

Саратовский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского

**А. П. Кузнецов**

**С.П. Кузнецов**

**Н.М. Рыскин**

**Лекции по теории колебаний и волн  
НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ**

*Учебное пособие для студентов  
физических специальностей вузов*

Саратов, 2011

## Оглавление

Предисловие .....	6
ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ.....	8
Лекция 1. <b>О предмете теории колебаний</b> .....	9
Лекция 2. <b>Нелинейные элементы и нелинейные характеристики</b> .....	24
Лекция 3. <b>Фундаментальные эффекты, к которым приводит нелинейность</b> .....	36
3.1. Неизохронность .....	36
3.2. Ангармоничность колебаний и генерация гармоник .....	41
3.3. Комбинационные составляющие .....	46
3.4. Автоколебания .....	48
3.5. Бифуркации, мультистабильность и гистерезис .....	50
3.6. Динамический хаос.....	57
ЧАСТЬ II. НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР .....	60
Лекция 4. <b>Нелинейный осциллятор как обобщенная модель теории колебаний</b> ...	61
4.1. Механический осциллятор: частица в потенциальной яме .....	61
4.2. Фазовая плоскость .....	63
4.3. Период колебаний нелинейного осциллятора .....	64
4.4. Динамическая система общего вида на фазовой плоскости. Особые точки и их классификация .....	66
4.5. Численное решение дифференциальных уравнений.....	72
Лекция 5. <b>Нелинейный осциллятор: фазовый портрет</b> .....	75
5.1. Построение фазового портрета консервативного нелинейного осциллятора.....	75
5.2. Нелинейный осциллятор с диссипацией .....	82
Лекция 6. <b>Нелинейный осциллятор: конкретные примеры</b> .....	87
6.1. Маятник .....	87
6.2. Частица в лунке.....	90
6.3. Колебательный контур с нелинейной емкостью .....	95
6.4. Колебательный контур с нелинейной индуктивностью .....	97
Лекция 7. <b>Осциллятор с нелинейностью синуса: аналитический подход         к нелинейной задаче</b> .....	99
7.1. Контакт Джозефсона .....	99
7.2. Задача о самоиндуцированной прозрачности.....	101

7.3. Аналогия Кирхгофа .....	103
7.4. Фазовая плоскость маятника .....	104
7.5. Колебательные движения .....	105
7.5.1. Математическое отступление: эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби .....	106
7.5.2. Период колебаний маятника .....	107
7.5.3. Точное решение для колебательных движений .....	109
7.6. Движение по сепаратрисе .....	110
7.7. Ротационное движение .....	112
7.8. Спектр колебаний маятника .....	113
<b>Лекция 8. Универсальные модели консервативных колебаний вблизи минимума гладкого потенциала: осцилляторы с квадратичной и кубической нелинейностью .....</b>	<b>117</b>
8.1. Приведение уравнений к безразмерному виду .....	119
8.2. Осциллятор с квадратичной нелинейностью .....	122
8.3. Осциллятор с кубической нелинейностью (осциллятор Дуффинга) .....	127
8.4. Осциллятор с кубической нелинейностью — потенциал с двумя ямами .....	132
<b>Лекция 9. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний .....</b>	<b>136</b>
9.1. Разложение в ряд по параметру нелинейности. Осциллятор с квадратичной нелинейностью .....	136
9.2. Разложение в ряд по параметру нелинейности. Осциллятор Дуффинга .....	140
9.3. Метод Линшtedта–Пуанкаре .....	142
9.4. Метод многих масштабов .....	147
9.5. Метод Ван дер Поля .....	150
9.6. Метод Крылова–Боголюбова .....	155
<b>Лекция 10. Осциллятор с сильной диссипацией. Быстрые и медленные движения .....</b>	<b>158</b>
10.1. Фазовая плоскость осциллятора с сильной диссипацией .....	158
10.2. Приближенное решение методом разделения быстрых и медленных движений .....	159
<b>ЧАСТЬ III. АВТОКОЛЕБАНИЯ .....</b>	<b>165</b>
<b>Лекция 11. Примеры автоколебательных систем .....</b>	<b>166</b>
11.1. Основные определения и понятия .....	166
11.2. Обобщенная схема радиотехнического генератора. Уравнение Ван дер Поля .....	168

11.3 Автогенератор на активном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью .....	172
11.4. Ламповый генератор Ван дер Поля .....	174
11.5. Химические колебания. Брюсселятор .....	176
<b>Лекция 12. Уравнения Ван дер Поля и Рэлея. Бифуркация Андронова–Хопфа .....</b>	<b>180</b>
12.1. Квазигармонические автоколебания. Бифуркация Андронова–Хопфа .....	180
12.2. Релаксационные автоколебания .....	187
12.3 Автоколебательная система с жестким возбуждением.....	189
<b>Лекция 13. Метод точечных отображений .....</b>	<b>194</b>
13.1. Понятие о точечных отображениях .....	194
13.2. Точечное отображение для генератора Ван дер Поля. Случай квазигармонических автоколебаний .....	199
13.3. Ламповый генератор со ступенчатой характеристикой.....	202
13.4. Системы под импульсным периодическим воздействием .....	206
<b>ЧАСТЬ IV. НЕАВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>210</b>
<b>Лекция 14. Вынужденные колебания нелинейного осциллятора .....</b>	<b>211</b>
14.1. О моделях неавтономных систем, фазовом пространстве и стробоскопическом отображении.....	211
14.2. Нелинейный резонанс .....	216
14.3. Нелинейный резонанс в осцилляторе с диссипацией. Укороченные уравнения и резонансные кривые .....	219
14.4. Бифуркации при нелинейном резонансе .....	224
14.5. Нелинейный резонанс в численном эксперименте .....	230
<b>Лекция 15. Сложная динамика и хаос при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора.....</b>	<b>236</b>
15.1. Резонансы на гармониках и субгармониках .....	236
15.2. Резонансы на фазовом портрете в сечении Пуанкаре.....	238
15.3. Перекрытие резонансов и хаос в простых системах (модели стохастического ускорения Ферми).....	244
15.4. Стандартное отображение .....	249
15.5. Хаос при вынужденных колебаниях диссипативного нелинейного осциллятора.....	252
<b>Лекция 16. Параметрические колебания нелинейных систем.....</b>	<b>257</b>
16.1. Параметрический резонанс и параметрическая неустойчивость в линейной системе.....	257

16.2. Нелинейный осциллятор с параметрическим возбуждением .....	261
Лекция 17. <b>Параметрические генераторы электромагнитных колебаний</b> .....	268
17.1. Расстроенный механизм ограничения неустойчивости .....	272
17.2. Диссипативный механизм ограничения неустойчивости .....	275
17.3. Двухконтурный параметрический генератор. Соотношения Мэнли–Роу .....	279
17.4. Резонансное взаимодействие связанных слабонелинейных осцилляторов ...	285
17.5. Оптические параметрические усилители и генераторы .....	288
Лекция 18. <b>Автоколебательная система под внешним периодическим воздействием: синхронизация</b> .....	291
18.1. Осциллятор Ван дер Поля под периодическим внешним воздействием. Исходная модель и укороченное уравнение для медленной амплитуды .....	294
18.2. Приближение малых амплитуд воздействия и уравнение для фазы .....	295
18.3. Квазипериодическая динамика: режим биений .....	298
18.4. Бифуркации, сопровождающие возникновение синхронизации, на фазовой плоскости укороченных уравнений .....	301
18.5. Синхронизация осциллятора Ван дер Поля: численный эксперимент .....	305
Список литературы .....	312

## Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено изложению на современном уровне фундаментальных концепций нелинейной теории колебаний.

Первоначально базой для этой науки, основы которой были заложены в первой половине XX века, служили в основном механика, теория электричества, радиотехника. В последние годы она приобрела, по существу, новое лицо. Развитие таких дисциплин, как квантовая электроника, физика плазмы, физика твердого тела, астрофизика, физика атмосферы и океана, химическая кинетика, биофизика, существенно расширили область применения теории колебаний. Кардинальные изменения связаны также с появлением и широким распространением компьютеров, позволивших ставить и решать такие задачи, которые ранее были недоступными. Можно отметить далее, что центр интереса на новом этапе развития теории нелинейных колебаний сместился в сторону систем, способных демонстрировать сложное, в том числе хаотическое поведение.

Все сказанное с очевидностью требует переосмысления содержательной части учебного курса теории колебаний. Какие-то из разработанных ранее приемов аналитического и графического исследования можно признать устаревшими и не излагать, по крайней мере, при начальном знакомстве с предметом. Другие должны быть сохранены, как существенная составная часть рабочего инструментария исследователя, «нелинейного мышления» и «колебательной интуиции». Существенный момент состоит в том, что владение предметом должно быть активным, базироваться не только на изучении теоретического материала, но и на решении задач.

Предлагаемая книга представляет собой переработанную версию учебного пособия «Нелинейные колебания», вышедшего в серии «Современная теория колебаний и волн», в издательстве «Физматлит» (1-е изд. — 2002 г., 2-е изд. — 2005 г.). Книга представляет собой учебник для студентов различных специальностей, хотя в первую очередь он адресуетея радиофизи-

кам и физикам. Ее содержание примерно соответствует лекционному курсу «Нелинейные колебания», который в течение ряда лет читается авторами для студентов 2-го года обучения на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Данный курс является логическим продолжением курсов по линейной теории колебаний и волн и предшествует курсам по теории нелинейных волн, теории катастроф и бифуркаций, динамическому хаосу. Поэтому предполагается знакомство читателя с основами линейной теории колебаний, а также наличие у него необходимой математической подготовки. Тем не менее, авторы старались, чтобы изложение носило «замкнутый» характер и книгой можно было пользоваться независимо.

При написании книги использовались материалы исследований, в том числе алгоритмы и программы, разработанные в лаборатории теоретической нелинейной динамики Саратовского филиала им. В.А.Котельникова РАН и на факультете нелинейных процессов СГУ в ходе выполнения проектов, поддержанных грантами РФФИ (93-02-16619, 95-02-05818, 96-15-96921, 97-02-16414, 00-02-17509), Минобразования РФ (97-0-8.3-88), АФГИР (РЕС-006), ФЦП «Интеграция» (А0057).

Мы выражаем глубокую благодарность члену–корреспонденту РАН Д.И. Трубецкову, профессорам В.С. Анищенко, Б.П. Безручко, А.С. Пиковскому, всем коллегам, в том числе аспирантам и студентам факультета нелинейных процессов СГУ, общение с которыми способствовало формированию наших представлений о нелинейных колебаниях.

*Часть I*

**Общие понятия  
нелинейной теории  
колебаний**



## Лекция 1

## О предмете теории колебаний

Говоря о *колебаниях*, мы имеем в виду движения, явления, процессы, обладающие свойством хотя бы приблизительной повторяемости во времени (рис. 1.1). Объект той или иной физической природы, в котором реализуется колебательный процесс, называют *колебательной системой*. О величинах, изменение которых во времени (*динамика*) составляет содержание колебательного процесса, говорят как о *динамических переменных*. Например, в механических системах динамические переменные — это чаще всего координаты и скорости частиц, в электрических — напряжения на определенных элементах схемы и протекающие через элементы токи, в химических — концентрации реагирующих компонентов и т.д. Обычно предполагается, что колебания совершаются в ограниченном интервале значений динамических переменных.

## Колебания

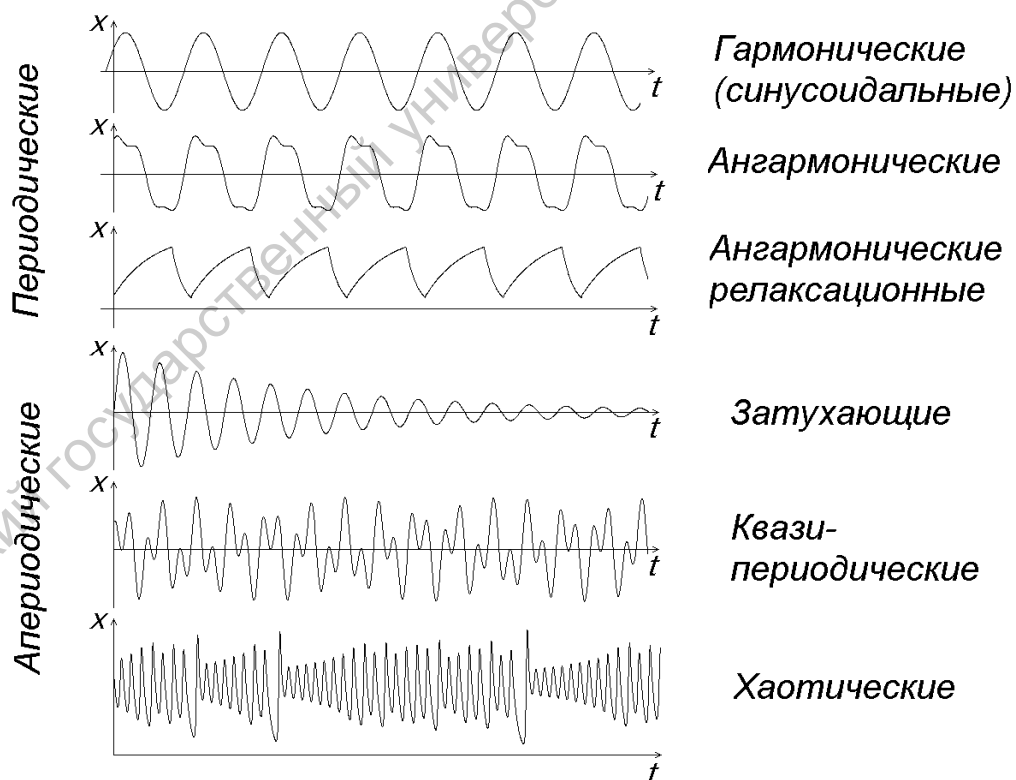


Рис. 1.1. Вид зависимостей динамической переменной от времени в ходе различных по характеру колебательных процессов

В самом простом случае, когда зависимость динамической переменной от времени задается функцией синуса или косинуса, говорят о *гармонических (синусоидальных) колебаниях*:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.1)$$

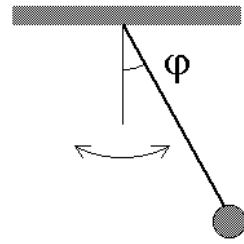
Здесь  $x$  – динамическая переменная, постоянная  $A$  характеризует интенсивность, «размах» колебаний и называется *амплитудой*, величина  $\omega$  называется *частотой*, она связана с периодом колебаний  $T$  соотношением  $\omega = 2\pi/T$ . Величину  $\varphi$  называют *фазой* колебательного процесса.

Мы сознательно допускаем здесь некоторое ставшее почти общепринятым огрубление терминологии. Более аккуратно именовать  $\omega$  *круговой частотой*, резервируя термин частота для величины, обратной периоду, и отличающейся от  $\omega$  на множитель  $(2\pi)^{-1}$ :  $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ . Единицы измерения герц (одно колебание в секунду), килогерц ( $10^3$  колебаний в секунду), мегагерц ( $10^6$  колебаний в секунду), гигагерц ( $10^9$  колебаний в секунду) относятся именно к частоте  $\nu$ , тогда как  $\omega$  измеряется в обратных секундах,  $s^{-1}$ . Далее, термин «фаза» часто относят ко всему аргументу под знаком косинуса,  $(\omega t + \varphi)$ , а величину  $\varphi$  называют тогда *начальной фазой*. Обычно из контекста ясно, какая из версий терминологии имеется в виду, и недоразумения исключены.

На рис. 1.2–1.4 приводятся некоторые примеры колебательных систем.

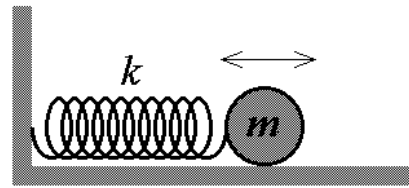
Как известно, большинство научных дисциплин выделяют свой предмет, отправляясь от физической природы исследуемого объекта (механика, электродинамика, оптика, физика твердого тела и др.). Фундаментальное отличие теории колебаний состоит в том, что ее предмет определяется совсем *по другому принципу*, а именно, *по наличию колебательной по своему характеру динамики безотносительно к физической сущности рассматриваемых явлений*. Среди задач теории колебаний можно назвать классификацию колебательных процессов, разработку математических моделей для их описания, выявление закономерностей, являющихся общими для систем различной физической природы.

Приведенное в начале лекции «определение» колебаний очень широкое и подразумевает дальнейшую конкретизацию и детализацию. Например, говорят о колебаниях затухающих и незатухающих, гармонических и негармонических (ангармонических), релаксационных, периодических, квазипериодических, хаотических и так далее (рис. 1.1).



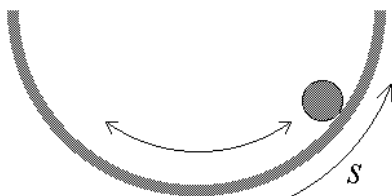
$(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$

(а)



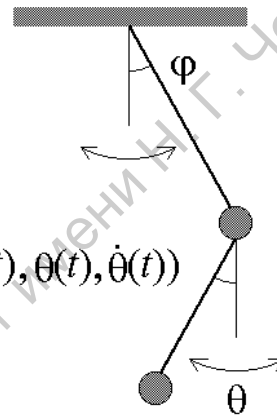
$(x(t), v(t))$

(б)



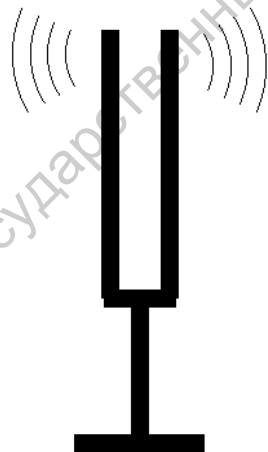
$(s(t), v(t))$

(в)

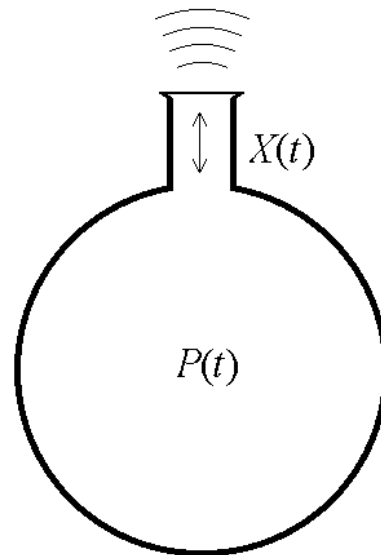


$(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t))$

(г)



(д)



(е)

Рис. 1.2. Примеры механических и акустических колебательных систем: маятник (а); пружинный маятник (б); шарик в лунке (в); двойной маятник (г), камертон (д); резонатор Гельмгольца (е)

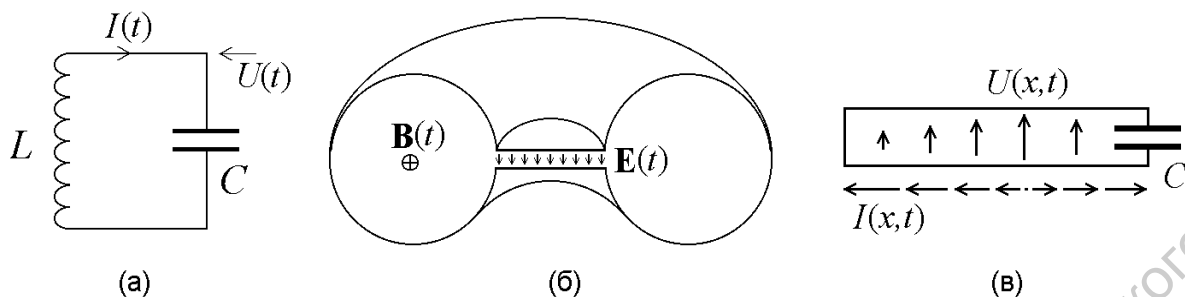


Рис. 1.3. Примеры электрических (электромагнитных) колебательных систем: колебательный контур (а); тороидальный резонатор (б); отрезок длинной линии замкнутый с одного конца и нагруженный на емкость с другого (в)

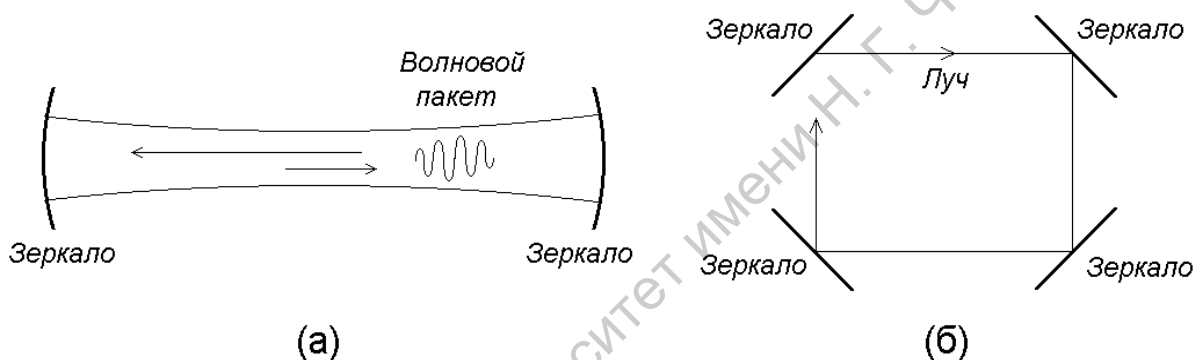


Рис. 1.4. Примеры оптических колебательных систем: открытый резонатор (а); кольцевой резонатор (б)

Очень важный шаг в классификации колебательных явлений мы делаем, когда начинаем рассматривать *малые колебания* и *большие колебания*.

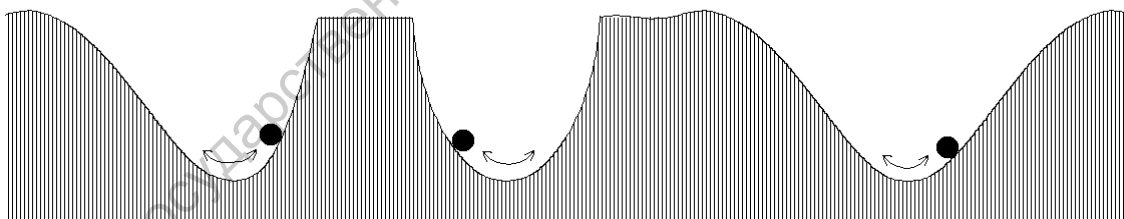


Рис. 1.5. Три механические колебательные системы типа шарик в лунке, в которых малые колебания происходят практически одинаково, тогда как большие колебания существенно отличаются

На рис.1.5 приводится пример – три простейшие механические колебательные системы типа шарик в лунке. Во всех этих трех случаях *малые колебания* протекают *одинаково* и описываются одной и той же математической моделью линейного осциллятора – уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{1.2}$$

В механике и теории колебаний точка над буквой по традиции, восходящей к Ньютону, обозначает производную по времени, две и три точки – соответственно, вторую и третью производную:  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\dddot{x} = \frac{d^3x}{dt^3}$ . Параметр  $\omega$  в уравнении (1.2) определяется формой лунки вблизи ее дна, а решением служит, как известно, функция вида (1.1). Что касается *больших* колебаний, то они будут происходить *по-разному*, в силу того, что шарикам в процессе движения придется посещать области, где форма лунок существенно различается. В рамках математической модели учет этого обстоятельства производится добавлением в уравнение (1.2) *нелинейных* членов таких как  $x^2$ ,  $x^3$ , ... Применительно к нашему примеру можно сказать, что в росте амплитуды в каждом случае «включается» своя нелинейность. Малые колебания составляют предмет *линейной*, а большие — *нелинейной* теории колебаний.

Приведенные рассуждения безусловно справедливы, пока мы говорим о колебаниях в гладких лунках, когда профиль вблизи дна представляется функцией с ненулевым коэффициентом разложения в ряд Тейлора перед квадратичным членом. Это ситуация в определенном смысле естественная, или, как говорят, *типичная*. Если по каким-то специфическим причинам коэффициент при квадратичном члене обращается в ноль, то возникает *атипичная* ситуация, когда даже малые колебания нельзя считать линейными (рис. 1.6а). С другой стороны, если отказаться от требования гладкости и рассмотреть колебания в таких ямках, как на рис. 1.6б,в, то мы тоже получим систему, в которой малые колебания не являются линейными. Поэтому утверждение о том, что малые колебания линейные, а большие – нелинейные, следует воспринимать с оговоркой, что это относится к гладкому случаю, и притом к типичной ситуации.

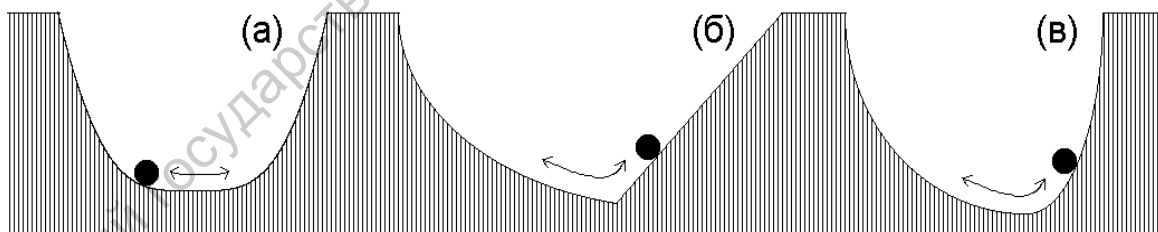


Рис. 1.6. Примеры системы, для которых малые колебания не являются линейными: (а) профиль лунки имеет разложение в ряд, начиная с четвертой степени, (б) профиль со скачком первой производной в нижней точке, (в) профиль со скачком второй производной в нижней точке.

Установившееся терминологическое разделение колебаний на линейные и нелинейные отражает тип математических моделей, используемых для их описания. Линейные уравнения, к классу которых относится, в частности, уравнение (1.2), содержат только первые степени динамических переменных и их производных. Они характери-

зуются следующим основным свойством: если функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  являются решениями, т.е. представляют два возможных в данной системе колебательных процесса, то каждая линейная комбинация вида  $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  также служит решением и определяет возможный в этой системе колебательный процесс (*принцип суперпозиции*). Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  произвольны по величине. Соответственно, произвольной может быть и амплитуда колебаний в линейной системе.

Отсюда, между прочим, следует, что по-настоящему линейных систем в природе не бывает. Представим себе, например, что произойдет, если мы будем рассматривать последовательно колебательный процесс все большей и большей амплитуды в физически реальном колебательном контуре. Ясно, что при достаточно большой (пусть даже *очень* большой!) величине переменного напряжения неизбежно произойдет электрический пробой. Следовательно, колебания столь большой амплитуды будут происходить иначе, чем малой, и принцип суперпозиции нарушится.

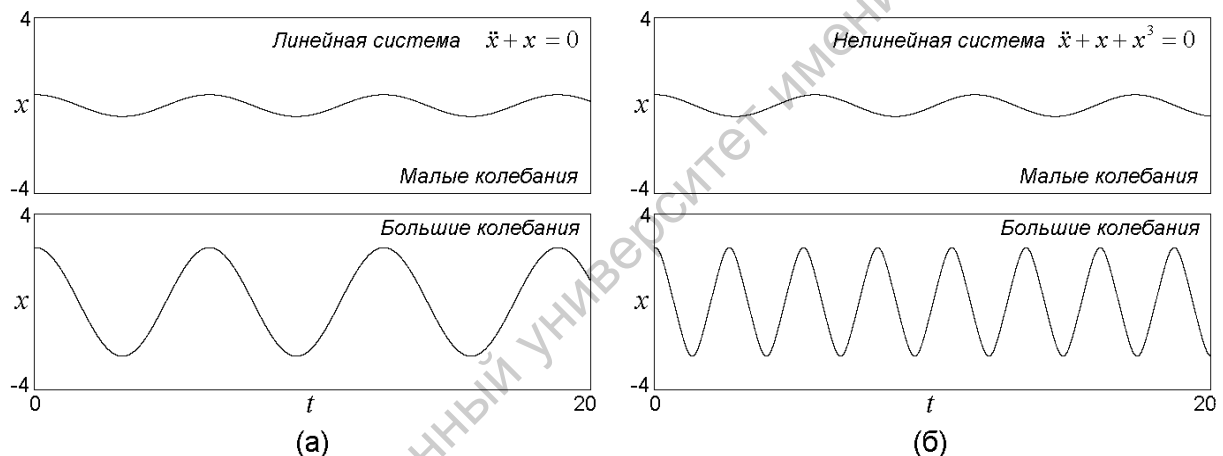


Рис.1.7. Колебания малой амплитуды (вверху) и большой (внизу) для двух колебательных систем — линейной (а) и нелинейной (б). Обратите внимание на то, что форма малых и больших колебаний в линейной системе одинакова и близка к форме малых колебаний в нелинейной системе. Большие колебания в нелинейной системе существенно отличаются периодом и формой.

Можно сказать, что в линейной системе среди определяющих величин нет параметра с размерностью амплитуды, т.е. отсутствует характерный масштаб амплитуды. Это значит, что колебания разной амплитуды должны происходить одинаковым образом: график зависимости динамических переменных от времени для колебаний большей и меньшей амплитуды выглядит одинаково, различаясь только масштабом по оси ординат (рис. 1.7а). Напротив, в нелинейной системе принцип суперпозиции не выполняется, а колебания будут протекать по-разному в зависимости от того, мала или велика их амплитуда (рис. 1.7б).

При рассмотрении колебательных систем наряду с динамическими переменными, зависимость которых от времени составляет сущность колебательного процесса, приходится иметь дело также с величинами иного рода — *параметрами*, которые входят в уравнения и считаются постоянными во времени, но от задания которых может зависеть характер реализующегося в системе режима.

Имея конкретную колебательную систему, обычно можно указать область параметров и динамических переменных, в которой колебания с достаточной степенью точности можно считать линейными, и область, где они существенно нелинейные. Например, для шарика в лунке (рис. 1.5), характерный масштаб амплитуды, отвечающий включению нелинейности, есть масштаб длины, на котором форма лунки становится заметно отличной от параболической. Подчеркнем, что речь идет здесь о характеристике, определенной грубо, по порядку величины.

Если для некоторой системы можно указать такой набор динамических переменных, по которому в принципе однозначно определяется этот же набор переменных в любой последующий момент времени, то ее называют *динамической системой*. Указанный набор величин задает в каждый момент времени *состояние*, или *вектор состояния*, системы. Об изменении состояния во времени говорят как о *динамике* системы. Динамику часто удобно представлять себе геометрически. Для этого вводят *пространство состояний*, или *фазовое пространство*, по осям координат которого отложены динамические переменные, задающие состояние. Размерность фазового пространства может быть разной для разных систем, например, для осциллятора (1.2) она равна 2 (состояние задается мгновенной координатой и скоростью). Динамика системы представляется движением изображающей точки в фазовом пространстве по некоторой траектории, называемой *фазовой траекторией*, или *орбитой*. Понятие динамической системы более формально, чем понятие колебательной системы, и больше подчеркивает математический, нежели физический аспект. Говоря о динамической системе, мы имеем в виду определенную теоретическую абстракцию, подразумевающую, в частности, принципиальную изолированность системы от неконтролируемых воздействий со стороны окружения. С другой стороны, колебательная система — это, скорее, объект реального физического мира, хотя его конкретная физическая природа может быть самой разной. В нашем курсе мы будем иметь дело только с такими колебательными системами, которые могут рассматриваться как динамические системы, так что различать эти два понятия не будем. В частности, мы будем говорить о фазовом пространстве,

фазовых траекториях, состояниях колебательных систем, вкладывая в них именно то содержание, как это было сейчас объяснено.

Принято подразделять колебательные системы на *консервативные* и *диссипативные*.

Обратимся сначала к механическим колебаниям. Система будет консервативной, если колебательные процессы в ней протекают так, что полная механическая энергия (кинетическая плюс потенциальная), связанная с величинами, принятыми за динамические переменные, остается с течением времени постоянной. Системы, в которых имеются потери механической энергии из-за трения (т.е. переход энергии в тепло, или диссипация), называются диссипативными.

Если мы хотим выработать «общеколебательное» определение консервативных и диссипативных систем, то нам не следовало бы апеллировать к понятию механической энергии, пригодному лишь для конкретного класса систем определенной физической природы. Такое общее определение можно дать, но в нашем курсе мы удовлетворимся тем, что воспользуемся идеей «колебательной взаимопомощи» научных дисциплин по Л.И. Мандельштаму (см. ниже). Мы говорим, что *колебательная система произвольной природы считается консервативной, либо диссипативной, если ее динамика описывается такой математической моделью, которая соответствует в точности некоторой консервативной, либо диссипативной, механической системе*. Например, электрическая цепь, содержащая только реактивные элементы – емкости и индуктивности, представляет собой консервативную колебательную систему, а в присутствии сопротивлений (резисторов) становится диссипативной системой.

Для консервативных систем характерно неограниченно долгое сохранение «памяти» о начальном состоянии. Например, колебания осциллятора (1.2) сохраняют всегда ту же самую амплитуду, какая возникла при задании начального состояния системы. Другому начальному состоянию будет соответствовать другая, но тоже остающаяся неизменной, амплитуда.

Для диссипативных систем характерна «потеря памяти» о начальном состоянии. Режим динамики, возникающий в системе, предоставленной самой себе в течение длительного времени, становится не зависящим от начального состояния (по крайней мере, при вариации начальных условий в некоторых конечных пределах). Множество точек в фазовом пространстве диссипативной системы, посещаемых в установившемся режи-



ме, называется *аттрактором*. Простые примеры аттракторов — устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл — замкнутая фазовая траектория, к которой стремятся все близкие траектории.

С наличием в фазовом пространстве предельного цикла ассоциируется один из интересных и общих нелинейных колебательных феноменов — *автоколебания*. Это самопроизвольно возникающий в некоторых диссипативных системах колебательный процесс, характеристики которого — амплитуда, частота, форма колебаний определяются параметрами самой системы и не зависят от конкретных начальных условий (см. примеры на рис. 1.8). Автоколебания встречаются в радиотехнике (электронный автогенератор — основа любой радиопередающей системы), в акустике (свисток, духовые музыкальные инструменты), в аэродинамике (флаг, полощущийся на ветру, флаттер — нежелательные и опасные колебания крыла самолета). В астрофизике надежно установлена автоколебательная природа процесса, приводящего к периодическому изменению светимости определенного класса звезд — цефеид. Автоколебания принципиально не могут быть объяснены в рамках линейной теории, поскольку в ней, как мы указывали, отсутствует характерный масштаб амплитуды, а он непременно должен фигурировать как атрибут возникшего и самоподдерживающегося автоколебательного процесса.

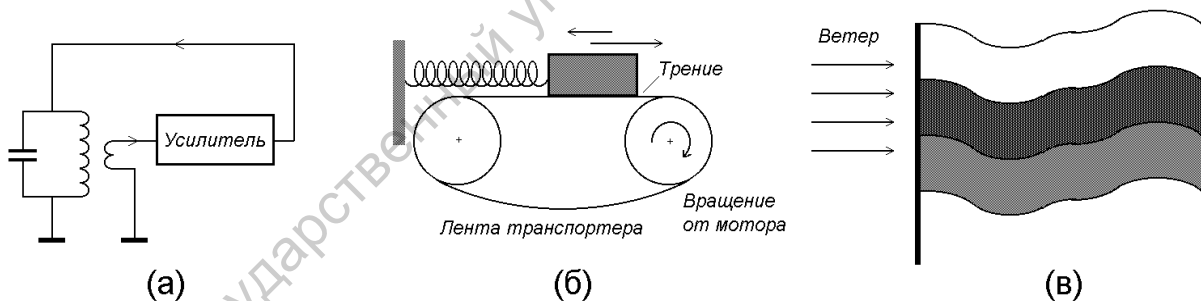


Рис. 1.8. Примеры автоколебательных систем: радиотехнический автогенератор (а), механическая система (б), флаг, полощущийся на ветру (в)

То обстоятельство, что линейные колебания в системах разной природы могут рассматриваться с единой точки зрения, к началу XX века было ясно уже многим исследователям. Можно сказать, что оформилась, как самостоятельная дисциплина, *линейная теория колебаний*. Один из признанных классиков этой науки — английский физик лорд Джон Уильям Рэлей (1842–1919).

Впервые с проблемами, которые можно отнести к ведению нелинейной теории колебаний, столкнулись ученые, занимавшиеся небесной механикой. Как известно,

фундаментальная задача двух тел, движущихся в поле тяготения друг друга, приводит (в случае ограниченного движения) к строго периодическим колебаниям — обращению по эллиптическим орбитам около общего центра масс. С другой стороны, уже в задаче трех тел исследователь сталкивается с возможностью очень сложной динамики, и, как теперь известно, может возникать хаотическое поведение. Надо заметить, однако, что задачи небесной механики в подавляющем большинстве случаев затрагивают только консервативные системы, и притом вполне определенного типа.

Настоятельная потребность в подробном изучении нелинейных колебаний, в том числе в диссипативных системах, стала ощущаться в первой половине XX века с развитием радиотехники, а также аэро- и гидродинамики. Позднее «зоопарк» нелинейных систем стал пополняться возрастающими темпами, охватывая квантовую электронику, химическую кинетику, астрофизику, биологию и другие области знания.

На раннем этапе теории колебаний казалось, что нелинейные системы слишком разнообразны, чтобы допускать анализ с каких-то единых позиций, и что каждая конкретная система должна поэтому рассматриваться отдельно, сама по себе. Идея о том, что возможно построение общей теории нелинейных колебаний была неочевидной и, в каком-то плане, революционной.

Возникновение, развитие и становление нелинейной теории колебаний во многом связано с именем советского физика Леонида Исааковича Мандельштама (1879–1944) и с деятельностью ведущей свое начало от него научной школы. Многие принципы, выдвинутые Л.И. Мандельштамом, настолько органично и естественно вошли в плоть и кровь теории колебаний, что об их происхождении обычно никто и не задумывается. Краткий и ясный обзор этих идей был представлен в выступлении другого основоположника теории колебаний, ученика Л.И. Мандельштама, Александра Александровича Андронова (1901–1952) на заседании АН СССР 22 декабря 1944 г. «Л.И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний». В более развернутом виде читатель может ознакомиться с этими методологическими идеями, обратившись к книге Мандельштама «Лекции по теории колебаний» и книге Андронова, Витта и Хайкина «Теория колебаний».

В основе выдвинутой Л.И. Мандельштамом научной программы лежала идея выработки *нелинейного мышления* — совокупности концепций, представлений, моде-

лей, методов, наглядных образов, которые составляли бы содержание единого подхода к исследованию нелинейных колебаний в системах различной природы.

Согласно Мандельштаму, теорию колебаний можно рассматривать как своего рода *«интернациональный язык»*, который будет понятен и полезен представителям различных конкретных наук, будь то механика, электромагнетизм, радио- и электротехника, оптика, или (добавим мы) химия, биология, экономика. Сама возможность такого «языка» опирается на присущую различным областям знания *«колебательную общность»*. Наличие общего «языка» не отменяет «национальных языков», выработанных каждой отдельной дисциплиной, но открывает замечательные перспективы для их взаимного обогащения путем обмена представлениями, сформированными в конкретных областях. При этом возникает возможность *«колебательной взаимопомощи»* различных дисциплин. Например, идеи модуляции и детектирования колебаний, которые были хорошо разработаны, поняты и нашли практическое применение в радиотехнике, оказались впоследствии плодотворными в оптике (в особенности после появления эффективных источников когерентного излучения – лазеров).

Обнаруживая те или иные колебательные закономерности в системах различной природы и представляя их в терминах «интернационального языка», мы не просто выявляем свойства исследуемых систем, но и обогащаем конкретным содержанием теорию колебаний.

Теория колебаний выступает, таким образом, как *синтетическая научная дисциплина*. Формируя свое содержание, она привлекает материал из разных областей знания, и в то же время находит выход и приложения в этих разных областях. В каком-то смысле аналогичную природу имеет математика. Но математика, по-видимому, в гораздо большей степени подчиняется своей собственной внутренней логике развития, т.е. нацелена больше на построение своего «мира», нежели на обслуживание приложений и формирование контактов с естественнонаучным «окружением». Л.И. Мандельштам рассматривал теорию колебаний как *физическую дисциплину*, отличную от математики в том смысле, что необходимая для изучения колебаний интуиция исследователя базируется не только и не столько на формально-математических моделях, сколько на физическом понимании сходных по своей колебательной природе явлений и процессов в механике, радиотехнике, оптике и т.д. Если для прикладной математики основной задачей служит исследование уже построенной математической

модели явления, то для теории колебаний конструирование модели колебательной системы, основанное на *правильной идеализации* реального процесса — одна из первостепенных задач. Как подчеркивали Мандельштам и Андронов, выбор такой идеализации очень часто далеко не тривиален и требует глубокого понимания физической сущности происходящих явлений.

Во второй половине XX века теория колебаний бурно развивалась и приобрела, по существу, новое лицо.

Во-первых, в силу потребностей конкретных научных дисциплин, таких как квантовая электроника, физика плазмы, физика твердого тела, астрофизика, физика атмосферы и океана, химическая кинетика, биофизика, экономика, чрезвычайно разрослась база применения идей теории колебаний, она обогатилась примерами колебательных систем, расширилась феноменология колебательных процессов.

Во-вторых, произошли революционные изменения, которые затронули собственно содержание и методический инструментарий теории нелинейных колебаний и связаны с появлением и широким распространением компьютеров. Те задачи, которые ранее требовали утонченного и кропотливого исследования или же оставались вовсе недоступными, теперь оказалось возможным анализировать с привлечением методов численного моделирования с наглядным и быстрым представлением результатов посредством компьютерной графики. Все это ведет, в частности, к необходимости переосмысления содержательной части учебного курса теории колебаний. Какие-то из разработанных ранее приемов аналитического и графического исследования можно признать устаревшими и ненужными (по крайней мере, при начальном знакомстве с предметом). Другие должны быть отнесены в «золотой фонд» и рассматриваться как существенная составная часть «нелинейного мышления», без которого самый полный набор компьютерных результатов может превратиться в бесформенную свалку неосмысленного материала.

В-третьих, на новом этапе развития теории колебаний центр интереса сместился от систем с минимальным количеством существенных динамических переменных (маломерных) к системам с большим их количеством (многомерным). Обнаруживается, что начиная с размерности фазового пространства, равной трем, становятся возможными весьма разнообразные и нетривиальные типы колебательных процессов. В частности, могут наблюдаться хаотические колебания или *динамический хаос*. Такой колеба-

тельный режим характеризуется сложной, нерегулярной зависимостью динамических переменных от времени, и при этом обладает высокой чувствительностью к малым возмущениям начальных условий. При наличии малой погрешности в начальных данных точные значения динамических переменных становятся непредсказуемыми уже на конечном временном интервале. (Это заставляет принципиально по-новому посмотреть на многие традиционно стоящие перед наукой проблемы, например, долгосрочный прогноз погоды!) Анализ динамического хаоса и других режимов сложной динамики потребовал привлечения широкого арсенала методов, который включает новые математические идеи.

На новом этапе развития науки, помимо теории колебаний, как таковой, стали формироваться другие синтетические научные дисциплины, связь которых с теорией колебаний уместно здесь кратко обсудить.

#### Теория колебаний и нелинейная динамика

Словосочетание *нелинейная динамика* стало очень распространенным в мировом научном сообществе в последние годы. Если не вдаваться в тонкие детали, то нелинейная динамика – это по существу то же самое, что мы понимаем под теорией нелинейных колебаний. И все же употребление одного или другого термина несет определенный акцент. Во-первых, под нелинейной динамикой мы имеем в виду дисциплину более математического характера, нежели теория колебаний. Основное содержание нелинейной динамики — исследование *математических моделей* различных систем. В основу кладется понятие динамической системы – теоретическая абстракция, подразумевающая, как мы говорили, принципиальную изолированность системы от остального мира. Теория колебаний представляет собой в каком-то смысле более широкую, более нацеленную на использование физической интуиции, систему воззрений. Во-вторых, говоря о нелинейной динамике, мы тем самым указываем на некоторое смещение внимания к более современным аспектам сложного динамического поведения, ставшим доступными для анализа в эпоху компьютеров (например, динамический хаос).

#### Теория волн и динамика распределенных систем

Расширяя предмет исследования по сравнению с традиционной теорией колебаний, можно включить в рассмотрение наряду с временными еще и пространственные зависимости динамических переменных. В этом случае говорят о *распределенных системах* (в отличие от сосредоточенных, или конечномерных колебательных систем).

Характерный пример распределенных систем доставляют задачи гидро- и газодинамики, когда мгновенное состояние системы задается непрерывным распределением величин (скорости, плотности) в некоторой области пространства. Сводить динамику такого рода систем к колебаниям ограниченного числа переменных допустимо лишь в специальных случаях и в определенном, иногда только очень грубом, приближении. Распространяющийся в пространственно распределенной среде колебательный процесс есть не что иное, как волна (вспомните волны на поверхности воды, разбегающиеся от места падения брошенного камушка). Поэтому, обращаясь к рассмотрению колебаний в распределенных системах, мы приходим к *теории волн*.

Переход к анализу распределенных систем сопровождается радикальным уложением задач, с которыми приходится иметь дело. Однако вся методологическая основа теории колебаний, подразумевающая разработку единых подходов к системам разной физической природы, остается в силе.

Одна из фундаментальных проблем, имеющая огромное теоретическое и прикладное значение, состоит в том, чтобы объяснить природу *турбулентности* — сложной хаотической пространственно-временной динамики течения жидкости или газа, возникающей при очень общих условиях, если скорость потока достаточно велика. Это часть более общей проблемы объяснения и описания пространственно-временного хаоса в распределенных системах различной природы.

Обобщение представлений об автоколебаниях на распределенные системы привело к концепции *автоволн* — самоподдерживающихся колебательно-волновых процессов, характеристики которых в значительной мере не зависят от начальных или граничных условий. Теория автоволн интенсивно развивалась, в частности, в связи с приложениями в химии и биологии. Благодаря широкому использованию компьютерного моделирования, а также привлечению новых математических идей и методов, в понимании колебательно-волновой динамики распределенных систем достигнуты значительные успехи.

Синергетика, теория диссипативных структур

В 70-х гг. XX века немецкий ученый, специалист в области лазерной физики, Герман Хакен усмотрел аналогию между процессами возникновения генерации в лазере и формированием структур в системах иной природы. Он провозгласил, что это может служить основой новой синтетической научной дисциплины — *синергетики*. Си-

нергетика оказалась своего рода знаменем, под которое стали собираться, обнаружив общность интересов, представители различных наук, от физики и химии до экономики и социологии. Пожалуй, предмет синергетики во многом совпадает с предметом теории колебаний и волн, но ее специфика состоит в особом внимании к феномену *самоорганизации*. Речь идет о процессах, заключающихся в самопроизвольном формировании и усложнении упорядоченных структур, что может происходить во многих пространственно протяженных системах, средах. Такую среду, можно мыслить как совокупность большого числа точечных элементов, каждый из которых определенным образом взаимодействует со своими соседями в пространстве. Проблема того, каким образом динамика индивидуальных элементов и характер связи между ними проявляется в свойствах среды, ее способности к образованию пространственных структур, – одна из центральных задач синергетики. (Термин *синергетика* и возник от греческого слова, означающего совместное, согласованное действие.) Подобно теории колебаний, краеугольный камень синергетики — единство феноменов, концепций, моделей применительно к системам самой разной физической природы. В гидродинамике примером самоорганизации может служить образование структуры в виде шестигранных ячеек при конвекции Рэлея — Бенара в слое жидкости, подогреваемой снизу; в химии и биологии — формирование так называемых структур Тьюринга, условием возникновения которых оказывается различие коэффициентов диффузии для участвующих в реакции компонентов; в космологии – возникновение спиральных галактик; в экологии – организация сообществ и т.д. Альтернативное обозначение по существу для той же дисциплины – *теория диссипативных структур* принадлежит Илье Романовичу Пригожину, главе Брюссельской научной школы физико-химиков, лауреату Нобелевской премии 1977 г.

**Задача 1.1.** Осуществите поиск в сети Интернет, используя приведенные в этой лекции ключевые термины теории колебаний.

## Нелинейные элементы и нелинейные характеристики

Прежде чем переходить непосредственно к рассмотрению колебаний и колебательных систем, полезно сделать следующее существенное замечание. Для понимания поведения сложных объектов, как и для создания сложных систем с заданными свойствами, очень часто имеет смысл представлять объект как совокупность составных частей, элементов, каждый из которых может быть охарактеризован совокупностью тех и только тех его свойств, которые существенны для функционирования системы в целом.

Возьмем, например, радиоприемник или телевизор, представляющий собой довольно сложную систему из соединенных определенным образом элементов – транзисторов, конденсаторов, резисторов и др. Разглядывая принципиальную схему (или разрабатывая ее), мы не вспоминаем о явлениях, происходящих внутри каждого транзистора, диода или иного элемента. То, что для нас в данный момент имеет значение, это не внутреннее устройство элементов, а их «внешние» свойства и характеристики, существенные для функционирования схемы. Скажем, мы обязательно должны иметь представление о том, как связаны входные и выходные напряжения и токи, но можем забыть о физических процессах, ответственных за возникновение именно такой связи. Это и есть тот уровень рассмотрения, на котором оказывается возможным и целесообразным представлять себе работу устройства в целом.

Обсудим свойства и характеристики элементов, из которых строятся колебательные системы в механике, а также в электро- и радиотехнике. Начнем с линейных элементов.

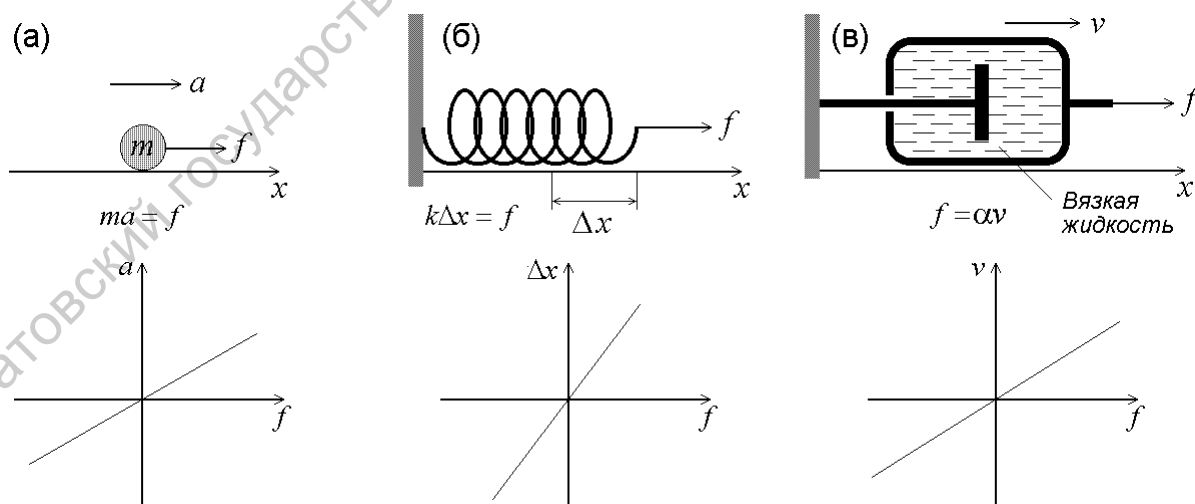


Рис. 2.1. Механические линейные элементы и их характеристики: масса (а); линейная пружина (б); элемент вязкого трения (в)



Линейные элементы механических систем представлены на рис. 2.1. Если мы имеем материальную частицу массы  $m$ , которая может свободно двигаться по оси  $x$  (рис. 2.1а), то по закону Ньютона  $f = ma$  ускорение  $a = dv/dt$  пропорционально действующей на частицу силе  $f$ . Величину  $f$  можно трактовать как воздействие, а величину  $dv/dt$  — как отклик. Зависимость отклика от воздействия линейная и определяется единственным параметром — коэффициентом пропорциональности  $m$ . Рассмотрим, далее, упругий элемент — пружину, изменение длины которой прямо пропорционально приложенной силе (рис. 2.1б). Величину силы интерпретируем как воздействие, а удлинение — как отклик. Зависимость отклика от воздействия линейная и определяется коэффициентом жесткости пружины  $k$ . Наконец, элемент вязкого трения, показанный на рис. 2.1в, характеризуется линейной зависимостью скорости  $v$  от приложенной силы  $f$ :  $f = \alpha v$ , где константа  $\alpha$  есть коэффициент трения.

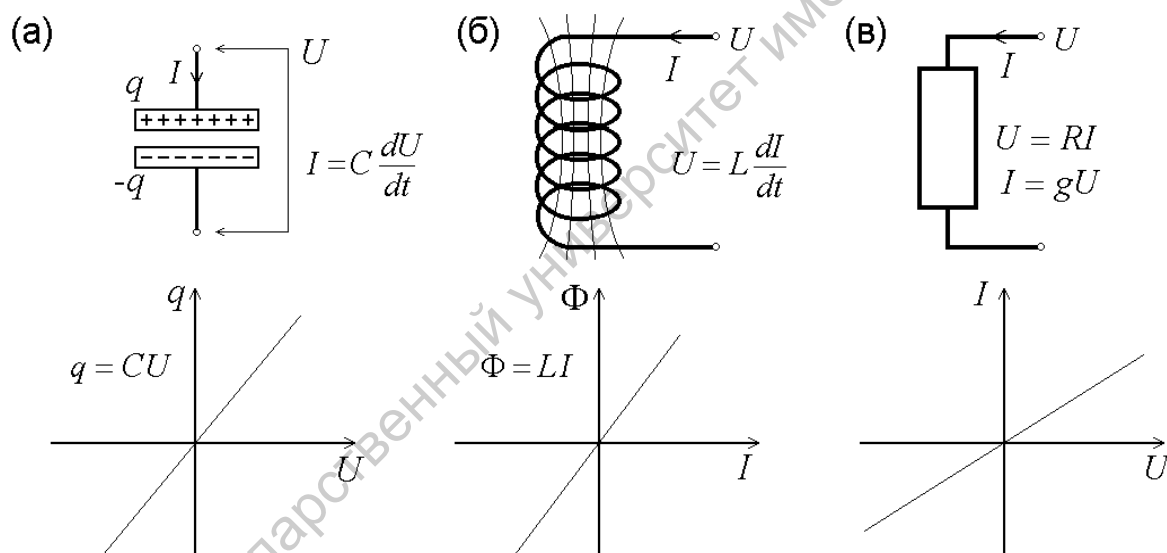


Рис. 2.2. Электрические линейные элементы и их характеристики: емкость (а),  $q$  — заряд на обкладках конденсатора; индуктивность (б),  $\Phi$  — суммарный магнитный поток через витки обмотки; сопротивление (проводимость) (в)

Линейные элементы электро- и радиотехнических схем показаны на рис. 2.2. Конденсатор, представляет собой две металлические пластины (обкладки), разделенные диэлектрическим промежутком (рис. 2.2а) и характеризуется линейной зависимостью заряда на пластинах  $q$  от приложенного напряжения  $U$ ,  $q = CU$ . Ток  $I$  есть производная по времени от накопленного заряда, так что можно написать  $I = C dU/dt$ . Коэффициент  $C$ , как известно, называется емкостью. Катушка индуктивности (рис. 2.2б) характеризуется линейной зависимостью между производной от протекаю-

щего тока  $dI/dt$  и величиной приложенного напряжения  $U$ . Коэффициент пропорциональности есть индуктивность  $L$ :  $L dI/dt = U$ . Наконец, диссипативный элемент — резистор характеризуется линейной зависимостью протекающего через него тока  $I$  от напряжения  $U$ . При этом полагают  $U = RI$  или  $I = gU$ , где  $R$  называется сопротивлением, а обратная величина  $g = 1/R$  — проводимостью.

В определении того, какая из величин рассматривается как воздействие, а какая — как отклик, есть момент соглашения: при наличии простой функциональной связи между ними мы вправе выбрать эту трактовку из соображений удобства. Например, при включении резистора параллельно прочим элементам цепи предпочтительно интерпретировать напряжение как воздействие, а ток как отклик, а при последовательном — наоборот. Более того, иногда оказывается целесообразным принять одно соглашение о том, какую величину считать воздействием, а какую откликом, при проведении измерений параметров или характеристик, и другое при рассмотрении функционирования элемента в схеме.

**Таблица 1. Аналогия между механическими и электрическими величинами и элементами**

Механика	Электричество
Смещение $x$	Заряд $q$
Скорость $v = dx/dt$	Ток $I = dq/dt$
Сила $f$	Напряжение $U$
Импульс $p$ , $f = dp/dt$	Магнитный поток $\Phi$ , $U = d\Phi/dt$
Масса $m$	Индуктивность $L$
Коэффициент жесткости пружины $k$	Обратная емкость конденсатора $C^{-1}$
Коэффициент вязкого трения $\alpha$	Сопротивление $R$
Закон Ньютона $m dv/dt = f$	$L dI/dt = U$
Закон Гука $f = kx$	$U = q/C$
Закон Стокса $f = \alpha v$	Закон Ома $U = RI$

Отметим замечательную параллель между элементами, величинами и параметрами в механике и электричестве. Если сопоставить механическое смещение  $x$  электрическому заряду  $q$ , то все прочие механические величины, фигурировавшие в наших рассуждениях, естественным образом находят свои аналоги среди электрических величин, а все связывающие их соотношения остаются в силе. Эта аналогия резюмируется в табл.1 и может рассматриваться как основа «колебательной общности» по Мандельштаму между механикой и электричеством.

Каждому из рассмотренных выше механических и электрических элементов соответствует линейная и притом мгновенная, безынерционная связь величин, представляющих воздействие и отклик. Простейшее обобщение состоит в том, чтобы считать связь между воздействием и откликом нелинейной, хотя по-прежнему мгновенной. Так мы приходим к представлению о безынерционных нелинейных элементах.

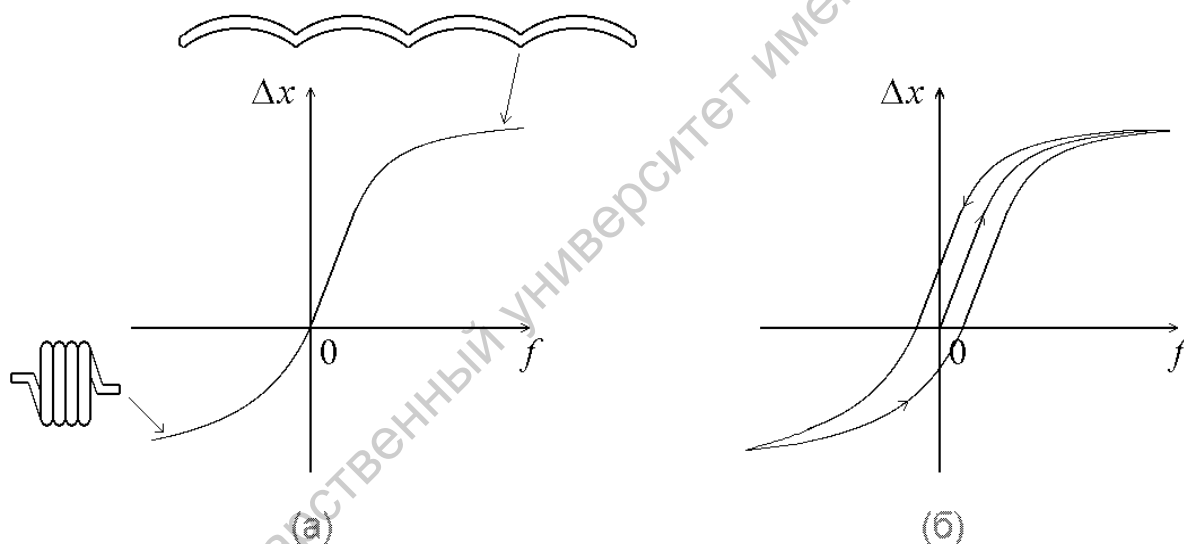


Рис. 2.3. Примерный вид зависимости удлинения от силы для нелинейной пружины: в случае идеально упругого материала (а); при наличии остаточных деформаций и гистерезиса (б)

В качестве первого объекта, возьмем пружину и представим себе, как реально происходит ее растяжение. Нетрудно сообразить, что при достаточно большом растяжении линейная связь между силой и удлинением заведомо нарушится. В самом деле, если приложенная сила очень велика, то проволока, из которой свита пружина, вытянется почти в прямую линию (рис. 2.3а). В этой ситуации мы будем иметь дело уже не с витками, работающими на изгиб, а по существу с куском проволоки, работающим на растяжение. Поэтому значительное увеличение силы будет сопровождаться непропорционально малым ростом удлинения. С другой стороны, сжимая пружину, мы достига-

ем, в конце концов, такой ситуации, когда витки прижаты друг к другу, и дальнейшее сжатие может быть обеспечено только за счет деформации проволоки в ее поперечном сечении. При этом опять-таки значительное увеличение силы будет сопровождаться очень малым изменением деформации. Подытоживая этот качественный анализ, заключаем, что график зависимости силы от удлинения должен иметь примерно такой вид, как на рис. 2.3. Хотя в области малых сил и малого удлинения пружины вблизи начала координат кривая может быть аппроксимирована касательной и охарактеризована коэффициентом упругости  $k$ , всю нелинейную зависимость в целом невозможно задать одним параметром. Она представляется функцией, которую можно назвать *нелинейной характеристикой* нашей пружины. Если ограничиться малым интервалом изменения силы и удлинения, в пределах которого характеристику можно считать приблизительно линейной, то можно ввести отвечающий этому интервалу дифференциальный коэффициент жесткости, как отношение изменения силы к изменению удлинения. Математически, это не что иное, как производная  $k_{\text{диф}} = df/dx$ .

Все наши рассуждения состоятельны, если материал, из которого изготовлена пружина, считать идеально упругим. В противном случае, из-за присутствия так называемых остаточных деформаций, конфигурация пружины будет зависеть от того, какой была и как изменялась нагрузка в предшествующие моменты времени. Если мы сначала увеличиваем нагрузку, стартовав из начала координат (рис. 2.3б), а затем уменьшаем ее до нуля, то пружина сохранит некоторое остаточное удлинение ( $\Delta x > 0$ ). Если далее мы сжимаем пружину, а затем уменьшаем действующую силу, то при нулевой нагрузке пружина окажется короче, чем в исходном состоянии ( $\Delta x < 0$ ). Таким образом, описание с помощью однозначно определенной нелинейной характеристики становится неадекватным. Имеет место, как говорят, *гистерезис* – зависимость между воздействием и откликом оказывается зависящей от предыстории. Замкнутую кривую на рис. 2.3б называют *петлей гистерезиса*.

Нелинейность в механической системе может вноситься также благодаря трению. Мы упоминали выше элемент вязкого трения. Известно, что при обтекании тел жидкостью прямая пропорциональность между скоростью и силой имеет место только при малых скоростях (закон Стокса). При больших скоростях он модифицируется, и в определенном диапазоне скоростей сила оказывается приблизительно пропорциональна квадрату скорости, так что можно записать  $f \cong \alpha v + \gamma v^2$ .

Следует иметь в виду, что для достаточно больших скоростей течение становится очень сложным, нестационарным и, в конце концов, турбулентным. Представление о том, что имеет место однозначная, не зависящая от предыстории, связь между силой и скоростью, оказывается не более чем приближением. Его справедливость зависит от того, какой диапазон скоростей и характерных времен суще-

ственен с точки зрения функционирования нашего нелинейного элемента, как составной части рассматриваемой системы.

Кроме вязкого трения, в механических системах встречается *сухое трение*, например, при скольжении твердых тел одного по другому (рис. 2.4). В определенном приближении (закон Кулона–Амонтона) силу сухого трения считают постоянной по величине и противоположной по направлению скорости относительного движения тел. Таким образом, связь между воздействием (приложенной силой) и откликом (скоростью), т.е. нелинейная характеристика для элемента сухого трения, выражается соотношением  $f = \alpha \operatorname{sgn} v = \alpha v/|v|$ . Иногда возникает необходимость учесть зависимость силы трения от скорости. При этом обычно полагают, что с ростом скорости трение скольжения несколько уменьшается (пунктир на рис. 2.4). Вообще физика, стоящая за явлением сухого трения, необычайно сложна и до конца до сих пор не вскрыта.

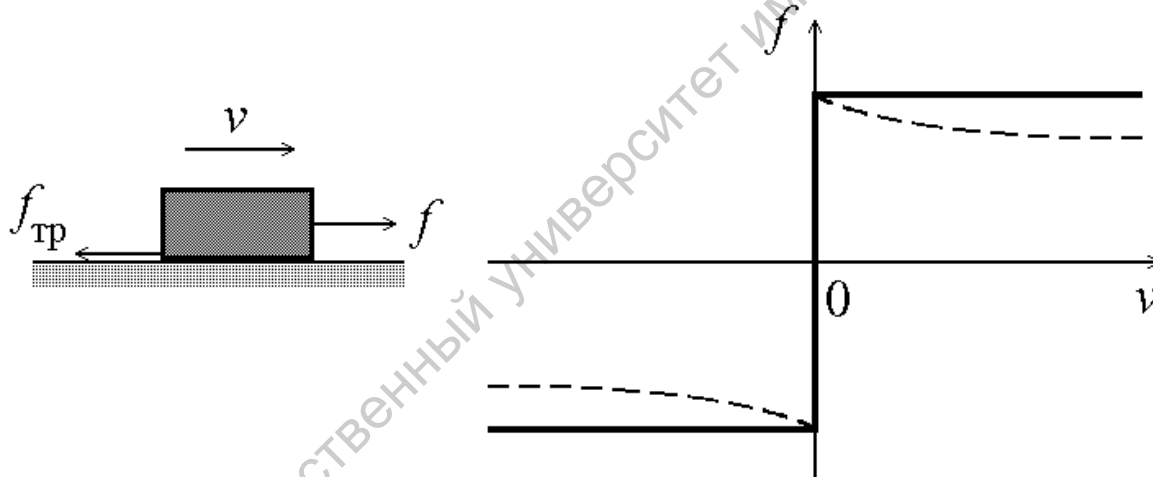


Рис. 2.4. Нелинейная характеристика элемента сухого трения: сплошная линия — по закону Кулона–Амонтона. Вертикальный участок отвечает ситуации трения покоя (движения нет, а величина силы может быть любой в интервале от  $-|f_{\max}(0)|$  до  $|f_{\max}(0)|$  в зависимости от приложенного воздействия). Пунктир — вид характеристики, принимаемой когда приходится учитывать зависимость силы трения от скорости

Частица, ускоряющаяся под действием приложенной силы, выступает как элемент нелинейный, если принять во внимание установленную в теории относительности релятивистскую зависимость массы от скорости:  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Здесь  $m_0$  — постоянная, называемая массой покоя частицы, а  $c$  — скорость света. Нелинейную характеристику такого элемента удобно представлять функцией, определяющей зависимость импульса от скорости,  $p = f(v) = m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  (рис. 2.5).

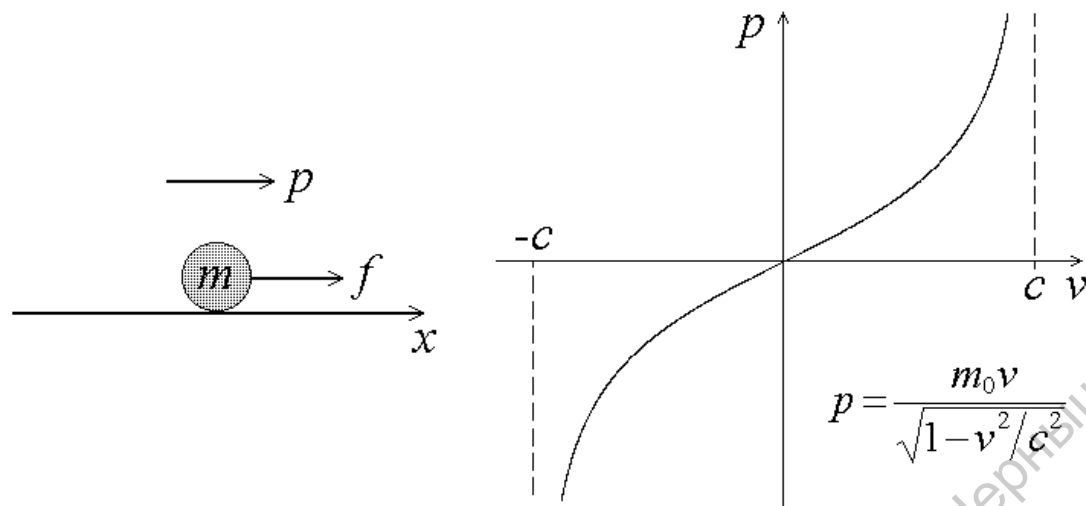


Рис. 2.5. Нелинейная характеристика релятивистской частицы — зависимость импульса от скорости

Несмотря на кажущуюся экзотичность последнего примера, он реален и даже используется на практике. В электронике сверхвысоких частот существует класс устройств – гирорезонансные приборы или лазеры на циклотронном резонансе. Их принцип работы существенно опирается на то обстоятельство, что электрон, движущийся по круговой орбите в сильном магнитном поле, представляет собой нелинейный осциллятор. При этом нелинейность обусловлена как раз релятивистской зависимостью массы от скорости.

Перейдем к обсуждению нелинейных электрических элементов.

Пусть мы имеем конденсатор, в котором в качестве диэлектрической прокладки использовано вещество с нелинейной зависимостью поляризации от приложенного электрического поля. Это может быть материал, относящийся к так называемым сегнетоэлектрикам (первоначально изученный представитель — сегнетова соль, которая и дала имя всему классу веществ). В малом электрическом поле поляризуемость сегнетоэлектрика очень велика, так что в конденсаторе в поверхностном слое сегнетоэлектрика появляется заряд противоположный по знаку заряду пластины (рис. 2.6а). В результате электрическое поле, а значит и разность потенциалов между обкладками, оказывается существенно меньшей, чем в «пустом» конденсаторе, а емкость, соответственно, большей. Когда электрическое поле велико, поляризация испытывает насыщение, и компенсирующее действие поляризационных зарядов уменьшается. В результате зависимость величины заряда на пластинах конденсатора от разности потенциалов должна иметь вид подобный рис. 2.6б. Можно ввести дифференциальную емкость, как производную

$C_{\text{диф}} = dq/dU$ . Для рассматриваемого элемента дифференциальная емкость будет убывать с увеличением заряда или напряжения.

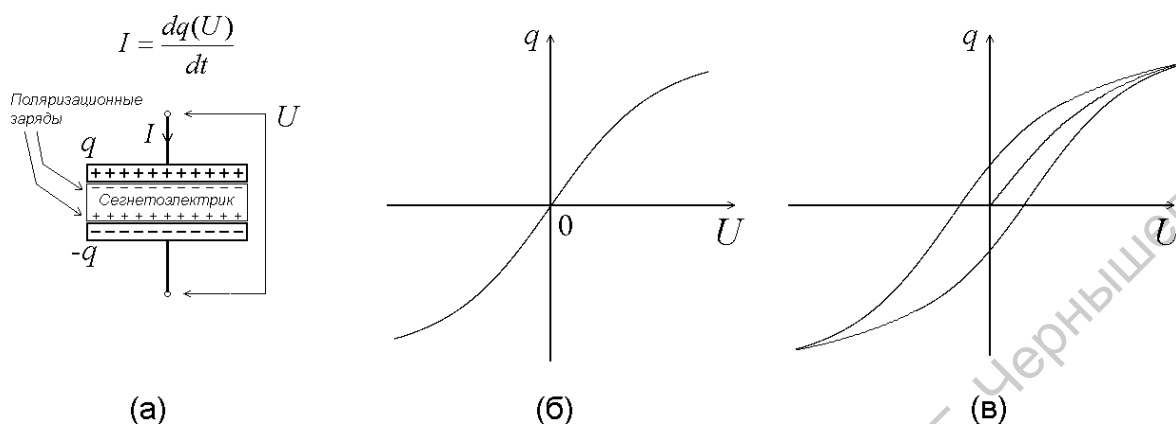


Рис. 2.6. Конденсатор с сегнетоэлектриком (а) и его нелинейная характеристика без учета (б) и с учетом (в) гистерезиса

На практике, в сегнетоэлектриках наблюдается эффект остаточной поляризации. На графике зависимости заряда от разности потенциалов это выражается в появлении петли гистерезиса, подобной той, какую мы описали при обсуждении неидеальной пружины (рис. 2.6в). Таким образом, связь между откликом и воздействием, вообще говоря, оказывается зависящей от предыстории. Только в определенном приближении, когда остаточная поляризация мала, и гистерезисом можно пренебречь, допустимо рассматривать конденсатор с сегнетоэлектриком как безынерционный элемент с однозначно определенной нелинейной характеристикой типа показанной на рис. 2.6б.

Рассмотрим теперь катушку индуктивности с ферромагнитным сердечником (рис. 2.7а). При малом токе в обмотке напряженность магнитного поля невелика, ферромагнетик приобретает большую намагниченность, а магнитный поток через витки катушки быстро растет с увеличением тока. При большом токе намагниченность испытывает насыщение, и этот рост замедляется. Зависимость величины магнитного потока от тока, которую можно рассматривать как нелинейную характеристику данного элемента, будет выглядеть, как показано на рис. 2.7б.

Фактически характеристика, приведенная на рис. 2.7б, реализуется в хорошем приближении в случае так называемых мягких ферромагнетиков (к ним относится трансформаторное железо, используемое как материал для изготовления сердечников трансформаторов). Вообще говоря, для ферромагнетиков характерно явление остаточной намагниченности. На графике зависимости магнитного потока от тока в обмотке оно выражается в появлении петли гистерезиса (рис. 2.7в). Если этот эффект сильно выражен, ферромагнетик называют жестким; такие материалы используют для постоянных магнитов.

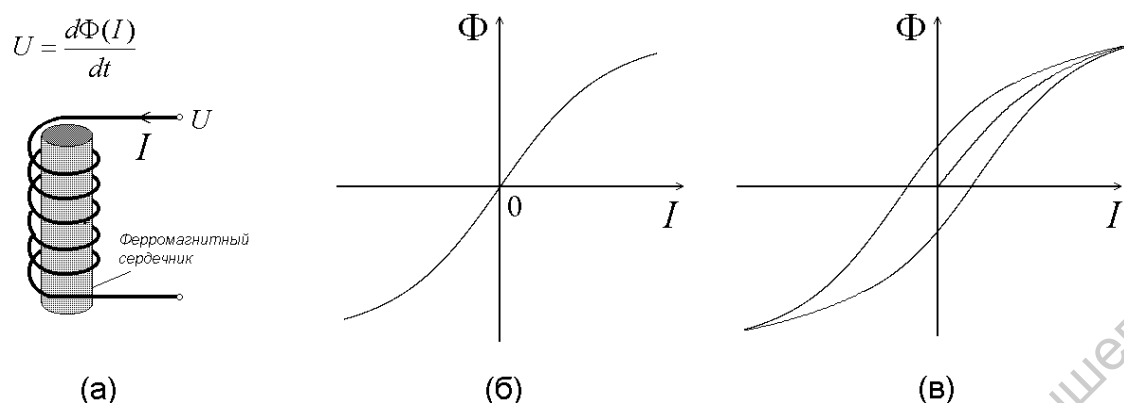


Рис. 2.7. Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником (а) и ее нелинейная характеристика без учета (б) и с учетом (в) гистерезиса

Еще один пример нелинейного элемента — знакомая всем нам лампа накаливания. В самом деле, сопротивление нити зависит от температуры: чем выше температура, тем больше сопротивление. Если увеличивать приложенное напряжение, то при этом будет расти сопротивление, поэтому изменение тока будет отклоняться от линейного закона. Поскольку за формирование вида нелинейной характеристики в данном случае отвечают тепловые эффекты, данный нелинейный элемент характеризуется существенными инерционными свойствами. Если представить себе, что мгновенно изменилось приложенное напряжение, то величина сопротивления заметно изменится только через некоторое характерное время (время релаксации), необходимое чтобы установился новый тепловой режим устройства, в котором был бы обеспечен баланс между мощностью от внешнего источника, и мощностью, излучаемой и рассеиваемой в окружающую среду.

Особую роль в электро- и радиотехнике играют нелинейные элементы, у которых зависимость тока от напряжения или напряжения от тока имеет падающий участок, т.е. участок, где дифференциальное сопротивление — производная от напряжения по току (или дифференциальная проводимость — производная от тока по напряжению) отрицательна. Если такой элемент включен в колебательный контур, и при этом присутствие внешнего источника постоянного напряжения обеспечивает расположение рабочей точки на падающем участке характеристики, то колебания тока и напряжения в контуре около этой точки могут стать нарастающими. При достаточно большой амплитуде, сравнимой по величине с протяженностью падающего участка, наступит стабилизация амплитуды колебаний. Устройство будет функционировать как автоколебательная система, генератор незатухающих колебаний.



На рис. 2.8 приведены две типичные формы характеристик с падающим участком на графике, где по оси абсцисс отложено напряжение, а по оси ординат ток. В одном слу-

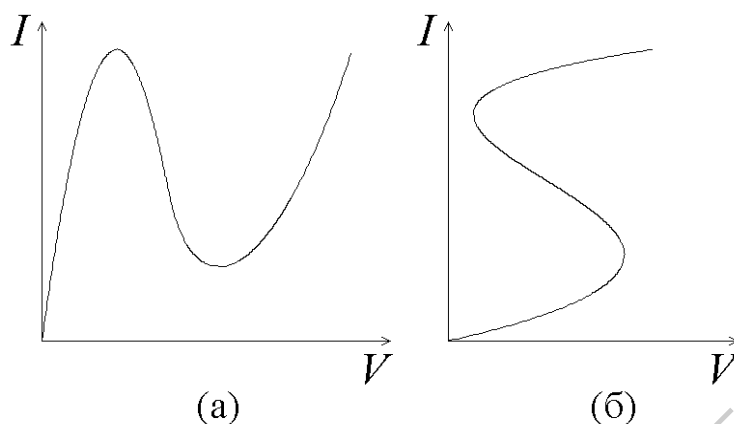


Рис. 2.8. Вольтамперные характеристики с отрицательным дифференциальным сопротивлением  $N$ -типа (а) и  $S$ -типа (б)

чае кривая напоминает латинскую букву  $N$ , и ее называют характеристикой  $N$ -типа. В другом случае она похожа на букву  $S$ , и ее называют характеристикой  $S$ -типа. Примером элемента с характеристикой  $N$ -типа служит туннельный диод, примером элемента с характеристикой  $S$ -типа — промежуток между двумя электродами, в котором происходит дуговой разряд.

В случае дугового разряда наличие падающего участка вольт-амперной характеристики обусловлено тем, что увеличение тока в канале разряда соответствует росту степени ионизации и, соответственно, концентрации свободных носителей заряда. Поэтому для поддержания большего тока оказывается достаточным прикладывать меньшее напряжение.

Механизм, ответственный за возникновение падающего участка характеристики туннельного диода объясняется на основании развитой в теории твердого тела зонной теории проводимости и с учетом возможности квантового туннелирования носителей заряда через потенциальный барьер. На рис. 2.9 показана схематически структура зон в области контакта полупроводника  $p$ -типа (слева) и  $n$ -типа (справа): по оси абсцисс отложена пространственная координата, а по вертикальной — энергия. Белый цвет соответствует запрещенной зоне, а серый — разрешенным зонам. Темно-серым цветом обозначены состояния, занятые электронами, а светло-серым — не занятые. Диаграмма (а) отвечает нулевому приложенному напряжению. Увеличение напряжения соответствует тому, что расположение зон слева и справа от области перехода смещается друг относительно друга, как показано на рисунках (б)–(г). Ситуация (б) отвечает наиболее благоприятным условиям для туннелирования электронов, которые переходят из заполненных состояний вблизи дна верхней разрешенной зоны справа налево через потенциальный барьер, образованный белой запрещенной областью. При дальнейшем увеличении напряжения напротив этих состояний слева оказывается запрещенная зона, так что ток должен быть мал (в). Наконец, при еще

больших величинах приложенного напряжения ток снова растет, причем основной вклад вносится так называемым диффузионным током ( $\gamma$ ).

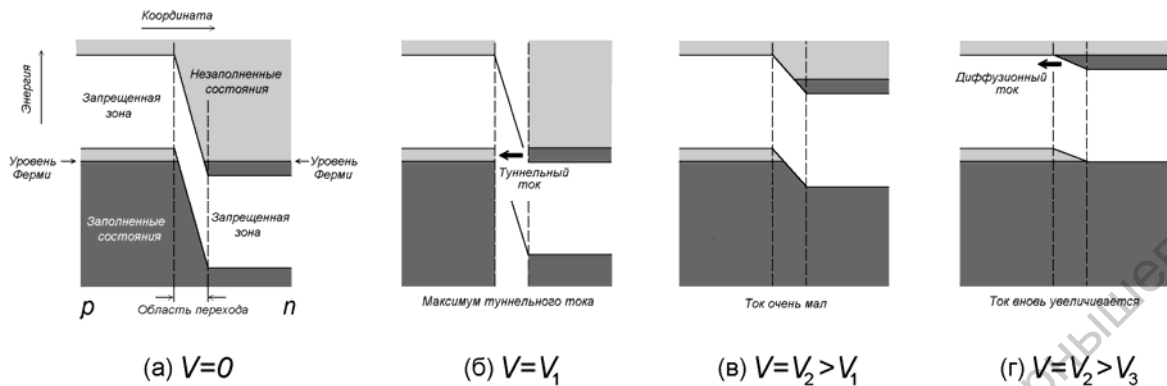


Рис. 2.9. К механизму образования падающего участка вольт–амперной характеристики туннельного диода. По оси абсцисс отложена пространственная координата, а по вертикальной — энергия. Слева от переходной области располагается полупроводник  $p$ -типа, а справа —  $n$ -типа. Белый цвет — запрещенная зона, а серый — разрешенные зоны. Уровень Ферми отделяет состояния, занятые электронами (обозначены темно-серым) от незаполненных (обозначены светло-серым). Диаграммы (а)–(г) отвечают увеличению приложенного напряжения, начиная от нуля

Когда мы представляем колебательную систему как совокупность элементов, очень часто встречается такая ситуация, что существенной для колебательной динамики оказывается нелинейность какого-либо одного из элементов, тогда как остальные можно считать линейными. Зная из теоретических расчетов, из измерений, наконец, из справочника вид характеристики нелинейного элемента (например, в виде графика, таблицы, формулы) мы можем сформулировать уравнения, описывающие колебания в системе, и обратиться к их исследованию.

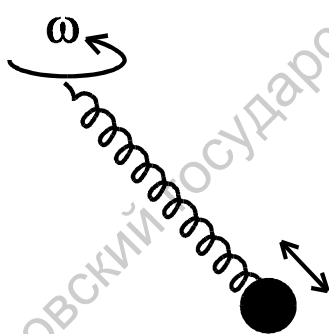


Рис. 2.10

**Задача 2.1.** Небольшой грузик массы  $m$  прикреплен к концу легкой пружины, вращающейся в невесомости вокруг другого ее конца с угловой скоростью  $\omega$ , и совершает малые радиальные колебания около положения равновесия (рис. 2.10). Длина недеформированной пружины  $l_0$ . Покажите, что в рамках модели линейной пружины с коэффициентом жесткости  $k$  такое поведение системы можно описать лишь при не очень больших значениях частоты вращения. Найдите критическую частоту  $\omega_c$ , при которой линейная модель полностью теряет смысл.

Покажите, что учет нелинейности пружины позволяет дать описание поведения системы и при  $\omega \geq \omega_c$ . Считайте, что зависимость упругой силы от деформации имеет вид  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. (Указание. Определите положение равновесия системы графическим методом.)

**Задача 2.2.** Для описания динамики популяции в 1838 году Ферхюльст предложил следующую модель:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2.$$

Здесь  $N$  — численность популяции,  $a$  и  $b$  — положительные коэффициенты. Найдите решение этого уравнения и постройте график зависимости  $N(t)$ . Начальное число особей равно  $N_0$ . Покажите, что если начальное число особей невелико, то можно выделить «линейную» стадию процесса, на которой исходное дифференциальное уравнение заменяется соответствующим линейным. По какому закону изменяется число особей  $N$  на линейной стадии? Через какое характерное время начнут сказываться нелинейные эффекты? К чему приведет воздействие нелинейности по истечении достаточно большого времени? Используя полученные результаты, дайте интерпретацию коэффициентам  $a$  и  $b$ .

**Задача 2.3.** Конденсатор с нелинейной характеристикой  $q = CU + aU^2$  замкнут на резистор с сопротивлением  $R$ . Получите зависимость напряжения на конденсаторе от времени, если его начальное значение равно  $U_0$ . Оцените характерное время  $\tau$ , в течение которого существенны нелинейные эффекты. Найдите закон изменения напряжения на линейной стадии процесса разряда конденсатора.

**Задача 2.4.** Получите дифференциальное уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, образованном емкостью  $C$  и катушкой с нелинейной индуктивностью. Магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий катушку, связан с током  $I$  соотношением  $\Phi = LI + kI^3$ .

**Задача 2.5.** Проявляет ли парамагнетик нелинейные свойства во внешнем магнитном поле? Если да, то какова природа нелинейности?

**Задача 2.6.** В соленоид с поперечным сечением  $S$  и индуктивностью  $L$  вставляют ферромагнитный сердечник. Получите выражение для потока, пронизывающего соленоид, в приближении слабой нелинейности в виде ряда, содержащего линейный и кубичный по току члены. Считайте, что ферромагнетик описывается моделью Вейса, в рамках которой нормированная намагниченность  $\eta = M/M_0$  связана с магнитным полем  $H$  соотношением

$$\text{th } \eta = \frac{T}{T_c} \eta - \frac{\mu_B H}{kT}.$$

Здесь  $T$  — температура,  $\mu_B$ ,  $k$ ,  $M_0$ ,  $T_c$  — постоянные коэффициенты, причем  $T_c$  представляет собой температуру в точке Кюри. Ферромагнетик плотно входит в соленоид, температура среды выше точки Кюри. Покажите, что при приближении температуры к точке Кюри и линейная модель, и модель слабой нелинейности оказываются несостоятельными. (Указание. Следует искать решение уравнения Вейса  $\eta = \eta(H)$  в виде соответствующего ряда по степеням  $H$ ).

**Задача 2.7.** Для модели ферромагнетика Вейса постройте графики зависимости намагниченности образца  $M$  от внешнего поля  $H$ . Покажите, что эти графики имеют качественно разный вид при температуре  $T$  большей и меньшей точки Кюри. Обсудите возможность мультистабильности и гистерезиса в системе. Свяжите Ваши рассуждения с известной Вам информацией о поведении ферромагнетиков.

## Фундаментальные эффекты, к которым приводит нелинейность

Как мы уже отмечали в предыдущих лекциях, особенность нелинейных систем состоит в том, что в них *колебания разной амплитуды могут быть существенно различными по своим характеристикам*, например, по виду зависимостей динамических переменных от времени. В этой лекции мы собираемся обсудить на качественном уровне некоторые весьма общие конкретные эффекты, посредством которых может проявлять себя нелинейность — *неизохронность, ангармоничность, мультистабильность, автоколебания, динамический хаос*.

### 3.1. Неизохронность

Одно из распространенных проявлений нелинейности состоит в том, что период колебаний оказывается зависящим от амплитуды. Это свойство многих нелинейных колебательных систем называют *неизохронностью*.

Говорят, что Галилей обнаружил постоянство периода колебаний маятника, наблюдая колебания люстры в соборе во время церковной службы и используя для измерения времени собственный пульс. Это послужило толчком к изобретению маятниковых часов. Позднее выяснилось, что на самом деле период колебаний маятника *зависит* от амплитуды, и его можно считать практически постоянным только при углах отклонения малых в сравнении с  $\pi$ .

В самом деле, момент возвращающей силы зависит от угла отклонения по закону синуса (рис. 3.1), но при малых углах эта зависимость хорошо аппроксимируется линейной. В этом же приближении постоянными будут частота и период колебаний. С увеличением угла отклонения, возвращающая сила становится меньше той, какой она была бы в случае линейной зависимости. Следовательно, при движении маятника от крайнего положения скорость будет нарастать медленнее, чем это имело бы место для линейной системы, и время, через которое он достигнет нижней точки, оказывается несколько большим. Сказанное становится особенно очевидным, если представить себе колебания такой амплитуды, что в крайней точке маятник почти достигает вертикального положения, с грузом наверху (рис. 3.1г). В этом состоянии, близком к неустойчивому равновесию, он как бы замирает, поскольку момент возвращающей силы очень мал, после чего начинает медленно разгоняться с тем, чтобы проскочить нижнюю точ-

ку, снова достигнуть наибольшего отклонения, но уже в другую сторону, и так далее. За амплитуду колебаний естественно принять угол максимального отклонения маятника при колебаниях. Зависимость периода колебаний от амплитуды будет выглядеть как показано на рис. 3.1в. Когда величина угла приближается к  $\pi$ , период стремится к бесконечности.

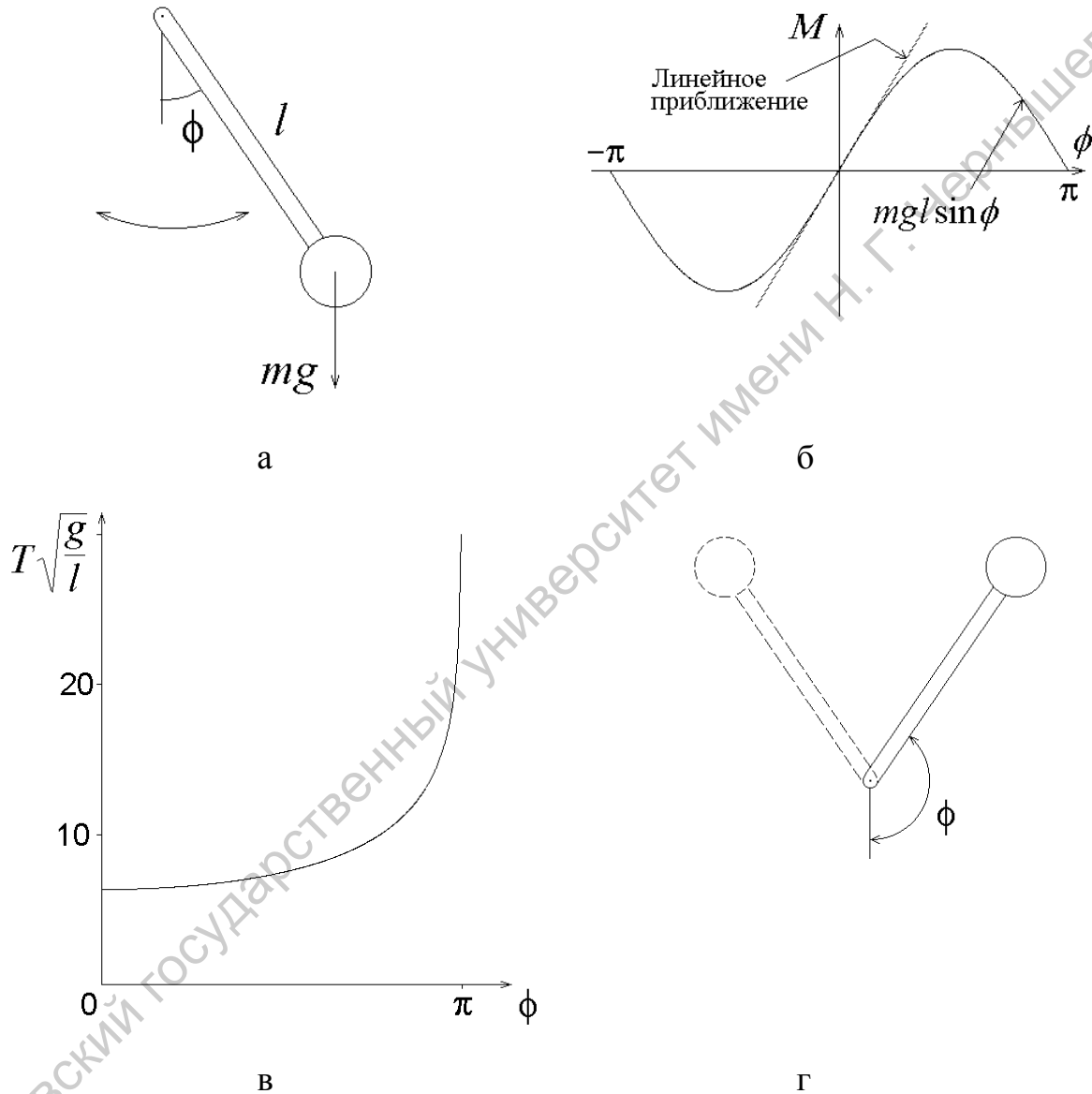


Рис.3.1. Маятник как пример неизохронной колебательной системы:

- определение основных параметров (а);
- зависимость момента возвращающей силы от угла отклонения (б);
- зависимость периода колебаний от амплитуды – угла максимального отклонения (в);
- иллюстрация колебаний с отклонением на большой угол (г)

В качестве второго примера рассмотрим мячик, прыгающий вверх-вниз на горизонтальной поверхности, причем удар предполагаем идеально упругим (рис. 3.2). Это,

несомненно, колебательный процесс. Высоту подпрыгивания примем за амплитуду. Время падения тела в поле тяжести с высоты  $A$  без начальной скорости равно  $\sqrt{2A/g}$  и совпадает со временем подъема, так что период колебаний составит  $T = 2\sqrt{2A/g}$ , т.е. он пропорционален корню квадратному из амплитуды. Таким образом, колебания неизохронные.

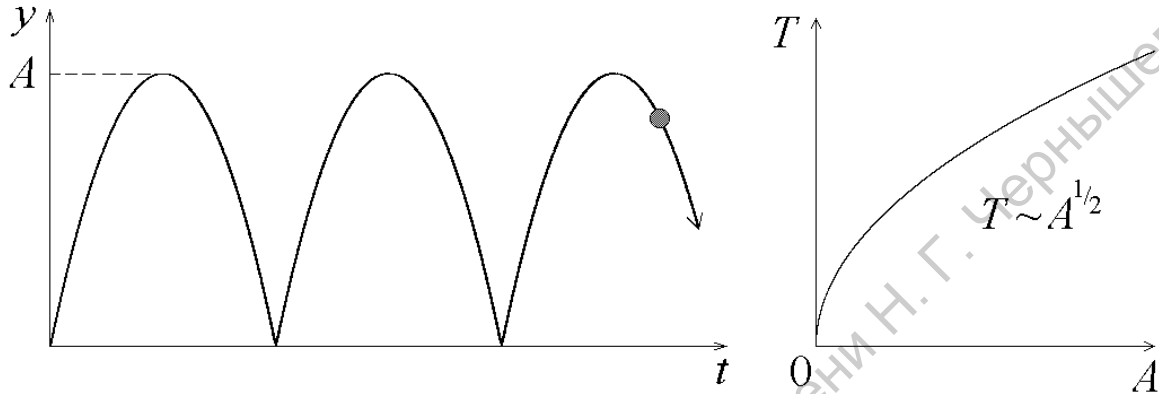


Рис. 3.2. Зависимость координаты от времени при колебаниях мячика, прыгающего на горизонтальной поверхности в поле тяжести и зависимость периода от амплитуды — высоты подскока

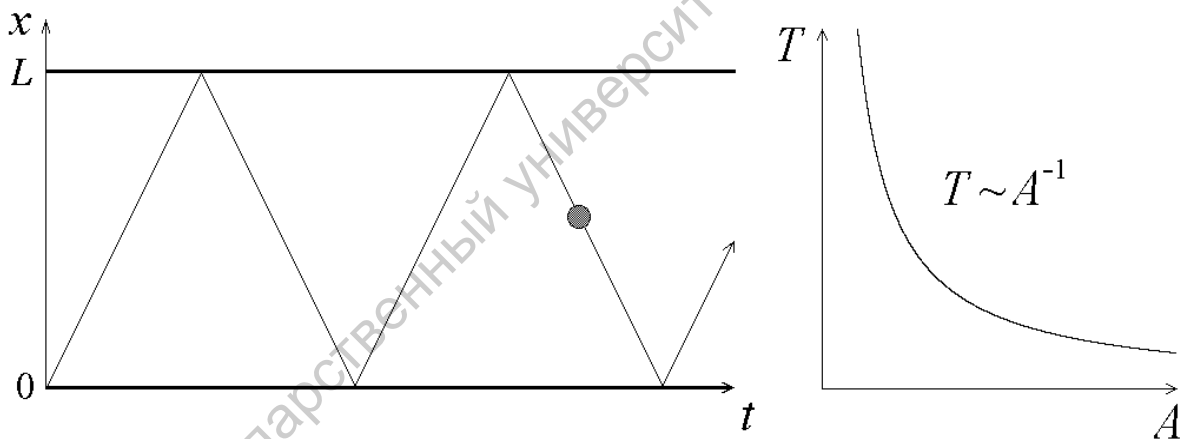


Рис. 3.3. Зависимость координаты от времени при колебаниях частицы между двумя параллельными упругими стенками и зависимость периода колебаний от амплитуды, за величину которой принята скорость,  $A = v$

Следующий пример — частица, совершающая одномерное движение между двумя упругими стенками, расположенными на расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 3.3). В предположении, что потери энергии отсутствуют, движение, очевидно, периодическое. Поскольку пространственный размах колебаний не зависит от их интенсивности, в качестве определения амплитуды более целесообразно принять величину скорости в промежутках времени между соударениями частицы со стенками. В данном случае именно это вполне естественная и разумная характеристика интенсивности колебаний.

Период колебаний будет составлять  $T = 2L/A$ , т.е. при нашем определении амплитуды период обратно ей пропорционален.

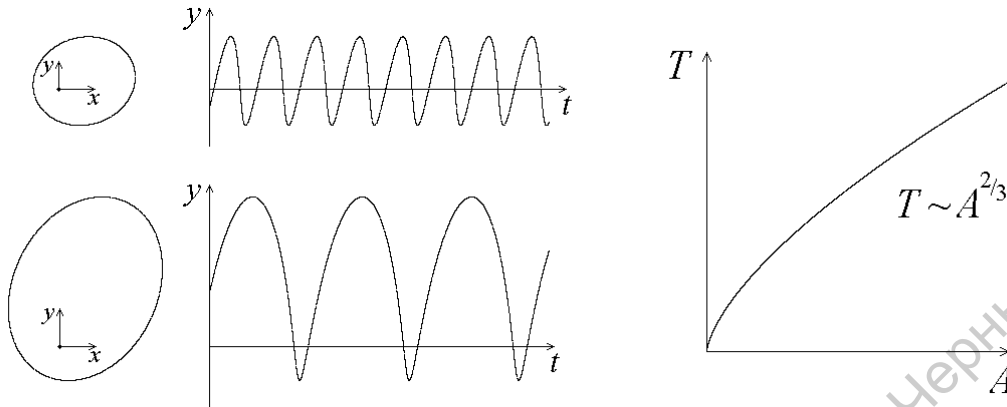


Рис. 3.4. Движение планеты по Кеплеру как пример неизохронного колебательного процесса: период колебаний пропорционален  $A^{2/3}$ , где  $A$  — большая полуось эллиптической орбиты

Движение планеты по орбите вокруг Солнца (рис. 3.4) тоже можно рассматривать как пример неизохронного колебательного процесса. Действительно, в проекции на любое направление в плоскости орбиты изображение планеты с очевидностью совершает периодические колебания. Согласно закону Кеплера, период этих колебаний пропорционален  $A^{2/3}$ , где  $A$  — большая полуось эллиптической орбиты. Это соотношение выражает зависимость периода от амплитуды, в качестве каковой фигурирует величина  $A$ .

Рассмотрим теперь электрон, движущийся в магнитном поле (рис. 3.5). В отсутствие продольной составляющей скорости движение происходит по окружности, при этом в проекции на одну из координатных осей наблюдается колебательный процесс. Поскольку в качестве центростремительной силы выступает сила Лоренца, имеем

$$mv^2/r = evB \quad (3.1)$$

где  $v$  — скорость электрона,  $r$  — радиус орбиты,  $B$  — величина индукции магнитного поля,  $e$  и  $m$  — соответственно, заряд и масса электрона. При учете релятивистских эффектов масса зависит от скорости как  $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Подставим это выражение в (3.1) и положим  $v = \omega r$ , где  $\omega$  — угловая скорость, она же круговая частота колебаний, связанная с периодом соотношением  $T = 2\pi/\omega$ . Выражая из (3.1) величину  $\omega$  через остальные параметры задачи, имеем

$$\omega = \frac{eB}{m_0} \left( 1 + \frac{e^2 B^2}{m_0^2 c^2} r^2 \right)^{-1/2}, \quad T = \frac{2\pi m_0}{eB} \sqrt{1 + \frac{e^2 B^2}{m_0^2 c^2} r^2}. \quad (3.2)$$

Таким образом, частота колебаний уменьшается, а период растет с увеличением радиуса орбиты, т.е. амплитуды колебаний.

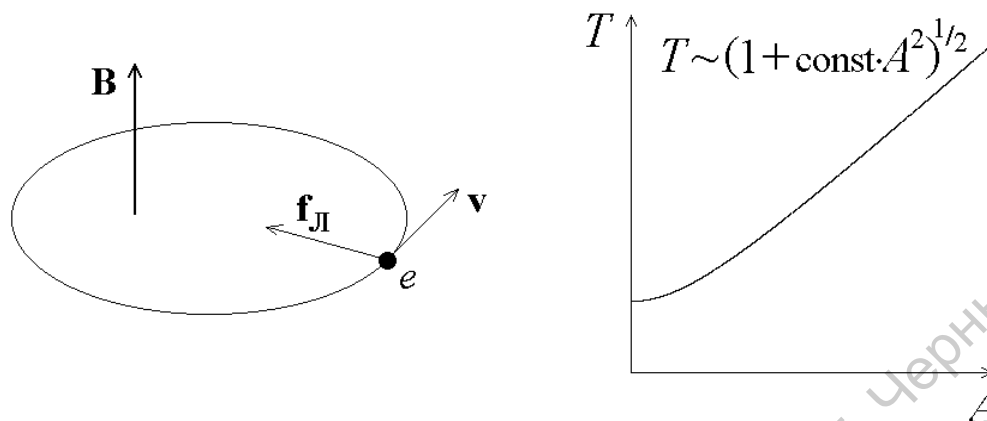


Рис. 3.5. Электрон, движущийся по круговой орбите в магнитном поле как пример неизохронного осциллятора. При малом радиусе орбиты (малая кинетическая энергия частицы) период обращения практически постояен, но из-за релятивистского увеличения массы период растет с увеличением радиуса орбиты

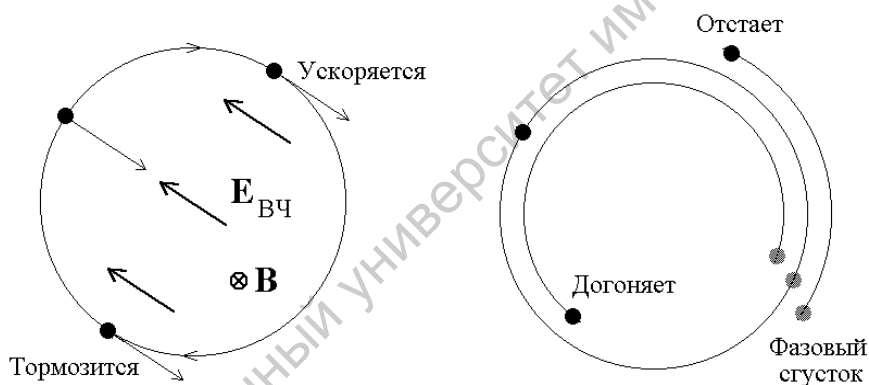


Рис. 3.6. К пояснению механизма фазовой группировки электронов, используемой в гиротронах (мазерах на циклотронном резонансе)

Неизохронность электронов-осцилляторов находит применение для генерации и усиления электромагнитного излучения в так называемых гиротронах или мазерах на циклотронном резонансе. Рассмотрим ансамбль электронов, обладающих определенной начальной энергией (рис. 3.6). Пусть они помещены в магнитное поле перпендикулярное плоскости рисунка, и находятся в резонаторе, где присутствует высокочастотное электрическое поле, осциллирующее с частотой близкой к частоте вращения электронов. Электрон, попавший в тормозящую фазу электрического поля, уменьшает свою кинетическую энергию и, соответственно, радиус орбиты. Частота вращения увеличивается, и он догоняет по азимутальной координате невозмущенный электрон. Электрон, попавший в ускоряющую фазу, увеличивает свою энергию, становится более массивным, и отстает по азимутальной координате. В результате электроны группируются по фазе. Если на следующем этапе взаимодействия образовавшийся фазовый сгусток попадет в тормозящую фазу высокочастотного поля, то энергия пучка будет передаваться полю.



**Задача 3.1.** Грузик массы  $m$  прикреплен к пружине жесткости  $k$  и может двигаться по горизонтальной плоскости без трения (рис. 3.7). Грузику ударом сообщают скорость  $v_0$ . Расстояние от грузика до стенки  $l$ , удары о стенку абсолютно упругие. Определите зависимость периода колебаний от величины начальной скорости  $v_0$ .

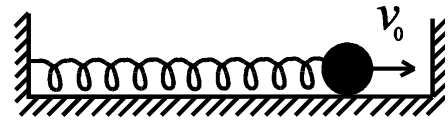


Рис. 3.7

**Задача 3.2.** На рис. 3.8 изображены три варианта симметричной потенциальной ямы, характеризующихся одним и тем же периодом линейных колебаний  $T$ . Штриховая линия соответствует закону  $U = kx^2$ . Возрастает или убывает период колебаний с ростом амплитуды при движении частицы в двух других ямах?

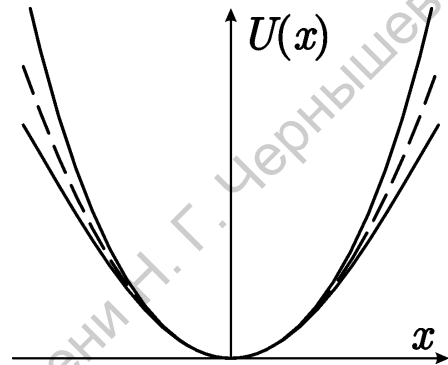


Рис. 3.8

**Задача 3.3.** Исследуйте колебания материальной точки массы  $m$  в потенциальной яме вида  $U(x) = k|x|^n$ . Определите период колебаний с точностью до константы. Покажите, что для  $n = 2$  и малые, и большие колебания изохронны. Покажите, что для  $n \neq 2$  как большие, так и малые колебания неизохронны. Определите для  $n \neq 2$  характер зависимости периода колебаний от амплитуды при её стремлении к нулю.

### 3.2. Ангармоничность колебаний и генерация гармоник

Как известно, в линейном консервативном осцилляторе, описываемом уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.3)$$

изменение во времени динамической переменной происходит по синусоидальному, или гармоническому закону:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.4)$$

В нелинейной системе, совершающей периодические колебания, их форма обычно отличается от синусоиды. Такие колебания называют *ангармоническими*.

На рис. 3.9 показан вид временных зависимостей угла отклонения маятника при разной амплитуде колебаний. При малой амплитуде колебания близки к гармоническим. Это естественно, поскольку при малых углах отклонения маятник приближенно сводится к линейному осциллятору (3.3). Однако при больших амплитудах форма колебаний становится заметно отличной от синусоиды, т.е. колебания оказываются ангармоническими. «Глазомерный» способ различать гармонические и ангармонические колебания, конечно же, несовершенен. Чтобы придать этому различию более глубокий

смысл и количественный аспект, необходимо обратиться к *спектральному представлению колебаний*.

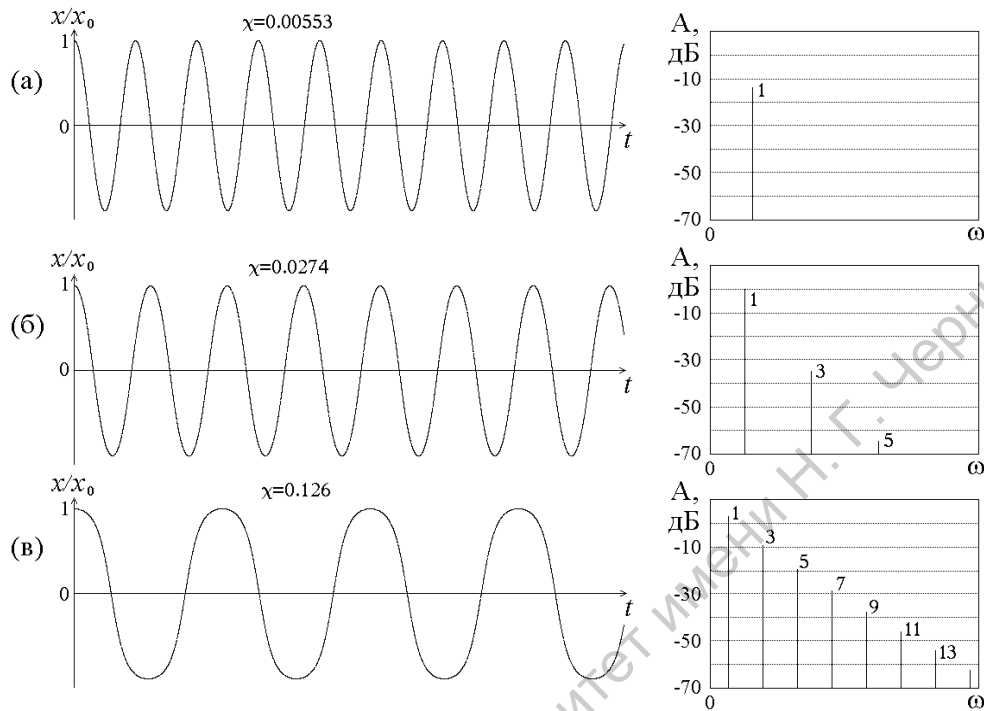


Рис. 3.9. Справа – зависимости угловой координаты маятника от времени при начальном отклонении, соответственно,  $x_0=1$  (а), 2 (б) и 3(в), указаны числовые значения коэффициента нелинейных искажений. Справа – соответствующие спектры, где по оси ординат использован логарифмический масштаб, и амплитуды гармоник даны в децибелах. Цифрами обозначены номера гармоник, обратите внимание, что присутствуют только нечетные гармоники. Графики получены путем численного решения уравнения динамики маятника на компьютере

Известно, что любую разумную с физической точки зрения периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. Пусть  $x(t)$  — функция периода  $T$ , тогда

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi imt/T}, \quad (3.5)$$

где

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2\pi imt/T} dt. \quad (3.6)$$

Для того чтобы в любой момент  $t$  величина  $x(t)$  была действительной, коэффициенты разложения должны, очевидно, удовлетворять условию

$$c_m = c_{-m}^*, \quad (3.7)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Если мы сгруппируем члены ряда (3.5) по парам, отвечающим одинаковым по абсолютной величине значениям индекса  $m$ , то разложение Фурье можно записать в виде

$$x(t) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\omega t + \varphi_m), \quad (3.8)$$

где введены обозначения  $\omega = 2\pi/T$  и

$$A_0 = c_0, \quad A_m = |c_m|, \quad \varphi_m = \arg c_m. \quad (3.9)$$

Полезное замечание о вычислении аргумента комплексного числа  $x + iy$ : вместо общепринятого способа, когда полагают  $\varphi = \arctg(y/x)$  при  $x > 0$  и  $\varphi = \arctg(y/x) + \pi$  при  $x < 0$  можно рекомендовать более удобный эквивалентный способ, основанный на формуле

$$\arg(x + iy) = 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.10)$$

Применение этой формулы не требует анализа того, в какую область попали  $x$  и  $y$ .

Член ряда (3.8) с нулевым индексом отвечает постоянной составляющей, которую часто целесообразно бывает исключить из рассмотрения надлежащим выбором начала отсчета для динамической переменной  $x$ . Если отличен от нуля один только первый член суммы, то это соответствует гармоническим колебаниям, которые, с общей точки зрения, представляют собой очень специальный случай периодического колебательного процесса. Если же сумма содержит другие ненулевые члены, то колебания ангармонические, поскольку их форма с очевидностью отличается от простой синусоиды. Чаще всего самую большую амплитуду имеет первый член  $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ . Его считают основной гармонической составляющей процесса, и говорят о ней как о *первой гармонике*. Последующие члены ряда отвечают *второй гармонике*  $A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)$ , *третьей гармонике*  $A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3)$  и т.д. Очевидно, частота колебаний  $m$ -ой гармонике равна  $m\omega$ .

В качестве количественной характеристики отклонения колебательного процесса от гармонических колебаний в технике используют так называемый *коэффициент нелинейных искажений*. Он определяется как отношение

$$\chi = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 + \dots}}{A_1}. \quad (3.11)$$

Итак, со спектральной точки зрения, отличие колебаний по форме от синусоиды — ангармоничность трактуется как присутствие составляющих с частотами  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ..., — высших гармоник. Вопрос о происхождении ангармоничности есть вопрос о причине возникновения (генерации) высших гармоник. Если представить колебательную систему построенной из отдельных составных элементов, то появление высших гармоник можно связать с *преобразованием спектра периодического сигнала нелинейными элементами*. Обсудим подробнее этот простой, но важный для теории колебаний общий принцип.

Пусть мы имеем элемент, для которого входной сигнал дается переменной  $x(t)$ , выходной — переменной  $y(t)$ , а связывающая их нелинейная характеристика раскладывается в ряд Тейлора

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (3.12)$$

Первый член в этом разложении линейный, второй и третий представляют, как говорят, *квадратичную и кубическую нелинейность*, соответственно.

Предположим, что входной сигнал гармонический,  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , т.е. в спектре присутствует только одна частотная составляющая, на частоте  $\omega$ . Подставим выражение для  $x(t)$  в (3.12). При помощи известных тригонометрических формул степени синуса могут быть представлены в виде линейных комбинаций гармонических функций. В силу того, что

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.13)$$

член, отвечающий за квадратичную нелинейность, принимает вид

$$\begin{aligned} a_2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) &= \frac{1}{2} a_2 A^2 (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)) = \\ &= \frac{1}{2} a_2 A^2 + \frac{1}{2} a_2 A^2 \sin\left(2\omega t + 2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Далее, поскольку

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha, \quad (3.15)$$

то член, соответствующий кубической нелинейности, переписывается в виде

$$a_3 A^3 \sin^3(\omega t + \varphi) = \frac{3}{4} a_3 A^3 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{4} a_3 A^3 \sin(3\omega t + 3\varphi + \pi). \quad (3.16)$$

Собирая все члены, имеем окончательно:

$$y = \frac{1}{2} a_2 A^2 + \left( a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 \right) \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} a_2 A^2 \sin\left(2\omega t + 2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} a_3 A^3 \sin(3\omega t + 3\varphi + \pi) + \dots \quad (3.17)$$

Из проведенных простых выкладок видно, что присутствие на выходе нелинейного элемента гармонических составляющих с частотами, отличными от частоты входного сигнала, обязано нелинейности характеристики элемента (рис. 3.10). При этом *квадратичная нелинейность* отвечает за появление *постоянной составляющей* (в радиотехнике об этом эффекте говорят как о *детектировании*) и *второй гармонике*. Обратите внимание, что соответствующие слагаемые в формуле (3.17) пропорциональны коэффициенту квадратичной нелинейности  $a_2$  и квадрату входной амплитуды. *Кубическая нелинейность* обеспечивает нелинейную добавку к амплитуде основной гармонике и возникновение *третьей гармонике*. Заметьте, что соответствующие слагаемые пропорциональны коэффициенту кубической нелинейности  $a_3$  и кубу входной амплитуды.

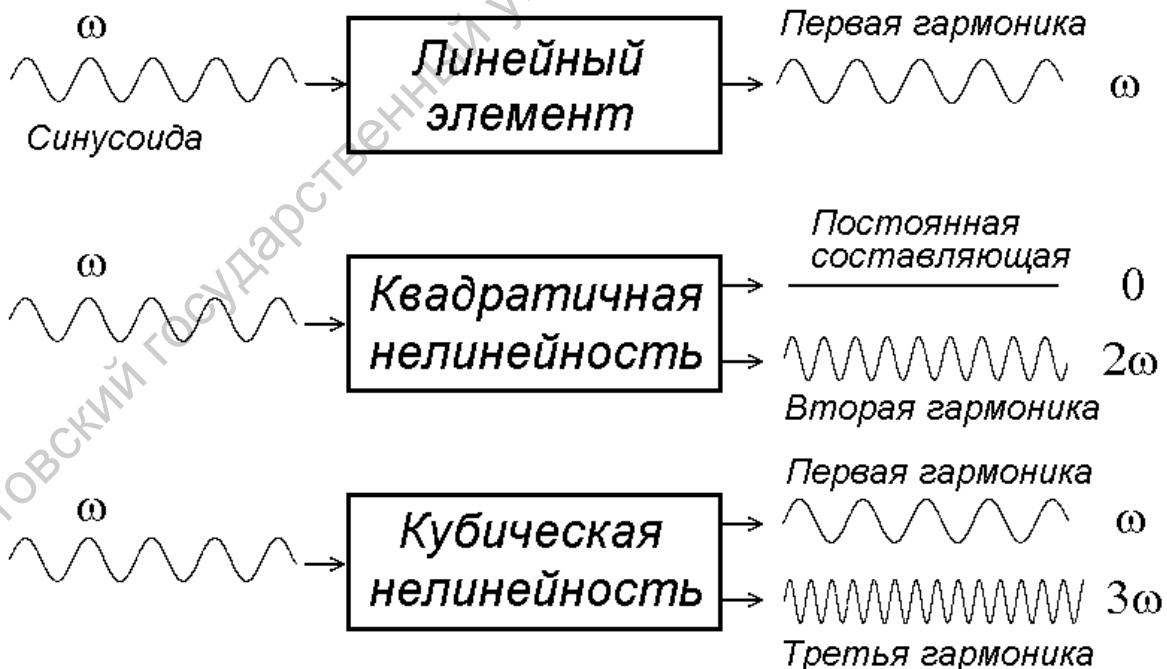


Рис. 3.10. Преобразование входного гармонического сигнала элементами с линейной, квадратичной и кубической характеристиками

Одной из красивейших иллюстрацией нелинейного преобразования частот служит следующий оптический эксперимент. Луч электромагнитного излучения инфракрасного диапазона, невидимый глазом (длина волны 1,06 мкм, частота  $2,8 \cdot 10^{14}$  Гц), генерируется лазером на неодимовом стекле и проходит через кристалл ниобата бария. При достаточно большой интенсивности в результате нелинейного квадратичного преобразования электромагнитных колебаний в кристалле генерируется вторая гармоника с частотой вдвое больше исходной,  $5,6 \cdot 10^{14}$  Гц. Эта частота соответствует уже видимому диапазону оптического излучения, и на выходе из кристалла наблюдается луч зеленого цвета (длина волны 0,53 мкм).

Аналогичный эффект наблюдается в акустике. Имея достаточно интенсивный источник звука определенной частоты  $f_0$ , можно обнаружить, что на достаточно большом расстоянии от источника акустические колебания содержат вторую, третью и другие гармоники, т.е. составляющие с частотами  $2f_0$ ,  $3f_0$  и т.д. Их можно фиксировать с помощью аппаратуры или воспринять на слух.

Еще один пример относится к физиологии слуха. Как обнаружено в свое время Гельмгольцем, генерация гармоник сопровождает собственно процесс восприятия ухом монохроматического звука при его большой амплитуде. (При этом, чтобы различить высшие гармоники на фоне интенсивного основного тона нужно обладать достаточно тренированным музыкальным слухом!)

**Задача 3.4.** На обложке журнала «*Scientific American*» за июль 1963 года изображена эффектная фотография, на которой показан пучок красного цвета с длиной волны 6940 Å, падающий на кристалл. С противоположной стороны кристалла выходит пучок синего цвета с длиной волны 3470 Å. Каков характер нелинейности, которая приводит к подобному преобразованию света?

### 3.3. Комбинационные составляющие

Пусть теперь на вход нелинейного элемента подается сигнал, представляющий собой суперпозицию двух гармонических составляющих с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi). \quad (3.18)$$

Предположим сначала, что нелинейная характеристика квадратичная,  $y = a_2 x^2$ . Подставляя сюда выражение для  $x(t)$ , получаем

$$y(t) = a_2 \left[ A_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1) + 2A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + A_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \varphi_2) \right]. \quad (3.19)$$

Используем известные из тригонометрии формулы, и преобразуем квадраты и произведения синусов так, чтобы выражение содержало элементарные тригонометрические функции только в первой степени. Имеем:

$$y(t) = a_2 \left[ \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 - \frac{1}{2} A_1^2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{1}{2} A_2^2 \cos(2\omega_2 t + \varphi_2) + A_1 A_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)) - A_1 A_2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)) \right]. \quad (3.20)$$

Разумеется, в этом выражении присутствуют члены, соответствующие результату детектирования обеих частотных составляющих, а также члены, отвечающие вторым гармоникам, соответственно,  $A_{1,2}^2/2$  и  $(A_{1,2}^2/2)\cos(2\omega_{1,2}t + \varphi_{1,2})$ . Кроме того, появились составляющие на суммарной и разностной частоте  $\omega_1 + \omega_2$  и  $\omega_1 - \omega_2$ . Их амплитуда дается произведением амплитуд составляющих входного сигнала,  $A_1 A_2$ . О них принято говорить как о *комбинационных составляющих* выходного сигнала.

Если входной сигнал содержит множество составляющих с частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ , то в результате квадратичного нелинейного преобразования получатся комбинационные составляющие со всевозможными частотами  $\omega_m \pm \omega_n$ , амплитуды которых будут определяться произведением соответствующих амплитуд  $A_m$  и  $A_n$ . Составляющая на частоте  $\omega_m \pm \omega_n$  интерпретируется как результат взаимодействия компонент входного сигнала с частотами  $\omega_m$  и  $\omega_n$ . Заметим, что постоянную составляющую  $A_m^2$  и вторую гармонику на частоте  $2\omega_m$  можно трактовать как результат *самовоздействия* частотной составляющей  $\omega_m$ .

В радиотехнике преобразование сигналов сложного спектрального состава на квадратичной нелинейности используют для детектирования сигналов. Под этим понимается «перенос» спектра сигнала из области высоких частот в область низких по возможности без искажения его формы. Предполагается, что исходный сигнал имеет узкополосный спектр ширины  $\Delta\omega$  вблизи некоторой центральной частоты  $\omega_0$ . В результате преобразования на нелинейном квадратичном элементе получаются две компоненты спектра, сосредоточенные вблизи нуля и вблизи частоты  $2\omega_0$ . Далее, подаем сигнал на вход линейной цепи, которая практически не пропускает высокие частоты (низкочастотный фильтр). На выходе получаем сигнал со спектром в области низких частот. Если при этом исходный сигнал имел симметричный спектр, что соответствует *амплитудной модуляции*, то форма спектра выходного сигнала будет воспроизводить форму «половинки» спектра исходного сигнала.

Аналогично тому, как мы рассмотрели возникновение комбинационных частот при квадратичном нелинейном преобразовании, можно проанализировать случай кубической нелинейности. Читателю предлагается проделать это самостоятельно. Если входной сигнал содержит множество составляющих с частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ , то действие кубической нелинейности приводит к появлению комбинационных составляющих с частотами  $\omega_m \pm \omega_n \pm \omega_k$ . Индексы  $m, n, k$  – это целые числа от 1 до  $N$ , которые могут быть разными или одинаковыми. Амплитуды комбинационных составляющих определяются произведением амплитуд  $A_m, A_n$  и  $A_k$ . В частности, самовоздействие одной

из гармонических составляющих входного сигнала  $\omega_m$  выражается в появлении компоненты выходного сигнала на той же частоте ( $\omega_m + \omega_m - \omega_m$ ) и третьей гармоники ( $\omega_m + \omega_m + \omega_m$ ).

**Задача 3.5.** В книге Ф. Крауфорда «Волны» описан следующий опыт. Возьмем два камертона, соответствующие двум нотам с частотами 440 Гц и 523 Гц. Возбудив их, можно услышать не только две эти ноты, но и колебание, близкое к частоте некоторой третьей ноты. Частота третьей ноты 349 Гц. Объяснение этого эффекта состоит в нелинейности уха. Каков характер нелинейности, проявившейся в этом опыте?

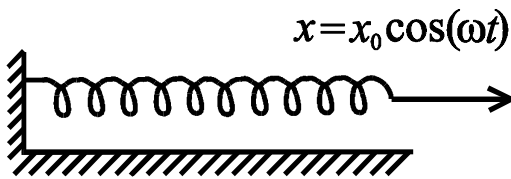


Рис. 3.11

**Задача 3.6.** Нелинейная пружина одним концом прикреплена к стенке (рис. 3.11). Второй конец пружины перемещают вдоль горизонтальной оси по закону  $x = x_1 \cos(\omega t) + x_2 \cos(2\omega t)$ . Определите спектр силы, действующей на стенку. Пружина невесома, сила упругости  $F$  зависит от координаты  $x$  по закону  $F = kx + cx^3$ .

Сколько компонент присутствует в спектре?

**Задача 3.7.** Вольт-амперная характеристика некоторого элемента имеет вид

$$I = \begin{cases} 0, & U < 0, \\ U/R, & U \geq 0. \end{cases}$$

На элемент подано напряжение  $U = U_0 \cos(\Omega t)$ . Определите спектр тока. По какому закону спадают с ростом частоты  $\omega$  далекие фурье-компоненты тока? С какими особенностями нелинейного преобразования связан этот закон?

**Задача 3.8.** Исследуйте зависимость спектра колебаний системы из задачи 3.1 от величины  $v_0$ . По какому закону в нелинейном режиме колебаний спадают с ростом частоты  $\omega$  далекие фурье-компоненты? С какими особенностями нелинейности системы связан этот закон?

### 3.4. Автоколебания

Одним из замечательных и нетривиальных проявлений нелинейности служит такой феномен как *автоколебания*. Это самопроизвольно возникающий в некоторых диссипативных системах колебательный процесс, характеристики которого определяются свойствами самой системы и не зависят от конкретных начальных условий.

Классический пример автоколебательной системы – электронный генератор, схематически изображенный на рис. 3.12а. Схема содержит колебательный контур, в котором имеются потери энергии. При наличии в контуре колебаний, за счет электромагнитной индукции возникает переменное напряжение на катушке связи, и это на-



пряжение подается на вход электронного усилителя (конкретная природа усилителя непринципиальна, он может быть реализован на электронной лампе, как в исторически первых версиях устройства, или на транзисторах). Сигнал, полученный на выходе уси-

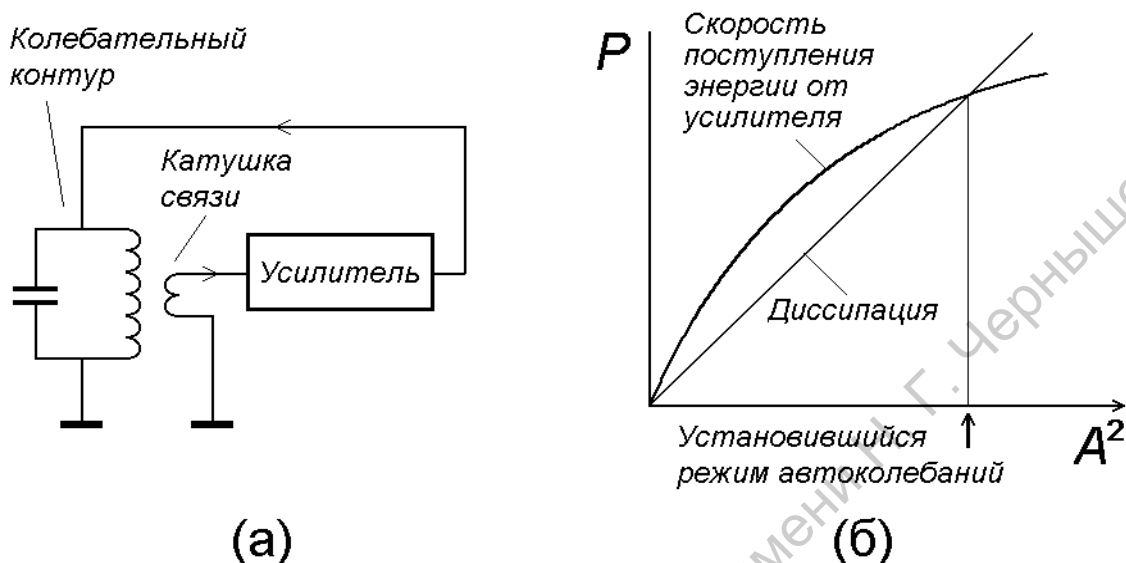


Рис. 3.12. Схема электронного генератора (а); график зависимости от квадрата амплитуды мощностей энергетических потерь в контуре (прямая линия) и поступления энергии от усилителя (кривая линия) (б). Точка пересечения определяет установившуюся амплитуду автоколебаний

лителя, подается вновь в колебательный контур так, чтобы способствовать раскачке присутствующих там колебаний: схема построена так, что реализуется, как говорят, положительная обратная связь. Если коэффициент усиления достаточно велик, то колебания малой амплитуды в контуре будут раскачиваться. По мере увеличения амплитуды будут нарастать и потери энергии за счет диссипации, так что, в конце концов, средняя за период колебаний мощность потерь достигнет уровня мощности, поступающей в контур от усилителя. Это приведет к стабилизации амплитуды на определенном уровне, и в системе будет протекать самоподдерживающийся колебательный процесс — до тех пор, пока функционирует усилитель. Энергия необходимая для поддержания процесса черпается из неколебательного источника, а именно, из батареи или внешней сети, питающей усилитель.

Автоколебательный процесс — всегда принципиально нелинейный феномен. Это видно хотя бы из того, что с ним ассоциируется определенный характерный уровень амплитуды, реализующийся в установившемся режиме. Если бы система была линейной, то колебательные процессы с любым произвольным уровнем амплитуды должны были бы протекать одинаково.

**Задача 3.9.** Прделайте следующий эксперимент. Пустите в ванну воду из-под крана. Внесите под струю воды шарик от пинг-понга. Пронаблюдайте поведение шарика. Проведите наблюдения для разных значений скорости струи, вытекающей из крана. Опишите поведение шарика на языке теории колебаний. Попробуйте объяснить поведение шарика.

### 3.5. Бифуркации, мультистабильность и гистерезис

Как мы уже отмечали во вводной лекции, наряду с динамическими переменными, зависимость которых от времени составляет сущность колебательного процесса, при рассмотрении колебательных систем приходится иметь дело также с *параметрами*. Это величины, которые считаются постоянными во времени, но от задания которых может зависеть характер реализующегося в системе режима.

Представьте себе, что система заключена в ящик, на котором имеется несколько ручек настройки. Устанавливая ручки в различные положения, мы можем, вообще говоря, наблюдать разные по характеру режимы — стационарные состояния, периодические колебания, непериодические колебания.

Качественное изменение режима при изменении параметра называют *бифуркацией*. Подчеркнем, что речь идет принципиально о столь медленном (адиабатическом) изменении параметра, что режим динамики системы в каждый момент, т.е. при каждом определенном значении параметра, можно считать установившимся. Процесс изменения параметров можно мыслить как движение по определенной траектории в пространстве, где по осям координат отложены параметры системы. Такое геометрическое представление особенно удобно и наглядно, когда параметров два, и пространство параметров двумерное.

Не путайте *пространство параметров* с фазовым пространством. В первом случае по осям координат откладываются параметры, а во втором — динамические переменные системы. Движение изображающей точки по траектории в фазовом пространстве — это результат собственной динамики системы. Траектория же в пространстве параметров задается исследователем, желающим знать, как эволюционирует при соответствующем изменении параметров динамическое поведение системы.

Одна из распространенных и хорошо изученных бифуркаций связана с возникновением автоколебаний. Если в схеме на рис. 3.12а коэффициент усиления усилителя мал, и его не хватает для компенсации потерь энергии в колебательном контуре, то система приходит после затухающих колебаний в тривиальное состояние равновесия. Если постепенно увеличивать коэффициент усиления (или коэффициент обратной связи), то в некоторый момент происходит бифуркация, — малые колебания вблизи состояния равновесия перестают затухать и становятся нарастающими. В этих условиях

любое случайное начальное возмущение (например, возникшее из всегда присутствующих в физической системе шумов) даст «затравку» колебательному процессу. Появятся сначала колебания малой амплитуды, затем амплитуда будет нарастать до тех пор, пока она не стабилизируется на определенном уровне из-за нелинейных эффектов.

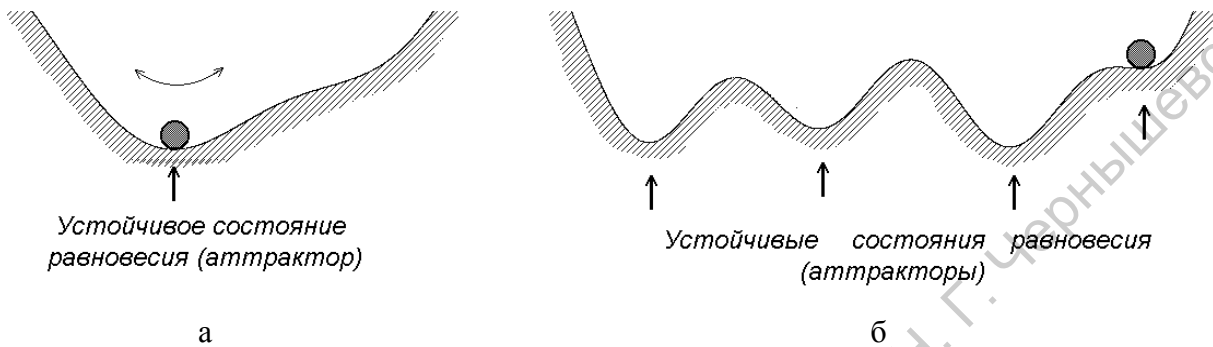


Рис. 3.13. Шарик в лунке в случае одного (а) и нескольких (б) устойчивых положений равновесия

Известно, что при переходе параметра через критическое, или бифуркационное, значение амплитуда зависит от параметра по универсальному закону, пропорционально корню квадратному из надкритичности (рис. 3.12б). Описанную здесь на элементарном уровне бифуркацию рождения периодических автоколебаний называют *бифуркацией Андронова–Хопфа*. Формальное содержание этой бифуркации состоит в том, что существовавшая ранее в фазовом пространстве системы неподвижная точка теряет устойчивость, а аттрактором становится замкнутая фазовая траектория — предельный цикл.

Чтобы познакомиться с дальнейшими примерами бифуркаций, обратимся к одной из самых простых колебательных систем, представленной шариком в лунке (рис. 3.13). В присутствии трения шарик будет совершать колебания вблизи точки минимума, приходя, в конце концов, в состояние устойчивого равновесия. Можно рассмотреть более сложный случай и предположить, что профиль имеет более одного минимума, т.е. содержит несколько лунок. Тогда устойчивых состояний равновесия тоже будет несколько. В зависимости от того, какой была начальная координата и скорость шарика, он попадет в итоге в одну из лунок. В данном случае мы имеем дело с колебательной системой, имеющее несколько разных сосуществующих *аттракторов*, в качестве которых в нашем простом примере выступают состояния устойчивого равновесия. Каждому аттрактору отвечает определенный *бассейн притяжения* — область значений начальных координаты и скорости, соответствующая тому, что в итоге частица окажется в определенной лунке.

Если какая-нибудь колебательная система характеризуется наличием нескольких разных потенциально возможных установившихся состояний или колебательных режимов, и возникновение того или иного из них зависит от задания начальных условий, то говорят, что имеет место *мультистабильность*. В линейной системе мультистабильность невозможна. В частности, в нашем примере с шариком наличие у профиля нескольких ямок с очевидностью требует, чтобы зависимость возвращающей силы от координаты частицы была нелинейной.

Предположим теперь, что форму профиля можно регулировать, изменяя параметры системы, так что в процессе этой деформации могут появляться или пропадать локальные минимумы (рис. 3.14). Одно из интересных явлений будет наблюдаться в

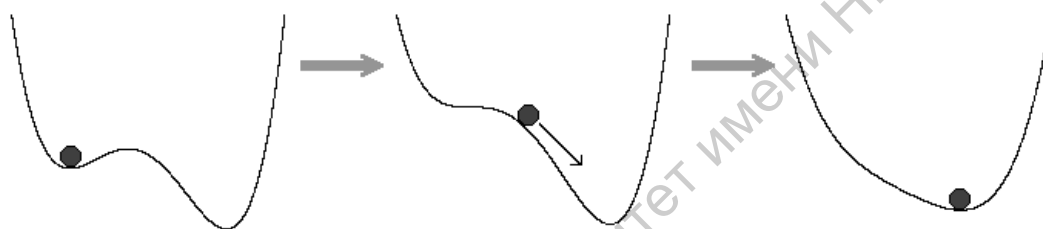


Рис. 3.14. Скачкообразное изменение состояния равновесия системы «шарик в лунке» при медленном изменении профиля.

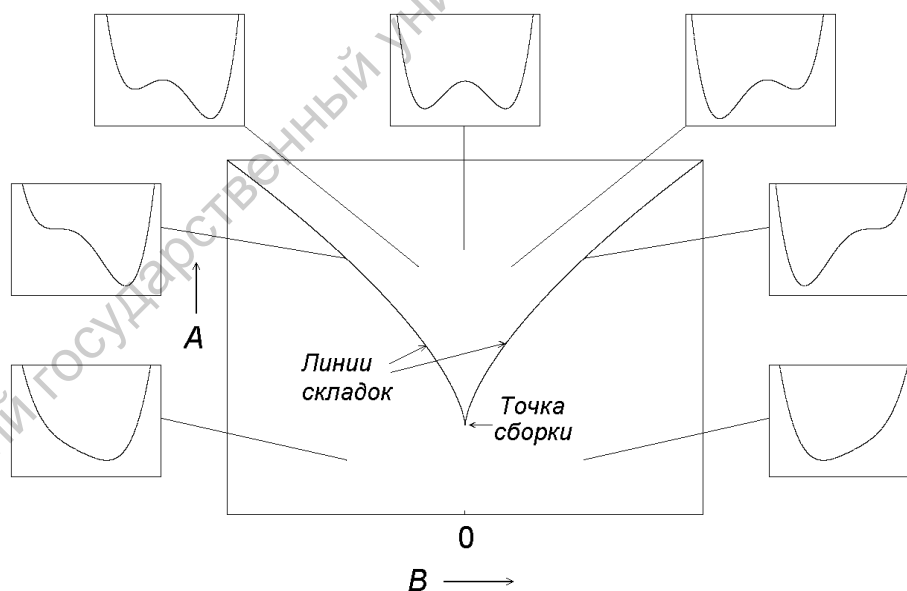


Рис.3.15. Карта плоскости параметров (в центре) и диаграммы, показывающие форму потенциального рельефа в характерных точках (по периферии). Между двумя ветвями линии складок располагается область бистабильности

ситуации, когда ямка, в которой располагается шарик, сближается с локальным максимумом, сливается с ним, и исчезает. Это *бифуркация слияния устойчивого (минимум) и*

неустойчивого (максимум) состояний равновесия (рис. 3.14). После бифуркации локальный минимум исчезает, и система должна скачком перейти в новое состояние, достаточно удаленное от исходного. Говоря о скачке, мы имеем в виду, что координата частицы претерпит существенное изменение в итоге процесса перехода в новое состояние. Что касается развития этого процесса во времени, то на начальной стадии он будет достаточно медленным, так как локально профиль в области нахождения частицы практически плоский.

Предположим, что в нашем примере с шариком профиль ямы задан уравнением

$$y = x^4 - Ax^2 + Bx, \quad (3.21)$$

где  $A$  и  $B$  — параметры. На рис. 3.15 представлена карта плоскости параметров и диаграммы, показывающие вид потенциального рельефа в нескольких характерных точках.

На плоскости параметров имеется область, ограниченная двумя ветвями кривой, где потенциальный рельеф характеризуется наличием двух локальных минимумов. Линии, которые разграничивают области существования одного или двух устойчивых состояний, обозначены на рис. 3.15 как *линии складок*. Они сходятся в точке сборки, образуя характерное «острие».

Поясним происхождение терминологии. На рис. 3.16 показана в виде трехмерного графика зависимость координаты состояния равновесия от параметров  $A$  и  $B$ . Она определяется из условия

$$y'(x) = 0, \text{ или } 4x^3 - 2Ax + B = 0. \quad (3.22)$$

Можно видеть, что пограничные линии на плоскости параметров отвечают проекции складок изображенной поверхности на координатную плоскость  $(A, B)$ . Алгебраически, эти линии получаются из условия наличия у уравнения (3.22) двух совпадающих корней, т.е. из системы уравнений

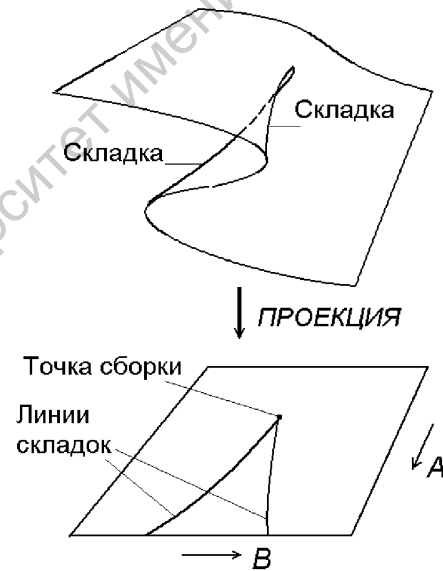


Рис. 3.16. Трехмерный график поверхности  $x = f(A, B)$  и возникновение складок и сборки при проецировании

$$\begin{cases} 4x^3 - 2Ax + B = 0, \\ 12x^2 - 2A = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Исключая из второго уравнения  $x$ , получаем  $x = \pm\sqrt{A/6}$ , после чего подстановка в первое уравнение дает

$$B = \pm(2A/3)^{3/2}. \quad (3.24)$$

Это и есть уравнение линии складок, знаки плюс и минус соответствуют ее двум ветвям. Точка сборки находится в данном случае в начале координат.

Рис. 3.17 и 3.18 иллюстрируют, как изменяется состояние системы «шарик в лунке» при медленном изменении формы потенциального рельефа, соответствующем

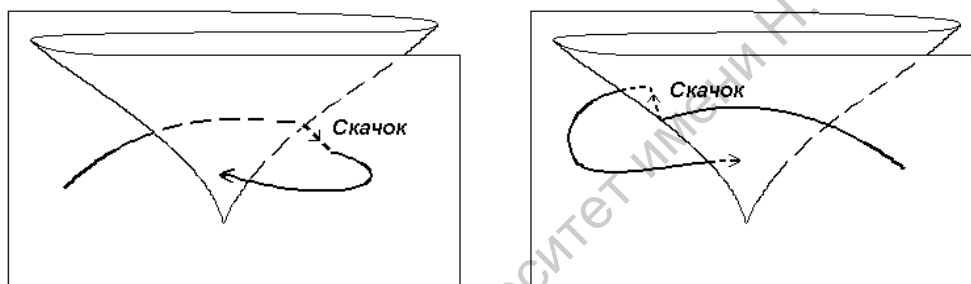


Рис. 3.17. К пояснению явлений, наблюдаемых при обходе точки сборки в разных направлениях.

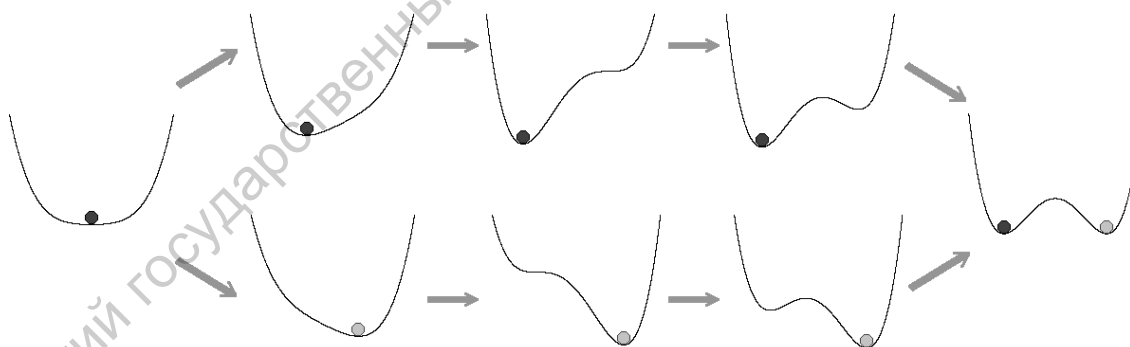


Рис. 3.18. Изменение потенциального рельефа, соответствующее двум траекториям движения по плоскости параметров, приводящим к реализации двух различных состояний устойчивого равновесия.

движению по плоскости параметров с обходом точки сборки в одну или в другую сторону. При этом скачкообразное изменение состояния, о котором говорят как о *жесткой бифуркации* или *катастрофе*, происходит при пересечении одной линии складок при движении слева направо и другой при движении справа налево. Ситуацию удобно представлять как движение по поверхности, состоящей из частично перекрывающихся

листов (область бистабильности). Скачок происходит в момент пересечения границы листа.

В зависимости от того, как выбран путь на плоскости параметров при адиабатически медленном их изменении, мы можем прийти в одну и ту же точку области бистабильности, имея результатом разные состояния равновесия (рис. 3.18).

**Задача 3.10.** На рис. 3.19 показана система, представляющая собой маятник в верхнем положении равновесия, прикрепленный к пружине. Покажите, что если пружина линейна и ее коэффициент жесткости  $k$  невелик, то положение равновесия неустойчиво. Покажите, что если пружина нелинейная, то в системе возможна бистабильность — реализуются два положения устойчивого равновесия. Считайте, что нелинейность пружины описывается соотношением  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты, а угол отклонения маятника от вертикали мал. Длина стержня  $l$ , масса шарика  $m$ . (Указание. Получите в явном виде зависимость потенциальной энергии маятника от координаты  $x$ .)

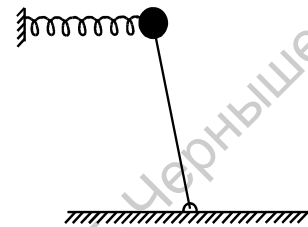


Рис. 3.19

**Задача 3.11.** В системе, описанной в предыдущей задаче, точка прикрепления пружины  $C$  может перемещаться вдоль горизонтали влево–вправо. Изобразите график зависимости деформации пружины  $x$ , отвечающей положениям равновесия, от величины смещения точки прикрепления пружины  $x_0$ . Опишите трансформации графика зависимости потенциальной энергии  $U(x)$  при вариации  $x_0$ . Обсудите возможность гистерезиса в системе.

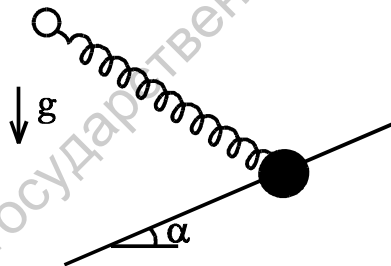


Рис. 3.20

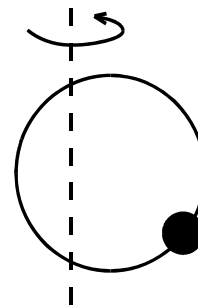


Рис. 3.21

**Задача 3.12.** Шарик массы  $m$  может без трения скользить по стержню, наклоненному под углом  $\alpha$  к горизонту. Шарик прикреплен к пружине жесткости  $k$ , второй конец которой неподвижно зафиксирован на расстоянии  $a$  от стержня в точке, принадлежащей проходящей через стержень вертикальной плоскости (рис.3.20). Длина пружины в нерастяннутом состоянии  $l$ . Как трансформируется при изменении параметров вид зависимости потенциальной энергии от координаты шарика  $x$ , отсчитываемой вдоль стержня? Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров  $\alpha, l/a$ .

**Задача 3.13.** Маленькая бусинка массы  $m$  может без трения скользить по тонкому проволочному кольцу радиуса  $R$  (рис. 3.21). Кольцо вращают с частотой  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии  $a$  от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров  $a, \omega^2 R/g$ .

**Задача 3.14.** Параметры системы, демонстрирующей катастрофу сборки, медленно изменяют так, что точка на плоскости параметров обходит сборку 5 раз (рис. 3.22 а). Сколько жестких переходов происходит в системе? Для маршрутов на рис. 3.22 б,в изобразите качественно зависимость состояния системы от параметра, отсчитываемого вдоль этих маршрутов.

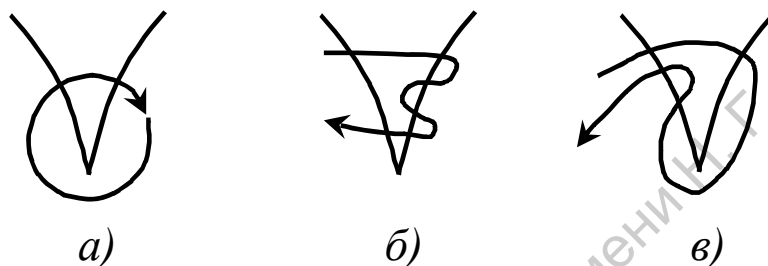


Рис. 3.22

**Задача 3.15.** На рис. 2.8а показана вольт-амперная характеристика полупроводникового радиотехнического элемента — туннельного диода. Такой диод включен в цепь, содержащую регулируемую ЭДС  $E$  с внутренним сопротивлением  $R$ . Графически решив уравнение, соответствующее закону Ома, покажите, что существуют такие значения  $E$  и  $R$ , при которых в системе реализуется бистабильность. Рассмотрите эту же задачу аналитически, используя кубическую аппроксимацию вольт-амперной характеристики  $I = a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c$ , где  $a, b$  и  $c$  — коэффициенты. Покажите, что при вариации ЭДС бистабильность возможна лишь при выполнении условия  $bR > 1$ . Найдите координаты точки сборки и линии складок на плоскости  $R, E$  и изобразите взаимное расположение вольт-амперной характеристики диода и нагрузочной прямой в различных точках в окрестности точки сборки и непосредственно в ней.

**Задача 3.16.** Резонатор Фабри — Перо, представляющий собой два плоскопараллельных полупрозрачных зеркала, заполнен средой с нелинейным показателем преломления (рис. 3.23). Свойства нелинейности таковы, что полный набег фазы волны между зеркалами зависит от интенсивности света по формуле  $\varphi = \varphi_0 + \alpha I$ , где  $\varphi_0$  и  $\alpha$  — константы,  $I$  — интенсивность выходящего излучения. Используя известное в оптике соотношение

$$I = \frac{aI_0}{1 + b \sin^2(\varphi/2)},$$

где  $I_0$  — интенсивность на входе в интерферометр,  $a$  и  $b$  — константы, покажите, что в системе существует мультистабильность. Для этого постройте график зависимости интенсивности света на выходе  $I$  от интенсивности на входе  $I_0$ . Покажите на полученном графике петли гистерезиса.



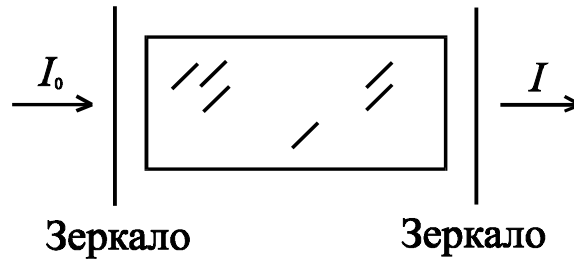


Рис.3.23

### 3.6. Динамический хаос

Мы уже подчеркивали главную особенность нелинейных систем, связанную с тем, что колебания разной амплитуды происходят в них по-разному. В более общем виде это свойство можно сформулировать так, что *несовпадающие фазовые траектории отвечают существенно разным движениям*: они посещают разные области фазового пространства, а нелинейность и заключается в том, что в разных областях поток траекторий устроен по-разному.

В нелинейных системах с числом динамических переменных более трех в определенных случаях может встречаться такой тип динамического поведения, когда любые два движения, характеризуемые близкими начальными условиями, постепенно уходят друг от друга так, что через определенное время они становятся существенно различными. Если этим свойством обладают все фазовые траектории, доступные в данном режиме функционирования системы, то она демонстрирует *динамический хаос*. Это режим, харак-

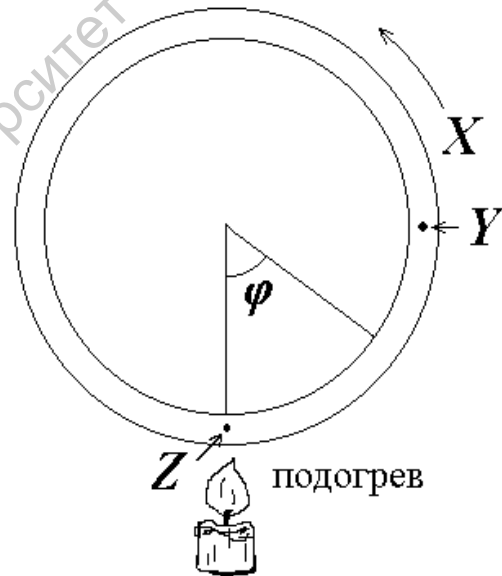


Рис. 3.24. Задача о конвекции в замкнутой кольцевой трубке.  $X$  характеризует скорость течения,  $Y$  и  $Z$  — отклонение температуры от среднего значения в указанных точках

теризующийся нерегулярным, похожим на случайный процесс, изменением динамических переменных во времени, и притом обусловленный собственной сложной динамикой системы, а не каким-либо внешним шумовым воздействием на нее. В диссипативных системах хаос ассоциируется с наличием в фазовом пространстве *странных ат-*

*тракторов* — сложно устроенных фрактальных множеств, притягивающих к себе все траектории из некоторой прилегающей области — бассейна аттрактора.

Один из примеров хаотической динамики возникает в задаче о конвекции жидкости в кольцевой трубке (рис. 3.24). Трубка подогревается снизу и охлаждается сверху. Поскольку нагретая жидкость легче холодной, она будет стремиться подняться вверх, а холодная — опуститься вниз. Поэтому при достаточно большой интенсивности подогрева возможно возникновение конвекционного течения.

Можно показать, что при определенных разумных предположениях динамика такой системы может быть описана с введением трех динамических переменных знаменитой *системой уравнений Лоренца*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Здесь переменная  $x$  пропорциональна скорости течения жидкости,  $y$  и  $z$  — отклонению температуры от среднего значения, соответственно, в правом колене и в нижней части трубки. Параметр  $b$  определяется геометрией задачи и равен 1 для трубки в форме правильной окружности. Параметр  $\sigma$  определяется отношением коэффициентов вязкости и теплопроводности, параметр  $r$  характеризует степень подогрева.

В своей классической работе 1963 г. Эдвард Лоренц провел численное решение уравнений (3.25) на компьютере при значениях параметров  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ . На рис. 3.25 воспроизводится полученная при этом зависимость динамических переменных от времени. Можно видеть, что не наблюдается тенденции к установлению какого-либо простого стационарного или периодического режима. В то же время, наблюдаемый режим динамики оказывается можно рассматривать как установившийся в некотором статистическом смысле: усредненные за достаточно большой период времени величины, например,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle y^2 \rangle$ ,  $\langle z^2 \rangle$ , практически стационарны. Объект в фазовом пространстве, которому принадлежат траектории в установившемся режиме динамического хаоса — *странный аттрактор*, показан на рис. 3.26.

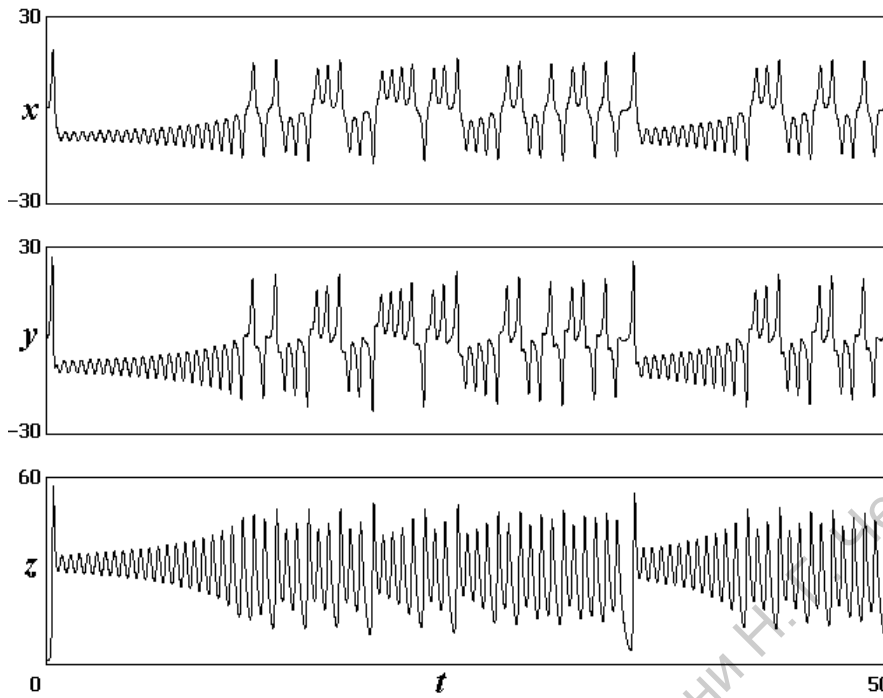


Рис. 3.25. Зависимости динамических переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  от времени, полученные численным интегрированием уравнений Лоренца при  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ,  $r=28$

Хаос оказался очень распространенным феноменом, характерным для многих нелинейных систем. Его открытие стало одним из самых замечательных событий в науке XX века. Изучение хаоса, его закономерностей, путей возникновения, возможных приложений в различных областях знания привлекает внимание множества исследователей — теоретиков и экспериментаторов. Это одно из самых интересных и быстро развивающихся направлений в современной теории колебаний и нелинейной динамике.

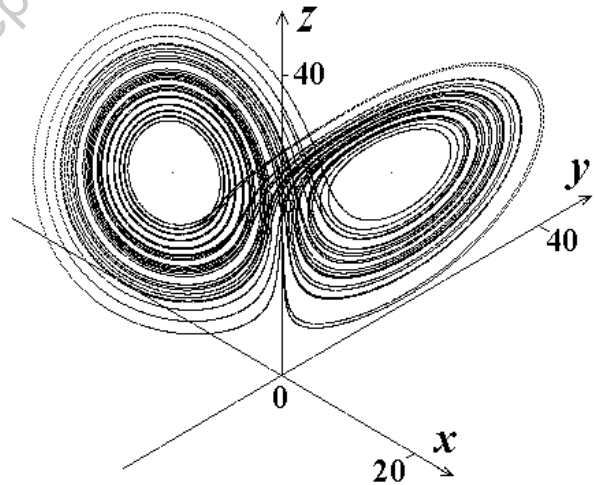


Рис. 3.26. Странный аттрактор системы Лоренца для «классического» набора параметров:  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ,  $r=28$

*Часть II*

# **Нелинейный осциллятор**

## Лекция 4

## Нелинейный осциллятор как обобщенная модель теории колебаний

Настоящая лекция начинает большой раздел нашего курса, посвященный изучению одного из важнейших объектов теории колебаний — *нелинейного осциллятора*. Это система, динамика которой описывается дифференциальным уравнением второго порядка, в консервативном случае  $\ddot{x} + f(x) = 0$ , а в диссипативном  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x) = 0$ . Здесь  $x$  — динамическая переменная, о которой говорят как об обобщенной координате,  $f(x)$  — некоторая нелинейная функция,  $\gamma$  — параметр диссипации. Эти уравнения выступают как естественное обобщение консервативного гармонического осциллятора и диссипативного линейного осциллятора.

На нелинейный осциллятор следует смотреть как на *обобщенную модель*, пригодную для описания колебательных явлений в системах разной физической природы (в смысле «колебательной общности» по Мандельштаму). Интерпретация смысла динамической переменной  $x$  и физического содержания колебательного процесса будет зависеть от того, какая конкретно система рассматривается. Соответствующие примеры будут обсуждаться по ходу дальнейшего изложения.

### 4.1. Механический осциллятор: частица в потенциальной яме

Пусть мы имеем частицу массы  $m$ , которая может свободно двигаться вдоль оси  $x$ , причем трение отсутствует. Пусть на частицу действует сила, направленная вдоль оси  $x$ , и величина этой силы в каждый момент зависит от координаты частицы в этот момент как функция  $F(x)$ . Записывая второй закон Ньютона, получаем уравнение

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (4.1)$$

или

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (4.2)$$

где  $f(x) = -F(x)/m$ .

Как известно, функцию одной переменной всегда можно представить в виде производной от некоторой другой функции. Введем определение

$$V(x) = -\int_0^x F(X) dX. \quad (4.3)$$

Тогда  $F(x) = -V'(x)$ , и уравнение (4.1) принимает вид

$$m\ddot{x} = -V'(x). \quad (4.4)$$

Выясним физический смысл функции  $V(x)$ . Для этого умножим обе части уравнения (4.4) на  $\dot{x}$ . Перенеся оба члена в левую часть, получим  $m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}V'(x) = 0$ , что можно переписать как

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right) = 0. \quad (4.5)$$

Поскольку производная по времени от выражения, стоящего в скобках, равна нулю, то оно должно в процессе динамики системы оставаться постоянным:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = \text{const}. \quad (4.6)$$

Ясно, что это соотношение представляет собой не что иное, как запись закона сохранения механической энергии. Первый член отвечает кинетической энергии частицы, а второй — потенциальной энергии в поле внешней силы. Соответственно, функцию  $V(x)$  называют *потенциальной функцией*. Согласно принятой в математике и механике терминологии, соотношение (4.6) называют *первым интегралом* дифференциального уравнения (4.4).

Если потенциальная функция имеет минимум, или, как выражаются на общепринятом научном жаргоне, присутствует *потенциальная яма*, то вблизи дна этой ямы система может совершать колебания. Пусть потенциальная функция гладкая, и минимум расположен в точке  $x = x_0$ . Тогда разложение в ряд Тейлора вблизи этой точки будет иметь вид

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots, \quad (4.7)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости. Если ограничиться учетом квадратичного члена, то подстановка выражения (4.7) в (4.4) приводит к уравнению  $m\ddot{x} = -V''(x_0)(x - x_0)$  или

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = 0. \quad (4.8)$$

Это уравнение линейного гармонического осциллятора. Величина  $\tilde{x} = x - x_0$  отвечает отклонению от точки минимума потенциальной ямы, а  $\omega_0 = \sqrt{V''(x_0)/m}$  характеризует собственную частоту малых колебаний.

В задаче с одной пространственной координатой при любом заданном законе распределения силы можно ввести потенциальную функцию. В случае двух и более пространственных измерений это уже не так — далеко не всякое поле сил будет потенциальным.

**Задача 4.1.** Найдите период возможных малых колебаний материальной точки массы  $m$ , движущейся вдоль оси  $x$ , если зависимость потенциальной энергии от координаты дается следующими формулами:

$$\text{а) } U(x) = U_0 \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{l} \right) \right];$$

$$\text{б) } U(x) = 4a \left[ \left( \frac{b}{x} \right)^{12} - \left( \frac{b}{x} \right)^6 \right].$$

**Задача 4.2.** Из жести изготовлена пластинка, имеющая вертикальный профиль в виде синусоиды. В одной из образовавшихся «ямок» колеблется шарик массы  $m$ . Определите период малых колебаний.

**Задача 4.3.** Определите период малых колебаний маятника из задачи 3.10 в случае бистабильного потенциала.

## 4.2. Фазовая плоскость

К уравнению вида

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{4.9}$$

сводятся многие задачи о консервативных колебаниях в системах разной физической природы, некоторые из них будут специально обсуждаться в последующих лекциях. В духе основной методологии теории колебаний, мы вправе отвлечься от конкретной физической природы системы и полагать, что уравнение (4.9) относится к абстрактному объекту, который носит название *нелинейный осциллятор*. Вводя потенциальную функцию  $U(x) = \int_0^x f(X) dX$ , это уравнение можно представить в виде

$$\ddot{x} = -U'(x) \tag{4.10}$$

В частности, для механической системы, обсуждавшейся выше,  $U(x) = m^{-1}V(x)$ .

Обозначив первую производную  $dx/dt = v$  (в механической интерпретации это скорость частицы), можно свести описание динамики нелинейного осциллятора к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -f(x).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Из математики известно, что в соответствии с теоремой о существовании и единственности, решение этой системы однозначно определяется, если в качестве начальных условий в некоторый момент времени заданы значения *двух* динамических переменных, и  $v = \dot{x}$ . Раз состояние системы характеризуется парой величин  $(x, \dot{x})$ , то ее фазовое пространство *двумерное*. О двумерном фазовом пространстве принято говорить как о *фазовой плоскости*. Динамику системы удобно представлять, используя *фазовые портреты* — картинки на фазовой плоскости, где изображены существенные для понимания поведения системы объекты — состояния равновесия, характерные траектории.

### 4.3. Период колебаний нелинейного осциллятора

Замкнутая фазовая траектория соответствует, очевидно, периодически повторяющемуся движению. Следовательно, такая траектория представляет собой не что иное, как фазовый портрет периодического колебательного процесса. Для уравнения нелинейного осциллятора в виде (4.9) закон сохранения энергии (4.6) можно записать следующим образом

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.\tag{4.12}$$

Константа интегрирования  $E$  называется *полной энергией* колебаний. Из уравнения (4.12) имеем

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}.\tag{4.13}$$

Знак «+» в этом уравнении соответствует участкам фазовых траекторий, лежащим в верхней полуплоскости, знак «-» — в нижней. Разделяя переменные в (4.13), получим

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}.\tag{4.14}$$

Движение будет периодическим, если оно происходит в такой области  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ , что в ней  $U(x) \leq E$ , причем равенство достигается на краях интервала, т.е.  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  представляют собой корни уравнения  $E = U(x)$ ; их называют *точками поворота*. В этом случае мы можем проинтегрировать выражение (4.14) по всей замкнутой фазовой траектории и определить тем самым *период колебаний*  $T$ :



$$T = \oint \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}. \quad (4.15)$$

Этот интеграл можно также представить в виде

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}. \quad (4.16)$$

Для линейного осциллятора (4.8)  $U = \omega_0^2 x^2/2$ , и уравнение (4.16) дает

$$T = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{2E - \omega_0^2 x^2}} = \frac{2}{\omega_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (4.17)$$

где  $a = \sqrt{2E}/\omega_0$ . Интеграл в этом случае легко вычисляется, и мы получаем

$$T = \frac{2}{\omega_0} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (4.18)$$

т.е. известный результат для периода гармонических колебаний. Поскольку зависимость от энергии  $E$  в формуле (4.18) отсутствует, колебания являются изохронными.

В общем случае, однако, период колебаний может зависеть от энергии. Это неизохронность — один из фундаментальных нелинейных эффектов, который обсуждался в лекции 3.

**Задача 4.4.** Найти зависимость периода колебаний от энергии для осциллятора с потенциальной энергией  $U(x) = (1/2)\operatorname{tg}^2 x$ .

Ответ:  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+2E}}$ .

**Задача 4.5.** Найти зависимость периода колебаний от энергии для осциллятора с потенциальной энергией  $U(x) = (1/2)\operatorname{th}^2 x$ .

Ответ:  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1-2E}}$ .

Однако колебания нелинейных осцилляторов не всегда являются неизохронными! Простейший пример такого рода — осциллятор в потенциальной яме, составленной из половинок двух различных парабол:

$$U(x) = \begin{cases} \omega_1^2 x^2/2, & x < 0 \\ \omega_2^2 x^2/2, & x > 0 \end{cases}$$

причем  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Очевидно, что период равен  $T = \pi/\omega_1 + \pi/\omega_2 = \operatorname{const}$ . Вместе с тем, колебания такого осциллятора будут нелинейными и ангармоничными (попробуйте самостоятельно найти спектр колебаний).

В качестве нетривиального примера решите следующую задачу:

**Задача 4.6.** Найти период колебаний осциллятора с потенциальной энергией  $U(x) = ax^2 + b/x^2$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  считаются положительными.

*Ответ:*  $T = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}$ . Как видим, период колебаний от энергии не зависит. В свою очередь, малые колебания могут быть неизохронными (см. задачу 3.3).

#### 4.4. Динамическая система общего вида на фазовой плоскости.

##### Особые точки и их классификация

Отвлечемся на время от нелинейного осциллятора и обсудим более формальную и общую постановку задачи. Рассмотрим динамическую систему, которая описывается системой двух дифференциальных уравнений первого порядка общего вида,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Мгновенное состояние такой системы определяется заданием двух переменных,  $x = x_0$  и  $y = y_0$ . (В самом деле, используя их в качестве начальных условий, в принципе можно построить решение дифференциального уравнения и найти значения тех же переменных в любой последующий момент времени  $t$ ).

Геометрически мгновенное состояние представляется точкой на фазовой плоскости  $(x, y)$ , а эволюция состояния во времени соответствует движению этой изображающей точки по некоторой кривой — *фазовой траектории*. Когда говорят о динамической системе с двумерным фазовым пространством, ее часто обозначают для краткости терминами *двумерная система* или *динамическая система на плоскости*.

Заметим, что фазовые траектории не могут пересекаться. Если бы такое случилось, то это означало бы, что отправляясь от одного и того же состояния, т.е. из одной и той же точки на фазовой плоскости, система могла бы эволюционировать во времени по-разному. Это противоречило бы положенному в основу теории представлению о динамической системе. В самом деле, задание определенного начального состояния должно подразумевать *однозначное* предсказание последующего изменения состояния во времени, и это условие было бы нарушено при выборе точки пересечения траекторий в качестве начального состояния. С формально математической точки зрения, присутствие пересечения фазовых траекторий противоречило бы теореме единственности решения.

Вычислив правые части уравнений (4.19) в некоторой точке фазовой плоскости  $(x, y)$ , получаем два числа,  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ . В силу уравнений (4.19), это не что иное, как компоненты вектора скорости движения изображающей точки по фазовой

плоскости в тот момент, когда она имеет соответствующие координаты  $(x, y)$ . Поскольку каждой точке фазовой плоскости отвечает определенный вектор скорости, то можно утверждать, что с нашей динамической системой ассоциируется определенное векторное поле на плоскости.

Вектор, отвечающий каждой точке, задает в этой точке определенное направление. Поэтому говорят также о *поле направлений* на плоскости, ассоциирующемся с данной динамической системой. В старых курсах теории колебаний для графического построения фазового портрета двумерной системы рекомендовалось сначала изобразить поле направлений штрихами, а затем провести семейство кривых, представляющих собой огибающие для данного поля направлений. Удобнее всего это было делать, выделив на фазовой плоскости вспомогательные кривые, каждая из которых соответствовала определенному фиксированному направлению векторного поля. Это так называемые *изоклины*, а вся процедура известна как *метод изоклин*. Разумеется, в настоящее время вряд ли стоит прибегать к такого рода приемам, гораздо проще и эффективнее использовать компьютер.

Зададимся вопросом, может ли система дифференциальных уравнений (4.19) иметь решения, не зависящие от времени? Если да, то производные  $dx/dt$  и  $dy/dt$  должны обращаться в нуль. Поэтому постоянные во времени значения  $x$  и  $y$  должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Это алгебраическая система двух уравнений с двумя неизвестными, и она в типичном случае может иметь некоторое количество корней. Каждая пара  $(x_0, y_0)$ , удовлетворяющая этой системе уравнений, соответствует некоторой *особой точке* на фазовой плоскости.

Особая точка называется так потому, что она существенно отличается по своим свойствам от прочих точек фазовой плоскости, составляющих обычно подавляющее большинство (за исключением, может быть, каких-то очень специальных, «патологических» систем). Во-первых, в особой точке не определено направление векторного поля, ассоциирующегося с нашей динамической системой, так как модуль вектора равен нулю. Во-вторых, говоря формально, мы обязаны признать особую точку отдельной фазовой траекторией: множество состояний, посещаемых системой в процессе временной эволюции с начальным условием, отвечающем особой точке, состоит из одной этой точки.

С физической точки зрения, особые точки соответствуют стационарным режимам динамики или состояниям равновесия системы. Их называют также *неподвижными точками*.

Предположим, что мы исследуем некоторую динамическую систему на плоскости, имеющую одну или несколько особых точек. Оказывается, что при помощи достаточно простого анализа можно изучить поведение фазовых траекторий в малой окрестности особой точки, и это приводит к определенной классификации особых точек. Имея представление о свойствах каждого выделенного типа особых точек и о том, какие из них присутствуют на фазовой плоскости интересующей нас динамической системы, зачастую можно делать весьма нетривиальные и далеко идущие выводы об устройстве фазового пространства и о характере возможных в этой системе колебательных процессов.

Пусть  $(x_0, y_0)$  — особая точка системы (4.19). Будем искать близкое к особой точке, зависящее от времени решение в виде

$$x(t) = x_0 + \tilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \tilde{y}(t). \quad (4.21)$$

Подставим эти выражения в (4.19) и разложим функции в правых частях обоих уравнений в ряды Тейлора по малым добавкам  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ , пренебрегая членами второго и высших порядков малости. Следует принять во внимание, что  $f(x_0, y_0) = 0$  и  $g(x_0, y_0) = 0$ , поскольку  $(x_0, y_0)$  — особая точка. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= f_x(x_0, y_0)\tilde{x} + f_y(x_0, y_0)\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= g_x(x_0, y_0)\tilde{x} + g_y(x_0, y_0)\tilde{y}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где нижние индексы обозначают частные производные функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  по соответствующему аргументу. В матричном виде уравнение можно переписать как

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Фигурирующую здесь матрицу, элементами которой служат частные производные функций, называют *матрицей Якоби*.

Мы пришли к системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, для решения которой традиционно рекомендуется применять экспоненциальную подстановку. Предполагаем, что зависимость добавок от времени имеет вид  $\tilde{x}, \tilde{y} \propto \exp(\lambda t)$ . Тогда уравнение (4.23) приводит к задаче на собственные векторы и собственные значения матрицы  $2 \times 2$ :

$$\lambda \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Для вычисления собственных чисел матрицы  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  можно воспользоваться тем обстоятельством, что след матрицы  $S = a_{11} + a_{22}$  (сумма диагональных элементов) равен сумме собственных чисел, а детерминант  $J = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  — их произведению. Поэтому из теоремы Виета следует, что собственные числа удовлетворяют квадратному уравнению:

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0, \quad (4.25)$$

Его называют *характеристическим уравнением*. В интересующем нас случае

$$S = f_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0) \quad (4.26)$$

и

$$J = f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0) \quad (4.27)$$

Решая квадратное уравнение, получаем два корня,

$$\lambda_1 = S/2 + \sqrt{S^2/4 - J} \text{ и } \lambda_2 = S/2 - \sqrt{S^2/4 - J}. \quad (4.28)$$

Предположим сначала, что число под знаком квадратного корня положительное. Тогда оба собственных числа действительные и различные. Общее решение дифференциального уравнения (4.23), описывающего эволюцию во времени малых возмущений особой точки, записывается в виде линейной комбинации двух членов, пропорциональных, соответственно,  $\exp(\lambda_1 t)$  и  $\exp(\lambda_2 t)$ . Если оба собственных числа отрицательны, то возмущение с течением времени затухает и стремится к нулю, т.е. система приближается к особой точке. Это *устойчивая* особая точка. Если хотя бы одно собственное больше нуля, то соответствующая составляющая возмущения будет нарастать, т.е. система будет уходить от особой точки. Следовательно, это *неустойчивая* особая точка.

Пусть теперь  $S^2/4 - J < 0$ . Тогда оба собственных числа комплексные,  $\lambda_{1,2} = S/2 \pm i\sqrt{J - S^2/4}$ , причем одно получается из другого посредством операции комплексного сопряжения. Зависимость возмущений от времени в этом случае определяется выражением вида  $\exp(\lambda' t) \cos(\lambda'' t + \varphi)$ , где  $\lambda'$  — действительная, а  $\lambda''$  — мнимая

часть собственного числа. Особая точка устойчива, если действительная часть  $\lambda' < 0$ , и неустойчива, если  $\lambda' > 0$ .

Таким образом, характер поведения фазовых траекторий и, следовательно, вид фазового портрета в окрестности особой точки, определяется собственными числами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а они выражаются через след и детерминант матрицы Якоби,  $S$  и  $J$ . Полное представление о ситуациях, которые могут реализоваться, дает диаграмма на рис. 4.1. Основным интерес представляют только *типичные* ситуации, которым отвечают внутренние точки показанных на рис. 4.1 областей.

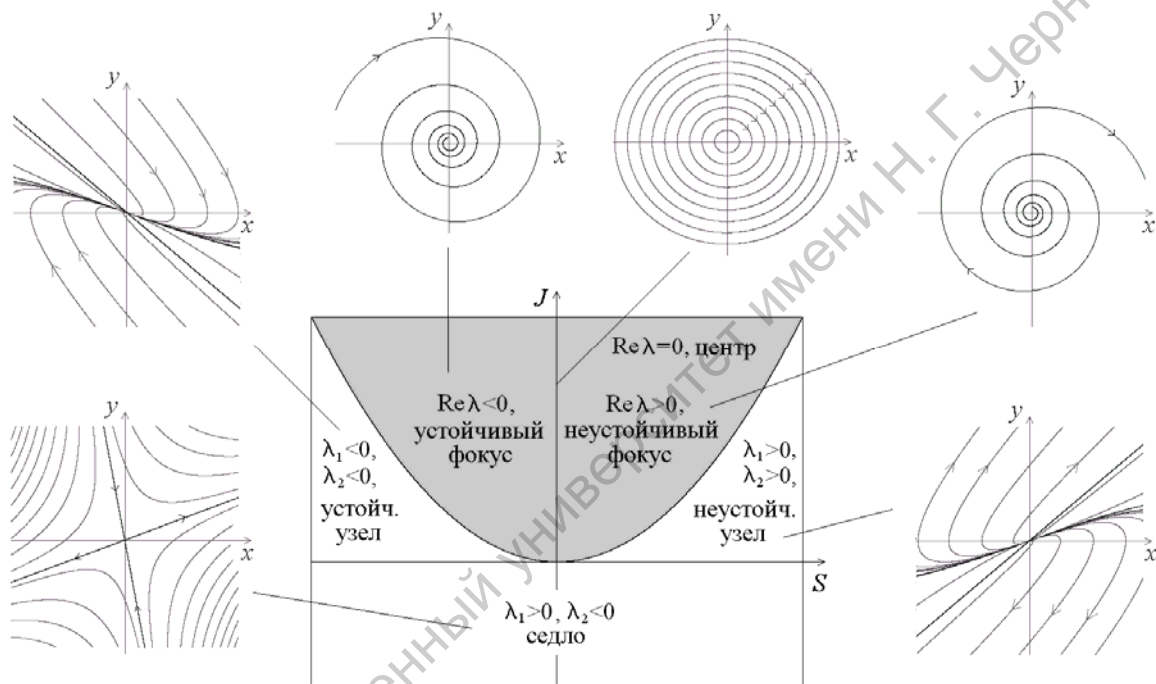


Рис. 4.1. В центре рисунка диаграмма на плоскости параметров след — детерминант матрицы Якоби, на которой показаны области, соответствующие различным типам особых точек. Серым цветом обозначена область, в которой корни характеристического уравнения являются комплексными. По периферии рисунка показан качественно вид фазовых портретов в окрестности особых точек

Что касается ситуаций, реализующихся на границах областей, то они на данном этапе рассмотрения игнорируются как *атипичные* или *негрубые*. В самом деле, чуть-чуть изменив («пошевелив») функции, фигурирующие в правых частях системы дифференциальных уравнений, мы уходим с границы, если первоначально на ней оказались. К исследованию негрубых ситуаций приходится обращаться в том случае, если мы интересуемся *бифуркациями* — качественными изменениями динамических режимов и топологического устройства фазовой плоскости при изменении параметров системы. Классификация и анализ негрубых ситуаций — одна из центральных проблем специального раздела нелинейной динамики, теории бифуркаций.

В отличие от прочих границ областей, особую роль на диаграмме рис. 4.1 играет линия  $S = 0$ . Дело в том, что на ней «живут» консервативные системы, представляющие фундаментальный интерес

для физики и других дисциплин. По этой причине им всегда уделяется специальное внимание, хотя, если рассуждать о динамических системах общего вида чисто формально, консервативные системы следовало бы признать очень специальным частным классом, ассоциирующимся с негрубой ситуацией.

Подчеркнем, что особая точка типа центр, в окрестности которой фазовые траектории имеют вид вложенных друг в друга замкнутых кривых, встречается в консервативных системах. Указанное свойство сохраняется и при учете нелинейности. Для диссипативных систем это не характерно. Даже в том негрубом случае, когда след матрицы Якоби нулевой, а корни характеристического уравнения чисто мнимые, фазовые кривые в малой окрестности особой точки диссипативной системы при учете нелинейных эффектов, вообще говоря, замкнутыми не будут.

В таблице дана сводка типов особых точек, классифицируемых по собственным числам матрицы Якоби. Чтобы эта классификация сразу ассоциировалась с определенными наглядными образами — фазовыми портретами в окрестности особых точек, мы приводим по периферии рис. 4.1 соответствующие диаграммы, но опускаем подробные объяснения. (Читателю рекомендуется самостоятельно проработать вопрос, как связан вид фазовых портретов со свойствами корней характеристического уравнения.) В последующих лекциях применительно к нелинейному осциллятору вид фазовых портретов будет подробно обсуждаться.

**Таблица.** Классификация особых точек, основанная на свойствах корней характеристического уравнения

Условие на собственные числа	Тип особой точки
Действительные, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ .	Неустойчивый узел
Действительные, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ .	Седло
Действительные, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ .	Устойчивый узел
Чисто мнимые, $\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega$	Центр (в консервативных системах)
Комплексно сопряженные, $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$	Неустойчивый фокус
Комплексно сопряженные, $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$	Устойчивый фокус

**Задача 4.7.** Представьте уравнение линейного осциллятора с затуханием в «стандартной» форме, отвечающей определению двумерной динамической системы (4.19). Покажите, что рассматриваемая система является диссипативной, для чего вычислите дивергенцию соответствующего векторного поля на фазовой плоскости.

**Задача 4.8.** Простейший генератор электромагнитных колебаний, содержащий электронную лампу, описывается уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Представьте это уравнение в «стандартной» форме (4.19).

**Задача 4.9.** Определите возможные типы особых точек линейного диссипативного осциллятора из задачи 4.7.

**Задача 4.10.** Для уравнения Ван дер Поля из задачи 4.8 найдите матрицу Якоби и укажите возможный тип особых точек. При каком значении параметра  $\lambda$  происходят изменения их типа?

**Задача 4.11.** Укажите физические примеры систем с особыми точками типа седло.

#### 4.5. Численное решение дифференциальных уравнений

Как мы уже говорили, революционные изменения в содержании и методическом инструментарии теории нелинейных колебаний связаны с появлением и широким распространением компьютеров. В частности, компьютер позволяет эффективно применять численное решение дифференциальных уравнений для анализа динамики колебательных систем, наглядно и быстро представлять результатов посредством компьютерной графики.

Как было указано в предыдущем параграфе, динамическая система общего вида на плоскости задается уравнениями

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \quad (4.29)$$

Рассмотрим основную идею численного решения такого рода уравнений. Для общности, однако, будем считать, что фигурирующие в правых частях функции могут зависеть не только от динамических переменных, но и от времени

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = g(x, y, t). \quad (4.30)$$

Будем представлять искомые функции времени  $x(t)$  и  $y(t)$  их значениями на дискретном множестве точек  $t_n = nh$ , как говорят, в узлах сетки с шагом  $h$  по времени:

$$x_n = x(nh), \quad y_n = y(nh). \quad (4.31)$$

Величина шага должна быть достаточно малой, от нее будет зависеть точность решения.

Самый простой способ аппроксимировать производные по времени  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  состоит в том, чтобы положить

$$\dot{x}_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}, \quad \dot{y}_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \quad (4.32)$$

Подставляя эти выражения в (4.30), приходим к записи уравнений в виде *разностной схемы*

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = f(x_n, y_n, t_n), \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = g(x_n, y_n, t_n). \quad (4.33)$$



Отсюда нетрудно выразить в явном виде  $x_{n+1}$  и  $y_{n+1}$  через  $x_n$  и  $y_n$ :

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n, t_n), \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n, t_n).$$

Используя эти соотношения и задавшись начальными условиями  $(x_0, y_0)$ , мы можем шаг за шагом вычислять на компьютере значения переменных в узлах сетки  $n=1, 2, 3, \dots$

Полученные результаты можно

- вывести на печать и получить таблицу функций, представляющих решение (такой способ широко применялся в эпоху первых электронно-вычислительных машин, не снабженных дисплеем);
- вывести на дисплей в виде графика временной зависимости, откладывая по оси абсцисс время  $t_n = nh$ , а по оси ординат значения  $x_n$  и  $y_n$ ;
- вывести на дисплей в виде фазового портрета, откладывая по оси абсцисс значения  $x_n$ , а по оси ординат  $y_n$ .

Как известно из курса математического анализа, при аппроксимации производных выражениями (4.33) мы допускаем на каждом шаге ошибку порядка  $h^2$ . Поскольку число шагов при построении решения порядка  $h^{-1}$ , а ошибка имеет тенденцию накапливаться от шага к шагу, результирующая погрешность будет порядка  $h$ , т.е. шаг в первой степени. Поэтому в данном случае мы имеем *разностный метод первого порядка*. Его называют *методом Эйлера*. В принципе этот метод позволяет достичь любой желаемой точности, но ценой существенного уменьшения шага, а, значит, увеличения числа шагов и объема вычислений.

Как можно усовершенствовать метод и добиться большей точности? Один простой способ состоит в следующем. Выполним сначала, используя метод Эйлера, *половину шага* и найдем

$$x_{n+1/2} = x_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n, t_n), \quad y_{n+1/2} = y_n + \frac{1}{2}hg(x_n, y_n, t_n).$$

Затем, отправляясь *от исходной точки*, сделаем *полный шаг*, но с использованием поправленных величин  $x_{n+1/2}$ ,  $y_{n+1/2}$ ,  $t_{n+1/2} = (n+1/2)h$  при вычислении функций. Имеем:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}, t_{n+1/2}), \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}, t_{n+1/2}).$$

Можно показать, что этот метод дает на одном шаге погрешность порядка  $h^3$ , а на конечном фиксированном временном интервале ошибка будет порядка  $h^2$ . Таким образом, это *метод второго порядка*. Использование алгоритма более сложного по сравнению с методом Эйлера первого порядка обычно оправдывает себя, так как для получения нужной точности число шагов можно взять существенно меньшим.

Можно построить и разностные схемы более высокого порядка. Одна из них, весьма удобная и употребительная, известна как *метод Рунге–Кутты четвертого порядка*. Применительно к системе уравнений (4.30) алгоритм выполнения одного шага по времени задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n, t_n), \quad l_1 = g(x_n, y_n, t_n) \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}hk_1, y_n + \frac{1}{2}hl_1, t_n + \frac{1}{2}h\right), \quad l_2 = g\left(x_n + \frac{1}{2}hk_1, y_n + \frac{1}{2}hl_1, t_n + \frac{1}{2}h\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}hk_2, y_n + \frac{1}{2}hl_2, t_n + \frac{1}{2}h\right), \quad l_3 = g\left(x_n + \frac{1}{2}hk_2, y_n + \frac{1}{2}hl_2, t_n + \frac{1}{2}h\right), \\
k_4 &= f(x_n + hk_3, y_n + hl_3, t_n + h), \quad l_4 = g(x_n + hk_3, y_n + hl_3, t_n + h), \\
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4).
\end{aligned}$$

Наука о численном решении дифференциальных уравнений превратилась в настоящее время в самостоятельный обширный раздел вычислительной математики. Наряду с перечисленными здесь методами существует множество других, которые в каких-то случаях могут оказаться удобными (например, многошаговые схемы Адамса). Для подробного ознакомления с тонкостями численного решения дифференциальных уравнений, различными алгоритмами, техническими приемами (такими как автоматический контроль точности), «подводными камнями», которые могут встретиться при решении конкретных задач, читателю следует обратиться к соответствующей специальной литературе.

## Лекция 5

**Нелинейный осциллятор: фазовый портрет**

В этой лекции мы собираемся подробно изложить на качественном уровне рецепт построения фазового портрета нелинейного осциллятора. Будет рассмотрен сначала консервативный, а затем диссипативный случай. По ходу дела читатель получит представление о том, какую роль играют характерные ключевые объекты на фазовой плоскости (особые точки, сепаратрисы, замкнутые траектории), какие особенности колебательных процессов с ними связаны, а также приобретет первоначальный опыт визуального распознавания этих объектов.

**5.1. Построение фазового портрета консервативного нелинейного осциллятора**

Рассмотрим уравнение консервативного осциллятора

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (5.1)$$

и предположим, что функция  $f(x)$  имеет вид, показанный на рис. 5.1а; это соответствует потенциальной функции на рис. 5.1б. Процедура построения фазового портрета этого нелинейного осциллятора, которая сейчас будет объяснена, иллюстрируется рисунками 5.1в и г.

Прежде всего, заметим, что если фигурирующая в уравнении (5.1) функция  $f(x)$  обращается в нуль в некоторой точке  $x_0$ , то эта точка соответствует состоянию равновесия. Действительно, частица в ней может оставаться неограниченно долго, чему отвечает решение уравнения в виде константы:  $x(t) = x_0$ ,  $v(t) = \dot{x} = 0$ . Поскольку  $f(x) = -U'(x)$ , то состояния равновесия — это точки, где обращается в нуль производная потенциальной функции, в нашем случае локальные максимумы и минимумы. Минимумы — это устойчивые, а максимумы — неустойчивые состояния равновесия. Действительно, в первом случае смещение частицы из точки равновесия  $x_0$  приведет к появлению силы, стремящейся вернуть частицу назад, а во втором — к появлению силы, способствующей дальнейшему уходу от состояния равновесия. Если система находится в состоянии равновесия, то скорость равна нулю, поэтому на фазовом портрете на плос-

кости  $(x, \dot{x})$  эти состояния отвечают точкам на оси абсцисс, расположенным в точности под точками минимума и максимума потенциальной функции с предыдущего графика. Это особые точки на фазовой плоскости осциллятора. Устойчивые точки (отвечающие локальному минимуму) обозначаем, как это обычно принято, кружочками, а неустойчивые (отвечающие локальному максимуму) — косым крестиком.

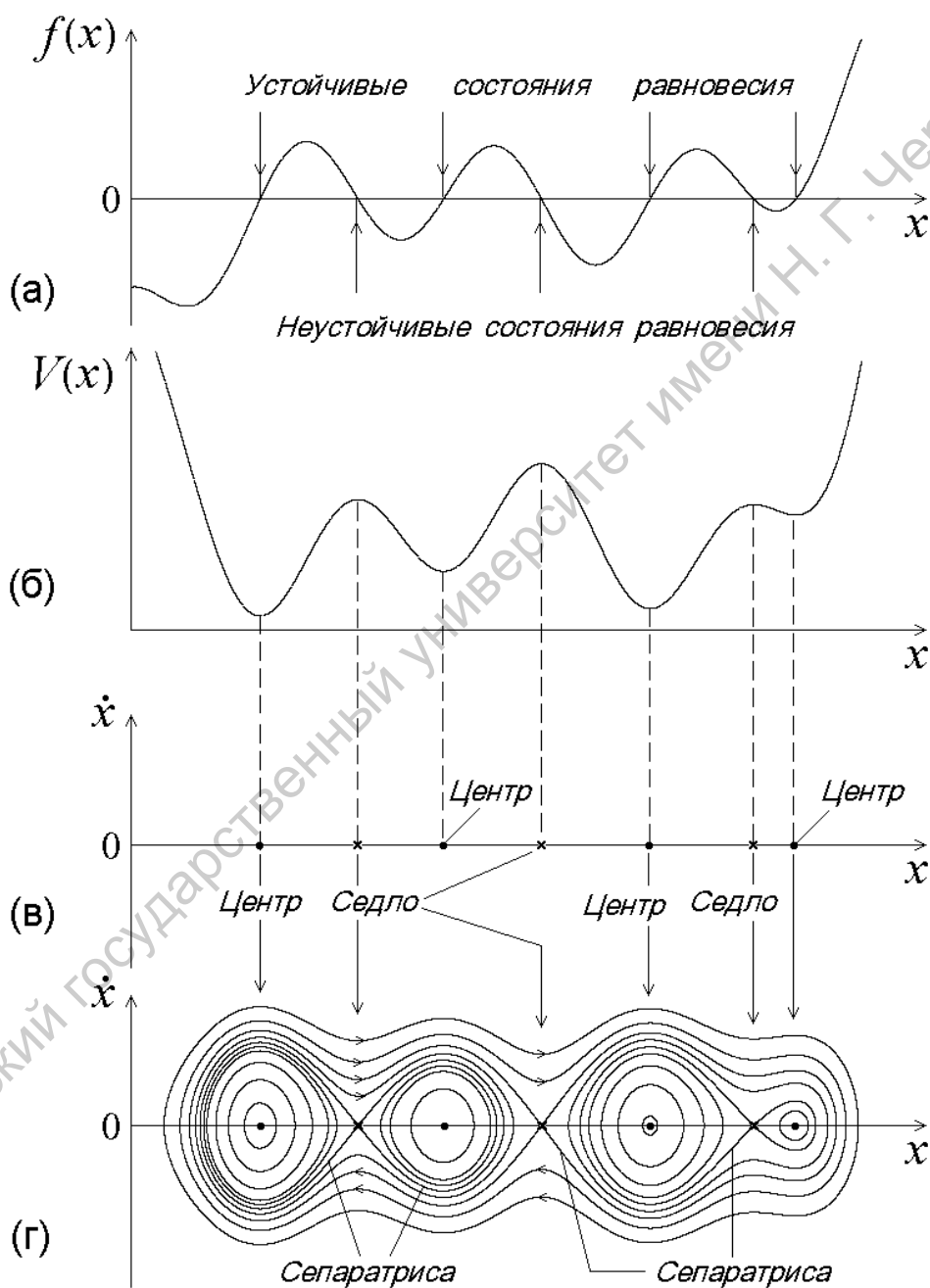


Рис. 5.1. Пример нелинейного осциллятора: функция  $f(x)$  (а); потенциальная функция (б); особые точки на фазовой плоскости (в); фазовый портрет (г)

В типичном случае локальные максимумы и минимумы гладкой функции одного переменного — это квадратичные экстремумы, локально вблизи точки экстремума график функции аппроксимируется параболой. В самом деле, чтобы иметь вместо квадратичного экстремума, например, кубическую точку перегиба, функция должна удовлетворять дополнительному условию: в точке, где равна нулю первая производная, должна обращаться в нуль также и вторая производная. Чтобы получить экстремум четвертого порядка, надо наложить два условия: в точке, где равна нулю первая производная, должны обращаться в нуль вторая и третья производные. Пусть наша функция зависит от двух управляющих параметров, тогда на плоскости этих параметров функции с квадратичными экстремумами будут заполнять целые области, функции с кубическими точками перегиба будут встречаться лишь на определенных линиях, а функции с экстремумом четвертой степени — в отдельных точках. Рассматривая случай квадратичного экстремума, мы охватываем подавляющее большинство практически интересных ситуаций, тогда как какое-либо иное поведение потенциальных функций может представлять лишь узкоспециальный интерес.

Чтобы выяснить вид фазовых траекторий, целесообразно использовать первый интеграл уравнения нелинейного осциллятора. Умножим уравнение (5.1) на  $\dot{x}$ , перенесем оба члена в левую часть и представим ее в виде полной производной. Выражение, стоящее под знаком первой производной, должно быть константой:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E. \quad (5.2)$$

При каждом значении константы это уравнение определяет на фазовой плоскости некоторую кривую.

Постоянную интегрирования  $E$  — полную энергию осциллятора — можно определить, задав в начальный момент величины  $x$  и  $\dot{x}$  (начальные условия), и вычисляя левую часть в (5.2). Тогда в процессе динамики нашей колебательной системы точка, представляющая мгновенное состояние на фазовой плоскости, обязана в любой момент времени оставаться на кривой, отвечающей данному значению константы. При других начальных условиях получим другую величину константы, и ей будет отвечать другая кривая. Таким образом, придавая константе  $E$  разные значения, мы получаем семейство кривых на фазовой плоскости, представляющих фазовые траектории.

Здесь уместно упомянуть аналогию из географии. Представим себе некоторый рельеф на местности — горы, впадины и т.д. На карте его изображают системой *линий постоянного уровня*. В окрестности вершин и впадин линии уровня выглядят как семейства замкнутых вложенных друг в друга кривых. Перевалы (седловины) представлены линиями уровня, которые локально имеют вид семейства гипербол. Если взять поверхность, заданную уравнением  $z = y^2/2 + U(x)$ , то линии уровня на карте в плоскости  $(x, y)$  как раз соответствуют фазовым траекториям нашей колебательной системы (рис. 5.2).

Специфика «местности» в том, что зависимость от  $y$  дается квадратичным членом, поэтому нет холмов, а впадины и седловины рельефа располагаются только на оси  $y = 0$ .

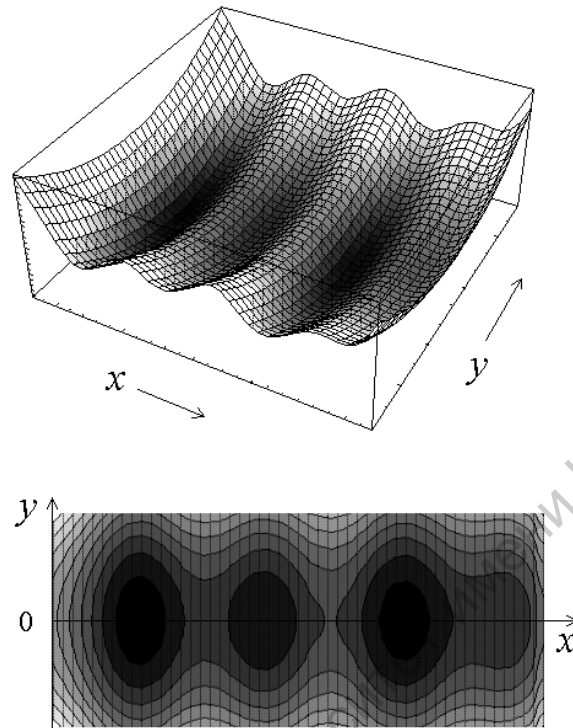


Рис. 5.2. Географическая аналогия фазовой плоскости: «рельеф местности», заданный функцией  $z = y^2/2 + U(x)$  (а) и его изображение на карте (контурный график) (б)

Выясним характер устройства фазовых траекторий вблизи неподвижных точек, отвечающих экстремумам потенциальной функции.

Около точки локального минимума  $x_0$  представление потенциальной функции в виде ряда Тейлора имеет вид  $U(x) = c_0 + c_2(x - x_0)^2/2 + \dots$ , где  $c_2 = U''(x_0) > 0$ . В области малых отклонений от точки  $x_0$  выражение (5.2) переписывается в виде

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{c_2(x - x_0)^2}{2} = E_0, \quad E_0 = E - c_0. \quad (5.3)$$

На плоскости  $(x, \dot{x})$  это уравнение определяет семейство эллипсов с центром в точке  $x_0$ , размеры которых определяются величиной константы  $E_0$ . Особая точка, в окрестности которой фазовые траектории представлены семейством вложенных друг в друга замкнутых кривых, классифицируется как точка типа *центр* (см. лекцию 4).

Вблизи точки локального максимума потенциальная функция представляется в виде  $U(x) = c_0 - c_2(x - x_0)^2/2 + \dots$ , где  $c_2 = -U''(x_0) > 0$ . Для малых отклонений от состояния равновесия выражение (5.2) принимает вид

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{c_2(x - x_0)^2}{2} = E_0, \quad E_0 = E - c_0, \quad (5.4)$$

и определяет на фазовой плоскости семейство гипербол. В частности, при  $E_0 = 0$  гиперболы вырождаются в две прямые, пересекающиеся в точке  $(x_0, 0)$ . Особая точка, в окрестности которой фазовые траектории локально выглядят как семейство гипербол, это *седло*.

Среди имеющихся вблизи седла орбит выделяются особые траектории, ведущие в точку седла или уходящие от этой точки. Они называются *сепаратрисами*.

Вблизи точки седла сепаратрисы выглядят как кривые, пересекающиеся в точке седла. Как же быть со сделанным выше утверждением, что фазовые траектории не могут пересекаться? На самом деле пересечения и нет. Во-первых, надо иметь в виду, что фазовая траектория, представленная входящей в седло сепаратрисой, отнюдь *не содержит* точку седла. Как можно показать, система, движущаяся по этой фазовой траектории, лишь *асимптотически приближается* к точке седла – неустойчивому состоянию равновесия при  $t \rightarrow \infty$ . Точно так же, выходящая из седла сепаратриса изображает движение системы по траектории асимптотически близкой к седлу при  $t \rightarrow -\infty$ , но вовсе не траекторию, начинающуюся в этой точке. Действительно, при начальном состоянии, точно соответствующим состоянию равновесия, система оставалась бы в ней всегда! Таким образом, *точка седла представляет собой одну отдельную фазовую траекторию* (как, впрочем, и любая другая точка, отвечающая состоянию равновесия).

Сепаратрисы играют важную роль, поскольку разбивают фазовую плоскость на области качественно разной по характеру динамики, отвечающие траекториям *разного топологического типа*. Рассмотрим, например, потенциальную яму, показанную на рис. 5.1б. Интуитивно ясно (представьте себе механические колебания шарика в яме такой формы), что колебания могут происходить

- (а) около одного из минимумов I, II, III, IV,
- (б) захватывать области минимумов I и II,
- (в) захватывать области минимумов III и IV,
- (г) захватывать область всех четырех минимумов.

На рис. 5.3 показаны области на фазовой плоскости, занятые траекториями каждого из этих типов. Как можно видеть, сепаратрисы на фазовой плоскости выступают в

качестве разграничителей этих областей; этим и определяется их название (separate – разделять, отделять).

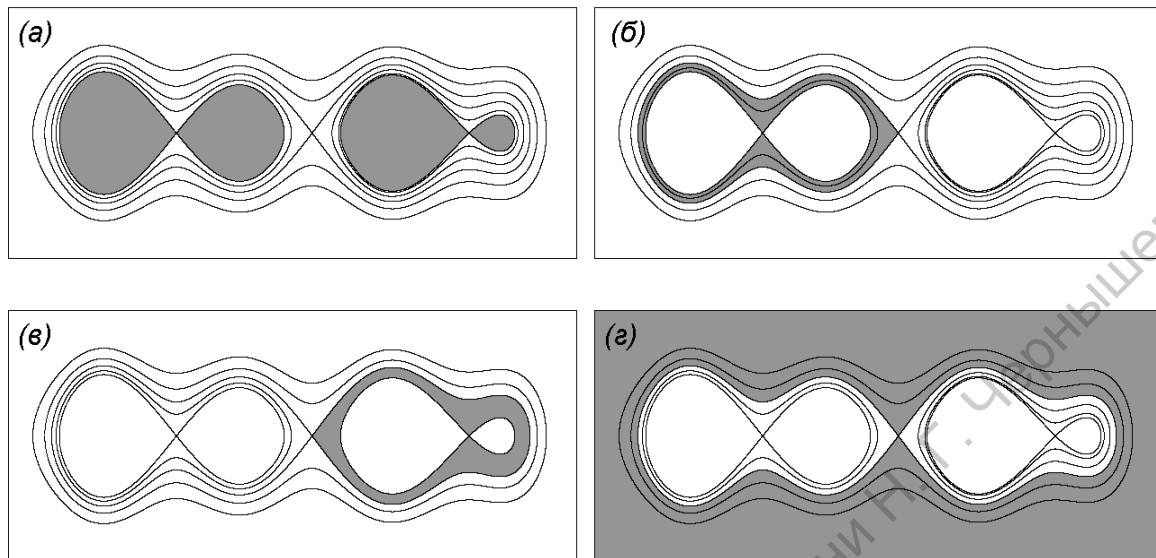


Рис. 5.3. Фазовая плоскость нелинейного осциллятора с потенциалом, соответствующим рисунку 5.16. Области, занятые траекториями определенного топологического типа, закрашены серым. Сепаратрисы есть кривые, разграничивающие эти области

Итогом этого раздела можно считать рецепт, как построить качественно правильный фазовый портрет нелинейного осциллятора, отправляясь от заданного графика потенциальной функции. Прежде всего, располагаем будущий фазовый портрет в точности под этим графиком и изображаем оси координат — горизонтальную  $x$  и вертикальную  $\dot{x}$ . Далее, отметим на горизонтальной оси особые точки, отвечающие устойчивым состояниям равновесия в локальных минимумах потенциальной функции (центры), и неустойчивым — в локальных максимумах (седла). Если мы проведем на графике потенциальной функции горизонтальные касательные в точках максимума, то их точки пересечения с кривой определяют границы областей расположения сепаратрис соответствующих седел. Далее, изображаем сами сепаратрисы, имеющие в точках седел вид кривых, пересекающихся крест-накрест, а также семейства замкнутых, вложенных друг в друга овальных кривых вокруг центров. Стрелочки, обозначающие направление движения по фазовым траекториям, расставляем так, чтобы в верхней полуплоскости они были обращены направо, а в нижней — налево. В самом деле,  $\dot{x} > 0$  отвечает нарастанию координаты  $x$  во времени, а  $\dot{x} < 0$  — убыванию. Читателю настоятельно рекомендуется нарисовать от руки несколько произвольных графиков потенциальных функций и построить соответствующие им фазовые портреты.



**Задача 5.1.** Шарик массы  $m$  может колебаться в невесомости на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. Постройте фазовый портрет системы. В чем его отличие от фазового портрета соответствующей линейной системы? Укажите область на фазовой плоскости, в пределах которой систему можно считать линейной.

**Задача 5.2.** Найдите уравнение фазовых траекторий для колебательного контура, составленного из конденсатора емкости  $C$  и нелинейной индуктивности, для которой зависимость магнитного потока от тока  $I$  дается соотношением  $\Phi = LI + kI^3$ . Постройте соответствующий фазовый портрет. (Указание. Найдите выражение для энергии, запасенной индуктивностью.)

**Задача 5.3.** Небольшое тело массы  $m$  может скользить без трения по горизонтальному стержню (рис. 5.4). Тело прикреплено пружиной жесткости  $k$  к точке  $O$ , находящейся на расстоянии  $l$  от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии  $l_0$ , причем  $l_0 > l$ . Найдите положения равновесия и соответствующие им значения потенциальной энергии. Постройте график функции  $U(x)$ , дающий зависимость потенциальной энергии от координаты тела, и с его помощью определите, какие из положений равновесия устойчивы. Постройте фазовый портрет системы. Укажите характерные элементы фазового портрета: особые точки, типичные траектории, сепаратрисы. Напишите уравнение сепаратрисы в явной форме. Используя график потенциальной энергии, опишите поведение тела, отвечающее перечисленным элементам фазового портрета.

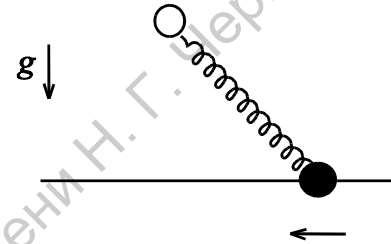


Рис. 5.4

**Задача 5.4.** Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Ленарда–Джонса [J. Lenard–Jones, 1924]

$$U(r) = 4a \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^{12} - \left( \frac{b}{r} \right)^6 \right].$$

Постройте фазовый портрет системы и проведите его исследование по схеме, описанной в предыдущей задаче. Масса молекулы равна  $m$ , параметры  $a$  и  $b$  считайте известными. Какую физическую интерпретацию можно дать для движения по сепаратрисе?

**Задача 5.5.** Шарик массы  $m$ , несущий заряд  $q$ , может без трения скользить по непроводящей спице. Спица проходит через центры двух неподвижных колец перпендикулярно их плоскости (рис. 5.5). Кольца несут заряды противоположных знаков  $-Q$  и  $Q$  и расположены на расстоянии  $2a$  друг от друга. Радиусы колец  $R$ . Постройте фазовый портрет системы.

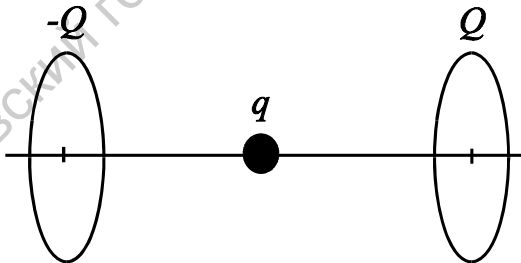


Рис. 5.5

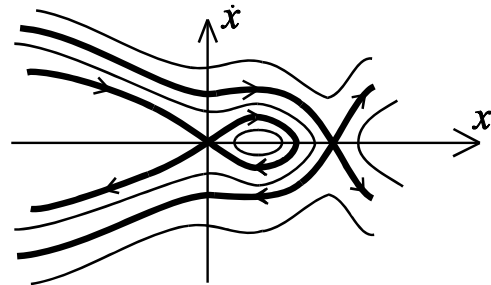


Рис. 5.6

**Задача 5.6.** На рис. 5.6 показан фазовый портрет системы. Изобразите соответствующий ему график функции  $U(x)$ .

## 5.2. Нелинейный осциллятор с диссипацией

Из линейной теории колебаний известно, что добавление в уравнение гармонического осциллятора дополнительного члена с первой производной приводит к уравнению линейного диссипативного осциллятора. Эта модель описывает такие системы как механический осциллятор с вязким трением, когда сила трения пропорциональна скорости, и колебательный контур, в котором наряду с емкостью и индуктивностью присутствует резистор (сопротивление). Аналогичная модификация нелинейного осциллятора приводит к уравнению

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x) = 0, \quad (5.5)$$

в котором положительная постоянная  $\gamma$  имеет смысл параметра диссипации. Обсудим вопрос о том, как трансформируется фазовый портрет нелинейного осциллятора по сравнению с консервативным случаем.

Попытаемся реализовать ту же самую последовательность рассуждений, которая в отсутствие диссипации приводила к получению первого интеграла — явного соотношения, определяющего на фазовой плоскости семейство кривых — фазовых траекторий. Введем, как и раньше, потенциальную функцию  $U(x) = \int_0^x f(X) dX$ , перенесем член, ответственный за диссипацию, в правую часть и перепишем уравнение в виде

$$\ddot{x} + U'(x) = -\gamma \dot{x}, \quad (5.6)$$

Умножим теперь уравнение на  $\dot{x}$  и представим левую часть как полную производную:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = -\gamma \dot{x}^2. \quad (5.7)$$

Если параметр диссипации равен нулю, то выражение под знаком производной не меняется во времени, так что на фазовой плоскости изображающая точка может двигаться только вдоль кривой, заданной уравнением  $\dot{x}^2/2 + U(x) = E$ ,  $E = \text{const}$ . При наличии диссипации  $\gamma > 0$ , так что правая часть соотношения (5.7) отрицательна, если только производная  $\dot{x}$  отлична от нуля. Тождественно равной нулю производная может быть только для решения, отвечающего неподвижной точке. Для любого другого решения наличие диссипации приводит к тому, что производная от величины  $\dot{x}^2/2 + U(x)$  будет отрицательной (за исключением, может быть, отдельных моментов времени, когда она равна нулю), и эта величина, следовательно, с течением времени обязана убывать. Если

параметр диссипации мал, то это уменьшение очень медленное. Чтобы представить себе, как при этом будет выглядеть движение изображающей точки на фазовой плоскости, вернемся к фазовому портрету консервативного осциллятора и рассмотрим обсуждавшийся ранее конкретный пример (см. рис. 5.1). Изображающая точка, двигаясь в первом приближении вдоль изображенных на рисунке кривых, будет как бы медленно переходить с одной кривой на другую соответственно уменьшению величины  $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$ .

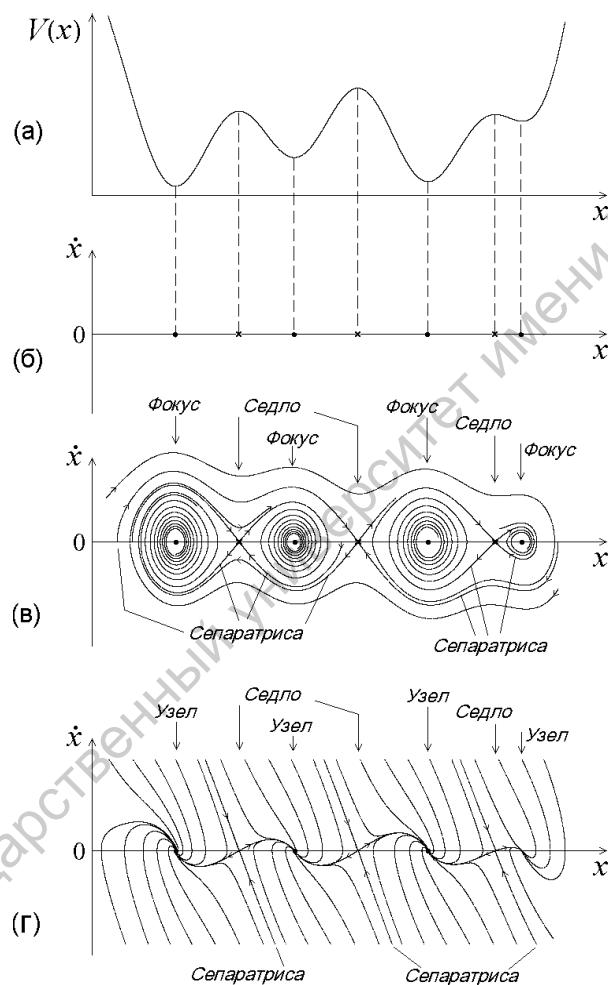


Рис. 5.7. Нелинейный осциллятор с потенциальной функцией (диаграмма (а)) такого же вида, как для консервативного осциллятора на рис. 5.1. Показаны особые точки на фазовой плоскости — кружочками устойчивые, крестиками неустойчивые (б), а также фазовый портрет в случае слабой и сильной диссипации, соответственно,  $\gamma = 0.2$  (в) и  $\gamma = 6$  (г)

На основании этих соображений, можно очень просто качественно изобразить фазовый портрет осциллятора с малой диссипацией. Он будет выглядеть, как показано на рис. 5.7в. В частности, движение вблизи устойчивого состояния равновесия будет совершаться не по замкнутой траектории, как в консервативном случае, а по скручи-

вающейся спирали. Это соответствует затухающим колебаниям. В конце концов, когда будет достигнута точка минимума потенциала, дальнейшее уменьшение величины  $E$  станет невозможным, и система придет в состояние устойчивого равновесия. Особые точки диссипативной колебательной системы, которые отвечают устойчивым состояниям равновесия, и к которым фазовые траектории приближаются по спирали, называются *устойчивыми фокусами*.

При очень больших значениях параметра диссипации характер движения вблизи устойчивых состояний равновесия меняется: вместо приближения траекторий к равновесию с осцилляциями наблюдается просто медленное затухание величины отклонения от неподвижной точки, без перемен знака. В этом случае особую точку называют *устойчивым узлом* (рис. 5.7г).

В окрестности особых точек типа седла фазовые траектории устроены качественно так же, как и в консервативном случае. В частности, у каждого седла имеется устойчивая сепаратриса — две ветви траекторий, асимптотически приближающихся к седлу, и неустойчивая сепаратриса из двух ветвей, вдоль которых изображающая точка удаляется от седла (рис. 5.7в,г).

Устойчивые неподвижные точки в диссипативном случае выступают как аттракторы. *Аттрактор* — это такое множество в фазовом пространстве диссипативной системы, к которому асимптотически приближаются все фазовые траектории из определенной области. Эту область называют *бассейном* данного аттрактора.

В общем случае аттракторы могут иметь различную природу. Например, аттрактор в виде замкнутой притягивающей фазовой траектории — предельный цикл соответствует периодическим автоколебаниям, странный аттрактор — сложно и тонко устроенное фрактальное притягивающее множество, которое может встречаться, начиная с размерности фазового пространства, равной трём, ассоциируется с динамическим хаосом.

В фазовом пространстве столь простой системы, как нелинейный диссипативный осциллятор, аттракторы представлены только состояниями равновесия, т.е. притягивающими множествами, состоящими из одной точки — устойчивого фокуса или узла. Если потенциальная функция имеет более одного минимума, то присутствует несколько сосуществующих аттракторов, каждый из которых обладает своим бассейном притяжения. Рассматривая фазовые портреты на рис. 5.7, приходим к выводу, что роль сепаратрис на фазовой плоскости нелинейного диссипативного осциллятора состоит в том, что они *разграничивают бассейны притяжения различных аттракторов* (состоя-

ний устойчивого равновесия). На рис. 5.8 показаны бассейны притяжения четырех устойчивых состояний равновесия, имеющих в нашем примере нелинейного осциллятора.

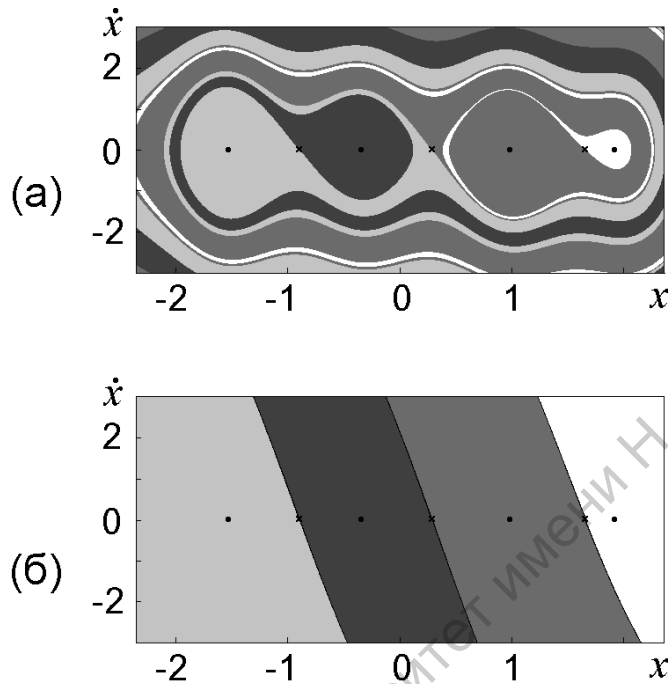


Рис. 5.8. Фазовая плоскость нелинейного осциллятора с потенциалом, соответствующим рис. 5.7. Области, закрашенные определенными тонами серого цвета, представляют собой бассейны притяжения устойчивых состояний равновесия (черные кружочки). Границами бассейнов служат сепаратрисы седел, показанных крестиками. Диаграмма (а) отвечает случаю малой диссипации ( $\gamma = 0.2$ ), диаграмма (б) — большой ( $\gamma = 6$ )

**Задача 5.7.** При каких значениях параметра  $\gamma$  осциллятор, описываемый уравнением  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \sin x = 0$ , будет иметь в начале координат устойчивый фокус, а при каких — устойчивый узел?

**Задача 5.8.** При каких значениях параметра  $\gamma$  осциллятор  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + (x^3 - x + 8/27) = 0$ , будет иметь (а) два устойчивых фокуса, (б) устойчивые фокус и узел, (в) два устойчивых узла?

**Задача 5.9.** На рис. 5.9 показаны три фазовые траектории. Одна из них относится к консервативной системе. Какая из двух остальных может относиться к этой же системе при включении небольшой диссипации? Ответ обоснуйте.



Рис. 5.9

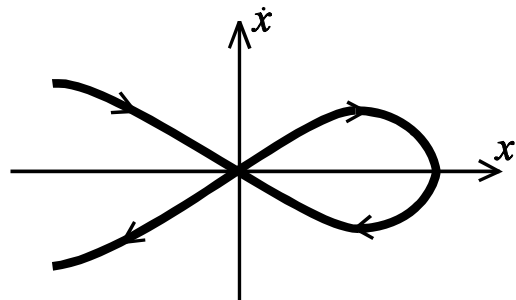


Рис. 5.10

**Задача 5.10.** На рис. 5.10 изображена петля сепаратрисы некоторой консервативной системы. Изобразите вид сепаратрисы при включении небольшой диссипации. (*Указание.* Восстановите вид функции  $U(x)$  и выясните характер движения и его модификацию при включении диссипации для каждой из ветвей сепаратрисы).

**Задача 5.11.** В системе, описанной в задаче 5.3, имеется затухание, причем сила сопротивления, действующая на шарик, пропорциональна его скорости с известным коэффициентом  $\gamma$ . Изменяются ли при введении диссипации координаты положений равновесия? Найдите значение параметра затухания  $\gamma_0$ , при котором происходит изменение типа устойчивых неподвижных точек. Постройте фазовый портрет системы для случая  $\gamma < \gamma_0$ . Сколько аттракторов имеет система? Заштрихуйте на отдельном рисунке на фазовой плоскости соответствующие бассейны притяжения. Обсудите роль сепаратрис с точки зрения определения бассейнов притяжения.

## Лекция 6

## Нелинейный осциллятор: конкретные примеры

В этой лекции мы обратимся к обсуждению некоторых конкретных физических систем, которые представляют самостоятельный интерес, и образом которых служит нелинейный осциллятор. Разумеется, это всего лишь ограниченный набор примеров, их количество можно умножить.

## 6.1. Маятник

Рассмотрим классический математический маятник. Пусть груз массы  $m$ , прикреплен к концу невесомого стержня длины  $l$ , а противоположный конец стержня располагается на оси, вокруг которой стержень может свободно вращаться в вертикальной плоскости (рис. 6.1a). Система находится в поле тяжести, ускорение свободного падения  $g$ . Если отклонить маятник от вертикали на угол  $\varphi$ , то момент, создаваемый силой тяжести («сила, помноженная на плечо»), будет равен  $mg l \sin \varphi$ . Момент инерции груза массы  $m$ , расположенного на расстоянии  $l$  от оси, равен  $ml^2$ . Следовательно, основное уравнение динамики, представляющее собой обобщение второго закона Ньютона на вращательное движение, имеет вид  $ml^2 \ddot{\varphi} = -mg l \sin \varphi$  или, после сокращения на  $ml^2$ ,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (6.1)$$

Итак, мы приходим к уравнению нелинейного осциллятора со специальным видом нелинейной функции — синусом. Если изменить масштаб времени посредством замены  $t_{\text{новое}} = t \sqrt{g/l}$ , то уравнение приводится к удобному для математического исследования виду

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad (6.2)$$

где мы изменили обозначение динамической переменной на букву  $x$ , чтобы подчеркнуть соответствие с уравнением нелинейного осциллятора (5.1).

Некоторые из сделанных выше предположений на самом деле несущественны с точки зрения окончательного вида уравнения осциллятора. Пусть мы имеем тело произвольной формы с массой  $m$ , которое помещено в поле тяжести и может вращаться

вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс (рис.6.1б). Пусть  $J$  — момент инерции тела относительно оси, а  $l$  — расстояние от оси до центра масс. Тогда для угла поворота тела вокруг оси  $\varphi$  справедливо уравнение

$$\ddot{\varphi} = -mglJ^{-1} \sin \varphi, \quad (6.3)$$

т.е. мы вновь имеем осциллятор с нелинейностью синуса. Такую систему называют *физическим маятником*.

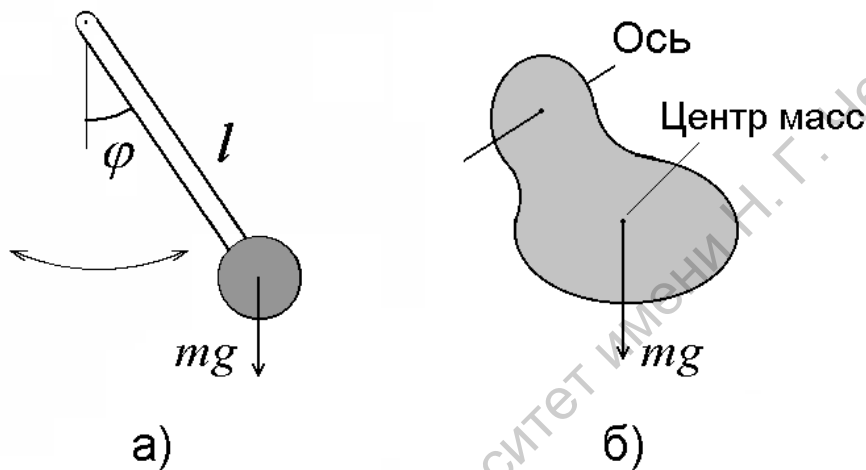


Рис. 6.1. Математический (а) и физический (б) маятник

Замечательно, что данное уравнение описывает не только колебания маятника, но оказывается применимым для целого ряда других задач. Их обсуждению и изложению аналитического подхода к исследованию этого уравнения будет посвящена отдельная лекция.

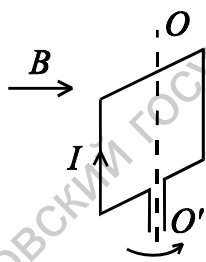


Рис. 6.2

**Задача 6.1.** Квадратная рамка, по которой течет ток  $I$ , может вращаться без трения вокруг оси  $OO'$  (рис. 6.2). Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , перпендикулярное оси рамки. Покажите, что колебания рамки описываются уравнением математического маятника. Масса рамки  $m$ .

Предположим, что маятник помещен в среду, со стороны которой на него действует сила вязкого трения, пропорциональная мгновенной скорости и тормозящая движение груза,  $f_{\text{тр}} = -kv = -kl\dot{\varphi}$ . Добавляя момент силы трения  $lf_{\text{тр}} = -kl^2\dot{\varphi}$  в уравнение движения (6.1), получаем  $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - kl^2\dot{\varphi}$ , или



$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi - \frac{k}{m} \dot{\phi}. \quad (6.4)$$

Выполняя, как и раньше, перенормировку времени и вводя обозначение  $x$  для динамической переменной, получаем уравнение в форме

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \sin x = 0, \quad (6.5)$$

где  $\gamma = \frac{k}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}$  — безразмерный параметр диссипации.

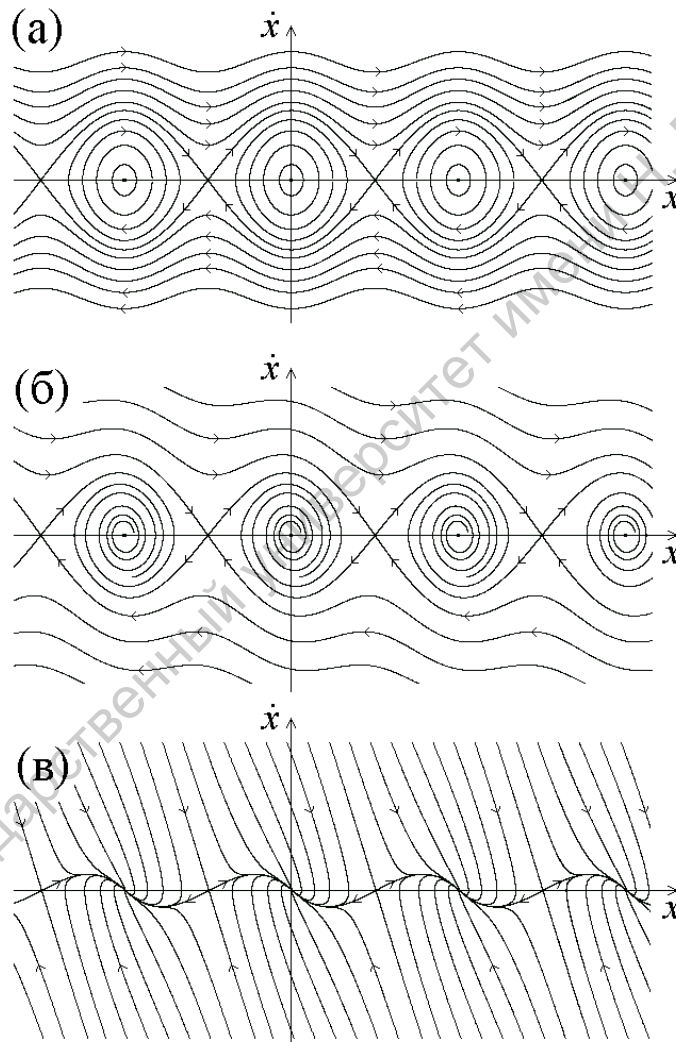


Рис. 6.3. Фазовый портрет осциллятора с нелинейностью синуса (6.2): в отсутствие диссипации,  $\gamma = 0$  (а); при небольшой диссипации,  $\gamma = 0.113$  (б); при большой диссипации,  $\gamma = 2.1$  (в)

На рис. 6.3 показаны три фазовых портрета осциллятора с нелинейностью синуса — в отсутствие диссипации, когда устойчивые особые точки представляют собой центры, при небольшой диссипации, когда они оказываются фокусами, и при большой, когда они становятся узлами. Неустойчивые особые точки во всех случаях являются

седлами. Обратите внимание на периодичность фазовых портретов по горизонтальной оси, что связано, очевидно, с периодичностью присутствующей в уравнении функции синуса.

## 6.2. Частица в лунке

В предыдущих лекциях мы несколько раз ссылались на простейший пример колебательной системы типа шарик в лунке. Если вести речь не просто о качественных иллюстрациях, а о количественной формулировке механической задачи, то в ее постановке требуется определенная аккуратность.

Во-первых, если бы мы говорили о шарике, *катающемся* в лунке, то его кинетическая энергия должна была бы складываться из энергии поступательного и вращательного движений (нужно принимать во внимание момент инерции). Во-вторых, при движении по искривленной поверхности, вообще говоря, могло бы случиться так, что шарик оторвался от нее, и на некоторое время оказался в состоянии свободного падения. Чтобы избежать обоих упомянутых осложнений, будем рассматривать движение

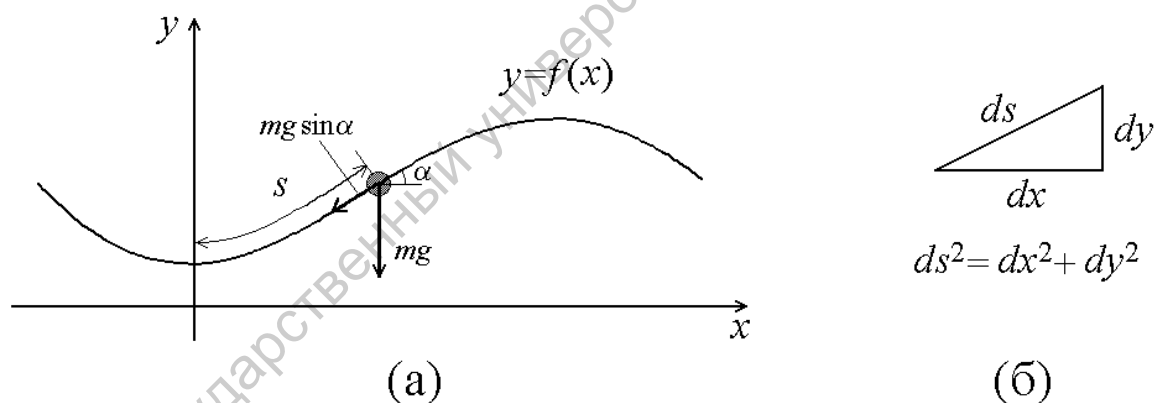


Рис. 6.4. К выводу уравнения скольжения бусинки по проволоке в форме заданной кривой в поле тяжести (а). Пояснение связи между приращениями величин  $s$ ,  $x$  и  $y$  при малом смещении вдоль кривой (б)

бусинки, надетой на проволоку, изогнутую в соответствии с заданной формой профиля  $y = f(x)$  (рис. 6.4). Считаем, что на бусинку действует сила тяжести  $mg$ . Трение бусинки о проволоку и о воздух предполагается отсутствующим, так что колебательная система будет консервативной.

В проекции на направление движения сила равна  $F = -mg \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона кривой в точке расположения бусинки (см. рис. 6.4а). Известно, что тангенс

этого угла определяется величиной производной,  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ . Выражая синус через тангенс, получаем

$$F = -\frac{mgf'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}. \quad (6.6)$$

Сила, действующая на бусинку со стороны проволоки, может иметь только составляющую, перпендикулярную направлению проволоки. В проекции на направление движения ускорение и сила связаны по второму закону Ньютона уравнением

$$m\ddot{s} = F, \quad (6.7)$$

где  $s$  обозначает расстояние, отсчитываемое вдоль проволоки. При бесконечно малом перемещении вдоль проволоки приращения  $ds$ ,  $dx$  и  $dy$  связаны соотношением  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . Отсюда следует, что

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(f'(x))^2}. \quad (6.8)$$

Вычисляем последовательно первую и вторую производные по времени:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{dt} = \sqrt{1+(f'(x))^2} \frac{dx}{dt}, \quad (6.9)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \sqrt{1+(f'(x))^2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f'(x)f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (6.10)$$

Подставляя последнее соотношение и выражение для силы  $F$  в уравнение (6.7), имеем

$$\ddot{x} + \frac{f'(x)f''(x)}{1+(f'(x))^2} \dot{x}^2 = -g \frac{f'(x)}{1+(f'(x))^2}. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) выглядит довольно непривычно, и отличается от «стандартного» уравнения нелинейного осциллятора (5.1). Тем не менее, его все же можно свести к обычной форме, но для этого в качестве динамической переменной нужно использовать не проекцию частицы на горизонтальную ось  $x$ , а другую величину — расстояние, отсчитываемое вдоль кривой

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(X))^2} dX. \quad (6.12)$$

Вычислим производную  $dy/ds$  с использованием (6.8), и (6.9):

$$\frac{dy}{ds} = \left( \frac{ds}{dy} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^{-2}}} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}. \quad (6.13)$$

Сопоставляя это выражение с (6.6), видим, что  $F = -mg dy/ds$ . Производная  $dy/ds$  может рассматриваться как функция от  $s$ . Поэтому уравнение (6.7) есть не что иное, как стандартная форма уравнения нелинейного осциллятора

$$\ddot{s} = -gy'(s). \quad (6.14)$$

Для этого осциллятора распределение потенциала задается функцией  $y(s)$ . Таким образом, форма профиля проволоки в исходных координатах  $(x, y)$  не соответствует форме потенциальной ямы. Чтобы получить вид потенциальной функции, надо перерисовать график в координатах  $(s, y)$ .

На рис. 6.5 представлены примеры, причем слева приведены профили, по которым скользит бусинка, а справа — соответствующие им потенциальные ямы.

Первый пример — параболический профиль

$$y = f(x) = x^2/2l. \quad (6.15)$$

(Здесь обе координаты  $x$  и  $y$  считаются величинами с размерностью длины, и для согласования размерностей левой и правых частей введена константа с размерностью длины  $l$ .) Подставляя (6.15) в (6.11), получаем уравнение, описывающее колебания бусинки, скользящей по параболе:

$$\ddot{x} + \frac{x\dot{x}^2}{l^2 + x^2} = -\frac{glx}{l^2 + x^2}. \quad (6.16)$$

Попытаемся представить его в стандартной форме (6.14). Используя (6.15) и вычисляя интеграл, имеем:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + X^2/l^2} dX = \frac{x}{2} \sqrt{1 + x^2/l^2} + \frac{l}{2} \ln(x/l + \sqrt{1 + x^2/l^2}). \quad (6.17)$$

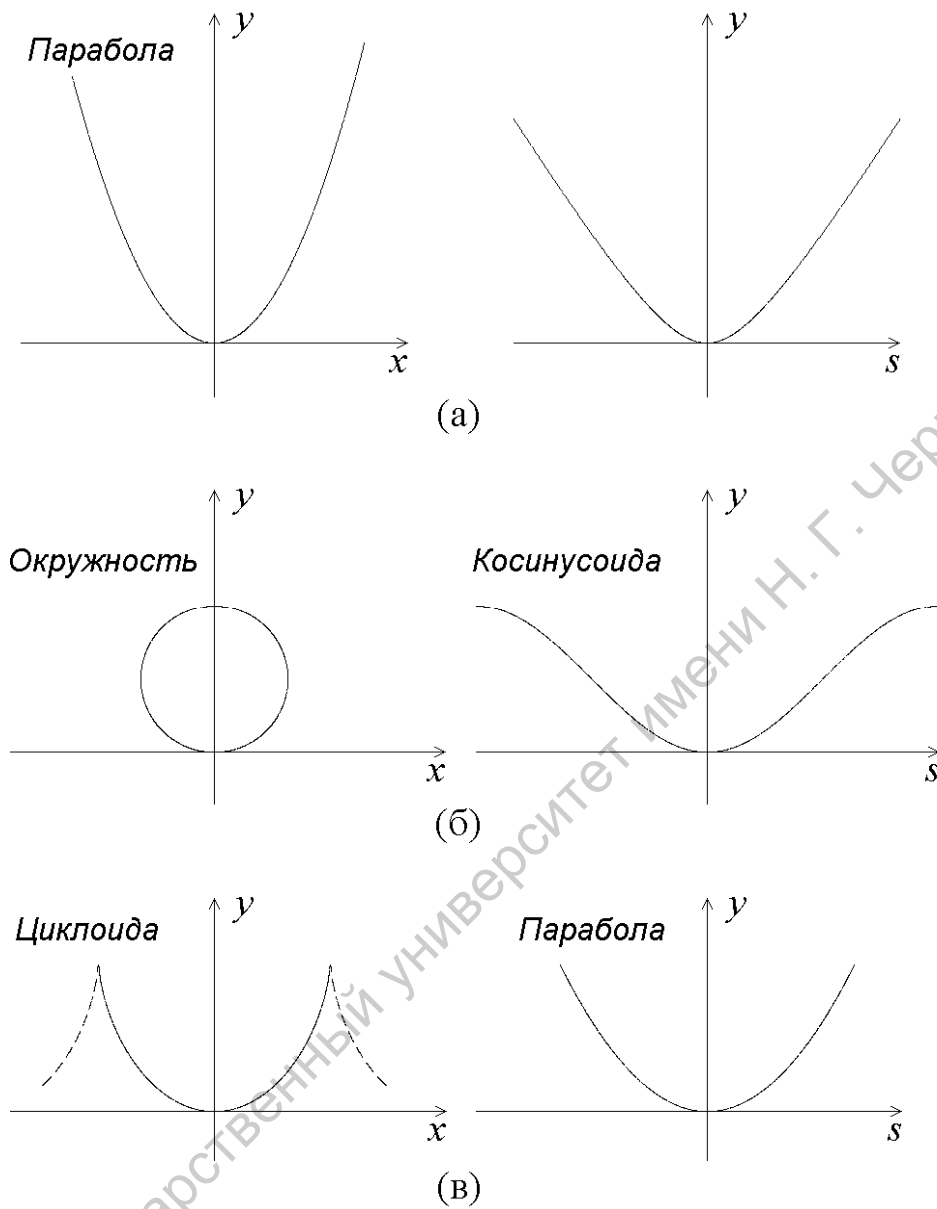


Рис. 6.5. Сравнение профиля, по которому скользит частица (слева) и потенциальной ямы соответствующего нелинейного осциллятора (справа) для трех случаев: профиль в форме параболы (а); окружности (б); циклоиды (в)

Обратить последнее выражение и получить  $x$  как явную функцию  $s$  не удастся, поэтому приходится довольствоваться тем, что мы нашли форму потенциальной ямы  $y(s)$  в параметрической форме:

$$s = \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}} + \frac{l}{2} \ln \left( \frac{x}{l} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}} \right), \quad y = \frac{x^2}{2l}. \quad (6.18)$$

На рис. 6.6 приведены две версии фазового портрета колебаний частицы в параболическом профиле. Один — в координатах  $(x, \dot{x})$ , а второй — в координатах  $(s, \dot{s})$ ,

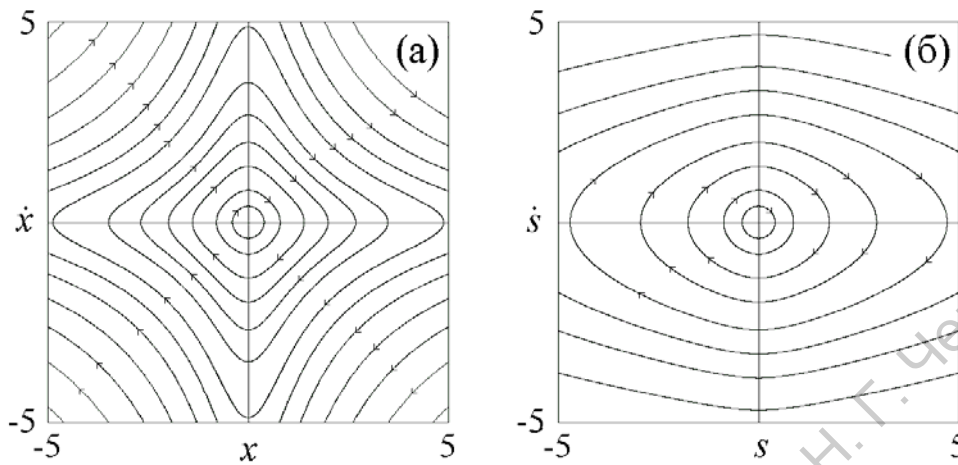


Рис. 6.6. Фазовый портрет колебаний частицы в параболическом профиле в координатах  $(x, \dot{x})$  (а) и в координатах  $(s, \dot{s})$  (б), построенный для уравнения (6.16) при  $l = 1$ ,  $g = 1$

что соответствует стандартной форме уравнений нелинейного осциллятора, с потенциальной функцией, заданной в параметрической форме уравнениями (6.18).

Второй пример — профиль в форме окружности (рис. 6.5б). Пусть радиус окружности  $l$ , тогда длина дуги, отсчитываемой вдоль кривой, выражается формулой  $s = l\varphi$ , где  $\varphi$  — угол в радианах. Считая, что нижняя точка окружности расположена в начале координат, ее параметрическое уравнение записываем в виде

$$\begin{aligned} x &= l \sin \varphi, \\ y &= l(1 - \cos \varphi). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ясно, что уравнение (6.14) принимает знакомый вид уравнения математического маятника:

$$\ddot{s} = -g \sin(s/l) \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (6.20)$$

Фазовый портрет см. на рис. 6.3а.

Перейдем к третьему примеру. Зададимся вопросом, как следует выбрать форму профиля, чтобы движение частицы соответствовало бы колебаниям линейного осциллятора? Эта задача была решена в XVII веке Христианом Гюйгенсом, который искал способ реализовать изохронный маятник для часов. Чтобы уравнение (6.14) превратилось в уравнение линейного осциллятора, производная  $y'(s)$  должна выражаться ли-

нейной функцией:  $y'(s) = s/l$ . Поскольку должно выполняться равенство  $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$ , имеем

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{l}\right)^2}. \quad (6.21)$$

Ясно, что удобная параметризация получится, если положить  $s = l \sin \xi$ . Тогда находим

$$\frac{dx}{d\xi} = l \cos^2 \xi = \frac{l}{2}(\cos 2\xi + 1) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\xi} = l \sin \xi \cos \xi = \frac{l}{2} \sin 2\xi. \quad (6.22)$$

Интегрируя с нулевыми начальными условиями при  $\xi = 0$ , получаем

$$x = \frac{l}{2} \left( \xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi \right), \quad y = -\frac{l}{4} (\cos 2\xi - 1). \quad (6.23)$$

Это параметрическая форма кривой, которая называется *циклоидой*. Будучи перевернутой, она в точности совпадает с кривой, которую описывает в неподвижной системе отсчета точка на ободе катящегося колеса.

**Задача 6.2.** Для параболически изогнутой проволочки определите период малых колебаний из формулы 6.18, используя предельный переход к случаю малых  $x$ .

**Задача 6.3.** Решите аналогичную задачу в случае циклоиды.

**Задача 6.4.** Проволочка изогнута так, что ее профиль задан функцией — цепной линией  $y = \operatorname{ch} x$ . Ось  $x$  направлена горизонтально. По проволочке без трения скользит маленькая бусинка. Получите «эффективный» потенциал  $U(x)$ , описывающий колебания бусинки. Возрастает или убывает период нелинейных колебаний с ростом амплитуды?

### 6.3. Колебательный контур с нелинейной емкостью

Рассмотрим колебательный контур, содержащий катушку индуктивности, резистор и нелинейную емкость (рис. 6.7). Нелинейная емкость, может быть представлена конденсатором с сегнетоэлектриком или полупроводниковым устройством с двумя включенными навстречу друг другу  $p-n$  переходами (см. лекцию 2). Предполагается, что гистерезис отсутствует, и связь между запасенным зарядом  $q$  и напряжением на подводящих проводниках  $U$  задана функцией  $q = q(U)$ . Однако, сейчас нам будет удобнее использовать в качестве нелинейной характеристики обратную зависимость,  $U = U(q)$ .

Запишем уравнения Кирхгофа для нашей схемы. Мгновенный ток через нелинейную емкость определяется производной по времени от запасенного заряда,

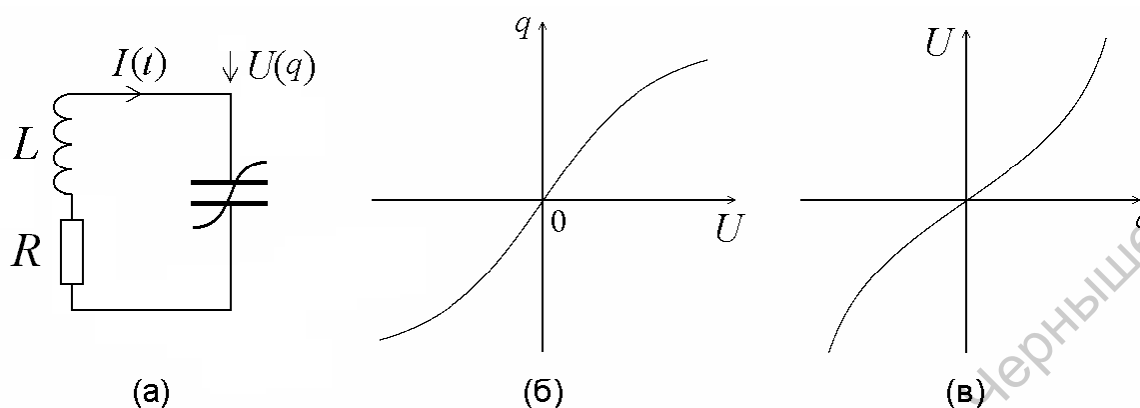


Рис. 6.7. Колебательный контур с нелинейной емкостью (а), нелинейная характеристика в виде зависимости запасенного заряда от напряжения и в виде напряжения в зависимости от запасенного заряда (в)

$I = dq/dt$ . Далее, суммарное напряжение на резисторе  $R$  и катушке индуктивности  $L$  должно быть равно  $U(q)$ , так что  $L di/dt + Ri = -U(q)$ . Отсюда видно, что за динамическую переменную удобнее всего принять заряд  $q$ . Комбинируя оба приведенных уравнения, получаем:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + RL^{-1} \frac{dq}{dt} = -L^{-1} U(q). \quad (6.24)$$

Обратите внимание на точную аналогию этого уравнения и уравнения механического осциллятора с диссипацией. Нелинейная характеристика конденсатора – зависимость напряжения от заряда соответствует зависимости силы от координаты в механической задаче, роль потенциальной функции выполняет функция

$$V(q) = \int_0^q U(q') dq', \quad (6.25)$$

а диссипативный член обязан своим появлением наличию сопротивления.

В частности, если конденсатор линейный,  $U(q) = q/C$ , и диссипация отсутствует, получаем уравнение гармонического осциллятора  $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$  с собственной частотой  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — хорошо известный классический результат для колебательного контура.



На рис. 6.8 показан вид фазовых портретов для колебательного контура с нелинейной емкостью в предположении, что форма нелинейной характеристики соответствует

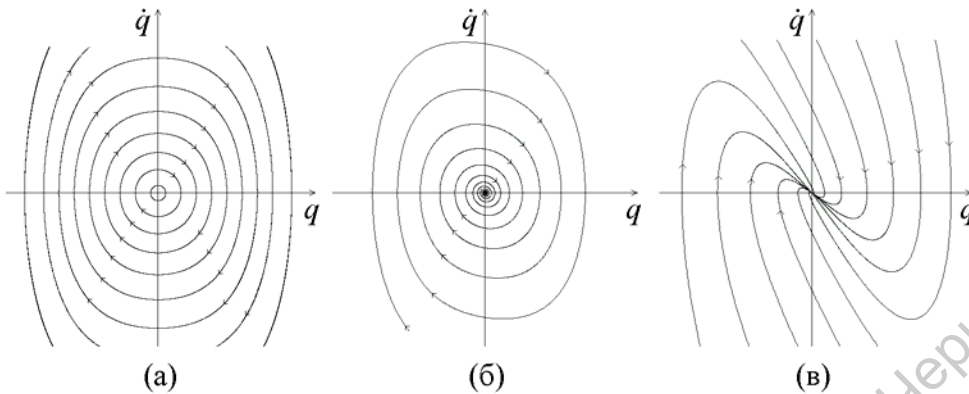


Рис. 6.8. Фазовые портреты для колебательного контура с нелинейной емкостью, форма характеристики которой показана на рис. 6.6: в отсутствие диссипации (а); при слабой диссипации (б); при сильной диссипации (в)

вует показанной на рис. 6.7. Имеется единственная устойчивая неподвижная точка в начале координат. В отсутствие диссипации это центр, при слабой диссипации — устойчивый фокус, при сильной диссипации — устойчивый узел.

#### 6.4. Колебательный контур с нелинейной индуктивностью

Рассмотрим колебательный контур, схема которого показана на рис. 6.9а. Присутствующая здесь нелинейная индуктивность может быть представлена катушкой с ферромагнитным сердечником (см. лекцию 2). Будем считать, что гистерезиса нет, т.е. связь

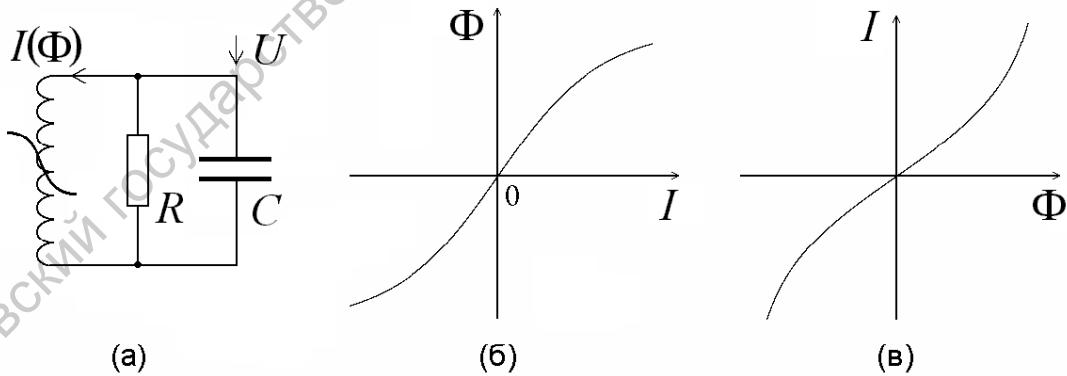


Рис. 6.9. Колебательный контур с нелинейной индуктивностью (а), нелинейная характеристика в виде зависимости магнитного потока от тока в витках катушки индуктивности (б) и обратная зависимость, используемая в приведенных выкладках в качестве нелинейной характеристики (в)

между магнитным потоком и протекающим по виткам током задана некоторой нелинейной функцией. Нам будет удобно представить эту связь в виде  $I = I(\Phi)$  (рис. 6.9б,в).

Запишем уравнения Кирхгофа. Напряжение на катушке индуктивности дается выражением  $U = d\Phi/dt$ . Далее, суммарный мгновенный ток через катушку индуктивности, резистор  $R$  и конденсатор  $C$  должен равняться нулю, так что  $I(\Phi) + U/R + C dU/dt = 0$ . За обобщенную координату удобно принять магнитный поток  $\Phi$ . Комбинируя оба уравнения, приходим к уравнению нелинейного диссипативного осциллятора:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d\Phi}{dt} + C^{-1}I(\Phi) = 0. \quad (6.26)$$

Вид фазовых портретов качественно такой же, как для колебательного контура с нелинейной емкостью, см. рис. 6.8.

**Задача 6.5.** Получите уравнения для колебательного контура с нелинейной емкостью при включении резистора параллельно катушке индуктивности и для контура с нелинейной индуктивностью при последовательном включении сопротивления. Удастся ли в этих случаях привести уравнения к стандартной форме нелинейного осциллятора с диссипацией?

## Лекция 7

### Осциллятор с нелинейностью синуса: аналитический подход к нелинейной задаче

Из примеров, приведенных в предыдущей лекции, мы видели, что уравнение осциллятора с нелинейностью синуса описывает колебания математического и физического маятника. Замечательно, что аналогичное уравнение возникает и в ряде других задач, например, при рассмотрении контакта Джозефсона, при исследовании самоиндуцированной прозрачности в нелинейной оптике, при анализе изгиба упругой балки (так называемая аналогия Кирхгофа).

Тот факт, что уравнение маятника охватывает множество различных задач, заставляет видеть в осцилляторе с нелинейностью типа синуса своего рода эталонную модель, заслуживающую подробного исследования. Более того, данное уравнение оказывается интересным и богатым объектом с точки зрения связанных с ним математических идей и результатов. Это одна из проблем, стимулировавших разработку теории эллиптических функций и эллиптических интегралов математиками XVIII и XIX веков (Эйлер, Абель, Якоби, Вейерштрасс и другие).

В этой лекции мы сначала коротко расскажем о названных выше задачах, приводящих к уравнению маятника, а затем обратимся к его аналитическому исследованию, опирающемуся на использование эллиптических функций.

Мораль данной лекции такова, что даже в современную компьютерную эпоху аналитический подход к решению задач не стоит сбрасывать со счетов. (Более того, он, очевидно, обретает новую жизнь с появлением мощных компьютерных систем аналитических вычислений, таких как Mathematica и Maple.)

#### 7.1. Контакт Джозефсона

Пусть имеем два куска сверхпроводника, разделенных узким промежутком, который заполнен «нормальным» (не сверх-) проводником (рис. 7.1). Это известный *контакт Джозефсона*. Как мы увидим, анализ этой системы приводит к уравнению осциллятора с нелинейностью синуса.

Согласно теории сверхпроводимости, в сверхпроводнике носители заряда — электроны взаимодействуют друг с другом, и это взаимодействие приводит к их попарному связыванию с образованием квазичастиц, так называемых куперовских пар. (Один из наиболее распространенных механизмов — взаимодействие через посредство механических колебаний кристаллической решетки — фононов). Ку-

перовская пара относится к бозе-частицам, которые при наличии большого их числа имеют тенденцию скапливаться в одном и том же квантовом состоянии, описываемом общей волновой функцией. («Чем нас больше соберется, тем нам будет веселей».) В разумном приближении волновую функцию куперов-

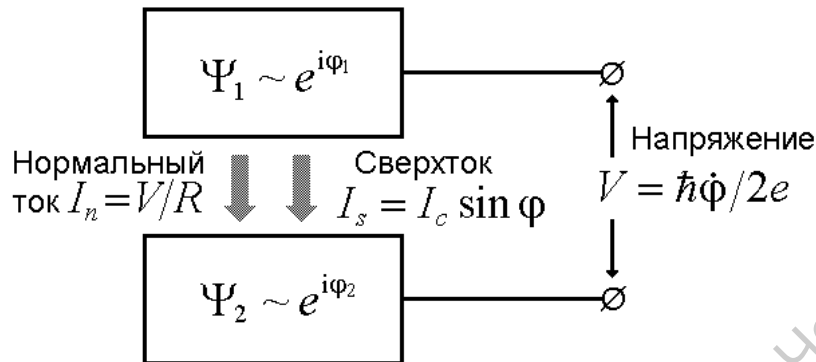


Рис. 7.1. Схема контакта Джозефсона: два куска сверхпроводника разделены промежутком из несверхпроводящего материала

ских пар в каждом куске сверхпроводника можно считать просто комплексной величиной, изменяющейся во времени, но не зависящей от координат в пределах куска. Пусть в первом и втором куске волновая функция, дается, соответственно комплексными числами,  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , а энергия в расчете на одну квази-частицу, соответственно,  $E_1$  и  $E_2$ . Согласно уравнению Шредингера,

$$\begin{aligned} i\hbar \partial \Psi_1 / \partial t &= E_1 \Psi_1, \\ i\hbar \partial \Psi_2 / \partial t &= E_2 \Psi_2. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Полагая  $\Psi_{1,2} \sim \exp(i\phi_{1,2})$ , получаем

$$\begin{aligned} -\dot{\phi}_1 &= E_1 / \hbar, \\ -\dot{\phi}_2 &= E_2 / \hbar, \end{aligned} \quad (7.2)$$

Вычтем второе уравнение (7.2) из первого. Принимая во внимание, что разность энергий определяется умноженной на заряд куперовской пары  $2e$  разностью потенциалов  $V = V_1 - V_2$  (напряжение на контакте), имеем

$$\dot{\phi} = 2e\hbar^{-1}V, \quad (7.3)$$

где  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ . Это первое существенное для нас уравнение. Оно показывает, что скорость изменения разности фаз между волновыми функциями в двух кусках сверхпроводника пропорциональна разности электрического потенциала между ними.

Ток носителей заряда из одного куска в другой складывается из двух частей. Во-первых, это нормальный ток, пропорциональный разности потенциалов и сопротивлению контакта  $I_n = R^{-1}V$ , и, во-вторых, это так называемый *сверхток* — ток куперовских пар, который оказывается пропорциональным синусу разности фаз:

$$I_s = I_c \sin \phi. \quad (7.4)$$

Здесь коэффициент  $I_c$  есть постоянная величина, характеризующая данный конкретный контакт, — так называемый критический ток.

Обозначая через  $C$  емкость конденсатора, образованного рассматриваемыми двумя кусками сверхпроводника, можно написать уравнение, связывающее разность потенциалов и полный ток через контакт:

$$C\dot{V} + I_n + I_s = 0 \quad (7.5)$$

или

$$\dot{V} + V/RC + I_c C^{-1} \sin \varphi = 0. \quad (7.6)$$

Подставляя сюда соотношение, выражающее напряжение через скорость изменения разности фаз (7.3), получаем окончательно

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}/RC + (2eI_c/\hbar C) \sin \varphi = 0. \quad (7.7)$$

Это уравнение совпадает по виду с уравнением маятника при наличии диссипации. Роль динамической переменной играет разность фаз волновых функций в двух кусках сверхпроводника. Обычные физические величины, — напряжение и ток, выражаются через нее посредством соотношений (7.3) и (7.4). В предельном случае, когда нормальный ток пренебрежимо мал, и обмен электрическим зарядом между кусками определяется исключительно сверхтоком куперовских пар, приходим к консервативному осциллятору с нелинейностью синуса.

## 7.2. Задача о самоиндуцированной прозрачности

В общей постановке задача о самоиндуцированной прозрачности при распространении оптического излучения в нелинейной среде подразумевает исследование пространственно-временных зависимостей соответствующих величин (см. книгу «Нелинейные волны», входящую в состав настоящей серии). К уравнению нелинейного осциллятора она приводит в том случае, если пространственные распределения можно считать неизменными и отслеживать только временные зависимости.

Предположим, что имеется резонатор, в котором может возбуждаться одна мода колебаний электромагнитного поля на определенной частоте  $\omega_0$  с фиксированной пространственной структурой. Амплитуда колебаний может медленно изменяться во времени благодаря взаимодействию поля со средой, заполняющей резонатор. Среда состоит из атомов с двумя энергетическими уровнями, разность энергий между которыми  $\Delta E = \hbar\omega_0$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка, а  $\omega_0$  — частота перехода, которая предполагается точно совпадающей с собственной частотой моды резонатора.

Электрическое поле в резонаторе представляется в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left( E(t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) e^{i\omega_0 t} \right), \quad (7.8)$$

где  $E(t)$  — медленно меняющаяся амплитуда, а  $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$  характеризует распределение в пространстве поля рабочей моды резонатора. Считаем, далее, что вектор поляризации активной среды, — дипольный момент единицы объема, характеризуется таким же пространственным распределением,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\left(P(t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) e^{i\omega_0 t}\right). \quad (7.9)$$

Кроме того, введем величину, характеризующую мгновенную разность населенностей уровней

$$D(t) = N_2 - N_1, \quad (7.10)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — число атомов, пребывающих в данный момент, соответственно, на нижнем и верхнем энергетическом уровне.

Сконструируем уравнения, описывающие динамику во времени величин  $E$ ,  $P$  и  $D$  в пренебрежении всеми диссипативными процессами. Выпишем сначала уравнение возбуждения резонатора. В левой части будет стоять производная от амплитуды поля  $\dot{E}$ , а в правой — член, пропорциональный поляризации  $P$ , который отвечает за возбуждение поля атомами среды:

$$\dot{E} = \beta P, \quad (7.11)$$

$\beta$  — некоторая постоянная. Второе уравнение, имеющее в левой части производную  $\dot{P}$ , описывает изменение поляризации среды. В правой части будет присутствовать член, происхождение которого можно пояснить следующим образом. Дипольный момент, который приобретает каждый атом среды в присутствии электрического поля, пропорционален величине поля и зависит от того, на каком энергетическом уровне находится атом. Поэтому средний вклад в поляризацию будет пропорционален произведению амплитуды поля и разности населенностей. Таким образом, второе уравнение имеет вид

$$\dot{P} = cED, \quad (7.12)$$

где  $c$  — постоянная. Наконец, третье уравнение описывает изменение разности населенностей и имеет вид

$$\dot{D} = -kEP, \quad (7.13)$$

где  $k$  — постоянный коэффициент. Умножим уравнение для поляризации (7.12) на  $kP$ , а уравнение для населенности (7.13) на  $cD$ , и сложим их. Тогда получаем  $\frac{d}{dt}(kP^2 + cD^2) = 0$ . Отсюда следует, что  $kP^2 + cD^2 = R$ , где  $R$  — константа, определяемая начальными условиями. Выполнение последнего соотношения будет обеспечено, если положить  $P = -\sqrt{R/k} \sin \phi$ ,  $D = -\sqrt{R/c} \cos \phi$ , где  $\phi$  — новая неизвестная функция времени. Подставляя эти выражения в уравнения (7.11) и (7.12), получаем

$$\dot{E} = -\beta\sqrt{R/k} \sin \phi, \quad (7.14)$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{ck}E. \quad (7.15)$$

Дифференцируя уравнение (7.15) по времени и подставляя (7.14), приходим к уравнению консервативного осциллятора с нелинейностью синуса:

$$\ddot{\phi} = -\beta\sqrt{cR} \sin \phi. \quad (7.16)$$

### 7.3. Аналогия Кирхгофа

Рассмотрим длинную упругую балку, удерживаемую в изогнутом положении продольной силой  $F$ , приложенной к краям, как показано на рис. 7.2. (Балка — принятый в механике термин, но на самом деле объектом, подходящим для экспериментов в домашних условиях, может служить, например, стальная линейка.) Какую форму она может принимать в зависимости от параметров задачи, в том числе, от величины приложенной силы?

Не вдаваясь здесь в детали, составляющие предмет механики сплошных сред и теории упругости, поясним происхождение основных уравнений. В любой точке  $(x, y)$  локальная кривизна линейки дается производной от угла наклона  $\theta$  по отсчитываемой вдоль линейки координате  $s$ . Скорость же

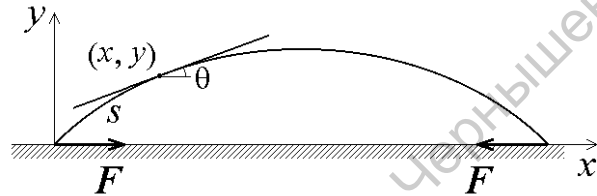


Рис. 7.2. К задаче об изгибе балки

изменения кривизны по длине балки пропорциональна изгибающему моменту — произведению силы  $F$  на плечо  $y$ , т.е.  $\frac{d\theta}{ds} = -CFy$ . Здесь  $C$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от упругих свойств материала и формы поперечного сечения балки. Дифференцируя это равенство по  $\theta$  и используя геометрически очевидное соотношение  $\frac{dy}{ds} = \sin \theta$ , получаем

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -CF \sin \theta. \quad (7.17)$$

Заметим, что смысл имеют как положительные, так и отрицательные значения параметра  $CF$ . (В самом деле, приложенные к концам силы могут быть направлены не только навстречу друг другу, как на рис. 7.2, но и в противоположные стороны.)

Чтобы найти форму изогнутой балки в декартовых координатах  $(x, y)$  при численном решении на компьютере целесообразно дополнить задачу уравнениями

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta. \quad (7.18)$$

В отличие от других рассмотренных нами примеров, в данном случае уравнение описывает не эволюцию процесса во времени, а пространственную зависимость — зависимость угла наклона от координаты, отсчитываемой вдоль балки. Еще одна особенность в том, что здесь приходится иметь дело не с задачей Коши, когда начальные условия заданы при одном значении аргумента, а с краевой задачей, когда заданы граничные условия (угол наклона) на *двух* концах балки фиксированной длины, т.е. при  $s = 0$  и  $s = L$ . Тем не менее, само уравнение (7.17) совпадает по форме с уравнением маятника. Если мы разобрались с динамикой маятника, то в силу указанной аналогии уравнений мы можем делать заключения о том, какую форму может принимать балка (линейка) в зависимости от параметров задачи!

**Задача 7.1.** Возьмите металлическую линейку и сожмите ее за концы так, как показано на рис. 7.2. Нарисуйте на бумаге получившийся профиль. С помощью этого рисунка изобразите экспериментальную зависимость угла  $\theta$  от длины дуги  $s$ . Какому движению маятника отвечает полученный график? Линейны или нелинейны его колебания?

#### 7.4. Фазовая плоскость маятника

Перейдем к анализу решений уравнения маятника, которое запишем в простейшем виде, не содержащем внешних параметров

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \quad (7.19)$$

Потенциальная энергия маятника определяется выражением  $W(x) = -\cos x$ . Фазовый портрет представлен на рис. 7.3. Минимумы потенциальной функции располагаются

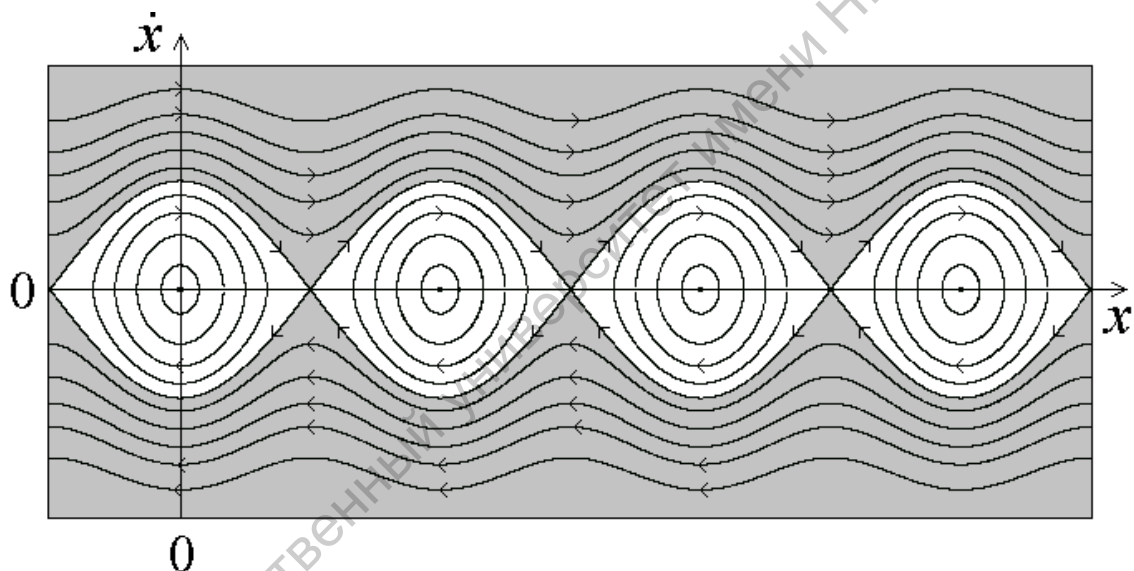


Рис. 7.3. Фазовая плоскость уравнения маятника. Белым цветом обозначены области колебательных движений, серым — ротационных

при  $x = 2\pi l$  и соответствуют состояниям равновесия типа центр, максимумы — при  $x = 2\pi l + \pi$  и отвечают седлам. Как видно из рис. 7.3, можно выделить три качественно разных типа движений и фазовых траекторий:

- колебательные движения внутри потенциальной ямы, замкнутые фазовые траектории;
- движения по сепаратрисам, идущим из седла в седло;
- ротационные движения, т.е. движения с прокручиванием.



Отметим, что в силу того, что фазовый портрет является периодическим по  $x$ , фазовые траектории часто изображают на поверхности цилиндра.

Запишем для уравнения (7.19) закон сохранения энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x = E, \quad (7.20)$$

где  $E = \text{const}$  — полная энергия. Колебательным движениям соответствуют значения  $-1 < E < 1$ , ротационным —  $E > 1$ , движение по сепаратрисе реализуется при  $E = 1$ . Обсудим эти случаи по отдельности.

### 7.5. Колебательные движения

Рассмотрим задачу со следующими начальными условиями:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (7.21)$$

Тогда  $E = -\cos x_0$ . Из уравнения (7.20) получим

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(\cos x - \cos x_0)} = \pm 2\sqrt{\sin^2(x_0/2) - \sin^2(x/2)}. \quad (7.22)$$

Знак «+» соответствует верхней половине фазовой траектории, знак «-» — нижней. Для определенности оставим в выражении (7.22) верхний знак. Введем обозначение

$$m = \sin(x_0/2), \quad (7.23)$$

так что  $E = 2m^2 - 1$ . Разделяя переменные в (7.22), получаем

$$dt = \frac{dx}{2\sqrt{m^2 - \sin^2(x/2)}}. \quad (7.24)$$

Сделаем в (7.24) замену  $\sin(x/2) = m\tau$ . Тогда

$$dx = \frac{2m d\tau}{\sqrt{1 - m^2\tau^2}}, \quad (7.25)$$

и уравнение (7.24) принимает вид

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - m^2\tau^2)}}. \quad (7.26)$$

Интегрируя соотношение (7.26), получаем

$$t = \int_0^{\tilde{z}} \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - m^2\tau^2)}} = F(z; m). \quad (7.27)$$

Здесь  $F(z; m)$  — специальная функция, называемая *неполным эллиптическим интегралом 1-го рода*,  $z = \sin(x/2)/m$ . Для дальнейшего изложения нам понадобится краткое знакомство с эллиптическими интегралами и эллиптическими функциями Якоби.

### 7.5.1. Математическое отступление: эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби

Функция

$$F(z; m) = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-m^2\tau^2)}} \quad (7.28)$$

или

$$F(\varphi; m) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}} \quad (7.29)$$

называется *неполным эллиптическим интегралом 1-го рода с модулем  $m$* . Переход от (7.28) к (7.29) осуществляется при помощи замены  $z = \sin \varphi$ ,  $\tau = \sin \psi$ . При  $0 \leq m^2 \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  функция  $F$  является вещественной. В дальнейшем будем предполагать эти условия выполненными.

Функция

$$K(m) = F\left(\frac{\pi}{2}; m\right) = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-m^2\tau^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}} \quad (7.30)$$

называется *полным эллиптическим интегралом 1-го рода*. График функции  $K(m)$  приведен на рис. 7.4.

Из соотношения (7.30) нетрудно видеть, что  $K(0) = \pi/2$ ,  $\lim_{m \rightarrow 1} K(m) = \infty$ .

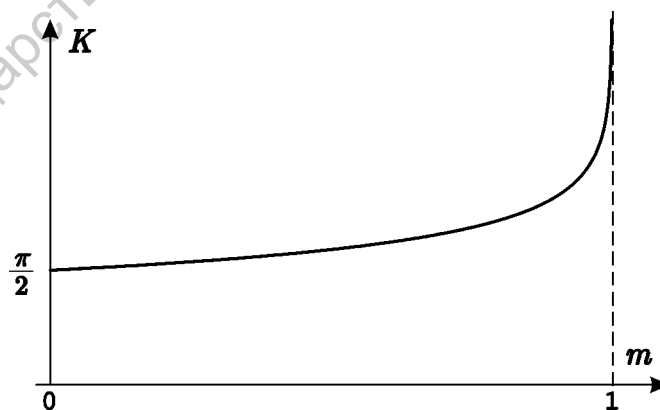


Рис. 7.4. График функции  $K(m)$

Пусть мы имеем соотношение

$$F(\varphi; m) = t. \quad (7.31)$$

Функция, обратная  $F(\varphi; m)$  называется амплитудой Якоби

$$\varphi = \text{am}(t; m). \quad (7.32)$$

Остальные функции Якоби определяются следующим образом:

$$\text{sn}(t; m) = \sin \text{am}(t; m) \text{ — эллиптический синус или синус амплитуды;}$$

$$\text{cn}(t; m) = \cos \text{am}(t; m) \text{ — эллиптический косинус или косинус амплитуды;}$$

$$\text{dn}(t; m) = \sqrt{1 - m^2 \text{sn}^2(t; m)} \text{ — дельта амплитуды.}$$

Важно отметить, что в двух частных случаях эллиптические функции выражаются через элементарные.

При  $m = 0$  имеем

$$\text{sn}(t; 0) = \sin t, \text{ cn}(t; 0) = \cos t, \text{ dn}(t; 0) = 1. \quad (7.33)$$

В другом предельном случае  $m = 1$  имеем

$$\text{sn}(t; 1) = \text{th } t, \text{ cn}(t; 1) = \text{dn}(t; 1) = \frac{1}{\text{ch } t} \quad (7.34)$$

При  $0 \leq m^2 \leq 1$  эллиптические функции Якоби периодичны с периодом  $4K(m)$ . Поэтому удобно построить их графики как функции аргумента  $u = t/K(m)$  (рис. 7.5).

### 7.5.2. Период колебаний маятника

Теперь нетрудно получить выражение для периода колебаний  $T$ . С учетом общего выражения для периода

$$T = \oint \frac{dx}{\sqrt{2(E - W(x))}}, \quad (7.35)$$

где интегрирование ведется по всей замкнутой фазовой траектории, используя выражение (7.27), находим, что

$$T = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} = 4K(m). \quad (7.36)$$

Напомним, что модуль эллиптического интеграла  $m$  выражается через полную энергию колебаний

$$m^2 = \frac{E + 1}{2}. \quad (7.37)$$

Таким образом, период колебаний зависит от энергии, т.е. колебания маятника *неизохронны*. При  $E = -1$ , что соответствует дну потенциальной ямы, имеем  $m = 0$  и, следовательно,  $T = 2\pi$ , что совпадает со значением периода колебаний линейного ос-

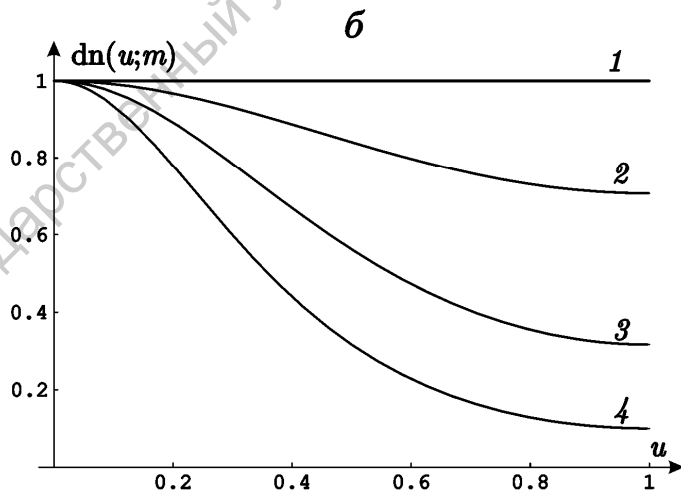
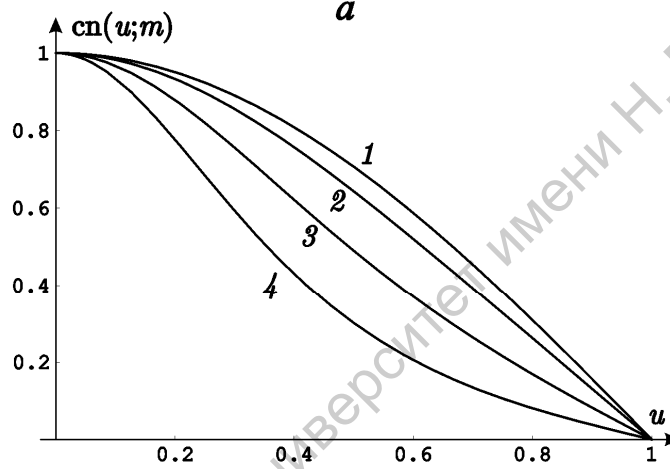
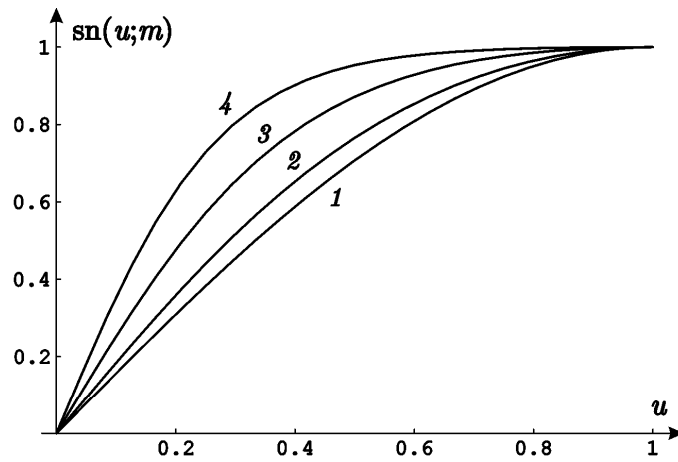


Рис. 7.5. Графики эллиптических функций Якоби. Цифры на рисунках соответствуют различным значениям  $m$ :  $m = 0.0$  (1);  $m = 0.5$  (2);  $m = 0.9$  (3);  $m = 0.95$  (4)

циллатора. По мере увеличения энергии период колебаний монотонно возрастает и при  $E \rightarrow 1$ , т.е. при приближении к сепаратрисе, стремится к бесконечности.

### 7.5.3. Точное решение для колебательных движений

Теперь получим точное решение. Из соотношения (7.27) с учетом определения эллиптических функций находим, что

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{am}(t; m), \\ z &= \sin \varphi = \operatorname{sn}(t; m).\end{aligned}\tag{7.38}$$

Поскольку  $z = m^{-1} \sin(x/2)$ , окончательно получаем, что

$$\begin{aligned}x &= \pm 2 \operatorname{arcsin}[m \operatorname{sn}(t; m)], \\ \dot{x} &= \pm 2m \operatorname{cn}(t; m).\end{aligned}\tag{7.39}$$

Здесь знаки «+» и «-» соответствуют верхней и нижней половинам фазовых траекторий.

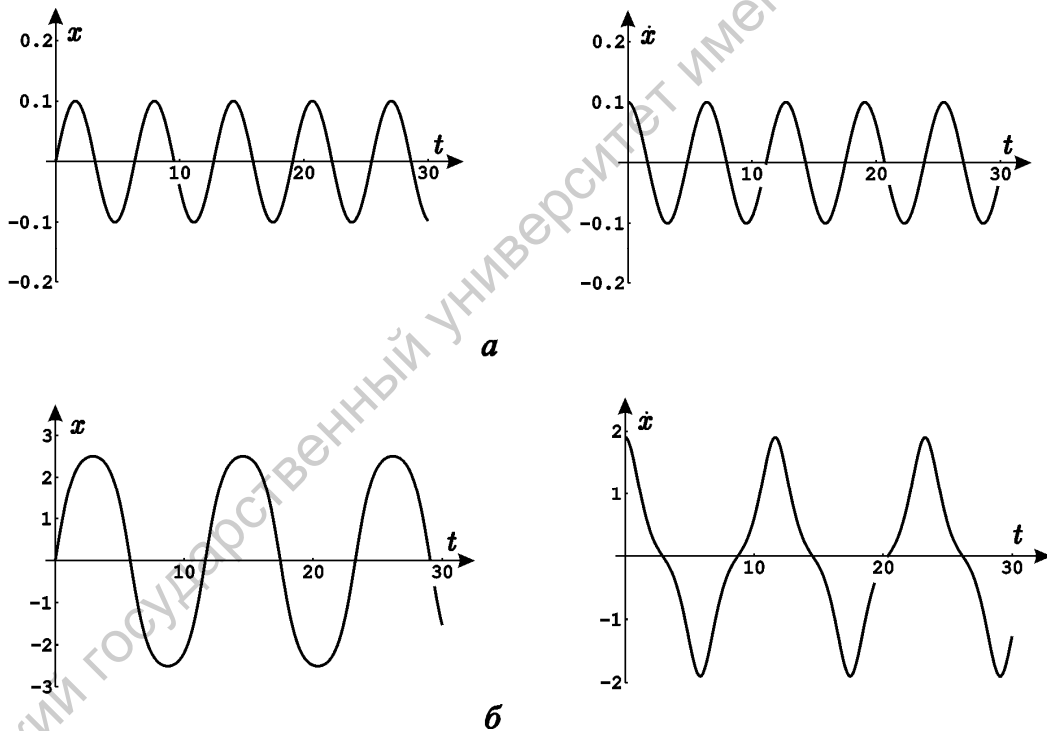


Рис. 7.6. Зависимости координаты и скорости осциллятора от времени: слабонелинейные колебания вблизи дна потенциальной ямы,  $E = -0.9$  (а); сильнонелинейные колебания в окрестности сепаратрисы,  $E = 0.9$  (б)

Зависимости  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  при движении вблизи дна потенциальной ямы ( $E \approx -1$ ) и вблизи сепаратрисы ( $E \approx 1$ ) приведены на рис. 7.6а и б, соответственно. В первом случае мы имеем слабонелинейные, близкие к гармоническим колебания. Во втором случае видно, что колебания существенно ангармонические. Таким образом, наглядно

проявляются основные свойства нелинейных колебаний: неизохронность и ангармоничность.

### 7.6. Движение по сепаратрисе

Движению по сепаратрисе, идущей из седла в седло, отвечает значение  $E = 1$ . Тогда интеграл энергии (7.20) дает

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = 1 + \cos x = 2 \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right). \quad (7.40)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим

$$\frac{dx}{2 \cos(x/2)} = \pm dt. \quad (7.41)$$

Полученное соотношение легко можно проинтегрировать:

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi + x}{4} \right) \right| = \pm (t - t_0), \quad (7.42)$$

где  $t_0$  — постоянная интегрирования. Выражая отсюда  $x$ , окончательно получаем

$$x = 4 \operatorname{arctg} \left( \exp \left[ \pm (t - t_0) \right] \right) - \pi, \quad (7.43)$$

$$\dot{x} = \pm \frac{2}{\operatorname{ch}(t - t_0)}.$$

Знаки «+» и «-» соответствуют двум различным сепаратрисам, лежащим в различных полуплоскостях. Соответствующие графики приведены на рис. 7.7.

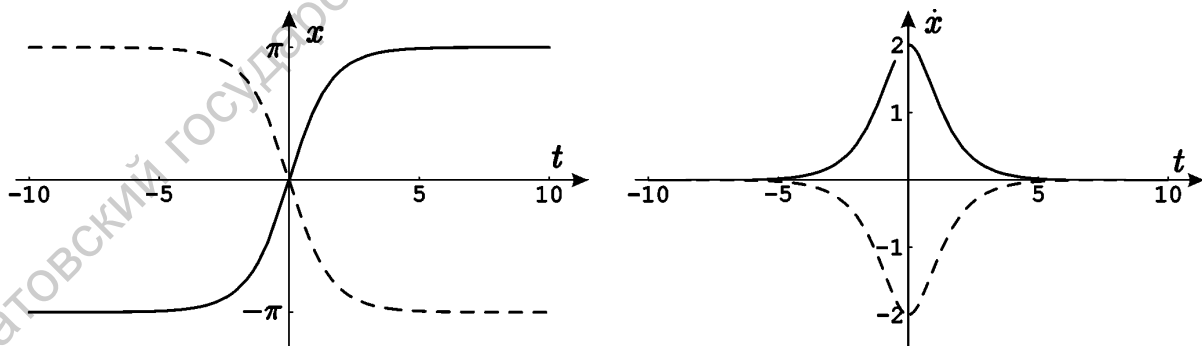


Рис. 7.7. Зависимости координаты и скорости от времени при движении осциллятора по сепаратрисе

С другой стороны, можно воспользоваться выражениями (7.39), полученными выше, устремив в них  $m \rightarrow 1$ . В этом случае эллиптические функции выражаются через гиперболические согласно формулам (7.34), и мы имеем

$$\begin{aligned} x &= \pm 2 \arcsin(\operatorname{th} t), \\ \dot{x} &= \pm \frac{2}{\operatorname{ch} t}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Нетрудно показать, что выражения (7.43) и (7.44) полностью эквивалентны, в чем мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

**Задача 7.2.** Математический маятник длины  $l$  отклонили на угол  $\alpha$  от верхнего положения равновесия и отпустили. Оцените период возникших колебаний. Для этого найдите закон изменения координаты от времени вблизи положения неустойчивого равновесия в линейном приближении, получите его асимптотику и «сшейте» полученное решение с законом изменения координаты от времени, который соответствует движению по сепаратрисе. Выполните оценку для маятника длиной  $l = 1$  м и начальным углом  $\alpha = 1^\circ$ .

*Решение.* Уравнение математического маятника вблизи верхнего положения неустойчивого равновесия имеет вид

$$\ddot{\alpha} - \frac{g}{l} \alpha = 0.$$

Решая его с начальными условиями  $\alpha = \alpha_0$  и  $\dot{\alpha} = 0$ , получим

$$\alpha = \alpha_0 \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

Достаточно быстро это решение выходит на асимптотику

$$\alpha \approx \frac{\alpha_0}{2} \exp \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

С другой стороны, для движения непосредственно по сепаратрисе имеем формулу (7.43), которой можно придать вид

$$\alpha = -\pi + 4 \operatorname{arctg} \left( C \exp \sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

При  $t \rightarrow \infty$  оно соответствует вертикальному положению маятника  $\alpha = 0$ . Пусть время  $t$  отрицательно, большое, но конечное. Тогда из предыдущего соотношения следует

$$\alpha \approx -\pi + 4C \exp \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

«Сшивая» его с полученным выше движением вблизи верхней точки, находим

$$C = \frac{\alpha_0}{8}.$$

Теперь можно легко определить время  $t$ , за которое маятник достигает нижней точки. Полагая  $\alpha = 0$ , получаем

$$0 = -\pi + 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{\alpha_0}{8} \exp \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \right),$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{8}{\alpha_0}.$$

Период движения будет в четыре раза больше

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{8}{\alpha_0}.$$

Для  $\alpha_0 = 1^\circ$  и  $l = 1$  находим (не забудьте перевести градусы в радианы), что период колебаний  $T$  примерно составляет 8 сек.

**Задача 7.3.** Математический маятник длины  $l = 1$  м находится в верхнем положении равновесия. Маятнику сообщили начальную скорость  $v_0 = 10^{-3}$  м/с. Оцените период колебаний. (Указание. Действуйте по аналогии с предыдущей задачей.)

**Задача 7.4.** Массивное колесо радиуса  $R = 30$  см массы  $M = 1$  кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр колеса. На ободе колеса укреплен груз массы  $m = 100$  г. Колесо находится в покое. Какую линейную скорость необходимо сообщить колесу, чтобы возникло движение, соответствующее сепаратрисе? Масса колеса сосредоточена в его ободе, трение отсутствует.

### 7.7. Ротационное движение

При ротационном движении зависимость  $x(t)$ , конечно, не является периодической. Однако скорость осциллятора остается периодической функцией времени, и для нее можно получить точное решение в эллиптических функциях. Поскольку в этом случае  $E > 1$ , величина  $m$ , определенная согласно формуле (7.37), также больше единицы. Формула (7.24) дает

$$dt = \frac{dx}{2m\sqrt{1 - m^{-2} \sin^2(x/2)}}. \quad (7.45)$$

Обозначая  $\varphi = x/2$ , после несложных вычислений находим решение

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{m} F\left(\varphi; \frac{1}{m}\right), \\ \varphi &= \operatorname{am}\left(mt; \frac{1}{m}\right), \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$\dot{x} = 2m\sqrt{1 - m^{-2} \sin^2 \varphi} = 2m \operatorname{dn}\left(mt; \frac{1}{m}\right).$$

Для периода колебаний будем иметь

$$T = \frac{4K(1/m)}{m}. \quad (7.47)$$



Период монотонно убывает с ростом энергии от бесконечности при  $m = 1$  до нуля при  $m \rightarrow \infty$ .

Типичные зависимости  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  при ротационном движении приведены на рис. 7.8. Для определенности построено одно из возможных решений, для которого  $\dot{x} > 0$ .

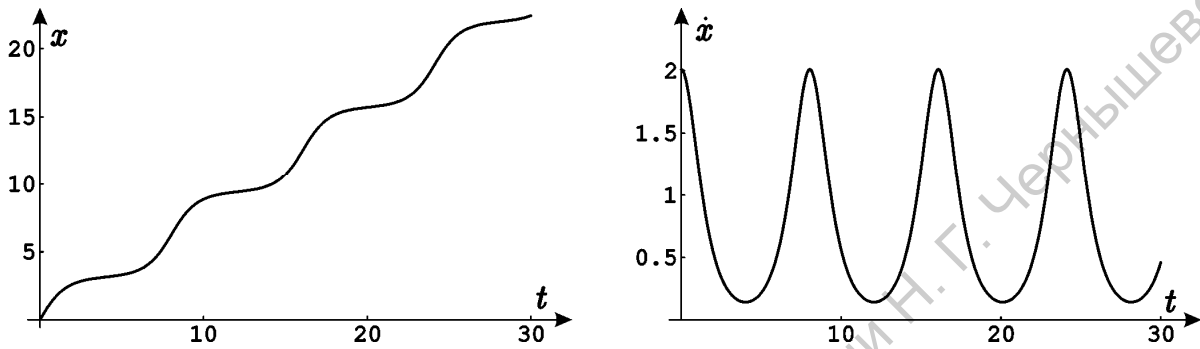


Рис. 7.8. Зависимости координаты и скорости маятника от времени при ротационном движении ( $E = 1.01$ )

### 7.8. Спектр колебаний маятника

Выражение для спектра колебаний маятника можно получить, используя известные формулы разложения эллиптических функций Якоби в ряды Фурье. Введем следующие обозначения:

$$m' = \sqrt{1-m^2}, \quad K' = K(m'), \quad q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right). \quad (7.48)$$

Величина  $m'$  носит название *дополнительного модуля эллиптического интеграла*. Тогда разложения функций  $\operatorname{dn}$  и  $\operatorname{cn}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(t) &= \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{\pi n t}{K} \right), \\ \operatorname{cn}(t) &= \frac{2\pi}{mK} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \cos \left[ (2n-1) \frac{\pi t}{2K} \right] \right). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Зависимость от  $m$  в этих формулах для краткости опущена.

Введем величину

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \begin{cases} \pi/2K(m), & m < 1 \\ \pi m/2K(1/m), & m > 1 \end{cases} \quad (7.50)$$

имеющую смысл основной частоты в спектре колебаний. Тогда, разлагая в ряды Фурье выражения (7.39) и (7.46) для  $\dot{x}$  с учетом (7.49), будем иметь

$$\dot{x} = 2m \operatorname{cn}(t; m) = 8\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \cos[(2n-1)\omega t] \right) \quad (7.51)$$

для колебательного движения и

$$\dot{x} = 2m \operatorname{dn}\left(mt; \frac{1}{m}\right) = 8\omega \left( \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos 2n\omega t \right] \right) \quad (7.52)$$

для ротационного.

Выражение (7.51) содержит только нечетные гармоники, что объясняется симметрией колебаний маятника относительно замены  $x \rightarrow -x$ . Выражение (7.52) содержит только четные гармоники. Правильнее сказать, что основная частота в спектре в этом случае равна  $2\omega$  (ср. рис. 7.6б и рис. 7.8).

Исследуем структуру выражения (7.51) подробнее. Введем величину  $N = 1/\omega$ . При слабонелинейных колебаниях вблизи дна потенциальной ямы имеем

$$m \rightarrow 0, \quad K \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \omega \rightarrow 1, \quad N \rightarrow 1. \quad (7.53)$$

Для определения  $K'$  используем приближенное выражение для полного эллиптического интеграла, когда его модуль стремится к единице

$$K(m) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-m^2}} \quad \text{при } m \rightarrow 1. \quad (7.54)$$

Тогда при  $m \rightarrow 0$  можно записать, что  $K' \approx \ln(4/m)$  и, следовательно,

$$q \approx \exp[-2 \ln(4/m)] = \frac{m^2}{16}. \quad (7.55)$$

Таким образом, амплитуда гармоники с номером  $n$  равна

$$A_n = \frac{8\omega q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \approx 8 \left( \frac{m}{4} \right)^{2n-1}. \quad (7.56)$$

Так как  $m \ll 1$ , амплитуды спектральных составляющих быстро убывают с ростом  $n$ , следовательно, колебания являются квазигармоническими.

Теперь рассмотрим движение вблизи сепаратрисы. В этом случае  $m \rightarrow 1$  и для  $K(m)$  следует использовать соотношение (7.54). Учитывая, что  $E = 2m^2 - 1$ , его можно записать в виде

$$K \approx \ln \left( \frac{4}{\sqrt{(1-E)/2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{32}{1-E} \right). \quad (7.57)$$

Тогда для величины  $N$  имеем

$$N \approx \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{32}{1-E} \right), \quad (7.58)$$

и, следовательно,

$$q \approx \exp \left( -\frac{\pi}{N} \right). \quad (7.59)$$

Выражение для амплитуды Фурье-гармоники можно переписать в виде

$$A_n \approx \frac{8\omega (\exp[-\pi/N])^{n-1/2}}{1 + (\exp[-\pi/N])^{2n-1}} = \frac{4\omega}{\operatorname{ch} \left[ \frac{\pi(n-1/2)}{N} \right]}. \quad (7.60)$$

При  $n \ll N$  амплитуды гармоник примерно одинаковы:  $A_n \approx 4\omega$ . При  $n > N$  амплитуды гармоник экспоненциально убывают с ростом  $n$ . Таким образом, величину  $N$  можно интерпретировать как эффективное число гармоник в спектре. Отметим, что частота гармоник с номером  $N$  всегда равна единице. Что касается основной частоты  $\omega$ , то она, очевидно, стремится к нулю при  $m \rightarrow 1$ . Действительно, на сепаратрисе движение не является периодическим, поэтому спектр должен быть сплошным.

**Задача 7.5.** Математический маятник колеблется с угловой амплитудой  $30^\circ$ . Оцените амплитуды спектральных составляющих на основной частоте  $\omega$  и частоте  $3\omega$  и их относительную величину.

**Задача 7.6.** Математический маятник колеблется с угловой амплитудой  $170^\circ$ . Оцените число гармоник в его спектре.

**Задача 7.7.** Получите формулу (7.60) следующим приближенным методом. Считайте, что закон изменения скорости от времени дается рядом последовательных импульсов (7.44), отвечающих движению по сепаратрисе, и отстоящих друг от друга на период колебания  $T$ . Разложите далее получившийся закон изменения скорости от времени в ряд Фурье.

**Задача 7.8.** Получите спектр ротационных движений вблизи сепаратрисы, используя метод, изложенный в предыдущей задаче.

*Решение.* Движение по сепаратрисе описывается формулами

$$x = -\pi + 4 \operatorname{arctg}(e^t), \quad v = \dot{x} = \frac{2}{\operatorname{ch}(t)}.$$

Рассмотрим ротационное движение вблизи сепаратрисы. Будем считать, что зависимость скорости от времени имеет вид аналогичных импульсов, отстоящих на период колебаний  $T$ :

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\operatorname{ch}(t-nT)}.$$

Представим скорость в виде ряда Фурье

$$v(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m e^{-im\Omega t},$$

где  $\Omega = 2\pi/T$  и  $v_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \exp(im\Omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{ch}^{-1}(t) \exp(im\Omega t) dt$ . Вычислим коэффициенты  $v_m$ .

Учтем, что подынтегральное выражение содержит быстро убывающую функцию, а период  $T$  большая величина, т.к. рассматривается движение, близкое к сепаратрисе. Тогда можно приближенно заменить пределы интегрирования на бесконечные:

$$v_m \approx \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\Omega t}}{\operatorname{ch}(t)} dt.$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\operatorname{ch}(t)} dt = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\omega/2)}$$

можно вычислить методом вычетов, смещая путь интегрирования в верхнюю полуплоскость. Окончательно получаем

$$v_m = \frac{\Omega}{\operatorname{ch}(m\pi\Omega/2)}.$$

**Задача 7.9.** Проведите следующее компьютерное исследование уравнения математического маятника  $\ddot{x} + \sin x = 0$ .

- Создайте анимационную программу, демонстрирующую движение маятника.
- Постройте зависимость от времени координаты и скорости. Пронаблюдайте колебания с малой амплитудой и движение вблизи сепаратрисы.
- Постройте график зависимости периода колебаний от амплитуды. Для этого используйте точное выражение через эллиптический интеграл, либо метод Эно, в рамках которого исходное уравнение численно решается до начала повторений. Постройте соответствующий график и сравните его с выражением в приближении слабой нелинейности.
- Постройте Фурье-спектр скорости колебаний и наблюдайте его эволюцию с ростом амплитуды: от малых колебаний до движения вблизи сепаратрисы. В этих двух предельных случаях сравните численный результат с соответствующим аналитическим решением.
- Постройте фазовые портреты консервативного и диссипативного осцилляторов. Пронаблюдайте их эволюцию с ростом параметра диссипации.

## Лекция 8

## Универсальные модели консервативных колебаний вблизи минимума гладкого потенциала: осцилляторы с квадратичной и кубической нелинейностью

Рассматривая нелинейный осциллятор

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (8.1)$$

мы вправе выбрать начало отсчета координаты  $x$  из соображений удобства. Пусть оно расположено в точке, где функция  $f(x)$  обращается в нуль, а потенциал  $V(x) = \int f(x) dx$  имеет минимум. Считая функцию гладкой, запишем разложение Тейлора:

$$f(x) = V'(x) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots \quad (8.2)$$

Поскольку в начале координат, по предположению, находится минимум потенциала, мы должны иметь  $V''(0) = f'(0) > 0$ . Поэтому константу  $f'(0)$  имеет смысл обозначить как квадрат некоторого параметра, а именно,  $f'(0) = \omega_0^2$ . Кроме того, введем обозначения  $f''(0)/2 = \alpha$  и  $f'''(0)/6 = \beta$ ; эти величины могут быть положительными, отрицательными или нулевыми.

Если учесть в разложении только первый член, приходим к уравнению *линейного гармонического осциллятора*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8.3)$$

Как известно, это универсальная модель для описания в линейном приближении консервативных колебаний малой амплитуды вблизи потенциального минимума. Происхождение универсальности обусловлено просто-напросто тем, что разложение гладкой функции  $f(x)$  в ряд Тейлора вблизи нуля в типичном случае начинается с члена первого порядка по  $x$ . В разложении потенциальной функции вблизи минимума первым отличным от константы является при этом член второго порядка.

При учете в разложении Тейлора двух членов получаем уравнение *осциллятора с квадратичной нелинейностью*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0, \quad (8.4)$$

потенциальная функция которого содержит члены второй и третьей степени:  
 $V(x) = \omega_0^2 x^2 / 2 + \alpha x^3 / 3$ .

Ясно, что осциллятор с квадратичной нелинейностью — это универсальная модель, применимая для описания консервативных колебаний в такой ситуации, когда амплитуда колебаний в потенциальной яме не столь мала, чтобы можно было ограничиться линейным приближением в разложении функции  $f(x)$ , но и не столь велика, чтобы стали существенными последующие члены разложения Тейлора. В таких случаях мы будем говорить о *слабой нелинейности*.

Рассмотренная модель, однако, заведомо непригодна в одном широко распространенном случае, когда потенциал симметричный. Если  $V(-x) = V(x)$  и, соответственно,  $f(-x) = -f(x)$ , то коэффициент  $\alpha$  обращается в нуль. Поэтому для учета влияния нелинейных эффектов необходимо принять во внимание следующий, кубический член. Мы приходим к другой универсальной модели, *осциллятору с кубической нелинейностью*:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (8.5)$$

Его потенциальная функция содержит члены второй и четвертой степени:  
 $V(x) = \omega_0^2 x^2 / 2 + \beta x^4 / 4$  и удовлетворяет постулированному условию симметрии. В литературе осциллятор с кубической нелинейностью называют также *осциллятором Дуффинга*.

**Задача 8.1.** Считая, что в описанных ниже системах нелинейность является слабой, представьте их уравнения движения в форме осциллятора с нелинейностью степени  $n$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x + \mu x^n) = 0$$

Определите в каждом случае константы  $\mu$  и  $n$ .

- Массивное колесо с моментом инерции  $I$  может вращаться вокруг оси, проходящей через центр колеса (рис. 8.1). На ободе колеса укреплен груз массы  $m$  на расстоянии  $R$  от оси.

- Сосуд объемом  $2V_0$  разделен подвижным поршнем площади  $S$  на две равные части (рис. 8.2). Начальное давление газа  $p_0$ . При колебаниях поршня процесс в газе считать адиабатическим. Масса поршня равна  $m$ .

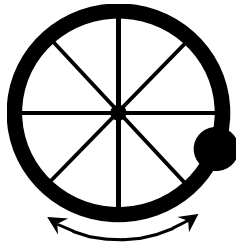


Рис. 8.1

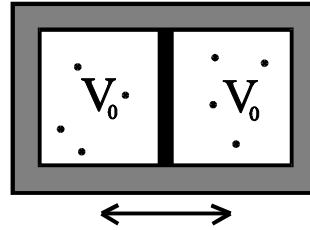


Рис. 8.2

- Резиновый жгут натянут с силой  $F$ . Посередине жгута прикреплен шарик массы  $m$  (рис. 8.3). Шарик может совершать лишь поперечные колебания. Жгут подчиняется закону Гука, его длина в ненапрянутом состоянии  $l_0$ , коэффициент жесткости  $k$ . Колебания происходят в невесомости.

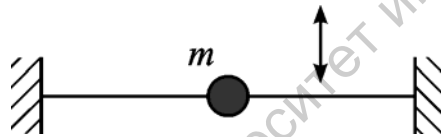


Рис. 8.3

**Задача 8.2.** Шарик массы  $m$  подвешен в поле тяжести на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. Получите уравнение, описывающее колебания шарика около положения равновесия и покажите, что оно содержит как кубическую, так и квадратичную нелинейности. Выясните условия, при которых свойства пружины линейны и колебания также линейны; свойства пружины нелинейны, а колебания линейны; колебания нелинейны.

### 8.1. Приведение уравнений к безразмерному виду

Пусть мы имеем осциллятор с квадратичной нелинейностью, описываемый уравнением (8.4), и пусть для определенности нас интересует вопрос о поведении решений, отвечающих запуску в начальный момент  $t = 0$  из заданной точки  $x_0$  с нулевой скоростью:

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = 0. \quad (8.6)$$

Глядя на уравнение (8.4), можно было бы думать, что для получения исчерпывающего представления о динамике, например, с привлечением компьютера, потребуются исследовать зависимость решений от трех параметров  $\omega_0$ ,  $\alpha$ ,  $x_0$ , т.е. предпринять весьма

громоздкое исследование с кропотливым перебором огромного числа вариантов. Оказывается, можно радикально упростить как само исследование, так и последующий анализ полученных данных, если использовать простой, но чрезвычайно плодотворный и общий прием, о котором принято говорить как о *приведении уравнений к безразмерному виду*.

Введем новые переменные,  $X$  и  $\tau$ , которые отличаются от присутствующих в уравнении (8.4) координаты и времени только масштабом:

$$x = AX, \quad t = B\tau, \quad (8.7)$$

где  $A$  и  $B$  — пока неопределенные постоянные. Подстановка в уравнение (8.4) и в начальное условие (8.6) тогда дает

$$\frac{A}{B^2} \frac{d^2 X}{d\tau^2} + A\omega_0^2 X + \alpha A^2 X^2 = 0, \quad AX|_{\tau=0} = x_0, \quad A\dot{X}|_{\tau=0} = 0 \quad (8.8)$$

или

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + \omega_0^2 B^2 X + \alpha AB^2 X^2 = 0, \quad X|_{\tau=0} = x_0/A, \quad \dot{X}|_{\tau=0} = 0. \quad (8.9)$$

Теперь подберем постоянные  $A$  и  $B$  так, чтобы по возможности сделать присутствующие в уравнении коэффициенты равными единице. Поскольку в нашем конкретном случае этих постоянных две, можно наложить два условия, а именно,

$$\omega_0^2 B^2 = 1, \quad \alpha AB^2 = 1. \quad (8.10)$$

Отсюда находим

$$B = 1/\omega_0, \quad A = \omega_0^2/\alpha. \quad (8.11)$$

Окончательно можно переписать уравнение с начальными условиями в виде

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X + X^2 = 0, \quad X|_{\tau=0} = x_0\alpha/\omega_0^2, \quad \dot{X}|_{\tau=0} = 0. \quad (8.12)$$

Новая постановка задачи содержит всего лишь один безразмерный параметр  $X_0 = x_0\alpha/\omega_0^2$ , представляющий собой комбинацию, составленную из параметров исходной задачи. Теперь достаточно исследовать поведение решения уравнения (8.4) в зависимости от этого единственного параметра. Если имеем две системы, характеризуемые разными значениями параметров  $\omega_0$ ,  $\alpha$ ,  $x_0$ , но одинаковым  $X_0$ , то их динами-



ка будет подобной в том смысле, что все величины, относящиеся к одной системе, можно получить из величин, относящихся к другой, надлежащим пересчетом масштаба. Параметр  $X_0$ , следовательно, является для нашей задачи *критерием подобия*.

Эта идея служит основой *физического моделирования*. Для того, чтобы выяснить детали поведения системы, описываемой определенными уравнениями, но сложной, дорогой или недоступной для прямого экспериментирования, мы можем провести исследование специально изготовленной модели, отличающейся, например, размерами, весом, использованными материалами, и т.д. Если критерии подобия для системы и модели совпадают, то должны соответствовать и детали динамики.

Для осциллятора с кубической нелинейностью нетрудно проделать аналогичные преобразования. Подставляя (8.7) в уравнение (8.5), получим

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X + \frac{\beta A^2}{\omega_0^2} X^3 = 0. \quad (8.13)$$

Подбирая  $A$ , мы можем добиться обращения коэффициента перед кубическим членом в единицу, если  $\beta > 0$  и в минус единицу, если  $\beta < 0$ . Таким образом, для осциллятора с кубической нелинейностью мы опять-таки получаем уравнение, не содержащее свободных параметров, но при этом возникает две возможности, требующих отдельного рассмотрения.

Первый случай отвечает тому, что при смещении от положения равновесия нелинейность способствует *увеличению* возвращающей силы. В механической интерпретации это осциллятор с пружиной, делающейся более жесткой при большей деформации («жесткая пружина»). Уравнение записывается в виде

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X + X^3 = 0, \quad (8.14)$$

а потенциальная функция  $V(x) = X^2/2 + X^4/4$  имеет единственный минимум в начале координат.

Второй случай имеет место, когда при смещении от равновесия нелинейность способствует *уменьшению* возвращающей силы. В механической интерпретации это осциллятор с пружиной, делающейся более мягкой с ростом деформации («мягкая пружина»). Уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X - X^3 = 0, \quad (8.15)$$

а потенциальная функция  $V(x) = X^2/2 - X^4/4$  характеризуется наличием минимума в начале координат и двух симметрично расположенных максимумов по сторонам.

В силу универсальности введенных моделей, стоит обсудить их более подробно по отдельности.

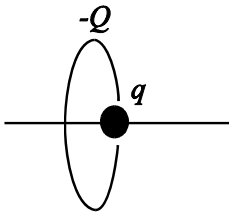


Рис. 8.4

**Задача 8.3.** Шарик массы  $m$ , несущий положительный заряд  $q$ , может без трения скользить по непроводящей спице (рис.8.4). Спица проходит через центр неподвижного кольца перпендикулярно его плоскости. Кольцо несет отрицательный заряд  $-Q$ . Радиус кольца равен  $R$ . Представьте эту систему в виде модели нелинейного осциллятора с кубической нелинейностью. Какие особенности динамики системы такая модель передает верно, а какие нет?

**Задача 8.4.** Какими универсальными моделями теории колебаний можно пользоваться для описания систем из задачи 8.1?

**Задача 8.5.** Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Ленарда–Джонса (см. задачу 5.4). Покажите, что ее малые колебания описываются уравнением осциллятора с квадратичной нелинейностью.

## 8.2. Осциллятор с квадратичной нелинейностью

Построим фазовый портрет осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + x + x^2 = 0. \quad (8.16)$$

В дальнейшем мы будем без дополнительных оговорок пользоваться уравнением именно в этой форме. График зависимости силы от смещения имеет вид параболы (рис.8.5а), а график потенциальной функции  $V(x) = x^2/2 + x^3/3$  — вид кубической параболы (рис. 8.5б). В начале координат имеется локальный минимум функции  $V(x)$ , где будет располагаться особая точка типа центр. При  $x = -1$  потенциальная функция имеет максимум, и здесь находится особая точка седло (рис. 8.5в).

Сепаратриса делит фазовую плоскость на три области. Соответственно, имеется три разных топологических типа траекторий.

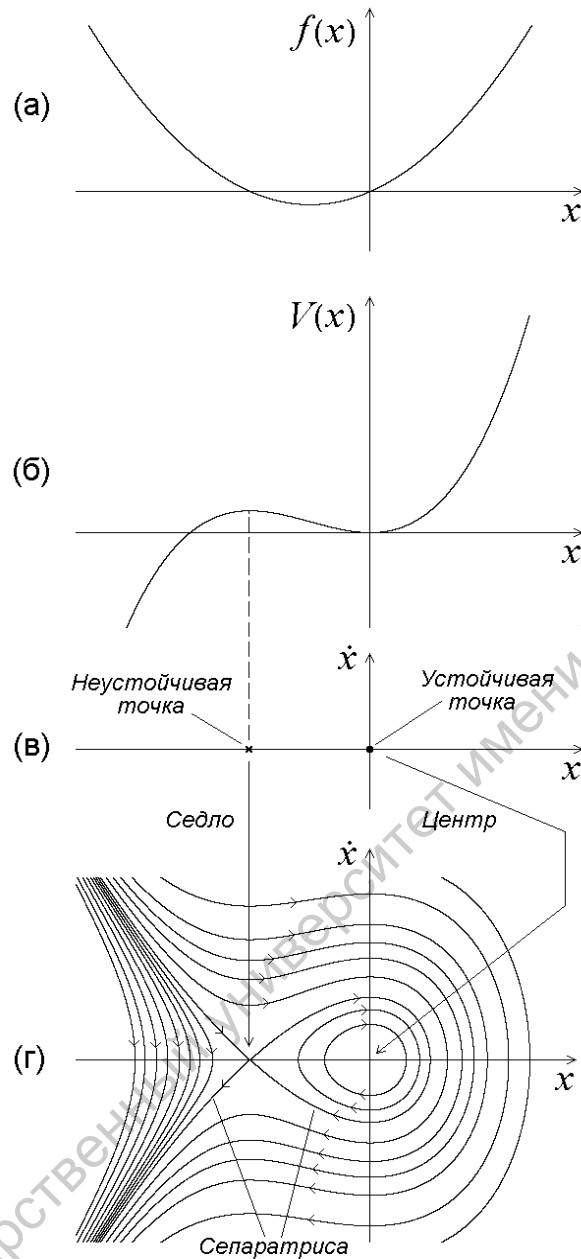


Рис. 8.5. Зависимость силы от координаты (а), потенциальная функция (б), расположение особых точек (в) и фазовый портрет (г) для осциллятора с квадратичной нелинейностью

1) Замкнутые траектории, располагающиеся внутри образованной сепаратрисой петли, охватывающей центр. Они соответствуют финитным движениям – колебаниям вблизи локального минимума потенциала (рис. 8.6а).

2) Незамкнутые траектории, расположенные слева от сепаратрисы. Они отвечают движениям по левому склону потенциального рельефа с уходом на минус бесконечность на больших временах (рис. 8.6б).

3) Незамкнутые траектории, расположенные справа от сепаратрисы. Им соответствуют движения, которые захватывают, как левый склон потенциального рельефа, так и область ямы, но энергия слишком велика, чтобы произошел захват в области минимума потенциала. На больших временах происходит также уход на минус бесконечность (рис. 8.6в).

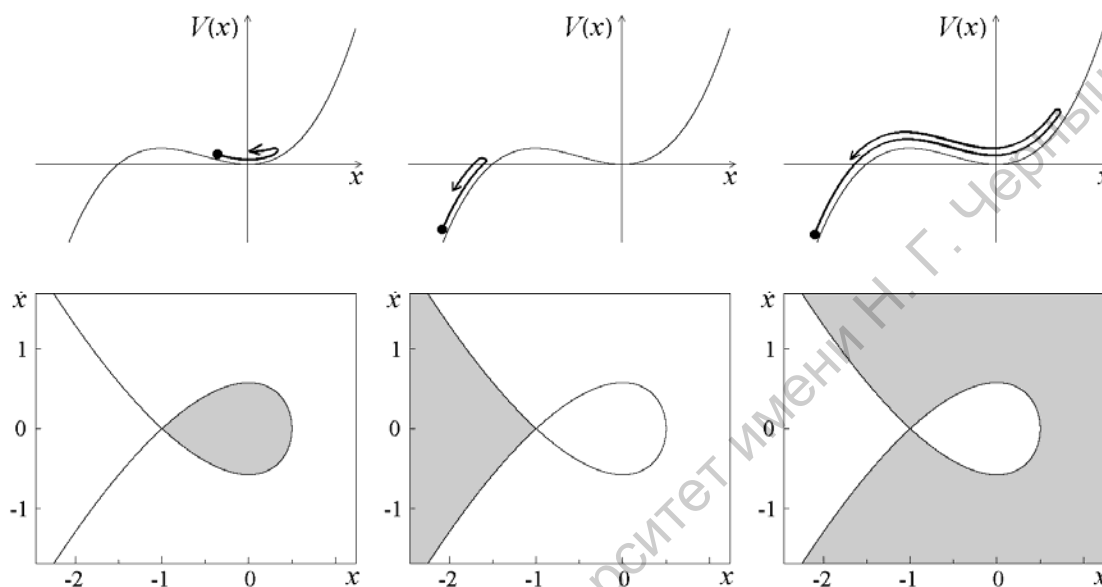


Рис. 8.6. Различные типы движений для осциллятора с квадратичной нелинейностью и соответствующие области на фазовой плоскости, занимаемые траекториями определенного топологического типа

Можно получить точные аналитические решения уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью в эллиптических функциях (лекция 7). Если умножить обе части уравнения (8.16) на  $\dot{x}$ , то можно один раз проинтегрировать полученное выражение и получить первый интеграл (интеграл энергии)

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = E, \quad (8.17)$$

где  $E$  — полная энергия. Финитным движениям внутри потенциальной ямы соответствуют значения  $0 < E < 1/6$ . Выражая  $\dot{x}$  из (8.17) и разделяя переменные, получаем

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}. \quad (8.18)$$

Подкоренное выражение в правой части (8.18) представляет собой полином с тремя нулями, которые обозначим как  $x_0$ ,  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 8.7), причем колебания происходят в

области  $x_1 \leq x \leq x_0$ . Начальное условие поставим в виде (8.6). Тогда  $E = x_0^2/2 + x_0^3/3$ .

После не представляющих принципиальной сложности вычислений можно найти, что

$$x_{1,2} = \frac{-(2x_0 + 3) \pm \sqrt{(2x_0 + 3)^2 - 8x_0(2x_0 + 3)}}{4} \quad (8.19)$$

и привести выражение (8.18) к виду

$$dt = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x_0 - x)(x - x_1)(x - x_2)}}. \quad (8.20)$$

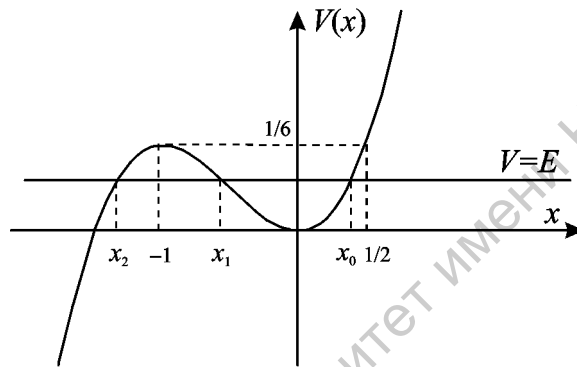


Рис. 8.7. К решению уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью (8.16)

Сделаем замену

$$x(t) = x_1 + a \cos^2 \varphi(t), \quad (8.21)$$

где  $a = x_0 - x_1$ . При изменении  $\varphi$  от 0 до  $\pi/2$  переменная  $x$  изменяется от  $x_0$  до  $x_1$ .

Нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} x_0 - x &= a \sin^2 \varphi, \\ x - x_1 &= a \cos^2 \varphi, \\ x - x_2 &= x_0 - x_2 - a \sin^2 \varphi, \\ dx &= -a \sin 2\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (8.22)$$

С учетом этих соотношений уравнение (8.20) принимает вид

$$dt = \mp \sqrt{\frac{6}{x_0 - x_2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (8.23)$$

где

$$m^2 = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2}. \quad (8.24)$$

Очевидно, что всегда выполняется условие  $0 \leq m^2 \leq 1$ .

Используя введенные в лекции 7 эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби, нетрудно проинтегрировать уравнение (8.23) и найти выражение для периода колебаний

$$T = 2 \sqrt{\frac{6}{x_0 - x_2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} = 2 \sqrt{\frac{6}{x_0 - x_2}} K(m), \quad (8.25)$$

а также зависимости  $\varphi(t)$  и  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \operatorname{am} \left( \sqrt{\frac{x_0 - x_2}{6}} t, m \right), \\ x(t) &= x_1 + a \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{x_0 - x_2}{6}} t, m \right). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Для слабонелинейных колебаний вблизи дна потенциальной ямы можно приближенно считать, что  $x_0 \approx a/2$ ,  $x_1 \approx -a/2$ ,  $x_2 \approx -3/2$ ,  $a \ll 1$  (см. рис. 8.7). Следовательно, будем иметь  $m \ll 1$ ,  $K(m) \approx \pi/2$ . Тогда из формул (8.25), (8.26) видно, что период колебаний близок к периоду линейного осциллятора,  $T \approx 2\pi$ , и

$$x \approx x_1 + a \cos^2(t/2) = \frac{a}{2} \cos t. \quad (8.27)$$

Здесь мы учли, что при малых значениях модуля эллиптические функции приближенно переходят в тригонометрические (соотношения (7.33)).

При  $m$  близком к единице выражения (8.26) описывают сильно нелинейные периодические колебания, называемые иногда *кноидальными* (поскольку решение выражается через эллиптический косинус Якоби — кноиду).

Наконец, для движения по сепаратрисе имеем  $x_{1,2} = -1$ ,  $x_0 = 1/2$ ,  $m = 1$  (см. рис. 8.7). В этом случае эллиптические функции выражаются через гиперболические (формулы (7.34)) и соотношение (8.26) дает

$$x = -1 + \frac{3}{2 \operatorname{ch}^2(t/2)}. \quad (8.28)$$

Характерные осциллограммы колебаний (т.е. зависимости  $x(t)$ ) в различных случаях приведены на рис. 8.8.

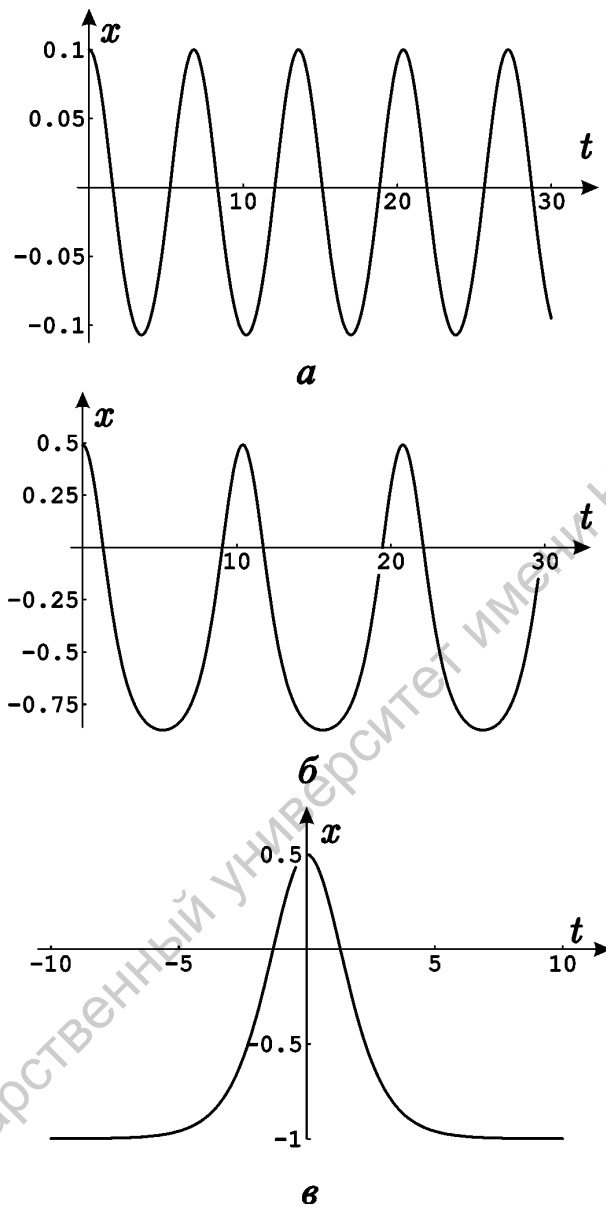


Рис. 8.8. Характерные осциллограммы колебаний осциллятора с квадратичной нелинейностью: квазигармонические колебания (а); кноидальные колебания (б); движение по сепаратрисе (в)

**Задача 8.6.** Получите решение (8.28) для движения по сепаратрисе непосредственно из исходного уравнения (8.16), не переходя к эллиптическим функциям Якоби. Учтите, что при этом  $E = 1/6$ .

### 8.3. Осциллятор с кубической нелинейностью (осциллятор Дуффинга)

Перейдем к осциллятору с кубической нелинейностью. Как было указано, следует различать два случая, которые в механической интерпретации соответствуют «жесткой» и «мягкой» пружине.

В первом случае записываем уравнение

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0. \quad (8.29)$$

График зависимости силы от смещения имеет вид кубической параболы (рис. 8.9а), а график потенциальной функции  $V(x) = x^2/2 + x^4/4$  — вид симметричной кривой с

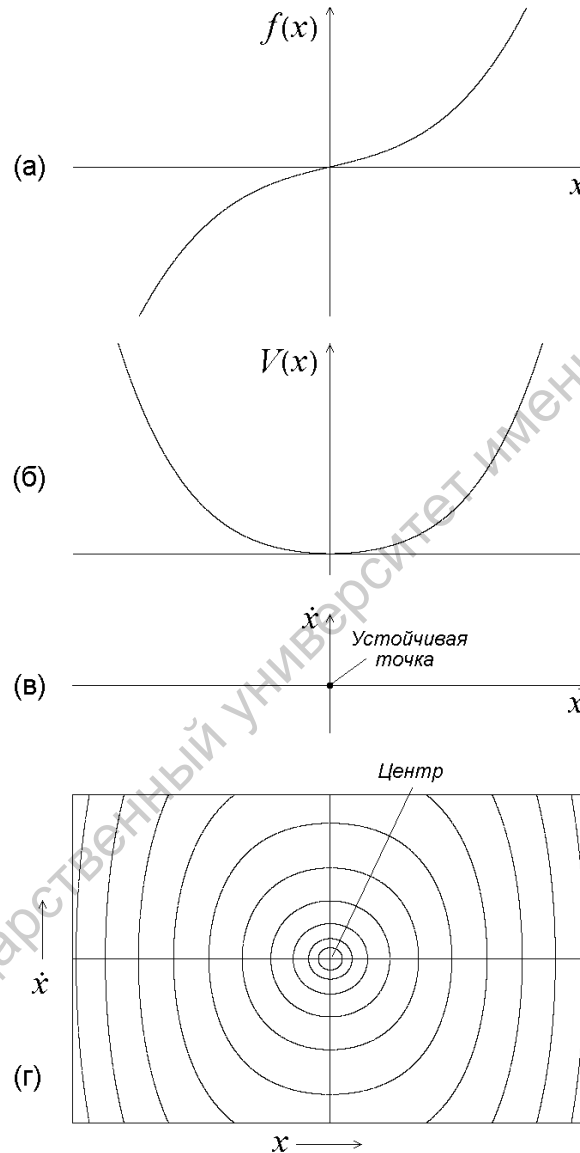


Рис. 8.9. Зависимость силы от координаты (а), потенциальная функция (б), расположение особых точек (в) и фазовый портрет (г) для осциллятора с кубической нелинейностью («жесткая пружина»)

единственным минимумом в начале координат (рис. 8.9б). Там будет располагаться особая точка типа центр, других особых точек нет (рис. 8.9в). На фазовом портрете (рис. 8.9г) имеется единственный тип траекторий – замкнутые орбиты, охватывающие центр и соответствующие периодическим колебаниям.



Выберем начальные условия в виде (8.6), так что  $E = x_0^2/2 + x_0^4/4$ . Тогда из закона сохранения энергии будем иметь

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - V(x))} = \pm \sqrt{(x_0^2 - x^2) \left(1 + \frac{x_0^2 + x^2}{2}\right)}. \quad (8.30)$$

Осуществляя замену

$$x(t) = x_0 \cos \varphi(t) \quad (8.31)$$

и разделяя в (8.30) переменные, приведем это соотношение к виду

$$dt = \mp \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (8.32)$$

где

$$m^2 = \frac{x_0^2}{2(1+x_0^2)}. \quad (8.33)$$

Колебания, очевидно, происходят в пределах  $-x_0 \leq x \leq x_0$ , при этом  $\varphi$  изменяется от нуля до  $2\pi$ . Интегрируя выражение (8.32) по замкнутой фазовой траектории, находим период колебаний

$$T = \frac{4}{\sqrt{1+x_0^2}} K(m). \quad (8.34)$$

При  $x_0 \ll 1$ , что соответствует движению вблизи дна потенциальной ямы, имеем  $T \approx 4K(0) = 2\pi$ . При  $x_0 \gg 1$  модуль эллиптического интеграла стремится к  $1/\sqrt{2}$  и из выражения (8.34) можно получить

$$T \approx \frac{4}{x_0} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (8.35)$$

Таким образом, с ростом амплитуды период колебаний стремится к нулю как  $x_0^{-1}$ . Нетрудно также найти зависимость  $x(t)$ . Из соотношения (8.32) получаем, что

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \operatorname{am}\left(\sqrt{1+x_0^2}t; m\right), \\ x(t) &= x_0 \operatorname{cn}\left(\sqrt{1+x_0^2}t; m\right).\end{aligned}\tag{8.36}$$

Перейдем теперь ко второму случаю — осциллятору с «мягкой» пружиной

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0.\tag{8.37}$$

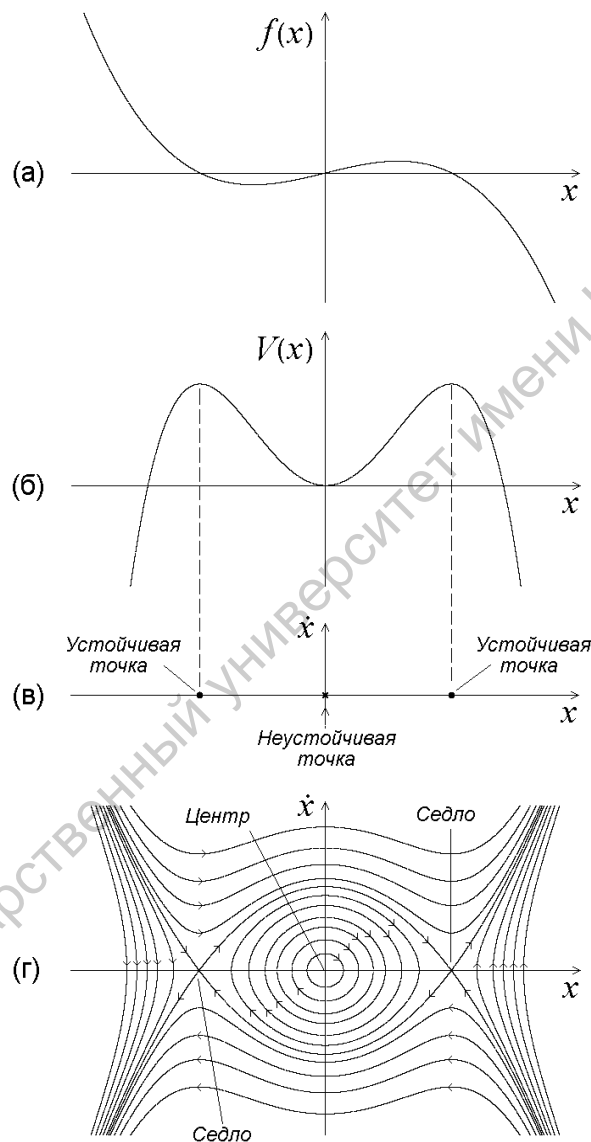


Рис. 8.10. Зависимость силы от координаты (а), потенциальная функция (б), расположение особых точек (в) и фазовый портрет (г) для осциллятора с кубической нелинейностью (случай «мягкой пружины»)

График зависимости силы от смещения имеет вид кубической параболы с тремя нулями (рис. 8.10а), а график потенциальной функции  $V(x) = x^2/2 - x^4/4$  – два симметрично расположенных максимума, между которыми имеется локальный минимум в начале

координат (рис. 8.10б). В точках максимума будут находиться особые точки типа седло, а между ними, в точке минимума – особая точка типа центр (рис. 8.10в). Как и для осциллятора с квадратичной нелинейностью, на фазовой плоскости (рис. 8.10в) можно выделить различные типы траекторий. Замкнутые траектории соответствуют периодическим колебаниям внутри потенциальной ямы. При этом полная энергия может принимать значения в диапазоне  $0 \leq E \leq 1/4$ . Область колебательных движений ограничена сепаратрисами, идущими из седла в седло. Незамкнутые фазовые траектории соответствуют инфинитному движению, когда происходит уход на бесконечность. Будем далее интересоваться только колебательными движениями.

Из закона сохранения энергии вместо (8.30) получаем уравнение

$$\dot{x} = \pm \sqrt{(x_0^2 - x^2) \left(1 - \frac{x_0^2 + x^2}{2}\right)}. \quad (8.38)$$

Осуществляя замену

$$x(t) = x_0 \sin \varphi(t), \quad (8.39)$$

после несложных преобразований получим

$$dt = \mp \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (8.40)$$

где

$$m^2 = \frac{x_0^2}{2-x_0^2}. \quad (8.41)$$

Из уравнения (8.40) можно найти период колебаний

$$T = \frac{4}{\sqrt{1-x_0^2/2}} K(m). \quad (8.42)$$

В данном случае с ростом амплитуды колебаний период увеличивается. При  $x_0 = 1$ , что соответствует движению по сепаратрисе, имеем  $m^2 = 1$ , и, как следует из формулы (8.42), период колебаний стремится к бесконечности.

Зависимость  $x(t)$  имеет вид

$$x = x_0 \operatorname{sn}\left(\sqrt{1-x_0^2/2} t; m\right). \quad (8.43)$$

По-прежнему нетрудно убедиться, что при  $x_0 \ll 1$  это выражение описывает слабонелинейные квазигармонические колебания. При  $x_0 = 1$  с учетом формул (7.34) получаем выражение, описывающее движение по сепаратрисе

$$x = \pm \operatorname{th}\left(t/\sqrt{2}\right). \quad (8.43a)$$

Здесь мы учли два знака, соответствующие двум сепаратрисам, идущим из седла в седло.

**Задача 8.7.** Осциллятор с кубической нелинейностью, описываемый уравнением (8.37), совершает колебательное движение вблизи сепаратрисы. Оцените период колебаний. Начальное значение координаты  $x_0$ , а начальная скорость равна нулю. Решение проведите по аналогии с задачей 7.2.

**Задача 8.8.** Найдите приближенно спектр скорости для осциллятора с кубической нелинейностью, совершающего колебательное движение вблизи сепаратрисы.

#### **8.4. Осциллятор с кубической нелинейностью — потенциал с двумя ямами**

В заключение рассмотрим ещё один частный случай осциллятора с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0. \quad (8.44)$$

Потенциальная энергия такого осциллятора

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (8.45)$$

— так называемый потенциал с двумя ямами (рис. 8.11а). В данном случае в состоянии равновесия  $x = 0$  потенциальная функция имеет локальный максимум, так что это состояние равновесия неустойчиво (особая точка типа седло). Кроме того, имеются два локальных минимума при  $x = \pm 1$ , которым соответствуют устойчивые точки типа центр. На фазовом портрете (рис. 8.11б) существуют замкнутые фазовые траектории двух различных типов, разделенные сепаратрисами. В первом случае колебания осциллятора локализованы внутри одной из потенциальных ям, во втором осциллятор поочередно переходит из одной ямы в другую.

Рассмотрим сначала колебания внутри сепаратрисной петли. При этом полная энергия лежит в пределах  $-1/4 < E < 0$ . Как видно из рис. 8.11а, колебания происходят в области  $x_1 < x < x_0$ , причем  $1 \leq x_0 \leq \sqrt{2}$  (для определенности мы ограничиваемся пра-

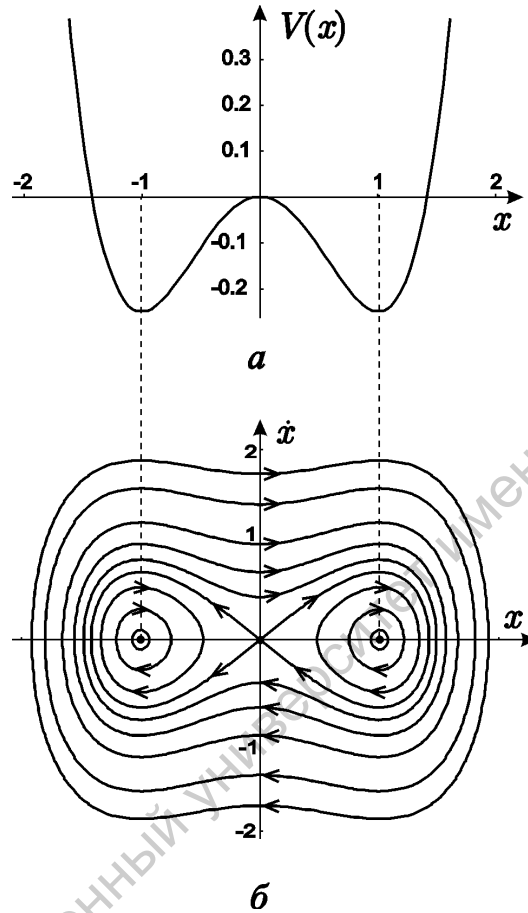


Рис. 8.11. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) осциллятора (8.44)

вой ямой, где  $x_{0,1} > 0$ ). Здесь  $x_{0,1}$  — корни уравнения  $V(x) = E$ . Нетрудно показать, что  $x_1^2 = 2 - x_0^2$ . В данном случае получить точные решения в эллиптических функциях удастся при помощи несколько более сложной замены

$$x^2 = x_1^2 + (x_0^2 - x_1^2) \cos^2 \varphi. \quad (8.46)$$

Мы предоставляем читателю самому проделать необходимые выкладки и убедиться, что

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \text{am}\left(x_0 t / \sqrt{2}; m\right), \\ x(t) &= \pm \sqrt{x_1^2 + (x_0^2 - x_1^2) \text{cn}^2\left(x_0 t / \sqrt{2}; m\right)}, \end{aligned} \quad (8.47)$$

где  $m^2 = (x_0^2 - x_1^2)/x_0^2 = 2(x_0^2 - 1)/x_0^2$ , причем период колебаний определяется выражением

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{x_0} K(m). \quad (8.48)$$

При  $x_0 \approx 1$ , когда колебания происходят вблизи дна потенциальной ямы, из уравнения (8.48) имеем  $T \approx \pi\sqrt{2}$ . Проверьте полученный результат, линеаризовав уравнение (8.44) вблизи устойчивого положения равновесия и подсчитав частоту линейных колебаний. С ростом энергии период колебаний растет и при  $E = 0$  (т.е.  $x_0 = \sqrt{2}$ ), что соответствует движению по сепаратрисе, обращается в бесконечность.

Решение, описывающее движение по сепаратрисе, можно получить, полагая в формуле (8.47)  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \sqrt{2}$ ,  $m = 1$ . С учетом соотношений (7.33) это дает

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t}. \quad (8.49)$$

Теперь рассмотрим движение вне сепаратрисной петли ( $E > 0$ ). В этом случае, полагая

$$x = x_0 \cos \varphi, \quad (8.50)$$

можно прийти к решению

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \operatorname{am}(\sqrt{x_0^2 - 1} t; m), \\ x(t) &= x_0 \operatorname{cn}(\sqrt{x_0^2 - 1} t; m), \end{aligned} \quad (8.51)$$

причем

$$m^2 = \frac{x_0^2}{2(x_0^2 - 1)}. \quad (8.52)$$

Напомним, что теперь  $x_0 > \sqrt{2}$ . Такие колебания иногда называют *сверхлинейными*.

Период колебаний теперь равен

$$T = \frac{4K(m)}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \quad (8.53)$$

Нетрудно видеть, что с ростом  $x_0$  период убывает и при  $x_0^2 \gg 1$  стремится к  $4K(1/\sqrt{2})/x_0 \rightarrow 0$ .

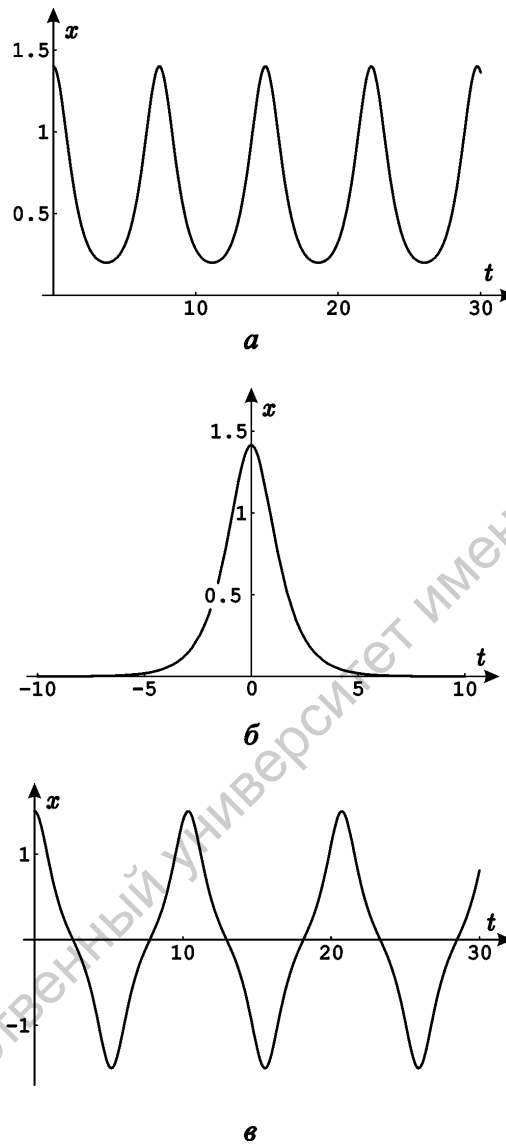


Рис. 8.12. Колебания осциллятора (8.44): сильно нелинейные колебания внутри потенциальной ямы (а); движение по сепаратрисе (б); сверхнелинейные колебания (в)

На рис. 8.12 приведены примеры осциллограмм, иллюстрирующие различные типы колебаний.

**Задача 8.9.** Маятник в верхнем положении равновесия прикреплен к пружине (см. задачу 3.10) с нелинейной зависимостью удлинения  $x$  от приложенной силы  $F$ :  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. Угол отклонения маятника от вертикали мал, длина стержня  $l$ , масса шарика  $m$ . Какой из универсальных моделей нелинейного осциллятора следует пользоваться при  $lk > mg$  и при  $lk < mg$ ? Получите уравнения соответствующих моделей в явном виде, оцените поправку к частоте и величину смещения центра колебаний относительно положения равновесия. Амплитуда колебаний равна  $A$ .

## Асимптотические методы теории нелинейных колебаний

### 9.1. Разложение в ряд по параметру нелинейности.

#### Осциллятор с квадратичной нелинейностью

Случаи, когда удастся найти точные решения в явной аналитической форме, которым была посвящена предыдущая лекция, представляют, скорее, исключение из правил. Поэтому в теории колебаний разработан богатый арсенал приближенных или *асимптотических* методов. Основные идеи наиболее важных из них будут рассмотрены в настоящей главе.

Начнем с осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0. \quad (9.1)$$

Как было показано в лекции 8, это уравнение можно привести к универсальному виду, не содержащему параметров. Однако здесь для наших целей больше подходит несколько иная нормировка переменных. Пусть известен некоторый характерный масштаб колебаний  $A$ . Введем безразмерные время и координату следующим образом:

$$t' = \omega_0 t, \quad x' = x/A. \quad (9.2)$$

Уравнение (9.1) примет вид (штрихи у безразмерных переменных опускаем)

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0, \quad (9.3)$$

где  $\varepsilon = \alpha A/\omega_0^2$ . Рассмотрим случай *слабой нелинейности*, когда  $\varepsilon \ll 1$ , т.е. уравнение (9.3) содержит *малый параметр*. Вообще, следует отметить, что условием применимости любого асимптотического метода является присутствие в уравнении малого (или большого) параметра.

Уравнение (9.3) близко к уравнению линейного консервативного осциллятора, оно отличается от него малым слагаемым порядка  $\varepsilon$ . Поэтому интуитивно ясно, что решение будет иметь вид квазигармонических (т.е. почти гармонических, близких к гармоническим) колебаний. Попробуем построить приближенное решение уравнения (9.3). Наиболее простой способ, очевидно, состоит в том, чтобы искать решение в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :



$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots, \quad (9.4)$$

считая  $x_{1,2,\dots}$  величинами порядка единицы. В литературе подобный прием называют методом *разложения по малому параметру* или *прямым разложением*. Подставив ряд (9.4) в уравнение (9.3), получим

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon^2 \ddot{x}_3 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \dots = 0. \quad (9.5)$$

Приравнявая в (9.5) к нулю члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , приходим к системе «зацепляющихся» уравнений

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (9.6)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^2 = 0, \quad (9.7)$$

$$\varepsilon^2: \quad \ddot{x}_3 + x_3 + 2x_1 x_2 = 0, \quad (9.8)$$

...

Уравнение (9.6) есть уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид

$$x_1 = a \cos(t + \varphi), \quad (9.9)$$

где амплитуда  $a$  и начальная фаза  $\varphi$  — постоянные, определяемые из начальных условий. Далее подставим решение (9.9) в уравнение (9.7), чтобы найти  $x_2$ :

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos 2(t + \varphi) \quad (9.10)$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением линейного консервативного осциллятора под внешним воздействием. Его решение следует искать в виде

$$x_2 = x_2^{(o)} + x_2^{(n)}, \quad (9.11)$$

где

$$x_2^{(o)} = a_1 \cos(t + \varphi_1) \quad (9.12)$$

— решение однородного уравнения, описывающее собственные колебания осциллятора. Его амплитуда  $a_1$  и начальная фаза  $\varphi_1$  по-прежнему определяются из начальных условий. Второе слагаемое  $x_2^{(n)}$  есть частное решение неоднородного уравнения. Оно

представляет собой вынужденные колебания осциллятора, т.е. отклик на внешнее воздействие. Как мы знаем из теории линейных колебаний, в спектре вынужденных колебаний будут содержаться те частоты, которые присутствуют в спектре вынуждающей силы. В данном случае это нулевая (постоянная составляющая) и вторая гармоники. Нетрудно найти, что

$$x_2^{(n)} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi). \quad (9.13)$$

Итак

$$x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi). \quad (9.14)$$

Отметим, что полученное нами решение содержит *четыре* независимых постоянных ( $a, \varphi, a_1, \varphi_1$ ), для определения которых имеются только *два* начальных условия. Поэтому можно две из этих постоянных выбрать произвольным образом. Наиболее удобно положить  $a_1 = 0$ . В дальнейшем для простоты условимся во всех высших порядках малости полагать составляющие, соответствующие собственным колебаниям, равными нулю.

Таким образом, окончательный вид решения с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  таков:

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[ -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi) \right] + \dots \quad (9.15)$$

Как видно из выражения (9.15), в спектре колебаний появляются высшие гармоники: нулевая и вторая, амплитуды которых имеют порядок  $\varepsilon a^2$ , т.е. много меньше амплитуды основной составляющей. Можно продолжить описанную процедуру, продвигаясь во все более высокие порядки малости. В решении появятся и другие гармоники: третья, четвертая и т.д. Однако их амплитуды будут еще меньше (порядка  $\varepsilon^{n-1} a^n$ , где  $n$  — номер гармоники). Действительно, поскольку нелинейность является слабой, амплитуды высших гармоник должны быстро уменьшаться с ростом их номера.

Остается только вычислить константы  $a$  и  $\varphi$ . Пусть начальные условия имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0. \quad (9.16)$$

Тогда, используя выражение (9.15), легко найти, что

$$\begin{aligned} a \cos \varphi - \varepsilon \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2\varphi \right] &= x_0, \\ a \sin \varphi + \frac{\varepsilon a^2}{3} \sin 2\varphi &= -y_0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Это система трансцендентных уравнений, получить точное решение которой в общем случае не удастся. Однако, учитывая, что в (9.17) содержится малый параметр, можно представить решение в виде рядов

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots \end{aligned} \quad (9.18)$$

В разложениях (9.18) нужно учитывать то же число членов, что и в решении (9.15). Пытаться найти  $a$  и  $\varphi$  с более высокой степенью точности, очевидно, просто не имеет смысла.

Итак, подставим (9.18) в систему (9.17) и выделим члены одинаковых порядков малости. В нулевом порядке по  $\varepsilon$  будем иметь

$$\begin{aligned} a_0 \cos \varphi_0 &= x_0, \\ a_0 \sin \varphi_0 &= -y_0, \end{aligned} \quad (9.19)$$

откуда нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \\ \varphi_0 &= -\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Члены порядка  $\varepsilon$  в (9.17) дают

$$\begin{aligned} a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{6} \cos 2\varphi_0 &= 0, \\ a_1 \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + \frac{a_0^2}{3} \sin 2\varphi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Это система линейных уравнений относительно  $a_1$ ,  $\varphi_1$ , найти решение которой не представляет труда. Мы предлагаем читателю проделать это самостоятельно.

## 9.2. Разложение по степеням параметра нелинейности.

### Осциллятор Дуффинга

Столь простой подход, как прямое разложение по степеням малого параметра, не всегда приводит к успеху. Чтобы показать это, рассмотрим осциллятор Дуффинга (осциллятор с кубической нелинейностью)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (9.22)$$

Вновь используем замену переменных (9.2). Тогда уравнение (9.22) примет вид

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (9.23)$$

где теперь  $\varepsilon = \beta A^2 / \omega_0^2$ . Как и прежде, будем рассматривать случай слабой нелинейности, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ . Отыскивая решение в виде (9.4), вместо уравнений (9.6)-(9.8) будем иметь

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (9.24)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0. \quad (9.25)$$

В нулевом порядке по  $\varepsilon$ , естественно, по-прежнему получаем уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид (9.9). Попробуем найти  $x_2$ . После подстановки выражения для  $x_1$  (9.9) уравнение (9.25) приводится к виду

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t + \varphi) = -\frac{a^3}{4} [3 \cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)]. \quad (9.26)$$

Нужно найти решение этого уравнения, соответствующее вынужденным колебаниям в членах высшего порядка. Поскольку нелинейность кубичная, в данном случае в спектре внешнего воздействия содержатся первая и третья гармоники. Решение будем искать в виде суперпозиции откликов на эти воздействия:

$$x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(3)}, \quad (9.27)$$

где  $x_2^{(1)}$  и  $x_2^{(3)}$  удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{x}_2^{(1)} + x_2^{(1)} = -\frac{3a^3}{4} \cos(t + \varphi), \quad (9.28a)$$

$$\ddot{x}_2^{(3)} + x_2^{(3)} = -\frac{a^3}{4} \cos 3(t + \varphi). \quad (9.28b)$$

Решение уравнения (9.28б) находится без труда и имеет вид гармонических колебаний на частоте вынуждающей силы:

$$x_2^{(3)} = \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi). \quad (9.29)$$

Что же касается уравнения (9.28а), то в нем внешнее воздействие имеет частоту, равную частоте собственных колебаний осциллятора. Как известно из теории линейных колебаний, в этом случае возникает *резонанс*, выражающийся в неограниченном нарастании амплитуды колебаний по линейному закону. Соответствующее решение имеет вид

$$x_2^{(1)} = -\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi). \quad (9.30)$$

Это так называемый *секулярный* или вековой член. (Термин берет свое начало из небесной механики.) Окончательный вид решения с точностью до членов второго порядка малости таков:

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[ -\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi) + \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi) \right] + \dots \quad (9.31)$$

Обратим внимание, что, как бы ни был мал параметр  $\varepsilon$ , с течением времени второй член в решении (9.31), неограниченно нарастая, становится больше первого. Таким образом, справедливость разложения (9.4) на больших временах нарушается, или, как говорят математики, *разложение не является равномерно пригодным по  $t$* . Это явно нефизический результат. Действительно, как мы показали в лекции 8, решения уравнения Дуффинга имеют вид периодических нелинейных колебаний, и никакого нарастания амплитуды со временем нет.

В чем же причина неудачного результата? Дело в том, что колебания осциллятора Дуффинга являются *неизохронными*, т.е. их период зависит от амплитуды. Разложение (9.4) принципиально не учитывает *неизохронность*: в спектре колебаний могут появиться только собственная частота линейных колебаний и её гармоники.

Для осциллятора с квадратичной нелинейностью (9.3) мы на самом деле пришли бы к аналогичному результату, если бы продвинулись в вычислениях ещё на один порядок. Как видно из уравнения (9.8), при попытке найти решение для  $x_3$  в правой части появится произведение  $x_1 x_2$ . Поскольку выражение для  $x_1$  (9.9) содержит первую гармонику, а выражение для  $x_2$  (9.13) — вторую, их произведение

будет содержать первую и третью гармоники. Следовательно, в решении для  $x_3$  мы также получим секулярно растущее слагаемое.

### 9.3. Метод Линштедта–Пуанкаре

Итак, необходимо модифицировать схему решения таким образом, чтобы можно было учесть неизохронность. Наиболее простой способ был предложен А. Линштедтом (1883) и А. Пуанкаре (1892). Введем в уравнении (9.23) новую временную переменную  $\tau = \omega t$ . Поскольку  $d/dt = \omega d/d\tau$ , получим

$$\omega^2 x'' + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (9.32)$$

Здесь штрихами обозначены производные по  $\tau$ . Будем искать решение уравнения (9.32) в виде разложения в степенной ряд как для переменной  $x$ , так и для частоты  $\omega$ :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots, \\ \omega &= 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (9.33)$$

Первый член в разложении для  $\omega$  должен представлять собой частоту линейных колебаний, которая в принятой нормировке равна единице. Последующие поправки  $\omega_1, \omega_2, \dots$  будут описывать эффекты неизохронности.

Подставим разложения (9.33) в уравнение (9.32). Получим

$$\begin{aligned} &[1 + 2\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_2) + \dots][x_1'' + \varepsilon x_2'' + \dots] + \\ &+ x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Преобразуем уравнение (9.34). После несложных вычислений приведем его к виду

$$x_1'' + x_1 + \varepsilon(x_2'' + x_2 + 2\omega_1 x_1'' + x_1^3) + \dots = 0. \quad (9.35)$$

Приравнивая к нулю члены нулевого и первого порядков малости, будем иметь

$$x_1'' + x_1 = 0, \quad (9.36)$$

$$x_2'' + x_2 = -2\omega_1 x_1'' - x_1^3. \quad (9.37)$$

Решение уравнения (9.36) запишем в виде

$$x_1 = a \cos(\tau + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (9.38)$$

Подставив это соотношение в правую часть (9.37), найдем, что

$$x_2'' + x_2 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - \frac{a^3}{4} [3 \cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)]. \quad (9.39)$$

Теперь необходимо выбрать  $\omega_1$  таким образом, чтобы устранить члены, пропорциональные  $\cos(\tau + \varphi)$ , которые приводят к секулярному росту решения для  $x_2$ . Для этого, очевидно, следует положить

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8}. \quad (9.40)$$

Теперь уравнение (9.39) принимает вид

$$x_2'' + x_2 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \varphi). \quad (9.41)$$

Его решение

$$x_2 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \varphi) \quad (9.42)$$

не содержит секулярных составляющих и разложение остается равномерно пригодным при всех  $t$ .

Окончательный вид найденного нами решения с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  таков (ср. (9.31)):

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3(\omega t + \varphi), \quad (9.43)$$

$$\omega \approx 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8}. \quad (9.44)$$

Если параметр  $\varepsilon$  считается положительным, то частота колебаний растет с ростом амплитуды, при  $\varepsilon < 0$  частота, наоборот, уменьшается.

Отметим, что в отличие от осциллятора с квадратичной нелинейностью в спектре колебаний в первую очередь появляется не вторая, а третья гармоника. Если продолжать разложения далее, то можно убедиться, что спектр будет содержать *только нечетные гармоники*. Это является следствием симметрии уравнения Дуффинга относительно замены  $x \rightarrow -x$ . Аналогичный результат мы получили при анализе колебаний математического маятника (лекция 7).

**Задача 9.1.** Получите оценку для частоты слабонелинейных колебаний (9.44) из точного решения, найденного в лекции 8.

*Решение.* В случае  $\varepsilon > 0$  для периода справедливо соотношение (8.34). Заменяя в этой формуле  $x_0^2$  приближенно на величину  $\varepsilon a^2$ , найдем, что

$$T = \frac{4K(m)}{\sqrt{1+\varepsilon a^2}}, \quad m^2 = \frac{\varepsilon a^2}{2(1+\varepsilon a^2)}, \quad (9.45)$$

где  $K(m)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. С учетом малости  $\varepsilon$  имеем  $m^2 \approx \varepsilon a^2/2$ .

Получим приближенное выражение для  $K(m)$  при малых значениях  $m$ . В этом случае

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi}} \approx \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \sin^2 \psi\right) d\psi \quad (9.46)$$

Интеграл (9.46) легко вычисляется:

$$K(m) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{m^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon a^2}{8}\right). \quad (9.47)$$

Подставив это выражение в формулу (9.45) и ограничиваясь членами порядка  $\varepsilon$ , будем иметь

$$T \approx 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon a^2}{8}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon a^2}{2}\right) \approx 2\pi \left(1 - \frac{3\varepsilon a^2}{8}\right). \quad (9.48)$$

Тогда видно, что частота  $\omega = 2\pi/T$  совпадает с формулой (9.44).

В случае  $\varepsilon < 0$  период колебаний определяется формулой (8.42), которую можно приближенно записать в виде

$$T = \frac{4K(m)}{\sqrt{1-|\varepsilon|a^2/2}}, \quad m^2 = \frac{|\varepsilon|a^2}{2(1-|\varepsilon|a^2/2)} \approx \frac{|\varepsilon|a^2}{2}. \quad (9.49)$$

С учетом выражения (9.47) получаем

$$T \approx 2\pi \left(1 + \frac{|\varepsilon|a^2}{8}\right) \left(1 + \frac{|\varepsilon|a^2}{4}\right) \approx 2\pi \left(1 + \frac{3|\varepsilon|a^2}{8}\right) = 2\pi \left(1 - \frac{3\varepsilon a^2}{8}\right). \quad (9.50)$$

Следовательно, для частоты снова приходим к формуле (9.44).

На рис. 9.1 для сравнения приведены зависимости  $x(t)$ , полученные по различными приближенными методиками, и точное решение (8.36). Параметр  $a$  выбран равным 0.5, т.е. нелинейность, вообще говоря, достаточно сильная. Тем не менее, решение (9.43), полученное методом Линштедта — Пуанкаре, достаточно хорошо согласуется с точным решением. В то же время зависимость  $x(t)$ , построенная согласно формуле (9.31), демонстрирует очевидный рост амплитуды по линейному закону, и уже на временах порядка периода колебаний расхождение становится существенным.

**Задача 9.2** Приведите приближенно задачу о движении частицы в потенциальной яме вида  $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$  к модели осциллятора с кубической нелинейностью. В рамках этой модели найдите за-



висимость периода колебаний от частоты. Сравните полученный результат с точным (задача 4.6), построив соответствующую таблицу.

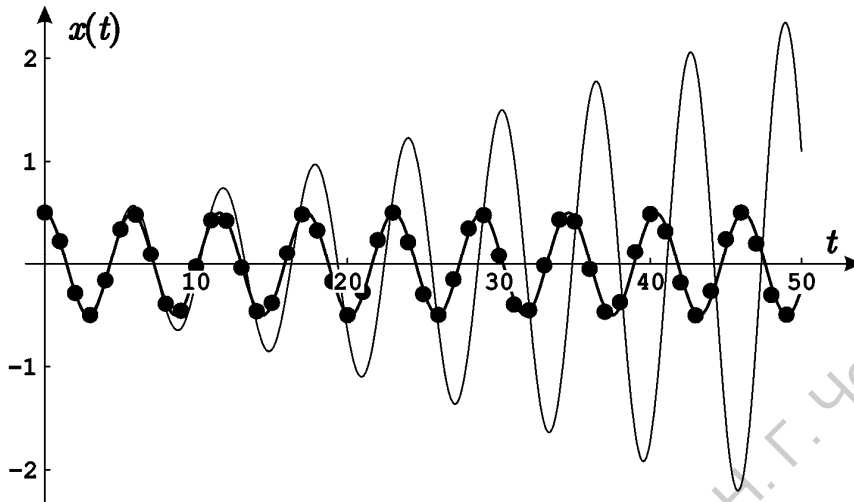


Рис. 9.1. Решения уравнения Дуффинга: жирная сплошная линия — точное решение (8.36) при  $x_0 = 0.5$ ; тонкая линия — метод прямого разложения по малому параметру; кружки — метод Линшtedта — Пуанкаре ( $\varepsilon = 1, a = 0.5$ )

**Задача 9.3.** Представьте математический маятник в виде модели осциллятора с кубической нелинейностью. С ее помощью оцените угловую амплитуду колебаний математического маятника, для которой период на 1% отличается от значения, предсказанного линейной теорией.

**Задача 9.4.** С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените отношение первой и третьей гармоник в спектре математического маятника, совершающего колебания с угловыми амплитудами  $\pi/6$  и  $\pi/2$ .

**Задача 9.5.** Найдите поправку к частоте линейных колебаний для математического маятника. Покажите, что в первом порядке по квадрату амплитуды полученная оценка согласуется с известным результатом, отвечающим аппроксимации математического маятника осциллятором с кубической нелинейностью. Оцените период колебаний с угловой амплитудой  $\pi/2$ . Сравните найденное значение с точным и с оценкой для осциллятора с кубической нелинейностью. (Указание. Используйте формулу для разложения функции  $\sin(x \sin \theta)$  в ряд по функциям Бесселя.)

**Задача 9.6.** Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Лена-Джонса

$$U(r) = 4a \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^{12} - \left( \frac{b}{r} \right)^6 \right],$$

где  $a$  и  $b$  — положительные константы. Используя представление системы для слабонелинейных колебаний в виде уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью (задача 8.5), получите приближенное решение с точностью до членов первого порядка малости. На основании полученных результатов дайте объяснение механизма теплового расширения твердых тел.

**Задача 9.7.** Найти поправку первого порядка к частоте слабонелинейных колебаний для нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^5 = 0.$$

**Задача 9.8.** Найти поправку первого порядка к частоте слабонелинейных колебаний для осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0.$$

Сравнить полученное приближенное решение с точным (лекция 8).

*Решение.* Перейдем к новой переменной  $\tau = \omega t$  и будем искать решение в виде (9.33). В первом порядке малости, очевидно, по-прежнему будем иметь уравнение гармонического осциллятора

$$x_1'' + x_1 = 0,$$

решение которого выберем в виде  $x_1 = a \cos(\tau + \varphi)$ . Во втором порядке малости получим

$$x_2'' + x_2 = -2\omega_1 x_1'' - x_1^2,$$

что после подстановки решения для  $x_1$  дает

$$x_2'' + x_2 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - \frac{a^2}{2} [1 + \cos 2(\tau + \varphi)].$$

Отсюда следует, что  $\omega_1 = 0$ , т.е. нелинейная поправка к частоте будет иметь порядок  $\varepsilon^2$ . Это согласуется с результатами, полученными на основе метода прямого разложения. Решение для  $x_2$  будет содержать нулевую и вторую гармоники (ср. с формулой (9.15)):

$$x_2 = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(\tau + \varphi).$$

Теперь запишем уравнение для членов порядка  $\varepsilon^2$ :

$$x_3'' + x_3 = -2\omega_2 x_1'' + 2x_1 x_2 = 2\omega_2 a \cos(\tau + \varphi) - a^3 \cos(\tau + \varphi) \left[ 1 - \frac{1}{3} \cos 2(\tau + \varphi) \right].$$

Нетрудно видеть, что в правой части этого уравнения содержатся первая и третья гармоники. Приравнявая к нулю секулярные слагаемые, пропорциональные  $\cos(\tau + \varphi)$ , находим, что  $\omega_2 = -5a^2/12$ . Итак,

$$\omega \approx 1 - \frac{5\varepsilon^2 a^2}{12}.$$

Таким образом, с ростом амплитуды частота колебаний осциллятора с квадратичной нелинейностью уменьшается, а период увеличивается. Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что полученное выражение полностью согласуется с точной формулой (8.25), если в ней положить  $x_0 \approx \varepsilon a/2$ ,  $x_1 \approx -\varepsilon a/2$ ,  $x_2 \approx -3/2$  и разложить ее с точностью до членов второго порядка малости.

**Задача 9.9.** Найти поправку первого порядка к частоте слабонелинейных колебаний вблизи устойчивого положения равновесия для осциллятора с кубичной нелинейностью вида

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0.$$

Сравнить полученное приближенное решение с точным (лекция 8).

#### 9.4. Метод многих масштабов

Приближенное решение (9.43), (9.44) полученное при помощи метода Линштедта — Пуанкаре, можно представить в виде

$$x \approx a \cos \left( t + \frac{3a^2 \varepsilon t}{8} + \varphi \right) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos \left( 3t + \frac{9a^2 \varepsilon t}{8} + 3\varphi \right). \quad (9.51)$$

Зависимость от времени входит в это выражение двояким образом:  $x = x(t, \varepsilon t)$ . Поскольку  $\varepsilon$  является малым параметром, зависимость от  $\varepsilon t$  можно интерпретировать как *медленное изменение параметров колебания*. Продолжая разложение до более высоких порядков малости, мы приходим к представлению решения в виде  $x = x(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t, \dots)$ . Введем обозначения

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots \quad (9.52)$$

Зависимость от каждого очередного аргумента  $T_n$  характеризует изменения, которые проявляются на последовательно возрастающих масштабах времени.

Идея перехода от единственного времени  $t$  к набору переменных  $T_n$  (9.52) лежит в основе *метода многих масштабов* (или метода многомасштабных разложений), позволяющего получать решения широкого класса задач теории колебаний. Продемонстрируем его применение на примере уравнения Дуффинга (9.23). Для большей общности включим в него слабое затухание

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\gamma\dot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (9.53)$$

Здесь  $\gamma$  считается величиной порядка единицы. Отметим, что метод Линштедта — Пуанкаре неприменим в случае, когда учитывается затухание, так как в нем изначально предполагается, что амплитуда и частота колебаний являются постоянными, и эффекты уменьшения амплитуды описать не удастся.

При переходе к новым переменным  $T_n$  операторы дифференцирования преобразуются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \equiv \hat{D}_0 + \varepsilon \hat{D}_1 + \varepsilon^2 \hat{D}_2 + \dots, \quad (9.54)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \hat{D}_0^2 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 + \varepsilon^2 (\hat{D}_1^2 + 2\hat{D}_0 \hat{D}_2) + \dots, \quad (9.55)$$

где для сокращения записи введены обозначения  $\hat{D}_n \equiv \partial/\partial T_n$ . Решение для переменной  $x$  по-прежнему будем искать в виде степенного ряда

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots \quad (9.56)$$

Подставляя разложения (9.54)-(9.56) в уравнение (9.53), получим

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_1 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + \dots + \varepsilon \hat{D}_0^2 x_2 + \dots + 2\varepsilon \gamma \hat{D}_0 x_1 + \dots + \\ + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Приравняв к нулю члены порядка  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , приходим, соответственно, к следующим уравнениям

$$\hat{D}_0^2 x_1 + x_1 = 0, \quad (9.58)$$

$$\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -2\hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 - 2\gamma \hat{D}_0 x_1 - x_1^3. \quad (9.59)$$

Решение уравнения гармонического осциллятора (9.58) по-прежнему запишем в виде

$$x_1 = a \cos(T_0 + \varphi), \quad (9.60)$$

но теперь будем считать  $a$  и  $\varphi$  не постоянными, а функциями, зависящими от медленных переменных:

$$a = a(T_1, T_2, \dots), \quad \varphi = \varphi(T_1, T_2, \dots). \quad (9.61)$$

Действительно, уравнение (9.53) в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходит в уравнение гармонического осциллятора, поэтому неудивительно, что решение в нулевом порядке по  $\varepsilon$  представляет собой квазигармоническое колебание с медленно меняющимися амплитудой и фазой.

Подставим решение (9.60) в правую часть уравнения (9.59). При этом надо учитывать, что оператор  $\hat{D}_0$  действует только на аргумент тригонометрических функций  $T_0$ , а оператор  $\hat{D}_1$  — на медленно меняющиеся переменные  $a$ ,  $\varphi$ . Получим

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 &= 2\left(\hat{D}_1 a \cdot \sin(T_0 + \varphi) + a \hat{D}_1 \varphi \cdot \cos(T_0 + \varphi)\right) + 2\gamma a \sin(T_0 + \varphi) - a^3 \cos^3(T_0 + \varphi) = \\ &= 2\left(\hat{D}_1 a + \gamma a\right) \sin(T_0 + \varphi) + \left(2a \hat{D}_1 \varphi - \frac{3a^3}{4}\right) \cos(T_0 + \varphi) - \frac{a^3}{4} \cos 3(T_0 + \varphi). \end{aligned} \quad (9.62)$$

В правой части уравнения (9.62) следует приравнять к нулю секулярные члены, пропорциональные  $\sin(T_0 + \varphi)$ ,  $\cos(T_0 + \varphi)$ . Это приводит к уравнениям

$$\hat{D}_1 a + \gamma a = 0, \quad (9.63)$$

$$\hat{D}_1 \varphi - \frac{3a^2}{8} = 0. \quad (9.64)$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения, которые позволяют описать динамику медленно меняющихся переменных  $a(T_1)$ ,  $\varphi(T_1)$ . Такие уравнения называют *укороченными*.

В случае консервативного осциллятора ( $\gamma = 0$ ) уравнения (9.63), (9.64) приводят к результату, в точности совпадающему с методом Линштедта — Пуанкаре

$$\begin{aligned} a &= a_0, \\ \varphi &= \frac{3a_0^2 T_1}{8} + \varphi_0, \end{aligned} \quad (9.65)$$

где  $a_0, \varphi_0$  — постоянные, определяемые из начальных условий. Величина  $\hat{D}_1 \varphi$ , очевидно, есть поправка к частоте, появляющаяся из-за нелинейных эффектов. Для нее мы получаем значение, совпадающее с (9.40).

При  $\gamma > 0$  найти решение укороченных уравнений также не составляет труда:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \exp(-\gamma T_1), \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{3a_0^2}{16\gamma} (1 - \exp(-2\gamma T_1)). \end{aligned} \quad (9.66)$$

Соотношения (9.66) описывают экспоненциальное затухание амплитуды; при этом поправка к частоте также уменьшается. В пределе  $\gamma \rightarrow 0$  они переходят в (9.65).

После исключения секулярных членов уравнение (9.62) принимает вид

$$\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(T_0 + \varphi). \quad (9.67)$$

Оно, очевидно, совпадает с уравнением (9.41), которое анализировалось в предыдущем разделе. Поэтому сразу запишем окончательный вид решения:

$$x \approx a(T_1) \cos[T_0 + \varphi(T_1)] + \frac{\varepsilon a^3(T_1)}{32} \cos 3[T_0 + \varphi(T_1)]. \quad (9.68)$$

Зависимость амплитуды и фазы от медленного времени дается соотношениями (9.66).

При использовании метода многих масштабов более удобно оперировать комплексной формой записи. Представим решение (9.60) для  $x_1$  в виде

$$x_1 = A(T_1) e^{iT_0} + \text{к.с.}, \quad (9.69)$$

где к.с. — комплексно сопряженное выражение,  $A$  — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, модуль и аргумент которой описывают медленные изменения, соответственно, амплитуды и фазы колебаний. Тогда уравнение (9.59) примет вид

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 &= -(2i\hat{D}_1 A e^{iT_0} + 2i\gamma A e^{iT_0} + \text{к.с.}) - (A e^{iT_0} + \text{к.с.})^3 = \\ &= -(2i\hat{D}_1 A e^{iT_0} + 2i\gamma A e^{iT_0} + \text{к.с.}) - (A^3 e^{3iT_0} + 3A^2 A^* + \text{к.с.}). \end{aligned} \quad (9.70)$$

Здесь звездочка также означает операцию комплексного сопряжения.

В правой части (9.70) следует потребовать уничтожения секулярных членов, пропорциональных  $\exp(iT_0)$ . Это приводит к одному комплексному уравнению

$$\hat{D}_1 A + \gamma A - \frac{3i|A|^2 A}{2} = 0. \quad (9.71)$$

Вводя вещественные амплитуду и фазу  $A = \frac{1}{2} a e^{i\varphi}$ , и разделяя в (9.71) вещественную и мнимую части, приходим к уравнениям (9.63), (9.64). Оперировать комплексными экспонентами более удобно, чем тригонометрическими функциями, поэтому в дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться именно таким представлением.

**Задача 9.10.** Получите укороченное уравнение для осциллятора с квадратичной нелинейностью и слабым затуханием

$$\ddot{x} + 2\varepsilon^2 \gamma \dot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0.$$

Сравнить с результатами, полученными при решении задачи 9.8.

**Задача 9.11.** Получите укороченное для колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и нелинейного резистора, характеризующегося вольт-амперной характеристикой  $U = IR + kI^3$ . Проанализируйте динамику амплитуды колебаний.

### 9.5. Метод Ван дер Поля

Метод Ван дер Поля представляет собой простейший вариант *метода усреднения*. Он был разработан Б. Ван дер Полем (1920) для исследования колебательных процессов в ламповом генераторе. Математическое обоснование этого метода было дано Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси (1934). Дальнейшее развитие метод усреднения получил в работах Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и др.

Рассмотрим вновь уравнение Дуффинга, которое запишем в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0. \quad (9.72)$$

Формально малый параметр здесь мы не вводим, однако будем считать, что  $\gamma, \beta \ll 1$ , т.е. система близка к уравнению линейного консервативного осциллятора. Вообще, близость к линейной консервативной системе является условием применимости метода Ван-дер-Поля. Это позволяет представить решение в виде

$$x = A(t)e^{it} + \text{к.с.}, \quad (9.73)$$

где  $A(t)$  — медленно меняющаяся по сравнению с  $\exp(it)$  комплексная амплитуда (в связи с чем этот метод называют также *методом медленно меняющихся амплитуд*). Не трудно подсчитать, что

$$\dot{x} = \dot{A}e^{it} + iAe^{it} + \dot{A}^*e^{-it} - iA^*e^{-it} \quad (9.74)$$

Отметим, что вместо одной зависимой переменной  $x$  по сути введены две:  $A$  и  $A^*$ . Поэтому можно наложить между этими величинами дополнительную связь. Удобно потребовать, чтобы

$$\dot{A}e^{it} + \dot{A}^*e^{-it} = 0. \quad (9.75)$$

Тогда уравнение (9.74) упрощается:

$$\dot{x} = iAe^{it} - iA^*e^{-it}. \quad (9.76)$$

Продифференцируем это уравнение ещё раз. Получим

$$\ddot{x} = i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} - i\dot{A}^*e^{-it} - A^*e^{-it}. \quad (9.77)$$

С учетом соотношения (9.75) уравнение (9.77) принимает вид

$$\ddot{x} = 2i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} - A^*e^{-it}. \quad (9.78)$$

Подставляя выражения (9.76), (9.78) в исходное уравнение (9.72), после ряда вычислений приходим к следующему уравнению:

$$2i\dot{A}e^{it} + 2i\gamma(Ae^{it} - A^*e^{-it}) + \beta(A^3e^{3it} + 3|A|^2Ae^{it} + 3|A|^2A^*e^{-it} + (A^*)^3e^{-3it}) = 0. \quad (9.79)$$

Отметим, что в уравнении (9.79) все члены одного порядка малости: они либо содержат производные от медленно меняющейся амплитуды  $A$ , либо пропорциональны малым параметрам  $\gamma, \beta$ .

Разделим уравнение (9.79) на  $\exp(it)$

$$2i\dot{A} + 2i\gamma A - 2i\gamma A^* e^{-2it} + \beta \left( A^3 e^{2it} + 3|A|^2 A + 3|A|^2 A^* e^{-2it} + (A^*)^3 e^{-4it} \right) = 0. \quad (9.80)$$

Теперь усредним уравнение (9.80) по периоду основной частоты. Операция усреднения осуществляется следующим образом:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (9.81)$$

где  $T$  — период колебаний (в данном случае  $T = 2\pi$ ). Поскольку  $A(t)$  — медленно меняющаяся функция, при усреднении ее можно вынести за знак интеграла. Тогда, как нетрудно заметить, быстро осциллирующие члены (т.е. все члены содержащие комплексные экспоненты) в уравнении (9.80) дают нуль, и в результате мы приходим к укороченному уравнению

$$\dot{A} + \gamma A - \frac{3i\beta |A|^2 A}{2} = 0. \quad (9.82)$$

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (9.71), полученным методом многих масштабов.

**Задача 9.12.** Осциллятор представляет собой груз массы  $m$ , прикрепленный к стене пружиной с жесткостью  $k$  (рис. 9.2). Груз может двигаться вдоль горизонтальной поверхности, причем сила «сухого»

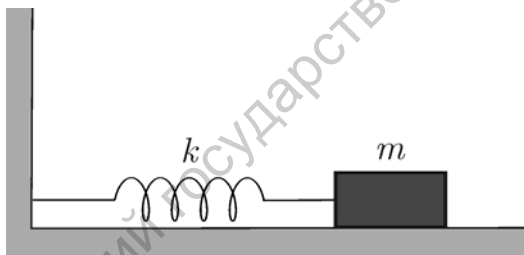


Рис. 9.2. Пружинный маятник с «сухим» трением

трения между грузом и поверхностью подчиняется закону Кулона — Амонтона (см. лекцию 2)

$$f_{mp} = \mu mg \operatorname{sgn}(v),$$

где  $\mu$  — коэффициент трения,  $v$  — скорость движения. Получить укороченное уравнение для амплитуды колебаний и исследовать характер затухания.

*Решение.* Нетрудно показать, что колебания осциллятора подчиняются уравнению

$$\ddot{x} + \gamma \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \omega_0^2 x = 0, \quad (9.83)$$

где  $\gamma = \mu g$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Далее будем предполагать коэффициент  $\gamma$  малым, чтобы можно было считать амплитуду колебаний медленно меняющейся. Прежде чем перейти к решению задачи, рекомендуем читателю самостоятельно построить фазовый портрет системы.



Получим укороченное уравнение. Используя метод Ван-дер-Поля, представим решение в виде квазигармонического колебания с медленно меняющимися амплитудой и фазой

$$x = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (9.84)$$

Дифференцируя соотношение (9.84), получаем

$$\dot{x} = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \varphi) + \dot{a} \cos(\omega_0 t + \varphi) - a \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.85)$$

Наложим на  $a$  и  $\varphi$  дополнительное условие

$$\dot{a} \cos(\omega_0 t + \varphi) - a \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0, \quad (9.86)$$

тогда

$$\dot{x} = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.87)$$

Дифференцируя соотношение (9.87) еще раз, находим

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 a \cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 \dot{a} \sin(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 a \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.88)$$

Подставив (9.87), (9.88) в уравнение (9.83), получим

$$\dot{a} \sin(\omega_0 t + \varphi) + a \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{\gamma}{\omega_0} \operatorname{sgn}(\sin(\omega_0 t + \varphi)). \quad (9.89)$$

Правая часть уравнения (9.89) представляет собой последовательность прямоугольных импульсов (рис. 9.3). Ее можно разложить в ряд Фурье

$$\operatorname{sgn}(\sin(\omega_0 t + \varphi)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k(\omega_0 t + \varphi), \quad (9.90)$$

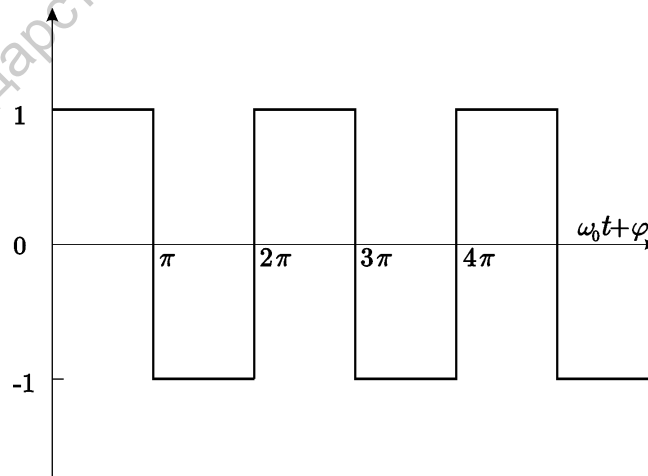


Рис. 9.3. Функция  $\operatorname{sgn}(\sin(\omega_0 t + \varphi))$

где

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(\sin \theta) \sin k\theta \, d\theta, \quad (9.91)$$

где  $\theta = \omega_0 t + \varphi$ . При вычислении интеграла в (9.91) будем пренебрегать медленным изменением фазы  $\varphi$ .

Получим

$$b_k = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ 4/(\pi k), & k = 2n + 1 \end{cases} \quad (9.92)$$

Итак, уравнение (9.89) принимает вид

$$\dot{a} \sin(\omega_0 t + \varphi) + a \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{4\gamma}{\pi\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (9.93)$$

Домножив уравнение (9.93) на  $\sin(\omega_0 t + \varphi)$  и используя (9.86), получаем

$$\dot{a} = -\frac{4\gamma}{\pi\omega_0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)(\omega_0 t + \varphi)] \right) \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.94)$$

Усредним уравнение (9.94) по периоду  $T = 2\pi/\omega_0$ . Очевидно, что все члены суммы, кроме члена с  $n = 0$ , при усреднении дадут нуль. В результате получим уравнение

$$\dot{a} = -\frac{2\gamma}{\pi\omega_0}. \quad (9.95)$$

Таким образом, амплитуда колебаний затухает по линейному закону

$$a = a_0 - \frac{2\gamma t}{\pi\omega_0} \quad (9.96)$$

и обращается в нуль за конечное время порядка  $t^* = \pi a_0 \omega_0 / 2\gamma$ . Здесь  $a_0$  — начальное смещение груза.

Понятно, что это выражение является приближенным и справедливо лишь если затухание происходит достаточно медленно, т.е. за время, значительно большее периода колебаний. Заметим, что если  $a_0 < a^* \equiv \mu mg/k = \gamma/\omega_0^2$ , то колебания вообще не начнутся, так как в этом случае возвращающая сила будет меньше силы трения покоя. Таким образом, условие применимости полученного решения  $t^* \gg T$  можно переписать в виде  $a_0 \gg 4a^*$ , т.е. начальное смещение должно быть значительно больше критического.

Аналогично можно получить из (9.93) уравнение для  $\dot{\varphi}$ . Оно будет иметь вид

$$\dot{\varphi} = 0, \quad (9.97)$$

т.е. частота колебаний остается постоянной.

Отметим, что метод многих масштабов позволяет, вообще говоря, продвинуться дальше, чем метод Ван дер Поля, поскольку с его помощью мы не только определили эволюцию медленно меняющихся амплитуды и фазы, но и нашли компоненту на частоте третьей гармоники. Кроме того мы могли бы продолжать разложения до более высоких порядков малости, каждый раз все больше и больше уточняя решение. Однако метод усреднения также допускает соответствующее обобщение: так называемый *метод Крылова–Боголюбова*, который рассмотрим в следующем разделе.

### 9.6. Метод Крылова–Боголюбова

Продemonстрируем применение метода Крылова–Боголюбова на примере уравнения, описывающего обобщенную колебательную систему, близкую к линейной консервативной:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}). \quad (9.98)$$

Здесь, как и выше  $\varepsilon$  — малый параметр, а  $F$  — некоторая нелинейная функция. Решение уравнения (9.98), очевидно, должно быть близко к гармоническим колебаниям, поэтому будем искать его в виде

$$x = a \cos \varphi + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \quad (9.99)$$

где амплитуда  $a$  и фаза  $\varphi$  удовлетворяют укороченным уравнениям, которые нужно найти. Их также следует искать в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \dots, \\ \dot{\varphi} &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (9.100)$$

Относительно величин  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  в разложении (9.99) сделаем следующие предположения: поскольку они должны описывать поведение высших гармоник, будем считать, что они являются периодическими функциями  $\varphi$ , но при этом их спектр не содержит основной частоты  $\omega_0$ , т.е.

$$\int_0^{2\pi} x_n(t) \cos \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} x_n(t) \sin \varphi \, d\varphi = 0.$$

Следовательно, их можно представить в виде рядов Фурье

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} [v_{nk}(a) \cos(k\varphi) + \mu_{nk}(a) \sin(k\varphi)], \quad (9.101)$$

причем  $v_{n1} = \mu_{n1} = 0$ .

Найдем решение с точностью до членов порядка  $\varepsilon$ . Продифференцировав уравнение (9.99), подсчитаем  $\dot{x}$ :

$$\dot{x} = \dot{a} \cos \varphi - a \dot{\varphi} \sin \varphi + \varepsilon \left( \dot{a} \frac{\partial x_1}{\partial a} + \dot{\varphi} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right) + \dots,$$

Подставив сюда  $\dot{a}$ ,  $\dot{\varphi}$  из соотношений (9.100), получим

$$\dot{x} = -\omega_0 a \sin \varphi + \varepsilon \left( f_1 \cos \varphi - \omega_1 a \sin \varphi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right) + \dots \quad (9.102)$$

Продифференцировав это выражение еще раз, находим

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -\omega_0 \dot{a} \sin \varphi - \omega_0 a \dot{\varphi} \cos \varphi + \\ & + \varepsilon \left[ \dot{a} \frac{df_1}{da} \cos \varphi - \dot{\varphi} f_1 \sin \varphi - \dot{a} \left( \omega_1 + a \frac{d\omega_1}{da} \right) \sin \varphi - \omega_1 a \dot{\varphi} \cos \varphi + \omega_0 \dot{a} \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \varphi} + \omega_0 \dot{\varphi} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right] + \dots \end{aligned}$$

Поскольку мы ищем решение с точностью до членов порядка  $\varepsilon$ , в квадратной скобке можно положить  $\dot{a} \approx 0$ ,  $\dot{\varphi} \approx \omega_0$ , и мы получаем

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 a \cos \varphi + \varepsilon \left[ -2\omega_0 f_1 \sin \varphi - 2a\omega_0 \omega_1 \cos \varphi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right] + \dots \quad (9.103)$$

Подставим выражения (9.102), (9.103) в исходное уравнение (9.98). При этом с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  в правой части можно положить

$$F(x, \dot{x}) \approx F(a \cos \varphi, -\omega_0 a \sin \varphi).$$

В итоге уравнение (9.98) принимает вид

$$\omega_0^2 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + x_1 \right) = 2\omega_0 (f_1 \sin \varphi + \omega_1 a \cos \varphi) + F(a \cos \varphi, -\omega_0 a \sin \varphi). \quad (9.104)$$

Представим  $F(a \cos \varphi, -\omega_0 a \sin \varphi)$  в виде ряда Фурье

$$F(a \cos \varphi, -\omega_0 a \sin \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} [\beta_k(a) \cos(k\varphi) + \alpha_k(a) \sin(k\varphi)], \quad (9.105)$$

где функции  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  можно найти, задав конкретный вид функции  $F$ . Подставим разложения (9.101) и (9.105) в уравнение (9.104):

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 \left( v_{10} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[ (1-k^2) v_{1k} \cos(k\varphi) + (1-k^2) \mu_{1k} \sin(k\varphi) \right] \right) = \\ & = 2\omega_0 (f_1 \sin \varphi + \omega_1 a \cos \varphi) + \beta_0 + \beta_1 \cos \varphi + \alpha_1 \sin \varphi + \sum_{k=2}^{\infty} [\beta_k \cos(k\varphi) + \alpha_k \sin(k\varphi)] \end{aligned}$$

В этом уравнении следует приравнять коэффициенты при одинаковых гармониках, что дает

$$\begin{aligned} \omega_0^2 v_{10} &= \beta_0, \quad f_1 = -\frac{\alpha_1}{2\omega_0}, \quad \omega_1 = -\frac{\beta_1}{2\omega_0 a}, \\ v_{1k} &= \frac{\beta_k}{\omega_0^2 (1-k^2)}, \quad \mu_{1k} = \frac{\alpha_k}{\omega_0^2 (1-k^2)}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Подстановка полученных соотношений в выражение (9.99) приводит к решению

$$x \approx a \cos \varphi + \varepsilon \left[ \frac{\beta_0(a)}{\omega_0^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{\beta_k(a)}{\omega_0^2 (1-k^2)} \cos(k\varphi) + \frac{\alpha_k(a)}{\omega_0^2 (1-k^2)} \sin(k\varphi) \right) \right], \quad (9.106)$$

где  $a$  и  $\varphi$  находятся из укороченных уравнений (9.100), которые соответственно принимают вид.

$$\dot{a} \approx -\frac{\varepsilon \alpha_1(a)}{2\omega_0}, \quad \dot{\varphi} \approx \omega_0 - \frac{\varepsilon \beta_1(a)}{2a\omega_0}. \quad (9.107)$$

Очевидно, что описанная выше процедура позволяет в принципе получить решение с точностью любого порядка по малому параметру  $\varepsilon$ .

## Осциллятор с сильной диссипацией.

### Быстрые и медленные движения

В предыдущей лекции мы сосредоточили свое внимание на системах близких к линейным консервативным. Это позволило представить решение в виде квазигармонических колебаний с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Теперь затронем еще один важный класс задач: сильно нелинейные колебания в сильно неконсервативных системах, для которых можно выделить временные интервалы с качественно различным характером изменения переменных — участки быстрых и медленных движений. Типичный пример представляют релаксационные автоколебания (см. рис. 1.1). Более подробно они будут рассмотрены в лекции 12. Здесь же мы продемонстрируем метод приближенного анализа, основанного на разделении быстрых и медленных движений, для осциллятора Дуффинга с сильной диссипацией

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (10.1)$$

где  $\gamma$  — большой параметр. Для определенности будем считать  $\beta > 0$  (осциллятор с «жесткой» пружиной, см. лекцию 8).

Введем новое время  $\tau = t/2\gamma$ . Уравнение (10.1) примет вид

$$\varepsilon x'' + x' + x + \beta x^3 = 0, \quad (10.2)$$

где  $\varepsilon = 1/4\gamma^2 \ll 1$  — малый параметр, штрихи обозначают дифференцирование по  $\tau$ . Таким образом, мы получили уравнение, содержащее *малый параметр при старшей производной*. Именно такие системы удобно анализировать при помощи метода разделения быстрых и медленных движений.

**Задача 10.1.** Для линейного колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и сопротивления  $R$ , получите условие сильной диссипации в явной форме.

### 10.1. Фазовая плоскость осциллятора с сильной диссипацией

Перепишем уравнение (10.2) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$x' = y, \quad (10.3a)$$

$$\varepsilon y' = -y - x - \beta x^3 = f(x, y). \quad (10.3b)$$

Из уравнения (10.3б) видно, что  $y' = f(x, y)/\varepsilon \gg 1$  везде, за исключением области, где функция  $f(x, y)$  близка к нулю. Условие  $f(x, y) = 0$  определяет на плоскости  $(x, y)$  некоторую кривую – кубическую параболу

$$y = -x - \beta x^3. \quad (10.4)$$

Это *подпространство медленных движений* нашей системы. Фактически движение изображающей точки будет медленным не только на этой кривой, но и в ее окрестности ширины  $\varepsilon$ , так что можно говорить и об *области медленных движений*.

Вне области медленных движений, разделив (10.3б) на (10.3а), найдем уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{\varepsilon y} \gg 1. \quad (10.5)$$

Отсюда видно, что в области быстрых движений фазовые траектории близки к вертикальным прямым.

Таким образом, можно построить качественный фазовый портрет системы (рис. 10.1а). Имеется единственное состояние равновесия типа устойчивый узел, расположенное в начале координат. Изображающая точка вначале быстро выходит в подпространство медленных движений, а затем медленно стремится к положению равновесия. Для сравнения на рис. 10.1б приведен фазовый портрет, рассчитанный численно.

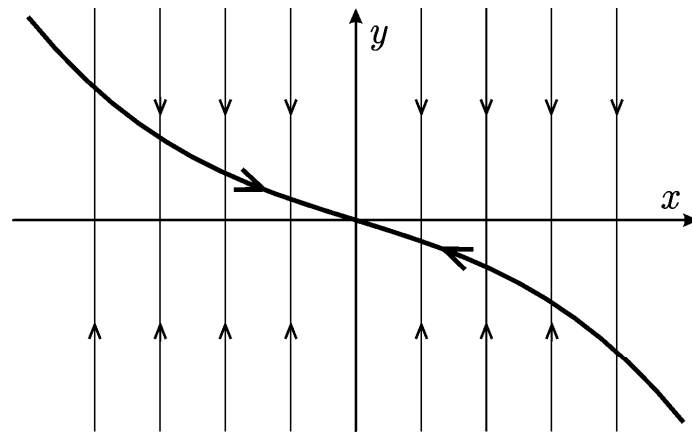
## **10.2. Приближенное решение методом разделения быстрых и медленных движений**

Получим приближенное решение уравнения (10.1), анализируя быстрые и медленные движения по отдельности, а затем «сшивая» полученные решения. В области быстрых движений можно пренебречь двумя последними слагаемыми в правой части (10.3б) и записать

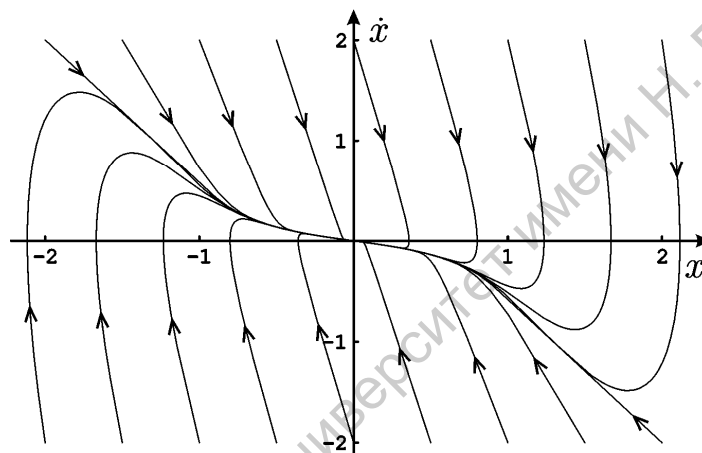
$$\varepsilon y' \approx -y. \quad (10.6)$$

Решение этого уравнения есть

$$y = C_1 \exp(-\tau/\varepsilon). \quad (10.7)$$



а



б

Рис. 10.1. Фазовые портреты осциллятора Дуффинга с сильным затуханием: качественный фазовый портрет, жирной линией выделено подпространство медленных движений (а); фазовый портрет, полученный численным интегрированием уравнения (10.1) при  $\gamma = 5$ ,  $\beta = 1$  (б)

Подставив выражение (10.7) в (10.3а), найдем

$$x = C_2 - \varepsilon C_1 \exp(-\tau/\varepsilon). \quad (10.8)$$

Постоянные  $C_{1,2}$  определим из начальных условий. Если положить

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (10.9)$$

то нетрудно найти, что  $C_1 = y_0$ ,  $C_2 = x_0 + \varepsilon y_0$ . Итак, решение для быстрых движений есть

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon y_0 [1 - \exp(-\tau/\varepsilon)]. \quad (10.10)$$

Для медленных движений имеем уравнение первого порядка (10.4). Разделив его на  $x^3$ , получим



$$\frac{x'}{x^3} = -\beta - \frac{1}{x^2}. \quad (10.11)$$

Введем вместо  $x$  новую переменную  $u = x^{-2}$ . Тогда уравнение (10.11) примет вид

$$u' = 2(u + \beta). \quad (10.12)$$

Решение уравнения (10.12) легко находится:

$$u = -\beta + C_3 \exp(2\tau). \quad (10.13)$$

Возвращаясь к исходной переменной  $x$ , получаем

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{C_3 \exp(2\tau) - \beta}}. \quad (10.14)$$

Теперь необходимо «сшить» решения (10.10) и (10.14). Для этого потребуем, чтобы  $x_m(0) = x_m(\infty) = x_0 + \varepsilon y_0$ . Это позволяет определить постоянную интегрирования  $C_3$ :

$$C_3 = \frac{1}{(x_0 + \varepsilon y_0)^2} + \beta. \quad (10.15)$$

Таким образом, выражение (10.14) принимает вид

$$x_m = \frac{(x_0 + \varepsilon y_0) \exp(-\tau)}{\sqrt{1 + \beta(x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - \exp(-2\tau))}}. \quad (10.16)$$

Окончательный вид решения будет следующим:  $x = x_0 + x_m - x_m(0)$ . Складывая выражения (10.10) и (10.16), получаем

$$x = -\varepsilon y_0 \exp(-\tau/\varepsilon) + \frac{(x_0 + \varepsilon y_0) \exp(-\tau)}{\sqrt{1 + \beta(x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - \exp(-2\tau))}}. \quad (10.17)$$

Возвращаясь к исходному времени  $t = 2\gamma\tau$ , запишем (10.17) в виде

$$x(t) = -\frac{y_0 \exp(-2\gamma t)}{4\gamma^2} + \frac{(x_0 + y_0/4\gamma^2) \exp(-t/2\gamma)}{\sqrt{1 + \beta(x_0 + y_0/4\gamma^2)^2 (1 - \exp(-t/\gamma))}}. \quad (10.18)$$

Характерные зависимости  $x(t)$  для различных знаков  $y_0$ , построенные по формуле (10.18), приведены на рис. 10.2 (для определенности мы рассматриваем случай  $x_0 > 0$ ).

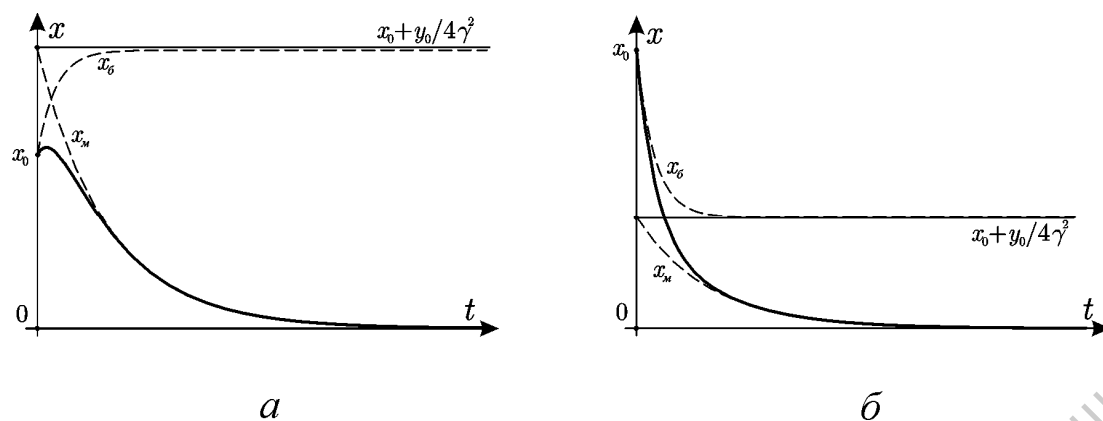


Рис. 10.2. Зависимости  $x(t)$  для осциллятора Дуффинга с сильным затуханием в случаях  $y_0 > 0$  (а) и  $y_0 < 0$  (б). Штриховыми линиями изображены зависимости для  $x_0$  и  $x_m$

**Задача 10.2.** Линейный осциллятор с затуханием, находящийся в положении равновесия, получил ударом скорость  $v_0$ . Найдите закон изменения координаты от времени и выполните в полученном соотношении предельный переход к случаю сильной диссипации. Постройте график зависимости координаты от времени и укажите на нем участки быстрого и медленного движения. Покажите, что закон изменения координаты на фазе быстрого движения может быть получен, если в исходном уравнении отбросить инерционный член, а на фазе медленного движения — если отбросить член, соответствующий упругой возвращающей силе.

**Задача 10.3.** Математическому маятнику длины  $l$  и массы  $m$ , находящемуся в покое в положении устойчивого равновесия в среде с сильной вязкостью (сила сопротивления пропорциональна скорости), сообщили ударом достаточно большую скорость  $v_0$ . Найдите зависимость угла отклонения маятника от времени. Оцените максимальный угол отклонения.

*Указания.* Выполните предварительно оценки, которые уточняют понятия «сильная вязкость» и «большая скорость» для данной задачи. Найдите решения, соответствующие фазам быстрого и медленного движений, постройте их суперпозицию и подчините ее начальным условиям.

Стоит обратить внимание, что метод разделения быстрых и медленных движений имеет много общего с методом многих масштабов. Действительно, метод многих масштабов позволяет получить решение, полностью совпадающее с (10.18). Чтобы убедиться в этом, решим следующую задачу.

**Задача 10.4.** Получите решение уравнения Дуффинга с сильным затуханием (10.1) при помощи метода многих масштабов.

*Решение.* В данном случае удобно ввести новое время несколько иным образом:  $\tau = 2\gamma t$ . При этом уравнение (10.1) приводится к виду

$$x'' + x' + \varepsilon(x + \beta x^3) = 0, \quad (10.19)$$

где  $\varepsilon = 1/4\gamma^2$  — малый параметр. Штрихи, как и ранее, означают дифференцирование по  $\tau$ . Будем искать решение уравнения (10.19) в виде ряда по степеням малого параметра

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots \quad (10.20)$$

и введем новые временные масштабы  $T_0 = \tau$ ,  $T_1 = \varepsilon\tau$ , ... (см. лекцию 9). Подставим эти соотношения в уравнение (10.19) и выделим члены одинаковых порядков малости.

В нулевом порядке по  $\varepsilon$  получим уравнение

$$\hat{D}_0^2 x_1 + \hat{D}_0 x_1 = 0. \quad (10.21)$$

Это уравнение для быстрых движений, совпадающее с (10.6). Интегрируя его один раз, получаем

$$\hat{D}_0 x_1 + x_1 = B. \quad (10.22)$$

Здесь  $B$  — постоянная интегрирования, которая, однако, может зависеть от медленных переменных ( $B = B(T_1)$ ). Повторное интегрирование уравнения (10.22) дает

$$x_1 = B + A \exp(-T_0). \quad (10.23)$$

Здесь  $A$  — также медленно меняющаяся функция.

Члены порядка  $\varepsilon$  в (10.19) приводят к уравнению

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \hat{D}_0 x_2 + 2\hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + \hat{D}_1 x_1 + x_1 + \beta x_1^3 = 0. \quad (10.24)$$

Подставив сюда решение (10.23) для  $x_1$ , найдем

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \hat{D}_0 x_2 + \hat{D}_1 B + B + \beta B^3 + [-\hat{D}_1 A + A + 3\beta AB^2] e^{-T_0} + 3\beta A^2 B e^{-2T_0} + \beta A^3 e^{-3T_0} = 0. \quad (10.25)$$

Теперь необходимо ответить на вопрос, какие члены в (10.25) будут приводить к секулярному росту решения для  $x_2$ . Очевидно, это могут быть только члены пропорциональные собственным функциям оператора  $\hat{D}_0^2 + \hat{D}_0$ , т.е. либо члены, пропорциональные  $\exp(-T_0)$ , либо члены, не зависящие от  $T_0$ . Непосредственная проверка показывает, что уравнение

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \hat{D}_0 x_2 = C e^{-T_0} \quad (10.26)$$

имеет решение вида

$$x_2 = C_1 + C_2 e^{-T_0} - C T_0 e^{-T_0}, \quad (10.27)$$

которое остается ограниченным при любых  $T_0$ . В то же время решение уравнения

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \hat{D}_0 x_2 = C \quad (10.28)$$

есть

$$x_2 = C_1 + C T_0, \quad (10.29)$$

т.е. нарастает секулярно. Итак, в уравнении (10.25) нужно приравнять к нулю члены, не зависящие от  $T_0$ .

Это приводит к уравнению

$$\hat{D}_1 B + B + \beta B^3 = 0, \quad (10.30)$$

которое совпадает с уравнением для медленных движений (10.4). Его решение с начальным условием  $B(0) = B_0$  запишем в виде (ср. (10.16))

$$B = \frac{B_0 e^{-T_1}}{\sqrt{1 + \beta B_0^2 (1 - e^{-2T_1})}}. \quad (10.31)$$

Подставляя это выражение в (10.23), окончательно находим

$$x_1 = \frac{B_0 e^{-T_1}}{\sqrt{1 + \beta B_0^2 (1 - e^{-2T_1})}} + A e^{-T_0}. \quad (10.32)$$

Вообще говоря, в этой формуле  $A$  также зависит от  $T_1$ . Однако, поскольку на фоне быстрого затухания, пропорционального  $\exp(-T_0)$ , эта зависимость несущественна, можно считать  $A = A_0 = \text{const}$ .

Возвращаясь к исходному времени  $t$ , окончательно получаем

$$x_1 = \frac{B_0 e^{-t/2\gamma}}{\sqrt{1 + \beta B_0^2 (1 - e^{-t/\gamma})}} + A_0 e^{-2\gamma t}. \quad (10.33)$$

Постоянные  $A_0$ ,  $B_0$  определяются из начальных условий. Если считать, что  $x_1(0) = x_0$ ,  $\dot{x}_1(0) = y_0$ , то нетрудно найти, что

$$B_0 = x_0 + \frac{y_0}{4\gamma^2}, \quad A_0 = -\frac{y_0}{4\gamma^2}. \quad (10.34)$$

Теперь видно, что решение (10.33) в точности совпадает с найденным ранее (10.18). Кроме того, метод многих масштабов позволяет продвинуться в более высокие порядки малости и найти поправки к этому решению.

*Часть III*

# **Автоколебания**

## Примеры автоколебательных систем

### 11.1. Основные определения и понятия

Наряду с колебательными системами, в которых энергия с течением времени может только уменьшаться из-за диссипации, существуют и такие, в которых возможно пополнение энергии колебаний за счет неустойчивостей. Это может иметь место, когда система в состоянии обмениваться с окружающей средой энергией или веществом, т.е. является *энергетически неизолированной (открытой)*. В открытых системах возникает множество принципиально новых явлений, в первую очередь — генерация *автоколебаний*. Термин «автоколебания» ввел А.А. Андронов в 1928 г. Он же заложил основы теории автоколебаний, впервые связав их с предельными циклами Пуанкаре.

Современное определение автоколебаний можно сформулировать следующим образом. *Автоколебания — это незатухающие колебания, поддерживаемые внешними источниками в нелинейной диссипативной системе, вид и свойства которых определяются самой системой и не зависят от начальных условий (по крайней мере, в конечных пределах)*. Ключевым в этом определении является требование независимости от начальных условий. С течением времени фазовая траектория стремится к некоторому притягивающему множеству, называемому *аттрактором*. После переходного процесса в системе устанавливаются колебания, которым отвечает движение изображающей точки по аттрактору. Такие колебания, очевидно, будут зависеть только от параметров системы, а не от начальных условий. Слова «по крайней мере, в конечных пределах» означают, что, в принципе, могут существовать несколько аттракторов, каждый из которых имеет свой бассейн притяжения, т.е. область в фазовом пространстве, откуда фазовые траектории стремятся к данному аттрактору.

Аттракторами, соответствующими периодическим автоколебаниям, являются устойчивые *предельные циклы*. Под предельным циклом понимается замкнутая изолированная фазовая траектория. Термин «изолированная» означает, что в ее достаточно малой (кольцеобразной) окрестности не существует других замкнутых фазовых траекторий. Это отличает предельные циклы от замкнутых фазовых траекторий, соответствующих периодическим колебаниям консервативного нелинейного осциллятора. Предельный цикл является устойчивым, если все соседние траектории приближаются к не-

му при  $t \rightarrow \infty$ , и неустойчивым, если соседние траектории удаляются от него при  $t \rightarrow \infty$ .

Разумеется, автоколебания не обязательно должны быть периодическими. Различают также *квазипериодические*, т.е. содержащие несколько независимых спектральных компонент, находящихся в иррациональном соотношении, а также *хаотические* автоколебания, которые являются случайными, хотя совершаются под действием неслучайных источников энергии. Спектр хаотических автоколебаний сплошной. Математическим образом квазипериодических автоколебаний в фазовом пространстве является  $n$ -мерный тор, а хаотических — *странный аттрактор*, т.е. притягивающее множество, имеющее чрезвычайно сложную внутреннюю структуру, на котором все (или почти все) траектории неустойчивы. Здесь мы сосредоточимся в основном на изучении периодических автоколебаний.

Класс автоколебательных систем очень широк: механические часы, радиотехнические, электронные и квантовые генераторы электромагнитных колебаний, духовые и смычковые музыкальные инструменты и др. Автоколебательный характер носят некоторые химические реакции процессы в биологических популяциях и живых организмах.

**Задача 11.1.** В сосуд с поперечным сечением  $S_1$  из крана с сечением  $S_2$  поступает со скоростью  $V$  вода. Вода может выливаться через узкую сифонную трубку с поперечным сечением  $S_3$  (рис. 11.1). Высота левого колена трубки равна  $h$ , а правого —  $H$ . Постройте график зависимости уровня воды в сосуде от времени и обоснуйте автоколебательный характер поведения системы. Найдите период установившихся автоколебаний. Считайте, что скорость вытекания воды через трубку определяется формулой Торричелли.

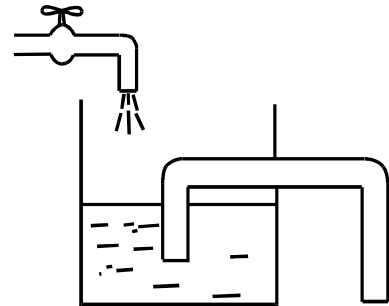


Рис. 11.1

В простейших автоколебательных системах можно, как правило, выделить следующие основные элементы:

- колебательную систему с затуханием;
- усилитель, содержащий источник энергии и преобразователь энергии источника в энергию колебаний;
- нелинейный ограничитель;
- звено обратной связи.

Рассмотрим эти элементы на классическом примере радиотехнического генератора, обобщенная схема которого приведена на рис. 11.2.

### 11.2. Обобщенная схема радиотехнического генератора.

#### Уравнение Ван дер Поля

Схема, приведенная на рис. 11.2 уже кратко обсуждалась ранее в лекции 3. Можно легко выделить те основные структурные элементы, о которых говорилось выше. Колебательной системой здесь служит  $RLC$ –контур. Напряжение с контура подается на вход

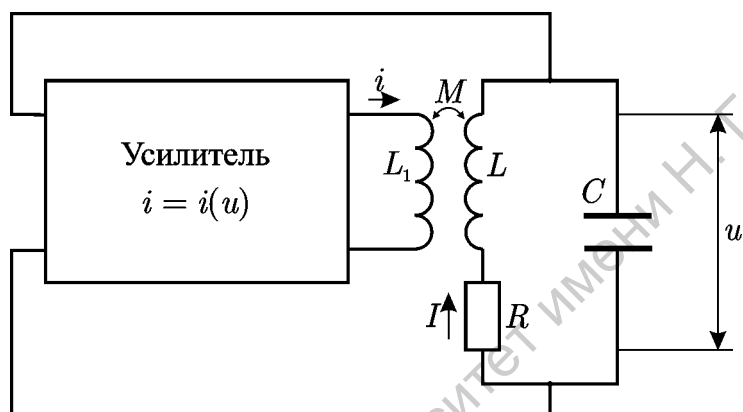


Рис. 11.2. Схема радиотехнического генератора автоколебаний

активного элемента — усилителя. Будем считать, что известна вольтамперная характеристика усилителя, т.е. зависимость  $i(u)$ , которую можно аппроксимировать кубическим полиномом

$$i(u) = g_0 u - g_2 u^3 + \dots \quad (11.1)$$

Коэффициенты  $g_n$  считаются положительными. Физическую природу усилителя мы пока не конкретизируем. Выход усилителя нагружен на катушку индуктивности  $L_1$ , которая индуктивно связана с катушкой контура. Таким образом обеспечивается обратная связь.

Механизм возбуждения автоколебаний в генераторе можно качественно описать следующим образом. Даже при отсутствии напряжения на выходе усилителя напряжение в контуре испытывает случайные флуктуации. Они усиливаются усилителем и вновь поступают в контур через цепь обратной связи. При этом из шумового спектра флуктуаций будет выделяться составляющая на собственной частоте высокочастотного контура. Если энергия, вносимая в контур таким образом, превосходит энергию потерь,



амплитуда колебаний нарастает. Для этого необходимо, чтобы коэффициент усиления был достаточно велик. Однако, поскольку зависимость  $i(u)$  (11.1) нелинейна, с ростом  $u$  коэффициент усиления падает, что приводит к установлению стационарных автоколебаний с постоянной амплитудой, в чем и состоит механизм нелинейного ограничения неустойчивости. Таким образом, нелинейность в автоколебательных системах играет принципиальную роль, регулируя поступление энергии из источника. В линейной системе (например, осциллятор с отрицательным трением) амплитуда колебаний нарастала бы до бесконечности.

Получим дифференциальное уравнение, описывающее колебания генератора. Запишем для контура уравнения Кирхгофа (обозначения показаны на рисунке):

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} + RI + u &= M \frac{di(u)}{dt}, \\ u &= \frac{1}{C} \int I dt. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Из этих уравнений с учетом выражения для вольтамперной характеристики (11.1) можно получить

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \omega_0^2 (Mg_0 - RC - 3Mg_2u^2) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0. \quad (11.3)$$

Здесь  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — собственная частота колебательного контура. Уравнение (11.3) носит название *уравнения Ван дер Поля* и является основной моделью при анализе периодических автоколебаний.

Определим условия самовозбуждения автоколебаний. Линеаризуя уравнение (11.3), получим

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{Mg_0 - RC}{LC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0. \quad (11.4)$$

При  $RC > Mg_0$  это обычное уравнение линейного осциллятора с затуханием и состояние равновесия устойчиво. При

$$Mg_0 > RC \quad (11.5)$$

оно превращается в уравнение осциллятора с отрицательным трением и, следовательно, малые возмущения будут нарастать с течением времени.

Анализируя соотношение (11.5), можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, коэффициент взаимоиндукции должен быть положительным. В этом случае колебания поступившие с выхода усилителя, синфазны с колебаниями в контуре и способствуют их усилению. Такая обратная связь называется *положительной*. Наоборот, при  $M < 0$  колебания противофазны и взаимно подавляют друг друга. Обратная связь стабилизирует положение равновесия и называется *отрицательной*.

Второй вывод, который можно сделать из (11.5), также достаточно очевиден: усиление, которое характеризуется коэффициентом  $g_0$ , должно превосходить потери (за них отвечает сопротивление  $R$ ). Вообще, как правило, для самовозбуждения генератора любого типа необходимо выполнение двух условий, которые обычно называют амплитудным и фазовым. Смысл этих условий вполне аналогичен описанным выше: а) энергия источника, которая преобразуется в энергию колебаний, должна превосходить потери; б) эта энергия должна поступать в колебательную систему в правильной фазе и способствовать усилению колебаний.

Удобно привести уравнение Ван дер Поля (11.3) к более простому виду, содержащему единственный управляющий параметр. Вводя безразмерные переменные  $\tau = \omega_0 t$ ,  $x = u\sqrt{3\omega_0 Mg_2}$ , получим

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (11.6)$$

где  $\lambda = (Mg_0 - RC)/\sqrt{LC}$  — безразмерный параметр, а точки обозначают дифференцирование по  $\tau$ . Наряду с уравнением Рэля

$$\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + y = 0, \quad (11.7)$$

оно служит основной моделью для анализа периодических автоколебаний. Принципиальной разницы между этими уравнениями нет: заменой  $y = x/\sqrt{3}$  уравнение (11.6) приводится к виду (11.7).

Уравнение Ван дер Поля имеет единственную особую точку  $x = \dot{x} = 0$ , которая является устойчивым узлом при  $\lambda < -2$ , устойчивым фокусом при  $-2 < \lambda < 0$ , неустойчивым фокусом при  $0 < \lambda < 2$  и неустойчивым узлом при  $\lambda > 2$ . Если выполнено условие самовозбуждения  $\lambda > 0$ , на фазовой плоскости имеется также предельный цикл, отвечающий режиму периодических автоколебаний. В «докомпьютерную» эпоху теории колебаний был разработан целый ряд методов приближенного графического построения

ния фазовых портретов нелинейных систем. Однако проще и удобнее прибегнуть непосредственно к численному интегрированию уравнения (11.6). Результаты представлены на рис. 11.3, где изображены фазовые портреты (слева) и временные реализации (справа) колебаний при различных значениях параметра  $\lambda$ .

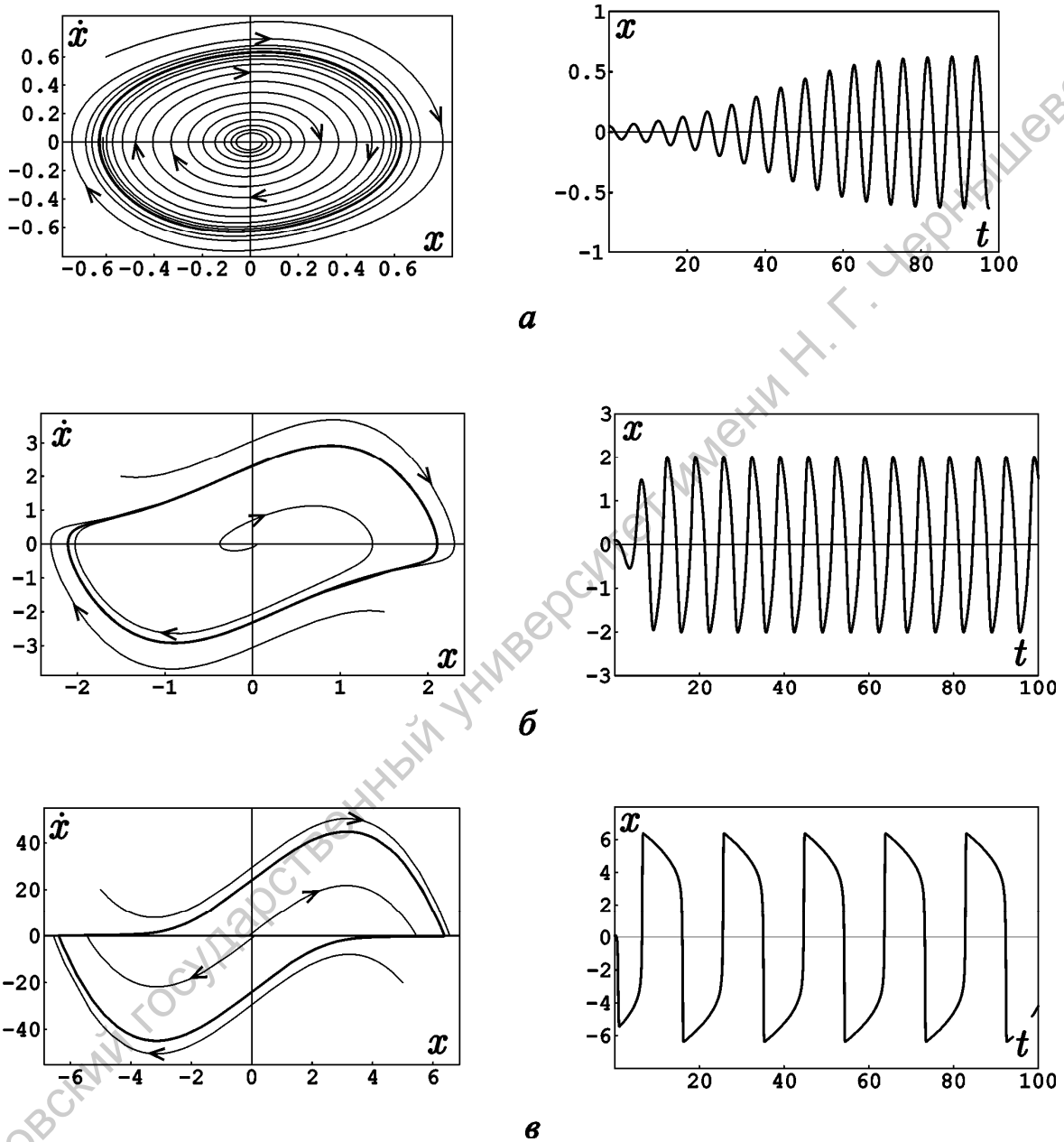


Рис. 11.3. Фазовые портреты (слева) и временные реализации колебаний (справа) осциллятора Ван дер Поля:  $\lambda = 0.1$  (а);  $\lambda = 1.1$  (б);  $\lambda = 10.0$  (в)

При  $\lambda \ll 1$  (рис. 11.3а) автоколебания являются квазигармоническими. Выходу на предельный цикл предшествует длительный (по сравнению с периодом колебаний) переходный процесс. Хотя установившиеся колебания не являются строго гармониче-

скими, а Фурье-спектр содержит высшие гармонические составляющие, их амплитуда мала. При  $\lambda \sim 1$  (рис. 11.3б) колебания уже существенно негармонические. Наконец, при  $\lambda \gg 1$  (рис. 11.3в) на осциллограмме отчетливо можно выделить участки быстрого и медленного изменения переменной  $x$ . Такие колебания называются *релаксационными*. Режимы квазигармонических и релаксационных автоколебаний будут подробно рассмотрены в лекции 12.

**Задача 11.2.** В литературе часто встречается следующая форма записи уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Укажите замену переменных и параметров, посредством которой оно приводится к виду (11.6). Обратите внимание на сингулярность при  $\lambda \rightarrow 0$ , делающую данную форму неудобной для анализа бифуркации рождения цикла.

**Задача 11.3.** Простое механическое устройство, способное генерировать автоколебания [Н.Л. Кайдановский, С.Э. Хайкин, 1933], представляет собой груз массы  $m$ , находящийся на ленте транспортера, которая движется равномерно со скоростью  $V$ . Тело прикреплено к стене пружиной с жесткостью  $k$  (см. рис. 1.8). Сила трения между грузом и лентой зависит от относительной скорости движения  $v$  по закону

$$F(v) = F_1 + \frac{F_2}{1 + v^2/u^2},$$

где  $F_{1,2}$ ,  $u$  — параметры. Покажите, что при определенной скорости ленты  $V$  уравнение движения груза может быть приведено к уравнению Рэлея (11.7). Оцените амплитуду колебаний, при которой справедливо уравнение Рэлея.

### 11.3. Автогенератор на активном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью

Рассмотрим еще одну схему генератора электрических колебаний, представленную на рис. 11.4а. Параллельно колебательному контуру с потерями включен нелинейный элемент, вольтамперная характеристика которого имеет *падающий участок*. Такими характеристиками обладают, например, туннельный диод, вакуумная четырехэлектродная лампа (тетрод) и другие приборы (для туннельного диода физический механизм, ответственный за возникновение падающего участка вольтамперной характеристики, кратко пояснялся в лекции 2). На падающем участке *дифференциальная проводимость*  $g_d = dI/du$  отрицательна. Будем считать, что вольтамперную характеристику в окрестности рабочей точки можно аппроксимировать кубическим полиномом (рис. 11.4б)

$$I(u) = -g_0 u + g_2 u^3. \quad (11.8)$$

Покажем, что элемент с отрицательной дифференциальной проводимостью является активным и его включение в контур может приводить к возбуждению автоколебаний.

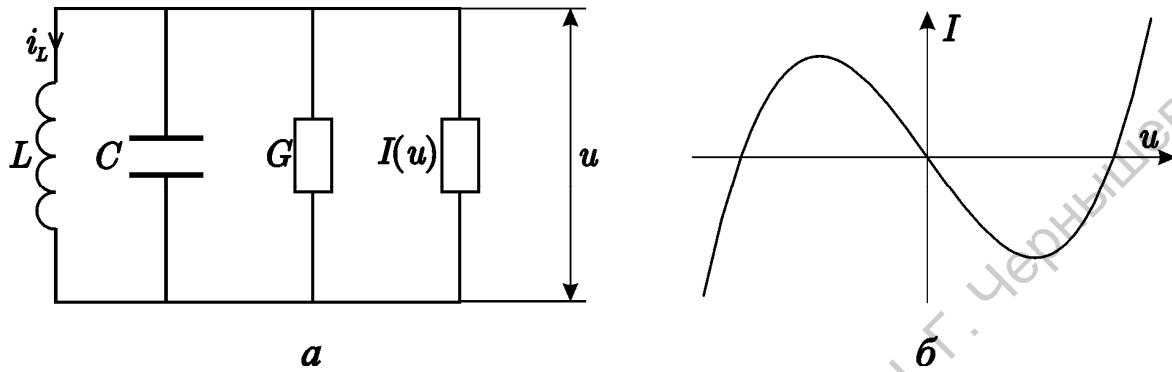


Рис. 11.4. Принципиальная схема генератора на активном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью (а) и вольтамперная характеристика активного элемента, аппроксимированная кубическим полиномом (б)

Напомним некоторые определения из радиотехники. Пусть при колебательном процессе напряжение на некотором элементе изменяется по закону  $u = u(t)$ , а ток через него — по закону  $i = i(t)$ . Величина  $p(t) = i(t)u(t)$  называется *мгновенной мощностью*, выделяемой на этом элементе. Если колебательный процесс *периодический*, то можно усреднить мгновенную мощность по периоду колебаний. Результат усреднения

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (11.9)$$

называется *активной мощностью*. Если на элемент, вольтамперная характеристика которого имеет падающий участок, подано напряжение  $u = U_0 \sin \omega t$ , причем амплитуда  $U_0$  настолько мала, что можно ограничиться линейной аппроксимацией падающего участка, т.е. учесть только первое слагаемое в (11.8), то нетрудно показать, что активная мощность будет отрицательна,  $P_a = -g_0 U_0^2 / 2$ . Это означает, что при протекании тока через такой элемент в среднем энергия на нем выделяется, а не поглощается. Элементы, обладающие характеристиками с отрицательной дифференциальной проводимостью (или сопротивлением) называются *активными* и используются для усиления и генерации электромагнитных колебаний.

Запишем для генератора уравнения Кирхгофа

$$C \frac{du}{dt} + Gu + i_L - g_0 u + g_2 u^3 = 0, \quad (11.10)$$

$$u = L \frac{di_L}{dt}. \quad (11.11)$$

Дифференцируя уравнение (11.10) и подставляя (11.11), снова приходим к уравнению Ван дер Поля

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{C}(g_0 - G - 3g_2u^2)\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = 0. \quad (11.12)$$

Условие самовозбуждения имеет простой вид  $g_0 > G$ .

#### 11.4. Ламповый генератор Ван дер Поля

Наконец, рассмотрим ламповый генератор Ван дер Поля, который традиционно служит классической моделью для изучения автоколебательных систем. На рис. 11.5 приведены схемы генераторов Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода (а) и в цепи сетки (б). Принципиальной разницы между этими схемами нет, так что в дальней-

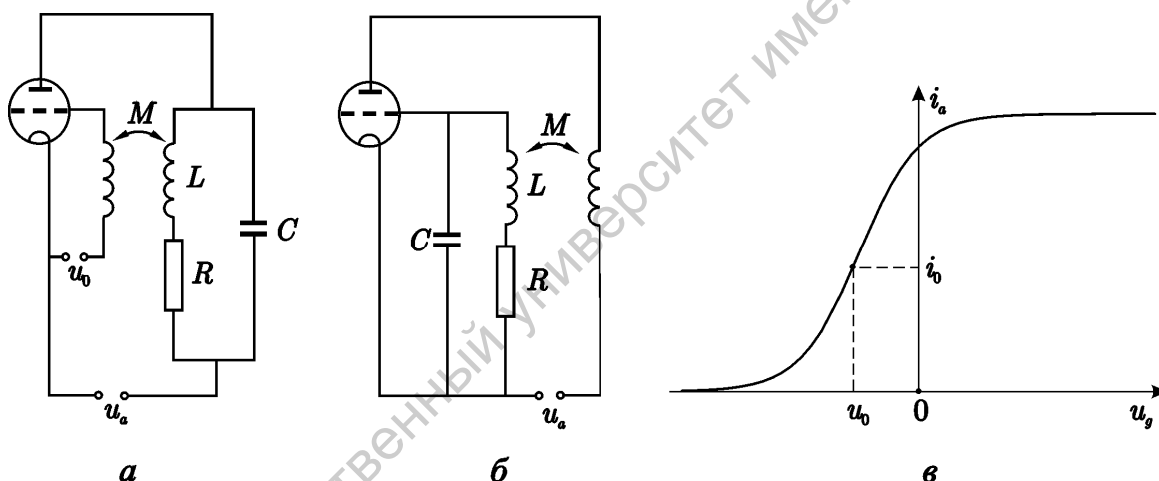


Рис. 11.5. Схемы лампового генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода (а) и в цепи сетки (б) и анодно-сеточная характеристика триода (в)

шем мы будем для определенности рассматривать первый вариант. Здесь также можно легко выделить основные структурные элементы автоколебательной системы: роль колебательной системы с потерями выполняет колебательный контур, обратная связь осуществляется посредством взаимной индуктивности катушек, источником питания служит анодная батарея, а активным элементом, преобразующим энергию источника в энергию колебаний является трехэлектродная лампа — триод (впрочем, не имеет принципиального значения, выполнен генератор на основе вакуумной электронной лампы или полупроводникового транзистора). При некотором постоянном значении анодного напряжения  $u_a$  зависимость анодного тока лампы  $i_a$  от напряжения на сетке  $u_g$  (анод-

но-сеточная характеристика) имеет вид, изображенный на рис. 11.5в. На сетку лампы подается постоянное напряжение смещения  $u_0$ , обеспечивающее выбор рабочей точки на анодно-сеточной характеристике.

Получим дифференциальное уравнение, описывающее колебания в генераторе. Обозначая токи в индуктивной и емкостной ветвях контура как  $i_L$  и  $i_C$ , соответственно, запишем уравнения Кирхгофа:

$$i_a = i_L + i_C, \quad (11.13)$$

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = \frac{1}{C} \int i_C dt. \quad (11.14)$$

Дифференцируя уравнение (11.14) и подставляя (11.13), получаем

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{C} = \frac{i_a}{C}. \quad (11.15)$$

Сеточное напряжение, очевидно, можно представить в виде  $u_g = u_0 + u$ , где  $u = M di_L/dt$ ,  $M$  — коэффициент взаимной индукции. Продифференцируем уравнение (11.15) еще раз и перепишем его относительно  $u$ :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{R}{LC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{MS(u)}{LC} \frac{du}{dt}. \quad (11.16)$$

Здесь  $S(u) = di_a/du_g|_{u_a=\text{const}}$  — крутизна анодно-сеточной характеристики. Следуя Ван дер Полю, аппроксимируем ее в окрестности рабочей точки кубическим полиномом

$$i_a = i_0 + S_0 u - S_2 u^3, \quad (11.17)$$

что можно сделать в случае слабой нелинейности. Тогда уравнение (11.16) принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \omega_0^2 (MS_0 - RC - 3MS_2 u^2) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0. \quad (11.18)$$

Мы вновь получили уравнение Ван дер Поля, полностью аналогичное (11.3) и (11.12).

**Задача 11.4.** Если провести по струне скрипки смычком, то она зазвучит. Почему? (Указание. Необходимо учесть зависимость силы трения от скорости).

**Задача 11.5.** На рис. 11.6 изображена полученная экспериментально вольтамперная характеристика туннельного диода. В эксперименте измерены максимальное и минимальное значения тока  $I_1$ ,  $I_2$  и соответствующие значения напряжения  $V_1$  и  $V_2$ . На

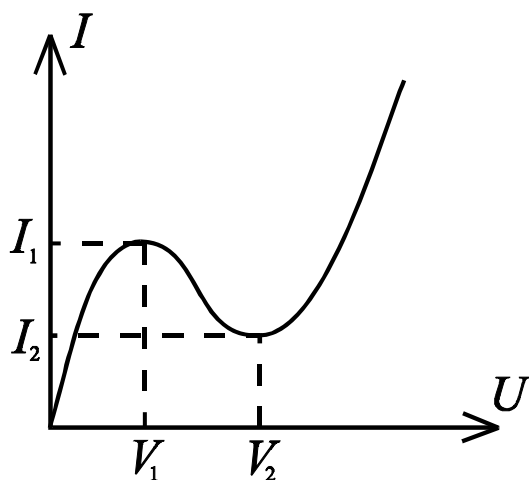


Рис. 11.6

этом диоде собран автогенератор по схеме, приведенной на рис. 11.4а. Параметры схемы  $L$ ,  $C$  и  $G$  считайте известными. Найдите величину амплитуды напряжения установившихся квазигармонических автоколебаний на туннельном диоде. При каком условии автоколебания будут квазигармоническими? Пусть величина проводимости  $G$  может регулироваться. При каком значении  $G$  возникнут автоколебания? Чему равна максимально возможная амплитуда автоколебаний?

### 11.5. Химические колебания. Брюсселятор

Важным и нетривиальным примером автоколебательных процессов служат некоторые химические реакции. Химические колебания — это колебания концентраций реагирующих веществ. К настоящему времени известно достаточно много колебательных реакций. Наиболее знаменитая них была открыта Б.П. Белоусовым в 1950 г. и позднее детально изучена А.М. Жаботинским. Реакция Белоусова — Жаботинского (БЖ) представляет собой процесс окисления малоновой кислоты при взаимодействии с  $\text{BrO}_3^-$  в присутствии ионов  $\text{Ce}_4^+$  в качестве катализатора. В ходе реакции раствор периодически изменяет свой цвет: голубой — красный — голубой — красный и т.д. Кроме простых периодических колебаний реакция БЖ демонстрирует (в зависимости от условий эксперимента) множество различных типов пространственно-временной динамики, которые окончательно еще не исследованы. Предложены различные математические модели реакции БЖ (например, модель Филда, Кереса и Нойеса — «орегонатор»), однако ни одна из них не описывает полностью все детали, наблюдаемые в эксперименте.

Здесь мы рассмотрим более простой модельный пример: гипотетическую химическую реакцию, которая получила название *брюсселятор* [И. Пригожин, Р. Лефевр, 1968]. Уравнения этой реакции имеют вид





Предполагается, что реагенты  $A$  и  $B$  имеются в избытке, так что их концентрации можно считать постоянными, а  $D$  и  $E$  ни в какие реакции не вступают.

Составим *кинетические уравнения*, соответствующие реакции (11.19), которые описывают динамику концентраций реагирующих веществ. Поскольку число актов химической реакции в единицу времени определяется вероятностью столкновения молекул реагентов, скорости изменения концентраций продуктов реакции пропорциональны произведению концентраций соответствующих реагентов с коэффициентами пропорциональности  $k_n$ , называемыми *константами скоростей реакций*. Тогда кинетические уравнения можно записать в виде<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dt} &= k_1 A - k_2 B X + k_3 X^2 Y - k_4 X, \\
 \frac{dY}{dt} &= k_2 B X - k_3 X^2 Y.
 \end{aligned}
 \tag{11.20}$$

Символами  $X, Y, \dots$  будем теперь обозначать соответствующие концентрации. Отметим, что из третьего уравнения системы (11.19) следует, что скорость образования вещества  $X$  зависит от его концентрации, т.е. эта стадия реакции носит *автокаталитический* характер.

Приведем уравнения (11.20) к безразмерному виду, содержащему минимальное число управляющих параметров. Для этого перейдем к новым переменным  $\tau = k_4 t$ ,  $x = (k_3/k_4)^{1/2} X$ ,  $y = (k_3/k_4)^{1/2} Y$ . Тогда уравнения (11.20) примут вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= a - (b+1)x + x^2 y, \\
 \dot{y} &= bx - x^2 y,
 \end{aligned}
 \tag{11.21}$$

где  $a = (k_1^2 k_3 / k_4^3)^{1/2} A$ ,  $b = (k_2 / k_4) B$ . Отметим, что по смыслу задачи переменные  $x, y$  и параметры  $a, b$  могут принимать только положительные значения.

<sup>1</sup> Мы рассматриваем пространственно-однородные уравнения, что справедливо, например, в случае полного перемешивания. В отсутствие перемешивания в (11.20) следует учесть члены, отвечающие за диффузию. При этом возникают новые нетривиальные эффекты, такие как неустойчивость Тьюринга и образование диссипативных структур.

Итак, мы имеем динамическую систему второго порядка с двумя управляющими параметрами  $a$  и  $b$ . Состояние равновесия

$$x_0 = a, y_0 = b/a \quad (11.22)$$

отвечает стационарному протеканию химической реакции, когда концентрации реагирующих веществ постоянны. Определим условия его неустойчивости, т.е. условия самовозбуждения автоколебаний. Зададим малые возмущения состояния равновесия (11.22)

$$x_0 = a + \xi, y_0 = b/a + \eta \quad (11.23)$$

и линеаризуем систему (11.21). Получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (b-1)\xi + a^2\eta, \\ \dot{\eta} &= -b\xi - a^2\eta. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Полагая  $\xi, \eta \sim \exp(pt)$ , находим характеристическое уравнение

$$(p-b+1)(p+a^2) = -a^2b. \quad (11.25)$$

Раскрывая скобки, получаем квадратное уравнение

$$p^2 + p(a^2 + 1 - b) + a^2 = 0, \quad (11.26)$$

корни которого есть

$$p = -\frac{a^2 - b + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 - b + 1)^2}{4} - a^2}. \quad (11.27)$$

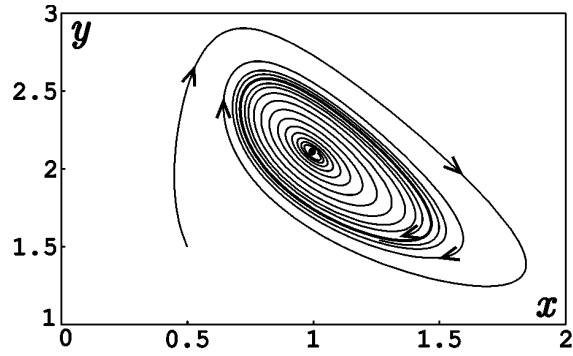
Анализ этих выражений показывает, что в критической точке

$$b_c = a^2 + 1 \quad (11.28)$$

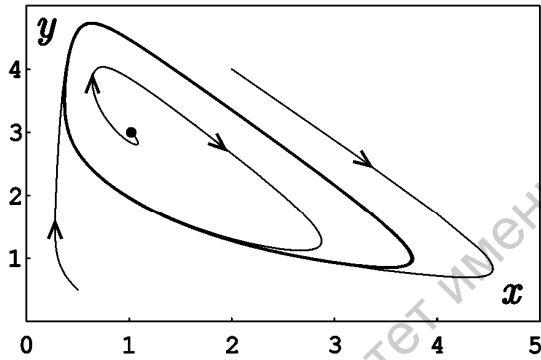
состояние равновесия становится неустойчивым. Это и есть условие самовозбуждения автоколебаний.

**Задача 11.6.** Проведите анализ корней характеристического уравнения (11.27) и определите, каков тип состояния равновесия при различных значениях параметров.

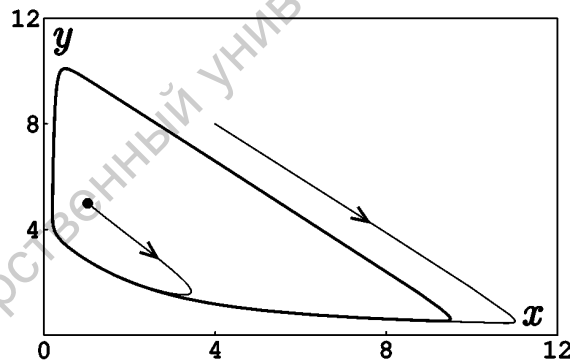
Продвинуться дальше и выяснить, как ведет себя система в нелинейном режиме, можно, решая уравнения (11.21) численно. Решение показывает, что при  $b > b_c$  состояние равновесия теряет устойчивость и на фазовой плоскости появляется предельный



**а**



**б**



**в**

Рис. 11.7. Примеры фазовых портретов брусселятора при  $a = 1.0$ ,  $b = 2.1$  (а);  $b = 3.0$  (б);  $b = 5.0$  (в)

цикл, причем частота колебаний, как видно из (11.26), равна  $a$ . При  $b$ , слегка превышающих критическое значение, колебания являются квазигармоническими, с ростом  $b$  они становятся релаксационными. Примеры фазовых портретов приведены на рис. 11.7. Таким образом, химический осциллятор демонстрирует поведение, типичное для автоколебательных систем и вполне аналогичное, например, осциллятору Ван дер Поля.

## Уравнения Ван дер Поля и Рэля.

### Бифуркация Андронова–Хопфа

Основными моделями для анализа периодических автоколебаний служат уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (12.1)$$

и Рэля

$$\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + y = 0. \quad (12.2)$$

Как было показано в лекции 11, самовозбуждение автоколебаний происходит при  $\lambda > 0$ . По мере увеличения  $\lambda$  происходит постепенный переход от слабонелинейных квазигармонических колебаний к релаксационным (рис. 11.3). В данной лекции мы рассмотрим эти режимы более подробно.

#### 12.1. Квазигармонические автоколебания.

##### Бифуркация Андронова–Хопфа

Проанализируем более подробно режим квазигармонических автоколебаний, когда параметр  $\lambda$  в уравнении Ван дер Поля мал. Воспользуемся методом усреднения (методом медленно меняющихся амплитуд), который был разработан Ван дер Полем именно для этой задачи (лекция 9). Будем искать решение в виде

$$x = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it}, \quad (12.3)$$

причем наложим на  $A$  и  $A^*$  дополнительное условие

$$\dot{A}e^{it} + \dot{A}^*e^{-it} = 0. \quad (12.4)$$

Вычисляя  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  с учетом (12.4) и подставляя в уравнение Ван дер Поля (12.1), после несложных преобразований получаем

$$2i\dot{A}e^{it} - (\lambda - 2|A|^2 - A^2e^{2it} + (A^*)^2e^{-2it})(iAe^{it} - iA^*e^{-it}) = 0. \quad (12.5)$$

Раскроем скобки и разделим это уравнение на  $\exp(it)$ , что дает

$$2i\dot{A} - i(\lambda - |A|^2)A + iA^3 e^{2it} + i(\lambda - |A|^2)A^* e^{-2it} - i(A^*)^3 e^{-4it} = 0. \quad (12.6)$$

Усредняя уравнение (12.6) по периоду  $T = 2\pi$ , что позволяет устранить быстро меняющиеся члены, приходим к *укороченному уравнению Ван дер Поля*

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(\lambda - |A|^2)A. \quad (12.7)$$

Найдем решение этого уравнения. Вводя вещественные амплитуду  $a$  и фазу  $\varphi$ ,  $A = a \exp(i\varphi)$ , и подставляя в уравнение (12.7), получаем

$$\dot{a} = \frac{1}{2}(\lambda - a^2)a, \quad (12.8)$$

$$\dot{\varphi} = 0, \quad (12.9)$$

Из уравнения (12.9) следует, что  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ , следовательно, в рамках сделанных приближений нет никакой поправки к частоте колебаний. Применительно к радиотехническим генераторам, рассмотренным в предыдущей лекции, это означает, что генерация происходит точно на собственной частоте колебательного контура.

Домножив уравнение (12.8) на  $a$ , получим

$$\dot{\rho} = (\lambda - \rho)\rho, \quad (12.10)$$

где  $\rho = a^2$ . Это уравнение легко интегрируется. Решение с начальным условием  $\rho(t=0) = \rho_0$  имеет вид

$$\rho = \frac{\lambda}{1 + \left(\frac{\lambda - \rho_0}{\rho_0}\right) \exp(-\lambda t)}. \quad (12.11)$$

Если начальное возмущение мало,  $\rho_0 \ll \lambda$ , то на начальной стадии ( $\lambda t \ll 1$ ) амплитуда колебаний нарастает экспоненциально:  $\rho = \rho_0 \exp(\lambda t)$ . На больших временах  $\rho \rightarrow \lambda$ , т.е. устанавливаются автоколебания с постоянной амплитудой  $a \rightarrow \sqrt{\lambda}$ . Процесс установления амплитуды иллюстрирует рис. 12.1.

Окончательно для исходной переменной  $x(t)$  в режиме квазигармонических колебаний будем иметь

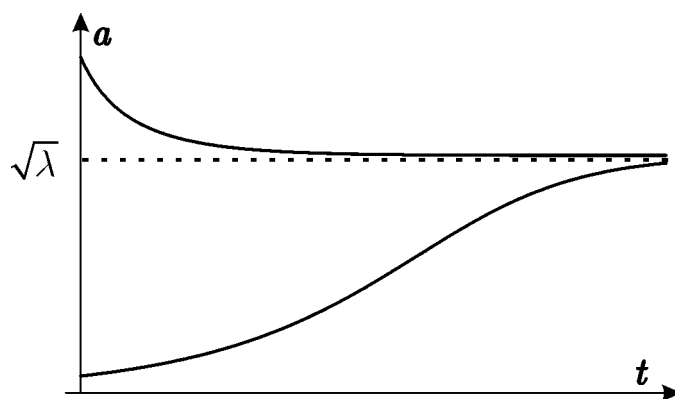
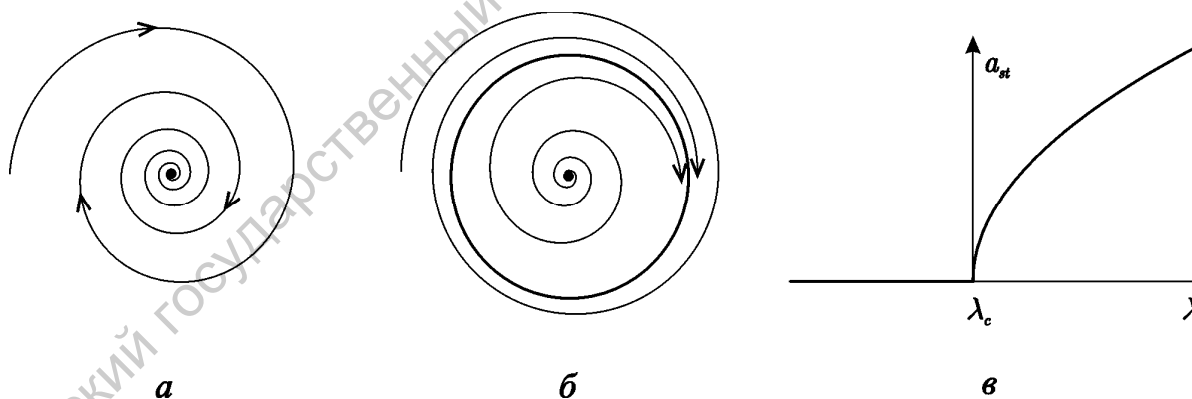


Рис. 12.1. Динамика амплитуды автоколебаний в процессе установления стационарного режима

$$x(t) \approx 2\sqrt{\lambda} \cos(t + \varphi_0) + \dots, \quad (12.12)$$

где  $\varphi_0$  — произвольная начальная фаза, а многоточием обозначены высшие гармонические составляющие, амплитуды которых малы. Их можно найти, например, при помощи метода многих масштабов, проводя разложения до членов более высоких порядков малости (в качестве малого параметра будет, очевидно, фигурировать величина  $\sqrt{\lambda}$ ).

Таким образом, когда бифуркационный параметр  $\lambda$  проходит критическое значение  $\lambda_c = 0$ , фазовый портрет системы трансформируется следующим образом. При

Рис. 12.2. Трансформация фазовых портретов при суперкритической бифуркации Андронова — Хопфа:  $\lambda < \lambda_c$  (а);  $\lambda > \lambda_c$  (б); зависимость характерного размера предельного цикла от бифуркационного параметра (в)

$\lambda < \lambda_c$  на фазовой плоскости имеется единственное состояние равновесия типа устойчивый фокус (рис. 12.2а). При  $\lambda > \lambda_c$  оно становится неустойчивым и в его окрестности возникает устойчивый предельный цикл (рис. 12.2б). Характерный размер предельного цикла (т.е. амплитуда стационарных автоколебаний) увеличивается пропорционально

$\sqrt{\lambda}$  (рис. 12.2в). Такая бифуркация называется *нормальной (суперкритической) бифуркацией Андронова–Хопфа*. Термин «суперкритический» связан с тем, что предельный цикл возникает только после того, как параметр превысит критическое значение. Поскольку амплитуда колебаний с ростом  $\lambda$  плавно увеличивается от нуля, говорят, что самовозбуждение происходит *мягко*. Важно отметить, что для всех систем с мягким самовозбуждением закон  $a_{st} \sim \sqrt{\lambda - \lambda_c}$  является универсальным. Разумеется, речь идет лишь о слабой надкритичности, когда колебания являются квазигармоническими.

**Задача 12.1.** Покажите, что решение укороченного уравнения Ван дер Поля в случае  $\lambda < 0$  при больших временах отвечает экспоненциальному затуханию. Соответствует ли множитель перед экспонентой начальной амплитуде колебаний? Почему?

**Задача 12.2.** С помощью укороченного уравнения (12.7) оцените время установления квазигармонических колебаний в системе, описываемой уравнением Ван дер Поля. Начальная амплитуда  $A_0$  много меньше амплитуды установившихся колебаний. Как ведет себя время установления при приближении параметра к бифуркационному значению?

**Задача 12.3.** Получите укороченное уравнение, описывающее динамику медленно меняющейся амплитуды, для уравнения Ван дер Поля — Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (12.13)$$

и найдите его решение. Уравнение (12.13) описывает, например, радиотехнические генераторы, аналогичные описанным в лекции 11, когда в колебательный контур включена *нелинейная емкость*, т.е. элемент, заряд на котором нелинейным образом зависит от приложенного напряжения:  $q = C_0 u + C_2 u^3$ .

*Решение.* Получение укороченного уравнения не представляет принципиальной сложности по сравнению с уравнением Ван дер Поля. Поэтому сразу запишем результат:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(\lambda - |A|^2)A + \frac{3i\beta}{2}|A|^2 A. \quad (12.14)$$

Последнее слагаемое, отличающее его от (12.7), характеризует влияние фазовой нелинейности — нелинейный сдвиг частоты, типичный для уравнения Дуффинга (см. лекцию 8). Из уравнения (12.14) следуют уравнения для вещественных амплитуды и фазы (ср. (12.8), (12.9))

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2}(\lambda - a^2)a, \\ \dot{\phi} &= \frac{3\beta a^2}{2}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Первое уравнение в точности совпадает с (12.8), следовательно, установление амплитуды происходит так же, как и в осцилляторе Ван дер Поля (рис. 12.1). Можно подставить решение (12.11) во второе уравнение системы (12.15) и найти динамику фазы колебаний. Предлагаем читателю проделать это самостоятельно. Заметим, что в режиме установившихся колебаний

$$\dot{\phi} = \frac{3\beta\lambda}{2},$$

т.е. появляется постоянная поправка к частоте, пропорциональная параметру  $\lambda$ . Таким образом, здесь имеются два типа нелинейности: фазовая (нелинейный сдвиг частоты) и амплитудная (нелинейные потери), которые действуют по-разному. Первая изменяет частоту генерации, тогда как вторая ограничивает нарастание амплитуды, приводя к установлению стационарных автоколебаний.

**Задача 12.4.** Покажите, что для двумерной системы общего вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}$$

порог бифуркации Андронова–Хопфа может быть определен из условия  $S = 0$ ,  $J > 0$ , где  $S$  и  $J$  — след и якобиан матрицы, описывающей эволюцию возмущения исходных уравнений и вычисленной непосредственно в неподвижной точке. Найдите этим способом порог бифуркации Андронова–Хопфа для уравнений брюсселятора (11.21).

**Задача 12.5.** Одна из распространенных в популяционной биологии моделей «хищник-жертва» может быть представлена в виде

$$\dot{x} = \alpha(x)x - xy, \quad \dot{y} = xy - my.$$

Если положить  $\alpha = const$ , то мы получим классическую модель Вольтерра (подробнее см. Ю.М. Свирежев, «Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии», где рассмотрены и другие варианты такой системы). Покажите, что если функция  $\alpha(x)$ , характеризующая

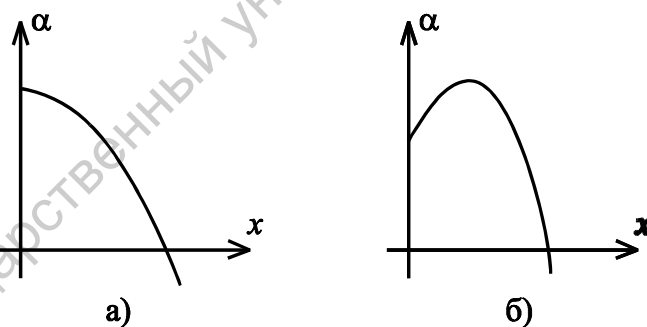


Рис. 12.3

мальтузианский рост «жертвы», имеет вид, показанный на рис.12.3а, то в системе невозможна бифуркация Андронова–Хопфа, а если ее вид соответствует рис.12.3б, то такая бифуркация возможна. Найдите порог бифуркации в случае  $\alpha(x) = a + bx - x^2$ . (Предварительно покажите, что для произвольной параболы аппроксимации функции  $\alpha(x)$  коэффициент перед членом  $x^2$  действительно можно убрать перенормировкой.)

**Задача 12.6.** В лекции 11 была рассмотрена простая модель автоколебательной химической реакции — брюсселятор



$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - (b+1)x + x^2y, \\ \dot{y} &= bx - x^2y.\end{aligned}\quad (12.16)$$

В случае, когда параметр  $b$  слегка превышает критическое значение  $b_c = a^2 + 1$ , получите укороченное уравнение для амплитуды квазигармонических колебаний.

*Решение.* Поскольку, амплитуда квазигармонических колебаний пропорциональна корню из надкритичности, положим

$$b = b_c + \varepsilon^2, \quad (12.17)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Удобно также ввести вместо  $x$  и  $y$  новую переменную

$$\xi = x - x_0 + y - y_0, \quad (12.18)$$

где  $x_0, y_0$  — равновесные значения. Они удовлетворяют соотношениям (11.21). С учетом выражений (12.17), (12.18) можно перейти от системы уравнений (12.16) к одному уравнению второго порядка относительно переменной  $\xi$ :

$$\ddot{\xi} - \left[ \varepsilon^2 + 2a\xi + \frac{a^2 - 1}{a} \dot{\xi} - (\xi + \dot{\xi}) \dot{\xi} \right] \dot{\xi} + a^2 \xi = 0. \quad (12.19)$$

Для получения укороченного уравнения используем метод многих масштабов (лекция 9). Будем искать решение уравнения (12.19) в виде степенного ряда

$$\xi = \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^3 \xi_3 + \dots \quad (12.20)$$

и введем медленные масштабы  $T_n = \varepsilon^n t$ . Мы начинаем разложения с членов порядка  $\varepsilon$ , потому что возмущения предполагаются малыми.

Выделяя в (12.19) члены первого порядка малости, получаем линейное уравнение

$$\hat{D}_0^2 \xi_1 + a^2 \xi_1 = 0, \quad (12.21)$$

где, как и ранее, введены обозначения  $\hat{D}_n = \partial / \partial T_n$ . Решение этого уравнения есть

$$\xi_1 = A \exp(iaT_0) + \text{к.с.}, \quad (12.22)$$

где  $A = A(T_1, T_2, \dots)$  — медленно меняющаяся амплитуда.

Во втором порядке малости получаем уравнение

$$\hat{D}_0^2 \xi_2 + a^2 \xi_2 + 2\hat{D}_0 \hat{D}_1 \xi_1 - 2a \xi_1 \hat{D}_1 \xi_1 - \frac{a^2 - 1}{a} (\hat{D}_0 \xi_1)^2 = 0. \quad (12.23)$$

Подставляя сюда выражение (12.22) для  $\xi_1$ , нетрудно убедиться, что единственным секулярным членом, пропорциональным  $\exp(iaT_0)$ , является слагаемое  $2\hat{D}_0 \hat{D}_1 \xi_1$ . Его, необходимо положить равным нулю, следовательно

$$\hat{D}_1 A = 0, \quad (12.24)$$

т.е. амплитуда  $A$  зависит только от медленного времени  $T_2$ . Этот результат является следствием того, что управляющий параметр превышает критическое значение на величину порядка  $\varepsilon^2$ , поэтому на временных масштабах порядка  $\varepsilon$  изменения амплитуды колебаний не проявляются. Уравнение (12.23) принимает вид

$$\hat{D}_0^2 \xi_2 + a^2 \xi_2 = 2a(a^2 - 1)|A|^2 - a(a - i)^2 A^2 \exp(2iaT_0) + \text{к.с.} \quad (12.25)$$

Это уравнение вынужденных колебаний гармонического осциллятора, решение которого легко находится:

$$\xi_2 = \frac{2(a^2 - 1)}{a}|A|^2 - \frac{(a - i)^2}{3a} A^2 \exp(2iaT_0) + \text{к.с.} \quad (12.26)$$

Видно, что во втором порядке нелинейность приводит к появлению постоянной составляющей и второй гармоники основной частоты.

Теперь выделим в уравнении (12.19) члены порядка  $\varepsilon^3$ . Получим

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 \xi_3 + a^2 \xi_3 + 2\hat{D}_0 \hat{D}_2 \xi_1 - \hat{D}_0 \xi_1 - 2a\hat{D}_0 (\xi_1 \xi_2) - \\ - \frac{2(a^2 - 1)}{a} (\hat{D}_0 \xi_1 \hat{D}_0 \xi_2) + (\xi_1 + \hat{D}_0 \xi_1) (\hat{D}_0 \xi_1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Сюда следует подставить выражения (12.22) и (12.26) для  $\xi_{1,2}$  и выделить секулярные члены. После не представляющих принципиальной сложности, однако достаточно громоздких вычислений, приходим к укороченному уравнению Ван дер Поля – Дуффинга (ср. (12.14))

$$\dot{A} = \frac{1}{2} [1 - (\beta + i\gamma)|A|^2] A, \quad (12.28)$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= a^2 + 2, \\ \gamma &= \frac{1}{3a} (4a^4 - 7a^2 + 4). \end{aligned} \quad (12.29)$$

Поскольку коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  положительны, можно сделать следующие выводы. Во-первых, амплитудная нелинейность всегда приводит к насыщению неустойчивости и установлению периодических автоколебаний с постоянной амплитудой  $|A| = 1/\sqrt{\beta}$ . Во-вторых, фазовая нелинейность приводит к некоторому уменьшению частоты колебаний. Если вернуться к исходным переменным  $x$ ,  $y$ , то видно, что остаются в силе основные свойства суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа: амплитуда стационарных колебаний увеличивается пропорционально

$$\varepsilon = \sqrt{b - b_c}. \quad (12.30)$$

На начальной стадии переходного процесса, если начальное возмущение мало, амплитуда растет экспоненциально по закону  $\exp[(b-b_c)t/2]$ .

## 12.2. Релаксационные автоколебания

При сильной надкритичности ( $\lambda \gg 1$ ) в уравнениях Ван дер Поля и Рэля наблюдаются так называемые релаксационные автоколебания. В качестве конкретного примера удобнее взять уравнение Рэля (12.2). Введем новую независимую переменную («медленное время»)  $\tau = t/\lambda$  и новую зависимую переменную  $u = y/\lambda^{3/2}$ . Тогда уравнение (12.2) принимает вид

$$\varepsilon u'' - (1 - (u')^2)u' + u = 0, \quad (12.31)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по  $\tau$ , а  $\varepsilon = \lambda^{-2} \ll 1$  — малый параметр. Для решения уравнения (12.31), содержащего малый параметр при старшей производной, используем метод разделения быстрых и медленных движений (лекция 10).

Построим качественный фазовый портрет системы, аналогично тому, как это было сделано в лекции 10 для осциллятора с сильной диссипацией. Перепишем уравнение (12.31) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ \varepsilon v' &= (1 - v^2)v - u. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Отсюда следует, что подпространство медленных движений есть кривая

$$u = v - v^3 \quad (12.33)$$

В верхней полуплоскости движение происходит слева направо, в нижней — справа налево (рис. 12.4). Что происходит с фазовой траекторией в точках  $B$  и  $D$ ? Для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть быстрые движения. Поделив одно уравнение системы (12.32) на другое, найдем уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dv}{du} = \frac{(1 - v^2)v - u}{\varepsilon v}. \quad (12.34)$$

Поскольку в знаменателе в правой части (12.34) содержится малый параметр, то вне области медленных движений (12.33) фазовые траектории близки к вертикальным прямым. Следовательно, из точек  $B$  и  $D$  фазовая траектория скачком переходит с одной ветви медленных движений на другую. Качественно фазовый портрет можно предста-

вить следующим образом (рис. 12.4а): имеется состояние равновесия типа неустойчивый узел в начале координат и устойчивый предельный цикл  $ABCD$ , состоящий из двух медленных участков  $AB$  и  $CD$  и двух быстрых —  $BC$  и  $DA$ . Для сравнения на

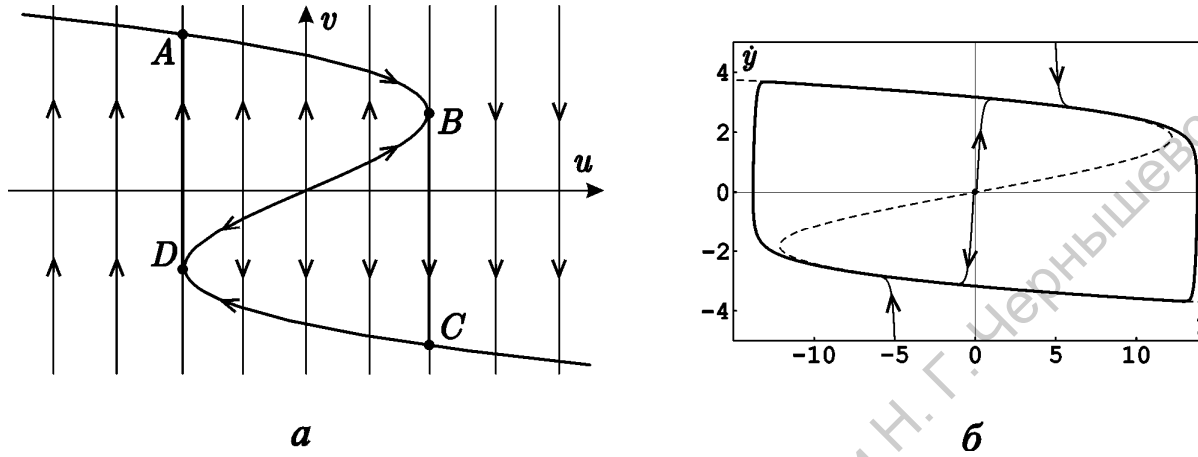


Рис. 12.4. Фазовый портрет уравнения Рэля в случае релаксационных колебаний, построенный на основе приближенного анализа методом разделения быстрых и медленных движений (а) и при помощи численного интегрирования для  $\lambda = 10.0$  (б). Штриховой линией показано многообразие медленных движений

рис 12.4б приведен фазовый портрет, полученный путем численного интегрирования. Штриховой линией на рис. 12.4б изображено многообразие медленных движений, построенное согласно формуле (12.33). Видно, что численные результаты достаточно хорошо согласуются с приближенной теорией.

Подсчитаем период колебаний  $T$ . Вкладом участков быстрого движения можно пренебречь. Тогда, из первого уравнения системы (12.32) с учетом (12.33) получим

$$d\tau = \frac{du}{v} = \frac{d(v - v^3)}{v}. \quad (12.35)$$

Интегрируя это выражение, найдем, что

$$T = 2 \int_{v_A}^{v_B} \left( \frac{1}{v} - 3v \right) dv = 2 \left( \ln v - \frac{3v^2}{2} \right) \Big|_{v_A}^{v_B}. \quad (12.36)$$

Значение  $v_B$  найдем из условия  $du/dv|_B = 0$ , что дает  $v_B = 1/\sqrt{3}$ ;  $v_A$  есть корень уравнения

$$v - v^3 = u_A = -\frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (12.37)$$

Учитывая, что  $v_D = -v_B$  является кратным корнем уравнения (12.37), его можно привести к виду

$$(v - v_A)(v + v_B)^2 = 0, \quad (12.38)$$

откуда несложно найти, что  $v_A = 2v_B = 2/\sqrt{3}$ .

Теперь можно определить период колебаний. Возвращаясь к исходному времени  $t = \lambda\tau$ , окончательно получаем

$$T = 2\lambda \left( \ln v - \frac{3v^2}{2} \right) \Bigg|_{2/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \lambda(3 - 2 \ln 2). \quad (12.39)$$

Отсюда видно, что период релаксационных колебаний нарастает пропорционально  $\lambda$ . Что касается амплитуды колебаний переменной  $y$ , то она увеличивается как  $\lambda^{3/2}$  (в качестве амплитуды естественно выбрать величину  $\lambda^{3/2} u_B = 2\lambda^{3/2}/3\sqrt{3}$ ).

### 12.3. Автоколебательная система с жестким возбуждением

Рассмотрим генератор на активном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью, вольтамперную характеристику которого можно аппроксимировать следующим образом (рис. 12.5):

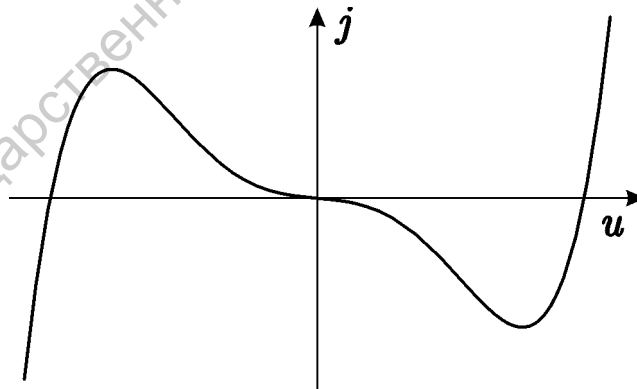


Рис. 12.5. Вольтамперная характеристика активного элемента с отрицательной дифференциальной проводимостью, при которой возможно жесткое возбуждение колебаний

$$I(u) = -g_0 u - g_2 u^3 + g_4 u^5 + \dots \quad (12.40)$$

Коэффициенты  $g_n$  считаются положительными. Слагаемое с нелинейностью пятого порядка необходимо учесть, чтобы описать эффекты нелинейного ограничения ампли-

туды колебаний. С учетом (12.40) уравнение (11.12), описывающее колебания генератора, примет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{C}(g_0 + 3g_2u^2 - G - 5g_4u^4)\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = 0. \quad (12.41)$$

Вводя новые переменные  $\tau = \omega_0 t$ ,  $x = u(5g_4\sqrt{L/C})^{1/4}$ , вместо уравнения Ван дер Поля (12.1) получим

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0, \quad (12.42)$$

где  $\lambda = (g_0 - G)\sqrt{L/C}$ ,  $\mu = \frac{3g_2}{\sqrt{5g_4}}\sqrt{L/C}$  — безразмерные параметры.

Нетрудно показать, что уравнение (12.42) можно получить и для лампового генератора Ван дер Поля в случае, когда рабочая точка выбрана таким образом, что полиномиальная аппроксимация анодно-сеточной характеристики имеет вид

$$i_a = i_0 + S_0u + S_2u^3 - S_4u^5 + \dots \quad (12.43)$$

Условие устойчивости неподвижной точки по-прежнему имеет вид  $\lambda < 0$  (т.е.  $g_0 < G$ ). Однако даже если оно выполнено, автоколебания все же могут возникнуть, если начальное возмущение достаточно велико. Действительно, из уравнения (12.42)

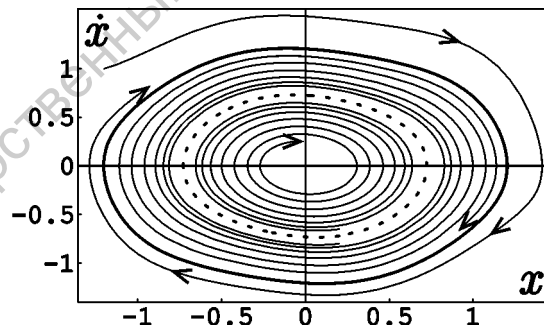


Рис. 12.6. Фазовый портрет автоколебательной системы с жестким возбуждением при  $\lambda = -0.1$ ,  $\mu = 1$ . Жирной сплошной линией показан устойчивый предельный цикл, пунктирной — неустойчивый

видно, что член, пропорциональный  $\mu x^2$ , представляет своего рода отрицательное затухание (если  $\mu > 0$ ), причем нелинейное. Когда амплитуда начального возмущения превосходит некоторое критическое значение, нелинейное усиление превосходит линейное затухание и колебания начинают нарастать. В таком случае говорят о *жестком возбуждении*. На рис. 12.6 изображен фазовый портрет системы с жестким возбужде-

нием. На фазовой плоскости имеются два аттрактора: состояние равновесия типа устойчивый фокус и устойчивый предельный цикл. Каждый аттрактор имеет свой бассейн притяжения, которые разграничены неустойчивым предельным циклом.

Известный каждому пример автоколебательной системы с жестким возбуждением — это маятниковые часы-ходики. Действительно, после того, как часы заведены, т.е. гиря поднята на необходимую высоту, необходимо сообщить маятнику начальный толчок, чтобы он начал колебаться.

Проанализируем процесс жесткого возбуждения более подробно, полагая  $\lambda$  и  $\mu$  малыми. Используем метод Ван дер Поля, представив  $x(t)$  в виде

$$x = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it}, \quad (12.44)$$

причем  $A$  и  $A^*$  связаны соотношением (12.4). Подставив в уравнение (12.42) и проводя усреднение, после не представляющих принципиальной сложности вычислений получаем укороченное уравнение

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(\lambda + \mu|A|^2 - 2|A|^4)A. \quad (12.45)$$

Отсюда следует уравнение для  $\rho = |A|^2$  (ср. (12.10))

$$\dot{\rho} = \lambda\rho + \mu\rho^2 - 2\rho^3. \quad (12.46)$$

Найдем неподвижные точки уравнения (12.46). Во-первых имеется неподвижная точка  $\rho = 0$ , соответствующая нулевому состоянию равновесия исходной системы. Она устойчива при  $\lambda < 0$ . Кроме того, возможно существование еще двух неподвижных точек

$$\rho_{\pm} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 8\lambda}}{4}. \quad (12.47)$$

Условие их существования, очевидно, имеет вид  $-\mu^2/8 < \lambda$  для  $\rho_+$  и  $-\mu^2/8 < \lambda < 0$  для  $\rho_-$  (напомним, что  $\rho_{\pm}$  — величины строго положительные). Анализируя их на устойчивость, можно показать (рекомендуем читателю проделать это самостоятельно), что  $\rho_+$  всегда устойчива, а  $\rho_-$  — неустойчива. Они соответствуют устойчивому и неустойчивому предельным циклам исходного уравнения (12.42).

Итак, при увеличении параметра  $\lambda$  фазовый портрет трансформируется следующим образом (рис. 12.7). При  $\lambda < -\mu^2/8$  на фазовой плоскости имеется единственное состояние равновесия типа устойчивый фокус (рис. 12.7а). При  $\lambda = -\mu^2/8$  происхо-

дит рождение пары предельных циклов (устойчивого и неустойчивого) из сгущения фазовых траекторий (рис. 12.7б). С ростом  $\lambda$  устойчивый цикл увеличивается в размерах, а неустойчивый — уменьшается, в соответствии с формулой (12.47). При  $\lambda = 0$  неус-

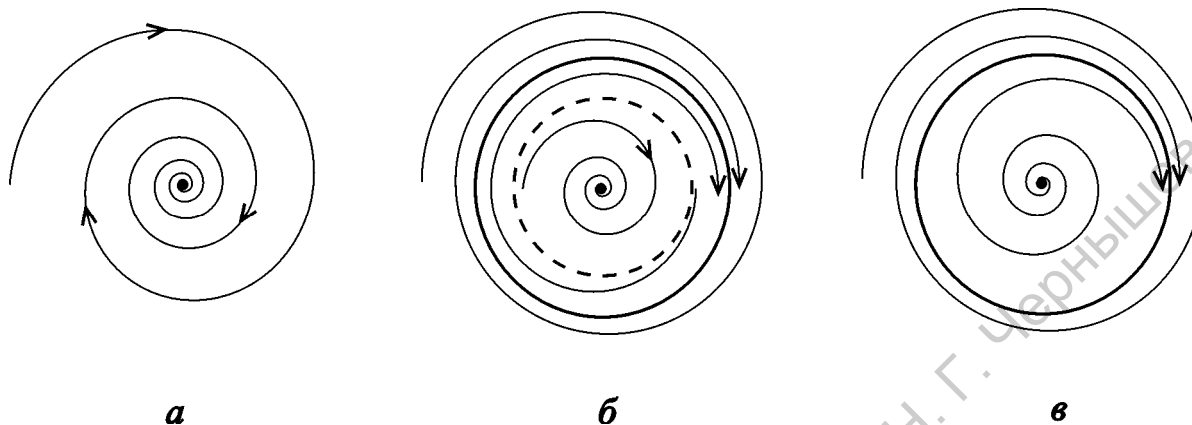


Рис. 12.7. Трансформация фазовых портретов при субкритической бифуркации Андронова–Хопфа:  $\lambda < -\mu^2/8$  (а);  $-\mu^2/8 < \lambda < 0$  (б);  $\lambda > 0$  (в). Неустойчивый предельный цикл показан штриховой линией

тойчивый предельный цикл исчезает, а состояние равновесия теряет устойчивость. После этого фазовый портрет не имеет качественных отличий от системы с мягким возбуждением: имеется неустойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл (рис. 12.7в). Такая бифуркация называется *обратной (субкритической) бифуркацией Андронова–Хопфа*. Термин «субкритический» связан с тем, что предельный цикл появляется до того, как состояние равновесия потеряет устойчивость.

Важно отметить, что в области  $-\mu^2/8 < \lambda < 0$  имеет место *бистабильность*, т.е. сосуществование двух устойчивых состояний; в данном случае это неподвижная точка и предельный цикл. Поэтому жесткое возбуждение характеризуется *гистерезисом* (напомним, что бистабильность и гистерезис относятся к числу фундаментальных нелинейных эффектов, см. лекцию 3). Например, если интересоваться самовозбуждением генератора от малых шумовых флуктуаций и считать начальное возмущение малым, то при плавном увеличении  $\lambda$  колебания возникнут при  $\lambda = 0$ , причем их амплитуда будет сразу иметь конечную величину ( $\rho_+ = \mu/2$ ). Если теперь плавно уменьшать  $\lambda$ , то будет наблюдаться плавное уменьшение амплитуды колебаний до  $\rho_+ = \mu/4$ , а при  $\lambda = -\mu^2/8$  произойдет срыв генерации. Описанную картину иллюстрирует бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 12.8. На ней отложены значения  $\rho_{\pm}$  (12.47) в зависимости от параметра  $\lambda$ .



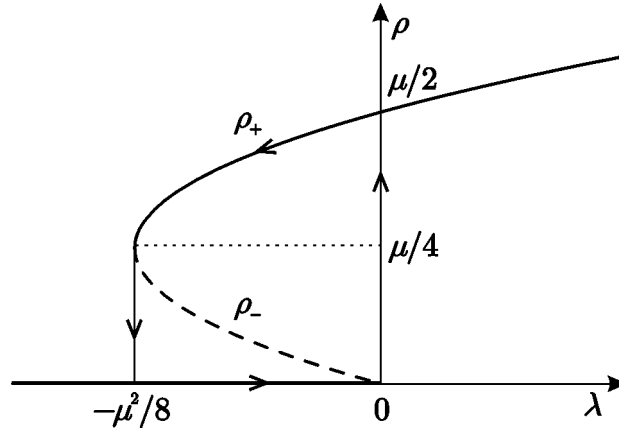


Рис. 12.8. Бифуркационная диаграмма автоколебательной системы с жестким возбуждением

**Задача 12.7.** Для модели автогенератора с жестким возбуждением изобразите разбиение плоскости параметров  $(\mu, \lambda)$  на области, отвечающие различным возможными типами динамики. Изобразите фазовые портреты для каждой из областей. Укажите устойчивые и неустойчивые предельные множества.

**Задача 12.8.** Приведите приближенно уравнение  $\ddot{x} - (\varepsilon - \cos x)\dot{x} + x = 0$  к традиционной модели автогенератора с жестким возбуждением, и найдите в этом приближении значение параметра  $\varepsilon$ , отвечающее жесткому возникновению предельного цикла.

**Задача 12.9.** Для модели автогенератора (12.42) укажите значения параметров, при которых возникающий жестким образом предельный цикл будет иметь заданный размер  $R$ .

**Задача 12.10.** Постройте графики зависимости амплитуды колебаний от параметра  $\lambda$  для  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  и  $\mu = 0$ . В каком случае наблюдается гистерезис? Покажите, что вблизи точки жесткого перехода зависимость амплитуды от параметра  $\lambda$  имеет корневой характер. На полученных графиках покажите пунктиром зависимость амплитуды неустойчивого предельного цикла от  $\lambda$ .

## Метод точечных отображений

### 13.1. Понятие о точечных отображениях

Всякий колебательный процесс является эволюционным во времени. Естественным, используемым столетиями аппаратом для описания таких процессов служили (и служат) дифференциальные уравнения. Однако в последнее время для тех же целей стали использовать другую математическую технику — *дискретные (точечные) отображения*. Альтернативный подход всегда важен и полезен для науки. В случае с дискретными отображениями ситуация еще более интересная. Дело в том, что можно установить связь между дифференциальными уравнениями и отображениями с помощью *метода сечений Пуанкаре*. Об этом мы немного поговорим в этой лекции, а также в лекции 14.

Наиболее естественное представление о дискретных отображениях можно получить при описании динамики биологических популяций. Пусть мы изучаем численность некоторой популяции год от года. Ясно, что в этом случае целесообразно сравнивать между собой численность, рассчитанную один раз в год в какой-то определенный момент времени. Можно ожидать, что численность  $x_{n+1}$  популяции в  $(n+1)$ -ый год является функцией ее численности  $x_n$  в предыдущий,  $n$ -ый год, и можно записать соотношение

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (13.1)$$

Это и есть простейшее дискретное отображение. Мы можем конкретизировать его вид, если сделаем несколько простых предположений. Пусть при малой численности популяции ее величина год от года меняется в геометрической прогрессии. Тогда

$$x_{n+1} = \lambda x_n, \quad (13.2)$$

где  $\lambda$  — параметр, определяющий скорость размножения. Ясно, однако, что при большой численности популяции, она не сможет расти так быстро. Эффекты конкуренции за источники питания приведут к ограничению численности. Предположим, что закон падения численности связан с квадратичной нелинейностью. Тогда уравнение (13.2) примет вид

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^2. \quad (13.3)$$

Полученное нами соотношение называется *логистическим отображением*. Несмотря на свой простой вид, оно служит одной из основных, фундаментальных моделей нелинейной динамики и теории динамического хаоса.

Эволюцию, описываемую дискретными отображениями, удобно представлять на *итерационных диаграммах* (их иногда еще называют *диаграммами Ламерея*). На диаграмме откладывают зависимость переменной  $x_{n+1}$  от  $x_n$ , т.е. функцию  $f(x)$ , и прово-

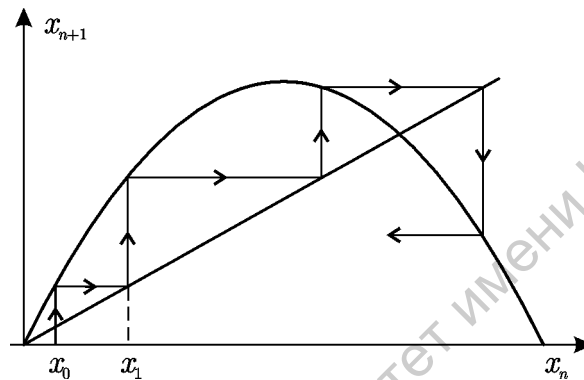


Рис. 13.1. Построение итерационной диаграммы для логистического отображения

дят биссектрису, как показано на рис. 13.1. Тогда эволюция переменной  $x$  представляется на диаграмме некоторой «лесенкой». (Продумайте тщательно процедуру построения итерационной диаграммы).

Эволюционный процесс, описываемый дискретными отображениями, обычно имеет две стадии: переходный процесс и его результат — некоторое установившееся движение (конечно, четкой границы между этими стадиями нет, она определяется точностью вычислений). Простейшим вариантом развития событий служит такой, когда численность популяции устанавливается постоянной, равной некоторому числу  $X$ . Очевидно, что для отображения (13.1) эта ситуация приводит к соотношению  $X = f(X)$ . В таком случае говорят, что отображение имеет *неподвижную точку*. неподвижная точка может быть *устойчивой* или *неустойчивой*. Критерием этого служит величина производной  $df/dx$ , вычисленная в неподвижной точке  $x = X$ . Действительно, если задать малое возмущение  $\tilde{x}$ , так что  $x_n = X + \tilde{x}_n$  и линеаризовать отображение (13.1), то получим

$$\tilde{x}_{n+1} = f'(X)\tilde{x}_n \quad (13.4)$$

Если эта производная по модулю меньше единицы, то возмущение затухает при итерациях, и точка устойчива, в противном случае возмущение будет нарастать, и неподвижная точка будет неустойчивой.

Установившиеся режимы могут носить и более сложный, колебательный характер. Например, численность популяции может изменяться с периодом в 2 года, т.е. представляться последовательностью  $X_1, X_2, X_1, X_2, \dots$ . В этом случае говорят, что отображение имеет *цикл периода 2*. Поэкспериментировав на компьютере с логистическим отображением (13.3), Вы убедитесь, что возможны циклы других периодов. Более того, может возникнуть нерегулярный во времени процесс – *динамический хаос*.

**Задача 13.1.** Найдите неподвижную точку логистического отображения и исследуйте ее устойчивость в зависимости от параметра  $\lambda$ .

**Задача 13.2.** Найдите в явном виде элементы 2-цикла логистического отображения. В каком интервале параметра  $\lambda$  существует 2-цикл?

**Задача 13.3.** Постройте с помощью компьютера итерационные диаграммы для логистического отображения для значений параметра  $\lambda = 1.0, 1.2, 1.4, 1.5$  и  $1.9$ . Какой процесс будет устанавливаться в каждом случае по прошествии достаточно большого времени?

**Задача 13.4.** Дискретное отображение  $x_{n+1} = f(x_n)$  имеет неподвижную точку  $x^*$  такую, что  $f'(x^*) \neq 0$ . Покажите, что поведение последовательности  $y_n = x_n - x^*$  в малой окрестности этой точки соответствует сходящейся геометрической прогрессии, если  $|f'(x^*)| < 1$  и расходящейся при  $|f'(x^*)| > 1$ .

**Задача 13.5.** Найдите неподвижные точки отображения  $x_{n+1} = \varepsilon \log(1 + x_n)$  и исследуйте их на устойчивость. Решение проиллюстрируйте итерационной диаграммой.

На первый взгляд, дискретные отображения хотя и являются интересным математическим объектом, но как аппарат для физика не столь полезны по сравнению с алгеброй, тригонометрией, дифференциальными уравнениями и др. На самом деле это не так, подобный взгляд скорее дань традиции. Приведем несколько примеров, когда дискретные отображения возникают естественным образом.

Пусть имеется генератор пилообразных колебаний, выходной сигнал которого представляет собой напряжение  $V$ , убывающее по линейному закону:  $V(t) = U_0 - \alpha(t - t_n)$ , где  $U, \alpha$  — постоянные, до тех пор, пока не достигнет нуля в некоторый момент времени  $t_n$ . После этого напряжение скачком увеличивается до величины  $U_0$  (рис. 13.2а). Колебания будут периодическими во времени с периодом

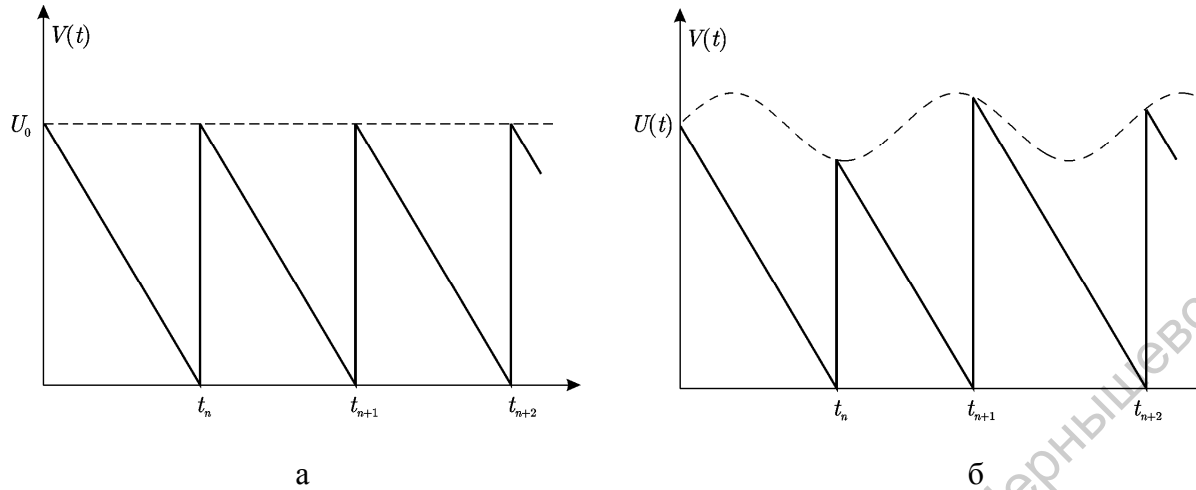


Рис. 13.2. Сигнал, генерируемый автономным (а) и неавтономным (б) генератором пилообразных колебаний

$T = U_0/\alpha$ . Далее рассмотрим ситуацию, когда присутствует внешнее воздействие, изменяющее верхний порог по гармоническому закону:  $U(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t)$  (рис. 13.2б). Теперь «склон» импульса описывается уравнением

$$V(t) = U(t_n) - \frac{U_0(t-t_n)}{T}. \quad (13.5)$$

Нетрудно получить соотношение, связывающее моменты  $t_{n+1}$  и  $t_n$ . Поскольку в момент  $t_{n+1}$  напряжение должно обращаться в нуль, имеем

$$U_0 + U_m \cos(\omega t_n) - \frac{U_0(t_{n+1} - t_n)}{T} = 0. \quad (13.6)$$

Разрешая это соотношение относительно  $t_{n+1}$  и переходя к безразмерной переменной  $\theta_n = \omega t_n$ , получим

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + f \cos \theta_n, \quad (13.7)$$

где  $\Omega = \omega T$  — расстройка,  $f = \omega T U_m / U_0$  — безразмерная амплитуда внешнего воздействия. Это еще одна из эталонных моделей нелинейной динамики, которую называют *отображением окружности*.

Обратимся теперь к задаче о шарике, который подпрыгивает на вибрирующем по гармоническому закону столе (рис. 13.3). Важный шаг в анализе задачи — выбор переменных, эволюционирующих в дискретном времени. В нашем случае в качестве

таковых можно выбрать скорость шарика сразу после удара  $v_n$  и время в момент удара  $t_n$ . В этом случае задача описывается не одномерным, как ранее, а *двумерным* отобра-

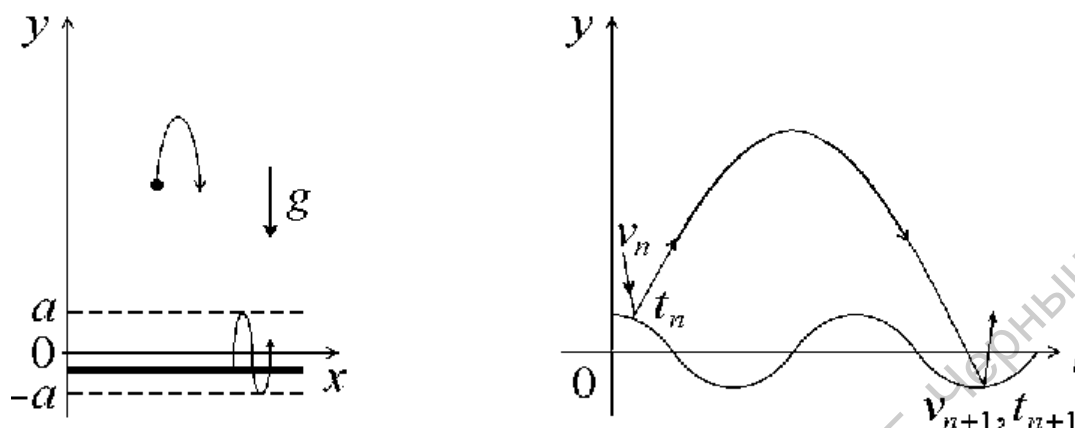


Рис. 13.3. Шарик, подпрыгивающий на вибрирующем столе

жением. Более того, оно может быть *консервативным*, если потери энергии при ударе отсутствуют, а может быть *диссипативным*, если шарик при ударе теряет некоторую часть своей энергии. Вид этого отображения и его свойства будут изучены в лекции 17.

Еще один пример — луч света, распространяющийся по волноводу, образованному двумя идеально отражающими поверхностями. Одна из поверхностей «гофриро-

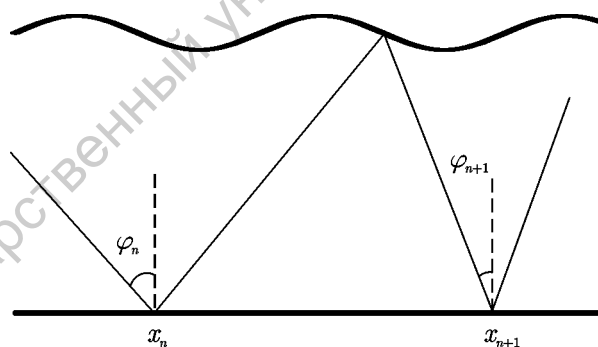


Рис. 13.4. Распространение светового луча в волновод с гофрированной стенкой

вана» — имеет синусоидальный профиль. Здесь в качестве переменных удобно выбрать точку  $x_n$  и угол падения  $\varphi_n$  на нижнее зеркало (рис. 13.4). Покажите самостоятельно, что такая система в случае слабой гофрировки описывается отображением

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2a \sin x_n, \\ x_{n+1} &= x_n - h \operatorname{tg} \varphi_n, \end{aligned} \quad (13.8)$$

где  $a$  и  $h$  — параметры, характеризующие геометрию системы.

Можно привести еще множество примеров, которые убедительно показывают, что дискретные отображения — это естественный язык физики и теории колебаний.

**Задача 13.6.** Покажите, что отображение  $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$  можно использовать для вычисления квадратного корня из числа  $a$  (такой способ применяли еще в древнем Вавилоне). Найдите первые пять членов последовательности  $x_n$ , порождаемой этим отображением при  $a = 2$ . Величину  $x_0$  положите равной единице. Проиллюстрируйте решение задачи с помощью итерационной диаграммы. Покажите, что неподвижная точка этого отображения устойчива. Можно ли использовать отображение  $x_{n+1} = a/x_n$ ?

### 13.2. Точечное отображение для генератора Ван дер Поля.

#### Случай квазигармонических автоколебаний.

Покажем, как можно использовать метод точечных отображений для анализа некоторых простых автоколебательных систем. Рассмотрим осциллятор Ван дер Поля в режиме квазигармонических автоколебаний.

Поскольку мы имеем дело с системой второго порядка, фазовое пространство которой двумерно, можно получить одномерное отображение вида  $x_{n+1} = f(x_n)$ , причем в качестве  $x_n$  удобно выбрать точки пересечения траектории с положительной полуосью  $OX$  (рис. 13.5). Воспользуемся приближенным решением, которое было получено в лекции 12 при помощи метода медленно меняющихся амплитуд

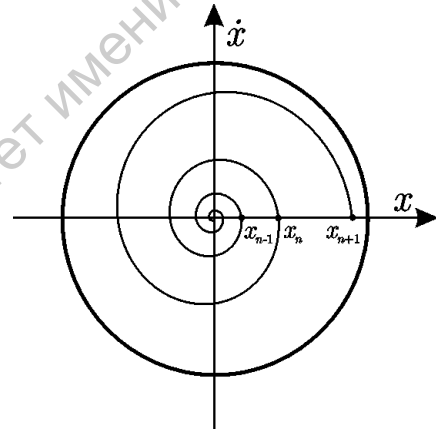


Рис. 13.5. К описанию динамики осциллятора Ван дер Поля при помощи одномерного отображения

$$x(t) \approx 2a(t) \cos(t + \varphi_0), \quad (13.9)$$

$$a(t) = \frac{\sqrt{\lambda} a_0 \exp(\lambda t/2)}{\sqrt{\lambda + a_0^2 [\exp(\lambda t) - 1]}}. \quad (13.10)$$

Здесь  $a_0$  и  $\varphi_0$  — начальные амплитуда и фаза. Без ограничения общности можно выбрать  $\varphi_0 = 0$ . В точках пересечения с осью  $OX$  можно приближенно положить  $\cos t \approx 1$ ,  $t \approx 2\pi n$  (соответствие будет тем лучше, чем меньше параметр  $\lambda$ ) и получить следующие выражения

$$x_n = \frac{2\sqrt{\lambda}x_0 \exp(\pi n \lambda)}{\sqrt{4\lambda + x_0^2 [\exp(2\pi n \lambda) - 1]}}, \quad (13.11)$$

$$x_{n+1} = \frac{2\sqrt{\lambda}x_0 \exp(\pi(n+1)\lambda)}{\sqrt{4\lambda + x_0^2 [\exp(2\pi(n+1)\lambda) - 1]}}, \quad (13.12)$$

где введено обозначение  $x_0 = 2a_0$ . Остается выразить  $x_{n+1}$  через  $x_n$ . После несложных вычислений находим явное выражение для функции последования

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n \exp(\pi \lambda)}{\sqrt{1 + \frac{x_n^2}{4\lambda} [\exp(2\pi \lambda) - 1]}}. \quad (13.13)$$

Отображение (13.13) имеет две неподвижные точки:  $x_1 = 0$ , что отвечает отсутствию колебаний, и  $x_2 = 2\sqrt{\lambda}$ , что отвечает режиму установившихся автоколебаний. При этом значение амплитуды колебаний в точности соответствует найденному при помощи метода медленно меняющихся амплитуд (см. формулу (12.12)).

Проведем анализ неподвижных точек на устойчивость. Дифференцируя выражение (13.13), получаем

$$f'(x) = \frac{8e^{\pi\lambda}}{\left(4 + \frac{x^2}{\lambda}(e^{2\pi\lambda} - 1)\right)^{3/2}}, \quad (13.14)$$

откуда нетрудно найти, что  $f'(x_1) = \exp(\pi\lambda)$ ,  $f'(x_2) = \exp(-2\pi\lambda)$ . Таким образом, нулевое состояние равновесия теряет устойчивость при  $\lambda = 0$ , что соответствует порогу бифуркации Андронова — Хопфа. При  $\lambda > 0$  появляется вторая неподвижная точка, которая является устойчивой. На рис. 13.6 построены функции последования при различных значениях  $\lambda$  и приведен пример построения диаграммы Ламерея.

Для автоколебательной системы с жестким возбуждением (12.42) отображение последования может быть построено численно (рис. 13.7). В этом случае при  $\lambda = -\mu^2/8$  появляются две неподвижные точки

$$x_{\pm} = \sqrt{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 8\lambda}}, \quad (13.15)$$



одна из которых отвечает устойчивому предельному циклу, другая — неустойчивому. Такая ситуация имеет место в диапазоне параметров  $-\mu^2/8 < \lambda < 0$ . При  $\lambda = 0$  неустойчивая особая точка  $x_-$  сливается с особой точкой в начале координат, которая теряет устойчивость.

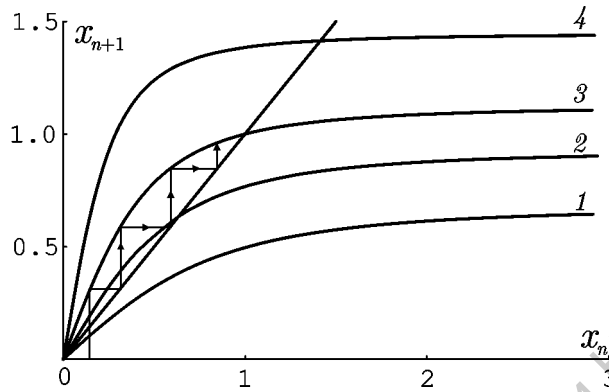


Рис. 13.6. Вид функций последования для отображения (13.5) при различных значениях  $\lambda$  и пример построения диаграммы Ламерея:  $\lambda = -0.1$  (1);  $\lambda = 0.1$  (2);  $\lambda = 0.25$  (3);  $\lambda = 0.5$  (4)

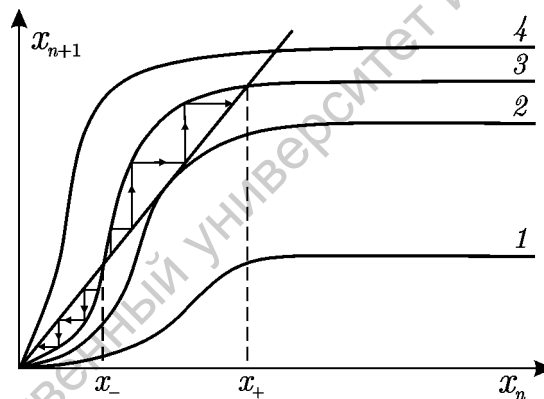


Рис. 13.7. Вид функций последования для автоколебательной системы с жестким возбуждением:  $\lambda < -\mu^2/8$  (1);  $\lambda = -\mu^2/8$  (2);  $-\mu^2/8 < \lambda < 0$  (3);  $\lambda > 0$  (4)

**Задача 13.7.** Пользуясь приближением медленно меняющихся амплитуд, получите отображение для линейного осциллятора с затуханием

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

считая параметр  $\gamma$  малым. Изобразите для него диаграмму Ламерея.

**Задача 13.8.** Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для колебательного контура с нелинейным резистором из задачи 9.11. Изобразите для него диаграмму Ламерея. Сравните полученный результат с предыдущей задачей.

Таким образом, при помощи метода точечных отображений можно достаточно наглядно исследовать основные особенности динамики автоколебательных систем, определять положения состояний равновесия и предельных циклов, выяснять вопрос об

их устойчивости и т.д. Здесь мы рассмотрели лишь наиболее простые примеры. Однако использование этого метода часто помогает и в более сложных случаях. В особенности это относится к системам со сложной динамикой.

**Задача 13.9.** Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для автогенератора с жестким возбуждением  $\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$  в случае  $\mu = 0$ .

### 13.3. Ламповый генератор со ступенчатой характеристикой

В лекции 11 был рассмотрен ряд примеров радиотехнических автогенераторов, динамика которых описывается уравнением Ван дер Поля в случае, когда нелинейная характеристика активного элемента аппроксимируется кубическим полиномом. Например, для лампового генератора, схема которого приведена на рис. 11.5а,б, можно таким образом аппроксимировать анодно-сеточную характеристику триода (рис. 11.5,в) в окрестности рабочей точки. Более простую теорию можно построить для генератора со ступенчатой характеристикой вида (рис. 13.8а)

$$i_a(u) = \begin{cases} I_0, & u > 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \quad (13.16)$$

Как было показано в лекции 11, динамика генератора описывается уравнением

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{C} = \frac{i_a(u)}{C}. \quad (13.17)$$

Обозначения приведены на рис. 11.5. Удобно ввести новую переменную  $I = i_L - I_0/2$ .

Тогда уравнения (13.16), (13.17) примут вид

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 I_0/2, \quad u > 0, \quad (13.18)$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = -\omega_0^2 I_0/2, \quad u < 0, \quad (13.19)$$

где введены обозначения  $2\gamma = R/L$ ,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Построим фазовый портрет генератора. Уравнения (13.18), (13.19) представляют собой уравнения линейного осциллятора с затуханием, у которых состояния равновесия сдвинуты относительно начала координат на  $I_0/2$  и  $-I_0/2$ , соответственно. На фазовой плоскости  $(I, \dot{I})$  первое из этих уравнений отвечает верхней, а второе — нижней полуплоскости (поскольку  $u = M dI/dt$ ). Необходимо построить фазовые портреты ос-

цилляторов (13.18), (13.19) и затем «сшить» фазовые траектории на горизонтальной оси. Результат представлен на рис. 13.8б. Имеется целый континуум неустойчивых со-

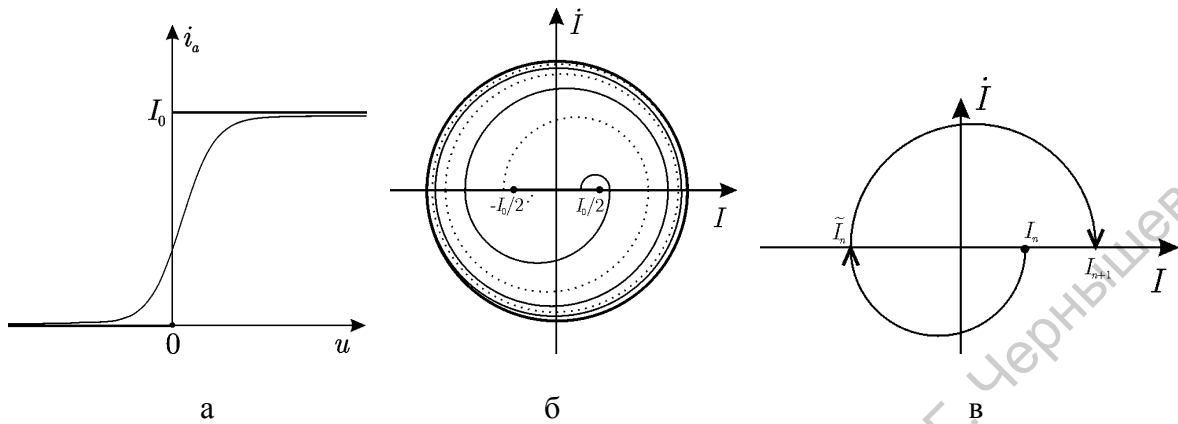


Рис. 13.8. Анодно-сеточная характеристика триода и ее аппроксимация ступенчатой функцией (13.8) (а); фазовый портрет лампового генератора (б); рисунок, поясняющий построение точечного отображения (в)

стояний равновесия — отрезок  $-I_0/2 < I < I_0/2$ , лежащий на горизонтальной оси.<sup>1</sup> Фазовые траектории, выходящие из различных точек этого отрезка, имеют вид раскручивающихся спиралей, которые наматываются на предельный цикл.

Метод точечных отображений позволяет легко определить размер предельного цикла и доказать его устойчивость. Будем рассматривать точки пересечения фазовой траектории с горизонтальной осью (рис. 13.8в). Пусть траектория переходит из верхней полуплоскости в нижнюю в точке  $I_n > 0$ . В нижней полуплоскости движение подчиняется уравнению (13.19), решение которого запишем в виде

$$I = -\frac{I_0}{2} + \left( I_n + \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma t} \cos \omega t, \quad (13.20)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ . Найдем координату  $\tilde{I}_n < 0$  следующего пересечения с горизонтальной осью. Будем считать, что затухание слабое,  $\gamma \ll \omega_0$ , так что пересечение произойдет в момент времени  $t \approx T/2$ , где  $T = 2\pi/\omega_0$  — период колебаний консервативного осциллятора. В уравнении (13.20) можно положить  $\cos \omega t \approx -1$  и найти, что

<sup>1</sup> Это является следствием аппроксимации зависимости  $i_a(u)$  сингулярной (ступенчатой) функцией. Подобная ситуация характерна и для других систем с аналогичными нелинейными характеристиками, например, для осциллятора с «сухим» трением (задача 9.10).

$$\tilde{I}_n = -\frac{I_0}{2} - \left( I_n + \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma T/2}. \quad (13.21)$$

Далее траектория переходит в верхнюю полуплоскость, где определяется из уравнения (13.18), решение которого есть

$$I = \frac{I_0}{2} + \left( \tilde{I}_n - \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma t} \cos \omega t. \quad (13.22)$$

Время движения до следующего пересечения горизонтальной оси по-прежнему составляет примерно половину периода колебаний. Полагая в уравнении (13.22)  $t \approx T/2$ ,  $\cos \omega t \approx -1$ , находим точку  $I_{n+1}$ :

$$I_{n+1} = \frac{I_0}{2} - \left( \tilde{I}_n - \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma T/2}. \quad (13.23)$$

Подставляя сюда соотношение (13.21), окончательно приходим к одномерному отображению

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{I_0}{2} - \left( -\frac{I_0}{2} - \left( I_n + \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma T/2} - \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma T/2} = \\ &= \frac{I_0 (1 + e^{-\gamma T/2})^2}{2} + I_n e^{-\gamma T}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Заметим, что значения  $I_n$  считаются положительными, см. рис. 13.8б. Как видно из (13.24), функция последования в данном случае является линейной. Имеется единственная неподвижная точка

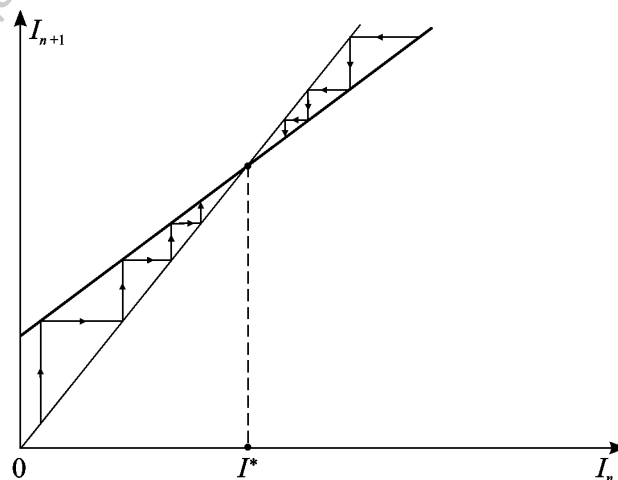


Рис. 13.9. Диаграмма Ламерея для лампового генератора со ступенчатой характеристикой

$$I^* = \frac{I_0 (1 + \operatorname{ch}(\gamma T/2))}{2 \operatorname{sh}(\gamma T/2)}, \quad (13.25)$$

которая определяет характерный размер предельного цикла. Нетрудно видеть, что она является устойчивой. На рис. 13.9 построена диаграмма Ламерея, при помощи которой можно наглядно представить процесс установления амплитуды колебаний.

**Задача 13.10.** Получите отображение, описывающее разгон релятивистской частицы в циклическом резонансном ускорителе заряженных частиц — циклотроне. Частица вращается в однородном магнитном поле  $B_0$  с циклотронной частотой  $\omega_c = qB_0/m$  ( $q$  и  $m$  — заряд и масса частицы, соответственно), периодически проходя через ускоряющий промежуток (зазор), к которому приложено высокочастотное напряжение  $V(t) = V_0 \sin \omega t$  (рис. 13.10). Если частота изменения ускоряющего напряжения  $\omega$  близка к циклотронной частоте, частица будет каждый раз попадать в ускоряющую фазу, увеличивая таким образом свою энергию.

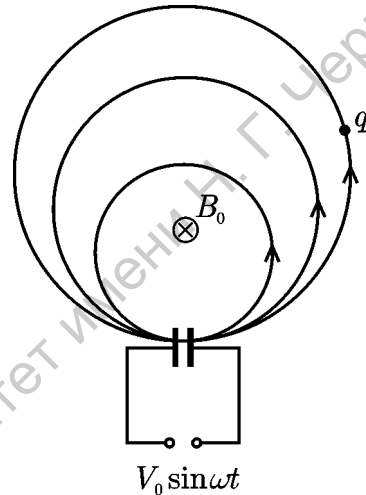


Рис. 13.10. Разгон заряженной частицы в циклотроне

*Решение.* Будем рассматривать динамику частицы в дискретные моменты времени, когда она проходит через ускоряющий промежуток. Считая ускоряющий промежуток достаточно узким, предполагаем, что частица проходит через него практически мгновенно (по сравнению с периодом высокочастотного напряжения  $T = 2\pi/\omega$ ), так что изменением напряжения за это время можно пренебречь. Поскольку речь идет о релятивистской частице, ключевым моментом является учет релятивистской зависимости массы от скорости. Такую частицу можно рассматривать как неизохронный нелинейный осциллятор (см. лекцию 2).

Энергия частицы после  $n$ -го прохода через ускоряющий промежуток равна  $E_n = m_n c^2 = \gamma_n m_0 c^2$ , где  $m_0$  — масса покоя частицы,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — релятивистский масс-фактор. Закон сохранения энергии при прохождении зазора запишется следующим образом:

$$m_0 c^2 \gamma_{n+1} = m_0 c^2 \gamma_n + qV_0 \sin \omega t_n, \quad (13.26)$$

где  $t_n$  — время  $n$ -го попадания в зазор. Следующее попадание в зазор, очевидно, произойдет в момент времени

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2\pi}{\omega_c (\gamma_{n+1})} = t_n + \frac{2\pi m_0 \gamma_{n+1}}{qB_0}. \quad (13.27)$$

Объединяя уравнения (13.26) и (13.27) и вводя обозначение для фазы частицы  $\theta_n = \omega t_n$ , окончательно приходим к двумерному отображению с двумя управляющими параметрами

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} &= \gamma_n + \varepsilon \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \Delta \gamma_{n+1}.\end{aligned}\quad (13.28)$$

Здесь  $\varepsilon = qV_0/m_0 c^2$ ,  $\Delta = 2\pi\omega/\omega_0$ ,  $\omega_0 = qB_0/m_0$ . Отображение (13.28) называют *отображением Чирикова* или *Чирикова — Тейлора*. Оно может демонстрировать разнообразные, в том числе хаотические режимы поведения.

Если бы не релятивистская зависимость циклотронной частоты от энергии, последнее уравнение (13.28) имело вид  $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta$ , так что при совпадении частот  $\omega$  и  $\omega_0$  частица после каждого оборота попадала бы в одну и ту же фазу поля и ускорялась неограниченно. В действительности же с ростом энергии резонансное условие нарушается. Тем не менее, все равно существует возможность для неограниченного ускорения. Продумайте самостоятельно, какими для этого следует выбрать параметры  $\varepsilon$  и  $\Delta$ , и как будет происходить движение частицы.

### 13.4. Системы под импульсным периодическим воздействием

Важный класс задач, в которых возникают дискретные отображения, связан с изучением систем, находящихся под импульсным периодическим воздействием. В качестве примера получим дискретное отображение для осциллятора с кубической нелинейностью и затуханием, совершающего колебания под воздействием периодической последовательности  $\delta$ -импульсов:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum C\delta(t - nT)$$

Будем считать, что в промежутке между импульсами применим метод медленно меняющихся амплитуд. В этом случае решение представим в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + A^* e^{-i\omega_0 t}, \quad (13.29)$$

где  $A, A^*$  — медленно меняющиеся функции времени. В промежутке между импульсами для комплексной амплитуды справедливо «укороченное» уравнение, которое было получено в лекции 9

$$\dot{A} = -\gamma A + \frac{3}{2} \frac{i\beta}{\omega_0} |A|^2 A. \quad (13.30)$$

Переходя в уравнении (13.30) к действительной амплитуде  $a$  и фазе  $\varphi$  ( $A = a \exp(i\varphi)/2$ ), можно получить следующие уравнения

$$\dot{a} = -\gamma a, \quad \dot{\varphi} = \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} a^2. \quad (13.31)$$

Решая уравнения (13.31), найдем следующие зависимости амплитуды и фазы от времени в промежутке между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м импульсами

$$a(t) = a_n e^{-\gamma t}, \quad (13.32)$$

$$\varphi(t) = \frac{3\beta a_n^2}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n, \quad (13.33)$$

где  $a_n$  и  $\varphi_n$  — начальные амплитуда и фаза сразу после  $n$ -го импульса. Если подставить выражения (13.32), (13.33) в вытекающие из (13.29) соотношения

$$x(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (13.34)$$

$$v(t) = -\omega_0 a(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (13.35)$$

то мы найдем зависимости координаты и скорости осциллятора во времени на рассматриваемом промежутке времени. К моменту начала  $(n+1)$ -го импульса проходит время, равное периоду воздействия  $T$ . Поэтому координата осциллятора и скорость равны соответственно  $x(T)$  и  $v(T)$ . В силу дельта-образного характера воздействия сразу после этого импульса координата не изменится, а скорость получит добавку  $C$ . Поэтому для координаты и скорости после  $(n+1)$ -го импульса из (13.29), (13.34), (13.35) получаем следующие выражения

$$x_{n+1} = a_n e^{-\gamma T} \cos\left(\omega_0 T + \frac{3\beta}{16\omega_0} |a_n|^2 \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right), \quad (13.36)$$

$$v_{n+1} = -\omega_0 a_n e^{-\gamma T} \sin\left(\omega_0 T + \frac{3\beta}{16\omega_0} |a_n|^2 \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right) + C. \quad (13.37)$$

Удобно записать их в комплексной форме, введя комплексную переменную

$$z = \left[ ix + \frac{v}{\omega_0} \right] \sqrt{\frac{3\beta}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma}}. \quad (13.38)$$

Тогда относительно этой переменной из (13.36), (13.37) получаем искомое отображение

$$z_{n+1} = A + B z_n \exp\left[i\left(|z_n|^2 + \psi\right)\right], \quad (13.39)$$

Здесь новые параметры  $A$ ,  $B$  и  $\psi$  определяются через параметры исходной системы следующим образом

$$A = \frac{C}{\omega_0} \sqrt{\frac{3\beta}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma}}, \quad B = e^{-\gamma T}, \quad \psi = \omega_0 T.$$

Интересно, что точно такое же отображение было получено к Икедой с соавторами (К. Ikeda, 1980) для кольцевого оптического резонатора, заполненного средой, в которой показатель преломления зависит от амплитуды поля. На рис. 13.11 показана плоскость параметров  $A$ ,  $B$  отображения Икеды, на которой оттенками серого цвета обозначены области различных периодических режимов. Так белый цвет отвечает устойчивой неподвижной точке, светло серый — циклу периода 2, черный — хаотическому поведению и т.д. Можно видеть, что плоскость параметров устроена достаточно сложно и демонстри-

рует разнообразные периодические и хаотические режимы. Это иллюстрируют и фазовые портреты, относящиеся к некоторым точкам плоскости параметров.

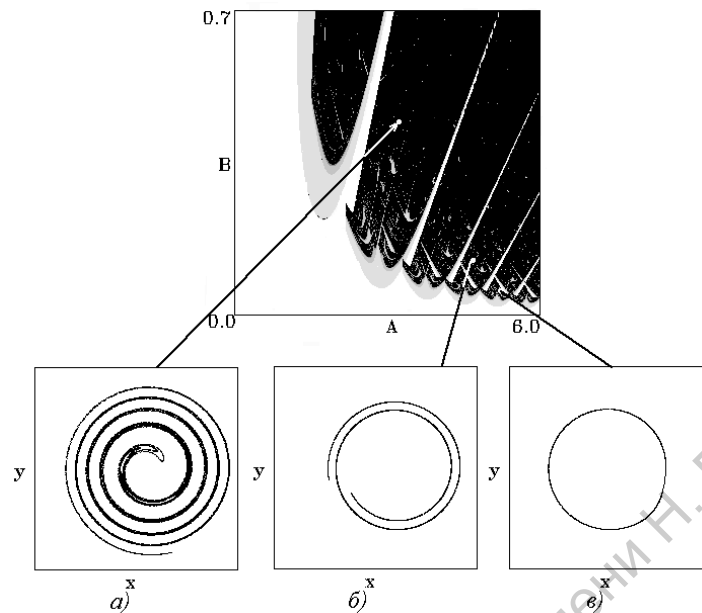


Рис. 13.11. Плоскость параметров для отображения Икеды и характерные фазовые портреты,  $\psi = 0$

**Задача 13.11.** Как видно из рис 13.11, в области малых  $B$  и больших  $A$  аттрактор отображения Икеды имеет тенденцию к сильному сжатию. Используя условие  $B \ll A$ , получите соответствующее одномерное отображение.

*Решение.* Используя подстановку  $z = A(1 + B\tilde{z})$ , можно получить

$$\tilde{z}_{n+1} = (1 + B\tilde{z}_n) \exp \left[ i \left( \varphi + \lambda \operatorname{Re} \tilde{z}_n + \frac{1}{2} \lambda B |\tilde{z}_n|^2 \right) \right],$$

где  $\lambda = 2A^2B$  и  $\varphi = A^2 + \psi$ . Если пренебречь в этом выражении малыми величинами, то для действительной части  $\operatorname{Re} \tilde{z}_n = \xi_n$  имеем одномерное отображение

$$\xi_{n+1} = \cos(\lambda \xi_n + \varphi).$$

**Задача 13.12.** Получите приближенно двумерное отображение для системы Ван дер Поля под воздействием периодической последовательности  $\delta$ -импульсов:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \sum \delta(t - nT),$$

*Ответ.* Отображение в комплексной форме выглядит следующим образом

$$z_{n+1} = \frac{z_n \exp(\lambda T/2 - iT)}{\sqrt{1 + |z_n|^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} + iB.$$

**Задача 13.13.** Для системы из предыдущей задачи получите приближенно одномерное отображение, считая параметр неравновесности  $\lambda$  большим.



Ответ:

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n} \right) - T.$$

Здесь  $\theta$  — угол, на фазовой плоскости, под которым точка видна из начала координат,  $C = B/2\sqrt{\lambda}$ . Это отображение можно получить как предельным переходом из результата предыдущей задачи, так и непосредственно в предположении, что за время между импульсами изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл.

**Задача 13.14.** Получите приближенно двумерное и одномерное отображения для неавтономной системы Ван дер Поля–Дуффинга вида

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = \sum B\delta(t - nT),$$

Ответ:

$$z_{n+1} = \frac{z_n \exp(\lambda T/2 - iT)}{\sqrt{1 + |z_n|^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} e^{-i\psi_n} + iB, \quad \psi_n = \frac{3}{2}\beta \ln \left( 1 + \frac{|z_n|^2}{4\lambda} (e^{\lambda T} - 1) \right),$$

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n} \right) - \Omega - \frac{3}{2}\beta \ln (1 + 2C \sin \theta_n + C^2),$$

где  $\Omega = T(1 + 3\beta\lambda/2)$ ,  $C = B/2\sqrt{\lambda}$ . Остальные обозначения вводятся аналогично предыдущей задаче.

**Задача 13.15.** Наличие фазовой нелинейности  $\beta x^3$  приводит к тому, что нетривиальная динамика фазы в неавтономном уравнении Ван дер Поля–Дуффинга возможна уже при малых амплитудах воздействия. Покажите, что при этом условии динамика фазы описывается традиционным синус-отображением окружности.

Ответ:  $\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - 3\beta C \sin \theta_n$

*Часть IV*

# **Неавтономные системы**

## Лекция 14

**Вынужденные колебания нелинейного осциллятора**

Предположим, что мы изучили в подробностях некоторую автономную колебательную систему, такую как линейный или нелинейный осциллятор, генератор Ван дер Поля, или какую-нибудь другую. На нее можно смотреть теперь как на отдельный элемент — строительный блок, или «кирпичик», для построения составных объектов, которые будут служить моделями более сложных колебательных систем. Например, мы можем обратиться к задачам о воздействии одной колебательной системы на другую, к рассмотрению динамики связанных систем, к анализу моделей пространственно-протяженных сред, построенных из большого числа связанных элементарных блоков, и так далее. Это одна из глубоких общих идей в теории колебаний. Некоторые аспекты такого подхода обсуждаются в других курсах данного цикла: по теории волн, образованию структур, самоорганизации, динамическому хаосу. Хотя сколько-нибудь полное изложение соответствующей исследовательской программы выходит за рамки нашего курса лекций, мы сделаем здесь существенный для нее первый шаг, а именно, рассмотрим особенности поведения простых нелинейных систем в присутствии периодического внешнего воздействия.

**14.1. О моделях неавтономных систем, фазовом пространстве и стробоскопическом отображении**

Рассмотрим пример механического осциллятора — шарика на пружине, на который действует внешняя сила, изменяющаяся во времени по синусоидальному закону (рис. 14.1а). Дифференциальное уравнение, вытекающее из второго закона Ньютона, можно записать в виде

$$m\ddot{x} + f(x) = F \sin \omega t, \quad (14.1)$$

где  $m$  — масса шарика, функция  $f(x)$  характеризует пружину и определяет зависимость возвращающей силы от смещения,  $F$  и  $\omega$  задают, соответственно, амплитуду и частоту внешней силы, воздействующей на осциллятор. Другой вариант — параметрическое воздействие, когда внешняя сила заставляет изменяться периодически какой-либо параметр колебательной системы, например, длину нити маятника или величину ускорения силы тяжести (маятник с колеблющимся в вертикальном направлении под-

весом, рис. 14.1в). Дифференциальное уравнение, описывающее динамику такого маятника при соответствующем задании закона изменения параметра во времени, будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}(1 + a \sin \omega t) \sin \varphi = 0 \quad (14.2)$$

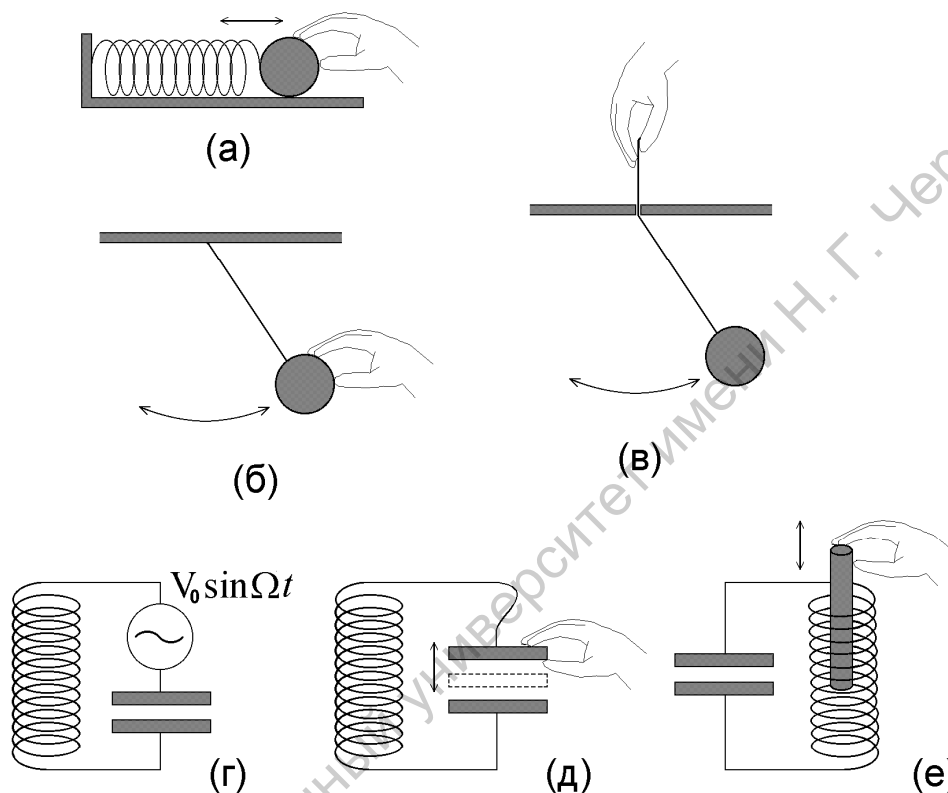


Рис. 14.1. Возбуждаемые внешним воздействием механические (а, б, в) и электрические (г, д, е) осцилляторы: «силовое» (а, б, г) и параметрическое (в, д, е)

Аналогичные два способа внешнего воздействия можно реализовать и в осцилляторах другой физической природы, например, электрических (рис. 14.1 г–е). Если в колебательный контур включить источник переменного напряжения, реализуется способ возбуждения аналогичный силовому возбуждению механической системы (14.1). Если же периодически менять емкость конденсатора (сдвигая и раздвигая пластины) или индуктивность (вдвигая и выдвигая сердечник), то это отвечает параметрическому возбуждению.

На практике параметрическое возбуждение осцилляторов в электро- и радиотехнике предпочтительнее реализовать без привлечения механически движущихся элементов. Например, можно поместить в конденсатор в качестве диэлектрика нелинейную среду и подать дополнительное переменное напряжение на пластины. Этим будет обеспечено периодическое изменение емкости. Другая возможность состо-

ит в том, чтобы использовать в катушке индуктивности сердечник с нелинейным намагничиванием и подать переменный ток в дополнительную обмотку. В этом случае будет периодически изменяться индуктивность.

Если в отсутствие зависящего от времени воздействия мы имеем автономную колебательную систему с двумерным фазовым пространством, то при добавлении периодического внешнего воздействия динамика такой системы в общем случае будет описываться системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = g(x, y, t), \quad (14.3)$$

где  $x$  и  $y$  — динамические переменные. Функции  $f$  и  $g$  считаются зависящими от времени  $t$  по периодическому закону. При надлежащем выборе функций  $f$  и  $g$  такая модель позволяет рассматривать различные осцилляторы, в том числе автоколебательные модели типа уравнения Ван дер Поля, Рэля, генератора с жестким возбуждением с внешним периодическим воздействием. Заметим, что при столь общей постановке задачи проведение различия между силовым и параметрическим воздействием может терять смысл.

Уравнения (14.3) описывают *неавтономную систему*. Этот термин означает, что в дифференциальных уравнениях присутствуют члены, явным образом зависящие от времени. Имея дело с такими системами, мы должны вполне определенным образом трактовать понятия фазового пространства и состояния колебательной системы. Для однозначного предсказания последующей динамики системы недостаточно просто задать значения переменных  $x$  и  $y$ , нужно еще указать к какому моменту времени в пределах периода внешнего воздействия они относятся. Поэтому состояние колебательной системы (14.3) определяется набором *трех* величин,  $(x, y, t)$ . Множество всевозможных состояний есть фазовое пространство системы, и это пространство в данном случае *трехмерное* (рис. 14.2).

К такому же выводу можно прийти сугубо формальным путем. Представим систему уравнений (14.3) как автономную с помощью искусственного приема. Для этого введем дополнительную динамическую переменную  $z$ , удовлетворяющую уравнению  $\dot{z} = 1$ , и запишем

$$\dot{x} = f(x, y, z), \quad \dot{y} = g(x, y, z), \quad \dot{z} = 1. \quad (14.4)$$

Полученная система трех уравнений первого порядка автономная, и она формально эквивалентна (14.3). Ее фазовое пространство  $(x, y, z)$  трехмерное. Динамика третьей переменной  $z$  состоит в том, что она линейно нарастает во времени, так что ее можно просто отождествить с  $t$ .

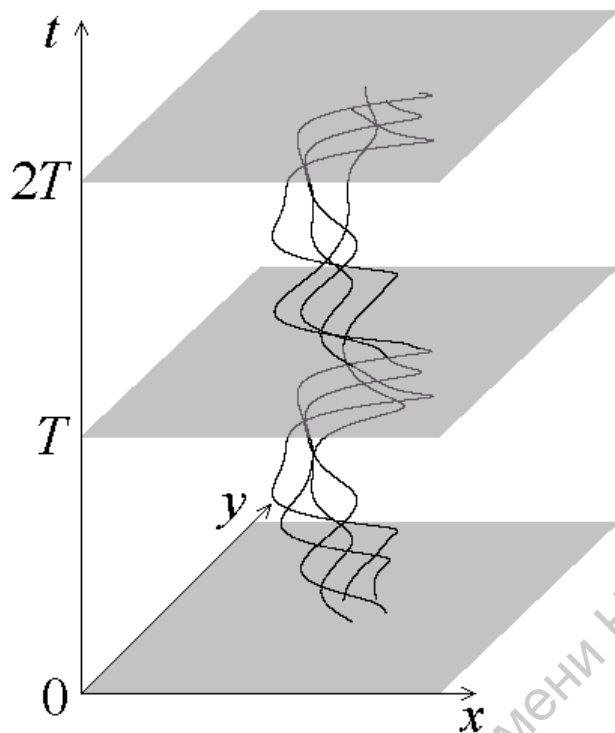


Рис. 14.2. Трехмерное фазовое пространство неавтономного осциллятора

В силу периодичности функций  $f$  и  $g$  по третьему аргументу, трехмерное фазовое пространство обладает структурой, периодически повторяющейся вдоль третьей координатной оси (времени). Поэтому можно ограничиться рассмотрением части пространства между плоскостями  $t = 0$  и  $t = T$ , где  $T$  — период. Верхнюю и нижнюю границы можно отождествить. Считается, что при пересечении верхней границы фазовая траектория мгновенно «перепрыгивает» на нижнюю, в точку с теми же координатами  $(x, y)$ .

Полезный подход к анализу динамики неавтономных осцилляторов состоит в использовании так называемого *стробоскопического отображения*. Представьте себе, что динамика изображающей точки в фазовом пространстве системы большую часть времени протекает в темноте и недоступна для наблюдения. Однако один раз за период внешнего воздействия  $T$  на короткий миг вспыхивает яркий свет, так что мы можем отслеживать дискретную последовательность состояний, отвечающую моментам вспышек.

Формально процедура состоит в следующем. Выделим в трехмерном фазовом пространстве  $(x, y, t)$  плоскость  $t = t_0$  (рис. 14.3). В качестве координат на этой плоскости можно использовать естественные динамические переменные нашей системы,  $x$  и  $y$ . Возьмем фазовую траекторию, стартующую из некоторой точки  $(x, y)$  на данной плос-

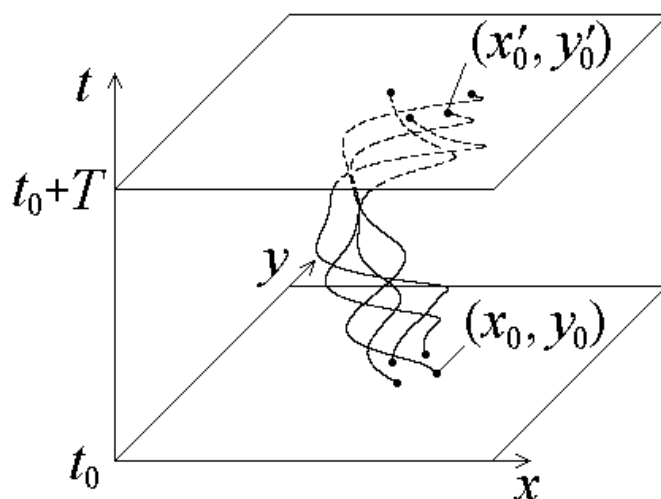


Рис. 14.3. Построение стробоскопического отображения

кости и отследим ее до момента времени  $t = t_0 + T$ . Пусть в этот момент значения динамических переменных составят  $x'$  и  $y'$ . Они, очевидно, зависят от выбора начальных  $x$  и  $y$ :

$$x' = F_1(x, y), \quad y' = F_2(x, y). \quad (14.5)$$

В силу периодичности фазового пространства по переменной  $t$ , мы можем отнести новую точку  $(x', y')$  к исходному моменту времени  $t = t_0$  и тем самым свести анализ дальнейшей динамики к повторению той же самой процедуры, с теми же функциями  $F_1$  и  $F_2$ . Таким образом, описание динамики сводится к последовательным итерациям *двумерного отображения* (14.5).

В принципе, мы можем отвлечься от исходных дифференциальных уравнений и сосредоточиться на анализе динамики в дискретном времени, порождаемой стробоскопическим отображением (14.5). Эта подмена объекта исследования не связана с какими-либо аппроксимациями, анализ остается точным. Цена, которую приходится заплатить, — это потеря информации о характере динамики в промежутки времени между последовательными моментами пересечения секущей поверхности и о топологических свойствах фазовых траекторий между пересечениями. Тем не менее, многие принципиальные вопросы по-прежнему можно анализировать, например, устанавливается ли в системе периодический или непериодический колебательный режим.

Найти явный вид стробоскопического отображения для конкретных нелинейных систем удастся лишь в тех случаях, когда дифференциальные уравнения допускают

аналитическое решение. Гораздо чаще приходится реализовать его как численный алгоритм. Тем не менее, стробоскопическое отображение оказывается очень продуктивным при теоретическом анализе, а также для наглядного представления компьютерных результатов в случае сложной динамики рассматриваемых систем.

Стробоскопическое отображение представляет собой частный случай более общей конструкции — *отображения Пуанкаре*, являющегося одним из основных рабочих инструментов в современной нелинейной динамике. Тот факт, что от описания в терминах дифференциальных уравнений можно перейти к описанию в терминах рекуррентных отображений, имеет большое методологическое значение. Отсюда следует, что оба класса динамических систем – с непрерывным и дискретным временем принципиально должны рассматриваться в едином контексте, в рамках общей системы представлений.

#### 14.2. Нелинейный резонанс

Как известно, для линейного осциллятора характерен эффект *резонанса*. Когда частота воздействия близка к собственной частоте осциллятора, амплитуда колебаний оказывается большой. Действительно, решение уравнения для вынужденных колебаний линейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (14.6)$$

можно искать в виде  $x = A \cos \omega t$ . Подстановка этого выражения в уравнение приводит к соотношению

$$|A| = \frac{f}{|\omega^2 - \omega_0^2|}, \quad (14.7)$$

откуда следует, что при приближении частоты воздействия  $\omega$  к собственной частоте  $\omega_0$ , амплитуда колебаний стремится к бесконечности (если учитывать диссипацию, она оказывается ограниченной).

В случае нелинейного осциллятора частота свободных колебаний обычно зависит от амплитуды (неизохронность). Например, для кубического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (14.8)$$



колебания малой амплитуды, которые еще можно приближенно считать гармоническими,  $x = A \cos \omega t$ , происходят на частоте, сдвинутой на величину  $\Delta\omega(A) \approx 3\beta A^2/8\omega_0$  (см. лекцию 9).

В грубом приближении для описания вынужденных колебаний нелинейного осциллятора мы можем попытаться использовать то же самое соотношение (14.7), но вместо  $\omega_0$  подставить модифицированную частоту свободных колебаний  $\omega_0 + \Delta\omega(A)$ . В результате получается *неявное* соотношение, связывающее амплитуду вынужденных колебаний  $A$  с частотой  $\omega$  и амплитудой  $f$  внешнего воздействия:

$$|A| = \frac{f}{|\omega^2 - (\omega_0 + \Delta\omega)^2|} \approx \frac{f}{|\omega^2 - \omega_0^2 - 3\beta A^2/4|}. \quad (14.9)$$

На рис. 14.4 показаны графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты для линейного (а) и нелинейного (б, в) осциллятора. Обратим внимание на разное расположение резонансной кривой осциллятора с кубической нелинейностью при положительном и отрицательном значении параметра нелинейности  $\beta$ . Если частота свободных колебаний возрастает с ростом амплитуды (при  $\beta > 0$ ), то верхняя часть графика резонансной кривой наклонена вправо, если же убывает (при  $\beta < 0$ ), то влево.

Следует отметить, что в отличие от линейного случая амплитуда вынужденных колебаний остается конечной даже при точном совпадении  $\omega$  и  $\omega_0$ . Причина, очевидно, заключается в неизохронности собственных колебаний нелинейного осциллятора: с ростом амплитуды увеличивается нелинейный сдвиг частоты и резонансные условия нарушаются. Вследствие этого нарастание амплитуды ограничивается.

Совокупность явлений, которые наблюдаются в нелинейном осцилляторе при внешнем периодическом воздействии и проявляются в изменении качественной природы и количественных характеристик вынужденных колебаний в зависимости от амплитуды и частоты воздействия, обозначают термином *нелинейный резонанс*. Важно подчеркнуть, что зависимость амплитуды от частоты, как видно из рис. 14.4, может быть неоднозначной. Это очень существенный и характерный для нелинейного резонанса момент, который будет подробнее обсужден в ходе дальнейшего изложения.

Резонансные кривые для консервативного осциллятора можно встретить в многочисленных учебных курсах по теории колебаний. Правильная их интерпретация со-

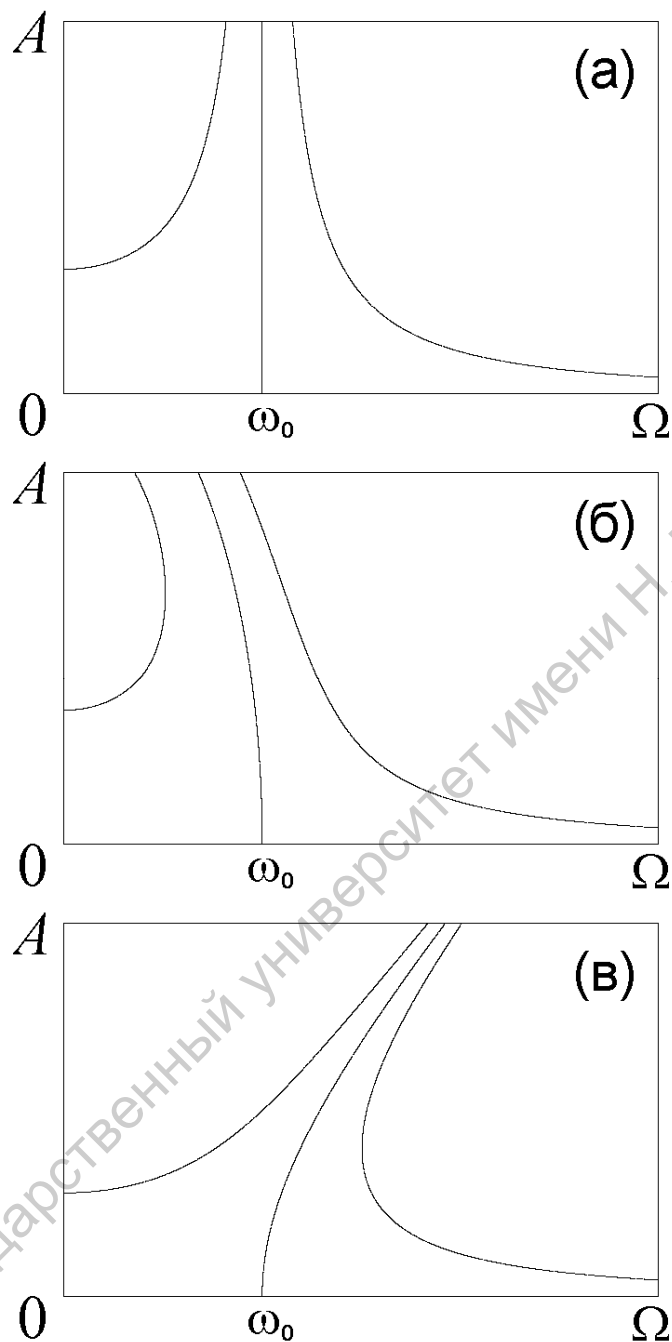


Рис. 14.4. Резонансные кривые — зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты воздействия в линейном осцилляторе (а) и в нелинейном осцилляторе с кубической нелинейностью при  $\beta < 0$  (б) и  $\beta > 0$  (в) в отсутствие диссипации

держит определенную тонкость, что не всегда должным образом подчеркивается. Дело в том, что консервативный осциллятор (как линейный, так и нелинейный) обладает свойством сохранять «память» о своем начальном состоянии на протяжении неограниченного времени. Поэтому в общем случае движение будет содержать зависящую от начальных условий составляющую, отвечающую за «собственные» колебания осциллятора с некоторой характерной частотой и амплитудой, и составляющую, отвечающую

за вынужденные колебания, период которой определяется периодом воздействия (в нелинейной системе принцип суперпозиции не работает, поэтому, говоря о наличии двух составляющих колебательного процесса, мы имеем в виду не их сумму, а некую более сложную комбинацию). Если частоты обеих составляющих находятся в рациональном отношении, то движение будет периодическим, но это скорее исключительный случай. Если же частоты несоизмеримы, то движение оказывается *квазипериодическим*. Только лишь при определенном выборе начальных условий, исключающим «собственную» колебательную составляющую, реализуются «в чистом виде» вынужденные колебания, которым соответствует амплитуда, представленная на рис. 14.4.

Можно, однако, предложить и другой подход к трактовке резонансных кривых на рис. 14.4. Представим себе, что наш осциллятор на самом деле диссипативный, но диссипация исчезающе мала (характеризуется параметром  $\gamma \ll 1$ ). Тем не менее, если время наблюдения достаточно велико,  $T \gg \gamma^{-1}$ , то диссипация будет существенной и обеспечит установление не зависящего от начальных условий режима вынужденных колебаний. Зависимость амплитуды колебаний от частоты воздействия в установившемся режиме будет приближенно описываться резонансными кривыми, построенными для консервативного осциллятора, с тем большей точностью, чем меньше параметр диссипации  $\gamma$ .

### **14.3. Нелинейный резонанс в осцилляторе с диссипацией.**

#### **Укороченные уравнения и резонансные кривые**

Обратимся теперь к более аккуратному анализу нелинейного резонанса в осцилляторе с кубической нелинейностью при учете диссипации и рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\gamma\dot{x} - \beta x^3 + f \cos \omega t, \quad (14.10)$$

причем будем считать, что частота внешнего воздействия близка к собственной частоте осциллятора,  $\omega = \omega_0 + \delta$ , где *расстройка* частот  $\delta$  мала. Члены, фигурирующие в правой части, отвечают за диссипацию, нелинейность и внешнее воздействие. Если ими пренебречь, система превращается в гармонический осциллятор. Если же они малы, то решение целесообразно искать в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой, для которой можно получить укороченное уравнение при помощи асимптотических методов, описанных в лекции 9.

Используем метод усреднения Ван дер Поля. Подставим в уравнение (14.10)  $x(t)$  в виде

$$x(t) = \operatorname{Re}[A(t)\exp(i\omega_0 t)], \quad (14.11)$$

где на медленно меняющуюся комплексную амплитуду  $A$ , как обычно, накладывается дополнительное условие

$$\dot{A}\exp(i\omega_0 t) + A^* \exp(-i\omega_0 t) = 0. \quad (14.12)$$

Представим член, ответственный за внешнее воздействие, в виде

$$f \cos \omega t = \operatorname{Re}[f \exp(i\omega t)] = \frac{f \exp(i\omega t) + f^* \exp(-i\omega t)}{2}. \quad (14.13)$$

Подставляя (14.11)–(14.13) в (14.10), после несложных преобразований, которые подробно были описаны в лекции 9, получим

$$i\omega_0 \dot{A} e^{i\omega_0 t} = -i\omega_0 \gamma A e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 \gamma A^* e^{-i\omega_0 t} + \\ + \frac{\beta}{8} \left( A^3 e^{3i\omega_0 t} + 3|A|^2 A e^{i\omega_0 t} + 3|A|^2 A^* e^{-i\omega_0 t} + (A^*)^3 e^{-3i\omega_0 t} \right) + \frac{1}{2} f e^{i\omega t} + \frac{1}{2} f^* e^{-i\omega t}. \quad (14.14)$$

Умножим обе части уравнения (14.14) на  $\exp(-i\omega_0 t)/i\omega_0$  и проведем усреднение за период колебаний  $2\pi/\omega_0$ . Считаем, что на этом масштабе времени изменением комплексных амплитуд можно пренебречь. Кроме того, поскольку мы рассматриваем случай, когда частоты  $\omega$  и  $\omega_0$  близки, то член, содержащий экспоненту  $\exp[i(\omega - \omega_0)t] = \exp(i\delta t)$ , также будет медленно меняющимся. Тогда после устранения быстро осциллирующих членов приходим к укороченному уравнению

$$\dot{A} = -\gamma A - \frac{3i\beta}{8\omega_0} |A|^2 A - \frac{if}{2\omega_0} \exp(i\delta t). \quad (14.15)$$

В отсутствие внешнего воздействия, когда  $f = 0$ , уравнение (14.15) переходит в укороченное уравнение для автономного осциллятора Дуффинга, которое рассматривалось в лекции 9.

Перейдем к уравнениям для действительных переменных — амплитуды и фазы. Полагая  $A = a \exp(i\phi)$ , отделим в (14.15) вещественную и мнимую части. Получим

$$\begin{aligned} \dot{a} + \gamma a &= \frac{f}{2\omega_0} \sin(\delta t - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{3\beta a^2}{8\omega_0} - \frac{f}{2a\omega_0} \cos(\delta t - \varphi). \end{aligned} \quad (14.16)$$

Система уравнений (14.16) является неавтономной, так как содержит члены, зависящие явным образом от времени. Однако, вводя величину  $\psi = \delta t - \varphi$ , можно получить автономную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{a} + \gamma a &= \frac{f}{2\omega_0} \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= \delta - \frac{3\beta a^2}{8\omega_0} + \frac{f}{2a\omega_0} \cos \psi. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Естественно ожидать, что в установившемся режиме вынужденных колебаний амплитуда постоянна, а частота равна частоте внешнего воздействия. Этому режиму соответствуют положения равновесия системы (14.17):  $a = a_0$ ,  $\psi = \psi_0$ ,  $a_0, \psi_0 = \text{const}$ . Действительно, нетрудно убедиться, что в этом случае

$$\begin{aligned} A(t) &= a \exp(i\varphi) = a_0 \exp[i(\delta t - \psi_0)], \\ x(t) &= \text{Re}[A \exp(i\omega_0 t)] = a_0 \cos(\omega t - \psi_0), \end{aligned} \quad (14.18)$$

т.е. колебания происходят точно на частоте воздействия. Для определения положений равновесия получаем из (14.17) следующие уравнения

$$\begin{aligned} \gamma a_0 &= \frac{f}{2\omega_0} \sin \psi_0, \\ \left( \delta - \frac{3\beta a_0^2}{8\omega_0} \right) a_0 &= -\frac{f}{2\omega_0} \cos \psi_0. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Удобно исключить отсюда  $\psi_0$ . Возводя уравнения (14.19) в квадрат и складывая, получаем соотношение, которое неявным образом определяет амплитуду колебаний  $a_0$  как функцию амплитуды и частоты вынуждающей силы

$$(\gamma a_0)^2 + a_0^2 \left( \delta - \frac{3\beta a_0^2}{8\omega_0} \right)^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2}. \quad (14.20)$$

Соотношение (14.20) называется *уравнением резонансной кривой*.

Если устремить параметр диссипации  $\gamma$  к нулю, то (14.20) можно переписать в следующей форме

$$a_0 = \frac{f}{|2\omega_0\delta - 3\beta a_0^2/4|}, \quad (14.20a)$$

которая согласуется с выражением (14.9). В самом деле, ввиду близости частот  $\omega_0$  и  $\omega$  справедливо приближенное соотношение  $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0\delta$ .

Мы хотели бы детально проанализировать соотношение (14.20), описывающее нелинейный резонанс в присутствии диссипации. Для этого преобразуем его к более удобной форме, минимизируя количество переменных и параметров. Для определенности, далее будем считать параметр нелинейности  $\beta$  положительным.

Введем следующие обозначения:  $P = (3\beta f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$  — безразмерный параметр, характеризующий интенсивность внешнего воздействия,  $X = (3\beta a_0^2)/(8\gamma\omega_0)$  — безразмерный параметр, характеризующий интенсивность вынужденных колебаний,

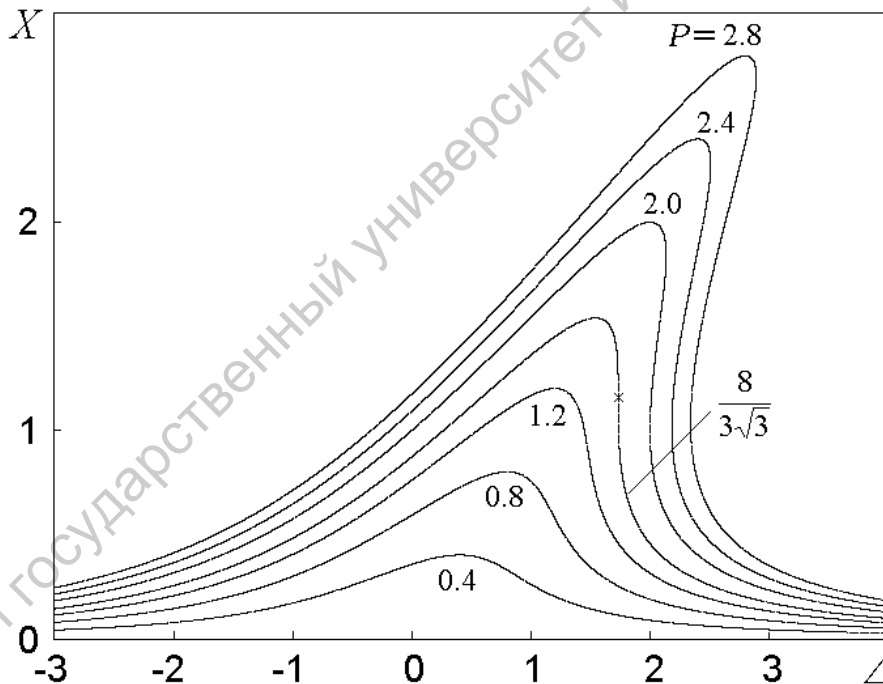


Рис. 14.5. Семейство резонансных кривых нелинейного осциллятора с диссипацией. Каждая кривая показывает зависимость параметра интенсивности вынужденных колебаний  $X$  от безразмерной расстройки  $\Delta$  при фиксированной величине амплитуды воздействия, заданной параметром  $P$ , см. формулу (14.21). Крестиком показана точка, отвечающая моменту первого появления вертикальной касательной ( $P = 8/3\sqrt{3}$ ,  $\Delta = \sqrt{3}$ ,  $X = 2/\sqrt{3}$ )

$\Delta = \delta/\gamma$  — безразмерная расстройка частоты. Тогда соотношение (14.20) принимает вид

$$X = \frac{P}{(X - \Delta)^2 + 1}, \quad (14.21)$$

Придавая различные значения параметру интенсивности воздействия  $P$ , мы можем построить семейство кривых  $X = X(\Delta)$ , представляющих собой резонансные кривые нелинейного осциллятора в безразмерных координатах  $X$  и  $\Delta$  (рис. 14.5).

Если внешнее воздействие мало, т.е.  $P \ll 1$ , то амплитуда вынужденных колебаний тоже мала ( $X$  порядка  $P$ ), и формула (14.21) приближенно приводится к виду

$$X = \frac{P}{\Delta^2 + 1}. \quad (14.22)$$

Соответствующий график имеет вид колоколообразной кривой, характерной для линейного резонанса и известной как «лоренцевский контур». С ростом параметра  $P$  амплитуда растет, поправка  $X$  в знаменателе формулы (14.21) становится существенной, верхняя часть резонансной кривой постепенно отклоняется вправо, и кривая становится все более асимметричной. Обратим внимание, что максимумы резонансных кривых  $X = P$  достигаются при  $X = \Delta$ , т.е. при

$$\delta = \frac{3\beta a_0^2}{8\omega_0} = \Delta\omega(a_0). \quad (14.23)$$

Следовательно, при заданной амплитуде внешней силы амплитуда вынужденных колебаний будет максимальна, когда расстройка в точности равна нелинейному сдвигу частоты свободных колебаний автономного осциллятора.

При достаточно больших амплитудах воздействия зависимость амплитуды колебаний от расстройки становится неоднозначной. В рассматриваемом случае, когда параметр нелинейности  $\beta$  положителен, область неоднозначности располагается при частотах воздействия несколько больших частоты линейного резонанса ( $\Delta > 0$ , т.е.  $\omega > \omega_0$ ). В этой области одной частоте воздействия отвечает *три* возможных значения амплитуды. Причина появления этой неоднозначности и связанные с ней явления заслуживают специального обсуждения.

**Задача 14.1.** Найдите критическое (минимальное) значение безразмерной амплитуды воздействия  $P$  в формуле (14.21), начиная с которого резонансные кривые становятся неоднозначными.

**Задача 14.2.** Получите укороченные уравнения для линейного осциллятора с затуханием под внешним гармоническим воздействием

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

и постройте резонансные кривые. Сравните полученный результат с известными из курса линейных колебаний точными решениями.

**Задача 14.3.** Получите укороченное уравнение (14.15) при помощи метода многих масштабов для неавтономного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\gamma\dot{x} + x + \varepsilon x^3 = \varepsilon f \cos \omega t,$$

где  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр. Частоту внешнего воздействия считайте близкой к собственной частоте малых колебаний автономного осциллятора, т.е.  $\omega = 1 + \varepsilon\delta$ .

**Задача 14.4.** Получите укороченное уравнение и постройте резонансные кривые для осциллятора с квадратичной нелинейностью под внешним гармоническим воздействием

$$\ddot{x} + 2\varepsilon^2\gamma\dot{x} + x + \varepsilon x^2 = \varepsilon^2 f \cos \omega t,$$

при условии  $\omega = 1 + \varepsilon^2\delta$ . Поскольку в данном случае нелинейная поправка к частоте имеет порядок  $\varepsilon^2$  (см. лекцию 9), параметр диссипации, амплитуда внешнего воздействия и расстройка также должны иметь порядок  $\varepsilon^2$ .

#### 14.4. Бифуркации при нелинейном резонансе

Прежде всего исследуем резонансную кривую на устойчивость. Зададим малые отклонения от состояний равновесия, полагая  $a(t) = a_0 + \xi(t)$ ,  $\psi(t) = \psi_0 + \eta(t)$ , и линеаризуем уравнения (14.17). Получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} + \gamma\xi &= \frac{f\eta}{2\omega_0} \cos \psi_0, \\ a_0\dot{\eta} &= \delta\xi - \frac{9\beta a_0^2\xi}{8\omega_0} - \frac{f\eta}{2\omega_0} \sin \psi_0. \end{aligned} \tag{14.24}$$

Исключим отсюда  $\psi_0$  при помощи соотношений (14.19):

$$\begin{aligned} \dot{\xi} + \gamma\xi &= -\left(\delta a_0 - \frac{3\beta a_0^3}{8\omega_0}\right)\eta, \\ a_0\dot{\eta} &= \left(\delta - \frac{9\beta a_0^2}{8\omega_0}\right)\xi - \gamma a_0\eta. \end{aligned} \tag{14.25}$$

Полагая, что решения (14.25) имеют вид  $\xi, \eta \sim \exp(pt)$ , приходим к характеристическому уравнению, которое после несложных преобразований можно записать в виде

$$(p + \gamma)^2 = -(\delta - \Delta\omega)(\delta - 3\Delta\omega), \tag{14.26}$$

где  $\Delta\omega(a_0) = 3\beta a_0^2/8\omega_0$  — нелинейный сдвиг частоты собственных колебаний осциллятора. Корни уравнения (14.26) есть



$$p_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{-(\delta - \Delta\omega)(\delta - 3\Delta\omega)}. \quad (14.27)$$

Нетрудно видеть, что при  $\delta < \Delta\omega$  и при  $\delta > 3\Delta\omega$  корни  $p_{\pm}$  комплексные, и состояние равновесия представляет собой устойчивый фокус. При  $\Delta\omega < \delta < 3\Delta\omega$  корни вещественны. В этом случае корень  $p_{-}$ , очевидно, всегда отрицателен, так что состояние равновесия может быть либо устойчивым узлом, либо седлом. Смена характера устойчивости происходит при  $p_{+} = 0$ , т.е. при

$$(\delta - \Delta\omega)(\delta - 3\Delta\omega) = -\gamma^2. \quad (14.28)$$

Переходя к безразмерным переменным, введенным в предыдущем разделе, можно переписать это уравнение в виде

$$(\Delta - X)(\Delta - 3X) = -1. \quad (14.29)$$

В то же время, если продифференцировать уравнение резонансной кривой (14.21) по  $X$ , получим следующее соотношение

$$(\Delta - X)^2 + 2X(\Delta - X)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial X} - 1\right) + 1 = 0. \quad (14.30)$$

В области неоднозначности резонансная кривая имеет три ветви, границы между которыми определяются из условия  $\partial\Delta/\partial X = 0$ . Нетрудно показать, что при этом условии

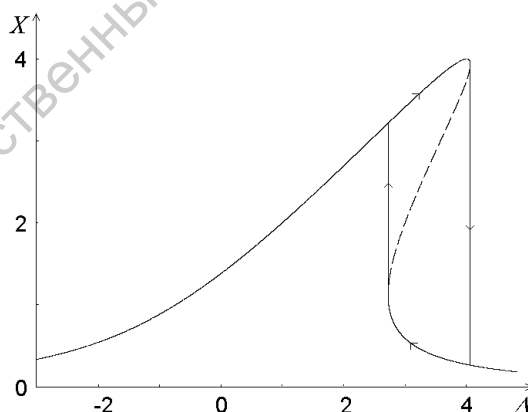


Рис. 14.6. Гистерезис при нелинейном резонансе. Стрелки показывают направление движения вдоль резонансной кривой при медленном изменении частоты воздействия (см. текст)

соотношение (14.30) принимает вид (14.29). Следовательно, вся промежуточная ветвь резонансной кривой отвечает неустойчивым состояниям равновесия, а верхняя и нижняя — устойчивым. На рис. 14.6 построена резонансная кривая, на которой неустойчивая ветвь обозначена штрихом.

Теперь можно ответить на вопрос, как будет изменяться поведение системы при плавном изменении управляющих параметров, например, частоты воздействия. Предположим, что мы постепенно увеличиваем частоту, находясь первоначально вдали от резонанса. На резонансной кривой это отвечает движению вдоль левой ветви (рис. 14.6). Амплитуда колебаний увеличивается с ростом частоты. Вскоре после прохождения максимума происходит резкое изменение режима — *жесткий переход*, или *катастрофа*: амплитуда скачком уменьшается до некоторой небольшой величины. В результате мы оказываемся на правой ветви резонансной кривой. Если теперь уменьшать частоту воздействия, то мы двигаемся вдоль этой ветви (в том числе, в области частот, где ранее наблюдались колебания большой амплитуды). Амплитуда при этом постепенно растет, и в некоторый момент происходит новая катастрофа — скачкообразный переход в режим большой амплитуды, возвращение на левую ветвь резонансной кривой. Таким образом, изменение частоты воздействия при достаточно большой его амплитуде приводит к *гистерезису*.

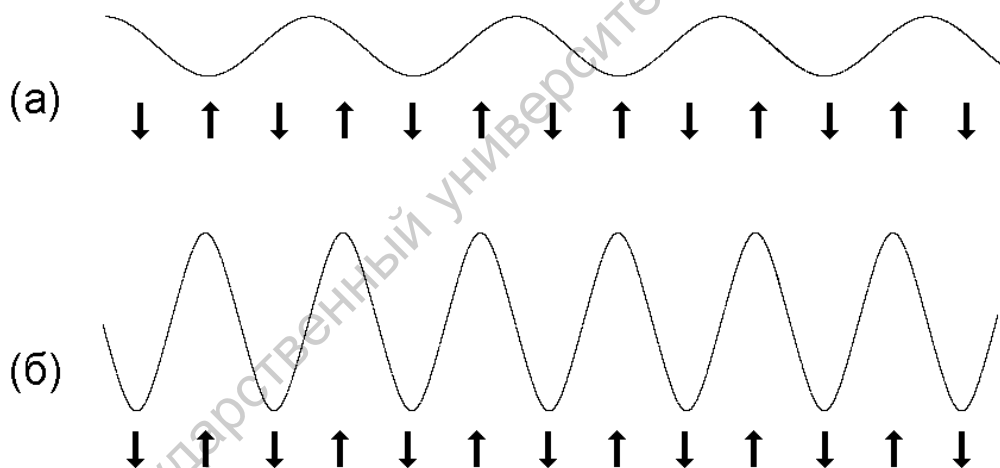


Рис. 14.7. Внешнее воздействие определенной частоты на нелинейный осциллятор, совершающий колебания малой (а) и большой (б) амплитуды. В первом случае воздействие нерезонансное, во втором — резонансное

Причину появления неоднозначности можно качественно пояснить следующим образом. При наличии определенной отстройки по частоте, когда условия линейного резонанса не выполнены (рис. 14.7а), осциллятор будет совершать вынужденные колебания некоторой сравнительно небольшой амплитуды  $a_1$ . Предположим теперь, что воздействующая на осциллятор внешняя сила такая же, но амплитуда колебаний изначально велика. Их частота оказывается иной, чем в линейном случае, и близка к частоте

воздействия (рис. 14.76). Внешняя сила в этом случае будет подталкивать осциллятор в такт совершаемым колебаниям, и их амплитуда может поддерживаться на исходном уровне  $a_3$ . Промежуточное значение амплитуды  $a_2$  отвечает неустойчивому состоянию: чуть-чуть уменьшив или чуть-чуть увеличив амплитуду колебаний, мы обнаружим, что осциллятор после переходного процесса окажется в состоянии  $a_1$  или  $a_3$ .

Что представляет собой аттрактор в фазовом пространстве неавтономного диссипативного осциллятора, соответствующий установившемуся режиму периодических вынужденных колебаний? Это некоторая определенная, периодическая в направлении временной оси, фазовая траектория, к которой в пределе, с течением времени, приближаются все соседние траектории.

Если принять соглашение об отождествлении областей фазового пространства, сдвинутых на период по оси времени, то упомянутая притягивающая траектория будет замкнутой. Можно ли ее назвать притягивающим предельным циклом? По-видимому, правильнее зарезервировать это термин для автономных систем, имея в виду замкнутые фазовые траектории, которые служат математическим образом автоколебаний. Для траектории, представляющей вынужденные колебания, лучше использовать нейтральный термин «притягивающая периодическая орбита».

Когда мы привлекаем для описания динамики стробоскопический метод, аттрактор представляется притягивающей неподвижной точкой соответствующего двумерного отображения.

Как мы увидим из дальнейшего изложения, в общем случае колебания нелинейного осциллятора при периодическом внешнем воздействии могут быть сложными, в том числе хаотическими. В последнем случае в трехмерном фазовом пространстве системы присутствует так называемый странный аттрактор – сложно устроенное притягивающее множество неустойчивых траекторий. Такая ситуация, впрочем, не встречается, если выполнены те предположения, при которых применимо приближение медленно меняющихся амплитуд. В самом деле, в рамках этого приближения мы свели задачу к уравнению (14.15), которая заменой переменной приводится к автономной системе (14.17) с двумерным фазовым пространством. А для двумерных систем с непрерывным временем хаос невозможен (см. книгу «Динамический хаос» серии «Современная теория колебаний и волн»).

В области параметров, где реализуется гистерезис, нелинейный осциллятор демонстрирует бистабильность. Это соответствует наличию в фазовом пространстве двух сосуществующих аттракторов, один из которых отвечает вынужденным колебаниям малой, а второй — большой амплитуды. Возникновение одного или другого режима зависит от начальных условий. Множество точек фазового пространства, при запуске

из которых траектория приходит к одному определенному аттрактору, называют бассейном этого аттрактора.

Рассмотрим полезный способ представления поведения системы на плоскости параметров. На рис. 14.8 показана соответствующая диаграмма, где по оси абсцисс от-

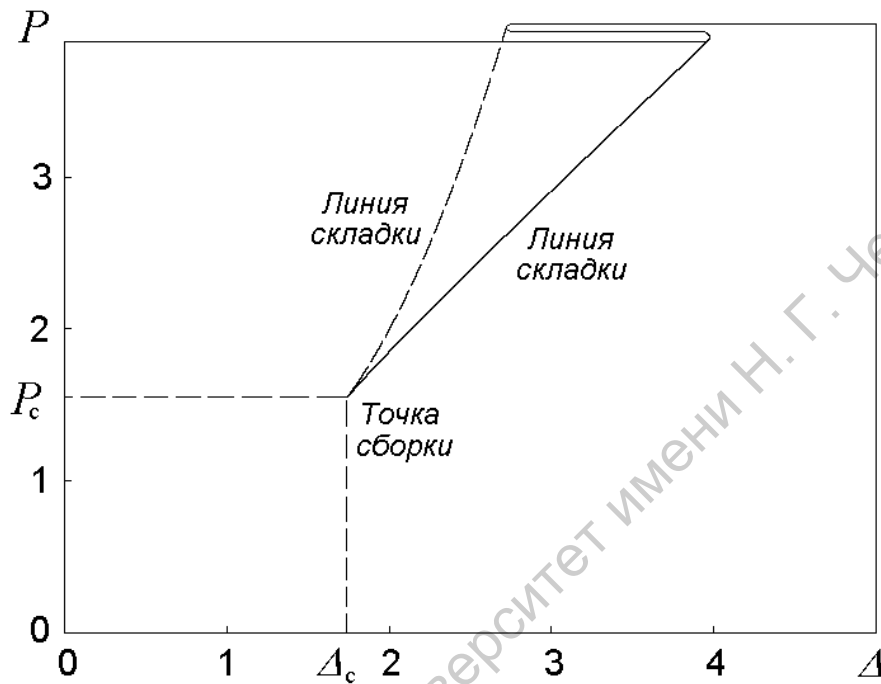


Рис. 14.8. Линии складок и точка сборки на плоскости параметров нелинейного диссипативно-го осциллятора

ложена нормированная частота воздействия  $\Delta = \delta/\gamma$ , а по оси ординат — нормированная амплитуда воздействия  $P = (3\beta f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$ . Картину можно мыслить как совокупность частично перекрывающихся листов, каждый из которых отвечает одному из корней уравнения (14.21). Область перекрытия листов есть область бистабильности. Она ограничена двумя *линиями складок*, которые сходятся вместе в определенной точке, называемой *точкой сборки*.

Как найти аналитически линии складок и точку сборки? Первые, очевидно, можно определить из условия равенства нулю производной  $\partial\Delta/\partial X$ , что приводит к соотношению (14.29). Таким образом, на плоскости параметров  $(\Delta, P)$  линии складок есть кривые, определяемые системой двух уравнений (14.21) и (14.29). Если, кроме того, потребовать обращения в нуль второй производной,  $\partial^2\Delta/\partial X^2$ , что дает

$$6X - 4\Delta = 0, \quad (14.31)$$

то система трех уравнений (14.21), (14.29) и (14.31) с тремя неизвестными ( $X$ ,  $\Delta$ , и  $P$ ) определит положение точки сборки. Ее решение представляет собой несложную алгебраическую задачу и приводит к результату  $X = 2/\sqrt{3}$ ,  $\Delta = \sqrt{3}$ ,  $P = 8/3\sqrt{3}$ . Указанные величины  $\Delta$  и  $P$  определяют координаты точки сборки на плоскости параметров.

Если двигаться на плоскости параметров вдоль горизонтальной линии  $P=\text{const}$ , то зависимость интенсивности колебаний от параметра расстройки  $\Delta$  будет даваться одной из резонансных кривых семейства, представленного на рис. 14.5. Если рассматриваемая горизонтальная линия проходит *ниже* точки сборки, то зависимость амплитуды от расстройки однозначная. Если же она проходит выше точки сборки, то появляется область неоднозначности, или гистерезиса. Она ограничена точками, где касательная к резонансной кривой вертикальна; это те самые точки, где линия  $P=\text{const}$  пересекается с линиями складок. Момент первого появления вертикальной касательной к резонансной кривой отвечает точке сборки.

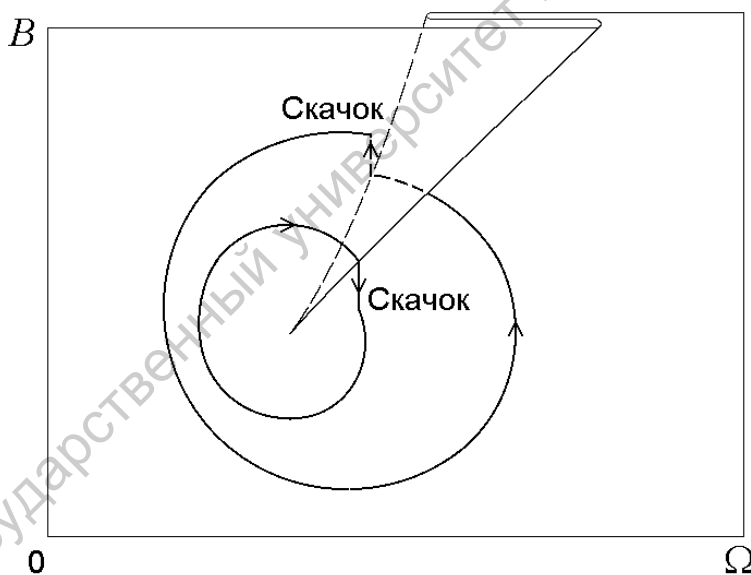


Рис. 14.9. К пояснению бифуркаций, наблюдаемых при обходе точки сборки в разных направлениях

Если медленно изменять параметры системы так, что это соответствует обходу вокруг точки сборки, то при пересечении одной из линий складок будет наблюдаться скачкообразное изменение состояния («катастрофа»). При обходе по часовой стрелке это происходит на одной линии складок, а при обходе против часовой стрелки — на другой (рис. 14.9). (Выше мы обсуждали этот же эффект гистерезиса применительно к изменению одного параметра — частоты воздействия.)

Если рассуждать в терминах стробоскопического метода, то линия складок отвечает бифуркации, состоящей в слиянии устойчивой и неустойчивой неподвижных точек двумерного отображения. На языке динамических систем с непрерывным временем (дифференциальных уравнений) это бифуркация слияния устойчивой и неустойчивой периодических орбит. Бифуркационная ситуация достигается подстройкой *одного* параметра системы, как говорят, бифуркация имеет *коразмерность один*. Точка сборки отвечает *бифуркации коразмерности два* – для того, чтобы в нее попасть, нужно подбирать *два* параметра.

#### **14.5. Нелинейный резонанс в численном эксперименте**

Хотя рассмотренная выше картина явлений в диссипативном осцилляторе при нелинейном резонансе выглядит достаточно наглядной и убедительной, не стоит забывать, что мы пришли к ней, опираясь на метод медленно меняющихся амплитуд. В каких случаях, и в какой мере можно доверять результатам, полученным на основании приближенного метода?

Естественной кажется такая постановка вопроса: пусть мы имеем конкретный осциллятор, описываемый уравнением (14.10), с заданными параметрами. Какой будет погрешность метода? Возможность дать обозримый и исчерпывающий ответ на этот вопрос кажется весьма сомнительной. В самом деле, погрешность описания динамики приближенным методом будет зависеть от такого же числа факторов, как и сама динамика. Дать полный ответ, по-видимому, не проще, чем предложить полное описание собственно динамики со всеми деталями! Разумен и заслуживает внимания следующий более изощренный подход. Спросим, можно ли указать такой предельный переход, когда, уменьшая некоторый параметр задачи, мы будем получать все более точное соответствие с истинным поведением системы, с тем условием, однако, чтобы картина поведения системы оставалась содержательной, сохраняя все назначенные для изучения феномены в процессе предельного перехода. Рассмотренная нами теория нелинейного резонанса хороша как раз тем, что обладает указанными свойствами. Поэтому ее следует, безусловно, признать правильной в том смысле, что всегда можно подобрать такое соотношение параметров возбуждаемого нелинейного осциллятора, чтобы метод работал, притом с любой желаемой степенью точностью. Описание оказывается точным в *асимптотическом смысле* (почему и говорят об «асимптотических методах теории колебаний»).

Из сказанного совсем не следует, что теория охватывает все возможные варианты качественного поведения системы, и что результаты будут удовлетворительными при любом задании параметров. В действительности дело обстоит как раз наоборот. В частности, сложная хаотическая динамика, возмож-

ная в возбуждаемом периодической силой нелинейном осцилляторе, не находит описания в рамках рассмотренной теории. Но хаос и реализуется в той области параметров, где метод медленно меняющихся амплитуд заведомо не работает.

Чтобы составить представление о соотношении результатов анализа в рамках метода медленно меняющихся амплитуд и динамикой исходной системы (14.10), разумно обратиться к численному эксперименту, т.е. попытаться пронаблюдать характерные для нелинейного резонанса феномены посредством численного решения исходного дифференциального уравнения на компьютере и провести количественное сравнение с аналитическими результатами. Разумеется, выбор исходных параметров задачи должен быть произведен так, чтобы он явно не противоречил условиям применимости приближенного метода. В то же время, он должен захватить и ту область, где возникают заметные погрешности. Далее, следует продумать способ обработки и представления результатов в терминах переменных и параметров, отвечающих проведенному аналитическому рассмотрению с тем, чтобы сделать сопоставление наглядным и убедительным.

Стандартные методы численного решения формулируются обычно применительно к системам дифференциальных уравнений первого порядка. Наше исходное дифференциальное уравнение (14.10) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка,

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x} - \beta x^3 + f \cos(\omega t + \varphi). \quad (14.32)$$

Фаза внешнего воздействия  $\varphi$  несущественна с точки зрения характера реализующегося режима, и в дальнейшем мы без ограничения общности положим ее равной нулю.

Построение *разностной схемы* для численного решения подразумевает задание некоторого шага по времени  $h$  и замену производных разностными соотношениями (кратко эти вопросы уже затрагивались в лекции 4). Конкретное конструирование разностных схем, обеспечивающих оптимальную точность при заданном шаге, составляет предмет специального раздела вычислительной математики, которому посвящена обширная литература. Здесь нас интересует принципиальная сторона вопроса, поэтому обратимся к несложной схеме второго порядка (это значит, что погрешность аппроксимации на одном шаге пропорциональна  $h^3$ ). Вводим обозначение  $x_n = x(t)|_{t=nh}$ ,  $v_n = v(t)|_{t=nh}$  и полагаем

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hv_{n+1/2}, \\v_{n+1} &= v_n + h \left[ -\omega_0^2 x_{n+1/2} - 2\gamma v_{n+1/2} - \beta x_{n+1/2}^3 + f \cos(\omega(n+1/2)h) \right],\end{aligned}\tag{14.33}$$

где величины, отмеченные индексом  $n+1/2$ , получаются посредством вспомогательного «полушага», выполняемого по схеме первого порядка:

$$\begin{aligned}x_{n+1/2} &= x_n + hv_n/2, \\v_{n+1/2} &= v_n + \frac{h}{2} \left[ -\omega_0^2 x_n - 2\gamma v_n - \beta x_n^3 + f \cos(\omega nh) \right].\end{aligned}\tag{14.34}$$

Имея дело с неавтономными системами, можно рекомендовать всегда выбирать шаг так, чтобы период внешнего воздействия содержал целое число шагов, в нашем случае  $h = 2\pi/\omega N$ , где  $N$  — достаточно большое целое число (скажем, порядка сотни или тысячи).

Предположим, мы реализовали схему в виде компьютерной программы, задали какие-то начальные условия  $(x_0, v_0)$  и, запустив ее, получаем шаг за шагом последовательные значения  $(x_n, v_n)$ . Мы можем представить результаты расчетов в виде графиков зависимости координаты и скорости от времени или в виде фазового портрета — картинки, представляющей собой проекцию траектории из трехмерного фазового пространства на плоскость  $(x, v)$ . Мы можем отследить процесс установления режима вынужденных колебаний и, дождавшись его окончания, исследовать форму колебаний в установившемся режиме, провести дальнейшую обработку с целью получить спектр Фурье или какие-то усредненные характеристики.

Сейчас нас будет интересовать сопоставление расчетов с аналитическими результатами метода медленно меняющихся амплитуд. Именно, мы хотим воспроизвести в численном эксперименте резонансные кривые, характерные для нелинейного резонанса и пронаблюдать эффект гистерезиса. Зададим для начала следующие значения параметров:  $\omega_0 = 4$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ , что, по-видимому, в какой-то мере соответствует условиям применимости метода медленно меняющихся амплитуд.

Читатель может спросить, почему бы не взять, скажем,  $\omega_0 = 400$ ,  $\gamma = 0.001$ ,  $\beta = 0.001$ ? Одна из причин состоит в том, что в этой ситуации численное решение по стандартной схеме стало бы слишком трудоемким: шаг должен составлять малую долю характерного временного периода  $2\pi/\omega_0$ , а продолжительность переходного процесса будет определяться характерным временем порядка  $1/\gamma$ , так что при-



дется иметь дело с *очень* большим числом шагов. Другая причина в том, что нам желательно не только подтвердить аналитические результаты, но и пронаблюдать отклонения от них.

Параметры  $f$  и  $\omega$  будем выбирать так, чтобы обеспечить заданные величины для фигурировавших в нашем рассмотрении безразмерных комбинаций  $P = (3\beta f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$  и  $\Delta = \delta/\gamma$ .

Величина, которая требуется для сопоставления с аналитическими результатами, — это амплитуда колебаний в установившемся режиме  $a_0$ . Наиболее прямой метод получить ее состоит в том, чтобы в процессе вычислений отмечать те величины  $x_n$ , которые отвечают локальным максимумам и продолжать вычисления до тех пор, пока разница между двух последовательными найденными значениями максимумов станет меньше заданной погрешности. (Это будет указывать на окончание переходного процесса.)

Зададим вначале некоторое отрицательное значение параметра расстройки  $\Delta$  порядка нескольких единиц, произвольные начальные условия для  $x$  и  $v$ , скажем,  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ , и проведем вычисления по разностной схеме (14.33), (14.34) до достижения стационарного режима колебаний (см. рис. 14.10). Амплитуду, найденную как результат

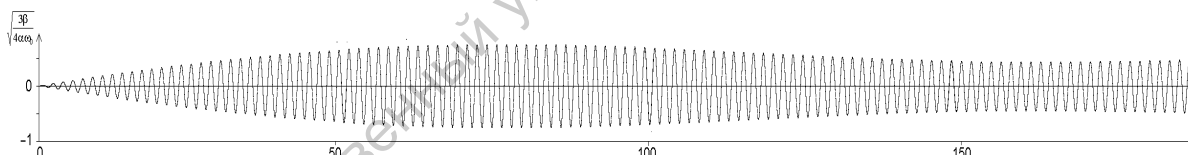


Рис.14.10. Зависимость нормированной координаты  $x\sqrt{3\beta/8\gamma\omega_0}$  от времени, полученная численным интегрированием при  $\omega_0 = 4$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ , и  $\Delta = -3$ ,  $P = 3.6$ , что соответствует  $\omega = 3.97$ ,  $f = 0.15676$ . Число шагов на период воздействия  $N = 4000$

установления колебаний, отметим точкой на графике в координатах  $\Delta = \delta/\gamma$ ,  $X = (3\beta a_0^2)/(8\gamma\omega_0)$ , в которых представлялись полученные аналитически резонансные кривые. Далее, дадим небольшое приращение величине  $\Delta$  и повторим вычисления по разностной схеме с начальными условиями, полученными в результате установления колебаний в предыдущей точке. Это даст следующую точку на графике и т.д. После прохождения всего выбранного интервала значений  $\Delta$  сменим знак приращения, и будем двигаться вдоль оси  $\Delta$  в противоположном направлении.

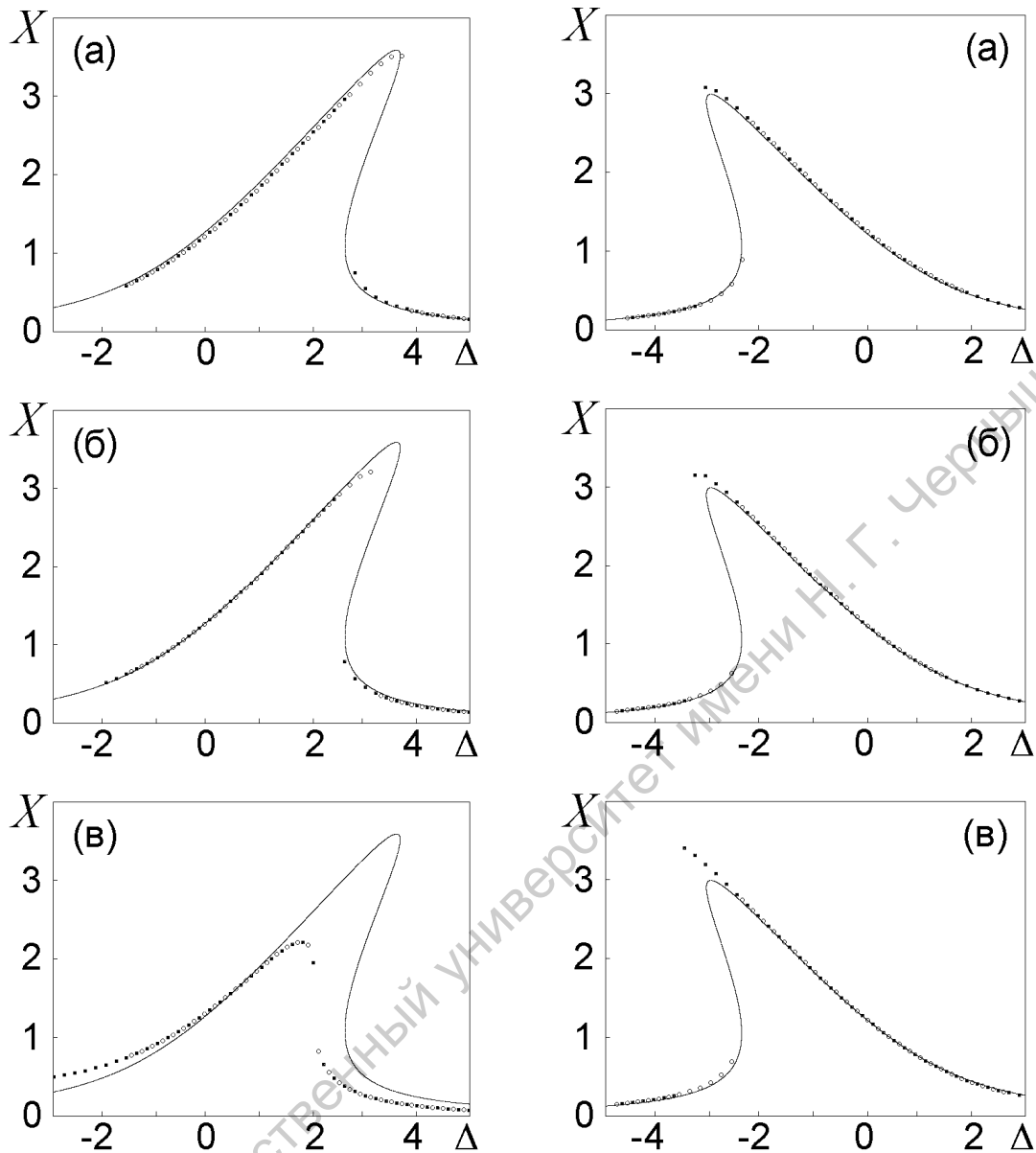


Рис. 14.11. Нелинейный резонанс: сопоставление полученной аналитически методом медленно меняющихся амплитуд резонансной кривой (сплошная линия) и численных результатов при  $\omega_0 = 4$ ,  $\beta = 0.1$ , комбинация  $P = (3|\beta|f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$  фиксирована и равна 3.6. Остальные параметры:  $\gamma = 0.01$ ,  $f = 0.15676$  (а);  $\gamma = 0.08$ ,  $f = 3.5472$  (б);  $\gamma = 0.64$ ,  $f = 80.264$  (в). Кружочками обозначены точки, полученные при движении слева направо, а квадратиками — в обратном направлении

Рис. 14.12. То же, что и на рис. 14.11, но для случая осциллятора с «мягкой» пружиной,  $\beta = -0.1$ . Аналитическое выражение для резонансной кривой отличается от формулы (14.21) только знаком  $\Delta$ , а комбинация, характеризующая амплитуду колебаний, определена как  $X = (3|\beta|a_0^2)/(8\gamma\omega_0)$ . Величина  $P = (3|\beta|f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$  фиксирована и равна 3. Остальные параметры:  $\gamma = 0.02$ ,  $f = 0.4048$  (а);  $\gamma = 0.04$ ,  $f = 1.4048$  (б);  $\gamma = 0.08$ ,  $f = 3.2382$  (в)

На рис. 14.11а приведены результаты, полученные для  $P = 3.6$ , это значение параметра интенсивности воздействия, при котором, согласно методу медленно меняющихся амплитуд, должны реализоваться гистерезис и скачкообразные переходы. Сплошная кривая соответствует формуле (14.21), точки, отмеченные кружочками, отвечают численным результатам, полученным при движении вдоль резонансной кривой слева направо, а квадратики — справа налево.

Можно видеть, что, во-первых, качественно описанная выше картина явлений при нелинейном резонансе замечательным образом подтверждается, наблюдается гистерезис и скачкообразные переходы. Во-вторых, вполне удовлетворительным оказывается и количественное соответствие. На рис. 14.11б,в приводятся аналогичные результаты для  $\gamma = 0.08$  и  $0.64$ . Видно, как возрастают отклонения от полученной аналитически резонансной кривой с ростом параметра потерь, в силу чего условия применимости метода медленно меняющихся амплитуд все более нарушаются.

На рис. 14.12 представлены результаты, относящиеся к случаю отрицательного параметра нелинейности,  $\beta = -0.1$ , когда резонансная кривая оказывается наклоненной в противоположную сторону.

## Сложная динамика и хаос при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора

В предыдущей лекции мы рассматривали вынужденные колебания нелинейного осциллятора в рамках метода медленно меняющихся амплитуд. Перейдем теперь к обсуждению ситуаций, когда это приближение становится неработоспособным, а осциллятор может демонстрировать сложные динамические режимы, такие как хаотические колебания. Это происходит при достаточно больших амплитудах внешней силы, когда колебания становятся сильно нелинейными. Возникновению хаоса весьма способствует также ангармоничность воздействия, когда сила несинусоидальная и содержит много гармоник (например, когда воздействие на осциллятор производится последовательностью коротких импульсов). Как мы увидим, материал предыдущей лекции оказывается существенным для понимания качественных особенностей поведения системы и в таких ситуациях. Ключевую роль играет представление о нелинейном резонансе, на основании которого формулируется простое условие возникновения хаоса — критерий перекрытия резонансов Б.В. Чирикова.

### 15.1. Резонансы на гармониках и субгармониках

Рассмотрим консервативный осциллятор при воздействии внешней силы, зависящей от времени с периодом  $T = 2\pi/\Omega$ . Представим ее в виде ряда Фурье, причем коэффициенты разложения будем считать зависящими от текущего значения обобщенной координаты  $x$ :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(x) e^{im\Omega t}, \quad f_m(x) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} F(x, t) e^{-im\Omega t} dt. \quad (15.1)$$

Это очень общая форма уравнения. Обсуждавшиеся в предыдущей лекции нелинейные осцилляторы, как с силовым, так и с параметрическим внешним воздействием, представляют собой его определенные частные случаи. (Подумайте, в каком виде надо задать функции  $f_m(x)$ , чтобы получить, например, уравнение (14.1) или (14.2)).

В нулевом приближении, пренебрегая совсем правой частью уравнения (15.1), находим решение в виде  $x^{(0)} = A \cos \omega_0 t$ , где  $A$  — константа, определяющая амплитуду

колебаний. Намереваясь получить следующее приближение, мы должны подставить это выражение в правую часть. При этом каждый коэффициент  $f_m(x)$  становится периодической функцией времени и может быть, в свою очередь, представлен в виде ряда Фурье:

$$f_m(A \cos \omega_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{mn} e^{in\omega_0 t}, \quad f_{mn} = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} f_m(A \cos \omega_0 t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (15.2)$$

Поэтому для первого приближения получаем

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{mn} e^{i(m\Omega + n\omega_0)t}. \quad (15.3)$$

Если какой-либо из членов в правой части отвечает колебаниям точно на собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ , то возникает резонанс: в решении  $x^{(1)}$  появится колебательная составляющая, амплитуда которой будет нарастать во времени по линейному закону — секулярный, или вековой член (термин из небесной механики).

Это явление обсуждалось в предыдущих лекциях, но здесь мы отмечаем новый момент. Резонанс и появление секулярных членов будет иметь место не только при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой, но и при выполнении соотношения между частотами вида  $m\Omega + n\omega_0 = \pm\omega_0$ , или, что то же самое,

$$m\Omega + k\omega_0 = 0, \quad (15.4)$$

где  $m$  и  $k = n \mp 1$  — целые числа. В этом случае говорят о *резонансе на гармониках и субгармониках* основной частоты  $\Omega$ . Обычно коэффициенты Фурье  $f_{mn}$  достаточно быстро убывают с ростом индексов, так что существенными оказываются только «*главные резонансы*», характеризуемые относительно небольшими  $m$  и  $n$ .

**Вопрос:** Каким значениям  $m$  и  $n$  отвечает рассмотренный в предыдущей лекции основной резонанс?

Чтобы избежать секулярного роста возмущений, метод последовательных приближений модифицируют, принимая во внимание зависимость частоты собственных колебаний от амплитуды  $\omega_0 = \omega(A)$ , как это было объяснено в предыдущей лекции для основного резонанса. Не прорабатывая детально соответствующие выкладки, представим некоторые оценки, существенные для дальнейшего изложения.

Предположим, что имеет место отстройка по частоте от резонанса  $\Delta\omega$ . Тогда амплитуда резонансного возмущения будет равна по порядку величины, очевидно,  $\Delta A \cong f_{mn} / [\omega(A)\Delta\omega]$ , откуда  $\Delta\omega \cong f_{mn} / [\omega(A)\Delta A]$ . С другой стороны, изменение частоты в силу неизохронности осциллятора при изменении амплитуды на величину  $\Delta A$  составит  $\Delta\omega \cong |d\omega(A)/dA|\Delta A$ . Потребуем, чтобы оба частотных сдвига были одного порядка. Отсюда получаем величину, о которой будем говорить как о ширине нелинейного резонанса по амплитуде

$$\Delta A \cong \sqrt{\frac{f_{mn}}{\omega(A) \cdot d\omega(A)/dA}} \quad (15.5)$$

и, соответственно, *ширину нелинейного резонанса по частоте*

$$\Delta\omega \cong |d\omega(A)/dA|\Delta A \cong \sqrt{|f_{mn}[\omega(A)]^{-1} d\omega(A)/dA|}. \quad (15.6)$$

## 15.2. Резонансы на фазовом портрете в сечении Пуанкаре

Рассмотрим вопрос о наглядном геометрическом представлении динамики нелинейного осциллятора с внешним периодическим воздействием.

Предположим сначала, что амплитуда воздействия исчезающе мала. В отсутствие внешней силы на фазовой плоскости консервативного нелинейного осциллятора свободные колебания различной амплитуды изображаются набором вложенных друг в друга замкнутых кривых (рис. 15.1а). Мы, однако, намерены рассуждать сейчас в терминах введенного в предыдущей лекции отображения Пуанкаре — стробоскопического отображения за период внешней силы, которая будет включена в рассмотрение на следующем этапе. Поэтому картинке следует придавать смысл, отличающийся от привычного случая фазового портрета нелинейного осциллятора. Надо представлять себе, что эволюция происходит дискретными скачками: изображающая точка не движется плавно по фазовой траектории, а перепрыгивает раз за разом на новое место, оставаясь, однако, все время на той же самой замкнутой кривой (рис. 15.1а). Какую долю полной длины этой кривой проходит изображающая точка за один скачок, зависит от соотношения периода собственных колебаний и периода воздействия, определяющего временной интервал между последовательно рассматриваемыми положениями точки. В типичной ситуации нелинейный осциллятор неизохронный, так что период свободных

колебаний на разных орбитах разных. На какой-то орбите он окажется в иррациональном отношении с периодом воздействия. Тогда наносимые на график положения изображающей точки в процессе динамики постепенно заполнят всю кривую. Если же от-

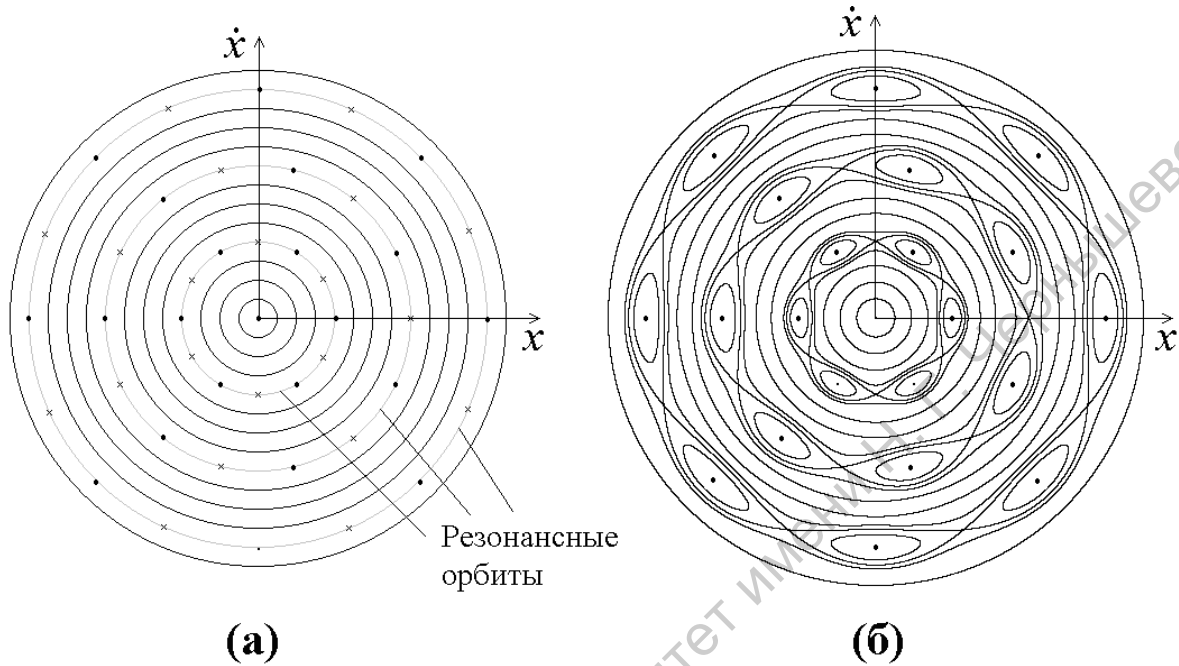


Рис. 15.1. Схема, иллюстрирующая фазовый портрет нелинейного осциллятора в стробоскопическом сечении Пуанкаре при исчезающе малой амплитуде периодического внешнего воздействия (а) и при конечной амплитуде (б)

ношение рациональное, то будет наблюдаться посещение изображающей точкой лишь определенного конечного множества точек на кривой. Такая ситуация будет соответствовать выполнению каждого из резонансных условий вида  $m\Omega + n\omega(A) = 0$ .

Как модифицируется картина, если амплитуда воздействия будет малой, но конечной? Нерезонансные орбиты (далекие от «главных резонансов») слегка деформируются, но качественно не изменятся: нерезонансное возмущение подталкивает осциллятор то туда, то сюда, но в среднем накопления возмущений не происходит.

Существенно трансформируется устройство портрета в областях резонансов. Предположим, что мы рассматриваем колебания осциллятора при некоторых определенных начальных условиях. В зависимости от соотношения фазы колебаний осциллятора и фазы внешней силы она может отдавать энергию осциллятору или забирать ее. В первом случае амплитуда колебаний будет нарастать во времени, во втором — убывать. Когда амплитуда увеличивается или уменьшается, то в силу неизохронности осциллятора это приводит к изменению частоты его собственных колебаний. Соответственно, начинает меняться и соотношение фаз, так что через некоторое время нарастание ам-

плитуды сменится затуханием и наоборот. Это так называемые фазовые колебания при нелинейном резонансе. На фазовом портрете соответствующие орбиты образуют характерные «ожерелья» в области резонансов, см. рис. 15.16.

Вообще говоря, фазовые колебания квазипериодические (их частота и частота воздействия не обязаны находиться в рациональном отношении). Однако в области резонанса имеются две специальные периодические резонансные орбиты, одна устойчивая, а другая неустойчивая. Обе содержат одинаковое конечное число точек, которое определяется порядком резонанса. Эти орбиты отвечают таким соотношениям фаз собственных колебаний и внешней силы, при которых энергия в среднем не передается ос-

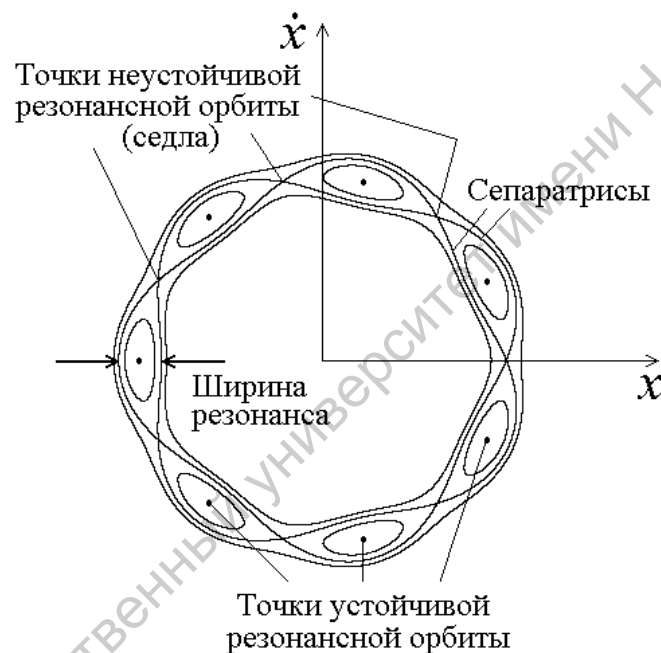


Рис. 15.2. Фазовый портрет изолированного нелинейного резонанса в стробоскопическом сечении Пуанкаре с подписями, поясняющими основные элементы картины

циллятору, и не забирается у него. Точки устойчивой орбиты окружены замкнутыми кривыми, соответствующими фазовым колебаниям. Точки неустойчивой орбиты расположены на пересечении сепаратрис. Максимальное расстояние между сепаратрисами, ограничивающими область одного определенного резонанса, соответствует нашей оценке ширины резонанса (15.6). Заметим, что она пропорциональна корню квадратному из амплитуды воздействующей на осциллятор внешней силы. Все основные элементы описанной картины представлены на рис. 15.2.

Вспомним теперь, что резонансная область на самом деле не одна, так как имеются резонансы, отвечающие разным значениям индексов в соотношении (15.4). При малой амплитуде внешней силы ширина резонансов по частоте мала по сравнению с



расстоянием между ними, и их можно рассматривать независимо. Однако при достаточно большой амплитуде ширина резонансов становится сравнимой с расстоянием между ними, и говорят о перекрытии резонансов. В этом случае характер динамики изменяется. Качественно ее можно представить себе как блуждание между различными резонансами, так что изображающая точка получает возможность посещать достаточно обширную область фазового пространства, и колебания становятся хаотическими. Утверждение, что перекрытие резонансов отвечает возникновению хаоса, составляет содержание критерия Чирикова.

Этот критерий имеет не только качественное содержание, но приводит к формулировке приближенных соотношений между параметрами задачи, выполнение которых необходимо для возникновения хаоса.

Ограничимся для простоты учетом резонансов только на гармониках частоты воздействия:  $m\Omega = \omega(A)$ . Каждой  $m$ -ой гармонике будет соответствовать некоторый интервал по амплитуде, где имеет место резонанс: его центр располагается вблизи значения  $A_m$ , получаемого как корень уравнения  $m\Omega = \omega(A_m)$ . Расстояние по частоте между соседними резонансами равно, очевидно,  $\Omega$ , а ширина резонанса дается формулой (15.6):  $\Delta\omega \cong \sqrt{|f_{m0}\omega'(A)/\omega(A)|}$ . Введем параметр, определяющий отношение двух указанных величин

$$K = \frac{\Delta\omega}{\Omega} = \Omega^{-1} \sqrt{\frac{|f_{m0}\omega'(A_m)|}{\omega(A_m)}}. \quad (15.7)$$

При  $K \ll 1$  резонансы изолированы друг от друга, и динамика регулярная. При  $K \approx 1$  возникает перекрытие резонансов, и колебания могут стать хаотическими. При  $K \gg 1$  будет наблюдаться развитый хаос.

Если рассмотреть задачу о вынужденных колебаниях маятника или другого осциллятора, имеющего наряду с устойчивыми также неустойчивые состояния равновесия (седла), то наиболее благоприятными для возникновения хаоса оказываются области в окрестности сепаратрис. В самом деле, вблизи сепаратрисы период колебаний стремится к бесконечности, т.е. зависимость периода и частоты колебаний от частоты очень сильная, а в формуле (15.7) величина  $|\omega'(A)|$ , как можно видеть, фигурирует в числителе. Поэтому даже при небольшой амплитуде воздействия, когда в остальных

областях фазового пространства движение еще вполне регулярное, вблизи сепаратрисы образуется область хаоса, так называемый стохастический слой.

С ростом амплитуды воздействия ширина этого слоя, разумеется, увеличивается. С физической точки зрения, ситуация вполне очевидна. Колебания вблизи сепаратрисы отвечают тому, что маятник при максимальном отклонении почти достигает верхней точки. Если его в этот момент легонько подтолкнуть туда или сюда, то он пойдет, соответственно, вперед или назад. Роль такого толчка выполняет внешняя сила, а результат зависит от того, на какой момент по отношению к фазе воздействия придется макси-

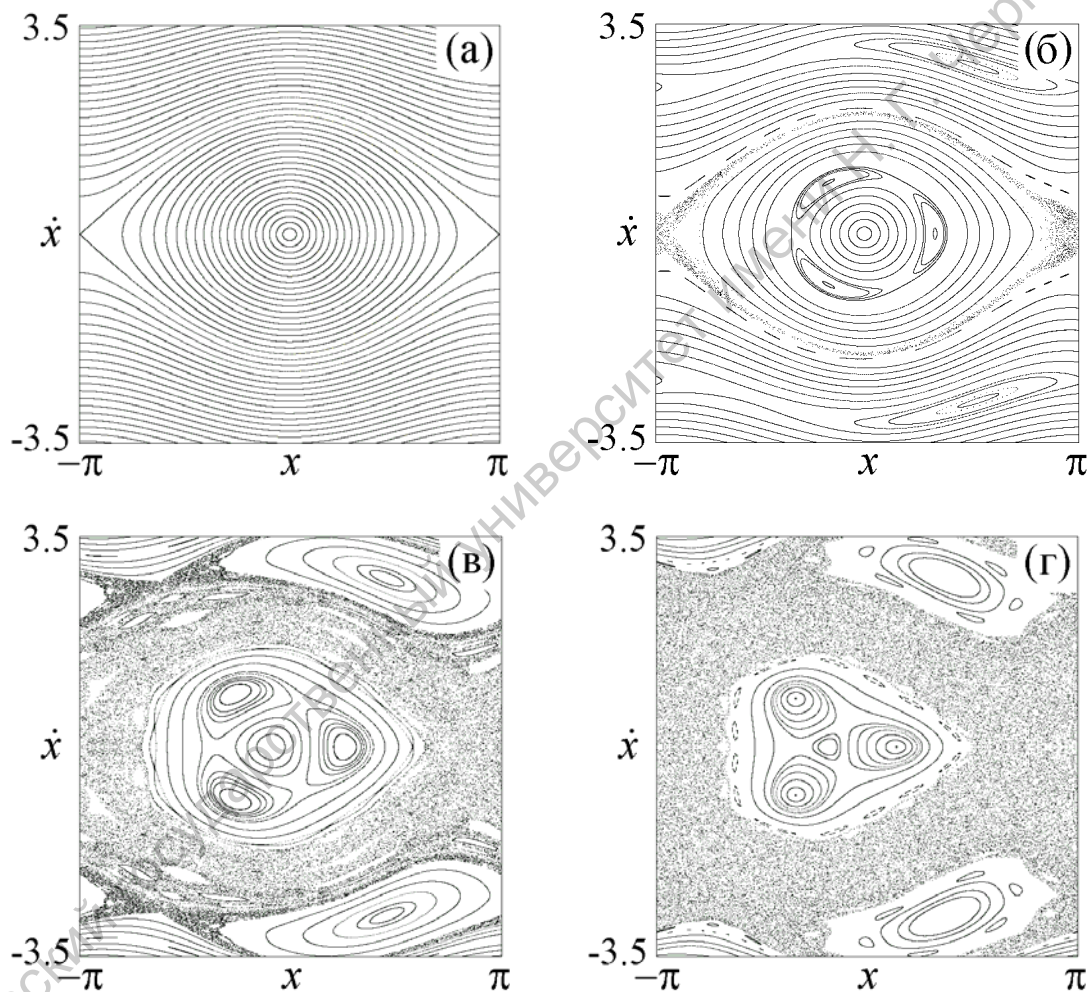


Рис. 15.3. Фазовые портреты в стробоскопическом сечении для вынужденных колебаний маятника, полученные при численном решении уравнения (15.8). По осям координат отложена координата  $x$ , отнесенная к интервалу от  $(-\pi, \pi)$ , и скорость  $\dot{x}$  в моменты времени  $t = 2\pi m/\Omega$  ( $m$  — целое). Параметр частоты фиксирован,  $\Omega = 2.8$ , параметр амплитуды  $b = 0$  (а),  $0.3$  (б),  $2$  (в) и  $4$  (г)

мальное отклонение маятника. Существенное обстоятельство состоит в том, что движение обладает чувствительной зависимостью от начальных условий, а это как раз основной атрибут хаотической динамики. В самом деле, если скорость чуть-чуть больше,

то маятник проскочит верхнее положение равновесия, если скорость чуть-чуть меньше — не дойдет до него и двинется назад.

На рис. 15.3 приводятся результаты численного эксперимента с уравнением маятника

$$\ddot{x} + \sin x = b \cos \Omega t \quad (15.8)$$

при фиксированном значении частоты  $\Omega = 2.8$  и различных амплитудах воздействия. Приведены фазовые портреты в стробоскопическом сечении: в моменты времени  $t = 2\pi m/\Omega$  ( $m$  — целое) по оси абсцисс откладывается угловая координата маятника  $x$ , отнесенная к интервалу от  $(-\pi, \pi)$ , а по оси ординат — скорость  $\dot{x}$ . Первая диаграмма (а) отвечает нулевой амплитуда вынуждающей силы, а диаграммы (б), (в), (г) — значениям  $b = 0.3, 2$  и  $4$ , соответственно.

**Задача 15.1.** Внимательно рассмотрите диаграммы на рис. 15.3 и сравните их друг с другом. Проинтерпретируйте картину в свете качественных рассуждений этого и предыдущего параграфов. Обратите внимание на образование стохастического слоя на месте разрушившейся сепаратрисы и на его расширение с ростом амплитуды воздействия. На диаграммах (б)–(г) укажите области нелинейных резонансов. Какие орбиты отвечают фазовым колебаниям при нелинейном резонансе? Где находятся точки устойчивых периодических резонансных орбит, сепаратрисы, седловые точки?

Структуры, наблюдаемые на рис. 15.3 (б)–(г) очень характерны для консервативных систем со сложной динамикой. В фазовом пространстве можно выделить «острова регулярности» (или «острова устойчивости»), и «хаотическое море». Если начальное условие в момент, отвечающий «вспышке стробоскопа», задано в пределах «острова регулярности», то движение будет квазипериодическим, т.е. оно допускает представление в виде комбинации колебательных составляющих с несоизмеримыми частотами. Такой характер движения сохраняется все время, как долго мы бы ни наблюдали за системой. Если же начальное условие задано в «хаотическом море», то изображающая точка будет вечно блуждать по этому «мору», посещая с течением времени сколь угодно малую окрестность каждой точки «моря», но никогда не попадет в «острова регулярности». На рис. 15.4 представлены примеры, показывающие, как выглядят колебания во времени в острове регулярности, в хаотическом море, и на устойчивой резонансной периодической орбите.

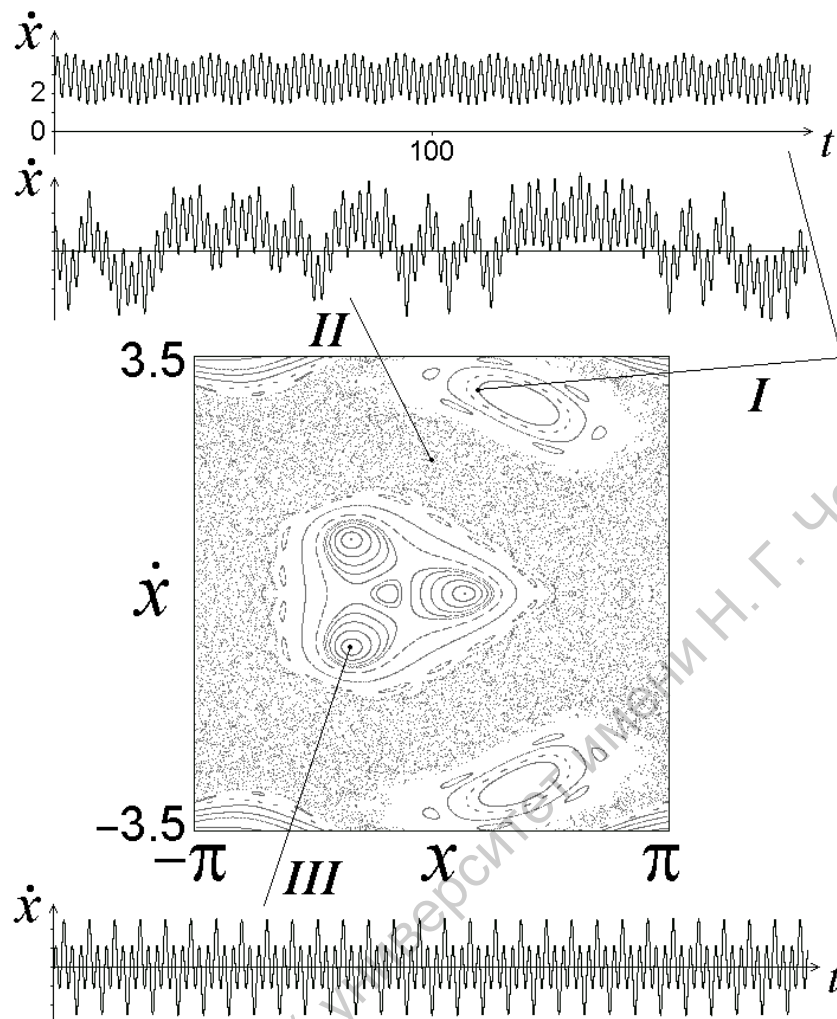


Рис. 15.4. Фазовые портреты в стробоскопическом сечении для вынужденных колебаний маятника (15.8) при  $\Omega = 2.8$  и  $b = 4$  и зависимости скорости  $\dot{x}$  от времени, наблюдаемые (I) — в «острове регулярности» (квазипериодическая динамика), (II) — в «хаотическом море» и (III) — на периодической резонансной орбите

### 15.3. Перекрывание резонансов и хаос в простых системах (модели стохастического ускорения Ферми)

В 1949 г. известный своими выдающимися работами физик Энрико Ферми опубликовал статью «О происхождении космического излучения». В ней он предложил механизм образования частиц высокой энергии, которые, как известно, непрерывно бомбардируют нашу Землю из космоса (так называемые «космические лучи»). Идея *стохастического ускорения Ферми* состоит в том, что, двигаясь хаотически в межзвездном пространстве, заряженные частицы испытывают взаимодействие с «магнитными облаками», образованными межзвездным газом с «вмороженными» в них магнитными полями. Эти «магнитные облака» можно мыслить просто как частицы очень большой

массы, с которыми в процессе неупорядоченного хаотического движения микрочастицы претерпевают упругие столкновения. В целом система «магнитные облака плюс микрочастицы» должна стремиться к термодинамическому равновесию, а в равновесном состоянии, согласно представлениям статистической физики, на каждую степень свободы должна приходиться одна и та же энергия. Поскольку «магнитные облака» характеризуются массой, превышающей на много порядков массу микрочастиц, то в процессе выравнивания соответствующих кинетических энергий скорости микрочастиц должны нарастать до огромных величин. По предположению Ферми, ускоренные за счет такого механизма частицы мы и наблюдаем, как приходящие из космоса на Землю.

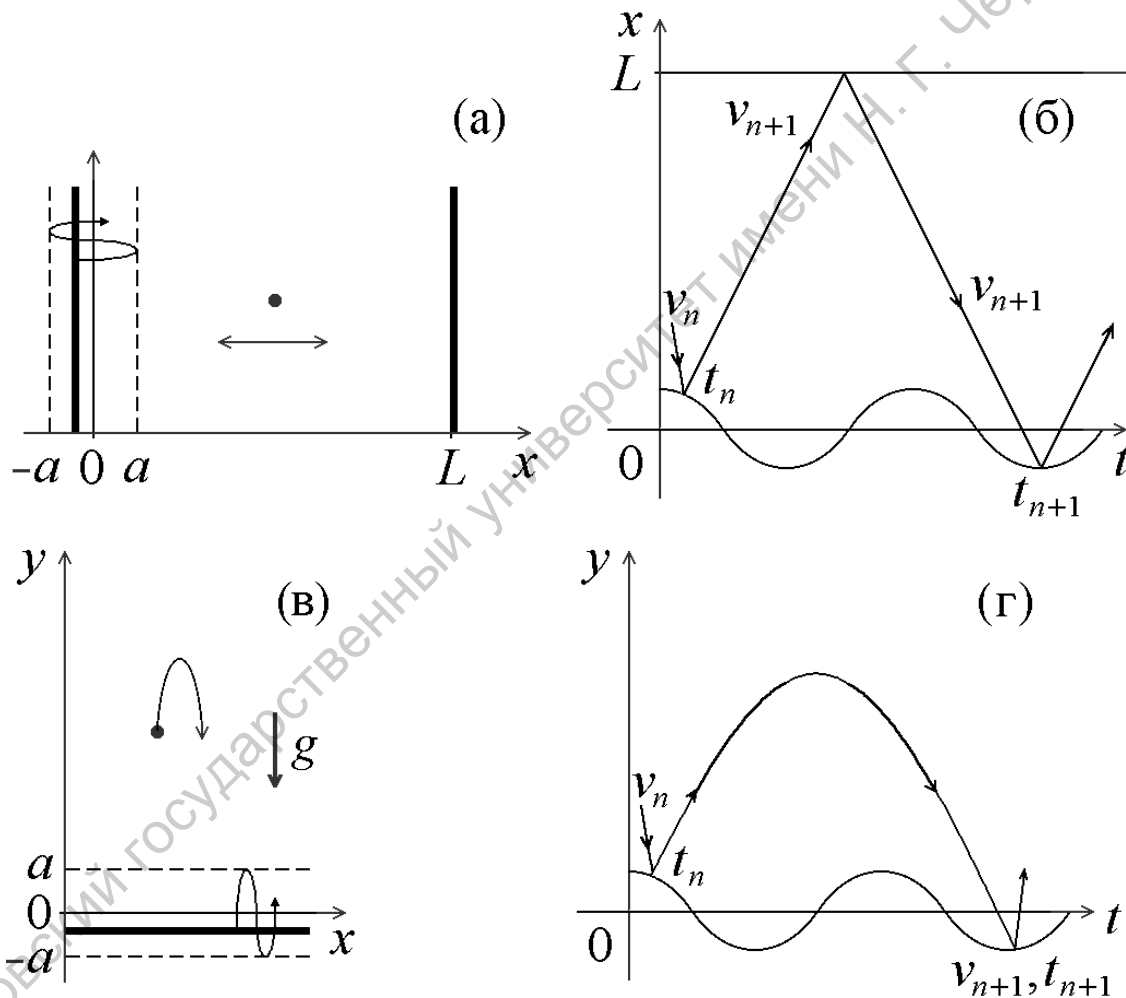


Рис. 15.5. Модели стохастического ускорения Ферми, предложенные Уламом (а,б) и Заславским (в,г): схематическое изображение и пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие движение частицы и принятые в тексте обозначения

Чтобы проиллюстрировать идею Ферми, математик С. Улам предложил в начале 60-х годов простую модель, показанную на рис. 15.5 (а,б). Частица свободно движется влево–вправо вдоль оси  $x$ , испытывая упругие соударения с двумя вертикальными

стенками бесконечно большой массы, расположенными на расстоянии  $L$  друг от друга. Одна из стенок совершает колебания с некоторой частотой  $\Omega$  по закону  $x = a \sin \Omega t$ , так что ее скорость  $V(t) = V_0 \cos \Omega t$ , где  $V_0 = a\Omega$ . Если частица налетает на эту «активную» стенку в момент  $t_n$  со скоростью  $v_n$ , то после упругого удара ее скорость станет равной  $v_n + 2V_0 \cos \Omega t_n$ . При соударении со второй, «пассивной» стенкой скорость частицы изменяет направление на противоположное, а по модулю остается неизменной.

Хотя постановка задачи выглядит элементарной, описать движение частицы в модели Улама математически в форме пригодной для составления компьютерной программы не так уж просто. (В самом деле, при учете конечной амплитуды колебаний стенки определение момента столкновения частицы с ней требует решения трансцендентного уравнения.) С другой стороны, собственно механизм стохастического ускорения, который мы хотим проиллюстрировать, должен быть нечувствительным к деталям модели. Поэтому обратимся к упрощенной версии модели Улама. Предположим, что справедливо неравенство  $a/L \ll 1$ , и будем считать, что столкновение с «активной» стенкой происходит в момент пересечения частицей плоскости  $x = 0$ .

Если частица имела перед ударом скорость  $v_n$ , а столкновение с «активной стенкой» произошло в момент  $t_n$ , то после удара она улетает от стенки со скоростью  $v_{n+1} = v_n + 2V_0 \cos \Omega t_n$ , время пролета до другой стенки и обратно составит  $2L/v_{n+1}$ , и время следующего соударения дается выражением  $t_{n+1} = t_n + 2L/v_{n+1}$ . Полученные соотношения определяют *двумерное рекуррентное отображение*. Удобно ввести безразмерные переменные  $u_n = v_n/2V_0$ ,  $\tau_n = \Omega t_n/2\pi$  и параметр  $\kappa = \Omega L/2\pi V_0$ . Тогда уравнения принимают вид

$$u_{n+1} = u_n + \cos 2\pi\tau_n, \quad \tau_{n+1} = \tau_n + \kappa/u_{n+1}. \quad (15.9)$$

Надо заметить, что система уравнений (15.9) в области малых скоростей  $u$  оказывается некорректной. Более того, переменная  $u$  и, соответственно, приращение величины  $\tau$ , могут стать отрицательными в процессе динамики, а это в терминах исходной модели Улама заведомо лишено физического смысла. Тем не менее, в области больших скоростей динамика передается в достаточной степени адекватно, так что для выяснения принципиальной возможности и условий реализации стохастического ускорения отображение (15.9) все же можно использовать.

Используя уравнения (15.9), составим компьютерную программу, позволяющую шаг за шагом отслеживать эволюцию в дискретном времени пары величин  $(u_n, \tau_n)$  и

попытаемся пронаблюдать в численном эксперименте эффект стохастического ускорения. Поскольку масса частицы считается пренебрежимо малой по сравнению с массой стенки, можно было бы ожидать, что в силу тенденции к установлению термодинамического равновесия кинетическая энергия частицы будет в среднем неограниченно возрастать:  $\langle u_n^2 \rangle \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Однако расчеты показывают, что это ожидание оказывается неоправданным: ускорение происходит только лишь до определенного предела, и среднестатистическая энергия частицы в итоге оказывается конечной (рис. 15.6а). Тот же самый эффект обна-

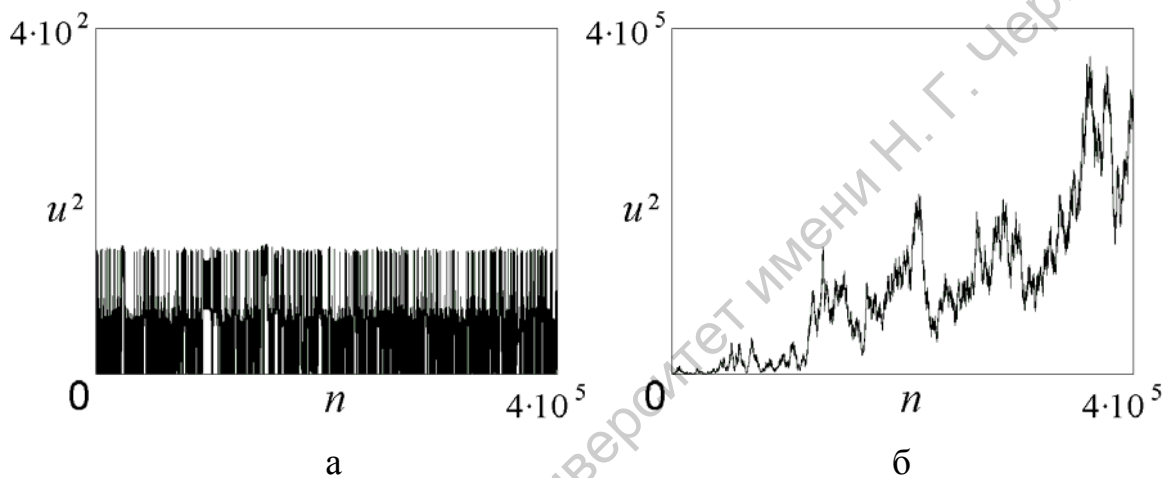


Рис. 15.6. Зависимости квадрата скорости частицы от числа итераций для моделей Улама (а) и Заславского (б), полученные в численном эксперименте с уравнениями (15.9) и (15.10), соответственно. Параметр  $\kappa = 20$ . Эффект стохастического ускорения хорошо виден во втором случае

руживается в исходной модели Улама: наблюдаемая скорость частицы оставалась в большинстве случаев по порядку величины такой же, как скорость колебаний стенки. В чем же здесь дело? Ответ был дан в статье Г.М. Заславского и Б.В. Чирикова, опубликованной в 1964 г.

Посмотрим на рис. 15.7, где представлены результаты последовательных итераций отображения (15.9) с различными начальными условиями для  $n = 0 \div 10000$  на плоскости переменных  $\tau_n, u_n$ . Видно, что в области малых скоростей  $u$  имеется область, по которой изображающая точка блуждает хаотически. В области больших скоростей  $u$  поведение скорее регулярное: при заданных начальных условиях изображающая точка при последовательных итерациях попадает на одну и ту же определенную кривую. Здесь можно видеть характерные для нелинейных резонансов структуры в виде «ожерелий», подобные тем, что обсуждались в предыдущем параграфе. Из рисун-

ка ясно, что при достаточно больших значениях нормированной скорости *перекрывания резонансов нет*. Согласно критерию Чирикова это значит, что нет и хаоса. Увеличение параметра  $\kappa$  приводит только к сдвигу «берега» хаотического моря вверх.

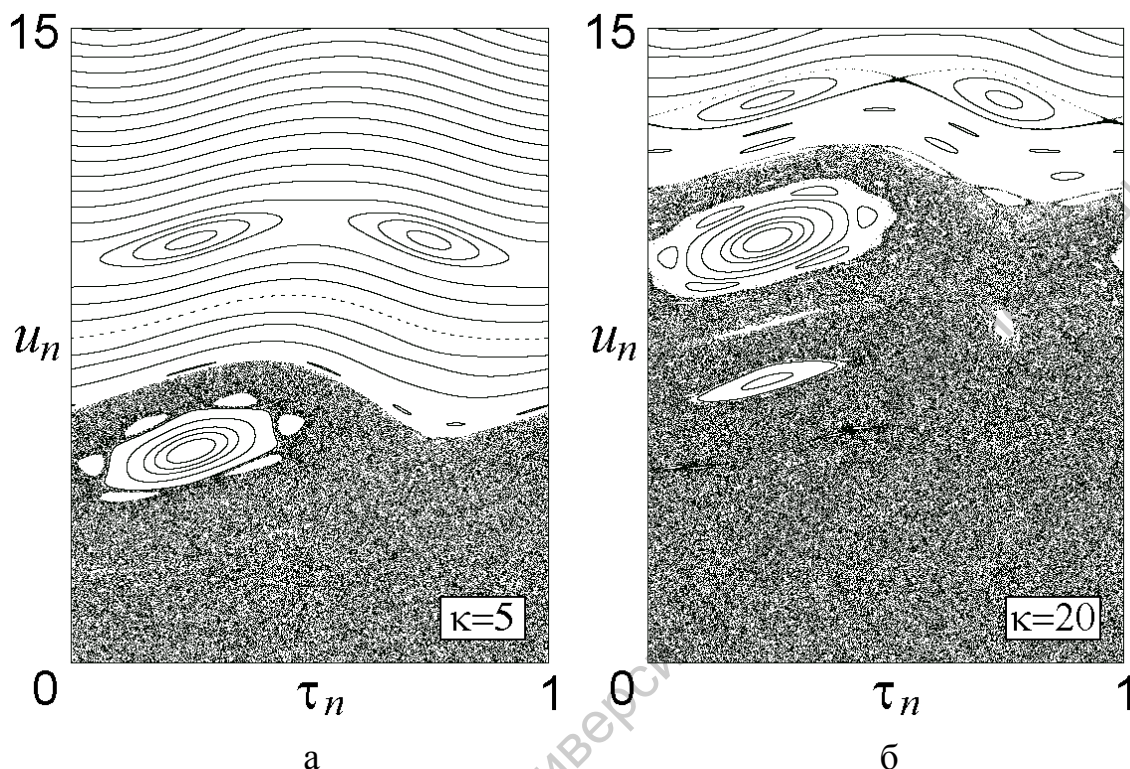


Рис. 15.7. Фазовый портрет упрощенной модели Улама (15.9) при  $\kappa = 5$  и 20. По оси ординат отложена дробная часть  $\{\tau_n\}$ , а по оси абсцисс — нормированная скорость  $u_n$ . Обратите внимание на структуры, аналогичные по природе тем, которые наблюдались для нелинейного осциллятора (резонансные области, острова регулярности, хаотическое море). Область больших скоростей отвечает регулярной динамике, когда критерий хаоса, предполагающий перекрывание нелинейных резонансов, не выполняется

Таким образом, причина парадокса проясняется. Заключение о стремлении системы к термодинамическому равновесию подразумевает, что составляющие ее частицы движутся хаотически, это должно относиться и к нашей модели. При малых скоростях все в порядке: время между ударами велико по сравнению с периодом колебаний стенки, частица при каждом ударе попадает в случайную фазу, и приобретает, соответственно, случайную добавку к скорости. Однако условие хаоса нарушено, если энергия частицы велика. В самом деле, с ростом скорости мы с неизбежностью приходим к ситуации, когда частица будет преодолевать расстояние между стенками за время, сравнимое с периодом колебаний «активной» стенки. Поэтому добавки к скорости, приобретаемые на каждом шаге, будут согласованы (коррелированы) друг с другом, динамика станет регулярной, и «стохастическое ускорение» не будет иметь места.



Можно ли модифицировать модель так, чтобы получить все-таки желаемый эффект неограниченного стохастического ускорения Ферми? Такая модель, известная как *гравитационная машина Заславского*, показана на рис. 15.5 (в,г). Представим себе упругую частицу, подпрыгивающую в поле тяжести на массивно горизонтальной плите, которая совершает колебания вверх – вниз со скоростью  $V(t) = V_0 \cos \Omega t$ .

Как и в предыдущем случае, рассмотрим для простоты модифицированную версию модели. Будем считать, что пространственное расположение плиты фиксировано, но при соударении с ней в момент  $t_n$  частица отскакивает с изменившейся по величине скоростью  $v_{n+1} = v_n + 2V_0 \cos \Omega t_n$ .

Как известно из школьного курса физики, тело, брошенное вверх со скоростью  $v$ , упадет обратно через время  $2v/g$ , где  $g$  — ускорение свободного падения, и будет иметь в момент падения такую же по абсолютной величине скорость. Таким образом, время следующего удара частицы о плиту будет  $t_{n+1} = t_n + 2v_{n+1}/g$ .

Введем безразмерные переменные  $u_n = v_n/2V_0$ ,  $\tau_n = \Omega t_n/2\pi$  и параметр  $\kappa = 2V_0 \Omega/\pi g$ . Тогда уравнения принимают вид

$$u_{n+1} = u_n + \cos(2\pi\tau_n), \quad \tau_{n+1} = \tau_n + \kappa u_{n+1}. \quad (15.10)$$

В отличие от модели Улама, теперь с ростом энергии частицы время между последовательными соударениями не уменьшается, а увеличивается. В результате условие хаоса не нарушается при возрастании энергии, и «стохастическое ускорение» приводит к неограниченному росту средней энергии частицы (рис. 15.6б).

#### 15.4. Стандартное отображение

Рассмотрим следующую простую физическую систему (рис. 15.8). Пусть по проволоке длины  $L$ , замкнутой в кольцо, может без трения двигаться частица массы  $m$ , и пусть на нее действуют с периодом  $T$  импульсные толчки, интенсивность которых зависит от положения частицы в момент толчка. Будем считать, что передаваемый импульс в проекции на направление движения дается функцией  $P(x) = P_0 \sin(2\pi x/L)$ , где  $x$  — расстояние, отсчитываемое вдоль проволоки.

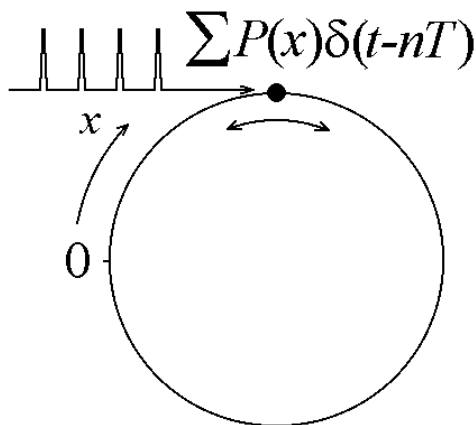


Рис. 15.8. Механическая система, динамика которой описывается стандартным отображением Чирикова–Заславского

Если перед  $n$ -ым толчком координата частицы была  $x_n$ , а скорость  $v_n$ , то сразу после толчка скорость составит  $v_n + (P_0/m)\sin(2\pi x_n/L)$ , и будет оставаться неизменной до следующего толчка. К моменту очередного толчка будем иметь

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{P_0}{m} \sin(2\pi x_n/L), \\ x_{n+1} &= x_n + v_{n+1}T. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Введем вместо  $x_n$  и  $v_n$  безразмерные переменные  $\theta_n = 2\pi x_n/L$  и  $u_n = 2\pi T v_n/L$ , а также параметр  $K = 2\pi T P_0/mL$ . Тогда из

(15.11) получаем

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + K \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \{\theta_n + u_{n+1}\}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

(Величина  $\theta$  характеризует положение частицы на окружности, и принятая нормировка такова, что существенна только ее дробная часть, что учтено при записи второго уравнения.)

На рис. 15.9 приводятся полученные на компьютере фазовые портреты отображения (15.12). При малых значениях параметра  $K$  динамика регулярная, наблюдаются изолированные нелинейные резонансы. С ростом  $K$  сначала образуется узкий стохастический слой вблизи сепаратрис. Далее его ширина возрастает, и он дает начало «хаотическому морю». На последней представленной диаграмме это море занимает уже основную часть фазового пространства, хотя еще сохраняются острова регулярности, ассоциирующиеся с некоторыми из резонансов.

Отображение (15.12) называется *стандартным отображением Чирикова – Заславского*. Его применимость отнюдь не ограничивается рассмотренной нами конкретной механической системой. Чириков и Заславский показали, что это отображение возникает в самых разнообразных консервативных системах при описании динамики в окрестности нелинейного резонанса с использованием естественных и разумных приближений.

**Задача 15.2.** Заменой переменных приведите отображение, описывающее гравитационную машину Заславского (15.10) к стандартному отображению (15.12).

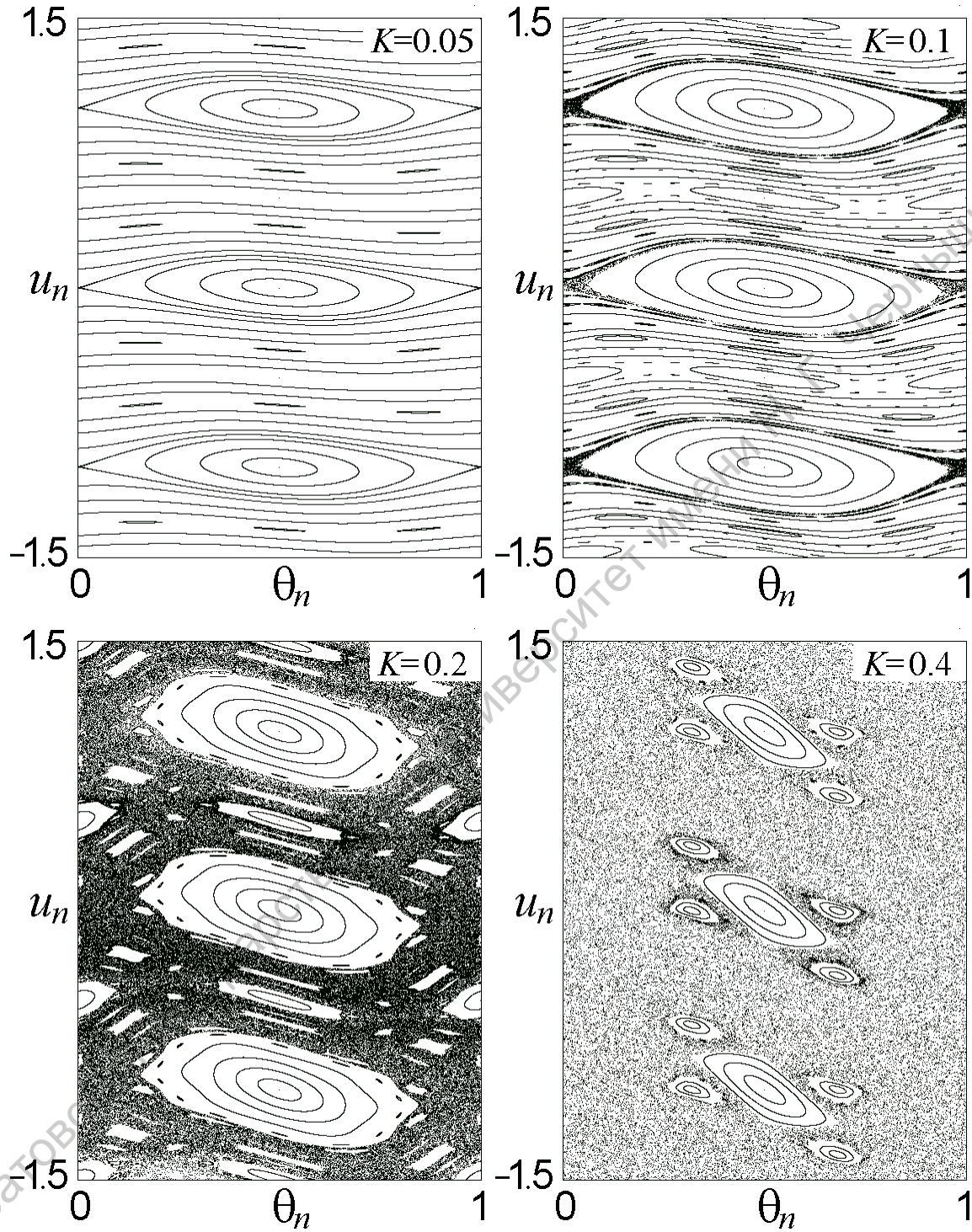


Рис. 15.9. Фазовые портреты стандартного отображения (15.12) при различных значениях параметра  $K$ .

### 15.5. Хаос при вынужденных колебаниях диссипативного нелинейного осциллятора

Картина явлений, наблюдаемых при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора, существенно изменяется при наличии диссипации. Для иллюстрации рассмотрим две системы — маятник, вынужденные колебания которого описываются уравнением

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \sin x = b \cos \Omega t, \quad (15.13)$$

и осциллятор, в котором возвращающая сила зависит от смещения по кубическому закону (осциллятор Дуффинга)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x^3 = b \cos \Omega t. \quad (15.14)$$

Обсудим сначала, чего можно ожидать из самых общих соображений при включении очень малой диссипации. В лекции 5 было объяснено, как изменяется при учете диссипации вид фазового портрета свободных колебаний нелинейного осциллятора. В частности, особые точки типа центр превращаются в устойчивые фокусы: вместо незатухающих свободных колебаний, имевших место в консервативной системе, теперь получаем затухающие колебания. То же самое происходит с фазовыми колебаниями в окрестности нелинейного резонанса. При этом роль, которую играли особые точки типа центр, выполняют точки устойчивых периодических резонансных орбит. Поскольку в присутствии диссипации фазовые колебания затухают, эволюция состояния во времени завершается выходом на периодическую резонансную орбиту, которая служит аттрактором рассматриваемой динамической системы.

Как мы видели, при вынужденных колебаниях осциллятора нелинейных резонансов, вообще говоря, много. Соответствующие периодические резонансные орбиты сохраняются, пока диссипация достаточно мала, поэтому в фазовом пространстве будет сосуществовать множество аттракторов, в которые они превратились. Иными словами, имеет место мультистабильность. Чтобы попасть на какой-либо конкретный аттрактор, надо задать начальные условия в определенной области — в бассейне притяжения этого аттрактора. Заметим, что и в консервативном случае выбор начальных условий определял попадание в область того или иного резонанса.

Рассмотренный феномен имеет большое значение для небесной механики. Хотя диссипация, вносимая, в основном, приливными эффектами, очень мала, на астрономически больших временах она приводит ко вполне определенным, наблюдаемым в нашу эпоху эффектам. Например, вращение Луны вокруг своей оси и ее обращение вокруг Земли находятся в резонансе 1:1. Периоды вращения Меркурия

вокруг своей оси и вокруг Солнца относятся как 2:3, периоды орбитального вращения Юпитера и Сатурна — как 2:5. Известны и другие примеры резонансных соотношений различных периодов обращения планет и спутников, которые читатель может разыскать самостоятельно в литературе о Солнечной системе.

В области больших амплитуд воздействия резонансные области становятся малыми, а основную часть фазового пространства консервативной системы занимает хаотическое море. Можно ожидать, что включение диссипации в этом случае не изменит хаотической природы колебаний, хотя приведет к ограничению множества фазовых траекторий, доступных для посещения в установившемся режиме. Возникнет *странный хаотический аттрактор*.

Перейдем к конкретным примерам и компьютерным иллюстрациям.

Задавшись определенным набором параметров осциллятора и начальными условиями, производим численное решение дифференциального уравнения (15.13) или (15.14) конечно-разностным методом в течение достаточно большого времени, чтобы обеспечить выход на аттрактор. После этого начинаем откладывать получаемые в процессе решения значения переменной  $x$  и ее производной на графике. В результате получается изображение проекции аттрактора из трехмерного фазового пространства нашей неавтономной системы на плоскость  $(x, \dot{x})$ .

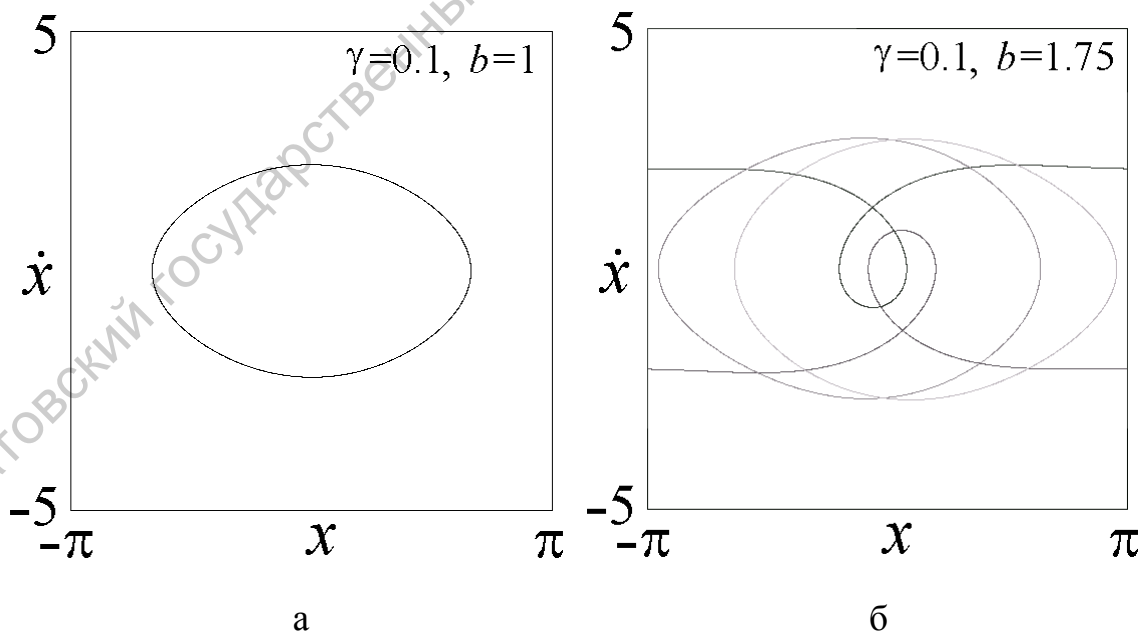


Рис. 15.10. Аттракторы, отвечающие периодическим вынужденным колебаниям маятника с диссипацией (15.14) при  $\Omega = 1$ : (а) симметричный аттрактор, (б) четыре сосуществующих не-симметричных аттрактора (показаны разными тонами серого)

На рис. 15.10 показаны построенные с помощью компьютера аттракторы, отвечающие периодическим вынужденным колебаниям маятника при достаточно большом параметре диссипации  $\gamma = 0.1$ . В области малых амплитуд воздействия наблюдается единственный аттрактор в виде замкнутой орбиты, обладающий очевидной симметрией (рис. 15.10а). Симметрия связана с тем, что уравнение (15.13) переходит в себя при замене ( $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow t + \pi/\Omega$ ). При больших амплитудах удается обнаружить несколько сосуществующих аттракторов (рис. 15.10б). Два аттрактора изображаются замкнутой кривой и отвечают, очевидно, колебательному движению маятника, а два других – ротационному. Каждый из аттракторов в отдельности симметрией не обладает, но зато имеет симметричного партнера.

С ростом амплитуды воздействия динамика усложняется, реализуется переход к хаосу, и возникает странный аттрактор (рис. 15.11). На рисунке (а) показан фазовый портрет, полученный в установившемся режиме динамики в технике стробоскопиче-

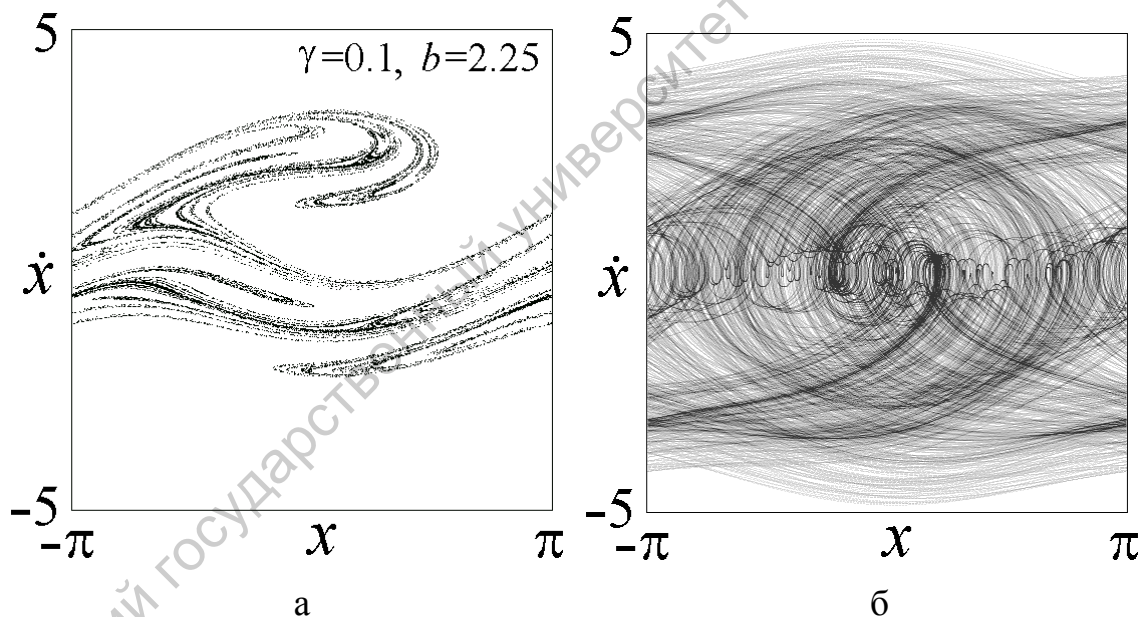


Рис. 15.11. Аттрактор, отвечающий хаотическим вынужденным колебаниям маятника при  $\Omega = 1$ : (а) портрет в стробоскопическом сечении Пуанкаре, (б) проекция из трехмерного фазового пространства  $(x, \dot{x}, t)$  на плоскость  $(x, \dot{x})$

ского сечения Пуанкаре (так же, как это делалось в предыдущих параграфах для консервативного случая). Хорошо видна характерная для странных аттракторов сложная поперечная фрактальная структура. На рисунке (б) показана проекция того же аттрактора на плоскость  $(x, \dot{x})$ . Как можно усмотреть из формы индивидуальных траекторий,

различимых на рис. 15.11б, движение маятника носит то колебательный то ротационный характер, так же как динамика консервативной системы в области хаотического моря.

На рис. 15.12 представлены портреты аттракторов, соответствующих вынужденным колебаниям диссипативного осциллятора Дуффинга. Они иллюстрируют наблюдаемое в этой системе последовательное усложнение динамики при увеличении

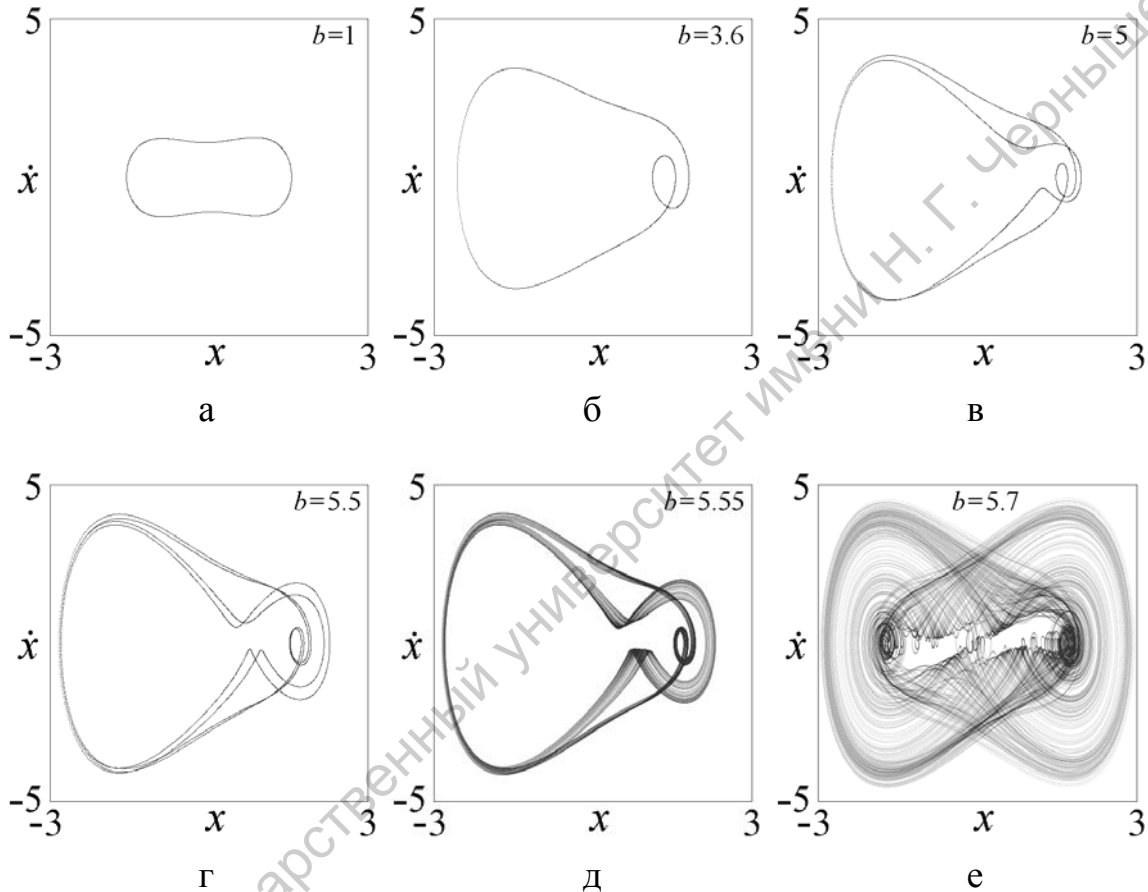


Рис. 15.12. Регулярные аттракторы, отвечающие вынужденным колебаниям осциллятора Дуффинга (15.14) (а)–(г) и странные хаотические аттракторы (д)–(е). Параметр диссипации и частота воздействия, соответственно,  $\gamma = 0.1$  и  $\Omega = 1$

амплитуды воздействия. При малой амплитуде реализуется аттрактор в виде симметричной замкнутой кривой (рис. 15.12а). Как и для маятника, симметрия связана с тем, что уравнение (15.14) переходит в себя при замене  $(x \rightarrow -x, t \rightarrow t + \pi/\Omega)$ . При увеличении амплитуды наблюдается бифуркация потери симметрии, в результате чего возникает аттрактор, показанный на рис. 15.12б. Одновременно рождается и его симметричный партнер — аттрактор того же типа, который связан с исходным аттрактором указанной выше заменой переменных. Период колебаний пока что остается равным пе-

риоду воздействия  $T = 2\pi/\Omega$ . Далее, несимметричный аттрактор претерпевает последовательность *бифуркаций удвоения*: период вынужденных колебаний становится сначала в два раза больше периода воздействия, потом в четыре, восемь раз, и так далее. На рис. 15.12в,г показаны портреты аттракторов, отвечающих периоду  $2T$  и  $4T$ . Последовательность бифуркаций удвоения периода завершается переходом к хаосу. На рис. 15.12д можно видеть уже странный аттрактор. Он несимметричен, так что с ним сосуществует другой аттрактор такой же природы, являющийся его симметричным партнером. При дальнейшем увеличении амплитуды воздействия наступает ситуация, когда траектория начинает посещать области обоих аттракторов, иными словами происходит их объединение в единый, симметричный странный аттрактор (рис. 15.12е).



## Лекция 16

### Параметрические колебания нелинейных систем

#### 16.1. Параметрический резонанс и параметрическая неустойчивость в линейной системе

Специфическим видом внешнего воздействия на колебательную систему является периодическое изменение параметров системы во времени. Такое воздействие называется *параметрическим*. Начнем с краткого напоминания об основных особенностях параметрических колебаний в линейных системах<sup>1</sup>.

Рассмотрим простую модельную систему: колебательный контур с переменной емкостью (рис. 16.1). Изменение емкости со временем можно обеспечить, например, механически изменяя расстояние между пластинами конденсатора. В таком случае мгновенные значения заряда  $q$  и напряжения  $u$  на емкости будут связаны соотношением  $q(t) = C(t)u(t)$ . Это позволяет записать дифференциальное уравнение, описывающее колебания в контуре

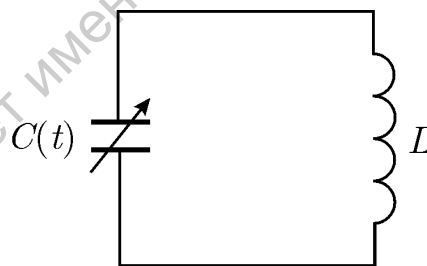


Рис. 16.1. Колебательный контур с переменной емкостью

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC(t)}q = 0. \quad (16.1)$$

Уравнение (16.1) имеет вид уравнения гармонического осциллятора, собственная частота которого зависит от времени.

Пусть емкость конденсатора изменяется следующим образом. В моменты времени, когда заряд на конденсаторе максимален, пластины резко раздвигаются. При этом емкость уменьшается от некоторого значения  $C_2$  до значения  $C_1 < C_2$ . Поскольку заряд на конденсаторе при этом не изменяется, напряжение скачком возрастет от значения  $V_2$  до значения  $V_1 = C_2V_2/C_1$ . В моменты времени, когда заряд равен нулю, пла-

<sup>1</sup>Параметрические колебания в линейных системах и явление параметрического резонанса достаточно подробно обсуждаются в книге «Линейные колебания», входящей в состав настоящей серии.

стины так же резко сдвигаются; емкость при этом увеличивается, а напряжение остается равным нулю (рис. 16.2). В таком процессе постоянно совершается работа, которая

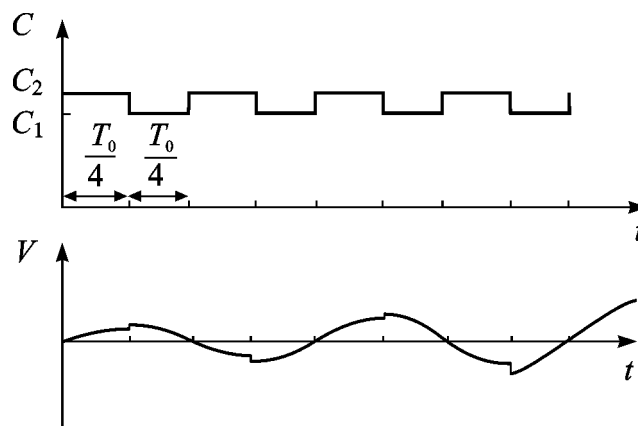


Рис. 16.2. Зависимость от времени емкости и напряжения в колебательном контуре с механически перестраиваемым конденсатором

идет на увеличение энергии колебаний. За один период приращение энергии составит (необходимо учесть, что в течение периода пластины раздвигаются дважды)

$$\Delta W = 2(W_1 - W_2) = C_1 V_1^2 - C_2 V_2^2 = C_2 V_2^2 \left( \frac{C_2}{C_1} - 1 \right). \quad (16.2)$$

Если ввести обозначения  $\Delta C = C_2 - C_1$ ,  $C = (C_1 + C_2)/2$  и считать, что  $\Delta C \ll C$ , соотношение (16.2) можно переписать в виде

$$\Delta W \approx 2W \frac{\Delta C}{C}. \quad (16.3)$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что для эффективного поступления энергии в систему период колебаний  $T_0$  и период изменения параметра  $T$  должны быть связаны соотношением

$$T \approx \frac{T_0}{2}, \quad (16.4)$$

которое представляет собой условие *параметрического резонанса*. Отметим отличие от резонансного условия при вынужденных колебаниях линейного осциллятора,  $T \approx T_0$ .

Можно, однако, раздвигать пластины не каждый раз, когда заряд на конденсаторе максимален, а через раз; энергия все равно будет поступать в систему, хотя и в меньшем количестве. Более того, очевидно, что это можно делать в общем случае толь-

ко в каждый  $n$ -й благоприятный момент. Таким образом, имеется, вообще говоря, бесконечное число параметрических резонансов, условия которых имеют вид

$$T \approx \frac{nT_0}{2}. \quad (16.4a)$$

Число  $n = 1, 2, \dots$  будем называть *порядком резонанса*, а резонанс при  $n = 1$  — основным.

При выполнении условий резонанса колебания в линейной системе, как можно видеть на рис. 16.2, неограниченно нарастают. Это явление называется *параметрической неустойчивостью*.

Основной моделью в теории параметрических колебаний в линейных системах служит *уравнение Матьё*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + f \cos \omega t) x = 0, \quad (16.5)$$

которое представляет собой уравнение линейного осциллятора с гармоническим параметрическим возбуждением. Это уравнение детально исследовано математиками; более того, его решения составляют особый класс специальных функций — функции Матьё. Для наших дальнейших целей важно отметить следующие его свойства. На плоскости параметров амплитуда — частота воздействия существуют *зоны неустойчивости*, которые имеют вид характерных клювов, расположенных в окрестности резонансных частот

$$\omega \approx \frac{2\omega_0}{n}. \quad (16.6)$$

Перейдем к новой независимой переменной  $\tau = \omega t/2$ . Тогда уравнение (16.5) можно переписать в виде

$$x'' + (a + 2q \cos 2\tau) x = 0, \quad (16.7)$$

где  $a = 4\omega_0^2/\omega^2$ ,  $q = 2\omega_0^2 f/\omega^2$ , штрихи обозначают дифференцирование по  $\tau$ . Зоны неустойчивости на плоскости параметров  $(a, q)$  изображены на рис. 16.3. В новых переменных резонансное условие (16.6) принимает вид  $a \approx n^2$ .

Отметим следующие отличия от резонанса при вынужденных колебаниях. Во-первых, малая расстройка (в пределах зоны неустойчивости) не может стабилизировать

неустойчивость, тогда как при вынужденных колебаниях амплитуда нарастает до бесконечности только в случае точного резонанса  $\omega = \omega_0$ . Кроме того нарастание амплитуды

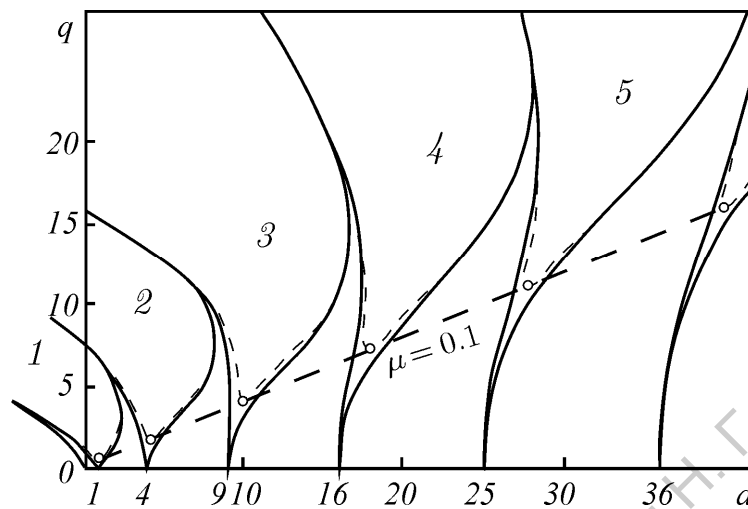


Рис. 16.3. Границы зон неустойчивости на плоскости параметров  $(a, q)$  для уравнения Матъё. Цифры 1-5 соответствуют номерам резонансов

туды параметрических колебаний происходит по экспоненциальному закону, а не по линейному.

Добавление *линейного затухания* также не стабилизирует неустойчивость, а лишь сужает границы зон (на рис. 16.3 они показаны штриховой линией). Действительно, если рассмотреть уравнение параметрического осциллятора с затуханием

$$y'' + 2\gamma y' + (b + 2q \cos 2\tau)x = 0, \quad (16.8)$$

нетрудно показать, что заменой  $y = x \exp(-\gamma\tau)$  оно может быть приведено к виду (16.7), где  $a = b - \gamma^2$ . Чтобы решение уравнения (16.8) было неустойчивым, необходимо, чтобы соответствующее решение уравнения (16.7) нарастало как  $\exp(p\tau)$ , где  $p > \gamma$ . Поэтому границы зон неустойчивости сдвигаются вверх. Поскольку амплитуда воздействия должна превышать некоторое пороговое значение (которое увеличивается с ростом номера резонанса), говорят, что неустойчивость носит *пороговый характер*.

Отсюда следует, что нелинейность играет принципиальную роль в теории параметрических колебаний. Только учет нелинейных эффектов позволяет ответить на вопрос, чем заканчивается развитие неустойчивости на больших временах, и определить характеристики установившегося режима колебаний. Аналогичная ситуация имеет место и для автоколебаний (лекция 11).

## 16.2. Нелинейный осциллятор с параметрическим возбуждением

В качестве простейшего нелинейного обобщения уравнения Матьё рассмотрим параметрически возбуждаемый осциллятор Дуффинга, добавив в уравнение (16.5) кубическую нелинейность. Будем анализировать ситуацию, когда колебания являются квазигармоническими. В этом случае система должна быть близка к гармоническому осциллятору, поэтому запишем уравнение в следующем виде

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon f \cos \omega t)x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (16.9)$$

Здесь  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр, а  $\gamma$  и  $f$  — величины порядка единицы. Будем рассматривать случай основного параметрического резонанса, когда в формуле (16.6) следует положить  $n = 1$ . Таким образом

$$\omega = 2\omega_0 + \varepsilon\delta, \quad (16.10)$$

где  $\delta$  — параметр расстройки.

Получим укороченное уравнение для медленно меняющейся амплитуды колебаний. Используем метод многих масштабов (см. лекцию 9). Представим  $x$  в виде ряда

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots, \quad (16.11)$$

и введем новые временные масштабы  $T_n = \varepsilon^n t$ . С учетом уравнения (16.10) можно записать, что

$$\omega t = 2\omega_0 T_0 + \delta T_1, \quad (16.12)$$

Подставим эти соотношения в уравнение (16.9) и выделим члены одинаковых порядков малости. Как и прежде, будем использовать обозначение  $\hat{D}_n = \partial/\partial T_n$ . В нулевом порядке получаем уравнение гармонического осциллятора

$$\hat{D}_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = 0, \quad (16.13)$$

решение которого можно представить в виде

$$x_1 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \text{к.с.} \quad (16.14)$$

В первом порядке по  $\varepsilon$  имеем

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -\left(2\hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + 2\gamma \hat{D}_0 x_1 + x_1^3 + f x_1 \cos \omega t\right) \quad (16.15)$$

В правую часть уравнения (16.15) следует подставить решение (16.14) для  $x_1$  и приравнять к нулю секулярные члены, пропорциональные  $\exp(i\omega_0 T_0)$ . С учетом выражения (16.12) нетрудно подсчитать, что

$$fx_1 \cos \omega t = \frac{f}{2} \left( A \exp i(3\omega_0 T_0 + \delta T_1) + A^* \exp i(\omega_0 T_0 + \delta T_1) + \text{к.с.} \right). \quad (16.16)$$

Остальные слагаемые уже вычислялись нами ранее, например, при анализе осциллятора Дуффинга (лекция 9). В итоге можно получить укороченное уравнение в следующем виде:

$$A' + \gamma A = \frac{ifA^*}{4} e^{i\delta T_1} + \frac{3i|A|^2 A}{2}. \quad (16.17)$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по медленному времени  $T_1$ .

Вводя в (16.17) вещественные амплитуду и фазу,  $A = (a/2) \exp(i\varphi)$ , получаем

$$\begin{aligned} a' + \gamma a &= -\frac{fa}{4} \sin(\delta T_1 - 2\varphi), \\ \varphi' &= \frac{3a^2}{8} + \frac{f}{4} \cos(\delta T_1 - 2\varphi). \end{aligned} \quad (16.18)$$

Система уравнений (16.18) является неавтономной, так как правые части явным образом зависят от времени. Однако ее можно превратить в автономную, если ввести *резонансную фазу*

$$\psi = \delta T_1 - 2\varphi. \quad (16.19)$$

Окончательно приходим к укороченным уравнениям

$$\begin{aligned} a' + \gamma a &= -\frac{fa}{4} \sin \psi, \\ \psi' &= \delta - \frac{3a^2}{4} - \frac{f}{2} \cos \psi. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Найдем состояния равновесия системы (16.20), определяющие амплитуду и фазу установившихся колебаний. Для них будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} \gamma a_0 &= -\frac{fa_0}{4} \sin \psi_0, \\ \delta - \frac{3a_0^2}{4} &= \frac{f}{2} \cos \psi_0. \end{aligned} \quad (16.21)$$

Проанализируем полученные соотношения. Прежде всего, в отличие от вынужденных колебаний имеется тривиальное состояние равновесия  $a_0 = 0$ , которое отвечает отсутствию колебаний. Ненулевые решения системы (16.21) отвечают установившемуся режиму параметрических колебаний с постоянной амплитудой  $a_0$  и линейно изменяющейся фазой  $\varphi = (\delta T_1 - \psi_0)/2$ . Таким образом, колебания происходят на частоте  $\omega_0 + \varepsilon\varphi' = \omega_0 + \varepsilon\delta/2 = \omega/2$ , в точности равной половине частоты воздействия.

Исключим из уравнений (16.21) фазу  $\psi_0$ . Получим

$$\left(\delta - \frac{3a_0^2}{4}\right)^2 = \frac{f^2}{4} - 4\gamma^2. \quad (16.22)$$

Это уравнение дает зависимость установившейся амплитуды  $a_0$  от расстройки  $\delta$  — *резонансную кривую*. Разрешим его относительно  $\delta$ :

$$\delta = \frac{3a_0^2}{4} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} - 4\gamma^2}. \quad (16.23)$$

Таким образом, видно, что решение существует только при условии  $f > 4\gamma$ , т.е. существует порог неустойчивости.

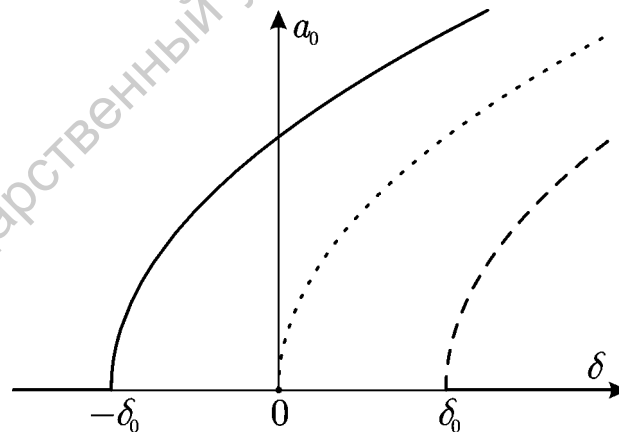


Рис. 16.4. Резонансные кривые параметрических колебаний нелинейного осциллятора ( $\delta_0 = \sqrt{f^2/4 - 4\gamma^2}$ ). Сплошная линия — устойчивые участки резонансной кривой, штриховая — неустойчивые, пунктирная — скелетная кривая (16.24)

Резонансные кривые при некотором фиксированном значении  $f$  приведены на рис. 16.4. Пунктирной линией показана «скелетная кривая»

$$\delta = \frac{3a_0^2}{4}. \quad (16.24)$$

Что касается фазы  $\psi_0$ , то для нее из уравнений (16.21) можно найти два значения, отличающиеся на  $\pi$ , которые соответствуют двум ветвям резонансной кривой.

При изменении параметра диссипации  $\gamma$  вид резонансных кривых качественно не изменяется. С ростом  $\gamma$  ветви кривой сближаются; при  $\gamma > f/4$  решения с ненулевой амплитудой отсутствуют, т.е. возбуждение параметрических колебаний невозможно.

Теперь необходимо исследовать полученные решения на устойчивость. Полагая  $a = a_0 + \xi$ ,  $\psi = \psi_0 + \eta$ , где  $\xi, \eta$  — малые возмущения, линеаризуем укороченные уравнения (16.20). Получим

$$\begin{aligned} \xi' + \gamma\xi &= -\frac{f\xi}{4} \sin \psi_0 - \frac{fa_0\eta}{4} \cos \psi_0, \\ \eta' &= -\frac{3a_0\xi}{2} - \frac{f\eta}{2} \sin \psi_0. \end{aligned} \quad (16.25)$$

Удобно исключить отсюда  $\psi_0$  при помощи соотношений (16.21):

$$\begin{aligned} \xi' &= -\frac{a_0}{2} \left( \delta - \frac{3a_0^2}{4} \right), \\ \eta' &= -\frac{3a_0\xi}{2} - 2\gamma\eta. \end{aligned} \quad (16.26)$$

Отыскивая решение в виде  $\xi, \eta \sim \exp(pT_1)$ , получаем характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\gamma p - \frac{3a_0^2}{4} \left( \delta - \frac{3a_0^2}{4} \right) = 0. \quad (16.27)$$

Анализируя корни этого уравнения, нетрудно показать, что при условии

$$\delta > \frac{3a_0^2}{4} \quad (16.28)$$

состояние равновесия является седлом. Как видно из уравнения (16.23), это условие соответствует правой ветви резонансной кривой, которая, таким образом, является неустойчивой. Левая ветвь, для которой  $\delta < 3a_0^2/4$ , устойчива, причем можно показать, что состояние равновесия будет являться устойчивым узлом при



$$\frac{3a_0^2}{4} - \frac{4\gamma^2}{3a_0^2} < \delta < \frac{3a_0^2}{4} \quad (16.29)$$

и устойчивым фокусом при

$$\delta < \frac{3a_0^2}{4} - \frac{4\gamma^2}{3a_0^2}. \quad (16.30)$$

В первом случае амплитуда колебаний с течением времени монотонно приближается к стационарному значению, во втором случае переходный процесс носит осциллирующий характер.

Осталось исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия. Собственно говоря, такой анализ эквивалентен определению условий параметрической неустойчивости для уравнения Матьё в области основного резонанса (см. книгу «Линейные колебания и волны»). Тем не менее, проделаем выкладки до конца. Отбросим в укороченном уравнении (16.17) нелинейное слагаемое и сделаем замену  $A = B \exp(i\delta T_1/2)$ .

Получим

$$B' + \left( \gamma + \frac{i\delta}{2} \right) B = \frac{ifB^*}{4} \quad (16.31)$$

Подставляя решение в виде  $B, B^* \sim \exp[pT_1/2]$  и умножая на комплексно сопряженное выражение, находим характеристическое уравнение

$$(p + 2\gamma)^2 + \delta^2 = \frac{f^2}{4}. \quad (16.32)$$

Корни этого уравнения есть

$$p = -2\gamma \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} - \delta^2}. \quad (16.33)$$

Следовательно, нулевое состояние равновесия неустойчиво при

$$\delta^2 < \frac{f^2}{4} - 4\gamma^2 \equiv \delta_0^2. \quad (16.34)$$

Чтобы представить себе окончательную картину, вновь обратимся к рис. 16.4, где устойчивые участки резонансных кривых изображены сплошными линиями, неустойчивые — штриховыми. В области  $\delta < -\delta_0$  имеется единственное устойчивое состоя-

ние равновесия  $a_0 = 0$ , т.е. возбуждение параметрических колебаний невозможно. В области  $-\delta_0 < \delta < \delta_0$  нулевое состояние равновесия теряет устойчивость, и появляется устойчивое равновесие, отвечающее режиму стационарных одночастотных колебаний. Наконец, в области  $\delta > \delta_0$  наблюдается бистабильность: сосуществуют два устойчивых состояния, одно из которых соответствует стационарному периодическому режиму, другое — отсутствию колебаний. В этой области возможно жесткое возбуждение колебаний: малые возмущения затухают, тогда как возмущения с достаточно большой амплитудой нарастают и переходный процесс завершается установлением периодических колебаний с постоянной амплитудой. Эта ситуация аналогична жесткому возбуждению автоколебаний, рассмотренному в лекции 12.

Интерес представляют также зависимости  $a(f)$  при фиксированной расстройке  $\delta$ . Типичный вид этих зависимостей приведен на рис. 16.5. Как видно, в зависимости

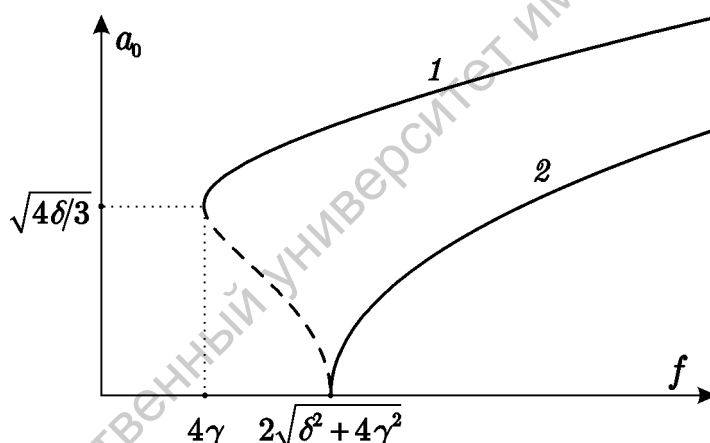


Рис. 16.5. Зависимости  $a(f)$  при  $\delta = \text{const}$ :  $\delta > 0$  (1);  $\delta < 0$  (2). Сплошной линией показаны устойчивые участки, штриховой — неустойчивые

от знака  $\delta$  они имеют качественно различный характер. При  $\delta > 0$  зависимость  $a_0(f)$  является неоднозначной, что согласуется с наличием двух ветвей у резонансной кривой (см. рис. 16.4). Однако нижняя ветвь соответствует неустойчивым состояниям (она показана на рис. 16.5 штриховой линией). При  $\delta < 0$  имеется только одно возможное состояние  $a_0(f)$ , и это состояние устойчиво.

Можно изобразить границы областей самовозбуждения на плоскости параметров  $(f, \delta)$  (рис. 16.6). Граница мягкого возбуждения находится из уравнения (16.34). Она приближенно воспроизводит форму «клюва» Матьё для основного резонанса. Гра-

нища жесткого возбуждения представляет собой горизонтальную полупрямую  $f = 4\gamma$  при  $\delta > 0$ .

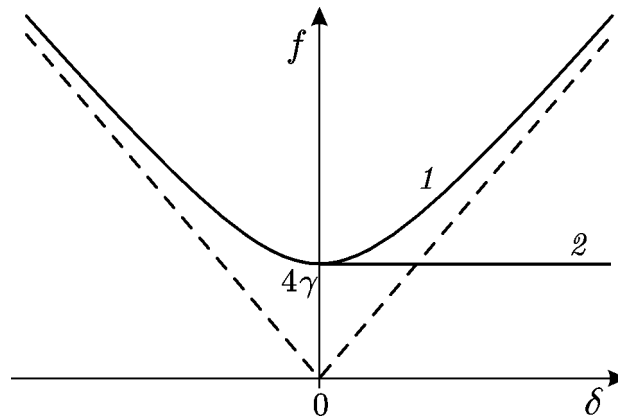


Рис. 16.6. Границы областей мягкого (1) и жесткого (2) возбуждения на плоскости параметров  $(f, \delta)$ . Асимптоты — границы мягкого возбуждения для консервативного осциллятора ( $\gamma = 0$ )

Итак, развитие параметрической неустойчивости завершается установлением режима стационарных периодических колебаний. Механизм насыщения неустойчивости связан с неизохронностью осциллятора (как и при вынужденных колебаниях, лекция 13). Поскольку частота собственных колебаний зависит от энергии, с ростом амплитуды она изменяется и резонансные условия нарушаются. В теории параметрических колебаний этот механизм носит название *расстроечного*.

Мы рассмотрели лишь случай слабой надкритичности, когда колебания являются квазигармоническими. При больших амплитудах воздействия возможны более сложные, в том числе хаотические, режимы колебаний. Здесь ситуация также вполне аналогична вынужденным колебаниям нелинейного осциллятора (лекция 15). Однако рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной книги.

## Параметрические генераторы электромагнитных колебаний

Основная область практического применения параметрической неустойчивости — это усиление, генерация и преобразование частоты электромагнитных колебаний. Первые параметрические устройства, основанные на механически перестраиваемых колебательных контурах, были разработаны еще перед Первой мировой войной. Однако, механическая перестройка возможна лишь на достаточно низких частотах. Более перспективным является периодическое изменение частоты контура при помощи нелинейных элементов. Пусть, например, в контур включен нелинейный элемент, емкость которого зависит от приложенного напряжения:  $C = C(u)$ . Воздействуя на этот элемент гармоническим внешним сигналом  $u = U \cos \omega t$ , можно добиться изменения емкости во времени с частотой  $\omega$ .

В качестве нелинейных элементов в современных параметрических устройствах обычно используются специальные полупроводниковые диоды, называемые *варикапами* (от англ. variable — переменный и capacity — емкость). Мы не будем обсуждать физические причины появления нелинейной емкости. Укажем лишь, что варикап представляет собой *p-n* переход при обратном постоянном смещении.

Схемы простейших одноконтурных параметрических генераторов приведены на рис. 17.1. Генератор включает в себя колебательный контур, диод  $D$  и источник внеш-

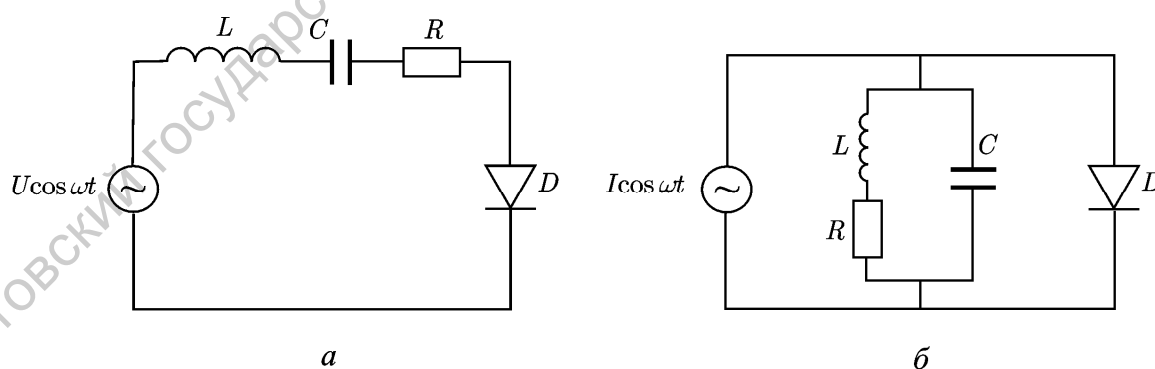


Рис. 17.1. Схемы одноконтурного параметрического генератора с последовательным (а) и параллельным (б) контуром

него сигнала, приводящий к модуляции параметров контура. В теории параметрических генераторов его называют *накачкой*. Частота накачки  $\omega$  должна быть близка к удвоенной собственной частоте контура.

Разумеется, использование колебательных контуров возможно только на относительно низких частотах. В сверхвысокочастотном диапазоне в качестве колебательных систем применяют *объемные резонаторы* — металлические полости, в которых возбуждаются электромагнитные колебания на определенных частотах. Отметим, что современные варикапы работают на частотах до 100 ГГц. На сверхвысоких частотах используются также *электронно-лучевые* генераторы и усилители, в которых в роль нелинейного элемента выполняет пучок электронов. Особенно перспективны так называемые *лазеры на свободных электронах*<sup>1</sup>.

Получим укороченные уравнения одноконтурного параметрического генератора. Диод представим в виде параллельно включенных нелинейных емкости и проводимости. Независимо от того, рассматривается генератор с последовательным или парал-

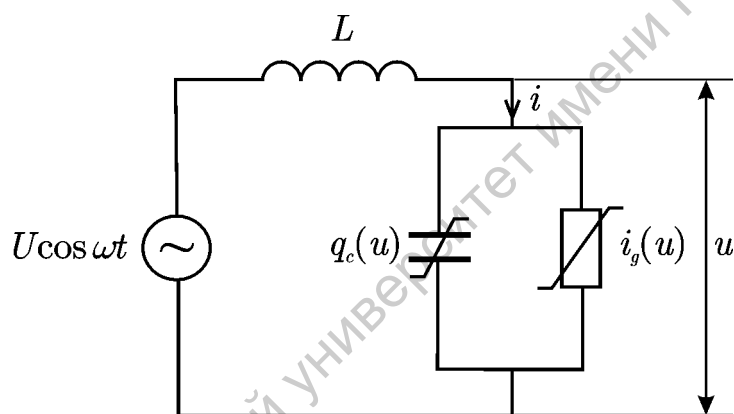


Рис. 17.2. Эквивалентная схема одноконтурного параметрического генератора

лельным контуром, его эквивалентная схема генератора имеет вид, представленный на рис. 17.2. Нелинейные функции  $q_c(u)$  и  $i_g(u)$  аппроксимируем полиномами

$$\begin{aligned} q_c(u) &= C_0 u + c_1 u^2 + c_2 u^3 + \dots, \\ i_g(u) &= g_0 u + g_1 u^2 + g_2 u^3 + \dots \end{aligned} \quad (17.1)$$

Отметим, что в коэффициенты  $C_0$  и  $g_0$ , вообще говоря, входят и параметры колебательного контура.

Уравнения Кирхгофа для контура имеют вид (обозначения пояснены на рисунке)

<sup>1</sup> Принцип действия и устройство лазеров на свободных электронах кратко обсуждаются в книге «Линейные колебания», входящей в состав настоящей серии.

$$L \frac{di}{dt} + u + U \cos \omega t = 0, \quad (17.2)$$

$$i = \frac{dq_c}{dt} + i_g.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q_c(u) - C_0 u = c_1 u^2 + c_2 u^3 + \dots, \\ \tilde{i} &= i_g(u) - g_0 u = g_1 u^2 + g_2 u^3 + \dots \end{aligned} \quad (17.3)$$

Тогда из уравнений (17.2) получаем

$$C_0 \frac{d^2 u}{dt^2} + g_0 \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = -\frac{U \cos \omega t}{L} - \frac{d^2 \tilde{q}}{dt^2} - \frac{d\tilde{i}}{dt}. \quad (17.4)$$

Обозначая  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $g_0/C_0 = 2\varepsilon\gamma$ , где  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр, приведем уравнение (17.4) к виду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon\gamma \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = -\omega_0^2 U \cos \omega t - \frac{1}{C_0} \left( \frac{d^2 \tilde{q}}{dt^2} + \frac{d\tilde{i}}{dt} \right). \quad (17.5)$$

Нелинейные добавки  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{i}$  будем также полагать малыми (порядка  $\varepsilon$ ).

Для получения укороченного уравнения вновь воспользуемся методом многих масштабов (лекция 9). Будем искать решение уравнения (17.5) в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$u = u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 u_3 + \dots, \quad (17.6)$$

и введем новые временные переменные  $T_n = \varepsilon^n t$ . Будем рассматривать основной параметрический резонанс, полагая

$$\omega = 2\omega_0 + \varepsilon\delta, \quad (17.7)$$

где  $\varepsilon\delta$  — малая расстройка. Подставим эти соотношения в уравнение (17.5) и выделим члены одинаковых порядков малости. В нулевом порядке получим уравнение гармонического осциллятора под внешним воздействием

$$\hat{D}_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -\omega_0^2 U \cos \omega t. \quad (17.8)$$

Поскольку с учетом соотношения (17.7) можно записать, что

$$\omega t = 2\omega_0 T_0 + \delta T_1, \quad (17.9)$$

решение уравнения (17.8) будет иметь вид

$$u_1 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \frac{U}{6} \exp[i(2\omega_0 T_0 + \delta T_1)] + \text{к.с.} \quad (17.10)$$

Члены порядка  $\varepsilon$  в (17.5) приводят к уравнению

$$\hat{D}_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2\hat{D}_0 \hat{D}_1 u_1 - 2\gamma \hat{D}_0 u_1 - \frac{1}{C_0} [\hat{D}_0^2 \tilde{q}(u_1) + \hat{D}_0 \tilde{i}(u_1)]. \quad (17.11)$$

Подставляя в правую часть этого уравнения выражение (17.10) и приравнявая к нулю секулярные члены, пропорциональные  $\exp(i\omega_0 T_0)$ , получаем

$$2i\omega_0 (A' + \gamma A) + \frac{1}{C_0} [-\omega_0^2 \tilde{q}_{\omega_0} + i\omega_0 \tilde{i}_{\omega_0}] = 0. \quad (17.12)$$

Здесь символами  $\tilde{q}_{\omega_0}$ ,  $\tilde{i}_{\omega_0}$  обозначены составляющие на частоте  $\omega_0$ , входящие в  $\tilde{q}(u_1)$ ,  $\tilde{i}(u_1)$ , штрихи означают дифференцирование по «медленному времени»  $T_1$ .

Нелинейные добавки (17.3) включают в себя как квадратичные, так и кубические члены. Возводя выражение (17.10) в квадрат и в куб, после несложных, но достаточно громоздких вычислений, находим

$$\begin{aligned} (u_1^2)_{\omega_0} &= \frac{UA^*}{3} e^{i\delta T_1}, \\ (u_1^3)_{\omega_0} &= 3|A|^2 A + \frac{U^2 A}{6}. \end{aligned} \quad (17.13)$$

С учетом этих соотношений уравнение (17.12) приводится к виду

$$\begin{aligned} A' + \gamma A + \frac{i\omega_0}{2C_0} \left[ \frac{c_1 UA^*}{3} e^{i\delta T_1} + c_2 \left( 3|A|^2 A + \frac{U^2 A}{6} \right) \right] + \\ + \frac{1}{2C_0} \left[ \frac{g_1 UA^*}{3} e^{i\delta T_1} + g_2 \left( 3|A|^2 A + \frac{U^2 A}{6} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (17.14)$$

В уравнение (17.14) входят нелинейные слагаемые двух типов. Члены, пропорциональные  $c_{1,2}$ , появляются за счет нелинейной зависимости заряда от приложенного напряжения (так называемая *реактивная нелинейность*). Как видно из уравнения (17.14), квадратичная нелинейность обеспечивает параметрическую связь колебаний на частотах  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ . Кубическая нелинейность приводит к сдвигу частоты колебаний (нелинейная расстройка). С ростом амплитуды колебаний расстройка увеличивается и ре-

зонансные условия нарушаются. Вследствие этого происходит насыщение неустойчивости и установление стационарного режима. В теории параметрических генераторов данный механизм ограничения амплитуды получил название *расстройного*. Аналогичный механизм действует в нелинейном осцилляторе, рассмотренном в лекции 14. Члены, пропорциональные  $g_{1,2}$ , связаны с нелинейным характером проводимости диода. Такая нелинейность называется *активной* (нелинейные потери). Она приводит к *диссипативному* механизму насыщения. Далее рассмотрим действие обоих механизмов по отдельности.

### 17.1. Расстройный механизм ограничения неустойчивости

При учете только расстройного механизма уравнение (17.14) принимает вид

$$A' + \gamma A + \frac{i\omega_0}{2C_0} \left[ \frac{c_1 U A^*}{3} e^{i\delta T_1} + c_2 \left( 3|A|^2 A + \frac{U^2 A}{6} \right) \right] = 0. \quad (17.15)$$

Из (17.15) следуют уравнения для вещественных амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} a' + \gamma a - \frac{\omega_0 c_1 U a}{6C_0} \sin(\delta T_1 - 2\varphi) &= 0, \\ \varphi' + \frac{\omega_0 c_1 U}{6C_0} \cos(\delta T_1 - 2\varphi) + \frac{\omega_0 c_2}{2C_0} \left( \frac{3a^2}{4} + \frac{U^2}{6} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Вводя резонансную фазу  $\psi = \delta T_1 - 2\varphi$ , превратим неавтономную систему (17.16) в автономную

$$\begin{aligned} a' + \gamma a &= \frac{\omega_0 c_1 U a}{6C_0} \sin \psi, \\ \psi' &= \delta + \frac{3\omega_0 c_2 a^2}{4C_0} + \frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0} + \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0} \cos \psi. \end{aligned} \quad (17.17)$$

Сравнивая уравнения (17.17) с укороченными уравнениями для параметрического осциллятора Дуффинга (16.20), нетрудно убедиться, что они отличаются только слагаемым, пропорциональным  $U^2$ , во втором уравнении (разумеется, в уравнениях (14.20) величина  $f$  имеет тот же смысл, что и  $U$  в (17.17)). Это слагаемое играет роль дополнительной нелинейной расстройки

$$\delta_0 = -\frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0}. \quad (17.18)$$



Причина ее появления заключается в том, что в контуре возбуждены интенсивные колебания на частоте накачки, что приводит к дополнительному изменению средней емкости диода.

Рассматривая стационарные решения системы (17.17), нетрудно получить уравнение резонансной кривой

$$\left( \delta + \frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0} + \frac{3\omega_0 c_2 a_0^2}{4C_0} \right)^2 = \left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0} \right)^2 - 4\gamma^2. \quad (17.19)$$

Резонансные кривые представлены на рис. 17.3а. Они практически аналогичны кривым на рис. 16.4, за тем исключением, что наклонены в другую сторону<sup>2</sup>. Кроме того, резо-

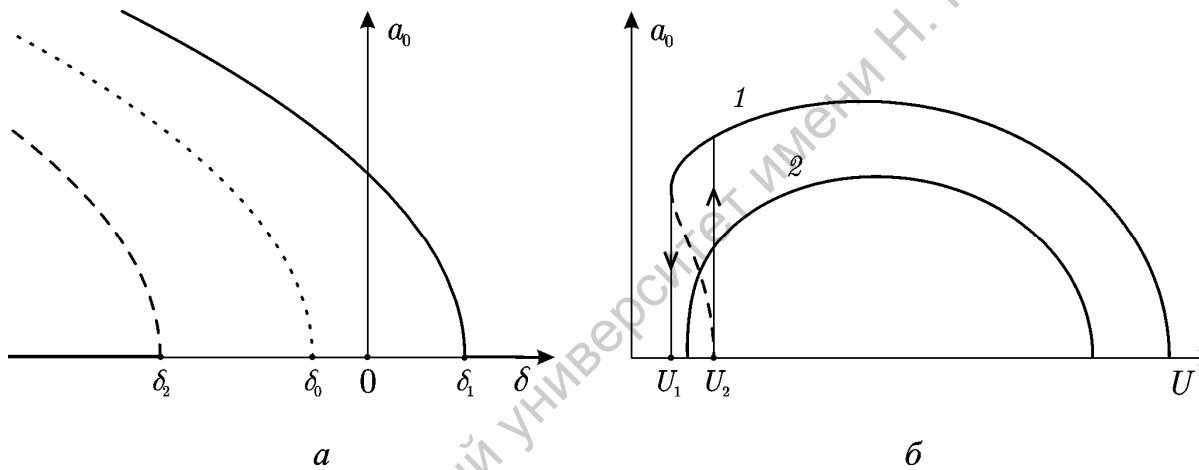


Рис. 17.3. Резонансные кривые одноконтурного параметрического генератора при расстроеном механизме ограничения неустойчивости: а — зависимости  $a_0(\delta)$  при  $U = \text{const}$ ; б — зависимости  $a_0(U)$  при  $\delta = \text{const}$ . Устойчивые участки показаны сплошными линиями, неустойчивые — штриховыми

нансные кривые приобретают дополнительный сдвиг на величину  $\delta_0$  в сторону низких частот. Мы не будем останавливаться на анализе устойчивости резонансных кривых, поскольку он полностью аналогичен проведенному ранее в лекции 16. В области  $\delta_2 < \delta < \delta_1$ , где

$$\delta_{1,2} = -\frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0} \pm \sqrt{\left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0} \right)^2 - 4\gamma^2}, \quad (17.20)$$

<sup>2</sup> Разумеется, такая картина будет только в случае  $c_2 > 0$ , т.е. если емкость диода  $C(u)$  увеличивается с ростом  $u$ . При этом, очевидно, с ростом амплитуды колебаний резонансная частота будет уменьшаться. Если же  $c_2 < 0$ , резонансные кривые будут наклонены вправо.

возбуждение колебаний носит мягкий характер, в области  $\delta < \delta_2$  — жесткий, в области  $\delta > \delta_1$  возбуждение параметрических колебаний вообще отсутствует.

Зависимость  $a_0(U)$  приведена на рис. 17.3б. Она изменяется более существенно (ср. рис. 16.5). Наличие дополнительной расстройки  $\delta_0$ , пропорциональной квадрату амплитуды накачки, приводит к тому, что при слишком больших  $U$  (при фиксированной  $\delta$ , т.е. при фиксированной частоте накачки) самовозбуждение становится невозможным. По-прежнему имеются две качественно различные ситуации. При достаточно больших отрицательных расстройках  $\delta < \delta_2$  зависимость  $a_0(U)$  является неоднозначной (кривая 1). Нижняя ветвь соответствует неустойчивым состояниям, верхняя — устойчивым. При плавном изменении амплитуды накачки будет наблюдаться гистерезис, т.е. возбуждение и срыв генерации в зависимости от направления движения будут происходить при различных значениях  $U_1$  и  $U_2$ , которые несложно определить из уравнения (17.19). Если же  $\delta > \delta_2$ , то зависимость  $a_0(U)$  имеет более простой вид (кривая 2). Важно отметить, что для любого значения расстройки имеется некоторое оптимальное значение амплитуды накачки, при которых колебания имеют максимальную амплитуду.

Полезно также построить границы области самовозбуждения на плоскости параметров  $(U, \delta)$ . Границу области мягкого возбуждения получим, полагая в уравнении (17.18)  $a_0 = 0$ :

$$\left( \delta + \frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0} \right)^2 = \left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0} \right)^2 - 4\gamma^2. \quad (17.21)$$

Уравнение (17.20) отличается от соответствующего условия для уравнения Матьё (14.34) вторым слагаемым в левой части, т.е. наличием дополнительной расстройки  $\delta_0$ , причины появления которой обсуждались выше. В результате границы самовозбуждения на плоскости параметров загибаются влево (рис. 17.4). Таким образом, область самовозбуждения является ограниченной по  $U$  при  $\delta = \text{const}$ , что согласуется с рис. 17.3б). Также на рис. 17.4 изображена область жесткого возбуждения колебаний.

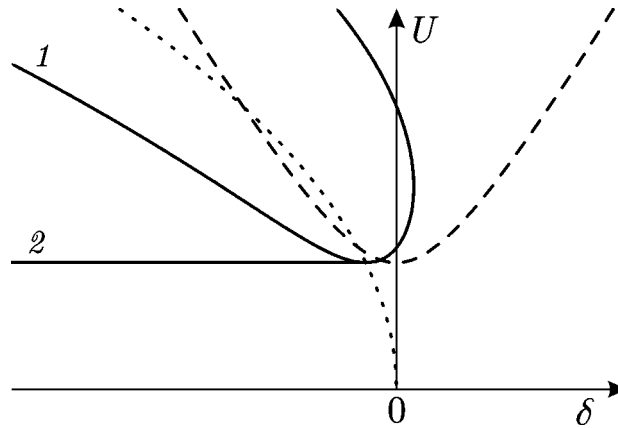


Рис. 17.4. Границы областей мягкого (1) и жесткого (2) возбуждения на плоскости параметров  $(\delta, U)$ . Пунктиром показана «скелетная кривая» — зависимость  $\delta = \delta_0(U)$ . Штриховая линия — граница неустойчивости для уравнения Матьё

### 17.2. Диссипативный механизм ограничения неустойчивости

Чтобы исследовать диссипативный механизм, положим в уравнении (17.21)  $c_2 = 0$  (но  $c_1 \neq 0$ , так как именно этот член отвечает за параметрическую связь накачки и сигнала).

Получим

$$A' + \left[ \gamma + \frac{g_2}{2C_0} \left( 3|A|^2 + \frac{U^2}{6} \right) \right] A + \frac{ic_1\omega_0 + g_1}{6C_0} UA^* e^{i\delta T_1} = 0. \quad (17.22)$$

Поскольку

$$c_1\omega_0 - ig_1 = \frac{c_1\omega_0}{\cos\theta} e^{-i\theta}, \quad (17.23)$$

где  $\theta = \arctg(g_1/c_1\omega_0)$ , перепишем уравнение (17.22) в виде

$$A' + \left[ \gamma + \frac{g_2}{2C_0} \left( 3|A|^2 + \frac{U^2}{6} \right) \right] A + \frac{ic_1\omega_0}{6C_0 \cos\theta} UA^* e^{i(\delta T_1 - \theta)} = 0. \quad (17.24)$$

Далее будем считать, что угол  $\theta$  достаточно мал, так что  $\cos\theta \sim 1$ .

Построим резонансные кривые. Из уравнения (17.24) получаем укороченные уравнения для вещественных амплитуды и фазы

$$a' + \left[ \gamma + \frac{g_2}{4C_0} \left( \frac{3a^2}{2} + \frac{U^2}{3} \right) \right] a = \frac{\omega_0 c_1 U a}{6C_0 \cos\theta} \sin\psi, \quad (17.25)$$

$$\psi' = \delta + \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0 \cos\theta} \cos\psi.$$

Здесь по-прежнему  $\psi = \delta T_1 - 2\varphi - \theta$  — резонансная фаза. Нетривиальные стационарные решения системы (17.25), определяющие амплитуду и фазу стационарных одночастотных колебаний, находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \gamma + \frac{g_2}{4C_0} \left( \frac{3a_0^2}{2} + \frac{U^2}{3} \right) &= \frac{\omega_0 c_1 U}{6C_0 \cos \theta} \sin \psi_0, \\ \delta &= -\frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0 \cos \theta} \cos \psi_0. \end{aligned} \quad (17.26)$$

Отсюда следует уравнение резонансной кривой

$$\delta^2 = \left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0 \cos \theta} \right)^2 - 4 \left[ \gamma + \frac{g_2}{4C_0} \left( \frac{3a_0^2}{2} + \frac{U^2}{3} \right) \right]^2. \quad (17.27)$$

В данном случае резонансные кривые выглядят существенно проще (рис. 17.5). Они симметричны относительно оси ординат, что обусловлено отсутствием фазовой нели-

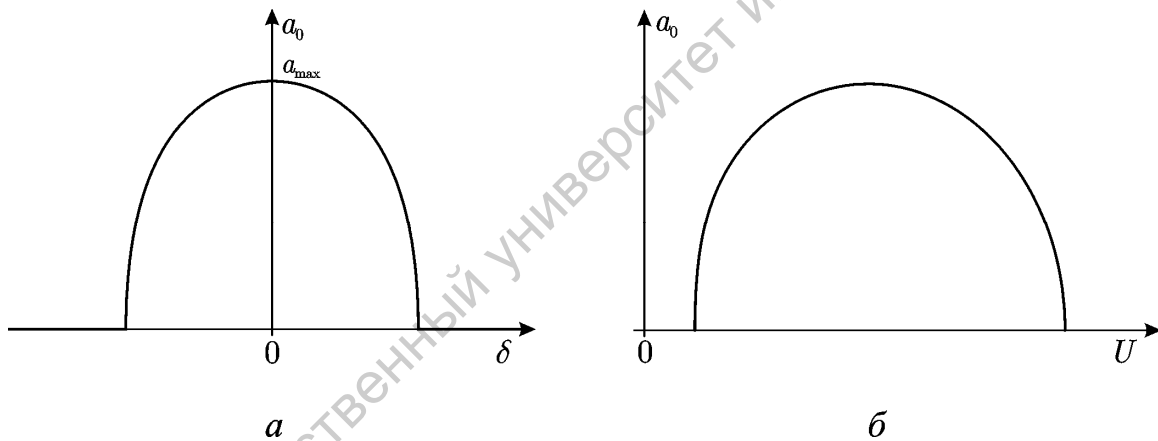


Рис. 17.5. Резонансные кривые одноконтурного параметрического генератора при диссипативном механизме ограничения неустойчивости: зависимость  $a_0(\delta)$  при  $U = \text{const}$  (а); зависимость  $a_0(U)$  при  $\delta = \text{const}$  (б)

нейности (нелинейного сдвига частоты). Стационарные состояния всюду устойчивы. Области мультистабильности и гистерезиса отсутствуют, следовательно, жесткое возбуждение колебаний невозможно.

Амплитуда колебаний, очевидно, максимальна при нулевой расстройке

$$a_{\max}^2 = \frac{4\omega_0 c_1 U}{9g_2 \cos \theta} - \frac{8C_0 \gamma}{3g_2} - \frac{2U^2}{9}. \quad (17.28)$$

Зависимость  $a_{\max}(U)$  имеет максимум

$$(a_{\max})_{\max} = \sqrt{\frac{2}{9} \left( \frac{\omega_0 c_1}{g_2 \cos \theta} \right)^2 - \frac{8C_0 \gamma}{3g_2}} \quad (17.29)$$

при  $U = U_{\max} = \omega_0 c_1 / g_2 \cos \theta$ . Эти соотношения определяют максимально возможную амплитуду генерации.

Форму границы области самовозбуждения на плоскости  $(U, \delta)$  можно найти, полагая в уравнении (17.27)  $a_0 = 0$ , что дает

$$\delta^2 = \left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0 \cos \theta} \right)^2 - 4 \left( \gamma + \frac{g_2 U^2}{12C_0} \right)^2. \quad (17.30)$$

В данном случае отличие от уравнения (16.34) заключается в слагаемом, пропорциональным  $g_2 U^2$ . Оно учитывает дополнительную нелинейную диссипацию, появляющуюся из-за того, что на диод действует напряжение накачки с амплитудой  $U/6$ . В результате область самовозбуждения оказывается ограниченной замкнутой кривой (рис. 17.6).

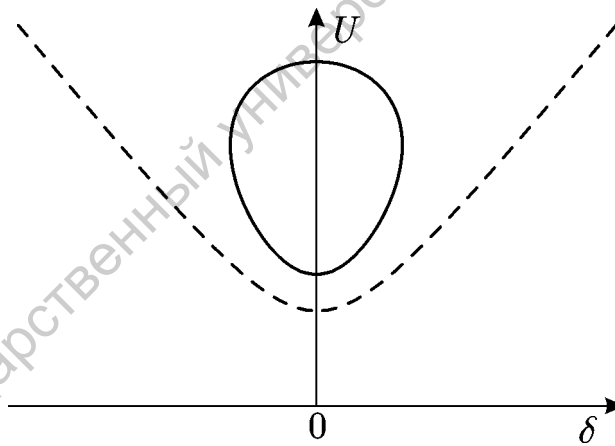


Рис. 17.6. Граница области самовозбуждения возбуждения параметрического генератора на плоскости параметров  $(\delta, U)$  при диссипативном механизме ограничения неустойчивости. Штриховая линия — граница неустойчивости для уравнения Матьё

Теперь нетрудно представить, как будут выглядеть резонансные кривые и границы области самовозбуждения в случае, когда действуют и расстроечный, и диссипативный механизмы. Соответствующие зависимости приведены на рис. 17.7 и 17.8. Если влияние расстроечного механизма достаточно существенно, возможны мультстабильность и гистерезис. Соответственно, на плоскости параметров  $(\delta, U)$  появляется область жесткого возбуждения колебаний.

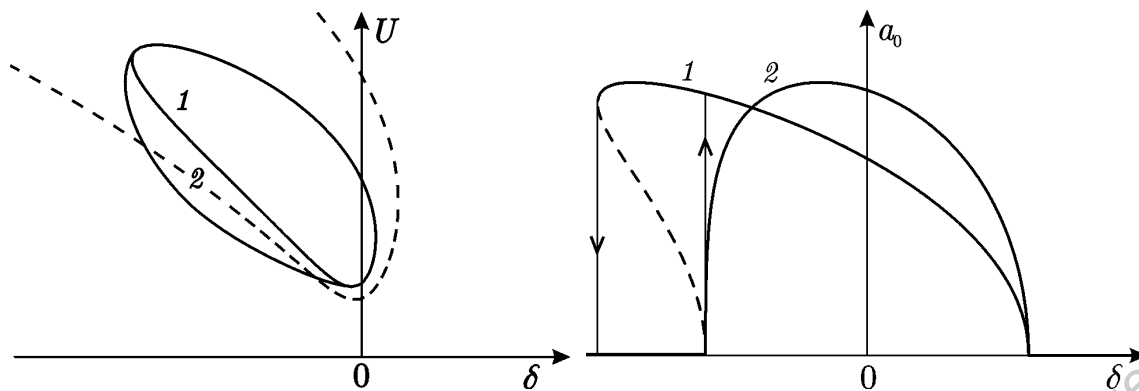


Рис. 17.7. Границы областей мягкого (1) и жесткого (2) самовозбуждения возбуждения при одновременном действии расстройного и диссипативного механизмов. Штриховая линия — граница при действии только расстройного механизма

Рис. 17.8. Резонансные кривые одноконтурного параметрического генератора при преобладающем влиянии расстройного (1) и диссипативного (2) механизмов ограничения неустойчивости

**Задача 17.1.** Исследуйте возможность самовозбуждения параметрических колебаний, когда модулируется только проводимость диода (т.е. считается, что емкость диода линейна,  $q_c = C_0 u$ ).

*Решение.* Условие самовозбуждения формально найдем из укороченного уравнения (17.22). Полагая в нем  $c_1 = 0$  и линеаризуя, получим

$$A' + \left( \gamma + \frac{g_2 U^2}{12 C_0} \right) A + \frac{g_1 U A^*}{6 C_0} e^{i\delta T_1} = 0. \quad (17.31)$$

Отсюда можно найти уравнение, определяющее границу самовозбуждения на плоскости параметров  $(\delta, U)$  (ср. (17.30)):

$$\delta^2 = \left( \frac{g_1 U}{3 C_0} \right)^2 - 4 \left( \gamma + \frac{g_2 U^2}{12 C_0} \right)^2. \quad (17.32)$$

Таким образом, необходимое для самовозбуждения условие (при отсутствии расстройки) есть

$$2\gamma + \frac{g_2 U^2}{6 C_0} \leq \frac{g_1 U}{3 C_0}. \quad (17.33)$$

С другой стороны, очевидно, что в колебательной системе с затуханием, зависящим от времени, самовозбуждение колебаний невозможно. В этом легко убедиться, рассматривая, например, линейный осциллятор вида

$$\ddot{x} + 2\gamma(t)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (17.34)$$

Такое уравнение описывает, в частности,  $RLC$ -контур, в котором сопротивление зависит от времени. Если  $\gamma(t) > 0$  в любой момент времени, то энергия все время убывает и состояние равновесия  $x = 0$  устойчиво.

С чем связано такое противоречие? Дело в том, что при аппроксимации вольтамперной характеристики диода кубическим полиномом появляется падающий участок в области отрицательных напряжений. Как было показано в Лекции 11, элемент с отрицательной дифференциальной проводимостью является активным и его включение в контур приводит к самовозбуждению. Условие (17.33) как раз отражает тот факт, что в определенные моменты времени напряжение на диоде соответствует падающему участку. Действительно, учитывая выражения (17.13), можно показать, что амплитуда спектральной составляющей тока на частоте  $\omega_0$  в линейном режиме есть

$$i_{\omega_0} = g_0 A + \frac{g_1 U A^*}{3} e^{i\delta T_1} + \frac{g_2 U^2 A}{6}. \quad (17.35)$$

При выполнении неравенства (17.33) это выражение (а, следовательно, и мощность потерь на частоте сигнала, пропорциональная  $i_{\omega_0} A^*$ ) может быть отрицательным.

В действительности вольтамперная характеристика варикапа не имеет падающего участка. Приближенно она описывается выражением

$$i(u) = I_0 \left[ \exp\left(\frac{eu}{kT}\right) - 1 \right], \quad (17.36)$$

которое пригодно и в области отрицательных напряжений. Здесь  $e$  — заряд электрона,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура. Таким образом, вывод о возможности возбуждения параметрических колебаний при модуляции лишь одной проводимости основан на некорректной аппроксимации выражения (17.36) кубическим полиномом в области больших отрицательных напряжений. Разумеется, включение в контур элемента, действительно обладающего отрицательной дифференциальной проводимостью, например, туннельного диода, приведет к самовозбуждению.

### 17.3. Двухконтурный параметрический генератор.

#### Соотношения Мэнли–Роу

Более сложную систему представляет собой *двухконтурный* генератор, принципиальная схема которого приведена на рис. 17.9<sup>3</sup>. Генератор содержит два колебательных контура, собственные частоты которых равны  $\omega_{1,2} = 1/\sqrt{L_{1,2}C_{1,2}}$ . Параллельно им включен полупроводниковый диод, который мы, как и прежде, представим в виде нелинейных емкости и проводимости, соединенных параллельно. Генератор возбуждается источником тока накачки  $I_3 \sin \omega_3 t$ .

<sup>3</sup> Ряд вопросов, касающихся теории двухконтурного генератора (соотношения Мэнли–Роу, переход к нормальным модам двухконтурной системы и т.д.) подробно обсуждается в книге «Линейные колебания и волны».

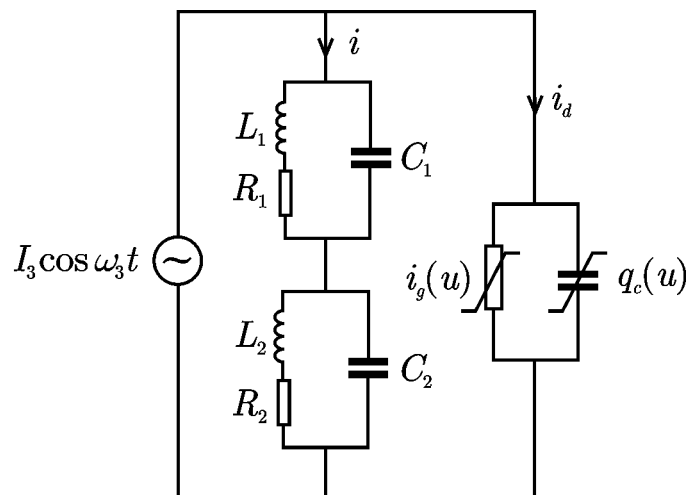


Рис. 17.9. Принципиальная схема двухконтурного параметрического генератора

Условие параметрического резонанса в двухконтурной системе принимает вид

$$\omega_3 \approx \omega_1 + \omega_2 \quad (17.37)$$

В частном случае, когда  $\omega_1 = \omega_2$ , это соотношение совпадает с (17.7). Такой генератор называется *вырожденным*. Колебание на частоте одного из контуров (для определенности — на частоте  $\omega_1$ ) является *полезным сигналом*, другое носит название *холостого*. Двухконтурный генератор обладает рядом преимуществ по сравнению с одноконтурными, в частности, более высокой стабильностью частоты. Кроме того, в специфическом случае, когда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  кратны, он может быть использован в качестве *делителя частоты*.

Важную роль при анализе колебаний в многочастотных параметрических системах играют *соотношения Мэнли–Роу*

$$\frac{P_1}{\omega_1} = \frac{P_2}{\omega_2} = -\frac{P_3}{\omega_3}, \quad (17.38)$$

где  $P_j$  — активные мощности, выделяющиеся на частотах  $\omega_j$ . При этом мощность, которая отбирается от источника накачки, считается отрицательной. Соотношения (17.38) показывают, в какой пропорции перераспределяется мощность накачки между сигнальным и холостым колебаниями.

Эти соотношения допускают простую квантовую интерпретацию. Если умножить резонансное условие (17.37) на постоянную Планка  $\hbar$ , то полученное соотношение будет иметь смысл закона сохранения энергии в процессе распада кванта накачки



на кванты сигнального и холостого колебаний. Поскольку для мощности можно записать  $P_j = \hbar\omega_j N$ , где  $N$  — число актов распада в единицу времени, соотношения Мэнли–Роу показывают, что один квант накачки рождает по одному кванту на сигнальной и холостой частотах.

Получим укороченные уравнения двухконтурного генератора и покажем, что соотношения Мэнли–Роу выполняются. Обозначим напряжения на емкостях  $C_{1,2}$  как  $u_{1,2}$ . Тогда уравнения Кирхгофа дадут

$$L_1 C_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 = L_1 \frac{di}{dt} + R_1 i. \quad (17.39)$$

где  $i$  — ток, текущий через контуры, а также аналогичное уравнение для второго контура. Поскольку

$$i + i_d = I_3 \sin \omega_3 t, \quad (17.40)$$

где

$$i_d = i_g(u) + \frac{dq_c(u)}{dt} \quad (17.41)$$

— ток, текущий через диод, уравнение (17.39) можно переписать в виде

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{L_1 C_1} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{d}{dt} + \frac{R_1}{L_1} \right) \left( I_3 \sin \omega_3 t - i_g(u) - \frac{dq_c(u)}{dt} \right). \quad (17.42)$$

Для функций  $i_g(u)$ ,  $q_c(u)$  по-прежнему будем использовать выражения (17.1). Здесь  $u = u_1 + u_2$  — напряжение на диоде. Окончательно получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{L_1 C_1} + \frac{C_0}{C_1} \left( \frac{d^2 (u_1 + u_2)}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1} \frac{d(u_1 + u_2)}{dt} \right) + \\ & + \frac{g_0}{C_1} \left( \frac{d(u_1 + u_2)}{dt} + \frac{R_1 (u_1 + u_2)}{L_1} \right) = \frac{1}{C_1} \left( \frac{d}{dt} + \frac{R_1}{L_1} \right) \left( I_3 \sin \omega_3 t - \tilde{i} - \frac{d\tilde{q}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (17.43)$$

Величины  $\tilde{i}$ ,  $\tilde{q}$  определяются соотношениями (17.3). Аналогичное уравнение (с точностью до перестановки индексов) будем иметь для  $u_2$ .

Если пренебречь нелинейными членами в правых частях, то придем к системе двух связанных линейных осцилляторов. Для дальнейшего анализа необходимо перей-

ти от переменных  $u_{1,2}$  к *нормальным колебаниям* этой системы, чтобы получить уравнения, в которых связь осуществляется только посредством нелинейных членов. Соответствующие преобразования не представляют принципиальной сложности, однако достаточно громоздки. Поэтому позволим себе несколько упростить задачу, предположив, что линейная связь слабая и ей можно пренебречь. Для этого, очевидно, необходимо выполнение условий  $C_0 \ll C_{1,2}$ ,  $g_0 \ll R_{1,2}C_{1,2}/L_{1,2}$ . Также будем пренебрегать величинами  $R_{1,2}/L_{1,2}$  в правых частях, что справедливо в случае достаточно высокооборотных контуров, когда  $R_{1,2} \ll \sqrt{L_{1,2}/C_{1,2}}$ . В результате получим

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + 2\varepsilon\gamma_1 \frac{du_1}{dt} + \omega_1^2 u_1 = \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left( I_3 \sin \omega_3 t - \tilde{i} - \frac{d\tilde{q}}{dt} \right), \quad (17.44)$$

а также аналогичное уравнение для  $u_2$ . Здесь введены обозначения  $\omega_{1,2} = 1/\sqrt{L_{1,2}C_{1,2}}$ ,  $2\varepsilon\gamma_{1,2} = R_{1,2}/L_{1,2}$ ,  $\varepsilon$  — малый параметр.

Получим укороченные уравнения для медленно меняющихся амплитуд колебаний. Для простоты ограничимся только расстройным механизмом ограничения неустойчивости, т.е. положим в (17.44)  $\tilde{i} = 0$ . Поскольку должно выполняться резонансное условие (17.37), запишем

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 + \varepsilon\delta. \quad (17.45)$$

Нелинейные члены в (17.44), как и прежде, будем считать малыми. Решение ищем в виде рядов по степеням  $\varepsilon$

$$u_j = u_j^{(1)} + \varepsilon u_j^{(2)} + \varepsilon^2 u_j^{(3)} + \dots, \quad (17.46)$$

где  $j = 1, 2$ . Применяя аппарат метода многих масштабов, получим в нулевом порядке малости

$$\hat{D}_0^2 u_j^{(1)} + \omega_j^2 u_j^{(1)} = \frac{\omega_3 I_3}{C_j} \cos \omega_3 t = \frac{\omega_3 I_3}{2C_j} (\exp(i\omega_3 t) + \text{к.с.}). \quad (17.47)$$

Эти уравнения представляют собой уравнения линейных консервативных осцилляторов под внешним воздействием. Поскольку из соотношений (17.45) следует, что

$$\omega_3 t = (\omega_1 + \omega_2) T_0 + \delta T_1, \quad (17.48)$$

решения уравнений (17.47) можно записать в виде

$$u_j^{(1)} = A_j(T_1) \exp(i\omega_j T_0) + F_j \exp\left[i((\omega_1 + \omega_2)T_0 + \delta T_1)\right] + \text{к.с.}, \quad (17.49)$$

где

$$F_j = \frac{\omega_3 I_3}{2C_j(\omega_j^2 - \omega_3^2)}. \quad (17.50)$$

Члены порядка  $\varepsilon$  в (17.44) приводят к уравнениям

$$\hat{D}_0^2 u_j^{(2)} + \omega_j^2 u_j^{(2)} = -2\hat{D}_0 \hat{D}_1 u_j^{(1)} - 2\gamma_j \hat{D}_0 u_j^{(1)} - \frac{1}{C_j} \hat{D}_0^2 [\tilde{q}(u_1^{(1)} + u_2^{(1)})]. \quad (17.51)$$

Подставляя в правые части этих уравнений выражения (17.49) и приравнявая к нулю секулярные члены на частотах  $\omega_{1,2}$ , получаем укороченные уравнения

$$A'_j + \gamma_j A_j + \frac{i\omega_j}{2C_j} \left[ 2c_1 F A_k^* e^{i\delta T_1} + 3c_2 (|A_j|^2 + 2|A_k|^2 + 2F^2) A_j \right] = 0, \quad (17.52)$$

где  $F = F_1 + F_2$ ,  $j \neq k$ . Отсюда следуют уравнения для вещественных амплитуд и фаз

$$\begin{aligned} a'_j + \gamma_j a_j &= \frac{\omega_j c_1}{C_j} F a_k \sin(\delta T_1 - \varphi_j - \varphi_k), \\ \varphi'_j &= -\frac{3\omega_j c_2}{4C_j} (a_j^2 + 2a_k^2 + 8F^2) - \frac{\omega_j c_1 F}{C_j} \frac{a_k}{a_j} \cos(\delta T_1 - \varphi_j - \varphi_k). \end{aligned} \quad (17.53)$$

Резонансную фазу теперь следует ввести следующим образом:  $\psi = \delta T_1 - \varphi_1 - \varphi_2$ . Тогда вместо (17.53) окончательно получим автономную систему из трех уравнений

$$\begin{aligned} a'_1 + \gamma_1 a_1 &= \frac{\omega_1 c_1}{C_1} F a_2 \sin \psi, \\ a'_2 + \gamma_2 a_2 &= \frac{\omega_2 c_1}{C_2} F a_1 \sin \psi, \\ \psi' &= \delta + \frac{3c_2}{4} \left[ \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{2\omega_2}{C_2} \right) a_1^2 + \left( \frac{\omega_2}{C_2} + \frac{2\omega_1}{C_1} \right) a_2^2 + 8 \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{\omega_2}{C_2} \right) F^2 \right] + \\ &\quad + c_1 \left( \frac{\omega_1 a_2}{C_1 a_1} + \frac{\omega_2 a_1}{C_2 a_2} \right) F \cos \psi. \end{aligned} \quad (17.54)$$

Из первых двух уравнений системы (17.54) следует закон сохранения

$$\frac{1}{\omega_1} \left[ \frac{d}{dT_1} \left( \frac{C_1 a_1^2}{2} \right) + \frac{C_1 R_1 a_1^2}{2L_1} \right] = \frac{1}{\omega_2} \left[ \frac{d}{dT_1} \left( \frac{C_2 a_2^2}{2} \right) + \frac{C_2 R_2 a_2^2}{2L_2} \right]. \quad (17.55)$$

Нетрудно убедиться, что величины в квадратных скобках представляют собой активные мощности, рассеиваемые на частотах  $\omega_{1,2}$ . Таким образом, (17.55) есть ничто иное, как одно из соотношений Мэнли–Роу. Отметим, что оно выполняется не только в установившемся режиме, но и в ходе переходного процесса (если только амплитуды меняются медленно).

Займемся анализом стационарного режима. Полагая  $a_j = a_{j0}$ ,  $\psi = \psi_0$ , где  $a_{j0}, \psi_0 = \text{const}$ , из уравнений (17.54) получаем

$$\begin{aligned} \gamma_1 a_{10} &= \frac{\omega_1 c_1}{C_1} F a_{20} \sin \psi_0, \\ \gamma_2 a_{20} &= \frac{\omega_2 c_1}{C_2} F a_{10} \sin \psi_0, \\ \delta + \frac{3c_2}{4} \left[ \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{2\omega_2}{C_2} \right) a_{10}^2 + \left( \frac{\omega_2}{C_2} + \frac{2\omega_1}{C_1} \right) a_{20}^2 + 8 \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{\omega_2}{C_2} \right) F^2 \right] + \\ &+ c_1 \left( \frac{\omega_1 a_{20}}{C_1 a_{10}} + \frac{\omega_2 a_{10}}{C_2 a_{20}} \right) F \cos \psi_0 = 0. \end{aligned} \quad (17.56)$$

Из первых двух уравнений системы (17.56) получаем следующие соотношения:

$$\frac{\gamma_1 C_1 a_{10}^2}{\gamma_2 C_2 a_{20}^2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (17.57)$$

$$\frac{\gamma_1 \gamma_2 C_1 C_2}{\omega_1 \omega_2 c_1^2 F^2} = \sin^2 \psi_0. \quad (17.58)$$

Уравнение (17.57), очевидно, представляет собой соотношение Мэнли–Роу для стационарного режима.

Исключив при помощи (17.57), (17.58) величины  $a_{20}$  и  $\psi_0$  из третьего уравнения системы (17.56), найдем уравнение резонансной кривой — зависимость амплитуды сигнала  $a_{10}$  от расстройки  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \left[ \delta + \frac{3c_2}{4} \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{2\omega_2}{C_2} + \frac{\gamma_1 C_1 \omega_2}{\gamma_2 C_2 \omega_1} \left( \frac{\omega_2}{C_2} + \frac{2\omega_1}{C_1} \right) \right) a_{10}^2 + 8 \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{\omega_2}{C_2} \right) F^2 \right]^2 = \\ = \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2}{C_1 C_2}} \left( \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} + \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \right) \left( c_1^2 F^2 - \frac{\gamma_1 \gamma_2 C_1 C_2}{\omega_1 \omega_2} \right). \end{aligned} \quad (17.59)$$

По своей структуре это выражение аналогично уравнению (17.19) для одноконтурного генератора. Поэтому подробно анализировать резонансные кривые и исследовать их на устойчивость нет необходимости. При учете диссипативного механизма ситуация становится несколько более сложной, поскольку соотношения Мэнли–Роу уже не выполняются: они неприменимы при наличии нелинейного затухания. Однако в целом отличия от одноконтурного генератора по-прежнему невелики.

#### 17.4. Резонансное взаимодействие связанных слабонелинейных осцилляторов

Важную роль в теории колебаний играют задачи о взаимодействии нелинейных осцилляторов. В то же время они имеют много общего с параметрическими колебаниями. Рассмотрим систему трех связанных осцилляторов, например три индуктивно связанных колебательных контура, содержащих нелинейные емкости (рис. 17.10). Если амплитуда колебаний настолько мала, что нелинейные эффекты не проявляются, то колебания представляют собой просто суперпозицию трех нормальных мод. Уравнения системы, записанные в нормальных координатах  $x_j$ , будут иметь вид

$$\ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j = 0, \quad (17.60)$$

где  $j=1,2,3$ ,  $\omega_j$  — нормальные частоты. Если же нелинейность необходимо учитывать, в правых частях системы (17.60) появятся нелинейные слагаемые, отвечающие за связь осцилляторов (линейная связь исключена при переходе к нормальным колебаниям). Будем полагать, что нелинейность достаточно слабая, так что можно ограничиться квадратичными членами (например, в разложении нелинейной характеристики емкости в ряд Тейлора достаточно учитывать только два первых члена  $q(u) \approx C_0 u + c_1 u^2$ ). Тогда вместо уравнений (17.60) будем иметь

$$\ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j = \varepsilon \sum_{k,l} \beta_{jkl} x_k x_l, \quad (17.61)$$

где  $j,k,l=1,2,3$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Понятно, что система (17.61) будет описывать широкий класс взаимодействующих слабонелинейных осцилляторов, независимо от их физической природы. Нетрудно также заметить аналогию с параметрическими колебаниями. Если, например, в начальный момент времени возбуждены колебания только одного из осцилляторов, то в первом приближении его движение можно считать заданным. Тогда для двух остальных будем иметь систему связанных параметрических осцилляторов.

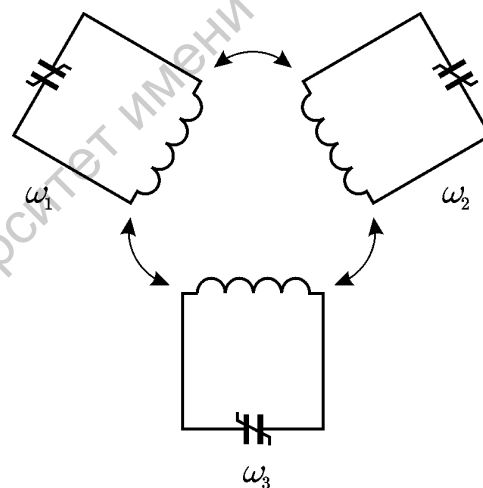


Рис. 17.10. Система трех связанных нелинейных колебательных контуров

Наибольший интерес, очевидно, представляют процессы *резонансного взаимодействия*, когда частоты осцилляторов  $\omega_j$  удовлетворяют резонансному условию

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad (17.62)$$

совпадающему с (17.37). В этом случае малые нелинейные слагаемые в правых частях (17.61) попадают в резонанс с собственными частотами. Таким образом, нелинейное взаимодействие играет принципиальную роль, и его уже нельзя рассматривать как малую поправку к линейным колебаниям.

Чтобы выяснить, какие новые нетривиальные эффекты появляются при наличии резонанса, представим решение системы (17.61) в виде квазигармонических колебаний  $x_j = A_j \exp(i\omega_j t) + \text{к.с.}$ , где  $A_j$  — медленно меняющиеся амплитуды, и получим укороченные уравнения. Ограничимся случаем точного резонанса (расстройка отсутствует). Поскольку вычисления в целом аналогичны описанным в предыдущих разделах, позволим себе сразу привести результат:

$$2i\omega_1 A_1' = \beta_{123} A_3 A_2^*, \quad 2i\omega_2 A_2' = \beta_{231} A_3 A_1^*, \quad 2i\omega_3 A_3' = \beta_{312} A_1 A_2. \quad (17.63)$$

Штрихи, как и выше, означают дифференцирование по медленному времени. Удобно произвести замену переменных

$$A_j \rightarrow 2A_j \sqrt{\frac{\omega_k \omega_l}{\beta_{kjl} \beta_{ljk}}}, \quad (17.64)$$

где  $j \neq k \neq l$ . Тогда система (17.63) принимает вид

$$iA_1' = A_3 A_2^*, \quad iA_2' = A_3 A_1^*, \quad iA_3' = A_1 A_2. \quad (17.65)$$

Вводя вещественные амплитуды и фазы  $A_j = a_j \exp(i\varphi_j)$ , окончательно получаем систему из четырех вещественных уравнений

$$\begin{aligned} a_1' &= a_2 a_3 \sin \Phi, \\ a_2' &= a_1 a_3 \sin \Phi, \\ a_3' &= -a_1 a_2 \sin \Phi, \\ \Phi' &= \left( \frac{a_2 a_3}{a_1} + \frac{a_1 a_3}{a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_3} \right) \cos \Phi, \end{aligned} \quad (17.66)$$

где  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2$ . Уравнения (17.65) допускают точное решение, выражающееся через эллиптические функции Якоби. Они играют важную роль в теории резонансного взаимодействия волн и подробно анализируются в книге «Нелинейные волны», входящей в состав настоящей серии. Здесь мы не будем приводить полное решение, а ограничимся результатами качественного анализа.

Прежде всего, отметим, что из первых трех уравнений системы (17.66) следуют законы сохранения

$$a_1^2 - a_2^2 = I_1, \quad a_1^2 + a_3^2 = I_2, \quad a_2^2 + a_3^2 = I_2 - I_1 \quad (17.67)$$

где  $I_{1,2} = \text{const}$ . Они являются аналогами соотношений Мэнли–Роу.

Найдем особые точки системы (17.65). Кроме тривиального (нулевого) состояния равновесия, которое интереса не представляет, уравнения (17.65) также имеют решения вида

$$A_j = A_0 = \text{const}, \quad A_k = A_l = 0, \quad (17.68)$$

соответствующие ситуации, когда первоначально возбуждены колебания только одного из осцилляторов. Исследуем эти решения на устойчивость. Вначале рассмотрим случай, когда отлична от нуля амплитуда одного из низкочастотных колебаний (для определенности  $j = 1$ ). Положим  $A_1 = A_0 + \alpha_1$ ,  $A_{2,3} = \alpha_{2,3}$ , где  $\alpha_{1,2,3}$  — малые возмущения. Тогда, линеаризуя второе и третье уравнения системы (17.65), получим

$$i\alpha_2' = A_0^* \alpha_3, \quad i\alpha_3' = A_0 \alpha_2. \quad (17.69)$$

Исключая отсюда  $\alpha_3$ , получим уравнение гармонического осциллятора

$$\alpha_2'' + |A_0|^2 \alpha_2 = 0. \quad (17.70)$$

Следовательно, решение (17.68) устойчиво и представляет собой состояние равновесия типа центр.

В случае, когда возбуждены колебания высокочастотного осциллятора, вместо (17.69) будем иметь

$$i\alpha_1' = A_0 \alpha_2^*, \quad i\alpha_2' = A_0 \alpha_1^*, \quad (17.71)$$

откуда следует уравнение

$$\alpha_2'' - |A_0|^2 \alpha_2 = 0. \quad (17.72)$$

Это уравнение описывает систему, находящуюся в состоянии с максимумом потенциальной энергии, на фазовой плоскости ей отвечает состояние равновесия типа седло. Таким образом, при  $j = 3$  решение (17.68) неустойчиво. Малые возмущения низкочастотных колебаний будут нарастать экспоненциально. Разумеется, экспоненциальный рост сохраняется лишь на начальном этапе, когда возмущения все еще можно считать малыми.

Дальнейшую эволюцию амплитуд можно предсказать, используя соотношения Мэнли–Роу (17.67), которые в данном случае принимают вид

$$|A_1|^2 - |A_2|^2 \approx 0, \quad |A_1|^2 + |A_2|^2 \approx |A_0|^2. \quad (17.73)$$

Отсюда видно, что нарастание амплитуд низкочастотных колебаний должно сопровождаться уменьшением амплитуды высокочастотного, которое играет роль накачки. Следовательно, нелинейные эффекты будут приводить к насыщению неустойчивости. Однако механизм ограничения отличается от тех, с которыми мы уже сталкивались (расстроечного и диссипативного). Его легче всего пояснить на языке обобщавшейся выше квантовой аналогии. Наряду с процессами распада квантов высокочастотного колебания, происходят также процессы слияния квантов на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с образованием кванта на час-

тоте  $\omega_3$ . На начальной стадии, когда амплитуда накачки велика, доминирует процесс распада. По мере истощения накачки и роста амплитуд низкочастотных колебаний (и, соответственно, роста числа квантов на этих частотах) начинают преобладать процессы слияния. В итоге происходит периодический обмен

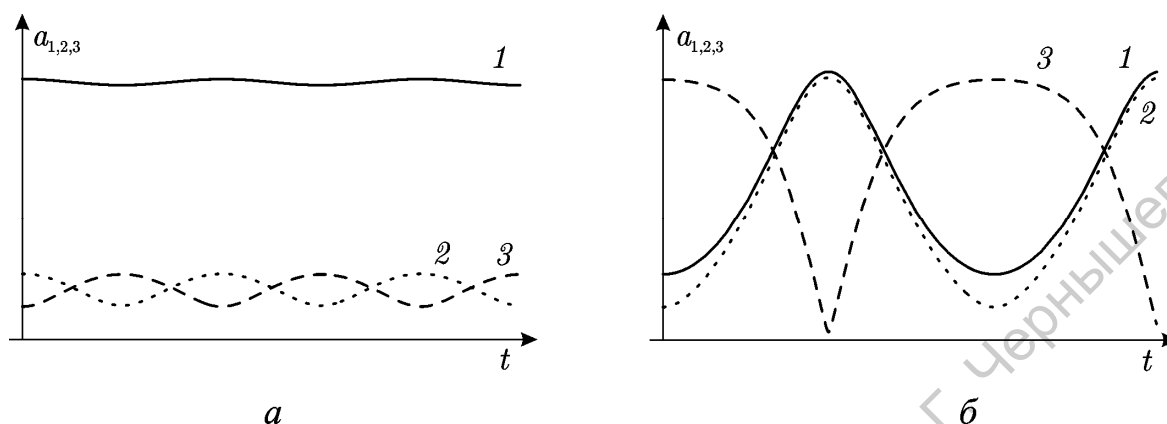


Рис. 17.11. Зависимости амплитуд колебаний от времени:  $a_1(0) \gg a_{2,3}(0)$  (а);  $a_3(0) \gg a_{1,2}(0)$  (б)

энергией между высоко- и низкочастотными колебаниями. В теории волн такую неустойчивость называют *распадной*. На рис. 17.11 приведены типичные зависимости амплитуд  $a_j = |A_j|$  от времени в случаях, когда в начальный момент времени доминирует амплитуда одного из низкочастотных колебаний и неустойчивости нет (а), и в случае, когда  $|A_3(0)| \gg |A_{1,2}(0)|$  и наблюдается интенсивная перекачка энергии от высокочастотного колебания к низкочастотным и обратно (б).

### 17.5. Оптические параметрические усилители и генераторы

Принцип параметрического усиления с успехом используется в оптическом диапазоне. Впервые *параметрические усилители и генераторы света* были предложены в 1962 г. С.А. Ахмановым и Р.В. Хохловым, а также независимо Н. Кроллом и Р. Кингстоном. Основное достоинство параметрических устройств по сравнению с оптическими квантовыми генераторами (лазерами) заключается в возможности перестройки частоты излучения в достаточно широких пределах, что важно, например, для спектроскопических исследований.

В отличие от систем, рассматривавшихся в данной главе, параметрическая генерация света осуществляется за счет взаимодействия не колебаний, а волн. Три электромагнитные волны, частоты и волновые векторы которых связаны резонансными соотношениями

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad (17.74)$$

$$k_1 + k_2 = k_3, \quad (17.75)$$



распространяются в диэлектрике, в котором поляризация нелинейным образом зависит от напряженности электрического поля. На языке квазичастиц соотношения (17.74), (17.75) представляют собой законы сохранения энергии и импульса в процессе распада кванта волны накачки на кванты сигнальной и холостой волн. В этом случае нарастание низкочастотных волн можно трактовать как параметрическую неустойчивость при распространении в периодически неоднородной среде, промодулированной высокочастотной волной накачки.

Мы не будем подробно обсуждать вопросы параметрического взаимодействия волн, поскольку этот материал содержится в соответствующих разделах книги «Нелинейные волны». Укажем лишь, что укороченные уравнения, описывающие динамику амплитуд волн, являются уравнениями в частных производных. Однако в случае, когда на границу нелинейной среды падают волны с постоянной амплитудой, устанавливается *стационарный режим* параметрического усиления, когда амплитуды перестают зависеть от времени. Стационарный режим описывается уравнениями, тождественными

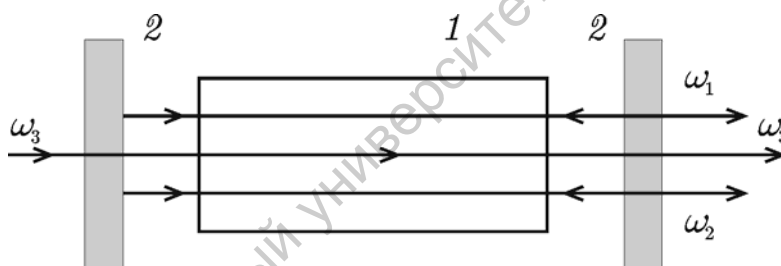


Рис. 17.12. Простейшая схема параметрического генератора света: 1 — нелинейный кристалл, 2 — зеркала

(17.65), но с тем отличием, что производные в этих уравнениях берутся не по времени, а по координате. Таким образом, результаты, полученные в предыдущем разделе, можно непосредственно перенести на случай стационарного режима усиления. Графики, приведенные на рис. 17.11, дают представление о том, как меняются амплитуды волн вдоль длины системы. В случае, когда амплитуда накачки на входе в систему велика (рис. 17.11б), возможно эффективное усиление. При этом длину кристалла нужно подобрать таким образом, чтобы на выходе достигалась максимальная перекачка энергии из высокочастотной волны в низкочастотные.

При *вырожденном резонансе*, когда  $\omega_1 = \omega_2$ , фактически происходит взаимодействие между основной волной и ее второй гармоникой. В этом случае возможно еще одно интересное явление: *генерация второй гармоники*. Действительно, когда на входе

в систему велика амплитуда низкочастотной волны, будет происходить интенсивная перекачка энергии во вторую гармонику. Именно генерацией второй гармоники объясняется один из наиболее впечатляющих нелинейно-оптических эффектов: превращение красного луча лазера в голубой при прохождении через кристалл, обладающий нелинейной диэлектрической восприимчивостью.

Для превращения параметрического усилителя в генератор необходимо обеспечить обратную связь. Обычно для этого кристалл помещают в резонатор Фабри–Перо, образуемый, например, двумя параллельными зеркалами. Зеркала, как правило, прозрачны на частоте накачки, но имеют высокий коэффициент отражения на частотах одной или обеих низкочастотных волн. Для того, чтобы осуществить частотно-селективное отражение, используют зеркала, состоящие из нескольких диэлектрических слоев, показатели преломления и толщина которых подбираются соответствующим образом. Простейшая схема генератора приведена на рис. 17.12.

## Лекция 18

**Автоколебательная система под внешним периодическим воздействием: синхронизация**

Рассмотрим некоторую нелинейную диссипативную систему, в которой реализуется режим периодических автоколебаний. Образом установившегося режима в фазовом пространстве будет предельный цикл — замкнутая фазовая траектория, к которой приближаются все другие траектории. Далее, введем дополнительно внешнее периодическое воздействие на систему, такое, что его временной период близок к периоду автономных колебаний. При этом обнаруживается замечательное явление: в определенном интервале частоты внешней силы колебания системы синхронизируются с внешним воздействием по частоте (или, что то же самое, по периоду), причем упомянутый частотный интервал (полоса синхронизации) тем шире, чем больше интенсивность воздействия. Этот эффект — *синхронизация внешней силой* наблюдается в системах самой разной природы — в радиотехнических и электронных устройствах, в лазерах, в механических системах, в колебательных химических реакциях, в биологических объектах. Кроме синхронизации на частоте воздействия может реализоваться также *синхронизация на гармониках и субгармониках*, когда частоты воздействия и отклика кратны друг другу или, в самом общем случае, находятся в некотором рациональном отношении.

Принципиальное значение для понимания эффекта синхронизации имеет то обстоятельство, что периодические автоколебания в отсутствие внешнего воздействия на систему характеризуются *фазой, различные значения которой равно допустимы*.

Если на систему, совершающую автоколебания, подействовать толчком, то она вновь придет в режим стационарных автоколебаний с той же амплитудой, но, вообще говоря, с другой фазой. Если же внешнее воздействие периодическое и осуществляется постоянно, то даже при малой его амплитуде возникающий сдвиг фазы может постепенно накапливаться, так что за достаточно большое время фаза окажется сдвинутой на большую величину.

Представим себе, что в одном интервале значений фазы собственных колебаний системы относительно внешнего воздействия эта фаза дрейфует в одну сторону, а в другом — в другую. Ясно, что в итоге система придет в точку, отвечающую смене на-

правления дрейфа относительной фазы, и там останется. Это и будет режим синхронизации.

Если мы имеем две слабо связанные автоколебательные системы, то можно сказать, что каждая из них осуществляет внешнее воздействие на другую. Результатом часто оказывается возникновение такого установившегося режима, в котором колебания в обеих системах происходят синхронно, с одной и той же частотой, с одним и тем же периодом. Это эффект *взаимной синхронизации связанных систем*. Впервые он был описан в XVII веке Христианом Гюйгенсом применительно к механическим автоколебательным системам — часам, причем связь между системами обеспечивается их закреплением на общем основании.

Существует легенда (правда, несколько сомнительной достоверности), что этот эффект использовали недобросовестные часовщики. Представьте себе, как должно было в XVII или XVIII веке впечатлять покупателя множество выставленных на продажу часов, которые все показывают в точности одно и то же время!

Если совокупность двух или более связанных автоколебательных элементов рассматривается как единая система, то их взаимную синхронизацию естественно трактовать как *внутреннюю синхронизацию* присущих этой системе колебательных мод («захват мод»).

Синхронизация имеет разнообразные и важные применения в технике. Если, например, мы имеем мощный электронный генератор, то частотой колебаний в нем можно эффективно управлять в определенных пределах, подавая относительно слабый внешний сигнал желаемой частоты. Обеспечить стабильность частоты маломощного вспомогательного генератора технически гораздо проще, но, благодаря эффекту синхронизации, в этом случае стабильной становится и частота мощного генератора. Представление о синхронизации позволяет объяснить или интерпретировать подчас очень интригующие и нетривиальные явления, такие как подстройка биологических ритмов живых организмов под внешнее воздействие (например, суточный цикл), синхронизация свечения скопления светлячков, синхронизация хлопков при аплодисментах в театре и т.д.

В современной нелинейной динамике сформировался гораздо более широкий взгляд на синхронизацию, нежели в классической теории колебаний. Действительно, как мы теперь знаем, автоколебания могут быть представлены не только периодическими, но и более сложными режимами, в том числе квазипериодическими и хаотиче-

скими. При каждой возможной комбинации типов режима в воздействующей и ведомой системах может возникнуть такая ситуация, что динамика второй системы воспроизведет определенные характеристики динамики первой. В этом случае мы вправе говорить о синхронизации в некотором обобщенном смысле. При однонаправленной связи подсистем это можно интерпретировать как синхронизацию системы внешним сигналом — регулярным или хаотическим. При наличии взаимного воздействия двух систем друг на друга может возникать множество разнообразных режимов взаимной синхронизации.

К настоящему времени в литературе накоплен обширный материал, относящийся к указанному кругу вопросов. Введено представление о таких феноменах как обобщенная взаимная синхронизация хаотических систем (Афраймович, Веричев, Рабинович, 1986, Pecora and Carroll, 1990), хаотическая синхронизация при однонаправленной связи (Анищенко, Рабинович и др., 1986, 1996), фазовая синхронизация хаотических систем, синхронизации не взаимодействующих систем в присутствии воздействующего на них идентичного шумового сигнала (Пиковский, 1984, Grebogi et al., 1990). В системах с квазипериодическим внешним воздействием выявлена возможность возникновения странного нехаотического аттрактора (Grebogi et al., 1984), что может рассматриваться как своего рода сценарий разрушения режима синхронизации.

Различные аспекты обобщенной синхронизации привлекают внимание, в частности, с точки зрения возможных приложений. Например, системы с однонаправленной связью, подсистемы которых генерируют синхронный хаос, рассматриваются как основа коммуникационных систем, использующих хаотические сигналы. Большой интерес вызывает возможность осуществления синхронизации внешним воздействием различных биологических процессов (сердечный ритм, ритмы мозга, дыхательный ритм), что может привести к нетривиальным возможностям использования, в том числе в медицине.

В данной лекции мы ограничимся обсуждением классической синхронизации периодических автоколебаний внешним воздействием, которая, по сути дела, может рассматриваться как фундамент для дальнейших обобщений. Для ознакомления с другими упомянутыми выше проявлениями феномена синхронизации, способами их описания, возможными приложениями, мы отсылаем читателя к обширной специализированной литературе.

### 18.1. Осциллятор Ван дер Поля под периодическим внешним воздействием. Исходная модель и укороченное уравнение для медленной амплитуды

Как указывалось в предыдущих лекциях, простейшая модель автоколебательной системы с двумерным фазовым пространством описывается уравнением Ван дер Поля. Добавим в это уравнение внешнее периодическое воздействие, дописав дополнительный член, зависящий от времени по гармоническому закону:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \omega t. \quad (18.1)$$

Здесь параметр  $b$  определяет безразмерную амплитуду, а  $\omega$  – частоту воздействия, отнесенную к частоте малых собственных колебаний осциллятора. Если система находится недалеко от порога возникновения автоколебаний ( $\lambda$  невелико), амплитуда колебаний и амплитуда воздействия малы, а частота воздействия близка к частоте малых колебаний ( $\omega$  близко к 1), то можно воспользоваться каким-либо вариантом метода медленно меняющихся амплитуд, например, методом Ван дер Поля (лекция 9).

Будем искать решение уравнения (18.1) в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой  $A(t)$

$$x(t) = \operatorname{Re} \left( A(t) e^{i\omega t} \right) = \left( A(t) e^{i\omega t} + A^*(t) e^{-i\omega t} \right) / 2, \quad (18.2)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Как обычно, на комплексную амплитуду  $A$  удобно наложить дополнительное условие

$$\dot{A} e^{i\omega t} + \dot{A}^* e^{-i\omega t} = 0. \quad (18.3)$$

Вычислим величины  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  (см. формулы (9.76), (9.77)) и подставим эти выражения в уравнение (18.2), учитывая, что  $b \sin \omega t = b [-i \exp(i\omega t) + i \exp(-i\omega t)] / 2$ . Далее умножим обе части на  $\exp(-i\omega t)$  и проведем усреднение за период, считая комплексную амплитуду  $A$  медленно меняющейся функцией времени. В результате приходим к укороченному уравнению

$$\dot{A} + i \frac{(\omega^2 - 1)}{2\omega} A = \frac{\lambda A}{2} - \frac{|A|^2 A}{8} - \frac{b}{2\omega}. \quad (18.4)$$

Мы получили уравнение (18.4) в результате определенных преобразований, имея в виду приближенное описание динамики исходной системы — уравнения Ван дер Поля с внешним воздействием. Однако можно посмотреть на него иначе, как на самостоятельный объект исследования. В конце концов,

уравнение (18.4) непосредственно задает определенную автоколебательную систему с периодическим внешним воздействием. Желая провести исследование синхронизации в какой-либо подходящей модельной задаче, мы вправе обратиться именно к этому осциллятору.

Далее удобно ввести перенормированные величины с тем, чтобы уменьшить количество параметров в уравнении. Заметим, что нас интересует случай, когда автономная система совершает автоколебания, т.е.  $\lambda > 0$ . Полагая

$$\tau = \frac{\lambda t}{2}, \quad z = \frac{A}{\sqrt{4\lambda}}, \quad \Delta = \frac{(\omega^2 - 1)}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{b}{2\omega\lambda^{3/2}}, \quad (18.5)$$

перепишем уравнение (18.4) в новых переменных

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon, \quad (18.6)$$

где теперь точка означает производную по  $\tau$ , параметр  $\varepsilon$  характеризует амплитуду внешнего воздействия, а  $\Delta$  — отстройку частоты воздействия от собственной частоты автоколебаний. Часто бывает удобно представить комплексную амплитуду в виде  $z = R \exp(i\varphi)$ . Тогда из уравнения (18.6) получаем

$$\dot{R}e^{i\varphi} + iR\dot{\varphi}e^{i\varphi} + i\Delta Re^{i\varphi} = Re^{i\varphi} - R^3 e^{i\varphi} - \varepsilon. \quad (18.7)$$

Умножим уравнение (18.7) на  $e^{-i\varphi}$  и отделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + (\varepsilon/R) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (18.8)$$

Полученная система дифференциальных уравнений имеет второй порядок и допускает дальнейшее аналитическое исследование. Мы отложим это исследование на время, а пока рассмотрим возможность дальнейшего упрощения задачи.

## 18.2. Приближение малых амплитуд воздействия и уравнение для фазы

Предположим, что амплитуда воздействия невелика, т.е. параметр  $\varepsilon$  мал.<sup>1</sup> В нулевом порядке по  $\varepsilon$  из первого уравнения (18.8) найдем амплитуду установившихся колебаний  $R = 1$  и подставим ее во второе уравнение. (Поскольку во втором уравнении соответ-

<sup>1</sup> Параметр  $\varepsilon$  определен через отношение величин  $b$  и  $\lambda^{3/2}$ , которые для применимости метода медленно меняющихся амплитуд *обе должны быть малыми*. Однако *соотношение между ними* мы вправе задать любым, в частности, определить его так, чтобы параметр  $\varepsilon$  был малым. Это обеспечено при  $b \ll \lambda^{3/2}$ . Условие применимости рассматриваемого приближения будет, следовательно, *двойное неравенство*  $b \ll \lambda^{3/2} \ll 1$ .

вующий член содержит множитель  $\varepsilon$ , при этой подстановке мы вправе использовать нулевой порядок аппроксимации для  $R$ .) В результате приходим к замкнутому уравнению для единственной переменной — фазы колебаний системы по отношению к внешнему воздействию:

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \cdot \sin \varphi \quad (18.9)$$

В зарубежной литературе его называют *уравнением Адлера*.

Введем функцию  $U(\varphi) = \varphi\Delta + \varepsilon \cdot \cos \varphi = \Delta \cdot [\varphi + (\varepsilon/\Delta) \cos \varphi]$  и перепишем уравнение (18.9) в виде  $\dot{\varphi} = -\partial U/\partial \varphi$ . С точки зрения формы потенциальной функции, существ-

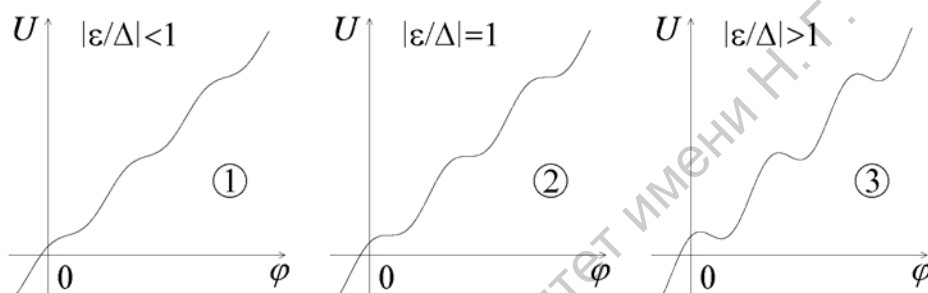


Рис. 18.1. График потенциальной функции при различных значениях  $|\varepsilon/\Delta|$

венной является ее зависимость от отношения  $\varepsilon/\Delta$ . При  $|\varepsilon/\Delta| < 1$  потенциал монотонно зависит от  $\varphi$ . При  $|\varepsilon/\Delta| = 1$  зависимость от фазы еще монотонная, но приобретает точки

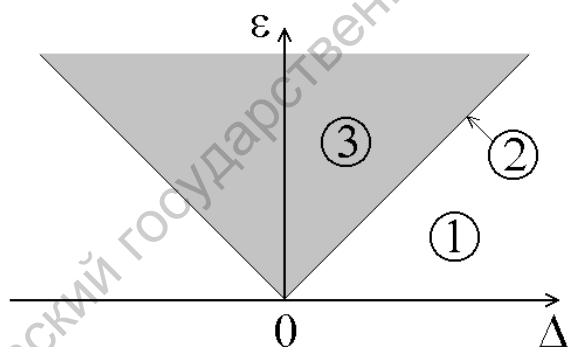


Рис. 18.2. Область синхронизации или язык Арнольда (серый цвет) на плоскости расстройка частот  $\Delta$  — амплитуда воздействия  $\varepsilon$

перегиба, где касательная горизонтальна, а график локально имеет вид кубической параболы (критическая ситуация). Наконец, при  $|\varepsilon/\Delta| > 1$  потенциальная функция становится неоднозначной, имеет максимумы и минимумы (рис. 18.1). На рис. 18.2 показаны области, где реализуется первая и третья ситуации на плоскости па-

раметров  $(\Delta, \varepsilon)$ . Критическая ситуация имеет место на разграничивающих линиях  $\Delta = \pm \varepsilon$ .



Динамику фазы можно наглядно представить, как скольжение частицы по потенциальному профилю в вязкой жидкости (рис. 18.3). При  $|\varepsilon/\Delta| < 1$  будет иметь место однонаправленное движение, скорость которого осциллирует, причем период осцилля-

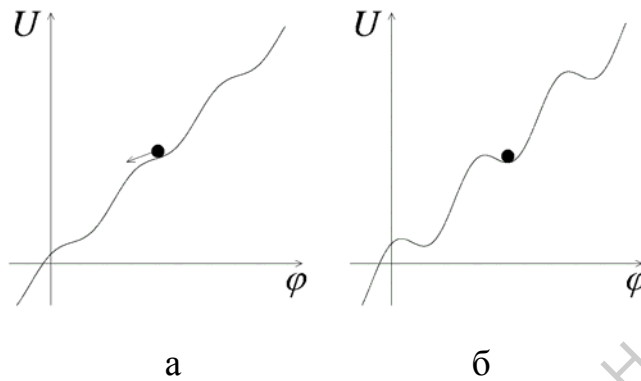


Рис. 18.3. Динамика фазы по аналогии со скольжением частицы по потенциальному профилю в вязкой жидкости: (а) при  $|\varepsilon/\Delta| < 1$ , когда синхронизации нет (частица соскальзывает вниз), и (б) при  $|\varepsilon/\Delta| > 1$ , когда фаза колебаний системы становится фиксированной по отношению к фазе воздействия (частица останавливается в потенциальном минимуме).

ций стремится к бесконечности по мере приближения к критической ситуации. При  $|\varepsilon/\Delta| > 1$  «частица» должна будет остановиться в одном из минимумов потенциальной функции, что соответствует режиму синхронизации: фаза колебаний системы относительно фазы воздействия перестает меняться во времени. Точка остановки определяется формально из условия минимума потенциала,  $U'(\varphi) = 0$ ,  $U''(\varphi) > 0$ , т.е.  $\sin \varphi_0 = \Delta/\varepsilon$ ,  $\cos \varphi_0 < 0$ .

Если мы фиксируем амплитуду воздействия  $\varepsilon$  и изменяем его частоту (т.е. параметр  $\Delta$ ), то синхронизация достигается в определенном интервале значений расстройки  $|\Delta| < \varepsilon$ . Это полоса синхронизации. Ее ширина в рассматриваемом приближении увеличивается прямо пропорционально амплитуде воздействия. Область (зону) в форме языка на плоскости параметров  $(\Delta, \varepsilon)$ , отвечающую режиму синхронизации, называют также *языком Арнольда*.

Разберемся, что происходит при изменении параметра расстройки, когда мы пересекаем границу языка Арнольда. Для этого проанализируем уравнение (18.9) графически — изобразим график функции  $\sin \varphi$  и проведем горизонтальную линию на уровне  $\Delta/\varepsilon$  (рис. 18.4). Пусть сначала  $\Delta/\varepsilon < 1$ . В области фаз, где синусоида поднимается

выше этой прямой, правая часть уравнения положительна, т.е.  $\dot{\varphi} > 0$ , и, следовательно, фазовая переменная  $\varphi$  нарастает во времени. В области, где она проходит ниже проведенной прямой, правая часть отрицательна,  $\dot{\varphi} < 0$ , и фазовая переменная  $\varphi$  убывает. Точки, где прямая пересекается с синусоидой, отвечают состояниям равновесия, одно из них устойчивое, а другое неустойчивое. При увеличении  $\Delta/\varepsilon$  горизонтальная прямая располагается все выше, и обе точки равновесия приближаются друг к другу. В момент  $\Delta/\varepsilon = 1$  они сливаются, и затем, при  $\Delta/\varepsilon > 1$ , исчезают.

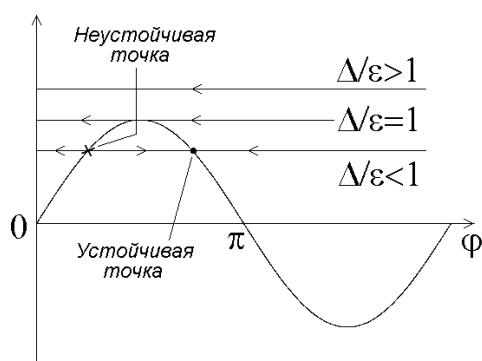


Рис. 18.4. К пояснению природы бифуркации на границе области синхронизации. Показан график функции  $\sin \varphi$  и горизонтальные линии на уровне  $\Delta/\varepsilon$ , когда эта величина меньше, равна, и больше единицы. Стрелки показывают направление изменения фазовой переменной во времени

Итак, внутри языка Арнольда (при  $|\Delta| < \varepsilon$ ) установившийся режим системы — это синхронизованное состояние, которому отвечает устойчивая неподвижная точка уравнения (18.9). В этом режиме амплитуда колебаний постоянна, а частота равна частоте внешнего воздействия (фаза  $\varphi$  не меняется во времени).

### 18.3. Квазипериодическая динамика: режим биений

Изучим характер режима, реализующегося за пределами области синхронизации (при  $|\Delta| > \varepsilon$ ). Это нетрудно, поскольку дифференциальное уравнение (18.9) удастся решить аналитически. Будем считать для определенности, что  $|\Delta| > 0$ . Применим метод разделения переменных: перепишем уравнение как  $\frac{d\varphi}{-\Delta + \varepsilon \sin \varphi} = d\tau$ , и проведем интегрирование:

$$\int \frac{d\varphi}{-\Delta + \varepsilon \sin \varphi} = \int d\tau. \quad (18.10)$$

Учитывая, что  $\Delta > \varepsilon$ , вычисляем фигурирующий здесь табличный интеграл и получаем

$$\frac{2}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(-\Delta - \varepsilon) \operatorname{tg}(\varphi/2 - \pi/4)}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}} = \tau. \quad (18.11)$$

Мы положили константу интегрирования равной нулю; тем самым фиксируются определенные начальные условия, а именно,  $\varphi|_{\tau=0} = \pi/2$ . Любое другое решение будет отличаться только временным сдвигом. Выражая из (18.11)  $\operatorname{tg}(\varphi/2 - \pi/4)$ , находим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{\Delta - \varepsilon}{\Delta + \varepsilon}} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau}{2}\right) \quad (18.12)$$

или

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{\Delta - \varepsilon}{\Delta + \varepsilon}} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau}{2}\right) \right]. \quad (18.13)$$

Если формально строить зависимость фазы от времени, следуя формуле (18.13), то она будет иметь скачки. Их можно избежать путем добавки к фазе величины  $(\pm 2\pi)$ , что соответствует переходу на другую ветвь многозначной функции, каковой является арктангенс.

Даваемая выражением (18.13) зависимость фазы от времени имеет вид осцилляций периода  $T = 2\pi/\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}$ , наложенных на линейный дрейф фазы со средней скоростью

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \begin{cases} -\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}, & \Delta > 0 \\ \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}, & \Delta < 0 \end{cases} \quad (18.14)$$

(рис. 18.5). В непосредственной близости от границы языка можно наблюдать участки почти постоянной фазы, разделенные относительно короткими участками «проскальзывания» фазы, где она меняется на величину близкую к  $2\pi$ . Трансформация зависимости фазы при приближении к границе зоны синхронизации состоит в увеличении участков постоянства фазы.

**Задача 18.1.** Получите выражение для средней скорости изменения фазы вне языка синхронизации.

*Решение.* Усредним обе части уравнения (18.9) за период осцилляций  $T = 2\pi/\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}$  и подставим в правую часть выражение для  $\sin \varphi$  из (18.12). Имеем:

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = -\Delta + \langle \sin \varphi \rangle = -\Delta + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\Delta \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau}{2}\right) + \varepsilon}{\Delta + \varepsilon \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau}{2}\right)} d\tau.$$

Вычисление интеграла приводит к соотношению (18.14).

Вспомним теперь, что мы искали приближенное решение уравнения (18.9). Исходная динамическая переменная  $x$  выражается через комплексную амплитуду  $z = R \exp(i\varphi) \approx \exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , т.е. в действительности нам нужна не сама по

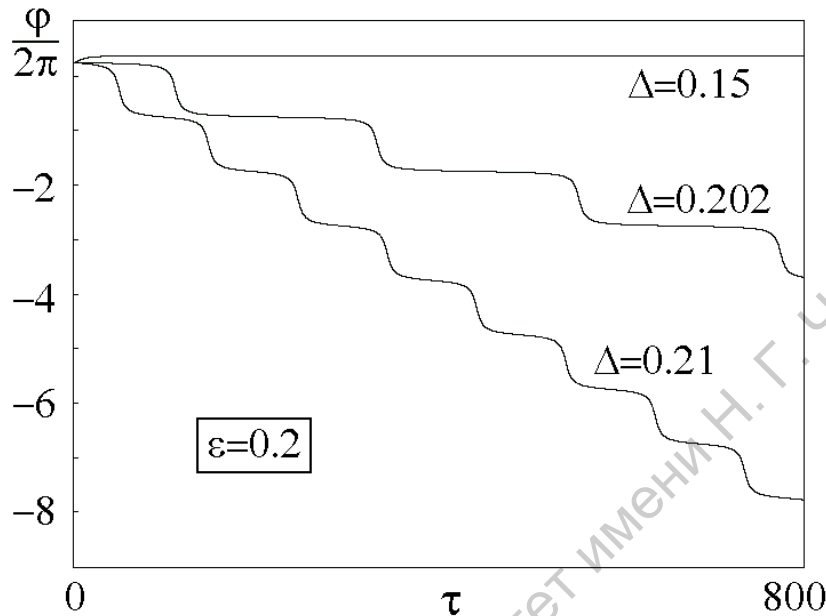


Рис. 18.5. Зависимость фазы от времени при  $\varepsilon=0.2$  внутри языка синхронизации ( $\Delta=0.15$ ) и вне языка в непосредственной близости от границы ( $\Delta=0.202$ ) и в несколько большей удаленности от нее ( $\Delta=0.21$ )

себе величина  $\varphi$ , а ее синус и косинус. Используя известные выражения тригонометрических функций через тангенс половинного угла и подставляя его из (18.12), получаем:

$$\cos \varphi = -\sin \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{2 \operatorname{tg} \left( \varphi/2 - \pi/4 \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \varphi/2 - \pi/4 \right)} = \frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \sin \left( \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau \right)}{\Delta + \varepsilon \cos \left( \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau \right)}, \quad (18.15)$$

$$\sin \varphi = \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \varphi/2 - \pi/4 \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \varphi/2 - \pi/4 \right)} = \frac{\Delta \cos \left( \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau \right) + \varepsilon}{\Delta + \varepsilon \cos \left( \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau \right)}, \quad (18.16)$$

так что

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} A e^{i\omega_0 t} = 2\sqrt{\lambda} \operatorname{Re} z e^{2i\omega_0 \tau/\lambda} = 2\sqrt{\lambda} \left[ \cos \varphi \cos \left( \frac{2\omega_0 \tau}{\lambda} \right) - \sin \varphi \sin \left( \frac{2\omega_0 \tau}{\lambda} \right) \right] = \\ &= 2\sqrt{\lambda} \frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \sin \left( \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau \right) \cos \left( \frac{2\omega_0 \tau}{\lambda} \right) - \left( \Delta \cos \left( \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau \right) + \varepsilon \right) \sin \left( \frac{2\omega_0 \tau}{\lambda} \right)}{\Delta + \varepsilon \cos \left( \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau \right)} \end{aligned} \quad (18.17)$$

Процесс, описываемый выражением (18.17), содержит две частоты, отвечающие быстрым и медленным колебаниям, соответственно,

$$\Omega_0 = 2\omega/\lambda \text{ и } \Omega_1 = \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}. \quad (18.18)$$

Они могут находиться в произвольном, в том числе иррациональном соотношении. Тогда мы имеем дело не с периодическим, а с квазипериодическим колебательным процессом. Такой колебательный режим, реализующийся вне языка синхронизации, назы-

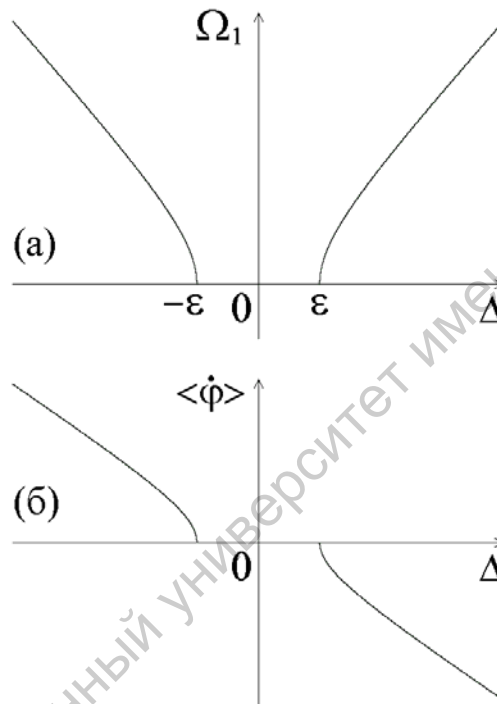


Рис. 18.6 Зависимость частоты биений (а) и средней скорости изменения фазы (б) от параметра расстройки частот  $\Delta$

вают *режимом биений*. На рис. 18.6 представлены зависимости частоты биений и средней скорости изменения фазы от параметра  $\Delta$ .

#### 18.4. Бифуркации, сопровождающие возникновение синхронизации, на фазовой плоскости укороченного уравнения

Наше рассмотрение в предыдущих двух разделах относилось к случаю малых амплитуд и основывалось на уравнении первого порядка для фазы. Теперь мы намерены вернуться к исходному укороченному уравнению (18.6), анализ которого вскрывает более широкую картину явлений, сопровождающих эффект синхронизации. На рис. 18.7 показан вид плоскости параметров  $(\Delta, \varepsilon)$ , получаемый при анализе уравнения (18.6).

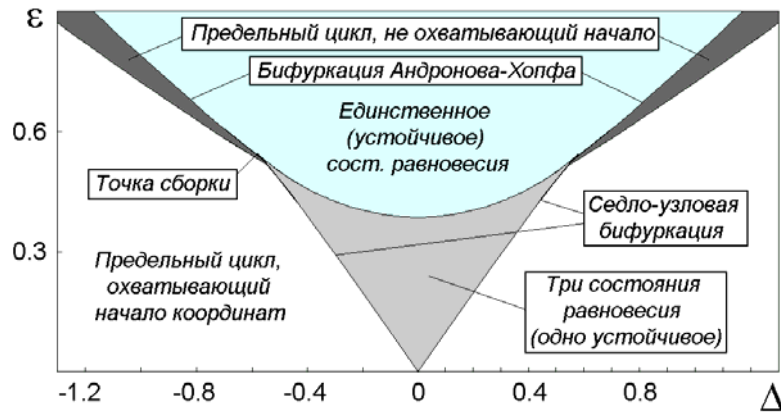


Рис. 18.7. Бифуркационные линии и области различных режимов на плоскости параметров расстройки частоты — амплитуда внешнего воздействия для укороченного уравнения (18.6)

Начнем с того, что установим связь с уже изученным случаем: проследим, что происходит на фазовой плоскости укороченного уравнения ( $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ ), когда мы переходим границу области синхронизации при малой амплитуде воздействия.

Если внешнее воздействие выключено,  $\varepsilon = 0$ , и расстройка  $\Delta$  велика, то на фазовой плоскости укороченного уравнения имеется замкнутая траектория – устойчивый предельный цикл, представленный окружностью единичного радиуса, к которому асимптотически приближаются другие траектории. Имеется также неустойчивый фокус в начале координат (рис. 18.8а). Качественно таким же образом устроена при большой расстройке фазовая плоскость и в присутствии внешнего воздействия (рис. 18.8б). По мере уменьшения параметра  $\Delta$  неустойчивая точка вблизи начала координат становится узлом (рис. 18.8в). Что касается движения на предельном цикле, то при приближении на плоскости параметров к границе области синхронизации, в одном определенном месте предельного цикла перемещение изображающей точки по нему становится очень медленным, и она вообще останавливается, когда мы приходим на границу зоны. При входе в область синхронизации на фазовой плоскости по-прежнему присутствует замкнутая инвариантная кривая (кривая, составленная из фазовых траекторий) — бывший предельный цикл. Но теперь она содержит два куска, по которым движение происходит в противоположных направлениях. На этой кривой имеется две неподвижные точки, одна устойчивая (узел), а другая неустойчивая (седло) (рис. 18.8г).

Бифуркация, которую мы здесь имеем, носит название седло-узловой или касательной бифуркации. (Второй термин предпочтителен, когда рассмотрение ведется в одномерном приближении: происхождение его можно пояснить с привлечением рис. 18.4: бифуркация как раз соответствует моменту касания прямой и синусоиды.) В

нижней части языка синхронизации, которая показана серым цветом на рис. 18.7, мы имеем на фазовой плоскости в общей сложности три неподвижные точки — две неустойчивые и одну устойчивую. При приближении к верхней границе этой области две

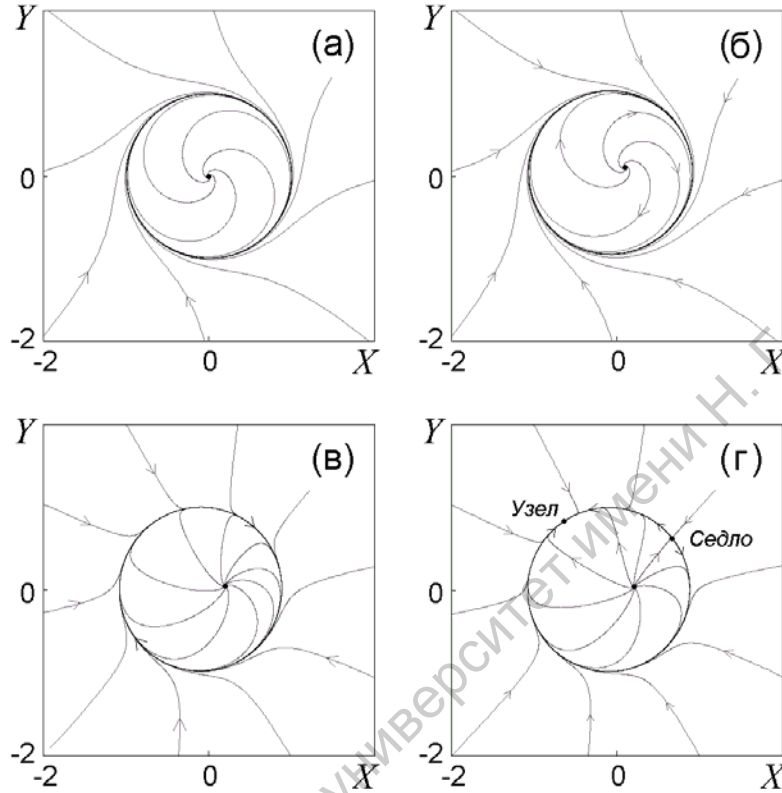


Рис. 18.8. Фазовая плоскость уравнения (18.6): в отсутствие внешнего воздействия (а); при малом воздействии, соответственно, вдали границы языка синхронизации, вблизи границы, и внутри языка (б), (в), (г)

неустойчивые точки: седло, расположенное на инвариантной замкнутой кривой и неустойчивая точка, расположенная внутри этой кривой, начинают сближаться. Затем они сливаются и исчезают, после чего на фазовой плоскости остается устойчивая единственная точка (узел), отвечающая за установившийся режим синхронизованных колебаний.

Будем теперь снова увеличивать параметр расстройки  $\Delta$ . В некоторый момент мы обнаружим, что устойчивый узел превращается в фокус, соответствующие собственные числа линеаризованного уравнения становятся комплексными. Затем действительная часть пары комплексно сопряженных собственных чисел становится положительной, и это соответствует моменту бифуркации Андронова–Хопфа: фокус становится неустойчивым, а в его окрестности рождается притягивающий предельный цикл.

Пока этот предельный цикл «маленький» и не охватывает начало координат, основная частота в спектре колебаний по-прежнему совпадает с частотой воздействия, так что говорить о разрушении синхронизации пока еще рано. Но это уже другая разновидность синхронного режима, когда на фоне колебаний с частотой воздействия появляются колебания на другой частоте, выбираемой самой нашей автоколебательной сис-

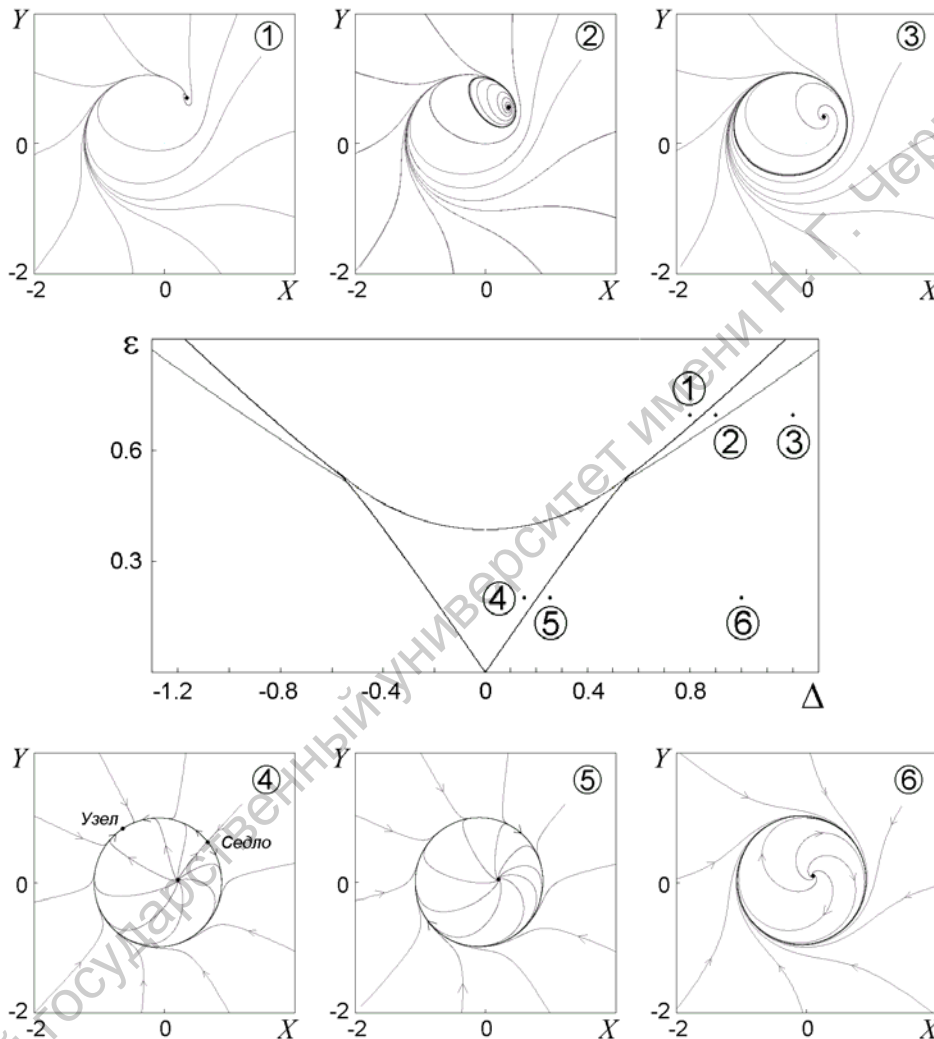


Рис. 18.9. Вид плоскости параметров  $(\Delta, \varepsilon)$  для уравнения (18.6) и фазовые портреты в нескольких характерных точках, иллюстрирующие два качественно разных механизма разрушения синхронизации: при малых и больших амплитудах воздействия

темой. При дальнейшем увеличении расстройки наступает ситуация, когда предельный цикл охватывает начало координат, теперь основной частотой в спектре служит частота, порождаемая самой системой, и синхронизация отсутствует. Таким образом, граница области синхронизации в этом случае — это линия на плоскости параметров, определяемая условием того, что предельный цикл проходит через начало координат. (Най-



ти эту линию удастся только посредством численного интегрирования уравнений с подбором параметра  $\Delta$  для каждого заданного  $\varepsilon$  с тем, чтобы выполнялось указанное условие.)

На рис. 18.9 воспроизведен вид плоскости параметров  $(\Delta, \varepsilon)$  для уравнения (18.6) и фазовые портреты в нескольких характерных точках. Они иллюстрируют два качественно разных механизма разрушения синхронизации — через седло-узловую бифуркацию при малых амплитудах воздействия и через рождение режима модулированных колебаний при больших амплитудах.

В узкой промежуточной области в районе  $\varepsilon \approx 0.5$  наблюдается сложная картина бифуркаций, выявляемая достаточно тонким двухпараметрическим анализом. Этой области мы в данном курсе касаться не будем, читатель может ознакомиться с соответствующими результатами, обратившись к специальной литературе (см., например, книгу Гукенхаймера и Холмса).

### **18.5. Синхронизация осциллятора Ван дер Поля: численный эксперимент**

В какой мере результаты, полученные в рамках метода медленно меняющихся амплитуд применимы для описания синхронизации в исходном уравнении Ван дер Поля (18.1)? Оказывается, что в достаточно широкой области параметров наблюдается разумное качественное соответствие. На рис. 18.10 приводятся результаты численного решения уравнения (18.1) для  $\lambda = 0.5$  при малой амплитуде воздействия  $b = 0.2$ , а на рис. 18.11 — при достаточно большой амплитуде  $b = 0.7$ . Приводятся также спектры генерируемого системой сигнала: такие спектры в реальном эксперименте можно наблюдать на экране специального прибора — спектроанализатора.

Обратите внимание, как изменяется в этих двух случаях характер наблюдаемой временной зависимости в режиме биений, когда мы выходим из области синхронизации при увеличении частоты воздействия.

В первом случае, при малой амплитуде воздействия, модуляция сигнала первоначально возникает с очень большим характерным временным периодом, а затем этот период уменьшается. В спектре наблюдается набор большого числа близко расположенных составляющих, которые постепенно «раздвигаются» при увеличении расстройки частот.

Во втором случае, при достаточно большой амплитуде воздействия, режим биений возникает как модуляция сигнала с определенным конечным периодом. (Колеба-

ния с этим периодом наблюдаются даже внутри области синхронизации, вблизи от ее края, хотя здесь они являются затухающими.) В спектре новая составляющая на частоте, отличной от частоты воздействующего сигнала, появляется на конечном удалении

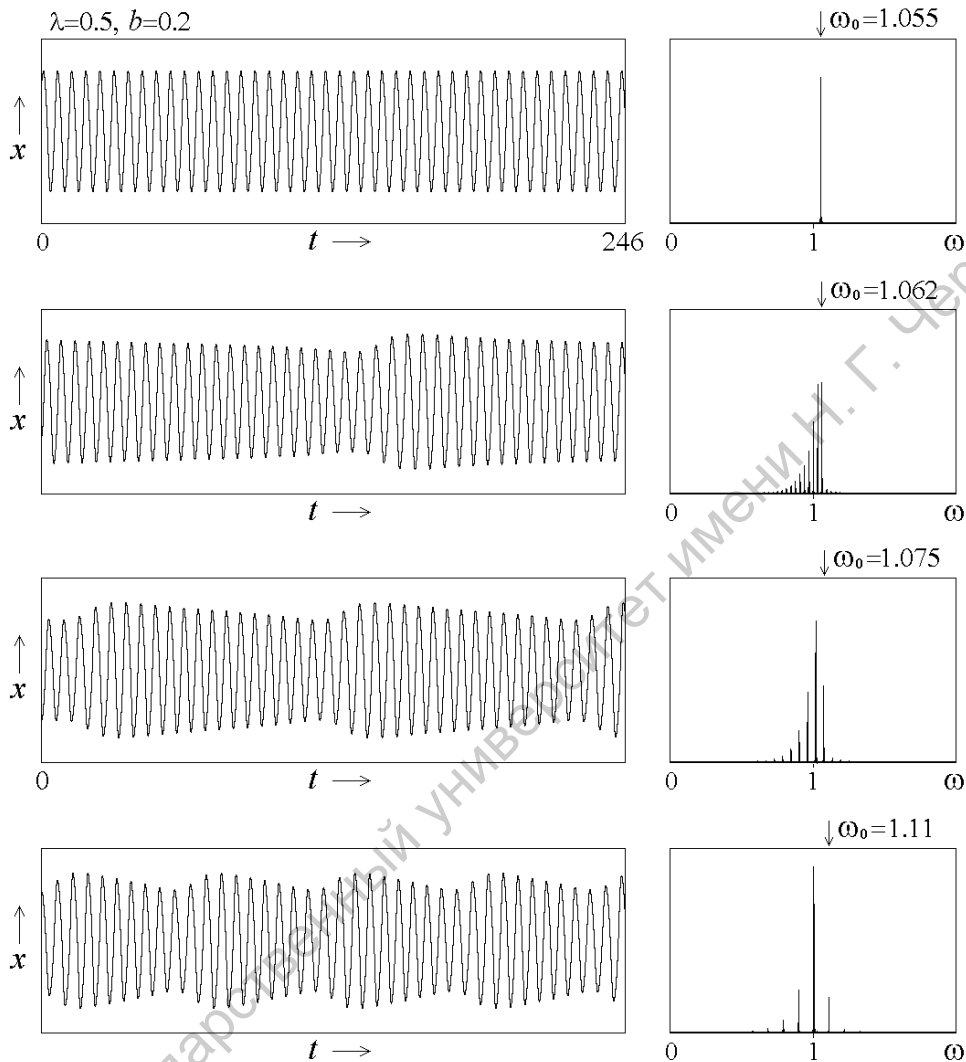


Рис. 18.10. Слева — полученные численно зависимости динамической переменной от времени для системы Ван дер Поля (уравнение (18.1)) при малой амплитуде внешнего воздействия, справа — соответствующие спектры. Частота воздействия показана стрелочкой. Самая верхняя картинка отвечает режиму синхронизации, остальные — режимам биений.

от нее, имеет сначала очень малую амплитуду, далее она увеличивается, и в какой-то момент становится больше, чем амплитуда на частоте внешнего воздействия.

Описанные явления хорошо укладываются в картину, выявленную методом медленно меняющихся амплитуд. Тем не менее, возможны режимы, когда метод медленно меняющихся амплитуд заведомо не работает (при больших  $\lambda$  и  $b$ ), а динамика

уравнения Ван дер Поля с внешним периодическим воздействием может быть весьма сложной и, в частности, хаотической.

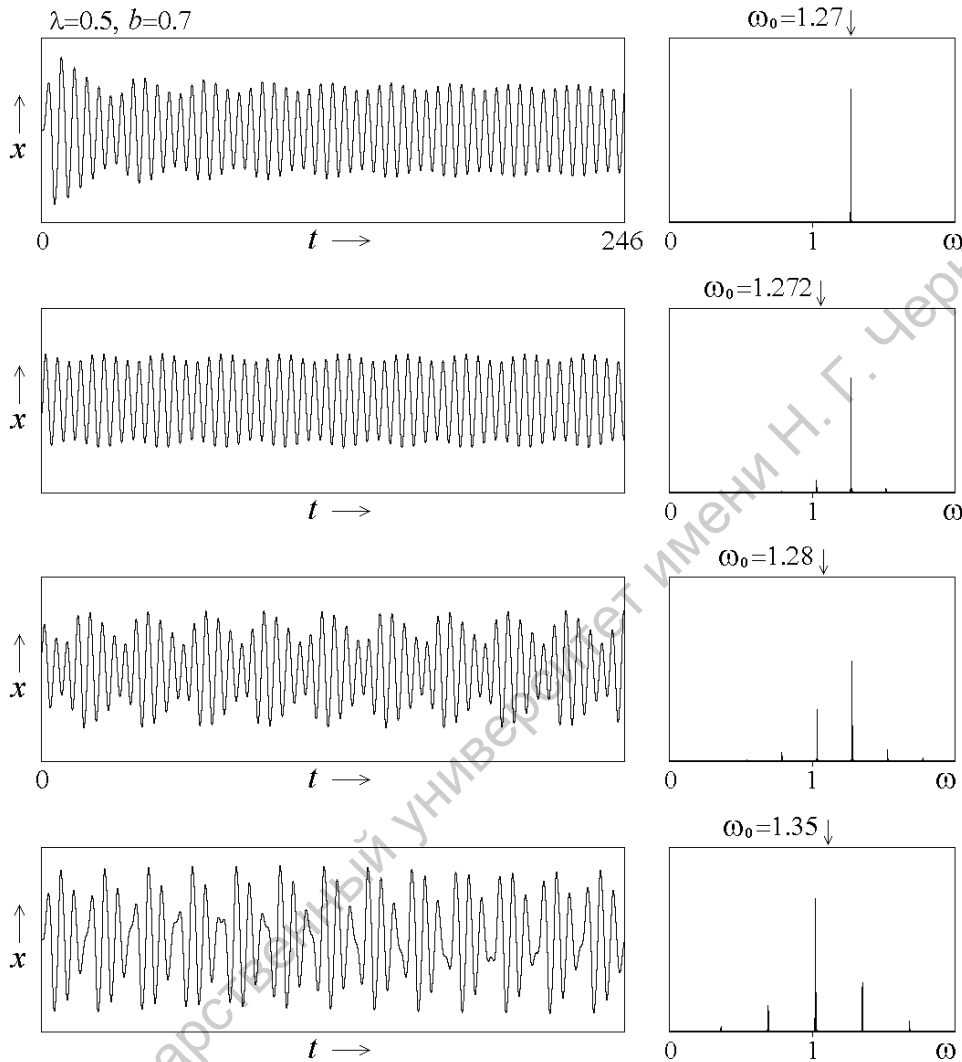


Рис. 18.11. Слева — полученные численно зависимости динамической переменной от времени для системы Ван дер Поля (уравнение (18.1)) при большой амплитуде внешнего воздействия, справа — соответствующие спектры. Частота воздействия показана стрелочкой. Самая верхняя картинка отвечает режиму синхронизации. Показана временная зависимость, отвечающая процессу установления режима синхронизации, чтобы продемонстрировать характерные для данной ситуации затухающие осцилляции огибающей сигнала.

**Задача 18.2.** Постройте фазовые портреты укороченного уравнения Ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием в окрестности точки сборки.

*Решение.* Искомые портреты показаны на рис. 18.12. Отметим, что из точки  $O$  выходит не только линия бифуркации Андронова–Хопфа, но и линия нелокальной бифуркации  $OS$ , отвечающая влипанию предельного цикла в сепаратрису седла: переход от фазового портрета 3 к 4.

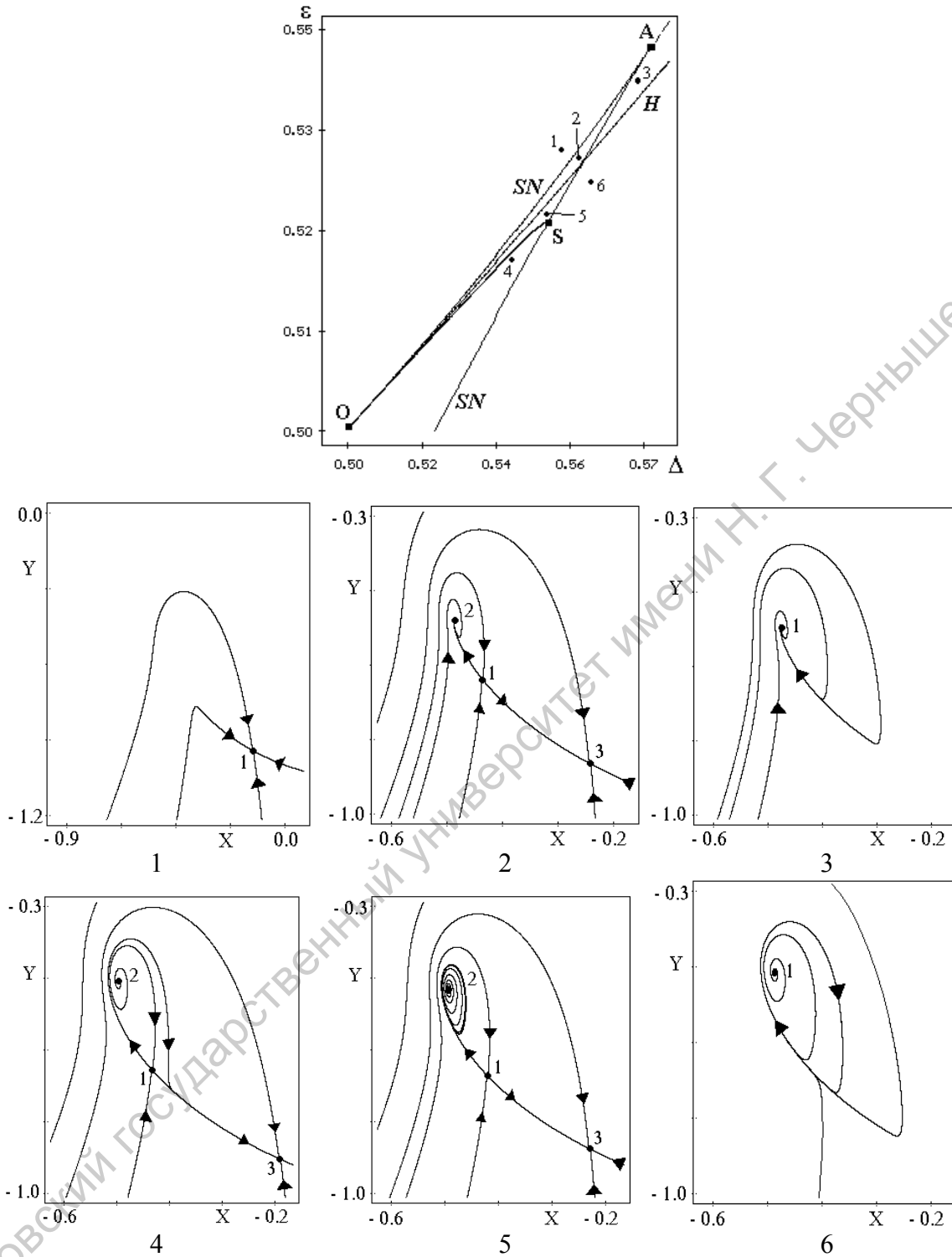


Рис. 18.12. Увеличенный фрагмент плоскости параметров  $\Delta, \varepsilon$ . Видна сложная структура бифуркационных линий вблизи точки сборки. Вставки 1-6 — характерные фазовые портреты.

**Задача 18.3.** Получите уравнение, аналогичное уравнению Адлера (18.9) для системы Ван дер Поля с двухчастотным воздействием

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = a \sin \omega t + b \sin(\Omega t + \theta). \quad (18.19)$$

*Решение.* Прежде всего получим укороченное уравнение для медленно меняющейся амплитуды колебаний. Используем метод Ван дер Поля. Будем искать решение в виде квазигармонического колебания (18.2) с медленно меняющейся амплитудой  $A(t)$ , которая удовлетворяет соотношению (18.3).

Подставляя в уравнение (18.19) и усредняя, приходим к укороченному уравнению (ср. 18.4)

$$\dot{A} + i \frac{(\omega^2 - 1)}{2\omega} A = \frac{\lambda A}{2} - \frac{|A|^2 A}{8} - \frac{a}{2\omega} - \frac{b}{2\omega} \exp[i((\Omega - \omega)t + \theta)]. \quad (18.20)$$

Выполним замену переменных (ср. 18.5)

$$\tau = \frac{\lambda t}{2}, \quad z = \frac{A}{\sqrt{4\lambda}}, \quad \Delta = \frac{\omega^2 - 1}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{a}{2\omega\lambda^{3/2}}, \quad \mu = b/(2\omega\lambda^{3/2}), \quad \delta = \frac{2(\Omega - \omega)}{\lambda}. \quad (18.21)$$

Здесь  $\Delta$  имеет смысл безразмерной отстройки частоты первого сигнала от собственной частоты автономной системы,  $\delta$  — расстройки частот воздействующих сигналов,  $\varepsilon$  и  $\mu$  — их безразмерных амплитуд. В результате получим

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon - \mu \exp[i(\delta\tau + \theta)]. \quad (18.22)$$

Для действительных амплитуды  $R$  и фазы  $\varphi$  из (18.22) получаем

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi - \mu \cos(\delta\tau + \theta - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + \frac{\varepsilon}{R} \sin \varphi - \frac{\mu}{R} \sin(\delta\tau + \theta - \varphi). \end{aligned} \quad (18.23)$$

В случае малых амплитуд воздействия  $\varepsilon$  и  $\mu$  движения происходят вблизи невозмущенного предельного цикла  $R \approx 1$ . Тогда уравнение для фазы принимает вид

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi - \mu \sin(\delta\tau + \theta - \varphi). \quad (18.24)$$

Это и есть искомое уравнение.

**Задача 18.4.** Получите укороченное уравнение для системы Ван дер Поля — Дуффинга с гармоническим внешним воздействием

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = b \sin \omega t. \quad (18.25)$$

*Ответ:*

$$\dot{z} + i\Delta z = z - (1 + i\kappa)|z|^2 z - \varepsilon, \quad (18.26)$$

где  $\kappa = 3\beta/\omega$ , остальные величины определяются в соответствии с (18.5). Если выделить из (18.26) уравнения для вещественных амплитуды и фазы, получим

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + \kappa R^2 + (\varepsilon/R) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (18.27)$$

Единственное отличие от уравнений (18.8) состоит в наличии слагаемого  $\kappa R^2$  в уравнении для фазы. Таким образом, видно, что член вида  $\beta x^3$  в исходном уравнении (18.25) играет роль фазовой нелинейности и приводит к *неизохронности* колебаний.

**Задача 18.5.** Найдите границы языка синхронизации в неавтономной системе Ван дер Поля–Дуффинга (18.23).

*Решение.* Используем сначала приближение, отвечающее движению вблизи предельного цикла  $R \approx 1$ . Тогда из второго уравнения (18.27) получаем

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \kappa + \varepsilon \sin \varphi. \quad (18.28)$$

Значит, для границы языка будем иметь

$$\Delta = \kappa \pm \varepsilon. \quad (18.29)$$

Таким образом, по сравнению с описанным в лекции случаем (см. рис. 18.2), язык синхронизации смещается на величину  $\kappa$  вдоль оси  $\Delta$ .

Найдем теперь границы языка строго. Для этого запишем уравнения (18.27) в стационарном случае ( $\dot{R} = \dot{\varphi} = 0$ ):

$$\begin{aligned} R - R^3 &= \varepsilon \cos \varphi, \\ \Delta R - \kappa R^3 &= \varepsilon \sin \varphi. \end{aligned} \quad (18.30)$$

Возводя оба уравнения (18.30) в квадрат и складывая, получим

$$\varepsilon^2 = (1 + \kappa^2) \xi^3 - 2(\Delta \kappa + 1) \xi^2 + (1 + \Delta^2) \xi, \quad (18.31)$$

где  $\xi = R^2$ . Границы языка находим, дифференцируя уравнение (18.31) по  $\xi$ :

$$3(1 + \kappa^2) \xi^2 - 4(\Delta \kappa + 1) \xi + 1 + \Delta^2 = 0, \quad (18.32)$$

откуда

$$\xi_{1,2} = \frac{2(1 + \Delta \kappa) \pm \sqrt{\Delta^2 (\kappa^2 - 3) + 8\Delta \kappa + 1 - 3\kappa^2}}{3(1 + \kappa^2)}. \quad (18.33)$$

Если подставить это соотношение в (18.31), получим границу языка на плоскости параметров  $\Delta, \varepsilon$ . Уравнение (18.31) имеет третий порядок по  $\xi$ , поэтому оно дает линии складок (границы языка) и точки сборки. Сборки легко находятся из (18.32): они отвечают слиянию линий складок, следовательно,

$$\Delta^2 + \frac{8\kappa}{\kappa^2 - 3} \Delta + \frac{1 - 3\kappa^2}{\kappa^2 - 3} = 0. \quad (18.34)$$

Разрешая это уравнение относительно  $\Delta$ , находим

$$\Delta = \frac{-4\kappa \pm \sqrt{3}(\kappa^2 + 1)}{\kappa^2 - 3}. \quad (18.35)$$

**Задача 18.6.** Найдите линии бифуркации Андронова–Хопфа в укороченном уравнении Ван дер Поля–Дуффинга (18.26).

Ответ:  $\varepsilon^2 = (1 + 4\Delta^2 - 4\Delta\kappa + \kappa^2)/8$ , они заканчиваются в общих точках с границей языка (точки Богданова–Такенса), для которых

$$\Delta_{1,2} = \frac{2\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + 1}}{2}.$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

## Список литературы

### **Книги серии «Современная теория колебаний и волн»**

1. *Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г.* Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001.
2. *Кузнецов А.П., Рожнёв А.Г., Трубецков Д.И.* Линейные колебания и волны. Сборник задач. М.: Физматлит, 2001 (1-е изд.), 2008 (2-е изд.).
3. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002 (1-е изд.), 2005 (2-е изд.).
4. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001 (1-е изд.), 2006 (2-е изд.).
6. *Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В.* Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Физматлит, 2002 (1-е изд.), 2005 (2-е изд.).

### **Учебники по теории колебаний**

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
2. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
3. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. М.: Физматлит, 2007 (3-е изд.).
4. *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний. Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та. 1995.
5. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
6. *Конторович М.И.* Нелинейные колебания в радиотехнике. М., Советское радио, 1973.
7. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М., Исаева О.Б.* Нелинейность: от колебаний к хаосу. Задачи и учебные программы. М., Ижевск: РХД, 2006.
8. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Либроком, 2010. (2-е изд.).



9. *Мандельштам Л.И.* Лекции по колебаниям. М.: Изд. АН СССР, 1955.
10. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978.
11. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М., Ижевск: РХД, 2000 (3-е изд.).
12. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. СПб: Лань, 2005.
13. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Колебания и волны. М.: Едиториал УРСС, 2010 (2-е изд.).

### **Обзоры, монографии, специальная литература**

1. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
2. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969.
3. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
5. *Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И.* Л.И. Мандельштам и современная теория колебаний и волн // УФН. 1979. Т. 128, №3. С. 579–624.
6. *Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И.* Нелинейная физика. Стохастичность и структуры. В сб. Физика XX века: Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219–280.
7. *Гукенхеймер Дж., Холмс П.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
8. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984, 271 с.
9. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // УФН. 1971. Т. 105, №1. С. 3–40.
10. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. БХВ–Петербург, 2011.
11. *Каплан А.Е., Кравцов Ю.А., Рылов В.А.* Параметрические генераторы и делители частоты. М.: Сов. радио. 1966.

12. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Либроком, 2010 (2-е изд.).
13. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и хаотическая динамика. Меркурий-Пресс, 2000.
14. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963.
15. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
16. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Либроком, 2010 (2-е изд.).
17. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Либроком, 2009 (2-е изд.).
18. Нелинейные волны / Под ред. Гапонова–Грехова А.В. М.: Наука, 1979.
19. Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность / Под ред. М.И. Рабиновича. М.: Наука, 1980.
20. Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие / Под ред. А.В. Гапонова–Грехова. М.: Наука, 1981.
21. Нелинейные волны. Самоорганизация / Под ред. А.В. Гапонова–Грехова и М.И. Рабиновича. М.: Наука, 1983.
22. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации / Под ред. А.В. Гапонова–Грехова и М.И. Рабиновича. М.: Наука, 1987.
23. Нелинейные волны. Динамика и эволюция. Под ред. А.В. Гапонова–Грехова и М.И. Рабиновича. М.: Наука, 1989.
24. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Наука, 1986.