифагора и «пифагоровых троек».
2. Введение градусного измерения окружности.
3. Начато изучение правильных многоугольников.

Достижения древнекитайской математики

1. Введение положительных и отрицательных чисел и правил действий над ними.
2. Появление идеи десятичных дробей.
3. Создание метода нахождения наибольшего общего делителя.
4. Формулировка правил решения уравнений первой степени и их систем методом двойного ложного положения.
5. Решение систем линейных уравнений методом фан-чэн.
6. Решение уравнений высших степеней методом небесного элемента.

Достижения древнеиндийской математики

1. Введение десятичной позиционной системы счисления.
2. Получение хороших приближений для некоторых иррациональных чисел.
3. Разработка методов решения линейных и квадратных уравнений, а также неопределенных уравнений первой и второй степени
4. Суммирование прогрессий.

5. Разработка основ комбинаторики.
6. Использование теоремы Пифагора и «пифагоровых троек».

Источники информации о математике Древнего мира

- Основными памятниками математической науки Древнего Египта являются папирусы относящиеся к периоду Среднего Царства (ок 21-18 вв до н.э.). Наиболее ценными для истории математики являются папирусы: Московский, Ахмеса, Берлинский, Кахунский и Кожаный свиток.
- Вавилонские клинописные математические тексты охватывают период от начала 2 тыс. до н.э (эпоха династии Хаммурапи) до возникновения греческой математики.
- Классическим математическим произведением Древнего Китая является «Девять книг о математическом искусстве» («Арифметика в девяти главах»), составленная в 152 г. до н.э.
- Сведения о математических знаниях индийцев относятся к эпохе составления религиозно-философских книг «Вед» — «Знаний», составление которых относится к II—I тысячелетиям до н. э. Один из разделов древнеиндийской ведической литературы, носящий математический характер, носит название «Шульба-сутра».

3. Алгебраические методы, применяемые в математике Древнего мира

3.1 Древнеегипетские алгебраические методы

1. Древнеегипетский метод нахождения неизвестной величины (метод «аха», метод ложного положения, метод проб, regula falsi)

1.1 Решение линейных уравнений.

Пример 1. (задача №26 из папируса Ринда) Количество и его четвертая часть дают вместе 15.

Решение.

В папирусе решение начинается так «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1, вместе 5». Затем 15 делится на 5, умножается частное на 4 и получается неизвестное 12.

Используя современную символику, укажем основные этапы решения. Обозначим неизвестную величину («аха») через x. Тогда задача сводится к решению уравнения вида $x+\frac{x}{4}=15$.

1 шаг. Предположим, что неизвестная величина $x_1=4$, тогда получим $x_1+\frac{x_1}{4}=5$, а должно быть 15.

2 шаг. $\frac{15}{5}=3$, то есть мы ошиблись в 3 раза.

3 шаг. Делаем поправку в допущение того, что $x_1=4$, то есть умножаем на 3: $x=3x_1=3\cdot 4=12$.

Ответ: $x=12$.

Замечание. Если предположить, что неизвестная величина x равна другому значению, результат получится тот же самый.

Задание 1. Решите задачи из папируса Ринда методом ложного положения

1) **(задача №24)** $x+\frac{x}{7}=19$;

2) **(задача №27)** $x+\frac{x}{5}=21$;

3) **(задача №34)** $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=10$.

4) **(задача №37)** Три раза я вхожу в свой шефель (за мукой): моя третья часть и треть моей трети и моя девятая часть добавляются ко мне, и вот я выхожу уже целым (т.е. шефель у меня уже полон). Чем же буду я, говорящий тебе это?

Указание. Вся емкость (шефель) принимается за единицу**,** x - часть целого, которая заполняется при одном входе.

Ответы: 1) $16\frac{5}{8}$, 2)$17\frac{1}{2}$, 3) $5\frac{5}{7}$, 4) $\frac{9}{32}$.

1.2 Решение некоторых видов неполных квадратных уравнений и систем второй степени с двумя неизвестными.

Пример 1. (задача №3 из Кахунского папируса) Отношение двух чисел равно $2:1\frac{1}{2}$, сумма их квадратов 400. Найти эти числа.

Решение.

В современных обозначениях задача сводится к нахождению двух неизвестных x и y, удовлетворяющих системе уравнений

$$x:y=2:1\frac{1}{2}$$

$$x^2+y^2=400.$$

Египтянин для решения применяет метод ложного положения. В современных обозначениях основные этапы решения выглядят так:

1 шаг. Допустим, что $x_1=2$, тогда $y_1=1\frac{1}{2}$. Тогда ${x_1}^2+{y_1}^2=6\frac{1}{4}$, а должно быть 400.

2 шаг. $\frac{400}{6\frac{1}{4}} = 64$, то есть мы ошиблись в 64 раза. Значит при действиях с числами мы ошиблись в $\sqrt{64} = 8$ раз.

3 шаг. Делаем поправку в допущение того, что $x_1 = 2$, $y_1 = 1\frac{1}{2}$, то есть умножаем их на 8: $x = 8x_1 = 16$, $y = 8y_1 = 12$.

Ответ: искомые числа 8 и 12.

Задание 1. Решите задачу №1 из Берлинского папируса методом ложного положения.

Если тебе будет сказано разделить 100 квадратных локтей на две неизвестные части (то есть на два квадрата) и $\frac{3}{4}$ стороны одной взять за сторону другой, дай же мне каждую из неизвестных частей (то есть стороны неизвестных квадратов).

Указание. Задача сводится к решению уравнения $x^2 + y^2 = 100$. Принять $x_1 = 1$.

Ответ: 8 и 6.

Задание 2. Решите задачу №6 из Московского папируса методом ложного положения.

Три четверти длины являются шириной, а площадь равна 12. Требуется определить стороны прямоугольника.

Ответ: 4 и 3.

3.2 Древневавилонские алгебраические методы

1. Древневавилонские методы решения квадратных уравнений и систем уравнений

1.1 Решение квадратных уравнений с помощью таблиц вида $n^2 + n$

Таблица 1

n	n^2	n^2+n
1	**1**	**2**
2	**4**	**6**
3	**9**	**12**
4	**16**	**20**
5	**25**	**30**
6	**36**	**42**
7	**49**	**56**
8	**64**	**72**
9	**81**	**90**
10	**100**	**110**

А) Решение уравнений вида $x^2 + x = q$**.**

Пример 1. Решить уравнение $x^2 + x = 72$**.**

Решение.

Число $q = 72$ есть в третьей колонке таблицы 1. Тогда неизвестное число находим в первой колонке той же строки.

Ответ: $x = 8$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 + x = 70$**.**

Решение.

Поскольку числа $q = 70$ нет в третьей колонке таблицы 1, решение находится приближенно методом линейной интерполяции. Вставим число $q = 70$ между ближайшими числами (56 и 72), а в первой колонке той же строки напишем x:

n	n^2+n
…	**…**
7	56

x	**70**
8	72

Составим пропорцию

$$\frac{x-7}{8-7}=\frac{70-56}{72-56}.$$

$$x-7=\frac{14}{16}\Rightarrow x=7\frac{7}{8}$$

Ответ: в десятичных дробях $x\approx 7{,}875$.

Замечание. Решение по современной формуле дает $x\approx 7{,}88$.

Б) Решение уравнений вида $ax^2+x=c$, $a>0, c>0$.

1 шаг. Умножим обе части уравнения на a:

$a^2x^2+ax=ac\Rightarrow (ax)^2+ax=ac$.

2 шаг. Сделаем замену: $y=ax$, тогда имеем уравнение $y^2+y=c_1$, где $c_1=ac$.

3 шаг. Получили уравнение вида $x^2+x=q$, решаемое по таблице 1. Определяем значение y.

4 шаг. Зная y, по таблице обратных величин находим x.

Пример 3. Решить уравнение $4x^2+x=20$.

Решение.

1. Умножим обе части уравнение на $a=4$. Получим

$$16x^2+4x=80\Rightarrow (4x)^2+4=80.$$

2. Сделаем замену: $y=4x$, тогда получим уравнение $y^2+y=80$.

3. Применим таблицу 1.

n	n^2+n
…	**…**
8	72
y	**80**
9	90

4. Составим пропорцию

$$\frac{y-8}{9-8}=\frac{80-72}{90-72}.$$

$$y-8=\frac{4}{9}\Rightarrow y=8\frac{4}{9}.$$

5. Тогда $x=\frac{y}{4}=\frac{19}{9}$

Ответ: в десятичных дробях $x\approx 2{,}111$.

Замечание. Решение по современной формуле дает $x\approx 2{,}115$.

В) Решение уравнений вида $ax^2+bx=c$, $a>0,\ b>0, c>0$.

1 шаг. Умножим обе части уравнения на $\frac{a}{b^2}$:

$$\frac{a^2}{b^2}x^2+\frac{ab}{b^2}x=\frac{ac}{b^2}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}x\right)^2+\frac{a}{b}x=c_1,\text{ где } c_1=\frac{ac}{b^2}.$$

2 шаг. Сделаем замену: $y=\frac{a}{b}x$, тогда имеем уравнение $y^2+y=c_1$.

3 шаг. Получили уравнение вида $x^2+x=q$, решаемое по таблице 1. Определяем значение y.

4 шаг. Зная y, по таблице обратных величин 2 находим x.

5 шаг. По таблице обратных величин находим $x=\frac{b}{a}y$.

Пример 4. Решить уравнение $2x^2+3x=81$.

Решение.

1. Умножим обе части уравнения на $\frac{a}{b^2}=\frac{2}{9}$:

$$\frac{4}{9}x^2+\frac{6}{9}x=18\Rightarrow\left(\frac{2}{3}x\right)^2+\frac{2}{3}x=18.$$

2. Сделаем замену $y=\frac{2}{3}x$, тогда получим уравнение $y^2+y=18$.

3. Применим таблицу 1:

n	n^2+n
…	**…**
3	12
y	**18**
4	20

4. Составим пропорцию

$$\frac{y-3}{4-3}=\frac{18-12}{20-12}.$$

$$y-3=\frac{3}{4}\Rightarrow y=\frac{15}{4}.$$

5. Тогда $x=\frac{3}{2}y=\frac{45}{8}$.

Ответ: в десятичных дробях $x\approx 5{,}625$.

Замечание. Решение по современной формуле дает $x\approx 5{,}66$.

Задание 1. Решите уравнения с помощью таблицы вида n^2+n**.** Сравните результаты с результатами, полученными по современным формулам.

1) $x^2+x=70$;

2) $5x^2+x=20$;

3) $3x^2+2x=16$;

4) $5x^2+3x=54$;

5) $4x^2+5x=875$;

6) (из клинописной таблички) $11x^2+7x=6\frac{1}{4}$.

Используйте таблицу

n	n^2	n^2+n
0,5	0,25	0,75
1	1	2

Ответы:

№	по таблице	по формулам
1)	6,57	6,59
2)	1,90	1,902
3)	2	2
4)	3	3
5)	14,17	14,18
6)	0,48	0,5

1.2 Решение систем двух уравнений, одно из которых – уравнение второй степени, с двумя неизвестными.

А) Решение системы вида $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$**.**

1 шаг. Введем замену переменных $\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}+t \\ y=\dfrac{a}{2}-t \end{cases}$. Очевидно, что выполняется $x+y=a$.

2 шаг. Найдем поправочное слагаемое t. Имеем

$$xy=\left(\frac{a}{2}+t\right)\left(\frac{a}{2}-t\right)=\frac{a^2}{4}-t^2=b \Rightarrow t^2=\frac{a^2}{4}-b.$$

Тогда $t=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-b}$.

3 шаг. Находим неизвестные величины, используя поправочное слагаемое

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b},$$

$$y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} x+y=50 \\ xy=600 \end{cases}$**.**

Решение.

1. Имеем $a=50$, $b=600$.

Пусть $\begin{cases} x=25+t \\ y=25-t \end{cases}$.

2. Составим произведение xy и найдем поправочное слагаемое t:

$xy=625-t^2=600 \Rightarrow t^2=25 \Rightarrow t=5$.

3. Находим неизвестные величины, используя поправочное слагаемое

$x=25+5=30$, $y=25-5=20$.

Ответ: $x=30$, $y=20$.

Б) Решение системы вида $\begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases}$**.**

1 шаг. Введем замену переменных $\begin{cases} x=t+\dfrac{a}{2} \\ y=t-\dfrac{a}{2} \end{cases}$. Очевидно, что выполняется $x+y=a$.

2 шаг. Найдем поправочное слагаемое t. Имеем

$$xy=\left(\frac{a}{2}+t\right)\left(\frac{a}{2}-t\right)=t^2-\frac{a^2}{4}=b \Rightarrow t^2=\frac{a^2}{4}+b.$$

Тогда $t=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+b}$.

3 шаг. Находим неизвестные величины, используя поправочное слагаемое

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b},$$

$$y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}.$$

Задание 1. Решите систему $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 10 \end{cases}$.

Ответ: $x = 5$, $y = 2$.

1.3 Решение систем двух уравнений, одно из которых - уравнение второй степени, а другое – вида $x \pm y = a$.

А) Решение методом подстановки.

Пример 2.6 (древневавилонский период) Площади двух моих квадратов я сложил: 25,25. Сторона второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и еще 5. (Найти стороны квадратов).

Решение.

1. Задача сводится к решению системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1525 \\ y = \frac{2}{3}x + 5 \end{cases}$.

2. Подставим y в первое уравнение

$$\begin{cases} 13x^2 + 60x = 13500 \\ y = \frac{2}{3}x + 5 \end{cases}$$

3. Решив квадратное уравнение, получим $x = 30$. Тогда из второго уравнения $y = 25$.

Ответ: $x = 30$, $y = 25$.

Б) Решение методом замены переменных.

- Если одно из уравнений системы $x + y = a$, то замена $\begin{cases} x = \frac{a}{2} + t \\ y = \frac{a}{2} - t \end{cases}$.

- Если одно из уравнений системы $x - y = a$, то замена $\begin{cases} x = t + \frac{a}{2} \\ y = t - \frac{a}{2} \end{cases}$.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x + y = 6 \end{cases}$ с помощью замены переменных.

Решение.

1. Выполним замену переменных $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$.

2. Тогда из первого уравнения получим

$x^2 + y^2 = (3+t)^2 + (3-t)^2 = 26 \Rightarrow 2t^2 = 8 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2$.

3. Подставляя найденное значение t в выражения для неизвестных, получим

$\begin{cases} x = 3 + 2 = 5 \\ y = 3 - 2 = 1 \end{cases}$.

Ответ: $x = 5$, $y = 1$.

Пример 2. (из клинописной таблички) Решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ x - y = 10 \end{cases}$ с помощью замены переменных.

Решение.

1. Выполним замену переменных $\begin{cases} x = t + 5 \\ y = t - 5 \end{cases}$.

2. Тогда из первого уравнения получим

$x^2 + y^2 = (t+5)^2 + (t-5)^2 = 1300 \Rightarrow 2t^2 = 1250 \Rightarrow t^2 = 625 \Rightarrow t = 25$.

3. Подставляя найденное значение t в выражения для неизвестных, получим

$\begin{cases} x = 25 + 5 = 30 \\ y = 25 - 5 = 20 \end{cases}$.

Ответ: $x = 30$, $y = 20$.

Пример 3. (из клинописной таблички) Длина и ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади: 3,3 (то есть 183) получилось у меня. Затем и длину, и ширину сложил: 27. Спрашивается: длина, ширина, площадь.

Решение.

Если x - длина, y - ширина, то задача сводится к решению системы вида

$$\begin{cases} x - y + xy = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}.$$

1. Сложим оба уравнения $xy + 2x = 210 \Rightarrow x(y+2) = 210$.

2. Введем замену $u = y + 2$, тогда последнее уравнение запишется в виде $xu = 210$.

3. С учетом замены переменных второе уравнение преобразуется следующим образом:

$x + u - 2 = 27 \Rightarrow x + u = 29$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} xu = 210 \\ x + u = 29 \end{cases}$. Решим ее методом замены переменных.

4. $\begin{cases} x = 14\frac{1}{2} + t \\ u = 14\frac{1}{2} - t \end{cases}$. Тогда $xu = 14\frac{1}{2} \cdot 14\frac{1}{2} - t^2 = 210\frac{1}{4} - t^2 = 210$.

Откуда $t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

5. Находим выражения для неизвестных величин

$$\begin{array}{l} x = 14\frac{1}{2} + t = 14\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 15 \\ u = 14\frac{1}{2} - t = 14\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 14 \Rightarrow y = u - 2 = 12 \end{array}.$$

6. Вычислим площадь $15 \cdot 12 = 180$.

Ответ: длина 15, ширина 12, площадь 180.

Пример 4. (из клинописной таблички) Длина и ширина. Длина превышает ширину на 4. Площадь 32. Узнай длину и ширину.

Решение.

«4 раздели пополам, получишь 2. Два умножь на само себя, ты видишь площадь – 4. Площади 32 и 4 сложи, ты видишь 36. Узнай корень квадратный из 36. (Это) 6. 6 и 2 сложи, ты видишь 8 – (это) длина. От 6 отними 2, ты видишь 4 – (это) ширина».

В современной символике:

$$\begin{cases} xy = 32 \\ x - y = 4 \end{cases}.$$

Замена

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 2 \end{cases}.$$

$$xy = t^2 - 2^2 = 32 \Rightarrow t^2 = 4 + 32 = 36 \Rightarrow t = 6.$$

$$\begin{cases} x = 6 + 5 = 8 \\ y = 6 - 2 = 4 \end{cases}.$$

Замечание. Таким образом, задачи подобного вида сводятся к решению системы уравнений

$$\begin{cases} xy = S \\ x - y = a. \end{cases}$$

Общий метод решения:

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{a}{2} \\ y = t - \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow xy = t^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = S \Rightarrow t^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + S \Rightarrow t = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + S} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + S} \pm \frac{a}{2}.$$

1.4 Решение уравнения $x + \frac{1}{x} = a$, $a > 0$ методом замены переменных.

1 шаг. Положим $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + t \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{a}{2} - t \end{cases}$. Очевидно, что исходное равенство выполняется.

2 шаг. Найдем поправочное слагаемое t. Перемножим оба уравнения системы:

$$1=\left(\frac{a}{2}+t\right)\left(\frac{a}{2}-t\right)=\frac{a^2}{4}-t^2 \Rightarrow t^2=\frac{a^2}{4}-1.$$

Тогда $t=\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$.

3 шаг. Находим x, используя поправочное слагаемое

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}.$$

Пример 1. Решить уравнение $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$

Решение.

1. Положим $\begin{cases} x=\frac{5}{3}+t \\ \frac{1}{x}=\frac{5}{3}-t \end{cases}$.

2. Составим произведение

$$1=\left(\frac{5}{3}+t\right)\left(\frac{5}{3}-t\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^2-t^2 \Rightarrow t^2=\frac{16}{9} \Rightarrow t=\frac{4}{3}.$$

3. Находим неизвестную величину с учетом t:

$$x=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=3.$$

Ответ: $x=3$.

Задание 1. Решите уравнения методом замены переменных (условия записаны в шестидесятеричной нумерации):

1) $x+\frac{1}{x}=6;10$;

2) $x+\frac{10}{x}=7$;

3) $x+\frac{8}{x}=6;36$.

Ответы: 1) $x=6$; 2) $x=2$; 3) $x=5$.

1.5 Решение системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными методом замены переменных.

Пример 1. (из клинописной таблички) Решить систему

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y)-0;1(x-y)^2=15 \\ xy=10,0 \end{cases}$$

Решение.

В десятичной нумерации система запишется так:

$$\begin{cases} 20(x+y)-(x-y)^2=900 \\ xy=600 \end{cases}.$$

1. Положим

$$\begin{cases} x=s+t \\ y=s-t \end{cases}.$$

Тогда система запишется в виде:

$$\begin{cases} 20\cdot 2s-(2t)^2=900 \\ s^2-t^2=600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10s-t^2=225 \\ s^2-t^2=600 \end{cases}.$$

2. Вычтем из первого уравнения второе и получим квадратное уравнение: $s^2-10s=375$. Откуда находим $s=25$.

3. Из второго уравнения находим $t=5$.

4. Используя найденные значения вспомогательных переменных, получим

$$\begin{aligned} x&=s+t=25+5=30 \\ y&=s-t=25-5=20 \end{aligned}.$$

Ответ: $x=30$, $y=20$.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} 9(x-y)^2=x^2 \\ xy=10,0 \end{cases}$.

Решение.

В десятичной нумерации система запишется так:

$$\begin{cases} 9(x-y)^2=x^2 \\ xy=600 \end{cases}.$$

1. Имеем $x > y$. Тогда $\begin{cases} 3(x-y) = x \\ xy = 600 \end{cases}$.

2. Положим

$$\begin{cases} x = s + t \\ y = s - t \end{cases}.$$

Тогда система запишется в виде:

$$\begin{cases} 6t = s + t \\ s^2 - t^2 = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 5t \\ s^2 - t^2 = 600 \end{cases}.$$

3. Подставим выражение для s через t во второе уравнение

$24t^2 = 600 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5$.

4. Находим $s = 5t = 25$.

5. Используя найденные значения вспомогательных переменных, получим

$$\begin{aligned} x &= s + t = 25 + 5 = 30 \\ y &= s - t = 25 - 5 = 20 \end{aligned}.$$

Ответ: $x = 30$, $y = 20$.

Задание 1. (из клинописной таблички) Решите системы уравнений методом замены переменных (условия записаны в шестидесятеричной нумерации):

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 21{,}40 \\ x + y = 50 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} xy - (x-y)(x+y) = 1{,}13{,}20 \\ x + y = 1{,}40 \end{cases}$;

Ответы: 1) $x = 30$, $y = 20$; 2) $x = 60$, $y = 40$.

2. Древневавилонские методы решения кубических уравнений

2.1 Решение кубических уравнений вида помощью таблиц вида $n^3 + n^2$.

Таблица 2

n	n^2	n^3	$n^3 + n^2$
1	**1**	**1**	**2**
2	**4**	**3**	**12**

3	**9**	**27**	**36**
4	**16**	**64**	**80**
5	**25**	**125**	**150**
6	**36**	**216**	**252**
7	**49**	**343**	**392**
8	**64**	**512**	**576**
9	**81**	**729**	**810**
10	**100**	**1000**	**1110**

А) Решение уравнений вида $x^3 + x^2 = c$.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 + x^2 = 392$.

Решение.

Поскольку число 392 есть в последней колонке таблицы 2, то в первой колонке той же строки находим $x = 7$.

Ответ: $x = 7$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 + x^2 = 40$.

Решение.

Поскольку числа $c = 40$ нет в последней колонке таблицы 2, решение находится приближенно методом линейной интерполяции. Вставим число $c = 40$ между ближайшими числами (36 и 80), а в первой колонке той же строки напишем x:

n	$n^3 + n^2$
…	…
3	36
x	**40**
4	80

Составим пропорцию

$$\frac{x-3}{4-3} = \frac{40-36}{80-36}.$$

$x-3=\frac{4}{44} \Rightarrow x=3\frac{1}{11}$

Ответ: в десятичных дробях $x \approx 3{,}0909... \approx 3{,}091 \approx 3{,}1$.

Б) Решение уравнений вида $ax^3+bx^2=c$, $a>0, c>0$.

1 шаг. Умножим обе части уравнения на $\frac{a^2}{b^3}$:

$$\frac{a^3}{b^3}x^3+\frac{a^2}{b^2}x^2=\frac{a^2}{b^3}c \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 x^3+\left(\frac{a}{b}\right)^2 x^2=c_1, \text{ где } c_1=\frac{a^2}{b^3}c.$$

2 шаг. Сделаем замену: $y=\frac{a}{b}x$, тогда имеем уравнение $y^3+y^2=c_1$.

3 шаг. Получили уравнение вида $x^3+x^2=c$**,** решаемое по таблице 2. Определяем значение y.

4 шаг. Зная y, по таблице обратных величин находим x.

<u>Замечание 1.</u> Уравнение вида $ax^3+x^2=c$ решается умножением на a^2.

<u>Замечание 2.</u> Уравнение вида $x^3+bx^2=c$ решается умножением на $\frac{1}{b^3}$.

<u>Замечание 3.</u> Уравнение вида $x^2(ax+1)=c$ решается умножением на a^2.

Пример 1. Решить уравнение $3x^3+x^2=28$, используя таблицу 2.

Решение.

1. Умножим обе части уравнения на $a^2=9$

$27x^3+9x^2=252 \Rightarrow (3x)^3+(3x)^2=252$.

2. Сделаем замену: $y=3x$. Получим уравнение $y^3+y^2=252$, которое решается с помощью таблицы 2. Находим $y=6$.

3. Определяем $x=\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}\cdot 6=2$.

Ответ: $x=2$.

Пример 2. Решить уравнение $5x^3+x^2=11$, используя таблицу 2.

Решение.

1. Умножим обе части уравнения на $a^2 = 25$

$125x^3 + 25x^2 = 275 \Rightarrow (5x)^3 + (5x)^2 = 275$.

2. Сделаем замену: $y = 5x$. Получим уравнение $y^3 + y^2 = 275$, которое решается приближенно с помощью таблицы 2.

n	$n^3 + n^2$
…	…
6	252
y	**275**
7	392

Составим пропорцию

$$\frac{y-6}{7-6} = \frac{275-252}{392-252}.$$

$$y - 6 = \frac{23}{140}$$

Находим $y \approx 6{,}164$

3. Определяем $x = \frac{1}{5} y \approx 1{,}23$.

Ответ: $x \approx 1{,}23$.

Пример 3. Решить уравнение $8x^3 + 6x^2 = 7$, используя таблицу 2.

Решение.

1. Умножим обе части уравнения на $\frac{a^2}{b^3} = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$:

$$\frac{64}{27}x^3 + \frac{16}{9}x^2 = \frac{56}{27} \Rightarrow \left(\frac{4x}{3}\right)^3 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2 = \frac{56}{27} = 2\frac{2}{27}.$$

2. Сделаем замену: $y = \frac{4x}{3}$, тогда имеем уравнение $y^3 + y^2 = 2\frac{2}{27} \approx 2$.

3. Получили уравнение вида $x^3 + x^2 = c$, решаемое по таблице 2. Определяем значение $y \approx 1$.

4. Зная y, по таблице обратных величин находим $x \approx \frac{3}{4}$.

Ответ: $x \approx \frac{3}{4}$.

Задание 1. Решите кубические уравнения по таблице 2:

1) $x^3 + x^2 = 56$;

2) $x^3 + x^2 = 82$;

3) $x^3 + x^2 = 144$;

4) $x^3 + x^2 = 60$.

Ответы: 1) $x \approx 39{,}4$, 2) $x \approx 4{,}03$, 3) $x = 4$, 4) $x \approx 2{,}38$.

Задание 2. Решите кубическое уравнение из клинописной таблички, умножив обе части уравнения на 12^2:

$x^2(12x+1) = 1;45$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

3. Древневавилонские методы приближенного вычисления корней из целых чисел.

3.1 Приближенное вычисление квадратных корней с помощью линейной интерполяции из таблиц $\sqrt{n}$.

Пример 1. Вычислить $\sqrt{120}$.

Решение.

Вставим в таблицу квадратных корней дополнительную сточку между числами 100 и 121:

n	$\sqrt{n}$
…	…
100	10
120	**x**
121	11

Составим пропорцию

$$\frac{x-10}{11-10}=\frac{120-100}{121-100}$$

$$x-10=\frac{20}{21}$$

$x \approx 10\frac{20}{21} \approx 10{,}952$ (в десятичных дробях)

Ответ: $\sqrt{120} \approx 10\frac{20}{21} \approx 10{,}952$.

Замечание. Приближенное значение для $\sqrt{120}$, найденное с помощью калькулятора, равно 10,95445, то есть погрешность в вычислении в третьем знаке после запятой.

3.2 Приближенное вычисление кубических корней с помощью линейной интерполяции из таблиц $\sqrt[3]{n}$.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{120}$.

Решение.

Вставим в таблицу кубических корней дополнительную сточку между числами 64 и 125:

n	$\sqrt[3]{n}$
…	…
64	4
120	**x**
125	15

Составим пропорцию

$$\frac{x-4}{15-4}=\frac{120-64}{125-64}$$

$$x-4=\frac{56}{61}$$

$x \approx 4\frac{56}{61} \approx 4{,}918$ (в десятичных дробях)

Ответ: $\sqrt[3]{120} \approx 4\frac{56}{61} \approx 4{,}92$.

Замечание. Приближенное значение для $\sqrt[3]{120}$, найденное с помощью калькулятора, равно 4,9324, то есть погрешность в вычислении во втором знаке после запятой.

Задание 1. Вычислите с помощью таблиц. Ответ запишите в шестидесятеричной нумерации.

1) $\sqrt{150}$;

2) $\sqrt{200}$;

3) $\sqrt[3]{200}$;

4) $\sqrt[3]{100}$.

Ответ: 1) 12;15, 2) 14;8, 3) 5;50, 4) 4;36.

3.3 Вычисление квадратных корней по приближенной формуле.

Вавилонянам был известен метод приближенного вычисления квадратного корня, который в современных обозначениях имеет вид

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a},$$

где a^2 - наибольший целый точный квадрат, содержащийся в числе $N = a^2 + r$.

Действительно:

$$\left(a + \frac{r}{2a}\right)^2 = a^2 + r + \frac{r^2}{4a^2}.$$

В силу малости последнего слагаемого им можно пренебречь.

Пример 1. Вычислить $\sqrt{5}$.

Решение.

Имеем $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \approx 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25$.

Ответ: $\sqrt{5} \approx 2{,}25$.

Замечание. Приближенное значение для $\sqrt{5}$, найденное с помощью калькулятора, равно 4,9324, то есть погрешность в вычислении во втором знаке после запятой.

Задание 1. Найдите приближенные значения

1) $\sqrt{15}$;

2) $\sqrt{37}$;

3) $\sqrt{61}$.

Ответы: 1) 4, 2) 6,083, 3) 7,857.

3.3 Древнекитайские алгебраические методы

Алгебраические методы изложены в книгах VII («Избыток - недостаток») и VIII («Правило “фан-чен”») «Математики в девяти книгах». В книге VII две части. Первая посвящена задачам, сводящимся к одному частному виду системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, когда коэффициент при у равен -1. Вторая состоит из разнообразных задач, решенных с помощью метода двух ложных положений. Однако методы, изложенные в книге VII, носят одинаковое название – «метод избыток-недостаток» (ин бу цзу).

В книге VIII содержатся задачи, которые сводятся к система линейных уравнений, решенных с помощью правила «фан-чен», по сути являющегося методом Гаусса. Рассматриваются только совместные системы, корни только положительные, а сами системы состоят не более чем из пяти уравнений. В этой же книге вводятся отрицательные числа, которые получаются при приведении системы к каноническому виду, а также при приведении матрицы системы к треугольному виду.

1. Решение линейных уравнений и их систем методом двойного ложного положения (Regula duorum falsorum positionum, «правило двух ошибок», метод избытка-недостатка).

А) Решение линейного уравнения $ax = b$ методом двойного ложного положения.

Метод в общем виде состоит в следующем:

1 шаг. Допустим, что $x = x_1$. Тогда левая часть равна ax_1 вместо b. Тогда ошибка равна $n_1 = b - ax_1 \Rightarrow n_1 = ax - ax_1 = a(x - x_1)$. Таким образом

$$n_1 = a(x - x_1).$$

2 шаг. Допустим, что $x = x_2$. Тогда левая часть равна ax_2 вместо b. Тогда ошибка равна $n_2 = b - ax_2 \Rightarrow n_2 = ax - ax_2 = a(x - x_2)$. Таким образом

$$n_2 = a(x - x_2).$$

3 шаг. $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{a(x - x_1)}{a(x - x_2)} = \dfrac{x - x_1}{x - x_2}$.

$n_1(x - x_2) = n_2(x - x_1)$.

Выражая из последнего равенства x, окончательно получим

$$x = \frac{x_1 n_2 - x_2 n_1}{n_2 - n_1}.$$

Пример 1. Решить уравнение $5x = 12$.

Решение.

1. Пусть $x_1 = 1$, тогда $n_1 = 12 - 5 = 7$.

2. Пусть $x_2 = 2$, тогда $n_2 = 12 - 10 = 2$.

3. $x = \dfrac{x_1 n_2 - x_2 n_1}{n_2 - n_1} = \dfrac{1 \cdot 2 - 2 \cdot 7}{2 - 7} = \dfrac{12}{5}$.

Ответ: $x = \dfrac{12}{5}$.

Пример 2. Решить задачу 10 из книги VII «Математики в девяти книгах»: «Имеется стена выстою 9 чи. Тыква растет на верху стены, стебель за день вырастает на 7 цуней. Кабачок растет внизу, у стены, стебель за день вырастает на 1 чи. Спрашивается через сколько дней они встретятся и какова длина каждого стебля?»

Указание. Принять 1 чи равным 10 цуней.

Рещение.

Пусть x - искомое число дней. Тогда задача сводится к решению уравнения вида $(10 + 7)x = 90$.

1. Пусть $x_1 = 5$, тогда $n_1 = 90 - 85 = 5$.

2. Пусть $x_2 = 6$, тогда $n_2 = 90 - 102 = -12$.

3. $x = \dfrac{x_1 n_2 - x_2 n_1}{n_2 - n_1} = \dfrac{5\cdot(-12) - 6\cdot 5}{-12-5} = \dfrac{-90}{-17} \approx 5{,}294$.

4. Найдем длину стебля тыквы $7\cdot\dfrac{90}{17} \approx 37$ цуней.

5. Найдем длину стебля кабачка $10\cdot\dfrac{90}{17} \approx 53$ цуней.

Ответ: встретятся через примерно $5{,}3$ дней, длина стебля тыквы ≈ 37 цуней, длина стебля кабачка ≈ 53 цуня.

Б) Решение систем линейных уравнений

- **Решение систем линейных уравнений вида** $\begin{cases} a_1 x - y = b_1 \\ a_2 x - y = b_2 \end{cases}$ **методом «избыток-недостаток».**

Речь в задачах идет о совместной покупке. Условия задач могут быть выражены с помощью частного вида системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Пусть a_1, a_2 - количество монет, которые вносят покупатели при первой и второй попытке купить сообща вещь. Количество людей обозначим x, стоимость вещи через y. При первой попытке получается «избыток» монет b_1, при второй – «недостаток» b_2.

Тогда получается система

$$\begin{cases} a_1 x - y = b_1 \\ -a_2 x + y = b_2 \end{cases}.$$

Для решения этой системы применяется табличный метод «избыток-недостаток». Рекомендуется составить таблицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

и из нее получить

$$y = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 - a_2}$$

$$x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}.$$

Замечание Таблица составляется таким образом, чтобы $a_1 > a_2$.

Пример 1. Решить задачу 1 из книги VII «Математики в девяти книгах»:

«Сообща покупают вещь. Если [каждый] человек внесет по 8, то избыток [равен] 3. Если [каждый] человек внесет по 7, то недостаток [равен] 4. Спрашивается, [каковы] количество людей и стоимость вещи?»

Решение.

Пусть x - количество людей, y - стоимость вещи. При первой попытке купить вещь вносят по $a_1 = 8$ монет, избыток равен $b_1 = 3$. При второй попытке купить вещь вносят по $a_2 = 7$ монет, недостаток равен $b_2 = 4$.

Составим таблицу

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $y = \frac{8 \cdot 4 + 7 \cdot 3}{8 - 7} = 53$, $x = \frac{3 + 4}{8 - 7} = 7$.

Ответ: 7 человек, стоимость вещи 53.

Данный метод применялся для решения некоторых задач другого вида.

Пример 2. Решить задачу 14 из книги VII «Математики в девяти книгах»:

«Объем 5 больших посудин и 1 малой посудины равен 3 ху. Объем 1 большой посудины и 5 малых посудин равен 2 ху. Спрашивается, каков объем большой и малой посудин в отдельности».

Решение. Пусть объем большой посудины равен x, малой - y. Составим систему

$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ x + 5y = 2 \end{cases}.$$

По предложенному в книге способу, оба уравнения сводятся к одному

$$x+5(3-5x)=2.$$

В книге полагается сначала $x_1=0.5$, тогда $y_1=0,5$. Затем $x_2=0.55$, тогда $y_2=0,25$. Избыток равен $n_1=1$, недостаток $n_2=0,2$. Предлагается составить таблицу

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ n_2 & n_1 \end{pmatrix}.$$

Получим $\begin{pmatrix} 0,55 & 0,5 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $x=\dfrac{0,55+0,01}{0,2+1}=\dfrac{0,65}{1,2}=\dfrac{650}{12}$ шэнов.

Учитывая, что 1 ху = 100 шэнам, получим

$x=\dfrac{13}{24}$ху, $y=\dfrac{7}{24}$ ху.

Ответ: Объем большой посудины $x=\dfrac{13}{24}$, объем малой посудины $y=\dfrac{7}{24}$.

- **Решение систем линейных уравнений вида $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ методом двойного ложного положения.**

Метод в общем виде состоит в следующем:

1 шаг. Допустим, что в первом уравнении $x=x_1$, $y_1=\dfrac{c_1-a_1x_1}{b_1}$. Тогда из второго уравнения получим, что ошибка равна n_1.

2 шаг. Допустим, что $x=x_2$, $y_2=\dfrac{c_1-a_1x_2}{b_1}$. Тогда ошибка равна n_2.

3 шаг. $x=\dfrac{x_1n_2-x_2n_1}{n_2-n_1}$.

4 шаг. $y=\dfrac{y_1n_2-y_2n_1}{n_2-n_1}$.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$.

Решение.

1.Пусть в первом уравнении $x_1 = 2$, тогда $y_1 = -1$. Вычислим левую часть второго уравнения для таких значений:

$2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -1.$

Ошибка на величину:

$n_1 = 12 + 1 = 13.$

2. Пусть в первом уравнении $x_2 = 3$, тогда $y_2 = -4$. Вычислим левую часть второго уравнения для таких значений:

$2 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -14.$

Ошибка на величину:

$n_2 = 12 + 14 = 26.$

3. Найдем x

$$x = \frac{x_1 n_2 - x_2 n_1}{n_2 - n_1} = \frac{2 \cdot 26 - 3 \cdot 13}{26 - 13} = \frac{13}{13} = 1.$$

4. Найдем y

$$y = \frac{y_1 n_2 - y_2 n_1}{n_2 - n_1} = \frac{-1 \cdot 26 + 4 \cdot 13}{26 - 13} = \frac{26}{13} = 2.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$.

Пример 2. Решить задачу 16 из книги VII «Математики в девяти книгах»: «Имеется куб из яшмы со стороной в 1 цунь, весом в 7 ланов и куб из камня со стороной в 1 цунь, весом в 6 ланов. Имеется камень-куб со стороной в 3 цуня, внутри него находится яшма, общий вес 11 цзиней. Спрашивается: каков вес яшмы и каков вес камня?

(16 ланов = 1 цзиню)

Решение.

В книге сказано: «Предположим, что весь куб из яшмы, тогда превышение составляет 13 ланов; предположим, что весь куб из камня, тогда недостаток – 14 ланов. Недостаток есть объем яшмы, превышение есть объем камня. Умножь на это вес каждого цуня, получишь веса объемов яшмы и камня».

Решим задачу, используя современную алгебраическую символику. Пусть объем большого куба состоит из x объемов яшмы и y объемов камня. Тогда $x+y=27$ (так как куб со стороной в 3 цуня состоит из 27 кубов со стороной в 1 цунь). Тогда вес яшмы $7x$ и вес камня $6x$ дают $16\cdot 11=176$ ланов. Приходим к системе $\begin{cases} x+y=27 \\ 7x+6y=176 \end{cases}$.

1.Пусть в первом уравнении $x_1=27$, тогда $y_1=0$ (то есть весь куб состоит из яшмы). Вычислим левую часть второго уравнения для таких значений:

$7\cdot 27=189$.

Ошибка на величину:

$n_1=176-189=-13$ (недостаток).

2. Пусть в первом уравнении $x_2=0$, тогда $y_2=27$ (то есть весь куб состоит из камня). Вычислим левую часть второго уравнения для таких значений:

$6\cdot 27=162$.

Ошибка на величину:

$n_2=176-162=14$ (избыток).

3. Найдем x

$$x=\frac{x_1n_2-x_2n_1}{n_2-n_1}=\frac{14\cdot 27}{14-(-13)}=\frac{14\cdot 27}{27}=14.$$

4. Найдем y

$$y=\frac{y_1n_2-y_2n_1}{n_2-n_1}=\frac{-27\cdot(-13)}{14-(-13)}=\frac{13\cdot 27}{27}=13.$$

5. Найдем вес яшмы $7x=98$.

6. Найдем вес камня $6x=78$

Ответ: вес яшмы 98, вес камня 78.

Задание 1. Решить задачу 18 из книги VII «Математики в девяти книгах»: «Имеются 9 слитков золота и 11 слитков серебра, их взвесили, все как раз совпало. Переложили слиток золота и слиток серебра, золото стало легче на

13 ланов. Спрашивается, каков вес слитка золота и слитка серебра каждого в отдельности?»

Указание. Задача сводится к решению системы вида

$$\begin{cases} 9x = 11y \\ 8x + y + 13 = 10y + x \end{cases}.$$

Ответ: вес слитка золота 2 цзиня 3 лана 18 чжу. вес

3. Решение систем линейных уравнений вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ***с помощью линейных преобразований (задачи и методы решения из «Математического трактата Сунь-Цзы»)*** **.**

3.1 Решение определенных систем линейных уравнений

Пример 1. (задача 18) «Имеется столб неизвестных размеров. Его стали измерять при помощи каната, получился остаток каната в 4 чи 5 цуней. Если измерить канатом, сложенным вдвое, то не хватит 1 чи. Спрашивается, какова длина столба?

Решение.

Пусть x - высота столба, y - длина каната. Тогда условие задачи может быть представлено в виде

$$\begin{cases} y - x = 4{,}5 \\ x - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}.$$

Сложим оба уравнения $y = 2(4{,}5 + 1)$, $x = 2(4{,}5 + 1) - 4{,}5 = 6{,}5$.

Ответ: 6 чи 5 цуней

Пример 2. (задача 27) Имеются звери с 6 головами и 4 ногами и птицы с 4 головами и 2 ногами, всего вверху 76 голов, внизу 46 ног. Спрашивается, сколько птиц и зверей каждых в отдельности?

Решение.

Пусть x - число зверей, y - число птиц. Тогда задача сводится к решению системы вида

$$\begin{cases} 6x+4y=76 \\ 4x+2y=46 \end{cases}.$$

Умножим второе уравнение на 2 и вычтем из него первое. Разделив на 2, получим

$$x=\frac{46\cdot 2-76}{2}=8.$$

Тогда

$$y=\frac{46-4\cdot 8}{2}=7.$$

Ответ: 8 зверей, 7 птиц.

Пример 3. (задача 31) В клетке имеются фазаны и зайцы. Вверху 35 голов, внизу 94 ноги. Спрашивается, сколько фазанов и зайцев каждых в отдельности?

Решение.

Пусть x - число фазанов, y - число зайцев. Тогда задача сводится к решению системы вида

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}.$$

Систему решим в таком порядке: умножим первое уравнение на -1, второе уравнение разделим на 2.

Получим

$$\begin{cases} -x-y=-35 \\ x+2y=47 \end{cases}.$$

Сложим уравнения системы:

$y=47-35=12$.

Из первого уравнения найдем

$x=35-12=23$.

Ответ: 23 фазана, 12 зайцев.

Задание 1. Продали 2 буйвола, 5 баранов, купили 13 свиней, осталось 1000 цяней. Продали 3 буйвола, 3 свиньи, купили 9 баранов, как раз хватило.

Продали 6 баранов, 8 свиней, купили 5 буйволов, не хватило 600 цяней. Спрашивается, сколько стоят буйвол, баран и свинья?

Ответ: буйвол стоит 1200, баран 500, свинья 300 цяней.

3.2 Решение неопределенных систем линейных уравнений

Пример 1. Из трех бочек риса одинаковой емкости похищено тремя ворами некоторое количество риса. Общее количество его было неизвестно, но выяснилось, что в первой бочке остался 1 го риса, во второй – 1 шинг 4 го и в третьей - 1 го. Пойманные воры показали: первый, что он отсыпал рис из первой бочки при помощи лопаты, второй, что он пользовался деревянным башмаком, а третий – миской, причем они соответственно брали из второй и третьей бочек. Лопата, башмак и миска найдены на месте преступления. При обмере их оказалось, что емкость лопаты 1 шинг 9 го, башмака – 1 шинг 7 го, миски – 1 шинг 2 го. Требуется узнать, сколько похитил каждый вор. При этом известно, что 10 го= 1 шингу, 10 шингов = 1 тау, 10 тау = 1 ши.

Решение.

Пусть x - число, выражающее, сколько раз отсыпали рис лопатой; y - сколько раз отсыпали башмаком, z - сколько раз отсыпали миской. Тогда условия задачи приводят к системе уравнений, неизвестные в которой – целые числа:

$$\begin{cases} 19x+1=17y+14 \\ 19x+1=12z+1 \\ 17y+14=12z+1 \end{cases}.$$

Из второго уравнения системы получаем

$$x=\frac{12z}{19}.$$

Положим $z=19t$. Тогда $x=12t$.

Из первого уравнения имеем

$17y+13=228t$. Тогда $y=\dfrac{228t-13}{17}$.

Возьмем для t наименьшее целое значение, при котором y будет целым:

$t = 14$.

Получим $x = 168$, $y = 187$, $z = 266$.

Тогда первый вор украл $19 \cdot 168 = 3192$, второй 3179, третий 3192

Ответ: Первый вор похитил 3 ши 1 тау 9 шингов 2 го, второй – 3 ши 1 тау 7 шингов 9 го, третий – 3 ши 1 тау 9 шингов 2 го.

Пример 2. (задача Сунь-цзы) Найти число, которое при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 дает остаток 3, наконец, при делении на 7 – остаток 2.

Решение.

Задача сводится к решению неопределенной системы линейных уравнений вида

$$\begin{cases} x = 3y + 2 \\ x = 5z + 3 \\ x = 7u + 2 \end{cases}.$$

Приравнивая между собой правые части уравнений, получим

$3y + 2 = 5z + 3 = 7u + 2$.

Выразим $3y = 7u \Rightarrow y = \dfrac{7u}{3}$.

Положим $u = 3t$, где t - целое число. Тогда $y = 7t$. Следовательно, $x = 21t + 2$.

Значит

$21t + 2 = 5z + 3 \Rightarrow 21t - 5z = 1$.

Найдем корни полученного неопределенного уравнения методом подбора: $t = 1, z = 4$.

Общие формулы для корней этого уравнения будут

$t = 1 + 5q$

$z = 4 + 21q$,

где $q = 0,1,2,...$

Тогда $x = 23 + 105q$.

Наименьшее значение будет при $q = 0$, т.е. $x = 23$. Аналогично можно найти значения x при других q.

Ответ: например, 23.

4. Решение систем линейных уравнений по правилу «фан-чэн»

4.1 Решение определенных систем линейных уравнений

1 шаг.

Заданная в условии произвольная система уравнений приводится к каноническому виду

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots..$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.$$

2 шаг.

Из коэффициентов этой системы составляется расширенная матрица, первая строка которой (но китайская, т.е. по-нашему правый столбец) соответствует первому уравнению, вторая – второму и т.д.

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & \ldots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & \ldots & a_{22} & a_{12} \\ \ldots & & & \\ a_{nn} & \ldots & a_{2n} & a_{1n} \\ b_n & \ldots & b_2 & b_1 \end{pmatrix}.$$

3 шаг. Таблица приводится к треугольному виду при помощи элементарных преобразований, оставляющими систему эквивалентной данной. В результате в левом верхнем углу над диагональю образуются нули:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{11} \\ 0 & \ldots & \tilde{a}_{22} & a_{12} \\ \ldots & & & \\ \tilde{a}_{nn} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & a_{1n} \\ \tilde{b}_n & \ldots & \tilde{b}_2 & b_1 \end{pmatrix}.$$

4 шаг. Из полученной треугольной таблицы находится решение системы по рекуррентным формулам последовательно от последнего неизвестного к первому.

Пример 1. (первая о снопах различных урожаев) Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу зерна. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу зерна. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу зерна. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая?

Решение.

Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 3x+3y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}.$$

В китайской записи таблица из коэффициентов выглядит так

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}.$$

Далее проводим следующие преобразования:

1. «Числа среднего столбца умножь на количество снопов хорошего урожая в правом столбце и образуй остатки».

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix}.$$

2. «И еще раз так же образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов среднего урожая в среднем столбце»

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}.$$

3. «И снова образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов плохого урожая в левом столбце»

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}.$$

4. «Верхнее число 36 есть делитель, нижнее число 36 есть делимое искомого количества снопов плохого урожая».

5. «Чтобы найти делимое для среднего урожая, нижнее составляющее среднего столбца умножь на делитель и вычти делимое для плохого урожая. Остаток объедини с количеством снопов среднего урожая, это и будет делимое для среднего урожая».

Таким образом, «делимое» для y будет $\dfrac{24 \cdot 36 - 99}{5} = A$.

6. «Чтобы найти делимое для хорошего урожая, нижнее составляющее количества первого столбца также умножь на делитель, исключи делимое для первого урожая и среднего урожая, объедини остаток с количеством снопов хорошего урожая, это и будет делимое для хорошего урожая».

Таким образом, «делимое» для x будет $\dfrac{39 \cdot 36 - 99 - 2A}{3} = B$.

7. Все делимые объедини с делителем, получатся искомые количества в доу. Следовательно, будем иметь

$$z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \text{ доу},$$

$$y = \frac{A}{36} = 4\frac{1}{4} \text{ доу},$$

$$x = \frac{B}{36} = 2\frac{3}{4} \text{ доу}.$$

Ответ: $2\frac{3}{4}$ доу, $4\frac{1}{4}$ доу, $2\frac{3}{4}$ доу.

Задание 1. Решить задачу вторую о снопах различных урожаев. «Двум снопам хорошего урожая, 3 снопам среднего урожая и 4 снопам плохого урожая не хватает до 1 доу соответственно по 1 снопу среднего урожая, плохого урожая, хорошего урожая. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожаев?»

Указания. Пользуясь современными обозначениями, задачу необходимо свести к решению системы уравнений вида

$$\begin{cases} 2x = 1 - y \\ 3y = 1 - z \\ 4z = 1 - x \end{cases}.$$

Соответствующая таблица «фан-чэн» будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\frac{9}{25}, \frac{7}{25}, \frac{4}{25}$.

Задание 2. Решить задачу третью о снопах различных урожаев: «Два снопа урожая А, 3 снопа урожая Б, 4 снопа урожая В превышают по весу дань: вес

2 снопов урожая А превышает дань на вес 1 снопа урожая Б, вес 3 снопов урожая Б на вес 1 снопа урожая В, вес 4 снопов урожая В на вес 1 снопа урожая А. Спрашивается, каков вес каждого из снопов урожаев А, Б, В.?

Указания. Пользуясь современными обозначениями, задачу необходимо свести к решению системы уравнений вида

$$\begin{cases} 2x = 1 + y \\ 3y = 1 + z \\ 4z = 1 + x \end{cases}.$$

Соответствующая таблица «фан-чэн» будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\frac{17}{23}, \frac{11}{23}, \frac{10}{23}$.

4.2 Решение неопределенных систем линейных уравнений

Пример 1. (задача об общем колодце) У 5 семей имеется общий колодец. Чтобы достать до поверхности воды, 2 веревкам семьи А недостает 1 веревки семьи В, 3 веревкам семьи Б недостает 1 веревки семьи В, 4 веревкам семьи В недостает 1 веревки семьи Г, 5 веревкам семьи В недостает 1 веревки семьи Д, 6 веревкам семьи Д недостает 1 веревки семьи А. Спрашивается, какова глубина колодца и какова длина каждого куска веревки?

Решение.

Данная задача сводится к решению системы 5 линейных уравнений с 6 неизвестными:

$$\begin{cases} 2x + y = m \\ 3y + z = m \\ 4z + u = m \\ 5u + v = m \\ 6v + x = m \end{cases},$$

где x, y, z, u, v, m - неизвестные положительные целые числа.

Матрица системы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m & m & m & m & m \end{pmatrix}.$$

В результате элементарных преобразований матрица запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 721 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 76m & m & m & m & m \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v = \frac{76}{721} m,$$

$$u = \frac{129}{721} m,$$

$$z = \frac{148}{721} m,$$

$$y = \frac{191}{721} m,$$

$$x = \frac{265}{721} m.$$

Выберем m таким образом, чтобы остальные неизвестные были минимальными целыми числами. Тогда $m = 721$.

Ответы: длины кусков веревки 76, 129, 148, 191, 265. Глубина колодца 721.

5. Вычисление квадратных корней по приближенной формуле.

Древнекитайские математики в основном применяли метод приближенного вычисления квадратного корня, описываемый современной формулой

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a+1},$$

где a^2 - наибольший целый точный квадрат, содержащийся в числе $N = a^2 + r$. Эта формула дает значение корня с недостатком. Сунь-цзы пользовался формулой, дающей корень с избытком

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}.$$

Эта формула совпадает с формулой, которой пользовались древневавилонские математики.

6. Численное решение уравнений высших степеней «методом небесного элемента» (тянь юань шу)

«Метод небесного элемента» применялся китайскими математиками для решения уравнений, а также для извлечения корней.

Пусть требуется найти корень уравнения $f(x) = 0$.

1 шаг. При помощи подбора находят первую цифру искомого корня уравнения. Пусть она будет p.

2 шаг. В данное уравнение делают подстановку $x = p + y$ и получают вспомогательное уравнение $\varphi(y) = 0$.

3 шаг. При помощи подбора находят первую цифру корня уравнения $\varphi(y) = 0$. Пусть она будет q, что составляет вторую цифру корня x для исходного уравнения $f(x) = 0$.

4 шаг. В уравнение $\varphi(y) = 0$ делают подстановку $y = q + z$ и получают вспомогательное уравнение $\psi(z) = 0$ и т.д.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдена целая часть корня.

Для автоматического нахождения коэффициентов вспомогательных уравнений китайскими математиками была разработана удобная и простая схема. Поясним ее на примере. Пусть

$$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

Пусть p - первое число искомого корня x. После подстановки $x = p + y$ в данное уравнение получим вспомогательное уравнение:

$$\varphi(y) = A_4 y^4 + A_3 y^3 + A_2 y^2 + A_1 y + A_0 = 0 .$$

Для автоматического вычисления коэффициентов этого уравнения служит следующая схема:

$$a_4 + \begin{cases} a_3 \\ a_4 p \end{cases} + \begin{cases} a_2 \\ a_3' p \end{cases} + \begin{cases} a_1 \\ a_2' p \end{cases} + \begin{cases} a_0 \\ a_1' p \end{cases}$$

$$a_4 + \begin{cases} a_3' \\ a_4 p \end{cases} + \begin{cases} a_2' \\ a_3'' p \end{cases} + \begin{cases} a_1' \\ a_2'' p \end{cases} \quad a_0' = A_0$$

$$a_4 + \begin{cases} a_3'' \\ a_4 p \end{cases} + \begin{cases} a_2'' \\ a_3''' p \end{cases} \quad a_1'' = A_1$$

$$a_4 + \begin{cases} a_3''' \\ a_4 p \end{cases} \quad a_2''' = A_2$$

$$a_4 \quad a_3''' = A_3$$

$$a_4 = A_4$$

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 150 = 0$ методом «небесного элемента».

Решение.

1 шаг. Ищем десятки числа x из уравнения $f(x) = x^2 - 150 = 0$.

Если $x = 10$, то $f(10) < 0$.

Если $x = 20$, то $f(20) > 0$.

Тогда $10 < x < 20$. Следовательно, x можно представить в виде $x = 10 + y$.

Подставляя выражение для x в $f(x)$, получим новую функцию $\varphi(y)$ вида

$$\varphi(y) = (10 + y)^2 - 150.$$

Тогда, приравнивая $\varphi(y)$ нулю, получим

$$\varphi(y) = y^2 + 20y - 50 = 0.$$

Выражение для $\varphi(y)$ можно было бы получить, составив китайскую схему. Пусть $\varphi(y) = A_2 y^2 + A_1 y + A_0 = 0$. Тогда коэффициенты этого уравнения находятся следующим образом:

$$a_2 + \begin{cases} a_1 \\ a_2 p \end{cases} + \begin{cases} a_0 \\ a_1' p \end{cases}$$

____

$$a_2 + \begin{cases} a_1' \\ a_2 p \end{cases} \quad a_0' = A_0$$

____

$$a_2 \quad a_1'' = A_1$$

____

$$a_2 = A_2$$

Имеем в нашем случае: $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = -150$, $p = 10$

$$1 + \begin{cases} 0 \\ 1 \cdot 10 \end{cases} + \begin{cases} -150 \\ 10 \cdot 20 \end{cases}$$

____

$$1 + \begin{cases} 10 \\ 1 \cdot 10 \end{cases} \quad A_0 = -50$$

____

$$1 \quad A_1 = 20$$

____

$$A_2 = 1$$

Данную запись можно упростить. Составим следующую таблицу

	1	0	-150
10	1	10	**-50**
10	1	**20**	

10	**1**	

В первом столбце этой таблицы для удобства вычислений записано число p, в верхней строке – коэффициенты многочлена $f(x)$. Числа во втором столбце переписываются без изменения. При заполнении остальных ячеек таблицы необходимо число из предыдущей ячейки данной строки умножить на p и сложить с числом, расположенном в ячейке, находящейся в том же столбце на строчку выше. По диагонали таблицы расположатся искомые коэффициенты многочлена.

2 шаг. Ищем единицы числа x.

Если $y=2$, то $\varphi(2)<0$.

Если $y=3$, то $\varphi(3)>0$.

Тогда $2<y<3$. Следовательно, y можно представить в виде $y=2+z$, а $x=12,...$

Подставляя выражение для y в $\varphi(y)$, получим новую функцию $\psi(z)$ вида

$$\psi(z)=B_2z^2+B_1z+B_0=0.$$

Определим коэффициенты многочлена

	1	20	-50
2	1	22	**-6**
2	1	**24**	
2	**1**		

Таким образом, $\psi(z)=z^2+24z-6=0$.

Используя этот процесс, найдем и дробную часть корня, хотя китайские математики этого не делали.

3 шаг. Ищем десятые доли числа x.

Если $z=0{,}2$, то $\varphi(0{,}2)<0$.

Если $z=0{,}3$, то $\varphi(0{,}3)>0$.

Тогда $0{,}2 < z < 0.3$. Следовательно, z можно представить в виде $z = 0{,}2 + t$, а $x = 12{,}2..$

Подставляя выражение для z в $\psi(z)$, получим новую функцию $\xi(z)$ вида

$$\xi(z) = C_2 z^2 + C_1 z + C_0 = 0.$$

Определим коэффициенты многочлена

	1	24	-6
0,2	1	24,2	**-1,16**
0,2	1	**24,4**	
0,2	**1**		

Таким образом, $\xi(t) = t^2 + 24{,}4t - 1{,}16 = 0$.

4 шаг. Ищем сотые доли числа x.

Если $t = 0{,}04$, то $\xi(0{,}4) < 0$.

Если $t = 0{,}05$, то $\xi(0{,}5) > 0$.

Тогда $0{,}04 < t < 0.05$. Следовательно, t можно представить в виде $t = 0{,}04 + u$, а $x = 12{,}24..$ Процесс можно продолжать далее для достижения необходимой точности.

Ответ: $x \approx 12{,}24..$

Замечание. Приближенное значение для $\sqrt{150}$, вычисленное с помощью калькулятора, равно $12{,}2474\ldots$

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 17576 = 0$ методом «небесного элемента».

Решение.

1 шаг. Ищем десятки числа x из уравнения $f(x) = x^3 - 17576 = 0$.

Если $x = 20$, то $f(20) < 0$.

Если $x = 30$, то $f(30) > 0$.

Тогда $20 < x < 30$. Следовательно, x можно представить в виде $x = 20 + y$.

Пусть $\varphi(y) = A_3 y^3 + A_2 y^2 + A_1 y + A_0 = 0$. Тогда коэффициенты этого уравнения находятся по схеме:

	1	0	0	-17576
20	1	20	400	**-9576**
20	1	40	**1200**	
20	1	**60**		
20	**1**			

Тогда $\varphi(y) = y^3 + 60y^2 + 1200y - 9576 = 0$.

2 шаг. Ищем единицы числа x.

Если $y = 5$, то $\varphi(5) < 0$.

Если $y = 6$, то $\varphi(6) = 0$.

Следовательно, $y = 6$. Тогда $x = 26$.

Ответ: $\sqrt[3]{17576} = 26$.

Пример 3. Решить уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$ методом «небесного элемента».

Решение.

1 шаг. Ищем единицы числа x из уравнения $f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0$.

Если $x = 0$, то $f(0) > 0$.

Если $x = 1$, то $f(1) > 0$.

Тогда $0 < x < 1$. Следовательно, x можно представить в виде $x = 0 + y$.

Тогда $\varphi(y) = y^2 - 4y + 1 = 0$.

2 шаг. Ищем десятые доли числа x.

Если $y = 0{,}2$, то $\varphi(0{,}2) > 0$.

Если $y = 0{,}3$, то $\varphi(0{,}3) < 0$.

Тогда $0{,}2 < y < 0{,}3$. Следовательно, y можно представить в виде $y = 0{,}2 + z$, а $x = 0{,}2...$

Подставляя выражение для y в $\varphi(y)$, получим новую функцию $\psi(z)$ вида

$$\psi(z) = B_2 z^2 + B_1 z + B_0 = 0.$$

Определим коэффициенты многочлена

1	-4	1

0,2	1	-3,8	**0,24**
0,2	1	**-3,6**	
0,2	**1**		

Таким образом, $\psi(z) = z^2 - 3{,}6z + 0{,}24 = 0$.

3 шаг. Ищем сотые доли числа x.

Если $z = 0{,}06$, то $\psi(0{,}06) > 0$.

Если $z = 0{,}07$, то $\psi(0{,}07) < 0$.

Тогда $0{,}06 < z < 0{,}07$. Следовательно, z можно представить в виде $z = 0{,}06 + t$, а $x = 0{,}26...$

Ответ: $x \approx 0{,}26..$ Аналогично можно найти второй корень уравнения 3,73…

Замечание. Приближенное значение для корня уравнения $x = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268...$

Задание 1. Решите уравнение методом «небесного элемента»: $x^3 - 15 = 0$.

Ответ: 2.4662…

Задание 2. Найдите решение уравнения золотого сечения методом «небесного элемента».

Ответ: 0,618…

Темы докладов

1. Происхождение и развитие письменной нумерации.
2. Происхождение и развитие узлового счета и письма.
3. Цифры различных времен и народов.
4. Пальцевый счет. Различные приемы умножения.
5. Техника счета древних египтян.
6. Геометрия египтян.
7. Вавилонская арифметика и алгебра.
8. Вавилонская геометрия.
9. Геометрия древнего Китая.
10. Геометрия древней Индии.
11. Возникновение основных понятий комбинаторики в индийской математике.
12. Математика коренных народов Америки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баврин И.И., Фрибус Е.А. Старинные задачи: Кн. для учащихся. – М., 1994.
2. Березкина Э.И. Математика древнего Китая. – М., 1980.
3. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. – М., 1959.
4. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия/ под ред. А.П.Юшкевича. – М., 1970. Т.1.
5. Кольман Э.Я. История математики в древности. – М., 1961.
6. Меннингер К. История цифр. Числа, символы, слова. – М., 2013.
7. Попов Г.П. Культура точного знания в древнем Перу. – М., 1923.
8. Раик А.Е. Две лекции о египетской и вавилонской математике // Историко-математические исследования. Вып. XII. 1959.
9. Розин В.М. Как решали математические задачи в древнем Вавилоне // Природа. №6. 1980.
10. Рыбников К.А. История математики. – М., 1974.
11. Хармац А.Г. Математика Древнего мира на уроках в школе. – М. 2019.
12. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века. – М.,1938.
13. Чистяков В.Д. Материалы по истории математики в Китае и Индии. – М., 1960.
14. Чистяков В.Д. Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями. – М., 1962.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

n	n^2	$n^2 + n$
1	**1**	**2**
2	**4**	**6**
3	**9**	**12**
4	**16**	**20**
5	**25**	**30**
6	**36**	**42**
7	**49**	**56**
8	**64**	**72**
9	**81**	**90**
10	**100**	**110**

Таблица 2

n	$\frac{1}{n}$ **запись в шестидесятеричных дробях**
2	**0;30**
3	**0;20**
4	**0;15**
5	**0;12**
6	**0;10**
7	**0;8,34,17***
8	**0;7,30**
9	**0;6,40**
10	**0;6**
12	**0;5**

* Примечание.

$$1:7=\frac{60}{60}:7=\left(\frac{7\cdot 8}{60}+\frac{4}{60}\right):7=\frac{8}{60}+\frac{4}{60}:7=\frac{8}{60}+\frac{4\cdot 60}{60^2}:7=\frac{8}{60}+\frac{7\cdot 34+2}{60^2}:7=$$

$$=\frac{8}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{2}{60^2}:7=\frac{8}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{2\cdot 60}{60^3}:7=\frac{8}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{7\cdot 17+1}{60^3}:7=$$