

Саратовский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского

Н.М. Рыскин  
Д.И. Трубецков

Лекции по теории  
колебаний и волн

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

*Учебное пособие для студентов физических  
специальностей вузов*

Саратов, 2011

# Оглавление

Введение	6
<b>1 Основные модели эволюции нелинейных волн</b>	<b>10</b>
1.1. Об эвристическом подходе к нелинейным волновым уравнениям . . . . .	10
1.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии и диссипации . . .	11
1.3. Волны в нелинейной среде с диссипацией . . . . .	15
1.4. Волны в нелинейных средах с дисперсией . . . . .	19
1.4.1. Среда с дисперсией в области высоких частот . . . . .	19
1.4.2. Среда с дисперсией в области низких частот . . . . .	24
1.4.3. Среда с дисперсией и диссипацией . . . . .	25
1.5. Распространение волновых пакетов . . . . .	26
1.6. Нелинейные волны в средах с неустойчивостью . . . . .	28
1.7. Обобщение на неодномерный случай . . . . .	31
1.8. Неполиномиальные дисперсионные соотношения . . . . .	33
<b>2 Простая волна</b>	<b>36</b>
2.1. Уравнение простой волны и его решение методом характеристик . . . . .	36
2.2. Задача о распространении гармонического сигнала. О группировке электронов в пролетном клистроне . . . . .	39
2.3. Спектр опрокидывающейся волны . . . . .	44
<b>3 Образование разрывов в простой волне</b>	<b>53</b>
3.1. Обобщенные решения и граничные условия на разрыве . . .	53
3.2. Распространение гармонического сигнала. пилообразная волна и ее спектр . . . . .	58
3.3. Распространение треугольного и биполярного импульсов . .	62
3.4. Возмущение от движущегося источника . . . . .	64
3.5. Слияние разрывов . . . . .	65
<b>4 Простые волны в примерах</b>	<b>71</b>
4.1. Квазилинейные системы гиперболических уравнений. Критерий гиперболичности . . . . .	71

4.2.	Простые волны в газовой динамике . . . . .	74
4.3.	Гравитационные волны на «мелкой воде» . . . . .	78
4.4.	Ионно-звуковые волны в плазме . . . . .	81
4.5.	Волны в автомобильном потоке . . . . .	83
4.6.	Граничные условия на разрыве и их связь с законами сохранения . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Нелинейные волны в средах с диссипацией (уравнение Бюргера)</b>	<b>89</b>
5.1.	Точные решения уравнения Бюргера. Преобразование Коула–Хопфа . . . . .	90
5.2.	Поведение решений уравнения Бюргера в пределе $\nu \ll 1$ . . . . .	92
5.3.	Стационарная ударная волна . . . . .	93
5.4.	Распространение гармонического сигнала в нелинейной среде с диссипацией . . . . .	96
5.5.	Взаимодействие ударных волн . . . . .	99
5.6.	Распространение одиночного импульса в нелинейной среде с диссипацией . . . . .	101
5.7.	Автомодельные решения уравнения Бюргера . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Примеры ударных волн</b>	<b>109</b>
6.1.	Сильный точечный взрыв. Качественная картина и анализ размерностей . . . . .	110
6.2.	Ударные волны естественного происхождения на Земле. Гром, землетрясения, извержения вулканов, падение метеоритов . . . . .	113
6.3.	Ударные волны, искусственно создаваемые на Земле . . . . .	115
6.4.	Об ударных волнах в космосе . . . . .	117
<b>7</b>	<b>История открытия солитона</b>	<b>121</b>
7.1.	Дж. Скотт Расселл и открытие солитона . . . . .	121
7.2.	Уравнения Буссинеска и Кортевега–де Вриза . . . . .	123
7.3.	Проблема Ферми–Паста–Улама . . . . .	124
7.4.	Взаимодействие солитонов и работа Забуски и Крускала . . . . .	128
<b>8</b>	<b>Стационарные нелинейные волны</b>	<b>132</b>
8.1.	Стационарные решения уравнения КдВ: кноидальные волны и солитоны . . . . .	132
8.2.	Модифицированное уравнение КдВ . . . . .	136
8.3.	Уравнение Буссинеска . . . . .	139
8.4.	Стационарные ударные волны в среде с дисперсией и диссипацией . . . . .	140
8.5.	Уравнение Син–Гордона . . . . .	142
8.5.1.	Стационарные волны . . . . .	142
8.5.2.	Физические примеры . . . . .	144

8.6. Стационарные ленгмюровские волны в холодной плазме . . .	149
8.7. Уединенные волны пространственного заряда в электронном пучке . . . . .	153
8.8. Стационарные ионно-звуковые волны . . . . .	159
<b>9 Уравнение Кортевега–де Вриза в конкретных физических задачах</b>	<b>165</b>
9.1. Ионно-звуковые волны в плазме . . . . .	166
9.2. Ленгмюровские волны в поперечно ограниченной плазме . . .	169
9.3. Гравитационные волны на мелкой воде . . . . .	171
9.4. Волны в нелинейной линии передачи . . . . .	173
9.5. Газовая динамика и уравнение Бюргерса . . . . .	177
<b>10 Точные методы интегрирования нелинейных волновых уравнений</b>	<b>182</b>
10.1. Законы сохранения уравнения КдВ и преобразование Миуры	183
10.2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения КдВ . . . .	185
10.3. Многосолиitonные решения . . . . .	189
10.4. Обратная задача рассеяния в формулировке Лакса . . . . .	193
10.5. Дальнейшее обобщение метода обратной задачи . . . . .	195
10.6. Метод Хироты и многосолиitonные решения . . . . .	198
10.6.1. Уравнение КдВ . . . . .	198
10.6.2. Модифицированное уравнение КдВ . . . . .	200
10.7. Преобразования Бэклунда . . . . .	205
<b>11 Модулированные волны в нелинейных средах</b>	<b>211</b>
11.1. Теория Узизема . . . . .	212
11.2. Критерий Лайтхилла и модуляционная неустойчивость . . . .	213
11.3. Нелинейное уравнение Шрёдингера и метод многих масштабов	215
11.4. Неустойчивость пространственно–однородного решения . . . .	217
11.5. Стационарные решения НУШ. «Светлые» и «темные» солитоны . . . . .	219
11.6. Электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике. Солитоны в волоконных световодах . . . . .	227
11.7. Самофокусировка света . . . . .	233
11.8. Трехволновое взаимодействие в квадратично-нелинейной среде . . . . .	237
11.8.1. Параметрическая (распадная) неустойчивость . . . . .	238
11.8.2. Вырожденное параметрическое взаимодействие . . . . .	243
11.8.3. Взрывная неустойчивость . . . . .	244
<b>12 Нелинейные волны в средах с неустойчивостями</b>	<b>249</b>
12.1. Уравнение Гинзбурга–Ландау . . . . .	250
12.1.1. Анализ на абсолютную и конвективную неустойчивости	251

12.1.2. Модуляционная неустойчивость . . . . .	253
12.2. Конвекция Рэлея–Бенара . . . . .	257
12.3. Об автоколебаниях в распределенных системах. Динамическая модель пространственного развития турбулентности . . . . .	262
12.4. Взаимодействие электромагнитного излучения со средой из двухуровневых частиц . . . . .	264
12.4.1. Двухуровневая среда. Уравнения Блоха . . . . .	265
12.4.2. Самоиндуцированная прозрачность . . . . .	268
12.4.3. Распространение импульсов в усиливающей среде. Автомоделные решения . . . . .	269
12.5. Волны в нелинейных активных линиях передачи . . . . .	273
<b>Список литературы</b>	<b>278</b>

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

# Введение

Я не знаю истинного автора выдающегося афоризма на эту тему. Сам я услышал его от одного научного работника, посещавшего мои еженедельные лекции. Он говаривал: «Всё линейное от Бога, а нелинейное от Лукавого»

*М.А. Миллер.* Волны, волны, волны ...

Настоящее учебное пособие представляет собой дополненную и переработанную версию книги [1], вышедшей в 2000 г. в серии «Современная теория колебаний и волн» и являющейся логическим продолжением книг «Линейные колебания и волны» [2] и «Нелинейные колебания» [3]. Содержание примерно соответствует курсу лекций по теории нелинейных волн, который читается авторами на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета.

Теория нелинейных волн — всё ещё молодая наука, хотя исследования в этом направлении велись даже в XIX веке, главным образом, в связи с задачами газо- и гидродинамики. Например, работы Дж. Скотта Расселла [4], который впервые наблюдал солитоны на поверхности жидкости, относятся к 1830–1840-м гг.; уравнение Кортевега–де Вриза, представляющее основу математического описания солитонов, получено в 1895 г. [5]. Нелинейные волновые явления были предметом исследования таких выдающихся ученых, как Пуассон, Стокс, Эйри, Рэлей, Буссинеск, Риман. Однако как единая наука теория нелинейных волн сложилась в конце 1960-х–начале 1970-х годов, которые стали годами ее бурного развития.

Прежде всего, причина этого — в развитии вычислительной техники, позволившей подступиться к непосредственному численному решению уравнений в частных производных, которые описывают распространение волн в различных средах. Так, исследования Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама [6], выполненные в 1940-х годах на одной из первых ЭВМ, имели огромное значение для теории нелинейных волн (и вообще для нелинейной физики). Уникальные свойства солитонов, объясняющие результаты Ферми–Паста–Улама, были обнаружены Н. Забуски и М. Крускалом [7] также в ходе численного эксперимента.

Вторым толчком послужило создание мощного математического аппа-

рата, позволяющего, в принципе, осуществить точное аналитическое решение ряда нелинейных уравнений в частных производных. Появление этих методов, в первую очередь — метода обратной задачи рассеяния, вызвало большой интерес у физиков и математиков. Во многом благодаря этому методу в настоящее время теория солитонов превратилась в самостоятельное научное направление в математической физике.

Третья причина состояла в расширении интереса к нелинейным явлениям в различных областях физики. Сформировались такие науки, как нелинейная акустика, нелинейная оптика; богатый материал для исследования нелинейных волновых процессов дали физика плазмы, радиофизика, электроника. С установлением глубокой общности между явлениями, наблюдаемыми в системах самой различной природы, пришло осознание того, что практически всё многообразие нелинейных волновых процессов может быть сведено к небольшому числу типичных, канонических ситуаций, которые допускают описание при помощи одних и тех же уравнений (получивших название эталонных). Всё это привело к становлению новой науки — теории нелинейных волн.

Эталонные уравнения играют в теории чрезвычайно важную роль. Как удачно выразился Ю.А. Данилов [8], они представляют собой не портрет физической системы, а, скорее, карикатуру: многие малосущественные детали опущены, а несколько наиболее характерных черт, наоборот, утрированы, выпячены, что и позволяет двумя-тремя штрихами создать узнаваемый образ. Наиболее удивительным является то, что большинство из этих уравнений относятся к числу полностью интегрируемых, т.е. разрешимых при помощи метода обратной задачи рассеяния. То, что большинство уравнений, важных с физической точки зрения, одновременно обладают весьма специфическими математическими свойствами, — достаточно примечательный, хотя и необъяснимый на сегодняшний день факт.

В своей книге [9] Дж. Уизем предложил разделить все волновые процессы на два класса: гиперболические и диспергирующие. Название «гиперболические» происходит от того, что для определенных волн их распространение описывается по преимуществу гиперболическими уравнениями в частных производных. Впрочем, это определение не вполне корректно<sup>1</sup>, так как главным критерием является наличие или отсутствие дисперсии. Данную книгу также можно условно разделить на две части, первая из которых (лекции 2–6) посвящена нелинейным волнам в средах без дисперсии, вторая (лекции 7–12) — волнам в диспергирующих средах. Такое разделение представляется уместным с точки зрения как основных физических эффектов, так и методов исследования.

Лекция 1 является вводной. В ней при помощи эвристического подхода [10] получены основные эталонные уравнения. На основе качественных со-

<sup>1</sup>Например, уравнение Бюргерса, очевидно, является параболическим, однако волны, описываемые им, относят к первому типу. С другой стороны, гиперболическое нелинейное уравнение Клейна–Гордона описывает по Уизему диспергирующие волны.

ображений и элементарных оценок выясняются наиболее принципиальные особенности распространения нелинейных волн. Лекция 2 посвящена уравнению простой волны, описывающему среду без дисперсии и диссипации. Подробно рассмотрен процесс опрокидывания волны; детально изучается задача о распространении гармонического сигнала, играющая важную роль в нелинейной акустике и электронике. Однако полученные в этой лекции решения, строго говоря, справедливы только до момента опрокидывания, поскольку в одних случаях неоднозначные решения не имеют физического смысла, в других после опрокидывания динамика волны приобретает чрезвычайно сложный характер, не допускающий аналитического описания (типичный пример — образование «барашков» на поверхности воды). В диссипативных средах процесс укрупнения останавливается и завершается образованием ударной волны. В случае, когда толщина фронта пренебрежимо мала, ударную волну можно заменить разрывом. Решения с разрывами рассматриваются в лекции 3. В лекции 4 развитая теория обобщается на квазилинейные системы гиперболических уравнений. Приводятся примеры из газо- и гидродинамики, а также физики плазмы. Описать структуру фронта ударной волны позволяет уравнение Бюргера, которому посвящена лекция 5. Лекция 6 содержит разнообразные примеры ударных волн естественного и искусственного происхождения на Земле и в космосе.

Изучение нелинейных волновых процессов в средах с дисперсией начинается в лекции 7, где изложена краткая история открытия солитонов. Лекция 8 посвящена стационарным нелинейным волнам — решениям наиболее простого типа, которые, однако, играют весьма важную роль. Особое внимание уделено уединенным волнам и солитонам. В лекции 9 описываются методы получения «длинноволновых» уравнений типа уравнений Кортевега–де Вриза и Бюргера в конкретных физических задачах. Лекция содержит большое количество примеров из физики плазмы, газо- и гидродинамики, радиофизики. Лекция 10 посвящена точным методам интегрирования солитонных уравнений. Основное внимание уделено методу обратной задачи рассеяния, кроме того обсуждаются метод Хироты и преобразования Бэклунда. В лекции 11 рассматриваются процессы распространения и взаимодействия квазигармонических волновых пакетов в нелинейной среде. Описывается метод многих масштабов, который позволяет получать уравнения для огибающей волнового пакета, среди которых наибольший интерес представляет нелинейное уравнение Шрёдингера. Подробно анализируются модуляционная неустойчивость и образование солитонов огибающей. Обсуждаются такие важные явления, как распространение солитонов в нелинейных оптических волноводах и самофокусировка света. Далее излагаются элементарные основы теории трехволнового резонансного взаимодействия в квадратично-нелинейной среде, которое приводит к таким процессам, как параметрическая и взрывная неустойчивости. Заключительная лекция посвящена нелинейным волнам в активных

средах. Здесь в качестве основных моделей служат уравнение Гинзбурга–Ландау, а также неустойчивое уравнение Клейна–Гордона (для описания взаимодействия волн с энергиями разных знаков). Обсуждаются автоколебательные процессы в распределенных системах.

Основной целью книги было дать представление о современной теории нелинейных волн, как о единой науке, в основе которой лежит система универсальных понятий и представлений, своего рода «язык» теории нелинейных волн. Авторы старались подчеркнуть междисциплинарный характер этой науки, насытив книгу примерами из различных областей физики. Важным было также соблюсти баланс между изложением математических методов и физических примеров. Конечно, в рамках одной книги невозможно детально изложить все вопросы, связанные с распространением нелинейных волн. На сегодняшний день имеется обширная литература, посвященная как теории волн в целом, так и отдельным ее разделам. Для более углубленного изучения можно порекомендовать учебные пособия и монографии [9], [11]–[26].

## Лекция 1.

# Основные модели эволюции нелинейных волн

Вась, объясни ты ей на пальцах  
Эту нашу маленькую песню.

Народная песня «Королева Непала»

Кстати или некстати сказать, в том же ключе звучит жаргон физиков, когда они свои качественные теории иногда считают «пояснениями на пальцах»... . Отчасти шутливо, а вдруг, не отдавая себе отчета, на полный «модельный серьез»?!

*М.А. Миллер.* Об изобретении радио... и не только (Нижний Новгород, 1997. С. 16)

### 1.1. Об эвристическом подходе к нелинейным волновым уравнениям

Как уже отмечалось, основным «инструментом» теории нелинейных волн являются так называемые *эталонные уравнения*, каждое из которых описывает какую-либо характерную физическую ситуацию, и потому возникает во многих конкретных задачах. Обычно такие уравнения получают при помощи стандартных приближенных методов, опирающихся на те или иные упрощающие предположения. Эти методы будут рассмотрены в последующих лекциях. Получим основные эталонные уравнения при помощи так называемого эвристического подхода [10], использующего не строгие математические модели, а самые общие соображения о характере дисперсии, диссипации и нелинейности.

Рассмотрим линейную монохроматическую волну

$$u(x, t) = a \exp [i(\omega t - kx)],$$

где  $u$  — некоторая переменная, характеризующая волновое движение. Очевидно, что

$$u_t = i\omega u, \quad u_x = -iku,$$

где нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным. Предположим, что система характеризуется дисперсионным соотношением

$$P(\omega, k) = 0, \tag{1.1}$$

где  $P$  — полином относительно  $\omega$  и  $k$ . Тогда, поставив в соответствие  $\omega$  и  $k$  дифференциальные операторы (т.е., по сути, проведя обратное преобразование Фурье)

$$\omega \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial t}, \quad k \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x}, \tag{1.2}$$

можно превратить (1.1) в линейное дифференциальное уравнение относительно  $u(x, t)$

$$P\left(-i \frac{\partial}{\partial t}, i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0. \tag{1.3}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы, исходя из физических соображений, попытаться «угадать» вид нелинейности и записать соответствующее обобщение уравнения (1.3).

Следует обратить внимание, что если диссипация отсутствует и дисперсионное соотношение (1.1) чисто вещественно, то для того, чтобы и уравнение (1.3) было вещественным, необходимо, чтобы сумма показателей степеней  $\omega$  и  $k$  во всех членах полинома (1.1) была либо только четной, либо только нечетной. Случай неполиномиальных дисперсионных соотношений будет кратко затронут в § 1.8. Заметим, что если интересоваться процессами, спектр которых сосредоточен в определенной области частот или волновых чисел, дисперсионное соотношение можно привести к виду (1.1), например, разложением в ряд Тейлора.

## 1.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии и диссипации

В качестве простейшего примера рассмотрим дисперсионное соотношение

$$\omega = v_{ph} k, \tag{1.4}$$

где фазовая скорость  $v_{ph} = c_0 = \text{const}$ . Очевидно, что закону дисперсии (1.4) соответствует уравнение

$$u_t + c_0 u_x = 0. \tag{1.5}$$

Обобщим уравнение (1.5) на случай нелинейного распространения, для чего примем, что фазовая скорость волны зависит от  $u$ , т.е.

$$v_{ph} = V(u).$$

Тогда нелинейным аналогом уравнения (1.5) будет уравнение

$$u_t + V(u)u_x = 0. \quad (1.6)$$

Мы получили одно из эталонных уравнений теории нелинейных волн — *уравнение простой волны*, свойства которого будут подробно изучаться в лекции 2. Если нелинейность слабая, можно разложить  $V(u)$  в степенной ряд и ограничиться только первыми двумя членами разложения:

$$v_{ph} = c_0 + \alpha u + \dots$$

Теперь уравнение (1.6) принимает вид

$$u_t + c_0 u_x + \alpha u u_x = 0. \quad (1.7)$$

Введем новые переменные  $x' = x - c_0 t$  (это преобразование равносильно переходу в движущуюся со скоростью  $c_0$  систему координат) и  $u' = \alpha u$ . Подставив в (1.7) и опуская штрихи, получим

$$u_t + u u_x = 0. \quad (1.8)$$

Обобщим уравнение (1.7) на системы, допускающие распространение волн как в прямом, так и во встречном направлениях. В этом случае дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = c_0^2 k^2. \quad (1.9)$$

Ему соответствует линейное волновое уравнение

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0. \quad (1.10)$$

Учет нелинейности проведем следующим образом. Продифференцировав уравнение (1.7) по  $t$ , получим

$$u_{tt} = -(c_0 u_t + \alpha u u_t)_x.$$

Выразим в правой части этого уравнения  $u_t$  через  $u_x$  при помощи уравнения (1.7). После несложных преобразований находим

$$u_{tt} = c_0^2 u_{xx} + 2\alpha c_0 (u u_x)_x + \alpha^2 (u^2 u_x)_x.$$

Пренебрегая последним членом в правой части в силу предположения о том, что нелинейность слабая, получаем нелинейный аналог уравнения (1.10):

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - 2\alpha c_0 (u u_x)_x = 0. \quad (1.11)$$

Ответим на качественном уровне на вопрос, к каким эффектам может привести нелинейность. Общее решение уравнения (1.8) получить нетрудно. Подобно тому, как уравнение (1.5) с начальным условием

$$u(x, t = 0) = f(x) \quad (1.12)$$

имеет решение

$$u(x, t) = f(x - c_0 t),$$

решение уравнения (1.8) с начальным условием (1.12) есть

$$u(x, t) = f(x - ut). \tag{1.13}$$

Проверим справедливость этого прямым вычислением. Из соотношения (1.13) следует, что

$$u_x = (1 - u_x t) f', \quad u_t = -(u + u_t t) f',$$

где  $f' = df/d\xi$ ,  $\xi = x - ut$ . Выражая отсюда  $u_x$  и  $u_t$ , получаем

$$u_x = \frac{f'}{1 + f' t}, \quad u_t = -\frac{u f'}{1 + f' t}. \tag{1.14}$$

Таким образом, выражение (1.13) действительно является неявным решением (1.8). Это решение было найдено Риманом еще в 1860 г.

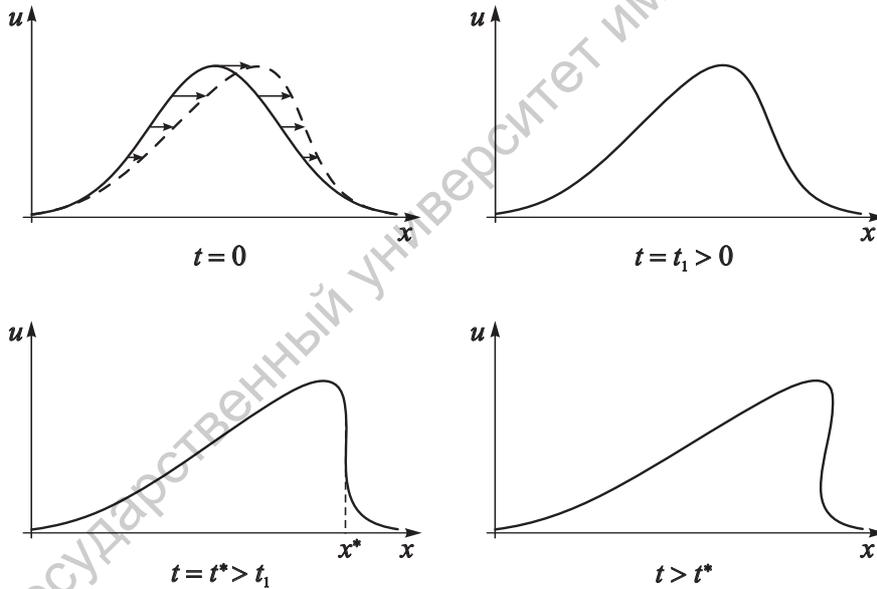


Рис. 1.1. Эволюция начального возмущения в нелинейной среде без дисперсии и диссипации

Рассмотрим распространение возмущения, имеющего начальный профиль, изображенный на рис. 1.1а. Согласно решению (1.13), различные его участки движутся с различными скоростями, пропорциональными высоте профиля  $u(x)$ . Точки, в которых  $u(x) = 0$ , вообще остаются неподвижными (напомним, что был совершен переход в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $c_0$ ). Таким образом, в некоторый момент времени  $t_1 > 0$  мы

будем иметь профиль, подобный изображенному на рис. 1.16. Видно, что крутизна переднего фронта возмущения увеличилась. Это явление называется *укручением* волны.

С течением времени фронт становится всё круче и круче, и, наконец, производная  $u_x$  обращается в бесконечность (рис. 1.16). Это происходит в тот момент времени  $t^*$  и в той точке пространства  $x^*$ , где знаменатель выражений (1.14) впервые обращается в нуль. Очевидно, что этому соответствует значение  $\xi$ , для которого  $f'(\xi) < 0$  и  $|f'(\xi)|$  максимально. Далее происходит *опрокидывание* волны — профиль становится неоднозначным (рис. 1.17), а уравнение (1.8), вообще говоря, уже неприменимо.

Опишем эффекты укращения и опрокидывания волны на спектральном языке. Будем искать решение (1.8) в виде ряда

$$u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \varepsilon^3 u^{(3)} + \dots, \quad (1.15)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. В качестве начального условия выберем синусоидальный профиль

$$u(x, t = 0) = \varepsilon a \sin(kx). \quad (1.16)$$

Здесь  $a$  — величина порядка единицы. Подставляя ряд (1.15) в уравнение (1.8) и выделяя члены одинаковых порядков малости, получим в порядке  $\varepsilon$

$$u_t^{(1)} = 0,$$

откуда с учетом (1.16) находим

$$u^{(1)} = a \sin(kx). \quad (1.17)$$

Члены порядка  $\varepsilon^2$  дают

$$u_t^{(2)} = -u^{(1)} u_x^{(1)} = -\frac{a^2 k}{2} \sin(2kx).$$

Интегрируя это выражение, получим

$$u^{(2)} = -\frac{a^2 k t}{2} \sin(2kx). \quad (1.18)$$

Таким образом, аналогично колебаниям нелинейного осциллятора [3], нелинейность приводит к генерации высших гармоник. Обратим внимание, что амплитуда второй гармоники секулярно нарастает со временем.

В порядке  $\varepsilon^3$  будем иметь

$$u_t^{(3)} = -u^{(1)} u_x^{(2)} - u^{(2)} u_x^{(1)} = -\frac{a^3 k^2 t}{4} [\sin(kx) - 3 \sin(3kx)],$$

откуда

$$u^{(3)} = -\frac{a^3 k^2 t^2}{8} \sin(kx) + \frac{3a^3 k^2 t^2}{8} \sin(3kx). \quad (1.19)$$

Первое слагаемое в формуле (1.19) описывает «истощение» первой гармоники, которая отдает свою энергию высшим. Второй член соответствует генерации третьей гармоники, причем ее амплитуда нарастает пропорционально  $t^2$ .

Таким образом, процесс укрупнения сопровождается неограниченным нарастанием гармоник со всё более и более высокими номерами. Зависимости амплитуд трех первых гармоник от времени в соответствии с формулами (1.17)–(1.19) приведены на рис. 1.2. Очевидно, что разложение (1.15) при этом быстро теряет справедливость.

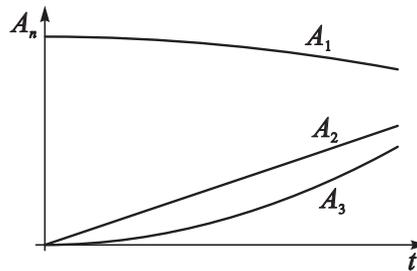


Рис. 1.2. Зависимость амплитуд трех первых гармоник от времени в нелинейной среде без дисперсии и диссипации

Во многих случаях  $u(x, t)$  характеризует величины, неоднозначность которых запрещена по физическим соображениям (плотность среды, давление, напряженность электрического или магнитного поля и т.д.). Это говорит о том, что в уравнении (1.8) не были учтены те или иные факторы, способные остановить укрупнение волны и воспрепятствовать её опрокидыванию. К таким факторам относятся *диссипация* и *дисперсия*.

### 1.3. Волны в нелинейной среде с диссипацией

Распространение линейных волн в диссипативной среде описывается комплексными дисперсионными соотношениями вида

$$\omega = \omega_r(k) + i\omega_i(k),$$

где  $\omega_{r,i}$  — вещественные функции  $k$ ,  $\omega_i > 0$ . Рассмотрим случай  $\omega_i = \nu k^2$ ,  $\nu = \text{const} > 0$ . К диссипации подобного вида приводят такие физические процессы, как вязкость, теплопроводность, диффузия. Если дисперсия отсутствует, то окончательный вид дисперсионного соотношения таков:

$$\omega = c_0 k + i\nu k^2. \tag{1.20}$$

Линейное дифференциальное уравнение, соответствующее (1.20), есть

$$u_t + c_0 u_x = \nu u_{xx}.$$

Заметим, что при переходе в движущуюся со скоростью  $c_0$  систему отсчета это уравнение принимает вид одного из основных уравнений математической физики — *уравнения теплопроводности*

$$u_t = \nu u_{xx}. \quad (1.21)$$

Комбинируя уравнения (1.21) и (1.8), получаем еще одно эталонное уравнение — *уравнение Бюргерса*, описывающее нелинейные волны в диссипативной недиспергирующей среде [27]:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}. \quad (1.22)$$

Проанализируем, как в этом случае происходит обогащение спектра волны гармониками, подобно тому, как это было сделано в § 1.2 для уравнения простой волны. Подставив в уравнение (1.22) разложение (1.15), найдем, что

$$u_t^{(1)} = \nu u_{xx}^{(1)}.$$

С учетом начального условия (1.16) получим в первом порядке решение в виде экспоненциально затухающей синусоидальной волны

$$u^{(1)} = ae^{-\nu k^2 t} \sin(kx). \quad (1.23)$$

Члены порядка  $\varepsilon^2$  в (1.22) дают

$$u_t^{(2)} = -u^{(1)}u_x^{(1)} + \nu u_{xx}^{(2)} = -\frac{a^2 k}{2} e^{-2\nu k^2 t} \sin(2kx) + \nu u_{xx}^{(2)}.$$

Решение этого уравнения ищем в виде  $u^{(2)} = v(t) \sin(2kx)$ . Тогда

$$v_t = -4\nu k^2 v - \frac{a^2 k}{2} e^{-2\nu k^2 t}.$$

Мы пришли к линейному обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка, решение которого имеет вид  $v = v_1 + v_2$ , где  $v_1$  — частное решение неоднородного уравнения,  $v_2$  — общее решение однородного. Полагая  $v_1 \sim \exp(-2\nu k^2 t)$ , находим

$$v_1 = -\frac{a^2}{4\nu k} e^{-2\nu k^2 t}.$$

Общее решение однородного уравнения  $v_2$  имеет вид

$$v_2 = b e^{-4\nu k^2 t},$$

где  $b$  — постоянная интегрирования. Учитывая, что в силу начальных условий  $u^{(2)}(t=0) = 0$ , находим

$$b = \frac{a^2}{4\nu k}.$$

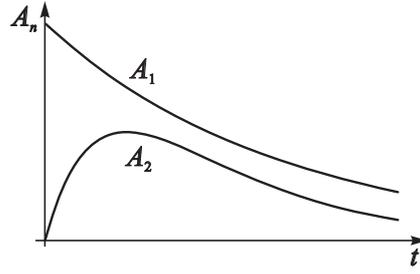


Рис. 1.3. Зависимость амплитуд первой и второй гармоник от времени в нелинейной среде с диссипацией

Таким образом, окончательно получаем

$$u^{(2)} = \frac{a^2 \exp(-2\nu k^2 t)}{4\nu k} (\exp(-2\nu k^2 t) - 1) \sin(2kx). \quad (1.24)$$

Зависимости амплитуд первой и второй гармоник от времени в соответствии с формулами (1.23), (1.24) приведены на рис. 1.3.

Отсутствие секулярного роста позволяет предположить, что в данном случае опрокидывания волны не происходит. Более строгое исследование уравнения Бюргера подтверждает это (лекция 5). На рис. 1.4 приведена картина эволюции начального возмущения, показывающая, как диссипативные эффекты изменяют динамику возмущения по сравнению с консервативной средой (рис. 1.1). Поскольку диссипация является *высокочастотной* ( $\omega_i \sim k^2$ ), ее влияние наиболее сильно сказывается там, где профиль волны изменяется наиболее быстро, т.е. вблизи переднего фронта. Процесс укручения останавливается и формируется крутой и тонкий волновой фронт — *ударная волна* (рис. 1.4б). С течением времени она расплывается и затухает (рис. 1.4г).

Конкуренция процессов нелинейности и диссипации может привести к появлению *стационарных* волн, сохраняющих свою форму и скорость в процессе распространения. Для уравнения Бюргера с граничными условиями

$$u = \begin{cases} u_1, & x \rightarrow \infty, \\ u_2 > u_1, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

таким решением является *стационарная ударная волна* (рис. 1.5). Профиль, изображенный на этом рисунке, перемещается вдоль оси  $x$  с некоторой постоянной скоростью  $U$ , т.е.  $u = u(x - Ut)$ .

Оценим характерные параметры ударной волны, учитывая, что она образуется в результате взаимной компенсации эффектов нелинейности и диссипации. Тогда нелинейный и диссипативный члены в уравнении (1.22) должны быть одного порядка, то есть

$$\frac{u^2}{2} \sim \nu u_x. \quad (1.25)$$

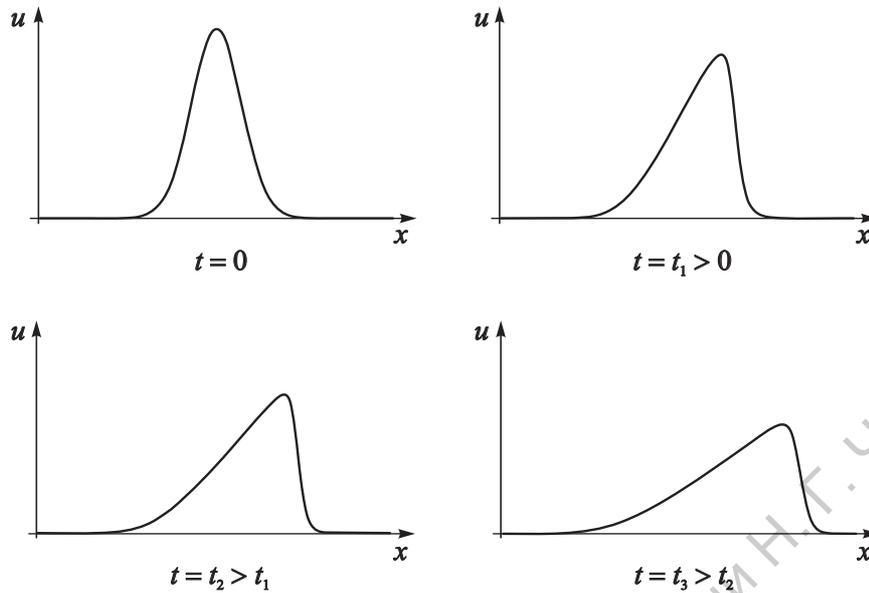


Рис. 1.4. Эволюция начального возмущения в нелинейной недиспергирующей среде с высокочастотной диссипацией

Введем амплитуду ударной волны  $a = u_2 - u_1$  и характерную ширину фронта  $\Delta$  (рис. 1.5). Тогда из соотношения (1.25) следует, что

$$\frac{a^2}{2} \sim \frac{\nu a}{\Delta},$$

откуда получаем следующую связь между параметрами ударной волны:

$$\frac{a\Delta}{2\nu} = \text{const}. \quad (1.26)$$

Из соотношения (1.26) видно, что ширина фронта тем больше, чем больше коэффициент  $\nu$  и чем меньше амплитуда  $a$ . Изучая уравнение Бюргера в лекции 5, мы убедимся в справедливости этой оценки.

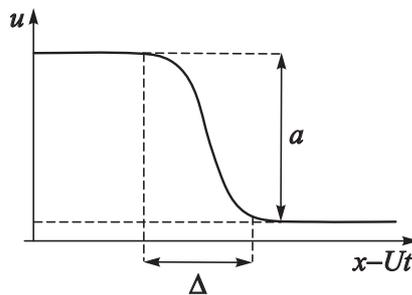


Рис. 1.5. Стационарная ударная волна уравнения Бюргера

**Задача 1.1.** Получите диссипативный вариант уравнения (1.11) — обобщение уравнения Бюргера, допускающее распространение волны в прямом и встречном направлениях

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - 2\alpha c_0 (uu_x)_x = 2\nu u_{xxt}.$$

## 1.4. Волны в нелинейных средах с дисперсией

### 1.4.1. Среда с дисперсией в области высоких частот

Рассмотрим консервативную среду с дисперсией в области высоких частот. В длинноволновом пределе ( $k$  мало) можно разложить дисперсионное соотношение  $\omega(k)$  в ряд Тейлора и, ограничиваясь двумя членами разложения, получить (см. рис. 1.6)

$$\omega = c_0 k - \beta k^3 + \dots \quad (1.27)$$

Линейное уравнение, соответствующее закону дисперсии (1.27), имеет вид

$$u_t + c_0 u_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.28)$$

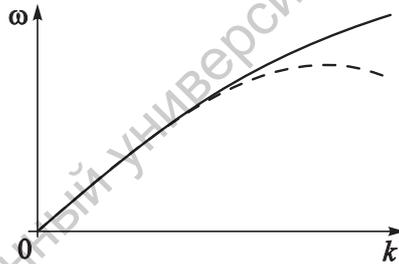


Рис. 1.6. Дисперсионная характеристика среды с высокочастотной дисперсией (сплошная кривая) и ее аппроксимация (1.27) (штриховая линия)

Переходя в движущуюся со скоростью  $c_0$  систему координат и комбинируя уравнение (1.28) с нелинейным уравнением (1.8), получаем одно из наиболее известных эталонных уравнений — *уравнение Кортевега–де Вриза* (КдВ) [5]

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad (1.29)$$

описывающее эволюцию слабонелинейных длинноволновых возмущений в среде с дисперсией в области высоких частот. Уравнение КдВ возникает при исследовании множества физических систем, таких как гравитационные волны на мелкой воде, ионно-акустические волны в плазме, волны Россби во вращающейся жидкости, волны в электрических цепях, содержащих нелинейные элементы, и т.д. (см. [16] и лекцию 9).

В случае кубической нелинейности

$$v_{ph} = c_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \dots$$

нелинейным аналогом (1.28) является уравнение

$$u_t + c_0 u_x + \alpha_1 u u_x + \alpha_2 u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0.$$

Вводя новую переменную  $u' = \sqrt{\alpha_2}(u + \alpha_1/2\alpha_2)$ , получаем

$$u'_t + \left(c_0 - \frac{\alpha_1}{4\alpha_2}\right) u'_x + (u')^2 u'_x + \beta u'_{xxx} = 0.$$

Переходя в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $(c_0 - \alpha_1/4\alpha_2)$  и опуская штрихи, приходим к *модифицированному уравнению Кортевега-де Вриза* (мКдВ)

$$u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.30)$$

Обобщим уравнение КдВ на системы, допускающие распространение в прямом и встречном направлениях. Возведем дисперсионное соотношение (1.27) в квадрат:

$$\omega^2 = (c_0 k - \beta k^3)^2 \approx c_0^2 k^2 - 2c_0 \beta k^4 + \dots \quad (1.31)$$

Линейное уравнение, соответствующее закону дисперсии (1.31), есть

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - 2c_0 \beta u_{xxxx} = 0.$$

Добавляя сюда нелинейное слагаемое из уравнения (1.11), осуществляя преобразование  $u' = 2\alpha c_0 u$ ,  $\beta' = 2c_0 \beta$  и опуская штрихи, получаем

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxxx} = 0. \quad (1.32)$$

Это уравнение носит название *уравнения Буссинеска*.

Дисперсия, как и диссипация, способна воспрепятствовать опрокидыванию волны. Физически это связано с тем, что различные спектральные компоненты распространяются с различными скоростями, что ограничивает накопление нелинейных эффектов, которые приводят к появлению бесконечно быстрых изменений профиля. Поясним это, пользуясь спектральным подходом. Подставляя в уравнение КдВ (1.29) разложение (1.15), в порядке  $\epsilon$  получаем

$$u_t^{(1)} = -\beta u_{xxx}^{(1)}.$$

Решая это уравнение с начальным условием (1.16), находим

$$u^{(1)} = a \sin(kx + \beta k^3 t).$$

Далее, выделяя члены порядка  $\varepsilon^2$ , получаем

$$u_t^{(2)} = -u^{(1)}u_x^{(1)} - \beta u_{xxx}^{(2)} = -\frac{a^2k}{2} \sin(2kx + 2\beta k^3t) - \beta u_{xxx}^{(2)}. \quad (1.33)$$

Решение уравнения (1.33) ищем в виде  $u^{(2)} = v_1 + v_2$ , где  $v_1$  — частное решение неоднородного уравнения, пропорциональное  $\cos(2kx + 2\beta k^3t)$ . Подставив в (1.33), находим

$$v_1 = -\frac{a^2}{12\beta k^2} \cos(2kx + 2\beta k^3t).$$

Решение однородного уравнения  $v_2$  выберем так, чтобы удовлетворить начальному условию  $u^{(2)}(t = 0) = 0$ , что дает

$$v_2 = \frac{a^2}{12\beta k^2} \cos(2kx + 8\beta k^3t).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$u^{(2)} = -\frac{a^2}{6\beta k^2} \sin(3\beta k^3t) \sin(2kx + 5\beta k^3t),$$

т.е. амплитуда гармоники зависит от времени периодически.

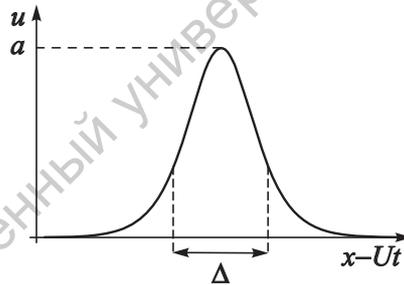


Рис. 1.7. Солитон уравнения Кортевега–де Вриза

Отсутствие секулярности вновь свидетельствует о том, что опрокидывания волны не происходит. Конкуренция нелинейности и дисперсии приводит к образованию стационарных волн, среди которых особо важную роль играют решения в виде *уединенных волн* или *солитонов* (между этими двумя понятиями существует некоторая разница, которую мы поясним в последующих главах). Вид солитона КдВ приведен на рис. 1.7. Оценим его характерные параметры, полагая, что нелинейный член в уравнении (1.29) должен уравновешиваться дисперсионным:

$$\frac{u^2}{2} \sim -\beta u_{xx}. \quad (1.34)$$

Введем амплитуду солитона  $a$  и характерную ширину  $\Delta$ . Тогда, как следует из соотношения (1.34),

$$\frac{a^2}{2} \sim \frac{\beta a}{\Delta^2},$$

откуда получаем связь между параметрами солитона

$$\frac{a\Delta^2}{2\beta} = \text{const.}$$

Из последнего соотношения следует, что чем выше солитон, тем он уже. Анализ точных стационарных решений уравнения КдВ, который будет представлен в гл. 8, позволит убедиться в справедливости полученного соотношения.

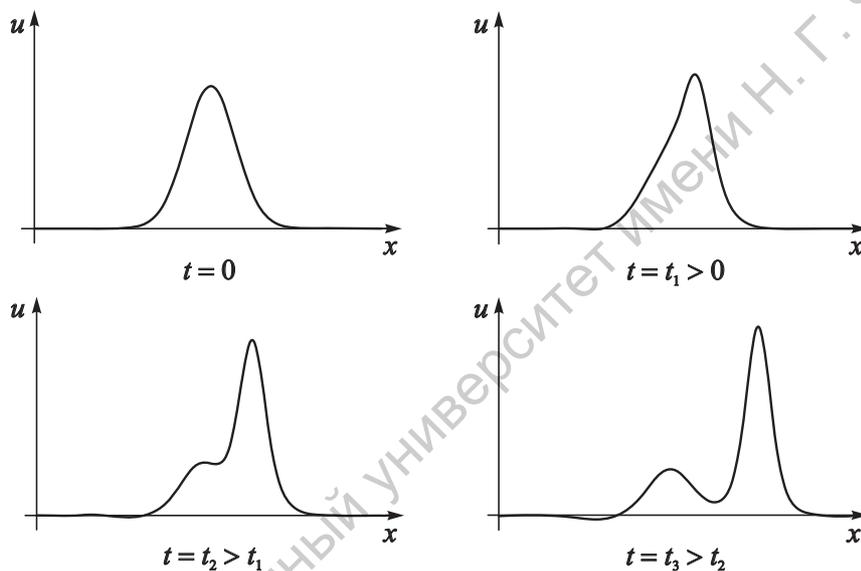


Рис. 1.8. Эволюция начального возмущения в нелинейной среде с дисперсией, завершающаяся образованием солитонов

На рис. 1.8 показана эволюция начального возмущения в рамках уравнения КдВ. В данном случае укрупнение останавливается и происходит образование одного или нескольких солитонов, число которых определяется начальными условиями.

**Задача 1.2.** Получите волновое уравнение, описывающее слабонелинейные процессы в среде с законом дисперсии

$$\omega = \frac{c_0 k}{1 + \beta k^2}. \quad (1.35)$$

*Решение:* Преобразуем соотношение (1.35) к виду

$$\omega = c_0 k - \beta \omega k^2.$$

Тогда при помощи замены (1.2) получаем линейное уравнение

$$u_t + c_0 u_x - \beta u_{xxt} = 0.$$

Комбинируя его с (1.8), получаем уравнение

$$u_t + uu_x - \beta u_{xxt} = 0,$$

предложенное в [28] в качестве альтернативы уравнению КдВ для описания поверхностных волн на воде.

**Задача 1.3.** Основной недостаток уравнения Буссинеска состоит в том, что при  $k^2 > c_0/2\beta$  частота  $\omega$  в (1.31) становится мнимой, т.е. возникает неустойчивость. Эта неустойчивость является нефизической, её причиной является нарушение длинноволнового приближения. Поэтому Буссинеск модифицировал закон дисперсии (1.31)

$$\omega^2 = \frac{c_0^2 k^2}{1 + 2\beta k^2/c_0}, \tag{1.36}$$

чтобы тот не допускал неустойчивости. Очевидно, что в области малых  $k$  (1.31) и (1.36) совпадают (рис. 1.9). Получите аналог уравнения (1.32) для закона дисперсии (1.36).

*Решение:* Преобразуем соотношение (1.36) к виду

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - \frac{2\beta \omega^2 k^2}{c_0}.$$

Тогда соответствующее линейное волновое уравнение будет иметь вид

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - \frac{2\beta}{c_0} u_{xxtt} = 0.$$

Комбинируя его с уравнением (1.11), получаем так называемое *улучшенное* (improved) уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta' u_{xxtt} = 0,$$

где  $\beta' = 2\beta/c_0$ .

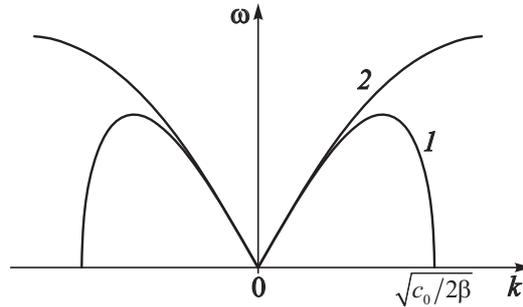


Рис. 1.9. Законы дисперсии уравнения Буссинеска (кривая 1) и улучшенного уравнения Буссинеска (кривая 2)

### 1.4.2. Среда с дисперсией в области низких частот

Среду с низкочастотной дисперсией можно описать, например, дисперсионным соотношением (рис. 1.10)

$$\omega^2 = \omega_0^2 + c_0^2 k^2. \quad (1.37)$$

Закону дисперсии (1.37), очевидно, соответствует *уравнение Клейна–Гордона–Фока*.

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + \omega_0^2 u = 0.$$

Оно, в частности, описывает распространение волны в среде-цепочке из линейных осцилляторов с собственной частотой  $\omega_0$  [2, 11].

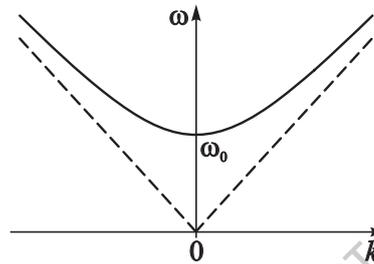


Рис. 1.10. Дисперсионная диаграмма для среды с дисперсией в области низких частот

Нелинейный аналог этого уравнения можно получить, полагая осцилляторы нелинейными ( $\omega_0 = \omega_0(u)$ ). В общем случае будем иметь так называемое *нелинейное уравнение Клейна–Гордона*

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + F(u) = 0,$$

где  $F(u)$  — некоторая нелинейная функция. Особый интерес представляет случай, когда  $F(u) = \omega_0^2 \sin u$ :

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + \omega_0^2 \sin u = 0. \quad (1.38)$$

Уравнение (1.38) получило название *уравнения Син–Гордона*. Оно играет чрезвычайно важную роль во многих областях физики, так как описывает динамику дислокаций в кристаллах, движение доменных стенок в ферромагнетике, волны в распределенных контактах Джозефсона, распространение ультракоротких лазерных импульсов в среде из двухуровневых частиц и т.д. ([16] и лекц. 8).

**Задача 1.4.** В квантовой механике частице ставится в соответствие *волна де Бройля*, частота и волновое число которой связаны с энергией и импульсом частицы соотношениями

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k, \quad (1.39)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ . Распространение волны де Бройля описывается волновой функцией  $\psi(x, t)$ . Получите уравнение Шрёдингера, которому подчиняется динамика волновой функции нерелятивистской частицы, движущейся в поле с потенциальной энергией  $V$ .

*Решение:* Запишем закон сохранения энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} + V,$$

где  $m$  — масса частицы. С помощью соотношений (1.39) получим отсюда закон дисперсии для волн де Бройля:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V.$$

Замена (1.2) приводит к *уравнению Шрёдингера* — основному уравнению нерелятивистской квантовой механики:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V\psi.$$

Обратим внимание, что уравнение получилось комплексным, поскольку закон дисперсии содержит как четные, так и нечетные степени  $\omega$  и  $k$ .

Приведенное выше рассуждение, конечно, не является вполне строгим, так как потенциальная энергия, вообще говоря, зависит от координат и времени, однако приводит к правильному результату.

**Задача 1.5.** Закон сохранения энергии для свободной релятивистской частицы имеет вид

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2.$$

где  $m$  — масса покоя,  $c$  — скорость света. Покажите, что в этом случае волновая функция подчиняется уравнению Клейна–Гордона–Фока

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + m^2 c^4 \psi = 0,$$

которое является релятивистским обобщением уравнения Шрёдингера.

### 1.4.3. Среда с дисперсией и диссипацией

Объединив уравнения (1.22) и (1.29), получим эталонное уравнение для сред с диссипацией и дисперсией в области высоких частот

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}, \tag{1.40}$$

называемое *уравнением Кортевега–де Вриза–Бюргерса* (КДВБ). Уравнение (1.40) с граничными условиями

$$u = \begin{cases} u_1, & x \rightarrow \infty, \\ u_2 > u_1, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

имеет решения в виде стационарных ударных волн. В наиболее интересном случае, когда дисперсионные и диссипативные эффекты одного порядка, эти волны имеют осциллирующий передний фронт, напоминающий последовательность солитонов (рис. 1.11). К ударным волнам такого типа относятся, в частности, магнитозвуковые и альфвеновские ударные волны в плазме [12].

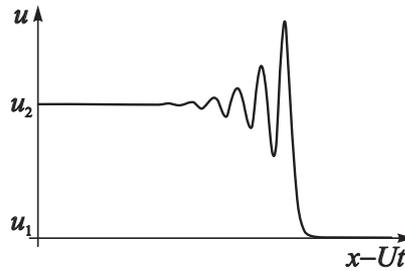


Рис. 1.11. Стационарная ударная волна уравнения КДВ–Бюргерса

## 1.5. Распространение волновых пакетов

Еще один важный класс задач теории нелинейных волн связан с распространением *волновых пакетов* с узким спектром, сосредоточенным вблизи некоторой несущей частоты  $\omega_0$ . В этом случае естественно искать решение в виде квазигармонической волны с медленно меняющейся амплитудой

$$u(x, t) = a(x, t) \exp [i(k_0 x - \omega_0 t)] + \text{к.с.},$$

где  $\omega_0 = \omega(k_0)$ , к.с. — комплексно сопряженное. Условие медленности изменения амплитуды  $a$  означает, что

$$|a_t| \ll | -i\omega_0 a|, \quad |a_x| \ll |ik_0 a|.$$

Нелинейные эффекты приводят к тому, что в дисперсионное соотношение входит амплитуда волны:

$$\omega = \omega(k, |a|^2). \quad (1.41)$$

Это аналогично зависимости периода колебаний нелинейного осциллятора от амплитуды [3]. Выражение (1.41) называется *нелинейным дисперсионным соотношением*. Если спектр волнового пакета достаточно узкий ( $|k - k_0| \ll k_0$ ), а нелинейность слабая, можно разложить выражение (1.41) в ряд Тейлора в окрестности точки ( $k = k_0; |a|^2 = 0$ ):

$$\omega = \omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial k} (k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} (k - k_0)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial |a|^2} |a|^2 + \dots,$$

где все производные берутся в точке  $(k_0; 0)$ . Вводя частоту и волновое число *огibaющей* волнового пакета

$$\Omega = \omega - \omega_0, \quad K = k - k_0,$$

получаем

$$\Omega = v_g K + \frac{1}{2} \omega_0'' K^2 - \beta |a|^2, \quad (1.42)$$

где  $v_g = \partial\omega/\partial k$  — групповая скорость,

$$\omega_0'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}, \quad \beta = -\frac{\partial \omega}{\partial |a|^2}.$$

Поскольку для *огibaющей*  $a(x, t)$

$$a_t = -i\Omega a, \quad a_x = iK a, \quad (1.43)$$

нелинейному дисперсионному соотношению (1.42) можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение

$$i(a_t + v_g a_x) + \frac{\omega_0''}{2} a_{xx} + \beta |a|^2 a = 0. \quad (1.44)$$

Если устранить член, содержащий  $a_x$ , переходом в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, то уравнение (1.44) формально примет вид квантовомеханического уравнения Шрёдингера с потенциалом, пропорциональным  $|a|^2$ . Поэтому оно получило название *нелинейного уравнения Шрёдингера* (НУШ). НУШ является эталонным уравнением, описывающим распространение *огibaющей* волнового пакета в средах с дисперсией и встречается при описании нелинейных гравитационных волн на поверхности глубокой воды, ленгмюровских волн в плазме, электромагнитных волн в нелинейном диэлектрике и во многих других задачах (см. [16] и лекцию 11).

Подобно уравнению КдВ, НУШ имеет решения в виде солитонов (они называются *солитонами огibaющей*, рис. 1.12). При этом поле волны  $u(x, t)$  имеет вид радиоимпульса. Можно получить оценку параметров солитона НУШ, полагая, что нелинейный и дисперсионный члены в (1.44) взаимно уравновешивают друг друга:

$$\frac{\omega_0'' a_{xx}}{2} \sim -\beta |a|^2 a.$$

Вводя амплитуду солитона  $a_0$  и характерную ширину  $\Delta$  (см. рис. 1.12б), получим

$$\frac{\omega_0'' a_0}{2\Delta^2} \sim \beta a_0^3.$$

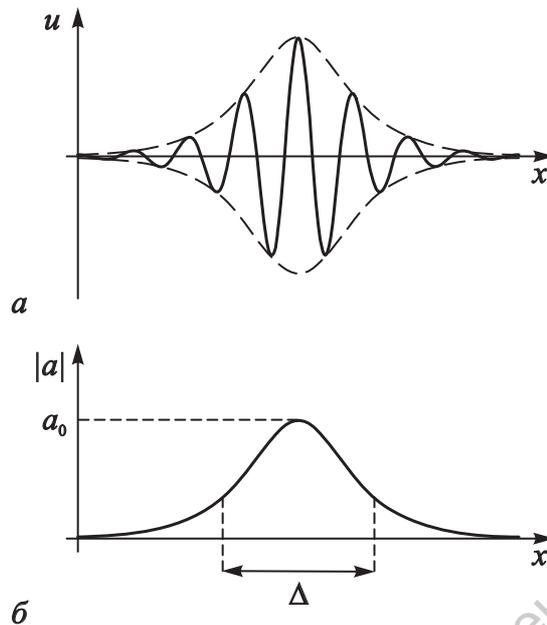


Рис. 1.12. Солитон огибающей нелинейного уравнения Шрёдингера

Отсюда следует связь между параметрами солитона

$$\frac{2\beta a_0^2 \Delta^2}{\omega_0''} = \text{const.} \quad (1.45)$$

Из соотношения (1.45) можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, солитонные решения возможны только в том случае, когда знаки  $\beta$  и  $\omega_0''$  одинаковы. Кроме того, как и в случае солитонов КдВ, чем больше амплитуда солитона, тем меньше его ширина, причем поскольку  $a_0^2 \Delta^2 \sim \text{const}$ , площадь под огибающей у всех солитонов должна быть одинакова. Анализ, проведенный в лекции 11, позволит подтвердить справедливость этих оценочных выводов.

## 1.6. Нелинейные волны в средах с неустойчивостью

До сих пор мы ограничивались рассмотрением либо консервативных, либо диссипативных сред. Обратимся теперь к средам *активным*, где имеются распределенные внутренние источники энергии. Достаточно типичным является случай, когда дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = \omega_r(k; |a|^2) + i\omega_i(k; \nu), \quad (1.46)$$

где  $\nu$  — управляющий параметр, причем если  $\nu$  меньше некоторого критического значения  $\nu_c$ , то  $\omega_i(k; \nu) < 0$ , так что любое возмущение

$$u(x, t) = a(x, t) \exp(\omega_i t) \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]$$

затухает. Пусть при  $\nu = \nu_c$  функция  $\omega_i$  обращается в нуль в точке  $k = k_c$ . Таким образом, при  $\nu > \nu_c$  возмущения, волновые числа которых лежат в окрестности  $k_c$  начинают нарастать (рис. 1.13).

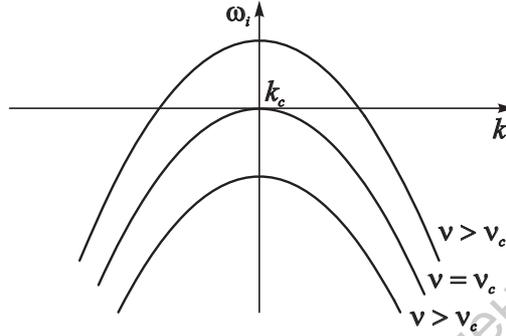


Рис. 1.13. Зависимость  $\omega_i(k)$  при различных значениях параметра  $\nu$

Рассмотрим случай слабой надкритичности ( $\nu \gtrsim \nu_c$ ) и разложим соотношение (1.46) в ряд Тейлора в точке ( $k = k_c; \nu = \nu_c; |a|^2 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \omega = \omega_c + \frac{\partial \omega_r}{\partial k} (k - k_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2} (k - k_c)^2 + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k^2} (k - k_c)^2 + \\ + \frac{\partial \omega_r}{\partial |a|^2} |a|^2 + i \frac{\partial \omega_i}{\partial |a|^2} |a|^2 + i \frac{\partial \omega_i}{\partial \nu} (\nu - \nu_c) + \dots, \end{aligned}$$

где  $\omega_c = \omega_r(k_c; 0)$ . При этом мы учли, что при  $k = k_c, \nu = \nu_c$

$$\omega_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial k} = 0.$$

Вводя аналогично § 1.5 частоту и волновое число огибающей  $\Omega = \omega - \omega_c$ ,  $K = k - k_c$  и осуществляя замену (1.43), получаем

$$i(a_t + v_g a_x) + \beta a_{xx} + \gamma |a|^2 a = i\alpha a, \quad (1.47)$$

где

$$\begin{aligned} v_g &= \partial \omega_r / \partial k, \quad \alpha = (\nu - \nu_c) \partial \omega_i / \partial \nu, \\ \beta &= \frac{1}{2} (\partial^2 \omega_r / \partial k^2 + i \partial^2 \omega_i / \partial k^2), \\ \gamma &= -(\partial \omega_r / \partial |a|^2 + i \partial \omega_i / \partial |a|^2). \end{aligned}$$

Видно, что при  $\nu > \nu_c$ , что соответствует  $\alpha > 0$ , имеет место неустойчивость, тогда как при  $\nu < \nu_c$  ( $\alpha < 0$ ) — затухание. Уравнение (1.47), которое

можно рассматривать как обобщение НУШ (1.44) на случай активной среды, носит название *уравнения Гинзбурга–Ландау*. Впервые оно возникло в теории сверхпроводимости [29]. Впоследствии была выяснена универсальная роль этого уравнения в теории нелинейных волн: оно возникает, например, при описании тепловой конвекции Рэлея–Бенара [30], плоского течения Пуазейля (течения жидкости между двумя параллельными плоскостями) [31], течения Тейлора–Куэтта между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами [32], колебательных химических реакций при наличии диффузии [33], и т.д.

Совершенно иная ситуация реализуется при взаимодействии волн с положительной и отрицательной энергиями, когда неустойчивые корни дисперсионного уравнения возникают комплексно-сопряжёнными парами. Пусть взаимодействуют две волны с законами дисперсии  $\omega = \omega_1(k)$  и  $\omega = \omega_2(k)$  и пусть при  $k = k_0$  имеет место синхронизм

$$\omega_0 = \omega_1(k_0) = \omega_2(k_0).$$

Тогда вблизи синхронизма дисперсионное соотношение связанных волн с энергиями разных знаков можно представить в виде [2, 11]

$$(\Omega - c_1 K)(\Omega - c_2 K) = -\alpha^2. \quad (1.48)$$

Здесь, как и прежде,  $\Omega = \omega - \omega_0$ ,  $K = k - k_0$  — частота и волновое число огибающей,  $c_{1,2}$  — групповые скорости взаимодействующих волн,  $\alpha^2$  — параметр связи. Если  $c_1$  и  $c_2$  имеют одинаковые знаки, то неустойчивость конвективная, а если разные — абсолютная (рис. 1.14).

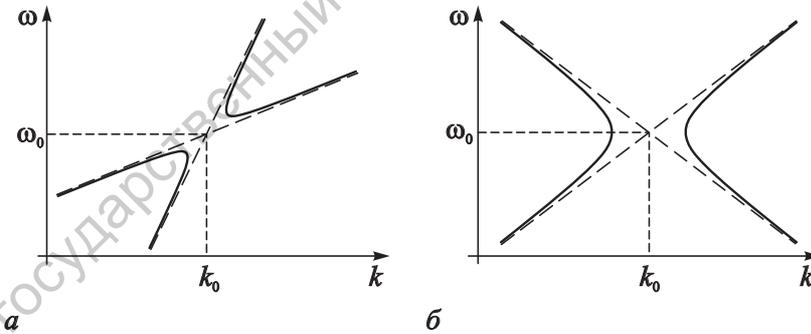


Рис. 1.14. Дисперсионные диаграммы взаимодействия волн с энергиями разных знаков при конвективной (а) и абсолютной (б) неустойчивостях

Линейное волновое уравнение для огибающей  $a(x, t)$ , соответствующее (1.48), имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) a = \alpha^2 a.$$

Дополнив это уравнение нелинейными членами, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) a = F(a), \quad (1.49)$$

где нелинейная функция  $F(a)$  должна описывать эффекты насыщения неустойчивости. В частности, в случае слабой нелинейности будем иметь

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) a = \alpha^2 a - \beta |a|^2 a. \quad (1.50)$$

Отметим, что при  $c_1 = -c_2 = c$  уравнение (1.50) принимает вид

$$a_{tt} - c^2 a_{xx} = \alpha^2 a - \beta |a|^2 a,$$

так что его естественно назвать *неустойчивым уравнением Клейна–Гордона* (см. § 1.4.2). Уравнения типа (1.49) встречаются при описании ряда неустойчивых волновых систем, например, гидродинамической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [34], лазерных усилителей [35], электронного потока в скрещенных электрическом и магнитном статических полях, взаимодействующего с электромагнитной волной [36]. Нелинейным волнам в средах с неустойчивостями посвящена лекция 12.

## 1.7. Обобщение на неодномерный случай

Эвристический подход позволяет обобщить уравнения, полученные в предыдущих параграфах, на случай большего числа пространственных измерений. Рассмотрим, например, закон дисперсии (1.27). В неодномерном случае он принимает вид

$$\omega = \mathbf{c}_0 \mathbf{k} - \beta \mathbf{k}^3. \quad (1.51)$$

Предположим, что векторы  $\mathbf{c}_0$  и  $\beta$  имеют только продольные составляющие, направленные вдоль оси  $x$ . Тогда уравнение (1.51) принимает вид

$$\omega = c_0 k_{\parallel} - \beta k^2 k_{\parallel}, \quad (1.52)$$

где  $k^2 = k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2$ ,  $k_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$  — продольное и поперечное волновые числа, соответственно. Осуществляя замену

$$\omega \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial t}, \quad k_{\parallel} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x}, \quad k_{\perp}^2 \rightarrow -\Delta_{\perp}, \quad (1.53)$$

где  $\Delta_{\perp}$  — оператор Лапласа по поперечным координатам, получаем линейное дифференциальное уравнение, соответствующее закону дисперсии (1.52):

$$u_t + c_0 u_x + \beta u_{xxx} = -\beta (\Delta_{\perp} u)_x.$$

Обобщая его на нелинейный случай, получаем простейший неодномерный аналог уравнения КдВ — *уравнение Захарова–Кузнецова*

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = -\beta(\Delta_{\perp} u)_x, \quad (1.54)$$

описывающее, например, неодномерные ионно-звуковые волны в замагниченной плазме [37].

Особый интерес представляет ситуация, когда поперечные эффекты являются слабыми, т.е.  $k_{\perp} \ll k_{\parallel}$ . В этом случае

$$k = \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2} = k_{\parallel} \sqrt{1 + (k_{\perp}/k_{\parallel})^2} \approx k_{\parallel} + \frac{k_{\perp}^2}{2k_{\parallel}}.$$

Тогда закон дисперсии (1.51) принимает вид

$$\omega \approx c_0(k_{\parallel} + k_{\perp}^2/2k_{\parallel}) - \beta k_{\parallel}^3 + \dots$$

(членами, содержащими  $k_{\perp}^2 k_{\parallel}$  и  $k_{\perp}^4/k_{\parallel}$ , пренебрегаем в силу их малости). Приведем это соотношение к виду

$$k_{\parallel} \left( \omega - c_0 k_{\parallel} + \beta k_{\parallel}^3 \right) = \frac{c_0 k_{\perp}^2}{2}. \quad (1.55)$$

При помощи замены (1.53) получаем линейное уравнение, соответствующее (1.55)

$$(u_t + c_0 u_x + \beta u_{xxx})_x = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u.$$

Его нелинейное обобщение, очевидно, имеет вид

$$(u_t + uu_x + \beta u_{xxx})_x = -\frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u. \quad (1.56)$$

Уравнение (1.56), являющееся *слабонеодномерным* аналогом уравнения КдВ, носит название *уравнения Кадомцева–Петвиашвили* [38]. Оно встречается в ряде задач гидродинамики и физики плазмы (см., например, [39]).

Очевидно, что уравнение Кадомцева–Петвиашвили имеет решения в виде плоских одномерных солитонов, совпадающих с соответствующими решениями уравнения КдВ. Оказывается, что при аномальной дисперсии ( $\beta < 0$ ) плоский солитон неустойчив и распадается на двумерные солитоны, локализованные как в  $x$ – так и в  $y$ –направлении [38, 39].

Для сред без дисперсии вместо уравнения (1.56) можно записать обобщение уравнения простой волны (1.8)

$$(u_t + uu_x)_x = -\frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u$$

— *уравнение Хохлова–Заболотской* [40] и неодномерное уравнение Бюргера

$$(u_t + uu_x - \nu u_{xx})_x = -\frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u,$$

которое называют *уравнением Заболотской–Хохлова–Кузнецова* [41]. Эти уравнения применяются для описания нелинейной дифракции акустических пучков.

### 1.8. Неполиномиальные дисперсионные соотношения

В заключение кратко обсудим случай, когда дисперсионное соотношение является неполиномиальным. Такая ситуация реализуется достаточно часто. Типичным примером является дисперсия гравитационных волн на поверхности слоя жидкости глубины  $h$

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kh). \quad (1.57)$$

В длинноволновом пределе, разлагая соотношение (1.57) в ряд, получаем

$$\omega = \sqrt{gh} \left( k - \frac{k^3 h^2}{6} + \dots \right). \quad (1.58)$$

Если ограничиться лишь первым членом в этом разложении, т.е. пренебречь дисперсией, то, очевидно, в качестве модели для описания слабо-нелинейных процессов получим уравнение простой волны (1.8), решения которого суть опрокидывающиеся волны. С другой стороны, учет двух членов в (1.58) приводит к уравнению КдВ (1.29), которое вместо опрокидывания предсказывает образование солитонов. Можно ожидать, что более точная аппроксимация закона дисперсии (1.57) позволит получить уравнение, которое бы имело решения как в виде уединенных, так и опрокидывающихся волн, что лучше согласуется с действительностью.

Рассмотрим дисперсионное соотношение

$$\omega = c(k)k. \quad (1.59)$$

Разложим фазовую скорость  $c(k)$  в интеграл Фурье:

$$c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta,$$

где

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk.$$

Подставляя это выражение в соотношение (1.59) и выполняя обратное преобразование Фурье, приходим к *интегродифференциальному* уравнению

$$u_t + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_\xi(\xi, t) d\xi = 0. \quad (1.60)$$

Дополняя его нелинейными членами, получаем

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_\xi(\xi, t) d\xi = 0. \quad (1.61)$$

Это уравнение получило название *уравнения Уизема* [9]. Отметим, что в случае, когда  $c(k)$  — полином

$$c = c_0 + c_2 k^2 + \dots + c_{2n} k^{2n},$$

очевидно, будем иметь

$$K(x) = c_0 \delta(x) - c_2 \delta''(x) + \dots + (-1)^n c_{2n} \delta^{2n}(x),$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Таким образом, уравнение (1.60) принимает вид чисто дифференциального уравнения

$$u_t + c_0 u_x - c_2 u_{xxx} + \dots + (-1)^n c_{2n} \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} = 0.$$

Проблема заключается в том, что общем случае (в том числе и для закона дисперсии (1.57)) ядро  $K(x)$  не удастся вычислить в явном виде. Однако можно показать, что оно обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} K(x) &= K(-x), \\ K(x) &\sim (2\pi x)^{-1/2} \quad \text{при } x \rightarrow 0, \\ K(x) &\sim (\pi^2 x/2)^{-1/2} \exp(-\pi x/2) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \\ \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx &= 1. \end{aligned}$$

Уизем предложил использовать следующую аппроксимацию ядра [9]

$$K(x) = \frac{\pi}{4} \exp\left(-\frac{\pi|x|}{2}\right), \quad (1.62)$$

которая довольно хорошо описывает его поведение при  $x \rightarrow \infty$ . Уравнение (1.61) с ядром (1.62), действительно, более адекватно описывает свойства волн на поверхности воды, чем уравнения простой волны и КдВ в отдельности. В частности, можно показать, что начальное возмущение в виде одиночного горба опрокидывается при выполнении условия

$$m_1 + m_2 \leq -\frac{4}{3} K(0) = -\frac{\pi}{3}, \quad (1.63)$$

где  $m_1 = \min u_x(t=0)$ ,  $m_2 = \max u_x(t=0)$ . Таким образом, опрокидываются лишь достаточно асимметричные горбы. Если же условие (1.63) не выполнено, то образуются уединенные волны.

Уравнение Уизема предсказывает и другое явление, характерное для поверхностных волн на воде: *заострение* волн, т.е. образование профилей, подобных изображенному на рис. 1.15. Более того, значение угла в вершине заостренного профиля  $\varphi \approx 110^\circ$  близко к точному результату  $120^\circ$ , полученному еще Стоксом.

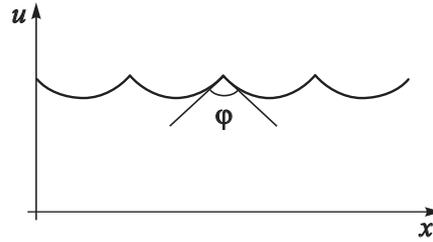


Рис. 1.15. Заостренный профиль волны на поверхности воды

Аналогичные уравнения можно получить и для диссипативных сред. Так, в работе [42] было предложено обобщение уравнения КдВБ (1.40)

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = - \int_{-\infty}^{\infty} L(x - \xi) u(\xi, t) d\xi. \quad (1.64)$$

Здесь ядро  $L$  является Фурье-образом мнимой части дисперсионного соотношения  $\omega = \omega_r(k) + i\omega_i(k)$ :

$$L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i(k) e^{ikx} dk.$$

В случае, когда  $\omega_i = \nu k^2$  уравнение (1.64) переходит в (1.40). Однако в ряде практически важных случаев диссипацию нельзя считать бюргерсовской. Например, как отмечается в [42], для ионно-звуковой волны в плазме, когда диссипация определяется затуханием Ландау на электронах,  $\omega_i = \nu|k|$ .

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

## Лекция 2.

# Простая волна

Подобно пловцу, мы интересуемся движением волн. ... Наш аналог сводится к одному уравнению движения, являющемуся стандартной формой аналога для течения ... среды. Уравнение аналога имеет гиперболический тип. ... рассматриваются характеристики этого уравнения и обсуждается природа его непрерывных решений и их связь с начальными и граничными условиями.

У. Фикетт. Введение в теорию детонации (М.: Мир, 1989. С. 25)

### 2.1. Уравнение простой волны и его решение методом характеристик

Изучение нелинейных волн в средах без дисперсии начнем с уравнения простой волны

$$u_t + uu_x = 0. \quad (2.1)$$

На его примере мы продемонстрируем основные нелинейные эффекты, введем необходимые термины и понятия, а строгие в математическом отношении определения (в том числе и определение простой волны) дадим в лекции 4, когда будет рассматриваться общий случай системы гиперболических уравнений.

Простым, но полезным примером физической системы, описываемой уравнением (2.1), является поток невзаимодействующих частиц, движущихся вдоль оси  $x$ . Уравнения свободного движения отдельной частицы есть

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad (2.2)$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad (2.3)$$

где  $u$  — скорость частицы. Записывая уравнение (2.3) в частных производных, получаем уравнение (2.1), где теперь  $u(x, t)$  — скорость потока в данной точке пространства в данный момент времени.

Таким образом, на линиях на плоскости  $(x, t)$ , удовлетворяющих уравнению (2.2), уравнения в частных производных (2.1) и в полных производных (2.3) эквивалентны. Эти линии называются *характеристиками*, а уравнение (2.3) — *характеристической формой* (2.1). В данном случае физический смысл характеристик достаточно ясен: они представляют собой траектории частиц. Однако такую простую интерпретацию можно дать далеко не всегда. Подробнее эти вопросы будут обсуждены в лекции 4.

Для более общего уравнения

$$u_t + V(u)u_x = 0. \quad (2.4)$$

характеристической формой по-прежнему является уравнение (2.3), однако вместо уравнения характеристик (2.2) имеем

$$\frac{dx}{dt} = V(u). \quad (2.5)$$

Заметим, что согласно (2.3) производная  $dV/dt$  также равна нулю на характеристиках (2.5):

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Таким образом, уравнение (2.4) можно переписать в виде, эквивалентном (2.1):

$$V_t + VV_x = 0.$$

Уравнения характеристик, вообще говоря, нельзя найти в явном виде, поскольку (2.2) содержит неизвестные значения  $u$  на этих кривых. Однако совместное рассмотрение уравнений (2.2) и (2.3) приводит к одновременно построению характеристики и решения на ней. Этот метод решения известен как метод характеристик [9, 11]. В данном случае в силу уравнения (2.3)  $u$  остается константой на характеристиках, которые, следовательно, представляют собой прямые на плоскости  $(x, t)$ . Таким образом, нахождение решения уравнения (2.1) сводится к построению семейства прямых, наклон которых равен значению  $u$  на них.

Для задачи с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(t = 0) &= \xi, \\ u(x; t = 0) &= f(\xi), \end{aligned}$$

где  $\xi$  — начальная координата частицы, интегрирование уравнений (2.2) и (2.3) дает

$$x = \xi + f(\xi)t. \quad (2.6)$$

Заметим, что при таком подходе  $x$  является, по сути дела, зависимой переменной, а роль независимых играют  $\xi$  и  $t$ :  $x = x(\xi, t)$ .

Для задачи с граничными условиями

$$\begin{aligned} t(x=0) &= \tau, \\ u(x=0; t) &= f^{-1}(\tau), \end{aligned}$$

где  $\tau$  — момент времени, в который частица влетает в область, на границе которой задано возмущение, независимыми переменными являются  $x$  и  $t$ :  $t = t(x, \tau)$ . Тогда вместо решения (2.6) имеем

$$t = \tau + f(\tau)x. \quad (2.7)$$

Такой подход называется описанием в *переменных Лагранжа*, пользуясь которым, фактически, следят за движением отдельных частиц потока. Выбор в качестве независимых переменных  $x$  и  $t$  называют описанием в *переменных Эйлера*. В этом случае мы рассматриваем поток в целом, как сплошную среду [43]. Заметим, что, выражая из соотношений (2.6) и (2.7)  $\xi$  или  $\tau$  через  $x$ ,  $t$  и  $u$ , нетрудно прийти к решению Римана (1.13)

$$u(x, t) = f(x - ut),$$

справедливость которого была показана в лекции 1.

Условие пересечения двух близлежащих характеристик, очевидно, есть

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + f't = 0 \quad (2.8)$$

для уравнения (2.6) или

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1 + f'x = 0 \quad (2.9)$$

для уравнения (2.7), где  $f'$  означает  $df/d\xi$  и  $df/d\tau$ , соответственно. Из полученных ранее формул (1.14) видно, что эти условия означают обращение в бесконечность производных  $u_x$ ,  $u_t$ . Следовательно, опрокидывание волны происходит там, где  $f' < 0$  и  $|f'|$  принимает максимальное значение, т.е. в первом случае в момент времени

$$t^* = -\frac{1}{f'_{max}},$$

во втором случае — в точке

$$x^* = -\frac{1}{f'_{max}}.$$

Отметим, что для потока невзаимодействующих частиц опрокидывание соответствует обгону одних частиц другими, поскольку характеристики есть траектории частиц.

**Задача 2.1.** Найти момент опрокидывания волны в случае, когда начальное возмущение представляет собой

а) гауссов импульс

$$u(x, 0) = a \exp(-\xi^2/2l^2);$$

б)  $\cos^2$ -импульс

$$u(x, 0) = \begin{cases} a \cos^2(kx), & |kx| < \pi/2, \\ 0, & |kx| > \pi/2 \end{cases}$$

Ответ: а)  $t^* = l\sqrt{e}/a$ ; б)  $t^* = 1/ak$ .

## 2.2. Задача о распространении гармонического сигнала. О группировке электронов в пролетном клистроне

Продemonстрируем развитый подход на конкретном примере. Рассмотрим задачу с граничным условием

$$u(x = 0; \tau) = u_0 + a \sin(\omega\tau), \quad (2.10)$$

что означает синусоидальную модуляцию потока частиц по скорости. Подобная задача возникает, в частности, в теории *пролетного клистрона* — электронного сверхвысокочастотного усилителя [44]. Принципиальная схема двухрезонаторного клистрона приведена на рис. 2.1. В плоскости  $x = 0$  расположен объемный резонатор — устройство, в котором возбуждаются высокочастотные электромагнитные колебания на некоторой частоте  $\omega$ , близкой к собственной частоте резонатора  $\omega_0$ . Эти колебания и являются полезным сигналом, который необходимо усилить. Резонатор выполнен таким образом, что в нем имеется область, в которой поле можно приближенно считать однородным (емкостной зазор). Для простоты ограничимся рассмотрением бесконечно тонкого зазора. Сквозь этот зазор параллельно силовым линиям электрического поля пролетают электроны, приобретая скоростную модуляцию. Если амплитуда модулирующего напряжения на стенках зазора  $V_1$  мала по сравнению с ускоряющим напряжением  $V_0$  ( $eV_0 = mu_0^2/2$ , где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона), то можно считать модуляцию синусоидальной и воспользоваться уравнением (2.10), где

$$a = \frac{u_0 V_1}{2V_0}.$$

Покинув зазор резонатора, электроны попадают в область, свободную от ВЧ полей — пространство дрейфа. Если пренебречь силами кулоновского отталкивания, можно считать, что движение потока электронов в этой области подчиняется уравнению (2.1).

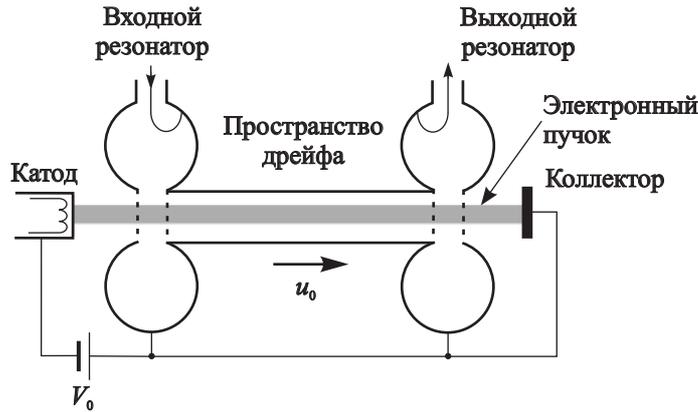


Рис. 2.1. Принципиальная схема двухрезонаторного клистрона

Интегрирование уравнения (2.2) дает

$$t = \tau + \frac{x}{u_0 + a \sin(\omega\tau)}.$$

Вводя обозначения  $\theta = \omega t$ ,  $\theta_0 = \omega\tau$ , получаем

$$\theta = \theta_0 + \frac{\omega x}{u_0 + a \sin \theta_0}. \quad (2.11)$$

Считая  $a \ll u_0$ , можно приближенно записать

$$\theta = \theta_0 + \frac{\omega x}{u_0} - X \sin \theta_0, \quad (2.12)$$

где  $X = \omega a x / u_0^2$ . Уравнение (2.12) позволяет построить картину характеристик на плоскости  $(x, \theta)$ , которая приведена на рис. 2.2.

Для нахождения момента обгона одних электронов другими (или опрокидывания волны) следует воспользоваться уравнением (2.9). Получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} = 1 - X \cos \theta_0. \quad (2.13)$$

Нужно определить, при каком минимальном  $X$  это выражение обращается в нуль. Очевидно, что это происходит при

$$X = 1, \quad \cos \theta_0 = 1. \quad (2.14)$$

Движение модулированного по скорости потока электронов в пространстве дрейфа сопровождается образованием последовательности чередующихся уплотнений и разрежений, периодичность которых определяется частотой  $\omega$ . Это явление называется *группировкой* электронов. На рис. 2.2 хорошо видны области сгущения и разрежения характеристик. Сгустки

образуются около электронов, имеющих начальную фазу  $\theta_0 = 2\pi n$ , разрежения — около электронов с  $\theta_0 = 2\pi n + \pi$ . Таким образом, появляется переменная составляющая тока на частоте сигнала. Возбуждая этим током еще один резонатор, можно добиться значительного усиления входного сигнала. Ток можно найти при помощи уравнения непрерывности (закона сохранения заряда), которое в переменных Лагранжа имеет вид [44]

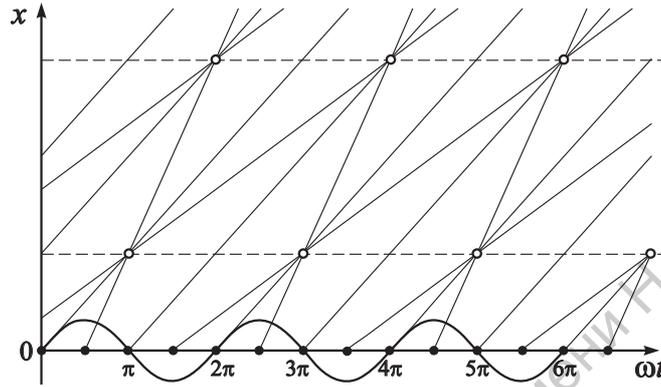


Рис. 2.2. Характеристики для задачи о распространении гармонического сигнала

$$I d\theta = I_0 d\theta_0, \quad (2.15)$$

где  $I$  — ток,  $I_0 = I(x = 0) = \text{const}$ . Подставляя соотношение (2.13) в уравнение (2.15), получаем

$$I = \frac{I_0}{1 - X \cos \theta_0}. \quad (2.16)$$

Отсюда видно, что при догоне одних электронов другими ток обращается в бесконечность. При  $X > 1$  всегда существуют две точки, называемые *фазовыми фокусами*, в которых  $I = \infty$ . Траектории фазовых фокусов определяются уравнением

$$1 - X \cos \theta_0 = 0.$$

Анализ группирования частиц (искажения профиля волны) удобно проводить графически. Перейдем в движущуюся систему отсчета

$$u' = u - u_0, \quad \theta' = \theta - \frac{\omega x}{u_0}.$$

Тогда, подставляя эти выражения в уравнения (2.10), (2.12) и опуская штрихи, получаем

$$u(\theta_0) = a \sin \theta_0,$$

$$\theta = \theta_0 - X \sin \theta_0.$$

Из этих уравнений нетрудно найти

$$u = a \sin \left( \theta + \frac{uX}{a} \right). \quad (2.17)$$

Разрешая уравнение (2.17) относительно  $\theta$ , получим

$$\theta = \arcsin \left( \frac{u}{a} \right) - \frac{uX}{a}. \quad (2.18)$$

Теперь построим графики функций  $\theta = \arcsin(u/a)$  и  $\theta = -uX/a$ . Первый, очевидно, соответствует исходному синусоидальному возмущению, а второй представляет собой прямую, наклон которой зависит от  $x$  (рис. 2.3). Складывая эти зависимости графически при различных  $x$ , можно получить картину группирования частиц (укручения волны). На рис. 2.4 представлены профили скорости  $u(\theta)$  в различных сечениях потока и соответствующие им профили тока  $I(\theta)$ , построенные согласно уравнению (2.16).

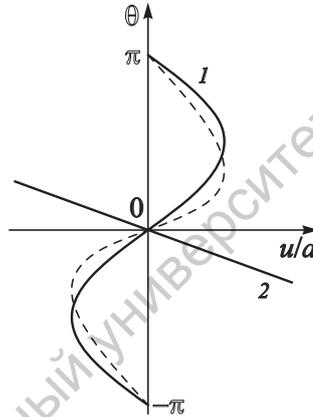


Рис. 2.3. К графическому анализу искажения профиля волны. 1 — кривая  $\theta = \arcsin(u/a)$ ; 2 — прямая  $\theta = -uX/a$

Для сравнения на рис. 2.5 приведены зависимости  $u(x)$  и  $I(x)$  в некоторый момент времени для потока невзаимодействующих частиц, полученные в результате численного моделирования методом «частиц в ячейке» (см., например, [45, 46]), наглядно иллюстрирующие процесс группирования<sup>1</sup>.

Заметим, что если пользоваться точным соотношением (2.11), а не приближенным (2.12), то вместо соотношений (2.17), (2.18) будем иметь

$$u = a \sin \left( \theta + X \frac{u/a}{1 + u/u_0} \right),$$

<sup>1</sup>В методе «частиц в ячейке» ток в дискретных узлах пространственной сетки как бы усредняется по размерам одной ячейки и поэтому не может обратиться в бесконечность. Тем не менее, на рис. 2.5б хорошо видны острые максимумы — фазовые фокусы.

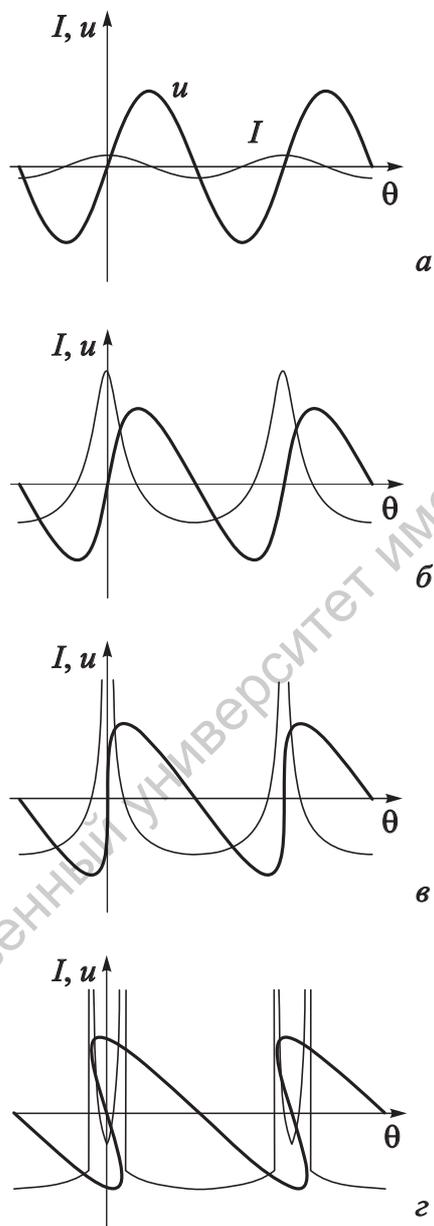


Рис. 2.4. Профили скорости  $u$  и тока  $I$  в различных сечениях электронного потока при группировке в пространстве дрейфа.  $a, б - X < 1$ ;  $в - X = 1$ ;  $г - X > 1$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) - X \frac{u/a}{1 + u/u_0},$$

и место прямых на рис. 2.3 займут соответствующие гиперболы.

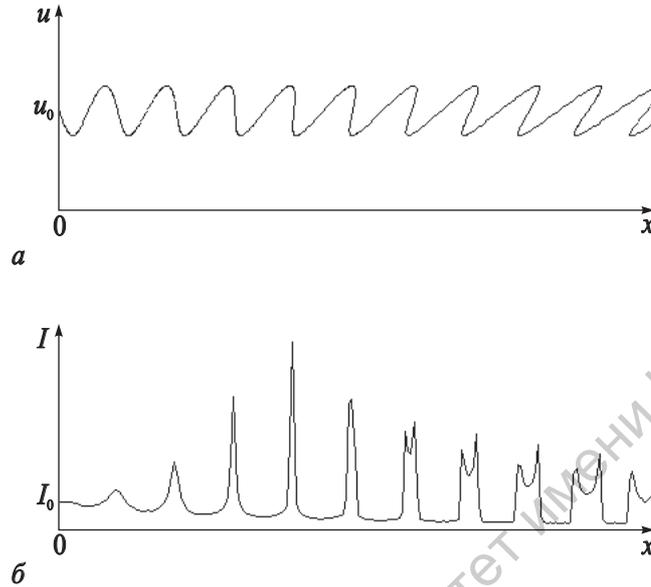


Рис. 2.5. Пространственные распределения скорости  $u$  и тока  $I$  в некоторый момент времени для потока не взаимодействующих частиц

### 2.3. Спектр опрокидывающейся волны

Проанализируем спектральный состав описанного выше решения. Ранее мы отмечали, что по мере распространения волны нелинейность приводит к рождению гармоник со всё более и более высокими номерами. Теперь подтвердим этот результат строго. Разложение  $u(x, \theta)$  в ряд Фурье имеет вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta, \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x, \theta) \sin n\theta \, d\theta, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x, \theta) \cos n\theta \, d\theta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Как видно из рис. 2.3, функция  $u(\theta)$  является нечетной, следовательно,  $B_n = 0$ . Найдем  $A_n$ , для чего выразим в (2.20)  $\theta$  через  $\theta_0$  при помощи

соотношения (2.12):

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a \sin \theta_0 \sin [n(\theta_0 - X \sin \theta_0)] \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} d\theta_0.$$

Подставляя сюда  $\partial \theta / \partial \theta_0$  из (2.13), получаем

$$A_n = \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta_0 \sin [n(\theta_0 - X \sin \theta_0)] (1 - X \cos \theta_0) d\theta_0.$$

Раскрывая скобки и выполняя элементарные преобразования с тригонометрическими функциями, приведем это выражение к виду

$$A_n = \frac{a}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \cos[(n-1)\theta_0 - nX \sin \theta_0] d\theta_0 - \int_0^{\pi} \cos[(n+1)\theta_0 - nX \sin \theta_0] d\theta_0 \right) - \frac{aX}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} \cos[(n-2)\theta_0 - nX \sin \theta_0] d\theta_0 - \int_0^{\pi} \cos[(n+2)\theta_0 - nX \sin \theta_0] d\theta_0 \right).$$

Используя интегральное представление функций Бесселя  $n$ -го порядка (см., например, [47])

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - z \sin t) dt, \quad (2.21)$$

вычислим интегралы:

$$A_n = a (J_{n-1}(nX) - J_{n+1}(nX)) - \frac{aX}{2} (J_{n-2}(nX) - J_{n+2}(nX)). \quad (2.22)$$

Упростим это выражение, используя рекуррентные свойства функций Бесселя [47]

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z).$$

С помощью этой формулы находим

$$J_{n+2}(nX) = \frac{2(n+1)}{nX} J_{n+1}(nX) - J_n(nX),$$

$$J_n(nX) = \frac{2(n-1)}{nX} J_{n-1}(nX) - J_{n-2}(nX).$$

Подставляя в (2.22), после ряда несложных преобразований окончательно получаем выражение

$$A_n = \frac{2a}{nX} J_n(nX), \quad (2.23)$$

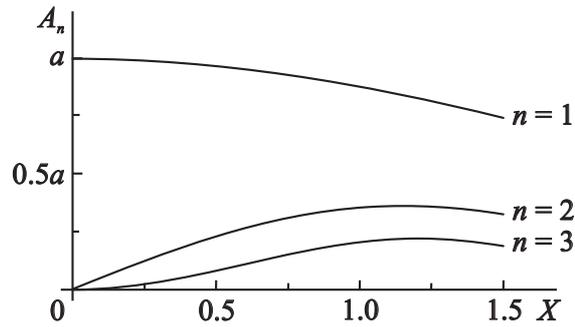


Рис. 2.6. Зависимости амплитуд первых трех гармоник от координаты согласно формуле (2.23)

известное в нелинейной акустике как *решение Бесселя–Фубини* [13, 15, 48]. Зависимости амплитуд трех первых гармоник от координаты, построенные в соответствии с этой формулой, приведены на рис. 2.6.

С учетом (2.23) разложение (2.19) принимает вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{nX} J_n(nX) \sin n\theta.$$

Переходя обратно в лабораторную систему отсчета, получаем

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{nX} J_n(nX) \sin n\omega \left( t - \frac{x}{u_0} \right).$$

**Задача 2.2.** Пользуясь законом сохранения заряда (2.15), вычислить спектр сгруппированного тока в пространстве дрейфа пролетного клистрона.

*Решение:* Разложение  $I(x, t)$  в ряд Фурье имеет вид

$$I = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta).$$

Здесь

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(x, \theta) d\theta,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(x, \theta) \sin n\theta d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(x, \theta) \cos n\theta d\theta.$$

Поскольку функция  $I(\theta)$  четная (см. рис. 2.4), коэффициенты  $A_n = 0$ . Вычислим коэффициенты  $B_n$ . Используя соотношения (2.12), (2.13) и (2.15), а также

интегральное представление функций Бесселя (2.21), получаем

$$B_0 = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_0 = 2I_0,$$

$$B_n = \frac{2I_0}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n(\theta_0 - X \sin \theta_0) d\theta_0 = 2I_0 J_n(nX).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$I(x, t) = I_0 + 2I_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(nX) \cos n\omega \left( t - \frac{x}{u_0} \right). \quad (2.24)$$

Выражение (2.24) широко используется при теоретическом расчете пролетных клистронов [44]. Из него, в частности, следует, что амплитуда первой гармоники сгруппированного тока  $B_1 = 2I_0 J_1(X)$  достигает максимума при  $X = 1.84$ . Это соотношение показывает, где необходимо расположить выходной резонатор прибора для получения максимального усиления. Заметим, что поскольку  $X > 1$ , при оптимальном режиме работы двухрезонаторного клистрона происходит обгон одних электронов другими (волна опрокидывается).

**Задача 2.3.** Решить задачу, аналогичную предыдущей, учитывая *силы пространственного заряда* (кулоновское взаимодействие между электронами), и найти момент обгона одних электронов другими (опрокидывания волны).

*Решение:* При наличии сил пространственного заряда электронный поток описывается уравнениями движения и непрерывности, которые в переменных Эйлера имеют вид (см., например, [2, гл. 12])

$$v_t + vv_x = \eta\varphi_x, \quad (2.25)$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0. \quad (2.26)$$

Здесь  $v$  — скорость,  $\rho$  — плотность заряда,  $\eta = e/m$  — удельный заряд электрона,  $\varphi$  — потенциал поля пространственного заряда, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\varphi_{xx} = \frac{\rho - \rho_0}{\varepsilon_0}, \quad (2.27)$$

где  $\rho_0$  — плотность заряда положительного ионного фона, которую можно считать равной средней плотности заряда электронов.

Введем напряженность электрического поля  $E = -\varphi_x$ . Тогда уравнение (2.27) принимает вид

$$\rho = \rho_0 - \varepsilon_0 E_x.$$

Подставляя это выражение в уравнение непрерывности (2.26), получаем

$$-E_{xt} - \left( v E_x - \frac{v \rho_0}{\varepsilon_0} \right)_x = 0.$$

Интегрирование этого уравнения с граничными условиями

$$E = E_x = 0, \quad v = v_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \text{при } x = 0,$$

что соответствует невозмущенному потоку, дает

$$E_t + vE_x = \frac{\rho_0(v - v_0)}{\varepsilon_0}.$$

Итак, система уравнений (2.25)–(2.27) сведена к двум связанным уравнениям простой волны

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= -\eta E, \\ E_t + vE_x &= \frac{\rho_0(v - v_0)}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Поскольку характеристики по-прежнему являются траекториями частиц, их уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Таким образом, характеристическая форма записи системы (2.28) есть

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\eta E, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(v - v_0). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Отсюда следует так называемое *уравнение колебаний электронного потока* [49]

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \omega_p^2(v - v_0) = 0, \quad (2.30)$$

где  $\omega_p = \sqrt{\eta\rho_0/\varepsilon_0}$  — плазменная частота. Общее решение уравнения (2.30) имеет вид

$$v = v_0 + A \cos \omega_p(t - \tau) + B \sin \omega_p(t - \tau), \quad (2.31)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования. Учитывая, что при синусоидальной модуляции по скорости граничное условие есть

$$v(t = \tau) = v_0 + a \sin(\omega\tau),$$

находим  $A = a \sin \theta_0$ . Интегрируя уравнение (2.31) еще раз, получаем уравнение характеристик

$$x = v_0(t - \tau) + \frac{a}{\omega_p} \sin \omega\tau \sin \omega_p(t - \tau) - \frac{B}{\omega_p} \cos \omega_p(t - \tau).$$

Поскольку  $x(t = \tau) = 0$ , находим, что  $B = 0$  и окончательно получаем

$$x = v_0(t - \tau) + \frac{a}{\omega_p} \sin \omega\tau \sin \omega_p(t - \tau), \quad (2.32)$$

$$v = v_0 + a \sin \omega\tau \cos \omega_p(t - \tau). \quad (2.33)$$

Из уравнения (2.32) следует, что движение электрона складывается из равномерного движения с невозмущенной скоростью  $v_0$  и осциллирующего движения с частотой  $\omega_p$ . Таким образом, характеристики на плоскости  $(x, t)$  уже не являются прямыми. Выразить  $t$  через  $\tau$  в явном виде в данном случае не удастся.

Однако, считая  $a \ll v_0$  (что, как правило, справедливо для клистронов), можно в нулевом приближении пренебречь колебательным движением и записать

$$x \approx v_0(t - \tau).$$

Подставляя это выражение в правые части уравнений (2.32), (2.33), получаем в первом приближении

$$x \approx v_0(t - \tau) + \frac{a}{\omega_p} \sin \omega \tau \cos(\omega_p x / v_0), \quad (2.34)$$

$$v \approx v_0 + a \sin \omega \tau \cos(\omega_p x / v_0). \quad (2.35)$$

Вновь вводя безразмерные переменные

$$\theta = \omega \left( t - \frac{x}{v_0} \right), \quad \theta_0 = \omega \tau,$$

приводим уравнение (2.34) к виду

$$\theta = \theta_0 - X_p \sin \theta_0,$$

где

$$X_p = \frac{\omega a}{\omega_p v_0} \sin \frac{\omega_p x}{v_0}.$$

Разлагая плотность тока в ряд Фурье и выполняя вычисления, аналогичные представленным в задаче 2.2, находим

$$I(x, t) = I_0 + 2I_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(nX_p) \cos n\omega \left( t - \frac{x}{v_0} \right). \quad (2.36)$$

Это решение было получено В.Я. Савельевым [50]. Сопоставление соотношений (2.24) и (2.36) показывает, что эффекты пространственного заряда выражаются в замене параметра  $X$  на  $X_p$ . Очевидно, что  $X_p \approx X$  при  $\omega_p x / v_0 \ll 1$ . Таким образом, это неравенство показывает, в каких случаях можно пренебречь кулоновским взаимодействием и уподобить поток электронов потоку невзаимодействующих частиц. Однако здесь имеется и принципиальная разница. Поскольку  $X \sim x$ , на достаточно большом расстоянии от модулирующего резонатора всегда можно добиться оптимального значения  $X = 1.84$ . В то же время для параметра  $X_p$  это возможно лишь при выполнении условия

$$\frac{\omega a}{\omega_p v_0} \geq 1.84.$$

Записывая условие обгона одних электронов другими как условие пересечения близлежащих характеристик, вместо уравнения (2.13) в данном случае будем иметь

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} = 1 - X_p \cos \theta_0,$$

откуда следует, что обгон происходит при

$$X_p = 1, \quad \cos \theta_0 = 1.$$

Как и следовало ожидать, отличие от соответствующих формул для потока невзаимодействующих частиц (2.13), (2.14) сводится к замене  $X$  на  $X_p$ . Очевидно, что при

$$\frac{\omega a}{\omega_p v_0} < 1 \quad (2.37)$$

обгон (т. е. опрокидывание синусоидальной волны) вообще не происходит. Физически это объясняется тем, что рассматриваемая система обладает *дисперсией*, которая, как мы видели в лекции 1, способна приостановить процесс укрупнения. Дисперсия линейных волн пространственного заряда в электронном потоке подробно обсуждается например в [2, 11, 44]. В данном случае дисперсионные эффекты достаточно слабы и могут воспрепятствовать обгону лишь при условии слабой нелинейности (2.37).

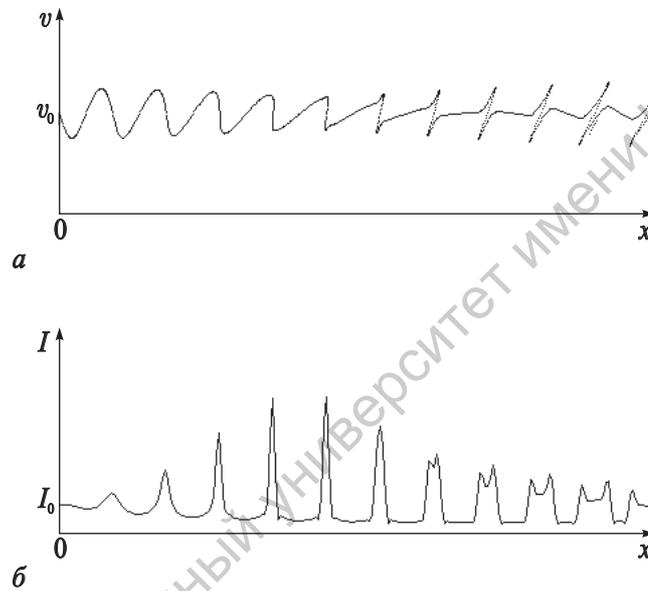


Рис. 2.7. Пространственные распределения скорости  $v$  (а) и тока  $I$  (б) в некоторый момент времени для потока частиц с кулоновским взаимодействием

Следует заметить, что полученное выше решение (2.36) строго говоря, справедливо лишь до начала обгона, поскольку соотношения (2.34), (2.35) являются приближенными. На рис. 2.7 приведены зависимости  $v(x)$  и  $I(x)$ , полученные численно методом «частиц в ячейке» (ср. рис. 2.5). Видно, что после того, как одни электроны обгоняют другие, динамика профиля волны становится весьма сложной и не допускает аналитического описания. Тем не менее, численное моделирование показывает, что формула (2.36) достаточно хорошо описывает зависимость гармоник тока в области  $x < \pi v_0 / \omega_p$ , которая представляет наибольший интерес с практической точки зрения.

**Задача 2.4.** Распространение волн в холодном гравитирующем газе описывается уравнениями

$$v_t + vv_x = -\varphi_x,$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0,$$

$$\varphi_{xx} = 4\pi G\rho,$$

где  $v$  — скорость,  $\rho$  — плотность,  $\varphi$  — потенциал гравитационного поля,  $G$  — гравитационная постоянная. Считая, что в начальный момент в неподвижной среде ( $v(x, 0) = 0$ ) возникло возмущение плотности, которое вблизи максимума можно аппроксимировать параболой

$$\rho(x, 0) \approx \rho_0 \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right),$$

покажите, что возникновение особенности (т.е. опрокидывание) происходит в момент времени  $t^* = 1/\sqrt{2\pi G\rho_0}$ . Постройте зависимости  $v(x)$  и  $\rho(x)$  в различные моменты времени. Покажите, что в окрестности особенности  $v \sim -(x/l)^{1/3}$ ,  $\rho \sim (x/l)^{-2/3}$ . Для нахождения плотности используйте уравнение непрерывности в переменных Лагранжа  $\rho(x, t)dx = \rho(\xi, 0)d\xi$ .

Данная задача имеет отношение к построению нелинейной теории гравитационной неустойчивости Джинса [51, 52]. Считается, что развитие этой неустойчивости холодном веществе («темной материи») привело к образованию галактик и их скоплений. Наибольший интерес, очевидно, представляет вопрос о том, какое состояние устанавливается при больших  $t$ . Эту стадию можно исследовать путем численного моделирования при помощи уже упоминавшегося метода «частиц в ячейке». Результаты моделирования показывают, что при  $t > t^*$  динамика становится очень сложной: число особенностей непрерывно увеличивается, а зависимость  $v(x)$  приобретает вид закручивающейся к центру спирали [51, 52].

**Задача 2.5.** Определить условие опрокидывания волны в нелинейной диссипативной среде, описываемой уравнением

$$u_t + uu_x + \nu u = 0. \quad (2.38)$$

Если продолжить аналогию с потоком, то диссипация такого рода может быть вызвана, например, столкновениями частиц. Рассмотреть задачу с начальным условием

$$u(t = 0) = u_0 + a \sin k\xi. \quad (2.39)$$

*Решение:* Уравнение (2.38) в характеристической форме принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = u,$$

$$\frac{du}{dt} = -\nu u.$$

Интегрируя эти уравнения с учетом начального условия (2.39), получаем

$$u = (u_0 + a \sin k\xi) \exp(-\nu t),$$

$$x = \xi + \frac{1 - \exp(-\nu t)}{\nu} (u_0 + a \sin k\xi).$$

Найдем условие опрокидывания, исходя из уравнения (2.9). Дифференцируя уравнение характеристик, находим

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + \frac{1 - \exp(-\nu t)}{\nu} ak \cos k\xi.$$

Приравнявая это выражение к нулю, имеем

$$\frac{\exp(-\nu t) - 1}{\nu} ak \cos k\xi = 1. \quad (2.40)$$

Далее необходимо определить момент времени  $t^*$ , при котором впервые наступает опрокидывание, т.е. минимальное значение  $t$ , при котором удовлетворяется равенство (2.40). Очевидно, что этой ситуации соответствует  $\cos k\xi = -1$ . Таким образом, уравнение (2.40) принимает вид

$$\frac{ak}{\nu} (1 - \exp(-\nu t^*)) = 1.$$

Для того, чтобы это уравнение имело решение, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{ak}{\nu} > 1. \quad (2.41)$$

Тогда находим момент опрокидывания

$$t^* = -\frac{1}{\nu} \ln \left( 1 - \frac{\nu}{ak} \right).$$

Если неравенство (2.41) не выполняется, опрокидывание возмущения, начальный профиль которого имеет вид (2.39), вообще невозможно. Это подтверждает вывод, сделанный в лекции 1, о том, что диссипация препятствует укрупнению волны. Однако, в отличие от высокочастотной диссипации, которую описывает уравнение Бюргерса (1.22), в данном случае, согласно (2.41), опрокидывание останавливается лишь если амплитуда волны невелика, т.е. нелинейность достаточно слабая.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

## Лекция 3.

# Образование разрывов в простой волне

Существуют два подхода к описанию волн в среде без дисперсии с учетом ударных фронтов. Первый, почти игнорируя вопрос о механизме образования ударных волн, полагает фронты бесконечно тонкими и выделяет из возможных математически равноправных решений уравнения Римана фактически истинные, удовлетворяющие фундаментальным законам сохранения. ... Здесь используется тот факт, что дифференциальные уравнения, описывающие волны, есть следствие более общих интегральных законов, справедливых и в областях градиентных катастроф.

*С.Н. Гурбатов, А.И. Саичев, И.Г. Якушкин. Нелинейные волны и одномерная турбулентность (УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 225)*

### 3.1. Обобщенные решения и граничные условия на разрыве

В предыдущей лекции был рассмотрен процесс укручения и опрокидывания нелинейной волны в недиспергирующей среде. Однако полученные нами решения, строго говоря, справедливы лишь до момента опрокидывания волны, так как после него исходные уравнения в частных производных уже неприменимы, поскольку производные обращаются в бесконечность. Во многих случаях неоднозначные решения вообще не имеют физического смысла. В других случаях, когда опрокидывание всё же может произойти, динамика волны становится чрезвычайно сложной, не допускающей аналитического описания, и простые решения, полученные в лекции 2, теряют справедливость. В качестве примеров можно привести известную каждому картину опрокидывания волн на поверхности воды с образовани-

ем «барашков», а также волны пространственного заряда, рассмотренные в задаче 2.3 (см. рис. 2.7).

В задачах акустики, газо- и гидродинамики фактором, препятствующим опрокидыванию, прежде всего является *диссипация*. Она приводит к образованию *ударной волны*, для описания которой следует использовать уравнение Бюргера (1.22). Однако, как следовало из простых оценок, полученных в § 1.3, и как будет показано строго в лекции 5, ширина фронта ударной волны тем меньше, чем меньше коэффициент вязкости  $\nu$ . Поэтому представляется логичным в пределе  $\nu \rightarrow 0$  воспользоваться решением уравнения простой волны (2.1), исключив неоднозначность введением бесконечно быстрого изменения профиля волны — *разрыва*. В математике подобное решение называется *обобщенным* [53]. В § 1.3 мы уже указывали, что поскольку диссипация является высокочастотной, она сказывается сильнее всего в области наиболее быстрых изменений профиля, т.е. на фронте ударной волны. Фактически введение разрыва означает, что мы учитываем диссипацию только там, где крутизна фронта бесконечна. В лекции 5 мы покажем, что решения уравнения Бюргера в пределе  $\nu \rightarrow 0$  действительно переходят в обобщенные решения, рассматриваемые в настоящей лекции.

Как определить положение разрыва? Прежде всего заметим, что уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0. \quad (3.1)$$

Рассмотрим, например, ограниченное в пространстве возмущение, т.е. будем считать, что  $u = 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Проинтегрировав уравнение (3.1) по  $x$ , получим

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad S = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx.$$

Таким образом, величина  $S$  сохраняется, или, как говорят, является *интегралом движения*. В случае задачи с периодическими граничными условиями  $u(x + \lambda) = u(x)$  интегралом движения является величина

$$S = \int_x^{x+\lambda} u(x) dx.$$

Теперь потребуем, чтобы решение с разрывом по-прежнему сохраняло величину  $S$ . Таким образом, построение разрыва осуществляется согласно *правилу равных площадей* (заштрихованные площади слева и справа от разрыва на рис. 3.1 должны быть одинаковы).

Получим *граничное условие на разрыве*, связывающее величины  $u_1$  и  $u_2$  справа и слева от разрыва. Поскольку разрыв считается бесконечно тонким, его движение характеризуется единственной величиной — скоростью

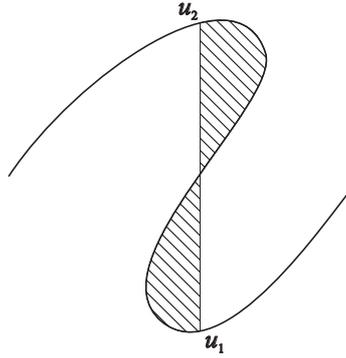


Рис. 3.1. К определению положения разрыва по правилу равных площадей

$U(t)$ . Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с разрывом, при помощи преобразования

$$x' = x - \int_0^t U(t') dt'.$$

Уравнение (3.1) принимает вид

$$u_t - Uu_x + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0.$$

Выберем точки  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно, справа и слева от разрыва и проинтегрируем полученное уравнение по  $x$  от  $x_2$  до  $x_1$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_2}^{x_1} u dx - Uu \Big|_{x_2}^{x_1} + \frac{u^2}{2} \Big|_{x_2}^{x_1} = 0. \quad (3.2)$$

Устремим  $x_1$  к точке разрыва справа, а  $x_2$  — слева. Тогда интеграл в (3.2) стремится к нулю и уравнение принимает вид

$$-U[u] + \left[\frac{u^2}{2}\right] = 0. \quad (3.3)$$

Здесь  $[f] = f_2 - f_1$  — скачок величины  $f$  на разрыве. Из уравнения (3.3) получаем

$$U = \frac{1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 - u_1} = \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (3.4)$$

Итак, для постановки граничных условий на разрыве использовался тот факт, что из уравнения (3.1) следует сохранение величины  $S$ . Понятно, что любое соотношение вида

$$P_t + Q_x = 0, \quad (3.5)$$

где  $P$  и  $Q$  — функционалы от  $u, u_x, u_{xx}, \dots$ , также представляет собой закон сохранения для величины

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dx.$$

При этом  $P$  называется *плотностью*, а  $Q$  — *потоком* сохраняющейся величины. Обратим внимание, что после умножения на  $u$  уравнение (3.1) принимает вид

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0, \quad (3.6)$$

т.е. также принимает вид (3.5). Однако, если мы попытаемся использовать уравнение (3.6) для постановки граничного условия, то получим соотношение, которое будет отличаться от (3.4). Более того, умножая (3.1) на  $u^{n-1}$ , можно получить бесконечное число законов сохранения

$$\left(\frac{u^n}{n}\right)_t + \left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)_x = 0,$$

каждый из которых будет приводить к своему условию на разрыве. То, какой именно закон сохранения следует выбрать, определяется применительно к конкретной задаче, исходя из физических соображений. Далее в этой лекции будем пользоваться соотношением (3.4), отложив более подробное обсуждение вопросов, связанных с законами сохранения, до лекции 4.

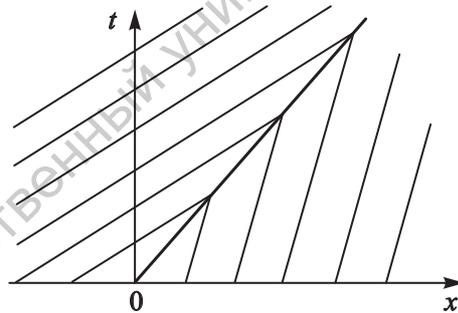


Рис. 3.2. Характеристики в задаче о распространении одиночного разрыва

В качестве первого примера рассмотрим задачу с начальным условием, содержащим разрыв

$$u = \begin{cases} u_1, & x > 0, \\ u_2, & x < 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

где  $u_{1,2}$  — постоянные и  $u_2 > u_1$ . Из уравнения (3.4) следует, что разрыв перемещается с постоянной скоростью

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2} = \text{const}.$$

Характеристики для этой задачи представлены на рис. 3.2. Таким образом, нетрудно записать решение в явном виде

$$u = \begin{cases} u_1, & x - Ut > 0, \\ u_2, & x - Ut < 0. \end{cases}$$

Это выражение описывает ступенчатый профиль, движущийся с постоянной скоростью  $U$ . Полученное решение является аналогом стационарной ударной волны уравнения Бюргерса (§ 1.3).

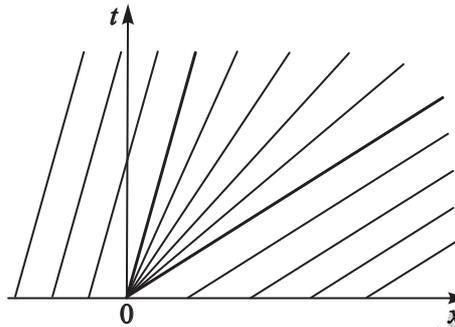


Рис. 3.3. Характеристики в задаче с начальным условием (3.7) при  $u_1 > u_2$ . Жирные линии — траектории слабых разрывов

Кроме описанных выше разрывов, называемых *истинными*, существуют и другие, когда сама функция  $u(x, t)$  остается непрерывной, а скачок испытывают ее производные. Такие разрывы называются *слабыми*. В качестве примера рассмотрим задачу с начальным условием (3.7), считая  $u_1 > u_2$ . Характеристики для этой задачи построены на рис. 3.3. Из начала координат выходит веер характеристик, наклон которых меняется от  $u_1$  до  $u_2$ . Эта область ограничена двумя слабыми разрывами, траектории которых даются уравнениями

$$x = u_1 t, \quad x = u_2 t.$$

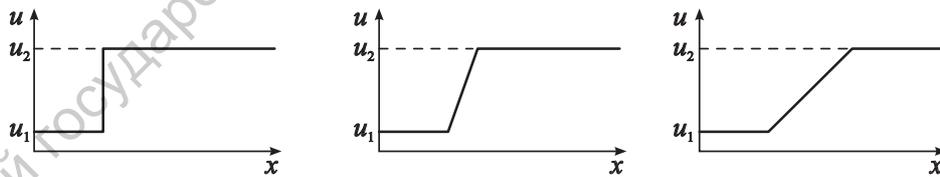


Рис. 3.4. Динамика центрированной волны расширения

Динамика профиля волны  $u(x, t)$  приведена на рис. 3.4. Можно записать решение в явном виде

$$u = \begin{cases} u_1, & x - u_1 t > 0, \\ x/t, & u_2 t < x < u_1 t, \\ u_2, & x - u_2 t < 0. \end{cases}$$

В газовой динамике это решение называется *центрированной волной расширения*. Отметим, что слабые разрывы, в отличие от разрывов истинных, всегда распространяются вдоль характеристик [9, 53].

### 3.2. Распространение гармонического сигнала. Пилообразная волна и ее спектр

Вернемся к задаче о распространении гармонического сигнала (§ 2.2) с учетом образования разрыва и исследуем динамику амплитуды разрыва  $u_m$ . Как видно из рис. 2.3, профиль опрокинувшейся волны симметричен относительно замены  $u \rightarrow -u$ ,  $\theta \rightarrow -\theta$ , где, как и прежде,  $\theta = \omega t$ . Следовательно, если при построении разрыва руководствоваться правилом равных площадей, то он должен располагаться в точке  $\theta = 0$ . Таким образом, в лабораторной системе отсчета разрыв перемещается со скоростью  $u_0$ <sup>1</sup>. Тогда из уравнения (2.18) имеем

$$\arcsin\left(\frac{u_m}{a}\right) = \frac{u_m X}{a}. \quad (3.8)$$

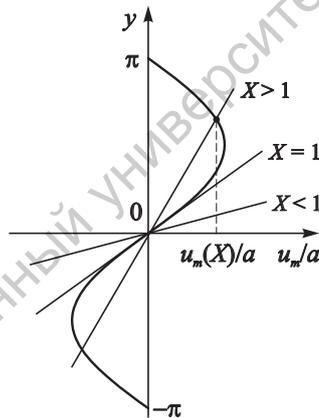


Рис. 3.5. К определению амплитуды разрыва

Зависимость  $u_m(X)$  проще всего определить, решая уравнение (3.8) графически. На рис. 3.5 построены графики функций  $y = \arcsin(u_m/a)$  и  $y = u_m X/a$  при различных значениях  $X$ . При  $X < 1$ , когда разрыв еще не образовался, эти кривые пересекаются только в точке  $u_m/a = 0$ . В момент опрокидывания ( $X = 1$ ) они касаются друг друга, т.е. возникает разрыв, амплитуда которого первоначально равна нулю. При дальнейшем увеличении  $X$  она возрастает, пока не станет равной  $a$ . Это происходит

<sup>1</sup>Напомним, что в § 2.2 был осуществлен переход в движущуюся со скоростью  $u_0$  систему отсчета.

при

$$X = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

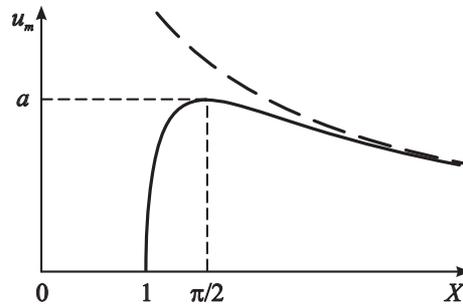


Рис. 3.6. Зависимость амплитуды разрыва от координаты

Далее  $u_m$  монотонно уменьшается, медленно стремясь к нулю (рис. 3.6). Закон, по которому спадает  $u_m$  при больших  $X$ , можно найти в явном виде, разлагая в формуле (3.8) арксинус в ряд вблизи  $\theta = \pi$  и ограничиваясь двумя членами разложения

$$\frac{u_m X}{a} \approx \pi - \frac{u_m}{a},$$

откуда

$$u_m = \frac{a\pi}{1+X}. \quad (3.9)$$

Эта зависимость показана штриховой линией на рис. 3.6. При  $X \gg 1$  можно пренебречь единицей в знаменателе (3.9). Тогда

$$u_m \approx \frac{a\pi}{X} = \frac{\pi u_0^2}{\omega x}. \quad (3.10)$$

Это выражение не зависит от  $a$ , то есть волне свойственно «забывать» о начальных условиях. На практике это приводит к тому, что через слой нелинейной диссипативной среды с заданной толщиной нельзя передать мощность, превышающую некоторое предельное значение. Такое поведение кардинально отличается от того, к чему мы привыкли в линейных системах. В данном случае принципиальную роль играет нелинейность, которая, как мы видели в § 2.3, приводит к перекачке энергии из низших гармоник в высшие. С ростом амплитуды входного сигнала этот процесс ускоряется, что приводит к усилению поглощения, так как диссипация является высокочастотной: высокие гармоники поглощаются сильнее, чем низкие.

Разложение арксинуса в ряд по существу означает, что профиль волны принимается состоящим из разрыва и двух прямолинейных участков, т.е.

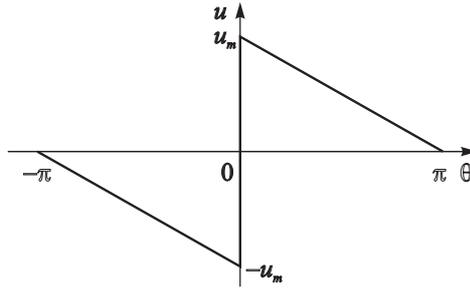


Рис. 3.7. Пилообразная волна

пилообразным (рис. 3.7). Нетрудно записать для него выражение в явном виде

$$u = \begin{cases} -\frac{u_m}{\pi} (\pi + \theta), & -\pi < \theta < 0, \\ \frac{u_m}{\pi} (\pi - \theta), & 0 < \theta < \pi, \end{cases}$$

где  $u_m$  определяется соотношением (3.9). Окончательно получим

$$u = \frac{a}{1+X} \begin{cases} -\pi - \theta, & -\pi < \theta < 0, \\ \pi - \theta, & 0 < \theta < \pi. \end{cases} \quad (3.11)$$

На рис. 3.8 приведены результаты численного моделирования, подтверждающие описанную выше картину. Хорошо видно, как происходит образование разрыва и трансформация синусоидальной волны в пилообразную, которая интенсивно затухает.

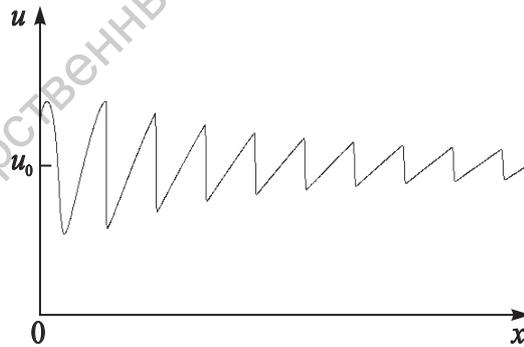


Рис. 3.8. Образование пилообразной волны и ее последующее затухание

Вычислим спектр пилообразной волны. Разложение решения (3.11) в ряд Фурье имеет вид

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta,$$

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x, \theta) \sin n\theta \, d\theta = \\
 &= -\frac{2a}{\pi(1+X)} \left( \int_0^{\pi} \theta \sin n\theta \, d\theta - \pi \int_0^{\pi} \sin n\theta \, d\theta \right). \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Первый интеграл берется по частям

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \theta \sin n\theta \, d\theta &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} \theta \, d(\cos n\theta) = \\
 &= -\frac{1}{n} \left( \theta \cos n\theta \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos n\theta \, d\theta \right) = -\frac{\pi}{n} (-1)^n.
 \end{aligned}$$

Второй интеграл вычисляется элементарно

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \, d\theta = -\frac{1}{n} [(-1)^n - 1].$$

Подставляя результаты вычислений в формулу (3.12), находим

$$A_n = \frac{2a}{n(1+X)}. \quad (3.13)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n(1+X)} \sin n\theta. \quad (3.14)$$

Эти формулы определяют спектр волны при  $X \gg 1$ , тогда как спектр при  $X < 1$  дается решением Бесселя–Фубини (2.23). Отметим, что при  $X \gg 1$  выражение (3.13) принимает вид

$$A_n \approx \frac{2a}{nX} = \frac{2u_0^2}{\omega n x},$$

то есть не зависит от  $a$ .

Различные аспекты физики пилообразных акустических волн подробно освещены в обзоре [54]. Заметим, что интенсивные пилообразные ультразвуковые волны находят интересные применения в медицине для неинвазивной хирургии, разрушения почечных камней и других биоконкрементов, остановки внутренних кровотечений (когда ультразвуковой пучок локально нагревает и как бы «заваривает» поврежденные сосуды) и др. [55].

### 3.3. Распространение треугольного и биполярного импульсов

Рассмотрим задачу о распространении начального возмущения, имеющего треугольный профиль (рис. 3.9)

$$u(\xi) = a \begin{cases} 2\xi/l, & 0 < \xi < l/2, \\ 2(l-\xi)/l, & l/2 < \xi < l, \\ 0, & \xi < 0, \xi > l. \end{cases} \quad (3.15)$$

Здесь, как и прежде,  $\xi = x(t = 0)$ . Эта задача представляет интерес по двум причинам. Во-первых, она допускает простое аналитическое решение, во-вторых, полученное решение на больших временах представляет собой *универсальную асимптотику* для униполярного импульса произвольной формы.

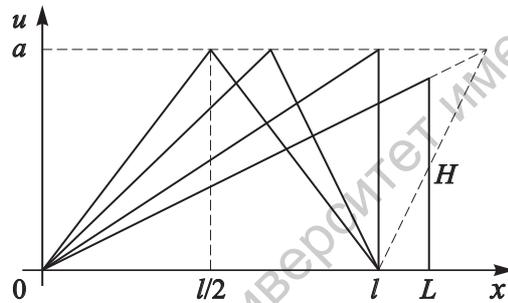


Рис. 3.9. Динамика треугольного импульса

Уравнение характеристик в данном случае имеет вид (2.6):

$$x = \xi + u(\xi)t,$$

а уравнение, позволяющее определить момент опрокидывания, совпадает с соотношением (2.8):

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + \frac{du(\xi)}{d\xi} t = 0.$$

Как видно из (3.15), на переднем фронте импульса  $du/d\xi = -2a/l < 0$ , следовательно, образование разрыва происходит при

$$t^* = \frac{l}{2a}. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) не зависит от  $\xi$ . Последнее означает, что опрокидывание происходит одновременно для всех точек переднего фронта, а амплитуда разрыва в момент образования равна  $a$ .

При  $t < t^*$  импульс представляет собой треугольник, одна из вершин которого перемещается по закону

$$x = \frac{l}{2} + at,$$

а две другие неподвижны (рис. 3.9). Разрыв вводится таким образом, чтобы площадь импульса оставалась постоянной:

$$S = \frac{LH}{2} = \frac{al}{2}, \quad (3.17)$$

где  $L$  и  $H$  — ширина и высота импульса, соответственно.

С помощью уравнения характеристик можно исключить  $\xi$  из формулы (3.15) и найти, что задний фронт импульса описывается выражением<sup>2</sup>

$$u = \frac{2a(x - ut)}{l}.$$

Разрешая это уравнение относительно  $u$ , получаем

$$u = \frac{2ax}{l + 2at}. \quad (3.18)$$

Отметим, что при  $2at \gg l$  имеем

$$u \sim \frac{x}{t}.$$

Это выражение не зависит от параметров импульса  $a$  и  $l$ , следовательно, описывает асимптотическую форму заднего фронта произвольного униполярного импульса.

Из уравнения (3.18) следует, что

$$H = \frac{2aL}{l + 2at}.$$

Учитывая соотношение (3.17), находим окончательные выражения для  $H$  и  $L$ :

$$H = a \sqrt{\frac{2l}{l + 2at}}, \quad L = l \sqrt{\frac{l + 2at}{2l}}, \quad (3.19)$$

которые показывают, по какому закону происходит расплывание и затухание импульса. Обратим внимание, что на больших временах ( $2at \gg l$ ) соотношения (3.19) принимают вид

$$H \sim \sqrt{2S/t}, \quad L \sim \sqrt{2St}. \quad (3.20)$$

Полученные соотношения представляют собой универсальные асимптотические выражения для импульса произвольной формы, поскольку содержат зависимость от единственного параметра — площади импульса  $S$ , которая является интегралом движения.

<sup>2</sup>Это, очевидно, есть не что иное, как решение Римана, см. лекцию 2

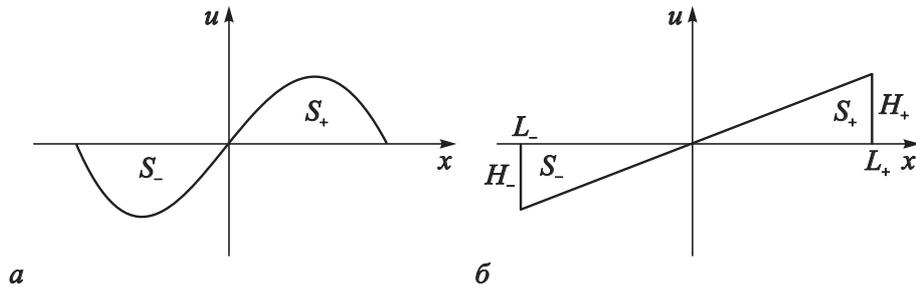


Рис. 3.10. Образование  $N$ -волны при распространении биполярного импульса

Результаты, полученные при анализе треугольного импульса, позволяют без труда описать распространение *биполярного импульса*, начальный профиль которого изображен на рис. 3.10а. Очевидно, что правая часть импульса будет распространяться вправо, а левая — влево, независимо друг от друга. На больших временах обе части принимают вид прямоугольных треугольников, и образуется результирующий профиль, напоминающий латинскую букву  $N$  (рис. 3.10б). Это решение носит название  $N$ -волны. Наклонная часть профиля описывается выражением  $u \sim x/t$ . Параметры  $N$ -волны определяются площадями положительной и отрицательной частей исходного импульса  $S_{\pm}$ . По формулам (3.20) имеем

$$H_{\pm} \sim \sqrt{2S_{\pm}/t}, \quad L_{\pm} \sim \sqrt{2S_{\pm}t}.$$

Такая форма импульса отвечает, в частности, *звуковому удару*, возникающему в атмосфере при сверхзвуковом движении самолета (см. [56] и лекцию 6).

### 3.4. Возмущение от движущегося источника

Рассмотрим генерацию волн источником, движущимся с некоторой постоянной скоростью  $V$ . Эта ситуация описывается уравнением

$$u_t + u_0 u_x + uu_x = B(x - Vt). \quad (3.21)$$

Источник возмущений будем полагать локализованным, т.е.  $B(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . В случае, когда  $V < u_0$ , можно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $V$ , после чего ситуация становится полностью аналогичной описанной выше. Принципиальный интерес представляет случай  $V > u_0$ . Например, в акустике это соответствует источнику, движущемуся со сверхзвуковой скоростью.

Переходя в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $u_0$ , преобразованием

$$x' = x - u_0 t, \quad V' = V - u_0$$

приведем уравнение (3.21) к виду (штрихи опускаем)

$$u_t + uu_x = B(x - Vt). \quad (3.22)$$

Будем искать стационарные решения этого уравнения  $u(x, t) = u(\zeta)$ , где  $\zeta = x - Vt$ . Тогда уравнение (3.22) принимает вид

$$(u - V) \frac{du}{d\zeta} = B(\zeta).$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{(u - V)^2}{2} - \frac{V^2}{2} = - \int_{\zeta}^{\infty} B(y) dy. \quad (3.23)$$

При этом считаем, что  $u = 0$  на бесконечности, куда возмущение от источника еще не успело дойти, а также полагаем, что  $B$  стремится к нулю достаточно быстро при  $|x| \rightarrow \infty$ , так что интеграл в (3.23) существует. Тогда, разрешая уравнение (3.23) относительно  $u$ , находим

$$u = V - \sqrt{V^2 - 2 \int_{\zeta}^{\infty} B(y) dy}. \quad (3.24)$$

Если  $V^2 > 2 \int_{\zeta}^{\infty} B(y) dy$ , равенство (3.24) определяет гладкую кривую и разрывы не возникают. Таким образом, сверхзвуковой источник должен быть достаточно мощным, чтобы вызвать образование ударной волны. В противном случае источник «убегает» от генерируемых им волн. В частности для точечного источника  $B = B_0 \delta(x - Vt)$  условие образования разрыва имеет вид

$$\frac{V^2}{2} < B_0.$$

### 3.5. Слияние разрывов

Наконец, исследуем вопрос о взаимодействии разрывов, для чего рассмотрим двухступенчатое начальное возмущение (рис. 3.11)

$$u = \begin{cases} u_1, & x > x_1, \\ u_2 > u_1, & x_2 < x < x_1, \\ u_3 > u_2, & x < x_2. \end{cases}$$

Как следует из результатов § 3.1, первый разрыв распространяется со скоростью  $U_1 = (u_1 + u_2)/2$  по траектории в  $(x, t)$ -плоскости:

$$x = x_1 + U_1 t.$$

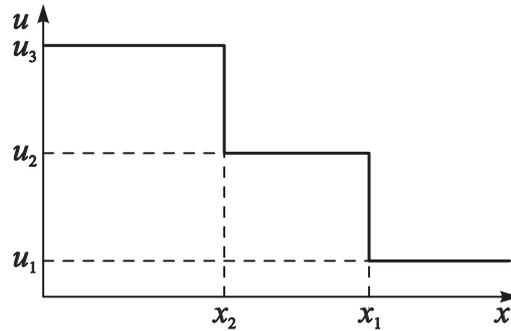


Рис. 3.11. Начальный профиль в задаче о слиянии разрывов

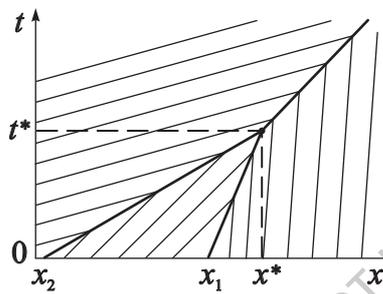


Рис. 3.12. Характеристики для задачи о слиянии разрывов. Жирные линии — траектории разрывов

Второй разрыв движется со скоростью  $U_2 = (u_2 + u_3)/2 > U_1$ , и его траектория есть

$$x = x_2 + U_2 t.$$

Второй разрыв движется быстрее первого и в конце концов настигает его. Это происходит в момент времени  $t^*$ , определяемый из условия пересечения траекторий разрывов:

$$x_1 + \frac{u_1 + u_2}{2} t^* = x_2 + \frac{u_2 + u_3}{2} t^*.$$

Разрешая последнее уравнение относительно  $t^*$ , находим

$$t^* = \frac{2(x_1 - x_2)}{u_3 - u_1}.$$

В этот момент профиль волны имеет вид

$$u = \begin{cases} u_1, & x > x^*, \\ u_3, & x < x^*, \end{cases} \quad (3.25)$$

где

$$x^* = x_1 \frac{(u_2 + u_3)}{u_3 - u_1} - x_2 \frac{u_1 + u_2}{u_3 - u_1}.$$

Выражение (3.25) можно рассматривать в качестве начального условия для задачи о распространении одиночного разрыва, рассмотренной в § 3.1. Таким образом, два разрыва *сливаются* в один, движущийся со скоростью  $U = (u_1 + u_3)/2$  по траектории

$$x = x^* + U(t - t^*).$$

Очевидно, что  $U_1 < U < U_2$ . На рис. 3.12 приведена картина характеристик для этой задачи.

**Задача 3.1.** Исследовать динамику амплитуды разрыва в нелинейной активной среде, описываемой уравнением

$$u_t + uu_x = \nu u. \quad (3.26)$$

Рассмотреть задачу с начальным условием

$$u(t = 0) = a \sin k\xi.$$

В качестве конкретного физического примера можно привести задачу о термооптической генерации звука [48]. Когда оптическое излучение падает на среду, в которой распространяется звуковая волна, последняя может изменять коэффициент поглощения света, влияя тем самым на тепловыделение в среде. При определенных условиях это приводит к положительной обратной связи, и распространение волны описывается уравнением (3.26).

*Решение:* Запишем уравнение (3.26) в характеристической форме

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u, \\ \frac{du}{dt} &= \nu u. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Интегрируя уравнения (3.27) с учетом начального условия, получаем

$$u = u(\xi) \exp(\nu t) = a \exp(\nu t) \sin k\xi, \quad (3.28)$$

$$x = \xi + \frac{a \sin k\xi}{\nu} (\exp(\nu t) - 1). \quad (3.29)$$

Найдем условие опрокидывания, которое имеет вид (2.9). Дифференцируя уравнение характеристик (3.29), получаем

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + \frac{ak}{\nu} (\exp(\nu t) - 1) \cos k\xi.$$

Приравнивая это выражение к нулю, находим момент опрокидывания  $t^*$ :

$$t^* = \frac{1}{\nu} \ln \left( 1 + \frac{\nu}{ak} \right), \quad \cos k\xi = -1.$$

Таким образом, разрыв появляется при  $k\xi = \pi$ . Получим выражение для его амплитуды  $u_m$ , для чего выразим из (3.28)  $k\xi$  через  $u$

$$k\xi = \arcsin \frac{u \exp(-\nu t)}{a}.$$

Подставляя в уравнение (3.29), получаем

$$kx = \arcsin \frac{u \exp(-\nu t)}{a} + \frac{ku}{\nu} (1 - \exp(-\nu t)). \quad (3.30)$$

Поскольку разрыв расположен при  $kx = \pi$ , из уравнения (3.30) имеем

$$\pi = \arcsin \frac{u_m \exp(-\nu t)}{a} + \frac{ku_m}{\nu} (1 - \exp(-\nu t)). \quad (3.31)$$

Это уравнение проще всего решить графически. На рис. 3.13 построены графики функций  $y = \arcsin(u_m \exp(-\nu t)/a)$  и  $y = \pi - ku_m(1 - \exp(-\nu t))/\nu$  при различных значениях  $t$ . Точки пересечения этих кривых и определяют амплитуду разрыва. Видно, что с течением времени она нарастает, стремясь к некоторому предельному значению. Действительно, из уравнения (3.31) следует, что

$$\frac{u_m \exp(-\nu t)}{a} = \sin \left( \frac{ku_m}{\nu} (1 - \exp(-\nu t)) \right).$$

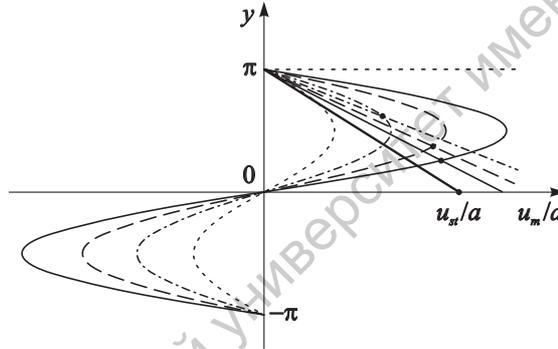


Рис. 3.13. К графическому определению амплитуды разрыва в задаче 3.1. С течением времени  $u_m$  стремится к стационарному значению  $u_{st}$ , которое определяется пересечением прямой  $y = \pi - ku_m/\nu$  (жирная линия) с горизонтальной осью

Устремив в этом уравнении  $t$  к бесконечности, получим

$$\sin \left( \frac{ku_m}{\nu} \right) \rightarrow 0,$$

откуда  $u_m \rightarrow \pi\nu/k$ . Таким образом, неустойчивость в уравнении (3.26) компенсируется диссипацией энергии на разрыве, в результате чего устанавливается *стационарная пилообразная волна* с постоянной амплитудой.

Вновь отметим, что принципиальную роль для установления стационарной волны играет нелинейность. Поскольку диссипация является высокочастотной, в области низких частот доминирует усиление, в области высоких частот — поглощение. Нелинейность же приводит к перераспределению энергии вверх по спектру, тем самым обеспечивая установление равновесия между двумя этими факторами.

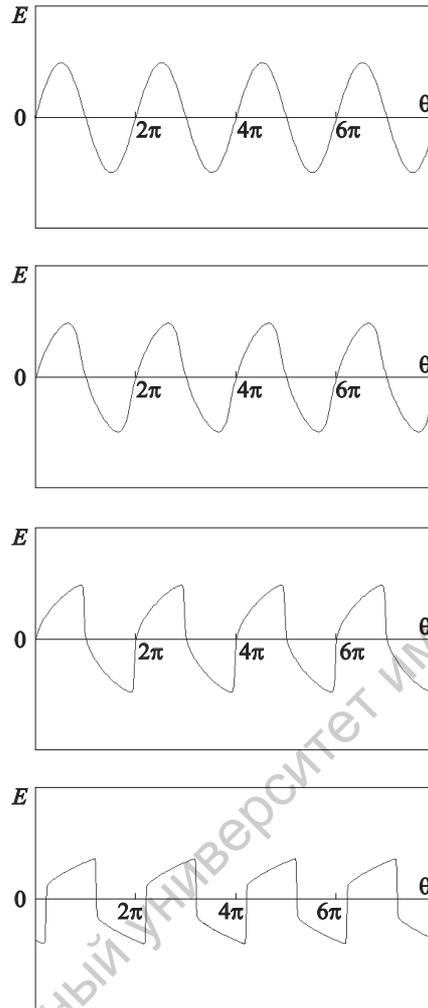


Рис. 3.14. Эволюция гармонической волны в кубично-нелинейной среде

**Задача 3.2.** Найти координату разрыва при распространении электромагнитной волны в среде с нелинейной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(E) = \varepsilon_0(1 + \alpha E^2)$ , если при  $x = 0$  задано гармоническое возмущение  $E = E_0 \sin \omega t$ . Рассмотреть случай, когда нелинейность является слабой ( $|\alpha E_0^2| \ll 1$ ).

*Решение:* В одноволновом приближении (когда учитывается только волна, распространяющаяся в прямом направлении) электромагнитную волну в нелинейной среде можно приближенно описать уравнением

$$E_t + c(E)E_x = 0, \quad (3.32)$$

где

$$c(E) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(E)\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \alpha E^2}}, \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

На характеристиках

$$\frac{dx}{dt} = c(E) \quad (3.33)$$

уравнение (3.32) принимает вид

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

следовательно, характеристики являются прямыми линиями. Интегрируя уравнение (3.33) с учетом начальных условий, получаем уравнение характеристик

$$x = \frac{c_0(t - \tau)}{\sqrt{1 + \alpha E_0^2 \sin^2 \omega \tau}},$$

откуда

$$t = \tau + \frac{x}{c_0} \sqrt{1 + \alpha E_0^2 \sin^2 \omega \tau}.$$

В слабонелинейном случае, разлагая правую часть этого уравнения в ряд, находим

$$t \approx \tau + \frac{x}{c_0} \left( 1 + \frac{\alpha E_0^2}{2} \sin^2 \omega \tau \right).$$

С помощью обозначений

$$\theta = \omega \left( t - \frac{x}{c_0} \right), \quad \theta_0 = \omega \tau,$$

приведем это уравнение к виду

$$\theta = \theta_0 + X \sin^2 \theta_0, \quad (3.34)$$

где  $X = \omega \alpha x E_0^2 / 2c_0$ . Точку, в которой образуется разрыв, находим, дифференцируя (3.34):

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} = 1 + X \sin 2\theta_0 = 0.$$

Следовательно, опрокидывание волны происходит в точке  $|X| = 1$ , причем когда  $\alpha > 0$  разрыв образуется при  $\theta_0 = 3\pi/4, 7\pi/4$ , а когда  $\alpha < 0$  — при  $\theta_0 = \pi/4, 5\pi/4$ . Таким образом, в кубично-нелинейной среде, в отличие от квадратично-нелинейной, на одном периоде волны образуется два разрыва. Это подтверждают результаты численного моделирования, приведенные на рис. 3.14, где построены профили волны  $E(\theta)$  при различных значениях  $x$  ( $\alpha > 0$ ). В случае  $\alpha < 0$ , когда с ростом  $E$  скорость волны падает, она опрокидывается назад.

## Лекция 4.

# Простые волны в примерах

Все движения суть волны, но некоторые движения волнее других.

*М.А. Миллер.* Волны, волны, волны ...

### 4.1. Квазилинейные системы гиперболических уравнений. Критерий гиперболичности

В данной лекции обобщим теорию, развитую для уравнения простой волны, на системы гиперболических уравнений произвольного порядка. Будем рассматривать системы вида

$$\widehat{A}\mathbf{u}_t + \widehat{B}\mathbf{u}_x + \mathbf{d} = 0, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{d}$  — векторы, имеющие  $n$  компонент,  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  — квадратные матрицы размера  $n \times n$ . Компоненты вектора  $\mathbf{u}$  являются зависимыми переменными, а  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ , и  $\mathbf{d}$  зависят от  $x$ ,  $t$  и  $\mathbf{u}$ , но не от производных  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_t$ . Такие системы называются *квазилинейными* [9, 57].

Прежде всего сформулируем *критерий гиперболичности* для системы уравнений (4.1). Умножим ее на некоторый  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t, \mathbf{u})$ :

$$\mathbf{v} \left( \widehat{A}\mathbf{u}_t + \widehat{B}\mathbf{u}_x \right) + \mathbf{v} \mathbf{d} = 0, \quad (4.2)$$

и выясним, можно ли выбрать  $\mathbf{v}$  так, чтобы уравнение (4.2) приняло вид

$$\mathbf{w} (\beta \mathbf{u}_t + \alpha \mathbf{u}_x) + \mathbf{v} \mathbf{d} = 0, \quad (4.3)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — скаляры. В этом случае выражение в круглых скобках в уравнении (4.3) представляет собой полную производную вдоль направления  $(\alpha, \beta)$  в плоскости  $(x, t)$ . Действительно, рассмотрим на этой плоскости кривую, заданную в параметрическом виде

$$x = X(\eta), \quad t = T(\eta).$$

Полная производная вдоль этой кривой есть

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\eta} = T'\mathbf{u}_t + X'\mathbf{u}_x,$$

где штрихами обозначено дифференцирование по  $\eta$ . Полагая

$$\alpha = X'(\eta), \quad \beta = T'(\eta),$$

убеждаемся, что уравнение (4.3) принимает вид

$$\mathbf{w} \frac{d\mathbf{u}}{d\eta} + \mathbf{v} \mathbf{d} = 0. \quad (4.4)$$

Условия того, что уравнение (4.2) представимо в виде (4.3), есть

$$\mathbf{v}\hat{A} = \mathbf{w}T', \quad \mathbf{v}\hat{B} = \mathbf{w}X'.$$

Исключая отсюда  $\mathbf{w}$ , получаем

$$\mathbf{v}(\hat{A}X' - \hat{B}T') = 0. \quad (4.5)$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения  $\mathbf{v}$  уравнения (4.5) является равенство нулю определителя

$$\det(\hat{A}X' - \hat{B}T') = 0. \quad (4.6)$$

Это условие указывает направление кривой, которую будем называть *характеристикой*, а соответствующее уравнение (4.4) — *уравнением в характеристической форме*. Систему (4.1) будем называть гиперболической, если существует ровно  $n$  таких уравнений.

Следует отметить, что если  $\det(\hat{A}) = 0$ , то  $T' = 0$  является решением (4.6) и соответствующие характеристики направлены вдоль оси  $x$ ; если  $\det(\hat{B}) = 0$ , то  $X' = 0$  является решением и характеристики направлены вдоль оси  $t$ . Вырожденный случай, когда  $\det(\hat{A}) = \det(\hat{B}) = 0$ , здесь рассматриваться не будет.

Критерий гиперболичности можно сформулировать следующим образом [9, 53, 57]. Система (4.1) является гиперболической, если существует  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\mathbf{v}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , таких, что

$$\mathbf{v}^{(k)}(\hat{A}\alpha^{(k)} - \hat{B}\beta^{(k)}) = 0$$

для каждого  $k$ , причем  $\alpha^{(k)}$  и  $\beta^{(k)}$  вещественны и не равны нулю одновременно. Что касается характеристических направлений  $(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)})$ , то они не обязательно должны быть различными. Если все они различны, т.е. имеется  $n$  различных семейств характеристик, то система называется

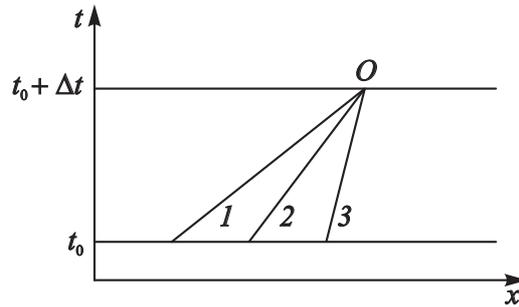


Рис. 4.1. Построение решения при помощи характеристик. 1, 2, 3 — отрезки прямых, аппроксимирующие характеристики, входящие в точку  $O$

*строго гиперболической*. В качестве примера нестрогой гиперболической системы можно привести уравнения (2.28), описывающие нелинейные волны пространственного заряда (задача 2.3), где оба семейства характеристик задаются уравнением  $dx/dt = v$ .

Почему важно, чтобы существовало ровно  $n$  уравнений в характеристической форме? Пусть известно решение  $\mathbf{u}$  в некоторый момент времени  $t_0$ . Попробуем найти решение в момент времени  $t_0 + dt$ , для чего выберем некоторую точку  $O$  на прямой  $t = t_0 + dt$  на плоскости  $(x, t)$  и построим характеристики, входящие в эту точку (рис. 4.1). Если интервал времени  $dt$  мал, то можно аппроксимировать эти характеристики отрезками прямых. Тогда в точке  $O$  имеем систему из  $n$  алгебраических уравнений относительно  $n$  компонент вектора  $\mathbf{u}(t_0 + dt)$ . Таким способом можно построить решение на всей прямой  $t = t_0 + dt$ . Подробнее этот вопрос рассмотрен в книге [9].

Теперь рассмотрим важный частный случай, когда матрица  $\hat{A}$  является единичной. Отметим, что систему (4.1) можно привести к виду

$$\mathbf{u}_t + \hat{B}\mathbf{u}_x + \mathbf{d} = 0 \quad (4.7)$$

умножением на обратную матрицу  $\hat{A}^{-1}$ , если матрица  $\hat{A}$  невырожденная<sup>1</sup>. Итак, если  $\hat{A} = \hat{I}$ , где  $\hat{I}$  — единичная матрица, система (4.1) принимает вид (4.7), а из уравнения (4.6) следует, что  $T' \neq 0$  и характеристики никогда не будут направлены вдоль оси  $x$ . Следовательно, можно выбрать в качестве  $\eta$  время  $t$ , тогда уравнение характеристики есть  $x = X(t)$ . Уравнение в характеристической форме принимает вид

$$\mathbf{v} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{v} \mathbf{d} = 0 \quad (4.8)$$

на характеристиках

$$\frac{dX}{dt} = c$$

<sup>1</sup>Напомним, что матрица называется невырожденной (неособенной), если существует обратная матрица. Для квадратной матрицы это имеет место тогда и только тогда, когда ее детерминант не равен нулю.

при условии, что  $\mathbf{v}\widehat{B} = \mathbf{v}c$ . Величину  $c$  будем называть *характеристической скоростью*. Она удовлетворяет уравнению

$$\det(\widehat{B} - c\widehat{I}) = 0, \quad (4.9)$$

т.е. корни  $c$  являются собственными числами матрицы  $\widehat{B}$ , а векторы  $\mathbf{v}$  — соответствующими собственными векторами.

Особый интерес представляет случай, когда можно ввести новую переменную  $r$ , такую, что уравнение (4.8) приобретает вид

$$\frac{dr}{dt} + f(x, t, \mathbf{u}) = 0.$$

В линейной теории  $\mathbf{v}$  не зависит от  $\mathbf{u}$ , следовательно, это можно сделать всегда, выбирая  $r = \mathbf{v}\mathbf{u}$ . В нелинейной теории необходимо отыскать такие  $r(\mathbf{u})$  и  $\lambda(\mathbf{u})$ , чтобы

$$\mathbf{v}d\mathbf{u} = \lambda dr.$$

Если такие переменные  $r^{(k)}$  удастся ввести для всех  $\mathbf{v}^{(k)}$ , то система уравнений в характеристической форме принимает вид

$$\frac{dr^{(k)}}{dt} + f_k(x, t, \mathbf{r}) = 0 \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = c_k(x, t, \mathbf{r}). \quad (4.10)$$

Такие переменные были введены Риманом в газовой динамике, поэтому  $r^{(k)}$  будем называть *римановыми переменными*. Для систем второго порядка имеем

$$v_{1,2} = \lambda \frac{\partial r}{\partial u_{1,2}},$$

откуда нетрудно найти  $r$ . Однако при  $n > 2$  введение римановых переменных может оказаться невозможным.

## 4.2. Простые волны в газовой динамике

В качестве первого конкретного примера рассмотрим уравнения газовой динамики, применительно к которым и были развиты основные идеи теории гиперболических волн. Система уравнений включает *уравнение Эйлера* (уравнение движения единичного объема газа)

$$\rho(v_t + vv_x) = -p_x, \quad (4.11)$$

закон сохранения массы или *уравнение непрерывности*

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (4.12)$$

где  $\rho$  — плотность газа,  $v$  — скорость,  $p$  — давление, и уравнение

$$s_t + vs_x = 0, \quad (4.13)$$

отражающее сохранение энтропии единичного объема газа  $s$  при условии, что отсутствуют процессы вязкости и теплопроводности. Систему (4.11)–(4.13) необходимо «замкнуть» алгебраическим соотношением, определяющим давление как функцию плотности и энтропии (уравнением состояния):

$$p = p(\rho, s). \quad (4.14)$$

Подробный вывод этих уравнений можно найти, например, в книгах [2, 43].

Представим уравнения газовой динамики в характеристической форме. Прежде всего, очевидно, что уравнение (4.13) представляет собой характеристическую форму

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

на характеристиках  $C_0$ , уравнения которых есть

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Видно, что эти характеристики представляют собой просто траектории частиц газа.

Для получения двух остальных семейств характеристик перепишем уравнение (4.13) с учетом (4.14) в виде

$$p_t + vp_x - a^2(\rho_t + v\rho_x) = 0, \quad (4.15)$$

где

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}.$$

Умножим уравнение непрерывности (4.12) на некоторую величину  $l_1$ , уравнение (4.11) — на  $l_2$  и сложим получившиеся уравнения с (4.15). Получим

$$p_t + (l_2 + v)p_x + \rho l_2(v_t + vv_x) + \rho l_1 v_x + (l_1 - a^2)(\rho_t + v\rho_x) = 0. \quad (4.16)$$

Если  $l_1$  и  $l_2$  не равны нулю одновременно, то единственная возможность получить из (4.16) характеристическую форму состоит в исключении производных от  $\rho$ , следовательно,

$$l_1 = a^2.$$

Тогда уравнение (4.16) принимает вид

$$p_t + (l_2 + v)p_x + \rho l_2 [v_t + (v + l_1/l_2)v_x] = 0,$$

откуда следует, что необходимо выбрать  $l_2 = l_1/l_2$ , то есть

$$l_2 = \pm a.$$

Таким образом, два других семейства характеристик  $C_{\pm}$  определяются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v \pm a,$$

а соответствующие характеристические формы имеют вид

$$\frac{dp}{dt} \pm \rho a \frac{dv}{dt} = 0. \quad (4.17)$$

Эти уравнения описывают *акустические волны*, причем величина  $a$  имеет смысл скорости звука в нелинейной теории. Знаки « $\pm$ » соответствуют волнам, распространяющимся вниз и вверх по потоку.

Пусть в начальный момент  $s = s_0 = \text{const}$ , тогда, в силу уравнения (4.13), это будет иметь место и в любой последующий момент времени. Такое течение газа называется *изэнтропийным*. При этом система уравнений (4.11)–(4.13) становится проще, принимая вид

$$\begin{aligned} \rho(v_t + vv_x) &= -a^2(\rho)\rho_x, \\ \rho_t + (\rho v)_x &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Уравнение (4.17) можно переписать следующим образом:

$$\frac{a(\rho)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \pm \frac{dv}{dt} = 0.$$

Интегрируя, находим, что на характеристиках сохраняются величины

$$r_{\pm} = \int \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho \pm v, \quad (4.19)$$

которые носят название *инвариантов Римана*.

Для политропного газа уравнение состояния имеет вид

$$p = \kappa \rho^{\gamma},$$

где  $\gamma = \text{const}$ . Отсюда  $a^2 = \kappa \gamma \rho^{\gamma-1}$ . Подставляя  $a(\rho)$  в уравнение (4.19), находим

$$r_{\pm} = \frac{2}{\gamma-1} a \pm v. \quad (4.20)$$

В частности, особо простой случай реализуется, когда  $\gamma = 2$ . При этом уравнения (4.18) становятся такими:

$$\begin{aligned} v_t + vv_x + 2\kappa\rho_x &= 0, \\ \rho_t + (\rho v)_x &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Особую роль играют решения, для которых один из инвариантов Римана *постоянен всюду в рассматриваемой области*. При этом соответствующее из уравнений (4.19) дает функциональную связь между переменными  $\rho$  и  $v$

$$v = v(\rho),$$

а система (4.18) сводится к одному уравнению

$$\rho_t + (v(\rho) \pm a(\rho))\rho_x = 0. \quad (4.22)$$

Решения такого типа называются *простыми волнами*, а уравнение (4.22), соответственно, уравнением простой волны. Они являются обобщением собственных мод линейной системы на нелинейный случай. Рассмотрим, для определенности, простую волну, распространяющуюся вниз по потоку. Тогда из уравнений (4.20) следует, что

$$\begin{aligned} r_- &= \frac{2}{\gamma-1} a(\rho) - v = r_0 = \text{const}, \\ v &= \frac{2}{\gamma-1} a(\rho) - r_0 = v(\rho), \end{aligned}$$

и (4.22) превращается в уравнение

$$\rho_t + \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a(\rho) - r_0 \right) \rho_x = 0.$$

В общем случае для системы  $n$ -го порядка (4.1) простой волной будем называть решение, для которого  $n - 1$  инвариант Римана есть константа, так что различные компоненты вектора  $\mathbf{u}$  связаны *функционально*. При этом от системы (4.1) остается одно уравнение простой волны

$$u_t + V(u)u_x = 0,$$

которое подробно изучалось нами в лекциях 2 и 3.

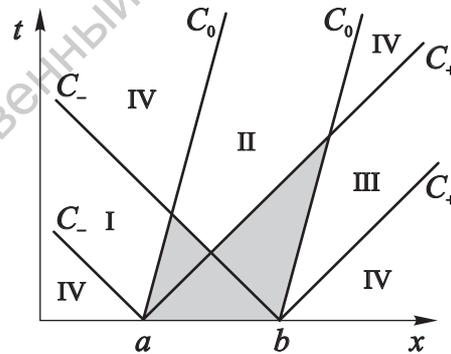


Рис. 4.2. Характеристики в задаче с начальным возмущением, сосредоточенным на отрезке  $a \leq x \leq b$

Важную роль простых волн иллюстрирует рис. 4.2, на котором представлены характеристики в случае, когда начальное возмущение сосредоточено на отрезке  $a \leq x \leq b$ , т.е.  $v = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $s = s_0$  при  $x < a$ ,  $x > b$ . На этом рисунке приведены характеристики, исходящие из точек  $a$  и  $b$ .

Очевидно, что в областях I, II и III решение есть простая волна, распространяющаяся, соответственно, по характеристикам  $C_-$ ,  $C_0$  и  $C_+$ . В областях IV, не покрываемых характеристиками, выходящими из области начального возмущения, решение представляет собой невозмущенное состояние  $v = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $s = s_0$ . Заштрихованная область, покрываемая более чем одним семейством характеристик, является областью взаимодействия простых волн.

### 4.3. Гравитационные волны на «мелкой воде»

Еще один важный пример распространения простых волн относится к гидродинамике. В данном параграфе рассмотрим распространение длинных гравитационных волн на поверхности неглубокого (средняя глубина слоя  $h_0$  много меньше длины волны) слоя жидкости над твердым дном (рис. 4.3). Получим основные уравнения, описывающие эту систему, следуя [43]. Уравнение Эйлера для жидкости в гравитационном поле имеет вид

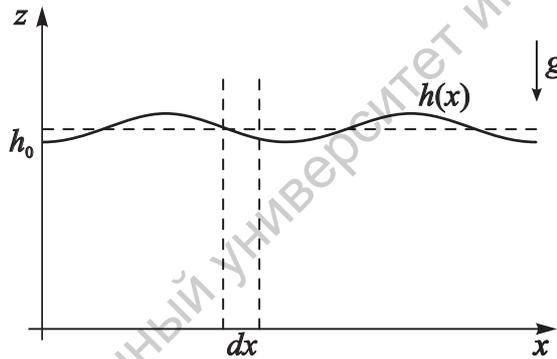


Рис. 4.3. К выводу уравнений «мелкой воды»

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{z}, \quad (4.23)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\mathbf{z}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ . Полагая, что скорость  $\mathbf{v}$  имеет лишь продольную компоненту ( $\mathbf{v} = vx$ ), выпишем  $x$ - и  $z$ -компоненты уравнения (4.23) по отдельности:

$$v_t + vv_x = -\frac{1}{\rho}p_x, \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{\rho}p_z = -g. \quad (4.25)$$

Жидкость будем полагать несжимаемой, т.е.  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ . Далее, заметим, что на свободной поверхности, уравнение которой запишем в виде

$z = h(x)$ , давление должно равняться давлению воздуха  $p_0$ . Тогда уравнение (4.25) дает

$$p = p_0 + g\rho_0(h - z).$$

Подставляя это соотношение в (4.24), получаем

$$v_t + vv_x = -gh_x. \quad (4.26)$$

Второе уравнение получим, исходя из закона сохранения массы жидкости, заключенной между двумя плоскостями поперечного сечения, отстоящими друг от друга на расстояние  $dx$ . За единицу времени через одну плоскость войдет объем жидкости, равный  $(Sv)|_x$ , а через другую выйдет объем  $(Sv)|_{x+dx}$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения. Таким образом, объем жидкости изменится на величину

$$(Sv)|_x - (Sv)|_{x+dx} \approx -\frac{\partial(Sv)}{\partial x} dx.$$

Но в силу несжимаемости жидкости изменение объема может произойти только за счет изменения ее уровня. Это изменение объема равно

$$\frac{\partial S}{\partial t} dx.$$

Приравнивая эти два выражения, приходим к уравнению, имеющему вид уравнения непрерывности

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0.$$

Учитывая, что  $S = lh$ , где  $l = \text{const}$  — ширина канала, окончательно получаем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = 0. \quad (4.27)$$

Уравнения (4.26), (4.27) называются *уравнениями «мелкой воды»*. Впервые они были получены Эйри в 1845 г. Сопоставляя их с полученными в § 4.2, видим, что они эквивалентны уравнениям (4.21) газовой динамики для изэнтропийного течения при  $\gamma = 2$ . Поэтому можно сразу записать эти уравнения в характеристической форме

$$\frac{dr_{\pm}}{dt} = 0$$

на характеристиках  $C_{\pm}$ , определяемых уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{gh}.$$

Инварианты Римана  $r_{\pm}$  имеют вид

$$r_{\pm} = 2\sqrt{gh} \pm v.$$

Конечно, на самом деле гравитационные волны на поверхности воды обладают дисперсией. Однако, жидкость считается «мелкой», в том смысле, что выполняется условие  $kh \ll 1$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — характерный линейный масштаб возмущения. Тогда, как показано в § 1.8, разлагая точный закон дисперсии (1.56) в ряд и ограничиваясь лишь первым членом разложения, можно получить дисперсионное соотношение системы уравнений (4.26), (4.27)

$$\omega^2 \approx gh_0 k^2.$$

Если учет дисперсионных эффектов всё же необходим, в первом приближении (дисперсионное соотношение (1.57)) вместо уравнений «мелкой воды» мы получим уравнения Кортевега–де Вриза или Буссинеска. Этот вопрос обсуждается в § 9.3.

**Задача 4.1.** Для уравнений «мелкой воды» решить задачу со следующими начальными условиями

$$\begin{aligned} v &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ h &= 0, & 0 < x < \infty, \\ h &= h_0, & -\infty < x < 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Эту задачу называют *задачей о разрушении плотины* [9].

*Решение:* Прежде всего, заметим, что в области, покрываемой характеристиками  $C_+$ , которые выходят из  $x < 0$  (рис. 4.4), решение носит характер простой волны с характеристиками  $C_-$ , поскольку инвариант Римана  $r_+$  одинаков для всех характеристик и равен

$$r_+ = v + 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{gh_0}. \quad (4.29)$$

В этой области уравнение характеристик  $C_-$  есть

$$\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{gh} = 2\sqrt{gh_0} - 3\sqrt{gh}. \quad (4.30)$$

Рассмотрим характеристики  $C_-$ , выходящие из области  $x < 0$ . На этих кривых

$$r_- = 2\sqrt{gh} - v = 2\sqrt{gh_0} = \text{const}. \quad (4.31)$$

Таким образом, комбинируя (4.29) и (4.31), находим, что на них  $v = 0$ ,  $h = h_0$ , и характеристики представляют собой семейство параллельных прямых линий, уравнения которых имеют вид

$$x = \xi - \sqrt{gh_0}t.$$

В этой области сохраняется невозмущенное состояние с уровнем  $h_0$ .

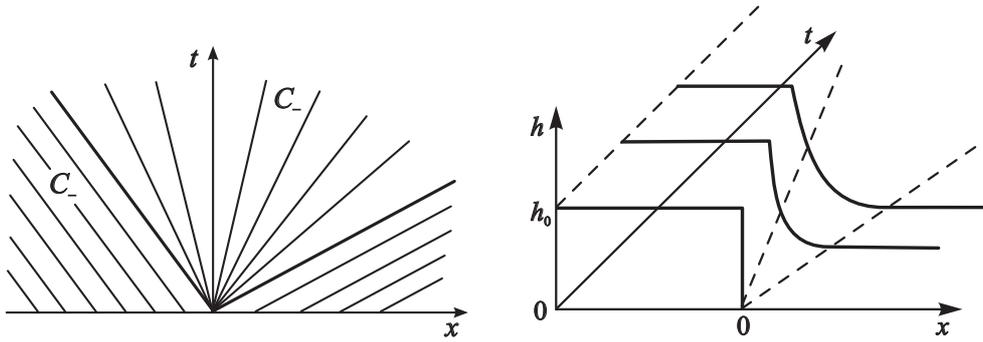


Рис. 4.4. Характеристики в задаче о разрушении плотины

Рис. 4.5. Динамика профиля волны в задаче о разрушении плотины

Теперь рассмотрим характеристики, выходящие из точки  $x = 0$ . В этой точке  $h(t = 0; \xi)$  изменяется скачком от  $h_0$  до 0, поэтому оттуда выходит веер характеристик, уравнения которых есть

$$x = (2\sqrt{gh_0} - 3\sqrt{gh})t, \quad 0 \leq h \leq h_0. \quad (4.32)$$

Эта область ограничена характеристиками

$$x = -\sqrt{gh_0}t, \quad x = 2\sqrt{gh_0}t.$$

Соотношения (4.29), (4.32) позволяют найти решение в области  $-\sqrt{gh_0} \leq x/t \leq 2\sqrt{gh_0}$  в явном виде:

$$\sqrt{gh} = \frac{1}{3} \left( 2\sqrt{gh_0} - \frac{x}{t} \right),$$

$$v = 2\sqrt{gh_0} - 2\sqrt{gh} = \frac{2}{3} \left( \sqrt{gh_0} + \frac{x}{t} \right).$$

Это решение дает структуру переходной области между состояниями с  $h = h_0$  и  $h = 0$  (рис. 4.5). Заметим, что в точке расположения плотины ( $x = 0$ ) величины  $h = 4h_0/9$  и  $v = 2\sqrt{gh_0}/3$  остаются постоянными. Любопытно, что образования ударной волны не происходит, хотя начальный профиль (4.28) и содержал разрыв. Жирные линии на рис. 4.4 являются траекториями слабых разрывов. На них испытывают скачок производные  $h_x$  и  $h_{xx}$ , соответственно.

#### 4.4. Ионно-звуковые волны в плазме

Обратимся теперь к задаче из физики плазмы. Запишем гидродинамические уравнения движения электронов

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{mn_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} \quad (4.33)$$

и ионов

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4.34)$$

в плазме без магнитного поля [2, гл. 12]. Здесь  $v_{i,e}$  и  $n_{i,e}$  — скорости и концентрации ионов и электронов, соответственно,  $\varphi$  — потенциал поля пространственного заряда,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $M$  — масса иона. Считаем, что заряд иона равен  $-e$ . Поскольку температура ионной компоненты плазмы  $T_i$ , как правило, много меньше температуры  $T_e$  электронов, давление в уравнении (4.34) не учитывается. Будем предполагать, что электронную компоненту можно приближенно считать идеальным газом и найти давление  $p_e$  из уравнения состояния

$$p_e = n_e k_B T_e, \quad (4.35)$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана. Ионно-акустические волны представляют собой медленные движения, характерная частота которых порядка ионной плазменной частоты [11, 14] так что в уравнении (4.33) можно пренебречь инерцией электронов (т.е. считать, что перераспределение концентрации электронов при изменении потенциала происходит мгновенно). Таким образом, уравнение (4.33) принимает вид:

$$e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{n_e} \frac{\partial p_e}{\partial x}.$$

Подставляя сюда уравнение состояния (4.35), получим

$$e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{k_B T_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}. \quad (4.36)$$

Потенциал  $\varphi$  подчиняется уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_e - n_i). \quad (4.37)$$

Используем так называемое приближение *одножидкостной гидродинамики* [14], в соответствии с которым будем считать плазму полностью компенсированной:

$$n_e \approx n_i.$$

Как видно из уравнения (4.37) данное приближение эквивалентно тому, что рассматриваются только длинноволновые возмущения, для которых  $|\varphi_{xx}| \ll |en_{e,i}/\varepsilon_0|$ . Теперь уравнение движения ионов (4.34) с учетом (4.36) принимает вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{k_B T_e}{M n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}.$$

Дополним это уравнение уравнением непрерывности для ионов. Тогда, опуская индекс « $i$ », запишем окончательную систему уравнений

$$v_t + vv_x + \frac{c_s^2 n_x}{n} = 0, \quad (4.38)$$

$$n_t + (nv)_x = 0, \quad (4.39)$$

где  $c_s = \sqrt{k_B T_e / M}$  — скорость ионного звука. Видно, что эта система принадлежит к типу (4.18), поэтому можно сразу заключить, что она является гиперболической и установить инварианты Римана и уравнения характеристик.

Нетрудно показать, что линейные волны описываются дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = c_s^2 k^2,$$

т.е. в рамках сделанных приближений дисперсия в анализируемой системе отсутствует. Но, вообще говоря, ионно-звуковые волны являются диспергирующими, (этот вопрос будет рассмотрен в § 8.7, 9.1). Дисперсионные эффекты исчезли из-за предположения, что волны достаточно длинные. Конкретно это было сделано в уравнении Пуассона (4.37), где положили  $\varphi_{xx} = 0$ . Физически это означает, что плазма нейтральна.

**Задача 4.2.** Покажите, что характеристики для системы (4.38), (4.39) задаются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v \pm c_s,$$

и что на характеристиках сохраняются инварианты Римана

$$r_{\pm} = v \pm c_s \ln \left( \frac{n}{n_0} \right).$$

Здесь  $n_0$  — произвольная нормировочная постоянная, в качестве которой разумно выбрать концентрацию частиц в невозмущенной плазме.

## 4.5. Волны в автомобильном потоке

Наконец, рассмотрим еще один несколько экзотический пример — волны в автомобильном потоке. Будем считать, что движение машин однорядное, а светофоры отсутствуют. Если шоссе не пересекается с другими, на которые могли бы сворачивать автомобили, то общее число машин на трассе сохраняется и справедливо уравнение непрерывности

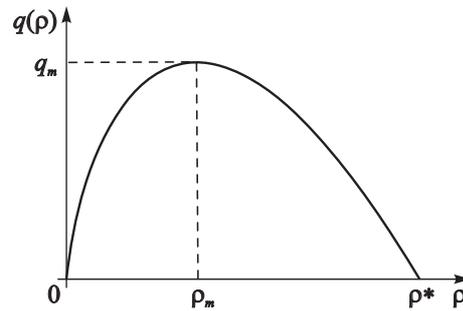
$$\rho_t + q_x = 0, \quad (4.40)$$

где  $\rho$  — плотность (концентрация) машин, а  $q$  — поток, т.е. число автомобилей, проходящих через данную точку шоссе в единицу времени. Если предположить, что поток является функцией плотности  $q = q(\rho)$ , уравнение (4.40) принимает вид уравнения простой волны

$$\rho_t + u(\rho)\rho_x = 0,$$

где  $u(\rho) = dq/d\rho$ .

Какой вид может иметь функция  $q(\rho)$ ? Прежде всего, очевидно, что  $q(0) = 0$ . Пусть существует еще одно, предельное, значение плотности  $\rho^*$ ,

Рис. 4.6. Зависимость  $q(\rho)$  в задаче об автомобильном потоке

при котором  $q(\rho^*) = 0$ . Это та плотность, при которой машины упираются друг в друга бамперами, так что движение невозможно. Заметим также, что величина  $V(\rho) = q/\rho$ , представляющая собой скорость машин, должна быть убывающей функцией  $\rho$ . Таким образом,  $q(\rho)$  представляет собой выпуклую функцию, изображенную на рис. 4.6. Она достигает максимума при некотором значении  $\rho_m$ . При  $\rho > \rho_m$  функция  $u(\rho)$  становится отрицательной, т.е. возмущение распространяется в противоположную сторону, тогда как  $V(\rho)$  всегда положительно (машины не меняют направления движения). Заметим также, что  $u < V$ .

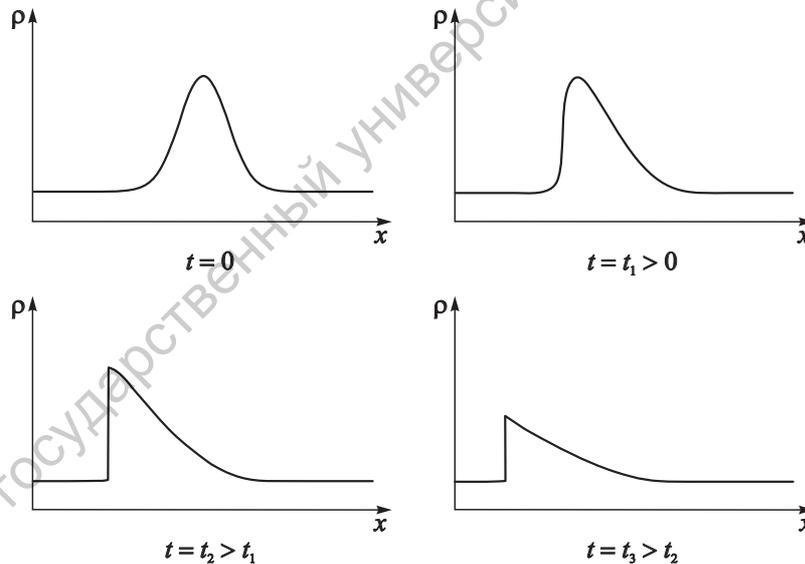


Рис. 4.7. опрокидывание волны в автомобильном потоке (образование затора)

Как показывают наблюдения, для однорядного движения  $\rho^* \sim 140$  машин/км,  $q_m \sim 1500$  машин/ч, причем достигается столь большой поток при довольно малой скорости  $V \sim 30$  км/ч. Зависимость  $q(\rho)$  можно приближенно описать функцией  $q(\rho) = a\rho \ln(\rho^*/\rho)$ . При такой аппроксимации

$V - u = a$  при любом  $\rho$ . Сингулярное поведение функции  $u(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$  не является существенным недостатком, так как область малых  $\rho$ , очевидно, не представляет интереса.

Поскольку  $u(\rho)$  — убывающая функция, разрыв (т.е. затор) образуется на заднем фронте возмущения (рис. 4.7). Машины догоняют скачок уплотнения и увеличивают его. Чтобы не уплотнять затор, шофер должен резко тормозить в переходной области, а затем плавно увеличивать скорость, выезжая из затора. Значительно более подробное рассмотрение данной задачи, включая наличие светофоров на трассе, можно найти в [9].

#### 4.6. Граничные условия на разрыве и их связь с законами сохранения

В заключение еще раз обсудим вопрос о постановке граничных условий на разрыве, который уже затрагивался в § 3.1 применительно к уравнению простой волны. Для получения этих условий необходимо записать уравнения в виде *законов сохранения*

$$P_t + Q_x = 0, \quad (4.41)$$

где  $P$  является *плотностью* сохраняющейся величины, а  $Q$  — *поток*. Каждый закон сохранения вида (4.41) приводит к граничному условию

$$-U[P] + [Q] = 0, \quad (4.42)$$

где  $U$  — скорость разрыва, а квадратные скобки означают скачок соответствующей величины на разрыве. Соотношения (4.42) связывают между собой величины слева и справа от разрыва; в газовой динамике их называют *соотношениями Рэнкина–Гюгонио*. Вывод уравнения (4.42) из уравнения (4.41) абсолютно аналогичен проведенному в § 3.1 для уравнения простой волны

$$u_t + \left( \frac{u^2}{2} \right)_x = 0, \quad (4.43)$$

поэтому он здесь не приводится.

Однако, как уже отмечалось, ситуация с выбором граничных условий не проста. Так, из уравнения (4.43) можно получить бесконечное число законов сохранения вида

$$\left( \frac{u^n}{n} \right)_t + \left( \frac{u^{n+1}}{n+1} \right)_x = 0. \quad (4.44)$$

Какие из них (и сколько) следует выбрать для постановки граничных условий? Ответ на этот вопрос в каждой конкретной ситуации диктуется физическими соображениями; при этом число граничных условий должно быть

равно порядку системы уравнений. В частности, если выбрать граничное условие в виде

$$-U[u] + \left[ \frac{u^2}{2} \right] = 0, \quad (4.45)$$

так что закон сохранения (4.43) будет оставаться в силе и после образования разрыва, то остальные законы сохранения (4.44) уже не будут выполняться. Продемонстрируем это для  $n = 2$ , что приводит к уравнению

$$\left( \frac{u^2}{2} \right)_t + \left( \frac{u^3}{3} \right)_x = 0. \quad (4.46)$$

Умножая соотношение (4.45) на  $(u_1 + u_2)/2$  (напомним, что индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к величинам справа и слева от разрыва), получим

$$-U[u] \frac{u_1 + u_2}{2} + \left[ \frac{u^2}{2} \right] \frac{u_1 + u_2}{2} = -U \left[ \frac{u^2}{2} \right] + \left[ \frac{u^3}{4} \right] + \frac{u_2^2 u_1 - u_1^2 u_2}{4} = 0.$$

Прибавляя и вычитая величину  $[u^3/12]$ , после несложных преобразований приведем это выражение к виду

$$-U \left[ \frac{u^2}{2} \right] + \left[ \frac{u^3}{3} \right] = \frac{(u_2 - u_1)^3}{12}, \quad (4.47)$$

откуда видно, что закон сохранения (4.46) не выполняется. Отметим, что если  $u$  имеет смысл скорости движения какой-то среды и эта среда несжимаема, то уравнения (4.43) и (4.46) являются законами сохранения импульса и энергии, соответственно. Таким образом, соотношение (4.47) показывает, что на разрыве имеет место диссипация энергии. Действительно, переходя в (4.46) в систему координат, движущуюся вместе с разрывом, и интегрируя по всей оси  $x$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{u^2}{2} \right) dx = U \left[ \frac{u^2}{2} \right] - \left[ \frac{u^3}{3} \right] = \frac{(u_1 - u_2)^3}{12}.$$

Поскольку на разрыве  $u_1 < u_2$ , это выражение отрицательно, так что полная энергия с течением времени уменьшается.

Аналогичная ситуация имеет место для уравнений «мелкой воды» (4.26) и (4.27). Для них также можно получить бесконечное число законов сохранения вида (4.41), где  $P = P(v, h)$ ,  $Q = Q(v, h)$ . Действительно, из закона сохранения (4.41) следует, что

$$P_v v_t + P_h h_t + Q_v v_x + Q_h h_x = 0.$$

Подставляя сюда  $v_t$  и  $h_t$  из уравнений (4.26) и (4.27), получаем

$$-P_v(vv_x + gh_x) - P_h(hv_x + vh_x) + Q_v v_x + Q_h h_x = 0.$$

Собирая члены при  $v_x$  и  $h_x$ , имеем

$$(Q_v - vP_v - hP_h)v_x + (Q_h - gP_v - vP_h)h_x = 0.$$

Потребуем, чтобы члены в обеих круглых скобках обратились в нуль, тогда

$$Q_v = vP_v + hP_h, \quad Q_h = gP_v + vP_h. \quad (4.48)$$

Исключая отсюда  $Q$  перекрестным дифференцированием, получаем

$$hP_{hh} = gP_{vv}. \quad (4.49)$$

Любое  $P(v, h)$ , удовлетворяющее условию (4.49), приводит к закону сохранения, так что очевидно, что их число бесконечно. Будем искать  $P$  в виде полиномов по  $h$

$$P(v, h) = \sum_{m=0}^n p_m(v)h^m.$$

Тогда уравнение (4.49) дает

$$\begin{aligned} p_0'' &= 0, & p_n'' &= 0, \\ gp_{m-1}'' &= m(m-1)p_m, & m &= 2, \dots, n. \end{aligned}$$

В случае  $n = 1$  имеем  $P = p_1(v)h + p_0(v)$ . Нетрудно показать, что при  $p_0 = 0, p_1 = 1$ , приходим к уравнению (4.27), которое является *законом сохранения массы*, а при  $p_0 = v, p_1 = 0$  — к уравнению (4.26). Выбор  $p_0 = 0, p_1 = v$  приводит к *закону сохранения импульса*

$$(vh)_t + \left( v^2h + \frac{gh^2}{2} \right)_x = 0. \quad (4.50)$$

При  $n = 2$  имеем  $P = p_2h^2 + p_1h + p_0$ . Если взять  $p_0 = 0, p_1 = v^2/2, p_2 = g/2$ , то из уравнений (4.48) следует *закон сохранения энергии*

$$\left( \frac{v^2h}{2} + \frac{gh^2}{2} \right)_t + \left( \frac{v^3h}{2} + gvh^2 \right)_x = 0. \quad (4.51)$$

Другим законам сохранения не удастся придать очевидный физический смысл.

Если поставить граничные условия на разрыве, исходя из законов сохранения массы (4.27) и импульса (4.50), то они будут иметь вид

$$-U[h] + [vh] = 0, \quad (4.52)$$

$$-U[vh] + \left[ v^2h + \frac{gh^2}{2} \right] = 0. \quad (4.53)$$

Можно показать, что при этом будет иметь место диссипация энергии. В более сложных уравнениях газовой динамики (4.11)–(4.13) энергия сохраняется, а на разрыве происходит скачок энтропии [9].

**Задача 4.3.** Показать, что из уравнений «мелкой воды» с граничными условиями на разрыве (4.52) и (4.53) не следует сохранение энергии.

*Решение:* Умножая уравнение (4.52) на  $g(h_1 + h_2)/2$ , получим

$$-U \left[ \frac{gh^2}{2} \right] + \left[ \frac{gvh^2}{2} \right] + \frac{gh_1h_2(v_2 - v_1)}{2} = 0. \quad (4.54)$$

Теперь умножим (4.53) на  $(v_1 + v_2)/2$ . После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} -U \left[ \frac{v^2h}{2} \right] + \left[ \frac{v^3h}{2} + \frac{gvh^2}{4} \right] - U \frac{v_1v_2(h_2 - h_1)}{2} + \\ + \frac{v_1v_2(v_2h_2 - v_1h_1)}{2} + \frac{g(v_1h_2^2 - v_2h_1^2)}{4} = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что с учетом соотношения (4.52) это уравнение упрощается:

$$-U \left[ \frac{v^2h}{2} \right] + \left[ \frac{v^3h}{2} + \frac{gvh^2}{4} \right] + \frac{g(v_1h_2^2 - v_2h_1^2)}{4} = 0.$$

Прибавим и вычтем  $[gvh^2/4]$ . Это дает

$$-U \left[ \frac{v^2h}{2} \right] + \left[ \frac{v^3h}{2} + \frac{gvh^2}{2} \right] + \frac{g(v_1h_2^2 - v_2h_1^2 + v_1h_1^2 - v_2h_2^2)}{4} = 0. \quad (4.55)$$

Складывая уравнения (4.54) и (4.55), получаем

$$-U \left[ \frac{v^2h}{2} + \frac{gh^2}{2} \right] + \left[ \frac{v^3h}{2} + gvh^2 \right] = \frac{g(v_2 - v_1)(h_2 - h_1)^2}{4},$$

следовательно, закон сохранения энергии (4.51) не выполняется. Поскольку выражение, стоящее в правой части, может быть только положительным, опять убеждаемся, что полная энергия с течением времени уменьшается.

## Лекция 5.

# Нелинейные волны в средах с диссипацией (уравнение Бюргерса)

... подход явно учитывает нелокальный характер взаимодействия волны со средой в окрестностях ударных фронтов ... Учет диссипации в простейшем приближении ведет к уравнению Бюргерса, которое описывает процесс поглощения энергии как процесс, обладающий конечной скоростью. Вследствие этого область фронта может рассматриваться как обладающая протяженностью и структурой.

*С.Н. Гурбатов, А.И. Саичев, И.Г. Якушкин. Нелинейные волны и одномерная турбулентность (УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 225)*

Настоящая лекция посвящена уточнению теории за счет более строгого учета диссипативных эффектов. Основной моделью для этого является уравнение Бюргерса [27]

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}. \quad (5.1)$$

Впрочем, Уизем указывает [9], что оно впервые, вероятно, было введено Бейтменом еще в 1915 г. Строгий вывод уравнения (5.1) из уравнений газовой динамики с учетом вязкости и теплопроводности отложим до лекции 9, где будут изучаться асимптотические методы, позволяющие получать «длинноволновые» уравнения (Бюргерса, Кортевега–де Вриза и др.). Заметим лишь, что уравнение типа (5.1) можно получить из закона сохранения

$$\rho_t + q_x = 0,$$

где  $\rho$  — плотность сохраняющейся величины,  $q$  — поток, полагая

$$q = Q(\rho) - \nu \rho_x.$$

Например, для задачи об автомобильном потоке, рассмотренной в § 4.5, это означает, что шоферы снижают скорость при увеличении числа машин впереди.

Итак, уравнение (5.1) имеет вид закона сохранения

$$u_t + \left( \frac{u^2}{2} - \nu u_x \right)_x = 0.$$

Отсюда следует, что величина

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx$$

является интегралом движения и, как и в случае уравнения простой волны, определяет асимптотическую форму профиля решения.

В лекции 9 увидим, что уравнение Бюргера можно получить и в иной форме:

$$u_x - \alpha u u_t = \delta u_{tt}. \quad (5.2)$$

Теперь оно содержит производную по координате только первого порядка и потому более удобно для анализа задачи с граничным условием (задачи о распространении сигнала), тогда как уравнение (5.1) более подходит для задачи с начальным условием. Уравнение Бюргера в виде (5.2) часто используется в нелинейной акустике и обобщено на случай цилиндрических, сферических волн и волн в средах с релаксацией [15, 48].

Как показано на качественном уровне в лекции 1, диссипативные эффекты способны приостановить укрупнение и привести к образованию *ударной волны*. Ранее в лекции 3 мы фактически рассматривали уравнение простой волны как предел уравнения Бюргера при  $\nu \rightarrow 0$ , а ударную волну трактовали просто как математический разрыв. Теперь выясним, к каким отличиям приводит более строгий учет влияния диссипации.

## 5.1. Точные решения уравнения Бюргера. Преобразование Коула–Хопфа

Очевидно, что уравнение Бюргера (5.1) представляет собой нелинейную модификацию уравнения теплопроводности

$$\varphi_t = \nu \varphi_{xx}. \quad (5.3)$$

Гораздо важнее, однако, то, что его удастся свести к линейному уравнению (5.3), применяя специальное преобразование, найденное независимо Коулом [58] и Хопфом [59]. Проведем это преобразование в два этапа. Сначала положим

$$u = \psi_x.$$

При этом уравнение (5.1) после однократного интегрирования принимает вид

$$\psi_t + \frac{1}{2} \psi_x^2 = \nu \psi_{xx}.$$

Теперь, полагая  $\psi = -2\nu \ln \varphi$ , находим

$$-2\nu \frac{\varphi_t}{\varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\nu \varphi_x}{\varphi} \right)^2 = -2\nu^2 \left( \frac{\varphi_x}{\varphi} \right)_x = -2\nu^2 \frac{\varphi_{xx}\varphi - \varphi_x^2}{\varphi^2}.$$

Члены, содержащие  $(\varphi_x)^2$ , взаимно уничтожаются и уравнение для  $\varphi$  становится линейным.

Таким образом, уравнение Бюргера (5.1) при помощи замены

$$u = -2\nu \frac{\partial(\ln \varphi)}{\partial x} \quad (5.4)$$

переходит в уравнение теплопроводности (5.3). Если мы имеем начальное условие

$$u(x; t = 0) = F(x),$$

то из соотношения (5.4) следует условие для функции  $\varphi$ :

$$\varphi(x; t = 0) = \Phi(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\eta) d\eta \right]. \quad (5.5)$$

Решение уравнения теплопроводности с начальным условием (5.5) имеет вид (см., например, [60])

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \exp \left[ -\frac{(x - \eta)^2}{4\nu t} \right] d\eta.$$

Отсюда находим  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \eta}{t} \exp(-G/2\nu) d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-G/2\nu) d\eta}, \quad (5.6)$$

$$G(\eta; x, t) = \int_0^{\eta} F(\eta') d\eta' + \frac{(x - \eta)^2}{2t}. \quad (5.7)$$

Соотношения (5.6) и (5.7) позволяют, в принципе, получить решение уравнения Бюргера, соответствующее произвольному начальному профилю волны. Конечно, далеко не всегда интегралы, входящие в эти формулы, можно вычислить аналитически. Однако в ряде важных случаев это удастся сделать.

## 5.2. Поведение решений уравнения Бюргера в пределе $\nu \ll 1$

В этом параграфе постараемся ответить на один из наиболее важных вопросов: стремятся ли решения уравнения Бюргера в пределе  $\nu \ll 1$  к соответствующим разрывным решениям, найденным в лекции 3. Прежде всего заметим, что экспонента  $\exp(-G/2\nu)$  в подынтегральных выражениях, входящих в формулу (5.6), в этом случае мала всюду, за исключением окрестностей точек, где функция  $G$  имеет минимум (называемых также *стационарными точками*), в которых

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = F(\eta) - \frac{x - \eta}{t} = 0.$$

Предположим, что имеется единственная стационарная точка  $\eta = \xi(x, t)$ , удовлетворяющая уравнению

$$F(\xi) - \frac{x - \xi}{t} = 0. \quad (5.8)$$

Тогда можно разложить  $G(\eta)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\xi$  и, взяв два не обращающихся в нуль члена разложения, получить

$$G(\eta) \approx G(\xi) + \frac{(\eta - \xi)^2}{2} G''(\xi).$$

Заметим, что поскольку  $\xi$  — точка минимума,  $G''(\xi) > 0$ . Теперь можно приближенно вычислить интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{-G/2\nu} d\eta \approx g(\xi) e^{-G(\xi)/2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-G''(\xi)(\eta - \xi)^2/4\nu} d\eta,$$

где  $g(\eta)$  — функция, медленно меняющаяся по сравнению с экспонентой. Вводя обозначение

$$\zeta^2 = \frac{G''(\xi)(\eta - \xi)^2}{4\nu},$$

получим

$$I \approx g(\xi) e^{-G(\xi)/2\nu} \sqrt{\frac{4\nu}{G''(\xi)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \sqrt{\frac{4\pi\nu}{G''(\xi)}} g(\xi) e^{-G(\xi)/2\nu}.$$

Здесь использовано тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом, из формулы (5.6) получаем

$$u \approx \frac{x - \xi}{t}. \quad (5.9)$$

С учетом того, что  $\xi$  удовлетворяет уравнению (5.8), последнее равенство можно переписать в виде двух соотношений

$$\begin{aligned} u &= F(\xi), \\ x &= \xi + F(\xi)t, \end{aligned} \quad (5.10)$$

в которых нетрудно узнать решение (2.6) уравнения простой волны.

В отличие от однозначных и непрерывных решений уравнения Бюргера, определяемых соотношениями (5.6) и (5.7), формулы (5.10) предсказывают опрокидывание волны. Однако, как было показано в лекции 2, опрокидыванию соответствует пересечение двух характеристик и, следовательно, имеются две стационарные точки  $\xi_{1,2}$ , удовлетворяющие уравнению (5.8). Таким образом, в выражении (5.6) теперь необходимо учесть вклад от обеих этих точек, что дает:

$$u \approx \frac{(x - \xi_1) \exp(-G_1/2\nu) / t\sqrt{G_1''} + (x - \xi_2) \exp(-G_2/2\nu) / t\sqrt{G_2''}}{\exp(-G_1/2\nu) / \sqrt{G_1''} + \exp(-G_2/2\nu) / \sqrt{G_2''}}, \quad (5.11)$$

где  $G_{1,2} = G(\xi_{1,2})$ . Если  $G_1 < G_2$ , то в формуле (5.11) доминируют члены, содержащие  $G_1$ , и

$$u \sim \frac{x - \xi_1}{t}.$$

В противном случае доминируют члены, содержащие  $G_2$ , и

$$u \sim \frac{x - \xi_2}{t}.$$

Таким образом, решение состоит из двух частей, приближенно удовлетворяющих уравнению простой волны, и соединенных переходной областью, ширина которой пропорциональна  $\nu$ .

### 5.3. Стационарная ударная волна

Найдем решение уравнения Бюргера в виде *стационарной ударной волны*. Рассмотрим задачу с граничными условиями

$$u = \begin{cases} u_1, & x \rightarrow \infty, \\ u_2 > u_1, & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.12)$$

Аналогом этого решения в случае уравнения простой волны является, очевидно, одиночный разрыв (§ 3.1). Напомним, что стационарными называются волны, которые распространяются вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $U$ , не изменяя своей формы. Эти решения зависят от  $x$  и  $t$  в комбинации  $\xi = x - Ut$ . Тогда из уравнения (5.1) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-Uu' + \left(\frac{u^2}{2}\right)' = \nu u'',$$

где штрихи обозначают дифференцирование по  $\xi$ . Интегрируя это уравнение один раз с учетом граничных условий (5.12), получаем при  $x \rightarrow \infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ , соответственно

$$\begin{aligned} -Uu + \frac{u^2}{2} - \nu u' &= -Uu_1 + \frac{u_1^2}{2}, \\ -Uu + \frac{u^2}{2} - \nu u' &= -Uu_2 + \frac{u_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Отсюда находим

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad (5.14)$$

т.е. скорость ударной волны описывается в точности тем же выражением, что и скорость разрыва (см. формулу (3.4)). Теперь соотношения (5.13) принимают вид

$$\nu u' = \frac{(u - u_1)(u - u_2)}{2}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем решение в неявном виде:

$$\frac{\xi - \xi_0}{2\nu} = \frac{1}{u_2 - u_1} \ln \left( \frac{u_2 - u}{u - u_1} \right). \quad (5.15)$$

Постоянная  $\xi_0$  определяет положение фронта ударной волны. Без ограничения общности ее можно положить равной нулю. Разрешая уравнение (5.15) относительно  $u$ , находим

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2\nu} \xi\right)}. \quad (5.16)$$

Профиль этого решения приведен на рис. 1.5.

Если ввести амплитуду ударной волны  $u_m = (u_2 - u_1)/2$ , то выражение (5.16) принимает вид

$$u = U - u_m \operatorname{th} \left( \frac{u_m \xi}{2\nu} \right) = U - u_m \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{\Delta} \right), \quad (5.17)$$

где  $\Delta = 2\nu/u_m$  — характерная ширина фронта ударной волны. Видно, что эта величина обратно пропорциональна амплитуде волны и прямо пропорциональна  $\nu$ . Таким образом, подтверждается справедливость оценки (1.26), сделанной в лекции 1 из качественных соображений.

**Задача 5.1.** Исследовать процесс трансформации начального профиля в виде ступеньки

$$u = \begin{cases} u_1, & x > 0, \\ u_2 > u_1, & x < 0, \end{cases}$$

в стационарную ударную волну (5.16).

*Решение:* Прежде всего найдем  $G(\eta; x, t)$  по формуле (5.7):

$$G = \begin{cases} G_1 = \frac{(x - \eta)^2}{2t} + u_1\eta, & \eta > 0, \\ G_2 = \frac{(x - \eta)^2}{2t} + u_2\eta, & \eta < 0. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$E_i = \exp\left(-\frac{x^2 - (x - u_i t)^2}{4\nu t}\right),$$

где  $i = 1, 2$ , тогда

$$\exp\left(-\frac{G_i}{2\nu}\right) = E_i \exp\left(-\frac{(\eta - x + u_i t)^2}{4\nu t}\right).$$

Вычислим интеграл в знаменателе формулы (5.6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{G}{2\nu}\right) d\eta = \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{G_2}{2\nu}\right) d\eta + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{G_1}{2\nu}\right) d\eta.$$

При помощи замены  $\zeta^2 = (\eta - x + u_i t)^2/4\nu t$  получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{G}{2\nu}\right) d\eta = \sqrt{\pi\nu t} \left[ E_1 \operatorname{erfc}\left(-\frac{x - u_1 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) + E_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) \right].$$

Здесь  $\operatorname{erfc}$  — так называемый *дополнительный интеграл вероятностей* (или ошибок) [47]:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Теперь вычислим интегралы в числителе формулы (5.6). После несложных преобразований можно найти, что

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x - \eta}{t} \exp\left(-\frac{G_2}{2\nu}\right) d\eta = - \int_{-\infty}^0 \frac{\eta - x + u_2 t}{t} \exp\left(-\frac{G_2}{2\nu}\right) d\eta + u_2 \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{G_2}{2\nu}\right) d\eta.$$

Второй интеграл был уже вычислен нами ранее, а первый преобразуется в интеграл от экспоненты при помощи замены  $\zeta = (\eta - x + u_2 t)^2 / 4\nu t$ . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{x - \eta}{t} \exp\left(-\frac{G_2}{2\nu}\right) d\eta &= \\ &= \sqrt{\pi\nu t} u_2 E_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) + 2\nu E_2 \exp\left(-\frac{(x - u_2 t)^2}{4\nu t}\right) = \\ &= \sqrt{\pi\nu t} u_2 E_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) + 2\nu \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение находим для интеграла, содержащего  $G_1$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{x - \eta}{t} \exp\left(-\frac{G_1}{2\nu}\right) d\eta = \sqrt{\pi\nu t} u_1 E_1 \operatorname{erfc}\left(-\frac{x - u_1 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) - 2\nu \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right).$$

Таким образом, числитель в формуле (5.6) имеет вид

$$\sqrt{\pi\nu t} \left[ u_1 E_1 \operatorname{erfc}\left(-\frac{x - u_1 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) + u_2 E_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) \right].$$

Окончательно получаем выражение

$$u(x, t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + A E_1 / E_2},$$

где

$$A = \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_1 t}{\sqrt{4\nu t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right)}.$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{E_1}{E_2} = \exp\left(\frac{(x - u_1 t)^2 - (x - u_2 t)^2}{4\nu t}\right) = \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2\nu} (x - U t)\right),$$

где  $U$  по-прежнему определяется формулой (5.14), следовательно,

$$u(x, t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + A \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2\nu} (x - U t)\right)}.$$

Поскольку  $A \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow \infty$  для фиксированного  $x/t$  из интервала  $u_1 < x/t < u_2$ , решение с течением времени превращается в стационарную ударную волну (5.16).

## 5.4. Распространение гармонического сигнала в нелинейной среде с диссипацией

В § 3.2 мы показали, что гармонический сигнал вида

$$u(x = 0; t) = u_0 + a \sin(\omega t),$$

распространяющийся в нелинейной недиспергирующей среде, с течением времени превращается в пилообразный (3.11). Пилообразную волну можно представить как сумму линейной и ступенчатой функций. Поскольку при конечном  $\nu$  аналогом ступенчатого профиля является стационарная ударная волна, можно сконструировать периодическое решение, складывая выражение (5.17) с линейной функцией:

$$u = u_m \left[ -\frac{\theta}{\pi} + \text{th} \left( \frac{\theta}{\Delta} \right) \right], \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (5.18)$$

где  $\theta = \omega(t - x/u_0)$ ,  $\Delta = 2\omega\nu/u_m$ . Если подставить сюда выражение (3.9) для  $u_m$ , то получим

$$u = \frac{a}{1+X} \left[ -\theta + \pi \text{th} \left( \frac{\pi \text{Re} \theta}{1+X} \right) \right], \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (5.19)$$

где  $\text{Re} = a/2\omega\nu$ . Формула (5.19) описывает пилообразную волну со сгла-

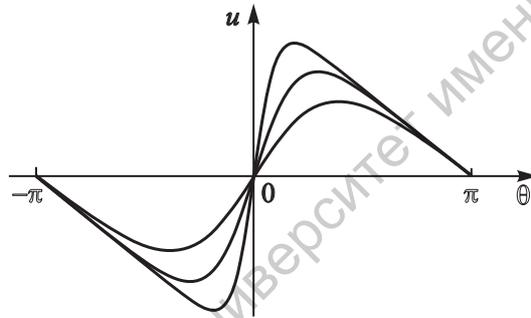


Рис. 5.1. Профиль решения (5.19) при различных значениях параметра  $\text{Re}$

женным фронтом (рис. 5.1). Это решение было найдено Р.В. Хохловым в 1961 г. [61, 62]. Напомним, что в выражении (5.19)  $a$  является амплитудой входного сигнала,  $X$  — безразмерная координата. Удивительно, но сконструированное таким образом выражение является точным решением уравнения Бюргера (5.2) с  $\alpha = u_0^{-2}$ ,  $\delta = \nu/u_0^2$ , в чем можно убедиться прямой подстановкой.

Величина  $\text{Re}$  в акустике и гидродинамике называется *числом Рейнольдса* [15, 43] и характеризует отношение нелинейного члена к диссипативному:

$$\frac{u^2/2}{\nu u_t} \sim \frac{a^2/2}{\nu \omega a} = \frac{a}{2\omega\nu} = \text{Re}.$$

Вычислим спектр решения (5.19). Коэффициенты разложения в ряд Фурье по синусам имеют вид

$$A_n = \frac{2a}{\pi(1+X)} \int_0^\pi (-\theta + \pi \text{th} \beta \theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad \beta = \frac{\pi \text{Re}}{1+X}.$$

Продифференцируем интеграл по параметру  $\beta$ . Тогда

$$\frac{\partial A_n}{\partial \beta} = \frac{2a}{1+X} \int_0^\pi \frac{\theta \sin n\theta}{\operatorname{ch}^2 \beta\theta} d\theta.$$

Ввиду того, что подынтегральное выражение есть быстроубывающая функция  $\theta$ , можно приближенно заменить верхний предел на бесконечный. Получившийся интеграл удается вычислить [63, п. 4.118]. Действительно,

$$\frac{\partial A_n}{\partial \beta} \approx \frac{2a}{1+X} \int_0^\infty \frac{\theta \sin n\theta}{\operatorname{ch}^2 \beta\theta} d\theta = \frac{\pi a}{1+X} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\beta \operatorname{sh}[\pi n/2\beta]} \right).$$

Окончательно получаем выражение

$$u = \frac{a}{\operatorname{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\operatorname{sh}[n(1+X)/2\operatorname{Re}]}, \quad (5.20)$$

которое носит название *решения Фэя* [64]. При  $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$ , (т.е. при  $\nu \rightarrow 0$ ) и не слишком больших номерах гармоник  $n$  имеем

$$A_n \approx \frac{2a}{n(1+X)},$$

что в точности совпадает с выражением (3.13) для спектра пилообразной

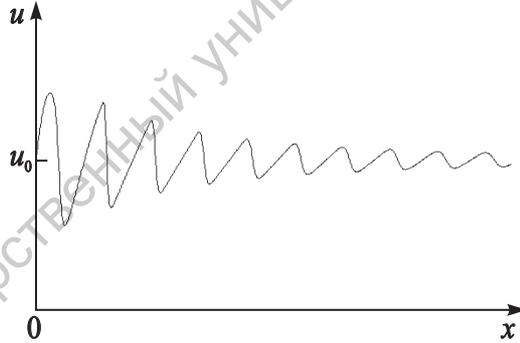


Рис. 5.2. Распространение гармонического сигнала в нелинейной диссипативной среде

волны. Однако для  $n \gg 1$  это приближение уже несправедливо. Таким образом, разрывное решение недостаточно правильно передает затухание высших гармоник. Действительно, соотношение (3.11) не учитывает, что ширина ударного фронта растет с уменьшением амплитуды и волна на любой стадии остается пилообразной. В то же время решение (5.19) на больших расстояниях переходит в экспоненциально затухающую гармоническую волну. Этот процесс иллюстрирует рис. 5.2, где представлены

результаты численного решения уравнения Бюргера с синусоидальным возмущением на границе. Более строгое рассмотрение задачи о распространении гармонического сигнала, основанное на преобразовании Коула–Хопфа, можно найти в [15].

## 5.5. Взаимодействие ударных волн

Рассмотрим вопрос о взаимодействии ударных волн. Прежде всего заметим, что стационарную ударную волну (5.16) можно представить в виде

$$u = \frac{u_1 f_1 + u_2 f_2}{f_1 + f_2},$$

$$f_i = \exp\left(-\frac{u_i x}{2\nu} + \frac{u_i^2 t}{4\nu}\right).$$

Поскольку  $\frac{\partial f_i}{\partial x} = -\frac{u_i f_i}{2\nu}$ , это выражение можно переписать так:

$$u = -2\nu \frac{(f_1 + f_2)_x}{f_1 + f_2}.$$

Таким образом, преобразование Коула–Хопфа (5.4) переводит решение в виде стационарной ударной волны в

$$\varphi = f_1 + f_2.$$

Теперь рассмотрим функцию  $\varphi$  вида

$$\varphi = f_1 + f_2 + f_3,$$

так что

$$u = \frac{u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3}{f_1 + f_2 + f_3}.$$

Здесь

$$f_i = \exp\left(-\frac{u_i x}{2\nu} + \frac{u_i^2 t}{4\nu} - b_i\right), \quad u_1 < u_2 < u_3, \quad b_i = \text{const's}.$$

Без ограничения общности можно положить  $b_1 = b_2 = 0$ .

На рис. 5.3а представлены графики функций  $f_i(x)$  в момент времени  $t = 0$ . Видно, что функция  $f_1$  доминирует в области  $x > 0$ , функция  $f_2$  — в области  $x_0 < x < 0$ , а  $f_3$  — в области  $x < x_0$  (считаем, что  $x_0 < 0$ ), где  $x_0$  — определяется из условия

$$-\frac{u_2 x_0}{2\nu} = -\frac{u_3 x_0}{2\nu} - b_3.$$

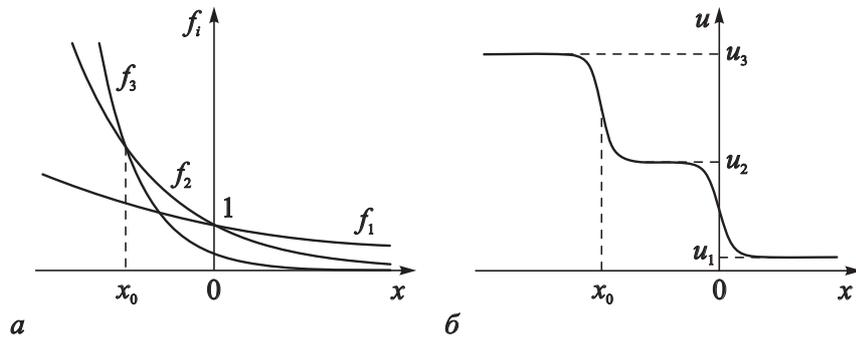


Рис. 5.3. Графики функций  $f_i(x)$  (а) и начальный профиль  $u(x)$  (б) в задаче о взаимодействии ударных волн

Отсюда можно выразить  $b_3$  через  $x_0$ :  $b_3 = x_0(u_2 - u_3)/2\nu$ . Поскольку при  $f_i \gg f_{j,k}$

$$u \approx u_i,$$

начальный профиль имеет вид, изображенный на рис. 5.3б, а  $x_0$  определяет положение заднего ударного фронта.

Рассмотрим динамику этого профиля во времени. Переходная область между  $u_1$  и  $u_2$  в плоскости  $(x, t)$  (т.е. фронт первой ударной волны) движется по траектории, которая определяется из условия

$$-\frac{u_1 x}{2\nu} + \frac{u_1^2 t}{4\nu} = -\frac{u_2 x}{2\nu} + \frac{u_2^2 t}{4\nu},$$

что дает

$$x = \frac{u_1 + u_2}{2} t. \quad (5.21)$$

Аналогично находим траекторию движения фронта второй ударной волны (переходной области между  $u_2$  и  $u_3$ ):

$$x = x_0 + \frac{u_2 + u_3}{2} t. \quad (5.22)$$

Прямые (5.21) и (5.22) пересекаются в точке  $(x^*, t^*)$ , где

$$t^* = \frac{2x_0}{u_1 - u_3},$$

$$x^* = \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_3} x_0.$$

При  $t > t^*$  области, в которой доминирует  $f_2$  более не существует. Это означает, что две ударные волны сливаются в одну, фронт которой распространяется вдоль линии, на которой  $f_1 = f_3$ , т.е.

$$-\frac{u_3 x}{2\nu} + \frac{u_3^2 t}{4\nu} + \frac{(u_3 - u_2)x_0}{2\nu} = -\frac{u_1 x}{2\nu} + \frac{u_1^2 t}{4\nu},$$

откуда находим

$$x = \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1} x_0 + \frac{u_1 + u_3}{2} t.$$

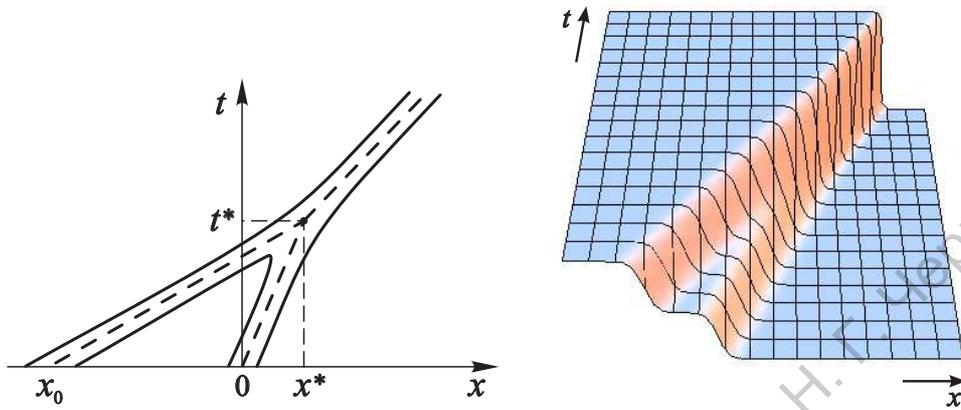


Рис. 5.4. Траектории фронтов ударных волн на плоскости  $(x, t)$

Рис. 5.5. Слияние ударных волн

Последнее уравнение удобно переписать в виде

$$x - x^* = \frac{u_1 + u_3}{2} (t - t^*).$$

Следовательно, ситуация аналогична задаче о взаимодействии разрывов (§ 3.6), за исключением того, что фронты ударных волн занимают на плоскости  $(x, t)$  конечную область, ширина которой пропорциональна  $\nu$  (рис. 5.4). На рис. 5.5 представлены результаты компьютерного моделирования, иллюстрирующие процесс слияния ударных волн.

## 5.6. Распространение одиночного импульса в нелинейной среде с диссипацией

Рассмотрим поведение начального возмущения в виде униполярного импульса. Как показано в лекции 3, динамика подобных возмущений обладает универсальной асимптотикой на больших временах, которая определяется величиной

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx,$$

являющейся интегралом движения. Поэтому рассмотрим наиболее простой случай, когда возмущение имеет вид  $\delta$ -образного импульса:

$$F(x) = S\delta(x).$$

Вычислим  $G(\eta; x, t)$ . Без ограничения общности можно включить  $\delta$ -функцию в интеграл в формуле (5.7) слева от нуля, тогда

$$G = \begin{cases} \frac{(x - \eta)^2}{2t}, & \eta > 0, \\ \frac{(x - \eta)^2}{2t} - S, & \eta < 0. \end{cases}$$

Тогда числитель в формуле (5.6) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \eta}{t} \exp\left(-\frac{G}{2\nu}\right) d\eta = \\ & \exp(\text{Re}) \int_{-\infty}^0 \frac{x - \eta}{t} \exp\left(-\frac{(x - \eta)^2}{4\nu t}\right) d\eta + \\ & + \int_0^{\infty} \frac{x - \eta}{t} \exp\left(-\frac{(x - \eta)^2}{4\nu t}\right) d\eta. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь  $\text{Re} = S/2\nu$  — величина, которая в данной задаче играет роль числа Рейнольдса. Действительно, пусть возмущение имеет характерную амплитуду  $a$  и характерный пространственный масштаб  $l$ . Тогда  $u_x \sim a/l$ , откуда

$$\text{Re} \sim \frac{a^2/2}{\nu a/l} = \frac{al}{2\nu} \sim \frac{S}{2\nu}.$$

Путем замены  $\zeta = (x - \eta)^2/4\nu t$  интегралы в выражении (5.23) преобразуются в интегралы от экспонент и оно принимает вид

$$\begin{aligned} & -2\nu \left( \exp(\text{Re}) \int_{\infty}^{x^2/4\nu t} \exp(-\zeta) d\zeta + \int_{x^2/4\nu t}^{\infty} \exp(-\zeta) d\zeta \right) = \\ & = 2\nu (\exp(\text{Re}) - 1) \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Знаменатель в формуле (5.6) выразим через дополнительный интеграл вероятностей следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{G}{2\nu}\right) d\eta =$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\operatorname{Re}) \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right) d\eta + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right) d\eta = \\
&= \sqrt{4\nu t} \left( \exp(\operatorname{Re}) \int_{-\infty}^{-x/\sqrt{4\nu t}} \exp(-\zeta^2) d\zeta + \int_{-x/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta \right) = \\
&= \sqrt{\pi\nu t} \left[ 2 + (\exp(\operatorname{Re}) - 1) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\nu t}}\right) \right]. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Подставляя выражения (5.24), (5.25) в формулу (5.6), окончательно получаем

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \frac{2(\exp(\operatorname{Re}) - 1) \exp(-x^2/4\nu t)}{2 + (\exp(\operatorname{Re}) - 1) \operatorname{erfc}(x/\sqrt{4\nu t})}. \quad (5.26)$$

Формулу (5.26) можно переписать так:

$$u = \sqrt{\frac{2S}{\pi t}} g(\operatorname{Re}, z), \quad (5.27)$$

$$g = \frac{\exp(\operatorname{Re}) - 1}{\sqrt{\operatorname{Re}}} \frac{\exp(-\operatorname{Re}z^2)}{2 + (\exp(\operatorname{Re}) - 1) \operatorname{erfc}(z\sqrt{\operatorname{Re}})}, \quad (5.28)$$

где  $z = x/\sqrt{2St}$ .

Рассмотрим случай, когда число Рейнольдса велико, что соответствует пределу малых  $\nu$ . Тогда, поскольку  $\exp(\operatorname{Re}) \gg 1$ , выражение (5.28) принимает вид

$$g \approx \frac{\exp(\operatorname{Re}(1 - z^2))}{\sqrt{\operatorname{Re}} \left( 2 + \exp(\operatorname{Re}) \operatorname{erfc}(z\sqrt{\operatorname{Re}}) \right)}. \quad (5.29)$$

Рассмотрим область  $z < 0$ . В этом случае дополнительный интеграл вероятностей в формуле (5.29) в пределе  $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$  стремится к  $\operatorname{erfc}(-\infty) = 2$ , следовательно,

$$g \approx \frac{\exp(\operatorname{Re}(1 - z^2))}{2\sqrt{\operatorname{Re}}(\exp(\operatorname{Re}) + 1)} \approx \frac{\exp(-\operatorname{Re}z^2)}{2\sqrt{\operatorname{Re}}}.$$

Таким образом, функция  $g$  при  $z < 0$  стремится к нулю по крайней мере как  $1/\sqrt{\operatorname{Re}}$ .

При  $z > 0$  можно использовать асимптотическое выражение для функции  $\operatorname{erfc}$  при больших значениях аргумента, когда

$$\operatorname{erfc} x \approx \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi x}} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Это дает

$$g \approx \frac{\exp(\operatorname{Re}(1 - z^2))}{\sqrt{\operatorname{Re}} \left( 2 + \frac{\exp(\operatorname{Re}(1 - z^2))}{z\sqrt{\pi\operatorname{Re}}} \right)} = \frac{z\sqrt{\pi}}{1 + 2z\sqrt{\pi\operatorname{Re}} \exp(\operatorname{Re}(z^2 - 1))}. \quad (5.30)$$

Если  $z > 1$ , то можно пренебречь единицей в знаменателе (5.30) и получить

$$g \approx \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Re}} \exp(\operatorname{Re}(z^2 - 1))},$$

откуда видно, что  $g \rightarrow 0$  при  $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$ .

Следовательно,  $u \sim 0$  всюду за исключением области  $0 \leq z \leq 1$ , где второе слагаемое в знаменателе формулы (5.30) мало по сравнению с единицей. Таким образом,  $g \approx z\sqrt{\pi}$  и из уравнения (5.27) получаем

$$u \approx \sqrt{\frac{2S}{t}} z = \frac{x}{t}.$$

Положение фронта ударной волны находится из условия  $z = 1$ , что дает

$$x = \sqrt{2St}.$$

Тогда скорость, с которой движется фронт, равна

$$U = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{S}{2t}}.$$

Нетрудно видеть, что эти выражения полностью совпадают с полученными в § 3.3 для уравнения простой волны. Однако уравнение Бюргерса позволяет продвинуться дальше и установить структуру переднего фронта импульса. Рассмотрим область, где  $z \lesssim 1$ . Тогда, полагая в выражении (5.30)  $z \approx 1$ ,  $z^2 - 1 \approx 2(z - 1)$ , находим

$$g \approx \frac{\sqrt{\pi}}{1 + 2\sqrt{\pi\operatorname{Re}} \exp(2\operatorname{Re}(z - 1))}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (5.27) дает

$$u \approx \frac{\sqrt{2S/t}}{1 + \exp \left[ (1/2\nu) \sqrt{2S/t} (x - \sqrt{2St}) + (1/2) \ln(2\pi S/\nu) \right]},$$

что совпадает с решением для стационарной ударной волны (5.16), где  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = \sqrt{2S/t}$ . Разумеется, это решение не является стационарным, так как его амплитуда уменьшается, а ширина фронта растет.

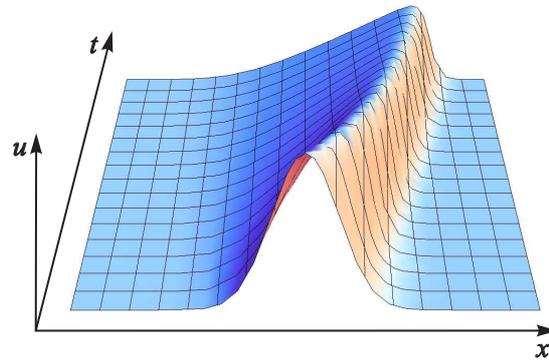


Рис. 5.6. Эволюция начального возмущения в виде одиночного импульса

Еще одна переходная область расположена на заднем фронте импульса при  $z \sim 0$ . В этом случае в знаменателе уравнения (5.29) можно положить  $\operatorname{erfc}(z\sqrt{\operatorname{Re}}) \sim 1$  и получить

$$g \approx \frac{\exp(-\operatorname{Re} \cdot z^2)}{\sqrt{\operatorname{Re}}},$$

откуда

$$u \approx \sqrt{\frac{\nu}{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right).$$

Результаты численного моделирования пространственно-временной динамики однополярного импульса, представлены на рис. 5.6.

Аналогично можно найти решение в виде  $N$ -волны со сглаженным профилем [9]. Важно отметить, что в обоих случаях с течением времени ширина фронта ударной волны увеличивается, а крутизна уменьшается.

## 5.7. Автомоделные решения уравнения Бюргера

В заключение рассмотрим еще один важный класс решений уравнения Бюргера, называемых *автомоделными* (самоподобными) [15, 65]. Этим термином будем обозначать решения, зависящие от  $x$  и  $t$  в определенной комбинации, так что уравнение в частных производных может быть сведено к обыкновенному<sup>1</sup>. Рассмотрим масштабное преобразование

$$u(x, t) \rightarrow \lambda^a v(\lambda^b x, \lambda^c t), \quad (5.31)$$

<sup>1</sup>Простейшим примером автомоделных решений являются стационарные волны, рассмотренные в § 5.4.

где  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — параметры. Заметим, что уравнение (5.1) остается инвариантным относительно преобразования (5.31), если

$$c = a + b = 2b.$$

Выберем  $c = 2$ ,  $a = b = 1$ . Таким образом, выражение (5.31) принимает вид

$$u(x, t) \rightarrow \lambda v(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Теперь выберем  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$  и рассмотрим решения в виде

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} \psi(z), \quad (5.32)$$

где  $z = x/\sqrt{t}$ . Подставляя соотношение (5.32) в уравнение Бюргера (5.1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $\psi(z)$ :

$$-\frac{\psi + z\psi'}{2} + \left(\frac{\psi^2}{2}\right)' = \nu\psi'',$$

где штрихи означают дифференцирование по  $z$ . Интегрируя это уравнение один раз, приходим к уравнению Рикати

$$\frac{\psi^2 - \psi z}{2\nu} = \psi', \quad (5.33)$$

Постоянная интегрирования в уравнении (5.33) выбрана равной нулю, так как мы рассматриваем локализованные в пространстве решения, для которых  $\psi$  стремится к нулю на бесконечности вместе со всеми своими производными.

Уравнение Рикати решается при помощи замены

$$\psi = -2\nu \frac{v'}{v}. \quad (5.34)$$

Отметим сходство этого соотношения с преобразованием Коула–Хопфа (5.4). Подставляя соотношение (5.34) в уравнение (5.33), получаем следующее уравнение:

$$zv' = -2\nu v''. \quad (5.35)$$

Введем  $w = v'$ . Тогда интегрирование уравнения (5.35) дает

$$w = \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu}\right).$$

Таким образом, для  $v$  имеем

$$v = \int_0^z w(z') dz' + C = \sqrt{4\nu} \int_0^{z/\sqrt{4\nu}} e^{-\zeta^2} d\zeta + C = \sqrt{\pi\nu} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4\nu}}\right) + C \right],$$

где  $C$  — постоянная интегрирования,

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

— *интеграл вероятностей* [47]. Из уравнения (5.34) следует, что

$$\psi = -2\nu \frac{w}{v} = -2\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\exp(-z^2/4\nu)}{\operatorname{erf}(z/\sqrt{4\nu}) + C}.$$

Подставляя найденное  $\psi$  в соотношение (5.32) и переходя к переменным  $x, t$  находим окончательно

$$u(x, t) = -2\sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \frac{\exp(-x^2/4\nu t)}{\operatorname{erf}(x/\sqrt{4\nu t}) + C}. \quad (5.36)$$

Очевидно, что решение (5.26), описывающее динамику  $\delta$ -импульса, является частным случаем формулы (5.36) с

$$C = \frac{1 + \exp(\operatorname{Re})}{1 - \exp(\operatorname{Re})}.$$

Решение (5.36) описывает несимметричный колоколообразный импульс, который с течением времени расплывается и затухает (рис. 5.7). Отметим, что импульс может иметь как положительную, так и отрицательную полярность, в зависимости от знака постоянной  $C$  (подробнее см. [65]).

Уравнение Бюргера имеет и другие автомодельные решения (см., например, [66]). Существует красивый подход, основанный на *теории групп Ли*, который позволяет отыскать все автомодельные подстановки, которые допускает то или иное уравнение<sup>2</sup>. Однако необходимо отметить, что автомодельные решения являются частными (хотя и точными), и, вообще говоря, заранее неясно, будут ли они возникать в ходе эволюции произвольных начальных возмущений. В частности, нет даже гарантий, что такие решения будут устойчивыми. Тем не менее, по крайней мере некоторые из них играют чрезвычайно важную роль, являясь своего рода аттракторами, поскольку оказывается, что поведение решения на больших временах, как правило, носит автомодельный характер.

**Задача 5.2.** Рассмотрите масштабное преобразование, аналогичное (5.31), для уравнения Кортевега–де Вриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

и покажите, что автомодельное решение имеет вид  $u = (3t)^{-2/3}\psi(z)$ , где  $z = x/\sqrt[3]{3t}$ . Получите для функции  $\psi(z)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\psi''' = 2\psi + z\psi' - \psi\psi'. \quad (5.37)$$

<sup>2</sup>В качестве введения можно порекомендовать, например, [67, 68].

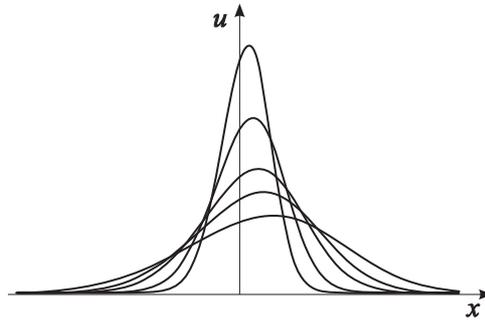


Рис. 5.7. Профили автомодельного решения уравнения Бюргера в различные моменты времени

**Задача 5.3.** Решите задачу, аналогичную предыдущей, для модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0.$$

Покажите, что автомодельное решение имеет вид  $u = (3t)^{-1/3} \psi(z)$ , где по-прежнему  $z = x/\sqrt[3]{3t}$ , а функция  $\psi(z)$  удовлетворяет уравнению

$$\psi'' = z\psi - \frac{\psi^3}{3} + C, \quad (5.38)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Это уравнение известно в математике как *уравнение Пенлеве II типа*. Отметим, что (5.37) сводится к (5.38) при помощи преобразования Миуры, которое будет обсуждаться в лекции 10. В отличие от (5.33), решения уравнений (5.37), (5.38) нельзя выразить через какие-либо известные элементарные или специальные функции. Подробнее о роли, которую играют уравнения Пенлеве в теории нелинейных волн, см. в [20].

## Лекция 6.

# Примеры ударных волн

Экстремальные состояния вещества особенно привлекательны для физики, поскольку в них наиболее ясно проявляются законы природы. Среди различных физических явлений такие условия осуществляются в ударных волнах, для которых характерны высокие значения температуры, скорости, давления, большие градиенты и т.д. На практике ударные волны встречаются в самых разных областях исследований — от астрофизики, вопросов, связанных с происхождением и ускорением космических частиц, сверхзвуковых движений в атмосфере до самых разнообразных лабораторных экспериментов.

*А.Л. Великович, М.А. Либерман. Физика ударных волн в газах и плазме (М.: Наука, 1987. С. 4)*

С ударными волнами знакомы все, хотя и не все, подобно герою Мольера, подозревают об этом. В сознании большинства людей они ассоциируются, в первую очередь, с атомным взрывом. Однако ударные волны возникают и в гораздо менее драматических ситуациях: при ударе грома, пистолетном выстреле, движении сверхзвукового самолета. Даже резкий хлопок пастушеского бича — это тоже ударная волна.

Что же такое ударная волна? Автор [56] предлагает наглядно представить ее как крутой и тонкий волновой фронт. «Тонкий» означает, что, например, при распространении ударной волны в воздухе на уровне моря его толщина составляет всего около 0.025 мкм. Это на порядок меньше длины волны видимого света (0.4 – 0.76 мкм). При распространении сильной ударной волны в невозмущенной среде давление, температура и плотность возмущенного состояния увеличивается во много раз. Именно из-за этого гибнут попавшие в зону действия ударной волны люди и животные, разрушаются здания и сооружения. В настоящей лекции будет дано краткое описание ударных волн естественного и искусственного происхождения на Земле, а также ударных волн в космосе.

### 6.1. Сильный точечный взрыв. Качественная картина и анализ размерностей

Рассмотрим в качестве примера динамику ударной волны при сферическом взрыве, когда химическая или ядерная энергия за милли- или микросекунды, т.е. по существу внезапно, высвобождается в твердой, жидкой или газообразной среде. При этом образуется сферический объем раскаленного газа, который находится под высоким давлением и, расширяясь, вызывает в окружающей среде ударную волну. Она движется со сверхзвуковой скоростью и практически мгновенно повышает давление, плотность и температуру среды, а также создает поток вещества, следующий за ней. По мере расширения скачок давления (а с ним вместе — скачки скорости, плотности, температуры) на фронте волны уменьшается. Ударная волна затухает, постепенно превращаясь в звуковой импульс. Наглядное представление описанных выше процессов дает рис. 6.1, на котором изображены положения ударной волны в три последовательных момента времени при сферическом взрыве в газе. На этом рисунке также представлены распределения давления в пространстве между фронтом волны и контактной поверхностью (поверхностью, ограничивающей область, в которой сосредоточены газообразные продукты взрыва). Зависимости давления от координаты внутри толкающего газа имеют более сложный характер и на рисунке не показаны.

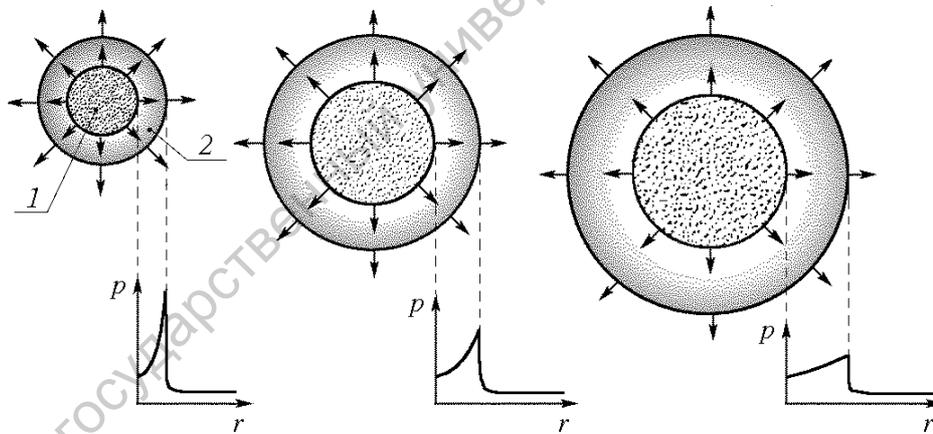


Рис. 6.1. Распространение ударной волны при сферическом взрыве: 1 — расширяющиеся газообразные продукты взрыва; 2 — положение фронта ударной волны

Расширение нагретого вещества продолжается до тех пор, пока давление превосходит давление окружающей среды  $p_0$ . Однако, когда давление сравнивается с  $p_0$ , сфера продолжает по инерции еще некоторое время расширяться, как бы «проскакивая» положение равновесия. При этом давление уже меньше  $p_0$ . Наконец, расширение сменяется сжатием, а давление

начинает нарастать. В результате сфера, в которой заключены газообразные продукты взрыва, начинает пульсировать около положения равновесия, которое определяется внешним давлением. Эти пульсации постепенно затухают, а газовый пузырь распадается. При взрыве в газообразной среде механизмом этого распада является диффузия. В жидкости нагретый газ дробится на пузырьки, в твердом теле заполняет поры и трещины.

После того, как дано качественное описание процесса распространения ударной волны, получим некоторые количественные закономерности. Рассмотрим задачу о *точечном взрыве*, т.е. о взрыве заряда, имеющего малые размеры и массу, но обладающего большой энергией. Простое и изящное решение этой задачи, основанное на методе размерностей, было получено Л.И. Седовым, а также независимо Дж. фон Нейманом и Дж. Тейлором [9, 43, 69].

Пусть в течение очень короткого промежутка времени в атмосфере выделилась очень большая энергия  $E$ . Будем рассматривать ту стадию распространения волны, когда давление за ее фронтом много больше атмосферного, а скорость много больше скорости звука. Найдем закон движения ударной волны, т.е. зависимость  $r(t)$ , где  $r$  — расстояние от фронта волны до центра взрыва,  $t$  — время. Будем искать  $r$  как функцию  $t$ , энергии взрыва  $E$ , а также плотности окружающей среды  $\rho$ . Полагая, что закон движения имеет вид

$$r = CE^\alpha \rho^\beta t^\gamma, \quad (6.1)$$

где  $C$  — безразмерная постоянная,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — искомые показатели степеней, и требуя, чтобы размерности правой и левой частей в соотношении (6.1) совпадали, получаем следующие уравнения:

$$2\alpha - 3\beta = 1,$$

$$\alpha + \beta = 0,$$

$$\gamma - 2\alpha = 0.$$

Отсюда находим, что  $\alpha = 1/5$ ,  $\beta = -1/5$ ,  $\gamma = 2/5$ . Таким образом, закон движения ударной волны имеет вид

$$r = C \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (6.2)$$

Скорость движения ударной волны можно найти как

$$v \sim \frac{r}{t} = C \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/5} t^{-3/5}. \quad (6.3)$$

Более точно следовало бы написать, что

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{2}{5} C \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/5} t^{-3/5}.$$

Полученные соотношения оказались весьма полезными, так как сэкономили усилия и средства экспериментаторов. Действительно, достаточно произвести единственный взрыв с известными  $E$  и  $\rho$ , измерить, до какого  $r$  дойдет волна за время  $t$ , — и можно определить безразмерную постоянную  $C$ . После этого соотношение (6.2) можно использовать для вычисления энергии взрыва  $E$ , если во время взрыва измерять  $r(t)$ . Разумеется, при этом взрывы должны быть однотипными (постоянная  $C$  для всех взрывов должна быть одинаковой).

Показатели степеней в формулах (6.2), (6.3) могут показаться несколько странными. Чтобы снять подозрения, найдем произведение  $\rho v^2$  на  $r^3$  с точностью до постоянной (очевидно, что получившаяся величина должна иметь размерность энергии). Как и следовало ожидать, получим, что  $\rho v^2 r^3 \sim E$ .

Используя полученные формулы, можно оценить и давление ударной волны. Если закон движения дается выражением (6.2), плотность энергии в момент времени  $t$  можно оценить как  $E/r^3$ . Эта величина имеет размерность давления. Поэтому можно предположить, что это и есть некоторое характерное давление на фронте ударной волны. Таким образом,

$$p \sim \frac{E}{r^3} \sim E^{2/5} \rho^{3/5} t^{-6/5}. \quad (6.4)$$

Рассчитать давление ударной волны много сложнее, поскольку энергия не распределена равномерно на сферическом фронте. Однако любопытно, что и в точную формулу  $E$ ,  $\rho$  и  $t$  входят в найденной комбинации.

Соотношения (6.2)–(6.4) показывают, по какому закону происходит замедление движения и затухание ударной волны, качественно описанное в начале данного параграфа. Отметим еще раз, что они справедливы только на той стадии, когда давление  $p$  всё еще много больше внешнего давления  $p_0$ , а скорость  $v$  превосходит скорость звука.

Более подробному анализу динамики ударных волн посвящена обширная литература (см., например, [43, 70] и др.). Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся на примерах физических явлений, при которых возникают ударные волны.

**Задача 6.1.** Анализ размерностей позволяет исследовать и другие процессы, связанные с распространением ударных волн. Найдите с его помощью период колебаний газового пузыря, который образуется после затухания ударной волны при взрыве в жидкости. Период  $T$  следует искать как функцию выделившейся энергии  $E$ , плотности  $\rho$  и давления в невозмущенной среде  $p_0$ .

*Ответ:*  $T \sim E^{1/3} \rho^{1/2} p_0^{-5/6}$ .

## 6.2. Ударные волны естественного происхождения на Земле. Гром, землетрясения, извержения вулканов, падение метеоритов

Безусловно, наиболее часто встречающимися в природе следует признать ударные волны, возникающие при вспышке молнии. Согласно данным книги [56], на Земле ежегодно бывает более шестнадцати миллионов гроз, а в атмосфере ежесекундно происходит более ста грозовых разрядов. Температура канала разряда может достигать десятков тысяч градусов, сила тока — сотен тысяч ампер. Такой разряд мгновенно нагревает, сжимает и ионизирует воздух. По сути дела, происходит взрыв, и картина образования и распространения ударной волны очень напоминает описанную в предыдущем параграфе, с той лишь разницей, что волна является не сферической, а цилиндрической.

В книге [56] описан эксперимент, при помощи которого можно осуществить лабораторное моделирование процессов, происходящих при вспышке молнии. В эксперименте медная проволока диаметром 0.05 мкм взрывалась при протекании по ней тока, для создания которого использовался конденсатор, заряжавшийся до напряжения 2000 В. В результате взрыва проволока испарялась с образованием светящегося ионизированного канала разряда. Ионизированные пары меди расширялись, создавая в окружающем воздухе ударную волну. Она постепенно затухала, превращаясь в звуковую волну, напоминающую гром. По мнению автора [56], этот канал можно считать аналогом участка более длинного канала разряда молнии во время грозы.

Еще одно распространенное природное явление, при котором возникают ударные волны — это землетрясения (см., например, [71]). Ежегодно на Земле происходит несколько сот тысяч землетрясений. Однако подавляющее большинство из них относится к слабым, и лишь единицы приводят к катастрофическим последствиям.

По современным представлениям (см., например, [72]) Земля внутри устроена следующим образом. Ядро имеет радиус чуть больше половины радиуса всего земного шара (около 3500 км) и состоит из соединений никеля и железа. Внутренняя, меньшая часть ядра, радиусом около 1200 км, твердая и имеет температуру  $\sim 4150^\circ\text{C}$ . Внешняя часть ядра по-видимому жидкая. Этот вывод был сделан на основании того, что поперечные сейсмические волны не проходят через ядро Земли, а, как известно, поперечные волны в жидкости затухают. Конечно, строго говоря, вещество, находящееся при столь высокой температуре и давлении (порядка  $3 \cdot 10^{11}$  Па) нельзя назвать жидкостью. Но во всяком случае вещество в ядре ведет себя как жидкость.

Почти всю остальную часть толщи Земли занимает твердая мантия, температура которой  $\sim 3900^\circ\text{C}$ . Наконец, внешняя, самая тонкая оболоч-

ка называется корой. Толщина ее варьируется от 5–8 км (под океанами) до 60–80 км (под высочайшими горными хребтами Памира и Гималаев). Породы, из которых состоит земная кора, значительно легче пород мантии, а скорость распространения сейсмических волн в них значительно меньше.

Под действием огромных давлений в глубинах Земли возникают механические напряжения, которые накапливаются в течение длительных периодов времени. Наконец, происходит разрыв породы и в течение короткого промежутка времени высвобождается огромная энергия. Например, землетрясение силой 5 баллов по шкале Рихтера эквивалентно взрыву 1 кт тротила, 7 баллов — 1 Мт, 9 баллов — 1000 Мт. При высвобождении такого количества энергии возникает ударная волна, которая, затухая, превращается в сейсмические волны различных типов: продольные и поперечные объемные волны, а также поверхностные, распространяющиеся вдоль коры. Эти волны вызывают сотрясения поверхности и разрывы земной коры, приводя к разрушениям и гибели людей.

Источники (гипоцентры) землетрясений могут располагаться на глубинах от 30 до 70 км. По современным представлениям большинство землетрясений зарождается в мантии (а не в коре, как считали ранее). Понятно, что очень глубокие землетрясения сопровождаются меньшими разрушениями, чем поверхностные. Впрочем, достоверно неизвестно, возникают ли при каждом землетрясении ударные волны, поскольку высвобождаемая энергия распределена в большом объеме.

Результатом подводных землетрясений является образование огромных волн — цунами, которые производят страшные разрушения на берегу. Цунами, однако, не относятся к ударным волнам, а, скорее, представляют пример другого класса нелинейных волн — солитонов, возникающих в средах с дисперсией (§ 7.2).

При извержениях вулканов, когда раскаленные газы и жидкости, находящиеся под высоким давлением внутри Земли, практически мгновенно вырываются в атмосферу, также возникают ударные волны. Например, при извержении вулкана на необитаемом острове Кракатау (Индонезия) в 1883 г. в атмосферу было выброшено порядка  $4.6 \text{ км}^3$  вулканического пепла и других продуктов извержения. Энергия взрыва была эквивалентна приблизительно 5000 Мт тротила, причем сам остров практически перестал существовать. Взрыв был слышен на расстоянии более 4800 км от источника, а ударная волна трижды обогнула земной шар.

Ударные волны образуются и при падении метеоритов — каменных или железных тел, вторгающихся в земную атмосферу из межпланетного пространства. Скорость движения метеоритов, очевидно, превышает вторую космическую скорость (11.2 км/с), а масса также достаточно велика и может достигать нескольких десятков тонн. Мелкие частицы сгорают в плотных слоях атмосферы и до поверхности Земли не долетают. При вхождении метеорита со сверхзвуковой скоростью в атмосферу возникает ударная волна, подобная той, что образуется при движении артиллерий-

ского снаряда или сверхзвукового самолета, — так называемый звуковой удар (более подробно он будет рассмотрен в § 6.3). По мере движения в плотных слоях атмосферы метеориты тормозятся, а их поверхность раскаляется. Земли они достигают, как правило, с дозвуковой скоростью, так что ударная волна приходит на поверхность раньше, чем вызвавший ее метеорит. Тем не менее, при ударе о Землю кинетическая энергия метеорита еще очень велика. Поэтому, когда эта энергия высвобождается в момент столкновения, образуются новые ударные волны, которые распространяются как в земле, так и в воздухе, а на месте падения образуются кратеры. По современным данным [56] на Земле имеется не менее 50 таких кратеров, диаметр которых может достигать нескольких километров.

По одной из гипотез знаменитый Тунгусский метеорит, который взорвался над Сибирью в 1908 г., представлял собой ледяное ядро кометы. Оно распалось, не долетев до Земли. Однако ударная волна, которая возникла, когда метеорит входил в атмосферу, привела к тому, что был повален и сгорел весь лес на площади 2000 км<sup>2</sup>. По оценкам при этом выделилась энергия, эквивалентная взрыву 25–250 Мт тротила.

### 6.3. Ударные волны, искусственно создаваемые на Земле

Сильные ударные волны человек научился создавать, когда изобрел порох и современные химические взрывчатые вещества, а затем и ядерное оружие. Физическая картина процессов при сильном взрыве была достаточно подробно описана в § 6.1. Поэтому рассмотрим несколько примеров слабых ударных волн, с которыми мы сталкиваемся наиболее часто.

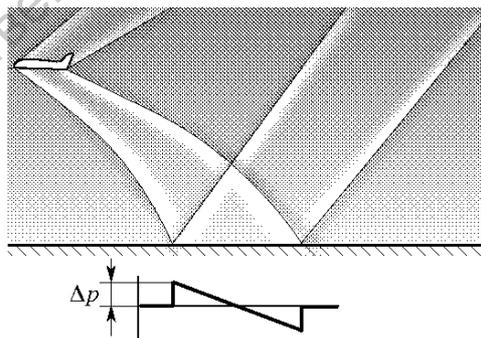


Рис. 6.2. Ударные волны, создаваемые сверхзвуковым самолетом

Пожалуй, самый простой пример — это резкий хлопок пастушеского бича. Как известно (см., например, [73]) скорость распространения попе-

речных упругих возмущений по натянутому шнуру есть

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho S(x)}}, \quad (6.5)$$

где  $T$  — сила натяжения,  $\rho$  — плотность,  $S$  — площадь поперечного сечения шнура, которая может зависеть от продольной координаты  $x$ . Как видно из формулы (6.5), скорость возмущения растет при уменьшении  $S$ . При ударе, когда возмущение проходит сужающийся конец бича, он ускоряется до сверхзвуковой скорости, создавая ударную волну, которая быстро затухает и превращается в звуковой импульс.

Еще один пример ударной волны, который знаком всем — *звуковой удар* (sonic boom), возникающий при сверхзвуковом движении самолета. Когда самолет летит с дозвуковой скоростью, волны давления расходятся от него по всем направлениям, подобно концентрическим кругам, расходящимся от места падения камешка в неподвижную воду. При переходе к сверхзвуковым скоростям волны отстают от самолета и оказываются сосредоточенными внутри конической поверхности, расположенной позади него. На этой поверхности, называемой *конусом Маха*, слабые возмущения давления складываются, приводя к образованию двух конических ударных волн — головной и хвостовой. Обе волны падают на поверхность Земли и отражаются обратно в атмосферу (рис. 6.2). Пространство перед головной волной не возмущено, а, следовательно, беззвучно. Сверхзвуковой самолет может быть виден, но звук от него не слышен до тех пор, пока ударная волна не достигнет Земли. Ситуация напоминает картину поверхностных волн за движущимся объектом на воде [9]. Угол между образующей конуса и траекторией (угол Маха) определяется соотношением

$$\sin \alpha = \frac{c_s}{v},$$

где  $c_s$  — скорость звука,  $v$  — скорость самолета. Отношение  $v/c_s$  называют *числом Маха*:

$$M = \frac{v}{c_s}.$$

Головная волна является волной сжатия, а хвостовая — волной разрежения. Таким образом, профиль давления напоминает латинскую букву  $N$ . Описание динамики  $N$ -волны было дано в § 3.3. На самом деле на небольших расстояниях от самолета распределение давления имеет более сложный вид: оно характеризуется несколькими скачками, которые вызваны различными выступающими частями самолета [56]. Однако по мере распространения волны в направлении Земли профиль сглаживается за счет диссипативных эффектов и принимает окончательный  $N$ -образный вид. Перепад давлений, создаваемый современным сверхзвуковым самолетом у поверхности Земли, не превышает 100 Па.

Аналогичные явления происходят и при сверхзвуковом движении других тел, например, пуля или артиллерийских снарядов, хотя процессы здесь несколько сложнее [56]. Двигаясь в канале ствола, пуля сжимает и нагревает воздух перед собой, создавая плоскую ударную волну. Выходя из дула, эта волна дифрагирует, превращаясь в сферическую. Затем, вслед за пулей, из ствола выходят пороховые газы. Они возбуждают еще одну ударную волну, которая быстро обгоняет пулю и настигает первичную ударную волну. Обе волны при этом сливаются в одну, подобно плоским ударным волнам, рассмотренным в § 3.5 и 5.5. Эта волна быстро затухает, а ее движение замедляется. Кроме того, возникает еще система более слабых ударных волн, образуемых турбулентной струей вытекающего газа. Наконец, пуля обгоняет фронт ударной волны и, двигаясь со сверхзвуковой скоростью, создает систему конических ударных волн, аналогичных тем, которые возникают при движении самолета. Человек, находящийся вблизи траектории пули, слышит вначале звуковой удар, вызванный пулей, а затем — хлопок от ударной волны, создаваемой пороховыми газами. Что касается хлопков, вызванных головной и хвостовой ударными волнами, то интервал между ними слишком мал, чтобы их можно было различить по отдельности.

#### 6.4. Об ударных волнах в космосе

Ударно-волновые явления постоянно происходят и в космическом пространстве среди звезд, туманностей и галактик. Прежде всего, следует упомянуть бесстолкновительную ударную волну, которая возникает при обтекании Земли *солнечным ветром*, т.е. потоком плазмы, который постоянно испускается Солнцем во все стороны и состоит из электронов, ядер водорода, гелия и некоторых более тяжелых элементов. Этот поток обдувает Землю со скоростью порядка 400 км/с. Плазма солнечного ветра в целом электрически нейтральна и имеет концентрацию  $\sim 10$  частиц на  $\text{см}^3$  и температуру около  $10^5$  °С.

Когда частицы солнечного ветра налетают на магнитосферу Земли перпендикулярно силовым линиям, они отклоняются магнитным полем и движутся по винтовым траекториям, навиваясь на силовые линии поля. В результате образуется граничная поверхность, за которую частицы вообще не могут проникнуть, называемая *магнитопаузой*. Однако часть из них всё же проникает в атмосферу Земли около полюсов, вызывая полярные сияния. Магнитное (дипольное) поле Земли при взаимодействии с солнечным ветром деформируется: со стороны Солнца оно сжимается, а с противоположной — вытягивается (рис. 6.3). В пространстве за пределами магнитопаузы находится ударная волна. В этой области упорядоченное движение частиц переходит в хаотическое, а их температура повышается по меньшей мере в 10 раз. Фронт ударной волны со стороны Солнца удален

от Земли на расстояние порядка  $30 R_{\oplus}$  ( $R_{\oplus} \approx 6400$  км — радиус Земли), магнитопауза — на расстояние порядка  $20 R_{\oplus}$ . Толщина фронта составляет несколько тысяч километров. Хвост магнитосферы тянется на расстояния порядка  $1000 R_{\oplus}$ .

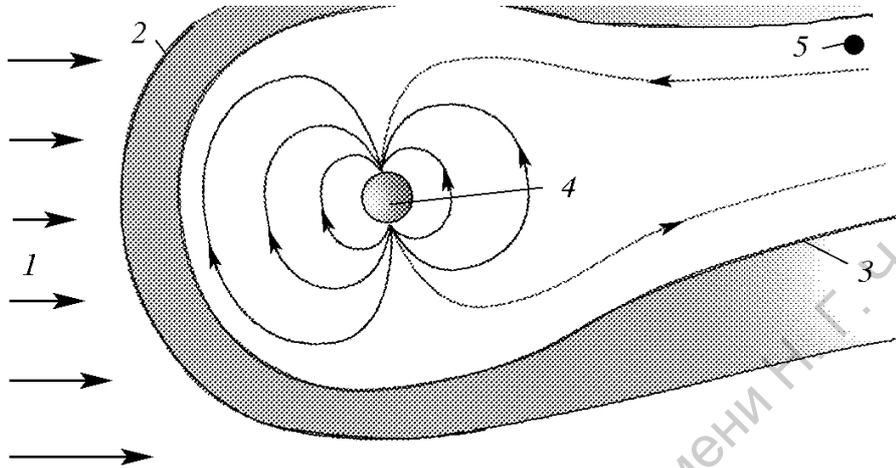


Рис. 6.3. Образование ударной волны при обтекании Земли солнечным ветром: 1 — солнечный ветер; 2 — фронт ударной волны; 3 — магнитопауза; 4 — Земля; 5 — Луна

Диссипативный механизм, приводящий к образованию ударной волны, в данном случае не связан со столкновениями частиц, а имеет электромагнитную природу. Поэтому такая волна получила название *бесстолкновительной*. Луна же не имеет магнитного поля, поэтому частицы солнечного ветра захватываются лунной поверхностью, а ударная волна не образуется.

Аналогичные явления, хотя и в гораздо больших масштабах, происходят на расстоянии порядка 100 а.е. от Солнца<sup>1</sup>, где частицы межзвездной среды (межзвездный ветер) сталкиваются с солнечным магнитным полем. Солнечная система движется относительно межзвездной среды со скоростью около 20 км/с, т.е. как бы обдувается межзвездным ветром. Формируется ударная волна, состоящая из двух слоев: внутренний слой составляют частицы солнечного ветра, внешний — межзвездного (рис. 6.4).

Еще один пример бесстолкновительной ударной волны — волна, возникающая при вспышке на Солнце. Как и всякая звезда, Солнце представляет собой турбулентный плазменный шар, находящийся при очень высокой температуре. Наиболее интенсивными процессами в солнечной атмосфере являются так называемые солнечные вспышки, которые возникают за счет выделения энергии магнитного поля при перезамыкании магнитных полей.

<sup>1</sup>За астрономическую единицу (а.е.) принимается радиус орбиты Земли, приблизительно равный  $1.5 \cdot 10^8$  км.

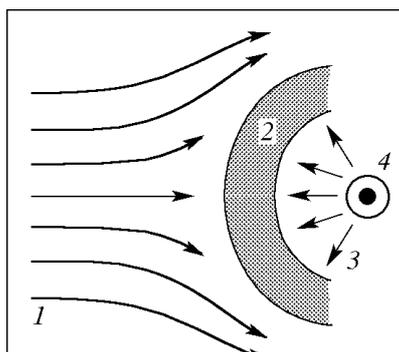


Рис. 6.4. Ударная волна на границе солнечной системы: 1 — межзвездный ветер; 2 — фронт ударной волны; 3 — солнечный ветер; 4 — Солнце

По сути, вспышка — это взрыв, вызванный внезапным сжатием солнечной плазмы. При этом масса вещества, разогретого до температуры порядка 1 млн °С, извергается в окружающее пространство в виде каплевидного образования, которое расширяется со скоростью около 990 км/с и, действуя подобно поршню, создает бесстолкновительную ударную волну толщиной во много тысяч километров. Она увлекает за собой межпланетное магнитное поле и частицы солнечного ветра и является сильным уплотнением межпланетного пространства. Через 40–50 часов ударная волна достигает орбиты Земли и вызывает быстрое сжатие магнитосферы, приводя к геомагнитным бурям.

Отмечено также, что солнечная корона имеет асимметричную форму во время минимальной солнечной активности, а при максимальной активности становится симметричной. Полагают, что это связано с нагреванием и ускорением частиц ударными волнами.

Взрывами поистине космических масштабов обусловлены вспышки сверхновых звезд. Окончательной ясности в вопросе об эволюции звезд до сих пор нет, но предположительно физика взрыва такова [74, 75]. По мере исчерпания энергии термоядерных реакций давление внутри звезды падает. Под действием сил гравитации звезда сжимается и разогревается до тех пор, пока ее температура не поднимется настолько, что начинается цикл реакций с другим топливом. Вначале идут реакции, в ходе которых происходит превращение водорода в гелий. После истощения водорода продолжаются реакции с участием гелия, в результате чего образуется углерод. Далее последовательно происходит синтез более тяжелых элементов (кислорода, неона, кремния). У достаточно массивных звезд, масса которых превышает  $8 - 10 M_{\odot}$  ( $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30}$  кг — масса Солнца) эти процессы заканчиваются образованием железного ядра, масса которого в определенный момент превысит так называемый предел Чандрасекара (примерно  $1.4 M_{\odot}$ ). После этого начинается гравитационный коллапс, т.е. катастрофическое сжатие ядра звезды под действием сил тяготения. По существу-

ющим оценкам коллапс происходит за время порядка 1 с. При этом атомы железа распадаются на протоны, нейтроны и альфа-частицы. В свою очередь протоны соединяются с электронами, образуя нейтроны и электронные нейтрино. Коллапс завершается образованием нейтронной звезды, в которой гравитационные силы уравновешиваются давлением вырожденного вещества (т.е. силами отталкивания, которые обусловлены принципом Паули, запрещающим частицам находиться в одинаковом квантовом состоянии). Плотность вещества в нейтронной звезде достигает огромных величин (порядка  $10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>), а радиус всего около 20 км. После того, как коллапс останавливается, сжатие отражается от центра, порождая ударную волну, скорость движения которой может достигать до 30000 км/с. Под действием ударной волны внешняя оболочка звезды выбрасывается в окружающее пространство, образуя расширяющееся облако.

Мы описали только один тип сверхновых (так называемые сверхновые II типа). Сверхновые I типа по одной из наиболее распространенных гипотез рождаются из белых карликов: маленьких медленно остывающих звезд, которые образуются в результате выгорания звезд с массой меньше  $8 M_{\odot}$ . Масса белых карликов меньше  $1.4 M_{\odot}$ , их ядра не содержат железа. Гравитационный коллапс в этом случае невозможен, а силы тяготения уравновешиваются давлением вырожденных электронов. Однако многие белые карлики имеют звезды-спутники (по оценкам, приведенным в [75], около 50% звезд во Вселенной являются двойными и лишь около 15% — одиночными, остальные входят в более сложные кратные системы). Белый карлик, входящий в двойную звезду, притягивает вещество спутника, которое оседает на поверхности, увеличивая тем самым его массу. Наконец, масса достигает критического значения  $1.4 M_{\odot}$ , после чего начинается гравитационный коллапс. Сжатие приводит к резкому разогреву вещества звезды, в результате этого начинают интенсивно идти термоядерные реакции. По сути дела происходит термоядерный взрыв, приводящий к полному разлету вещества звезды.

Типичный пример взрыва сверхновой представляет Крабовидная туманность в созвездии Тельца, которая находится на расстоянии 4400 световых лет от Земли. Вспышка была зафиксирована китайскими астрономами в 1054 г., следовательно, сам взрыв произошел около 3400 лет до н.э. Газообразные остатки сверхновой всё еще продолжают расширяться со скоростью порядка 1300 км/с.

При взрывах сверхновых в межзвездное пространство выбрасывается большое количество углерода, кислорода и других более тяжелых элементов. Заманчиво предположить, что наша Солнечная система возникла путем скопления выброшенного взрывом газа с образованием планет из выброшенных веществ. Например, железное ядро Земли, возможно, возникло из ядра взорвавшейся звезды.

## Лекция 7.

# История открытия солитона

Гидродинамический солитон, открытый Расселлом, — это уединенная волна на воде, движущаяся с постоянной скоростью. Она представляет собой результат двух конкурирующих эффектов. С одной стороны, свойственная уравнениям гидродинамики нелинейность приводит к возрастанию крутизны фронта волны и к ее опрокидыванию. С другой стороны, линейное описание (пригодное для малых амплитуд возмущений) приводит к диспергирующим волнам. Дисперсия является причиной того, что локализованные возмущения начинают расползаться. Интуитивно ясно, что для амплитуд, характеризуемых слабой нелинейностью, конкуренция этих двух эффектов — возрастания крутизны фронта и расползания возмущений — должна приводить к равновесию, в результате которого возникнет уединенная волна. Так оно и происходит, и возникающее устойчивое образование и есть солитон.

*Дж. Лэм (мл.), Д. Маклафлин. Аспекты солитонной физики. В кн.: «Солитоны» (М.: Мир, 1983. С. 78,79)*

### 7.1. Дж. Скотт Расселл и открытие солитона

Эта и последующие лекции посвящены изучению нелинейных волн в диспергирующих средах, причем основное внимание будет уделено *уединенным волнам* и *солитонам* (между этими терминами существует некоторая разница, которая будет прояснена ниже). Трудно даже перечислить все области приложения солитонов: гидродинамика, нелинейная оптика, физика плазмы, сверхпроводимость, магнетизм, теория поля и физика элементарных частиц, биофизика, — словом, солитоны играют исключительно важную роль в современной физике. Впервые наблюдал уединенную волну британский ученый и инженер-кораблестроитель Джон Скотт Расселл на одном из каналов близ Эдинбурга в 1834 г. Хотя описание этого

явления, которое дал Расселл в своем знаменитом «Докладе о волнах» [4], приводится почти в каждой книге о солитонах, трудно удержаться от его изложения. Вот какую картину рисует Расселл<sup>1</sup>:

«Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась. Но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась, а собралась у носа судна в состоянии интенсивного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, то есть округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом, и, когда нашел его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от одного до полутора футов. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые довелось столкнуться с необычным и красивым явлением, которое я назвал уединенной волной трансляции; теперь это название общепринято».

Это открытие не было случайным (вернее, его можно назвать закономерной случайностью): в течение многих лет Расселл занимался исследованиями поверхностных волн в естественных и лабораторных условиях. Его интересовал, в частности, вопрос о наиболее обтекаемой форме корабля. Поэтому Расселл, в отличие от своих современников, сразу же оценил важность сделанного им открытия. Он писал [76]<sup>2</sup>:

«Это самое замечательное и необычное явление из всех: в первый же день я понял, что это счастливейший день в моей жизни. Никому до меня не посчастливилось наблюдать его или, во всяком случае, понять, что оно значит».

Разумеется, Расселл для обоснования своих выводов использовал не только приведенное выше описание, но и результаты тщательно выполненных им экспериментов. Тем не менее, его идеи поначалу были скептически и даже враждебно встречены научной общественностью, в частности, такими авторитетами, как Эйри и Стокс. Эйри впервые получил в 1845 г. уравнения «мелкой воды», которые предсказывают опрокидывание волны (§ 4.3); Стокс в 1849 г. нашел решение в виде слабонелинейной периодической стационарной волны, частота которой зависит от амплитуды. В обеих теориях не было места для уединенных волн.

<sup>1</sup>Цитируется по книге [17].

<sup>2</sup>Цитируется по книге [17].

## 7.2. Уравнения Буссинеска и Кортевега–де Вриза

Окончательное подтверждение результаты Расселла получили лишь в 1870-е годы в работах Буссинеска [77] и Рэлея [78], которые независимо нашли решение для профиля свободной поверхности на воде в виде квадрата гиперболического секанса. Из их результатов следовало, в частности, что причиной, останавливающей укручение волны, является дисперсия, которая не учитывается в теории «мелкой воды». Заметим, что Буссинеск получил уравнение, носящее теперь его имя

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxxx} = 0, \quad (7.1)$$

которое уже встречалось в лекции 1. Оно описывает распространение волн как в прямом, так и во встречном направлении. Наконец, в 1895 г. Д.И. Кортевег и Г. де Вриз вывели уравнение одноволнового приближения [5]

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad (7.2)$$

сыгравшее впоследствии в теории нелинейных волн особую, выдающуюся роль. Его очень легко получить из уравнения (7.1), рассматривая волны, распространяющиеся только в одном направлении и, видимо, уравнение (7.2) впервые встречается в работах Буссинеска. Впрочем, Кортевегу и де Вризу об этих результатах ничего не было известно.

Сейчас уже никто не сомневается в существовании уединенных волн. Наиболее впечатляющим примером такого рода является образование цунами. В результате подводных землетрясений или извержений вулканов в открытом океане образуются уединенные волны. Высота этих волн относительно невелика — порядка нескольких метров, зато их характерный продольный размер достигает ста километров<sup>3</sup>. Таким образом, цунами переносят огромные массы воды. Профиль волны настолько пологий, что заметить ее с корабля или самолета практически невозможно. Скорость, с которой цунами движутся по океану, также весьма велика. Ее можно оценить, используя формулу теории «мелкой воды»

$$v \approx \sqrt{gh}, \quad (7.3)$$

где  $h$  — глубина<sup>4</sup>. Понятно, что для волны таких масштабов океан всегда можно считать мелким. Если положить, например,  $h = 1$  км, то формула

<sup>3</sup>Впрочем, необходимо отметить, что характерные масштабы проявления нелинейных и дисперсионных эффектов в открытом океане также очень велики: порядка 10 000 км. [79].

<sup>4</sup>На самом деле, как будет показано в лекции 8, скорость уединенных волн зависит от их амплитуды и всегда больше фазовой скорости линейных волн, которая определяется формулой (7.3). В частности, ещё Расселлом была установлена эмпирическая формула  $v \approx \sqrt{g(h+a)}$ , где  $a$  — максимальная высота над поверхностью воды. Однако, поскольку высота волны много меньше глубины океана, этим различием можно пренебречь.

(7.3) дает  $v \approx 100$  м/с. Эти волны могут распространяться на огромные расстояния. Цунами, вызванное землетрясениями у побережья Аляски в 1946 г., достигло Гавайских островов (через 4 часа) и Чили (через 18 часов), пройдя, таким образом, свыше 13 тысяч километров. Более того, цунами способно отразиться от побережья или подводных прибрежных склонов и продолжать движение в противоположном направлении.

Наиболее катастрофическим в современной истории, безусловно, оказалось цунами 26 декабря 2004 года, которое унесло по разным оценкам от 225 000 до 300 000 человеческих жизней. В то же время, с научной точки зрения оно дало уникальный материал, включая съемки со спутника, что позволило проверить справедливость существующих теоретических моделей цунами [79].

Когда уединенная волна приближается к берегу, ее скорость, в соответствии с формулой (7.3), уменьшается и высота волны растет. Волна вырастает до огромных размеров и, набегаая на берег, приводит к жертвам и разрушениям. Можно показать, что волны в канале с изменяющейся глубиной  $h(x)$  подчиняются так называемому *возмущенному* уравнению КдВ

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \gamma u, \quad (7.4)$$

где  $\gamma \sim -\partial h / \partial x$ . Нетрудно видеть, что член в правой части отвечает за рост амплитуды солитона. Достаточно подробный вывод уравнения (7.4) и анализ динамики солитонов можно найти в книге [17].

### 7.3. Проблема Ферми–Паста–Улама

После того, как противоречия между работами Эйри, Стокса и Расселла были сняты, интерес к уединенным волнам значительно упал и возобновился лишь спустя 60 лет, после появления знаменитой работы Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама (ФПУ) [6], относящейся, казалось бы, к совсем другой области науки. Она была выполнена на одном из первых компьютеров «Маниак–I» в Лос-Аламосской национальной лаборатории и была стимулирована появлением вычислительной техники, которая сделала возможным численное моделирование систем с большим числом степеней свободы. По мнению А. Ньюэлла [17] ФПУ интересовал вопрос: почему твердые тела обладают конечной теплопроводностью? Впрочем, в оригинальной работе ФПУ упоминания об этом нет, поскольку они исходят из непрерывной модели нелинейной струны и лишь решение на ЭВМ заставляет их дискретизировать задачу.

В качестве простейшей модели твердого тела часто рассматривают цепочку или решетку из массивных частиц (атомов), соединенных пружинами, которые играют роль сил упругого взаимодействия. Если пружины линейны, т.е. выполняется закон Гука, то энергия переносится нормальными модами цепочки, которые не взаимодействуют между собой. Следова-

но, для передачи энергии с одного конца цепочки на другой не требуется никакого перепада температуры. Эффективная теплопроводность оказывается бесконечной и уравнения диффузии тепла не получается. Еще в 1914 г. П. Дебай предположил, что конечная теплопроводность обусловлена ангармоничностью пружин. Если пружины нелинейны, т.е. возвращающая сила не пропорциональна деформации, то появляется взаимодействие нормальных мод. Дебай полагал, что нелинейные взаимодействия (на языке квазичастиц — соударения фононов) ограничат перенос энергии и приведут к конечности коэффициента теплопроводности.

Итак, ФПУ рассматривали цепочку из  $N$  частиц ( $N$  не превышало 64). Частицы соединены пружинами, возвращающая сила  $F$  которых нелинейным образом зависит от деформации  $x$ . Конкретно рассматривались пружины с квадратичной и кубической нелинейностями:

$$F(x) = \gamma x + \alpha x^2, \quad (7.5)$$

$$F(x) = \gamma x + \beta x^3, \quad (7.6)$$

причем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  выбирались такими, чтобы нелинейные члены были малы<sup>5</sup>. Обозначим смещение  $n$ -й частицы из положения равновесия как  $u_n$ , тогда уравнение её движения имеет вид

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = F(u_{n+1} - u_n) - F(u_n - u_{n-1}). \quad (7.7)$$

Уравнения (7.7), где  $n = 1, 2, \dots, N$ , интегрировались численно при нулевых граничных условиях (струна с закрепленными концами):

$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

В более поздних исследованиях иногда использовались периодические граничные условия

$$u_0 = u_N.$$

В случае линейной цепочки ( $\alpha, \beta = 0$ ) каноническое преобразование

$$u_n(t) = \sum_{m=1}^N Q_m(t) \sin\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right)$$

приводит к системе независимых уравнений относительно амплитуд *нормальных мод*  $Q_m(t)$

$$\ddot{Q}_m + \omega_m^2 Q_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\omega_m = 2\sqrt{\gamma} \sin[\pi m/2(N+1)]$  — собственные частоты. Энергии нормальных мод

$$E_m = \frac{\dot{Q}_m^2 + \omega_m^2 Q_m^2}{2} \quad (7.8)$$

<sup>5</sup>Интересно, что аналогичная задача ранее рассматривалась теоретически в работе [80], где была получена оценка коэффициента теплопроводности.

являются интегралами движения. Таким образом, решение для  $u_m$  представляет собой суперпозицию нормальных мод

$$u_n = \sum_{m=1}^N A_m \cos(\omega_m t + \varphi_m) \sin\left(\frac{\pi m n}{N+1}\right),$$

где амплитуды  $A_m$  и фазы  $\varphi_m$  — константы, определяемые начальными условиями.

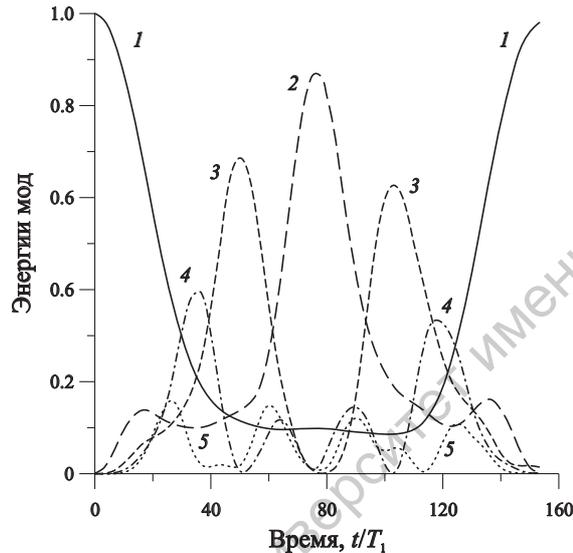


Рис. 7.1. Зависимость амплитуд низших мод от времени в задаче Ферми–Пасты–Улама

В слабонелинейном случае эти моды взаимодействуют между собой и их энергии  $E_m$  начинают зависеть от времени. ФПУ рассчитывали, что если в начальный момент возбуждена, например, низшая мода ( $m = 1$ ), то с течением времени энергия будет переходить в высшие моды, пока наконец не установится состояние, в котором энергия всех мод примерно одинакова. Это состояние *термодинамического равновесия*, которому соответствует равномерное распределение энергии по степеням свободы. Однако результаты моделирования оказались совершенно неожиданными. Энергия не термализовалась. Вначале возбуждались несколько низших мод, а затем энергия почти полностью возвращалась в первую моду. На рис. 7.1 приведена зависимость энергий пяти низших мод от времени для цепочки из 32 частиц, рассчитанная примерно для тех же значений параметров, что и в оригинальной работе ФПУ [6]. Энергии мод нормированы на начальную энергию основной моды, время — на период колебаний основной моды  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . Хорошо видно, что энергии мод ведут себя почти периодически. Таким образом, возникла *проблема ФПУ* (или парадокс ФПУ):

почему в нелинейных системах с большим числом степеней свободы не наблюдается термализация?

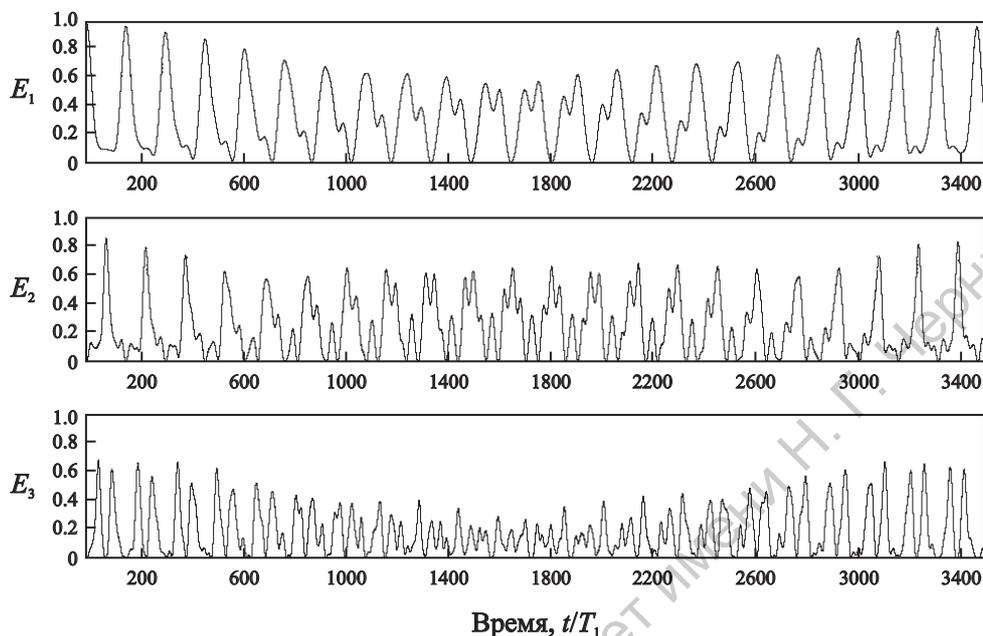


Рис. 7.2. Зависимости амплитуд трех низших мод от времени на больших временных масштабах, чем на рис. 7.1

В последующие годы рядом авторов были выполнены работы по моделированию разнообразных нелинейных цепочек с различными граничными и начальными условиями. В некоторых численных экспериментах наблюдалось периодическое восстановление начального профиля (*возвращаемость* ФПУ) в других обнаруживалась термализация (см. краткий обзор этих работ в [81]). Отметим, что если продолжить расчет, результаты которого представлены на рис. 7.1, на существенно больших временах, видно, что цепочка демонстрирует гораздо более сложное поведение, и зависимость энергий собственных мод от времени является, скорее, квазипериодической (рис. 7.2). Тем не менее, в определенные моменты времени энергия практически полностью возвращается в основную моду. Объяснить возвращаемость не удавалось вплоть до середины 1960-х годов, причем оказалось, что причина заключается в специфических свойствах солитонов.

## 7.4. Взаимодействие солитонов и работа Забуски и Крускала

Как же связаны проблема ФПУ и солитоны? Для ответа на этот вопрос рассмотрим цепочку (7.7) в непрерывном пределе, что можно сделать, если характерный пространственный масштаб возмущения много больше расстояния между частицами  $d$ . Тогда вместо дискретного набора смещений частиц  $u_n(t)$  можно приближенно рассматривать непрерывную функцию  $u(x, t)$ . Разлагая ее в ряд Тейлора в соседних узлах, найдем

$$u_{n+1} = u[(n+1)d, t] \approx u(nd) + d \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{d^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots,$$

$$u_{n-1} = u[(n-1)d, t] \approx u(nd) - d \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{d^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{d^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots,$$

где все производные вычисляются в точке  $x = nd$ . Подставляя эти разложения в соотношения (7.7) и ограничиваясь для определенности цепочкой с квадратичной нелинейностью (7.5), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma d^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\alpha d^3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

Остальными нелинейными членами пренебрегаем ввиду малости параметра  $\alpha$ . Приходим к уравнению Буссинеска (7.1), которое в одноволновом приближении сводится к уравнению КдВ (7.2).

В 1965 г. Н. Забуски и М. Крускал провели численное решение уравнения (7.2) с периодическими граничными условиями  $u(0) = u(2\pi)$  и начальным условием  $u(x) = \cos x$  [7]. Картина, которую они наблюдали, воспроизведена на рис. 7.3. Вначале происходило укручение волны. Затем, по мере того, как дисперсионный член становился всё более существенным, на фронте волны возникали осцилляции, которые росли и в конце концов превращались в последовательность волн, каждая из которых напоминала солитон и двигалась со скоростью, пропорциональной амплитуде. Наиболее удивительным было то, что более быстрая волна, настигая более медленную, проходила сквозь нее, практически не изменяя свою форму и скорость. В то же время, в процессе взаимодействия уединенные волны вели себя существенно нелинейным образом, ничем не напоминая суперпозицию линейных импульсов. Забуски и Крускал назвали эти волны «солитонами», чтобы подчеркнуть их частицеподобные свойства. Таким образом, мы можем дать так называемое «рабочее» определение солитона [82]: *солитон — это уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при взаимодействии с другой такой же волной (или, как говорят, взаимодействует упруго)*. Существует также более строгое определение, основанное на факте полной интегрируемости уравнения методом обратной задачи

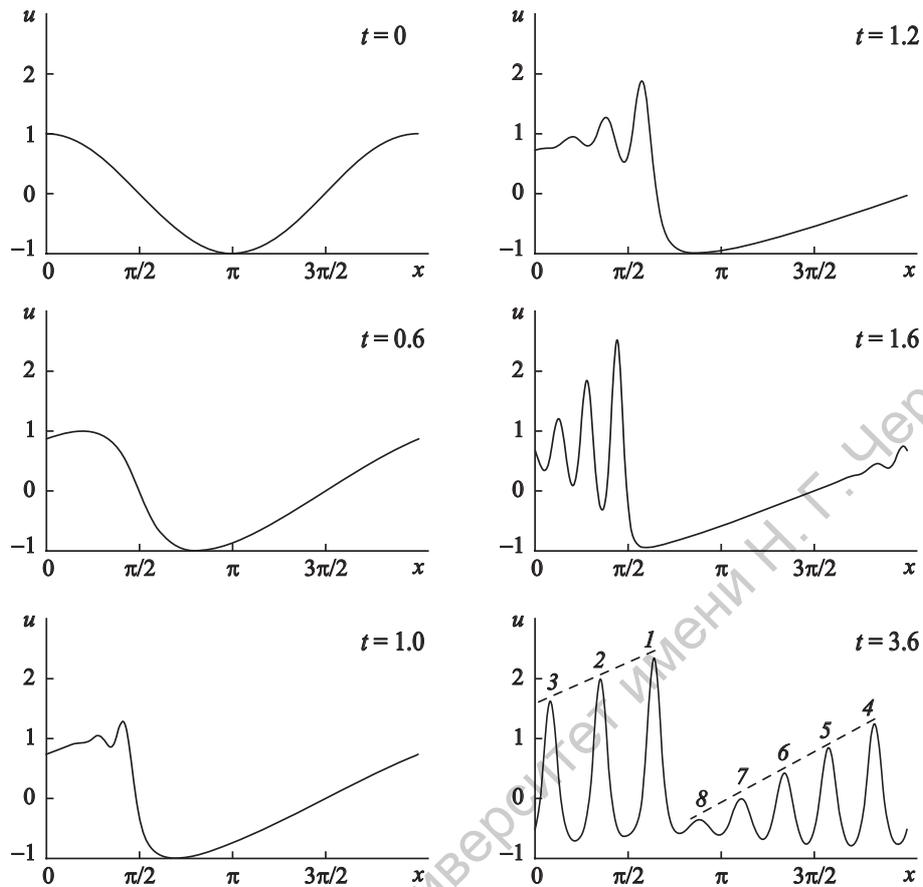


Рис. 7.3. Распад косинусоидального начального профиля на солитоны ( $\beta = 0.005$ )

рассеяния (лекция 10). Как будет показано далее, интегрируемость означает наличие у уравнения весьма специфических свойств, в том числе, существование бесконечного числа законов сохранения.

Разумеется, солитоны взаимодействуют упруго не только в случае периодических граничных условий. На рис. 7.4а, где представлена пространственно-временная картина взаимодействия двух солитонов, видно, что они полностью восстанавливают свои форму после столкновения. Единственным свидетельством взаимодействия является небольшой *фазовый сдвиг*: более быстрый солитон оказывается сдвинутым чуть вперед, а медленный — назад по сравнению с невозмущенным движением. На рис. 7.4б приведены траектории солитонов (положения максимумов) до и после взаимодействия. В области взаимодействия идентифицировать солитоны нельзя. Обратим внимание, что при слиянии солитонов в один пик его максимальная высота уменьшается, в отличие от того, что наблюдалось бы при линейной суперпозиции двух импульсов. Это еще раз подчеркивает существенно нелинейный характер взаимодействия солитонов.

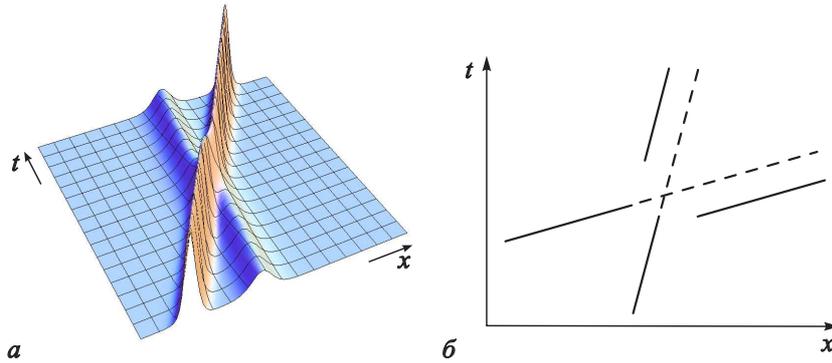


Рис. 7.4. Взаимодействие двух солитонов: *a* — компьютерная картинка взаимодействия; *б* — траектории солитонов на плоскости  $(x, t)$  в процессе взаимодействия

Еще более сложно протекает процесс взаимодействия двух солитонов с близкими амплитудами (рис. 7.5). В этом случае одиночный пик не образуется и один солитон как бы «перетекает» в другой. Для уравнения КдВ слова «близкие амплитуды» означают, что их отношение не превышает  $\sqrt{3}$  (см., например, [35]).

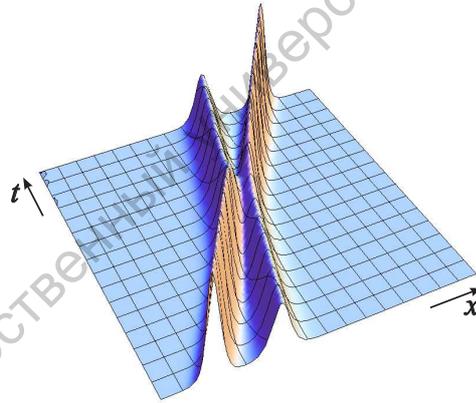


Рис. 7.5. Взаимодействие двух солитонов с близкими амплитудами

Возвращаясь к проблеме ФПУ, укажем, что эволюция косинусоидального возмущения, изображенная на рис. 7.3, после большого числа столкновений заканчивается точным восстановлением начального профиля, т.е. наблюдается возвращаемость ФПУ (для параметров, которым соответствует рис. 7.3, возвращаемость происходит за время  $t \approx 30$ ). Строго этот результат можно обосновать, решая для уравнения КдВ задачу с периодическими граничными условиями методом обратной задачи рассеяния. Возвращаемость присуща не только уравнению КдВ, но и другим *полно-*

стью интегрируемыми уравнениям. В частности, аналогичные результаты были получены для нелинейного уравнения Шрёдингера, описывающего гравитационные волны на глубокой воде (см. [83] и приведенную там библиографию). Таким образом, парадоксальные результаты ФПУ были обусловлены близостью их системы к полностью интегрируемой<sup>6</sup>. Если же цепочка достаточно далека от интегрируемой (грубо говоря, это означает, что начальное возмущение должно быть достаточно интенсивным), то термализация всё же происходит. Условия этого были найдены Ф.М. Израйлевым и Б.В. Чириковым [85] на основе теории Колмогорова–Арнольда–Мозера, которая описывает развитие стохастичности в неинтегрируемых гамильтоновых системах [12, 20].

В заключение заметим, что нелинейные цепочки являются классическими объектами исследования в нелинейной динамике и продолжают оставаться в центре внимания в связи с рядом проблем физики твёрдого тела, биофизики и т.д. В 2005 г. вышел специальный выпуск журнала «Chaos», посвященный 50-летию проблемы ФПУ [86].

Более подробно история развития представлений о солитонах освещена в [82] (см. также исторические комментарии в [22]).

---

<sup>6</sup>Интегрируемой дискретная цепочка (7.7) будет в случае экспоненциального взаимодействия между частицами (цепочка Тода) [84].

## Лекция 8.

# Стационарные нелинейные волны

В случае волновых систем конечно-мерное фазовое пространство может быть построено только для тех или иных частных классов решений ... Среди фазовых траекторий на волновой фазовой плоскости особого внимания (при рассмотрении с принятых здесь позиций) заслуживают сепаратрисы. ... В теории колебаний сепаратриса — в сущности, нереализуемое решение, граница между областями фазового пространства с топологически различными типами траекторий. В распределенных же системах «сепаратрисные» волны, к которым относятся, вообще говоря, все локализованные стационарные движения — ударные волны, солитоны, ряд автоволн и автоструктур, не только существуют, но и принадлежат к наиболее характерным структурам, которые обнаруживают иногда удивительную устойчивость по отношению к воздействию различного рода возмущений, побуждающую говорить об их сходстве с материальными частицами ... Естественно, что фазовое пространство стационарных волн — всего лишь «вершина айсберга», множество меры нуль по отношению ко всему множеству решений исходных нестационарных уравнений.

*Л.А. Островский.* От нелинейных колебаний — к нелинейным волнам. В кн. «Нелинейные волны» (М.: Наука, 1989)

### 8.1. Стационарные решения уравнения КдВ: кноидальные волны и солитоны

В качестве первого шага при исследовании нелинейных волновых уравнений обычно рассматривают решения в виде *стационарных бегущих волн*. Напомним, что стационарными называются волны, которые *распространяются с постоянной скоростью, не изменяя своей формы*. Математически эти решения зависят от  $x$  и  $t$  в комбинации  $\xi = x - Ut$ , где константа

$U$  — скорость волны. С одной стороны, интерес к стационарным волнам обусловлен тем, что уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые в ряде случаев могут быть решены аналитически. С другой стороны, некоторые стационарные решения, такие как солитоны, стационарные ударные волны и т.д., играют в теории чрезвычайно важную роль своего рода собственных мод нелинейной среды.

Итак, будем искать решения уравнения КдВ

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (8.1)$$

в виде  $u = u(\xi)$ ,  $\xi = x - Ut$ , где  $U = \text{const}$ . Тогда уравнение (8.1) принимает вид

$$\beta u''' + \left( \frac{u^2}{2} - Uu \right)' = 0, \quad (8.2)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по  $\xi$ . Интегрируя уравнение (8.2) один раз получаем уравнение *консервативного нелинейного осциллятора* [3, 11]

$$u'' = -\frac{dW}{du}, \quad (8.3)$$

потенциальная энергия которого равна

$$W = -\frac{1}{\beta} \left( Cu + \frac{Uu^2}{2} - \frac{u^3}{6} \right),$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Эта функция имеет два экстремума в точках, определяемых уравнением  $dW/du = 0$ . Без ограничения общности можно положить  $C = 0$ , тогда

$$W = -\frac{1}{2\beta} \left( Uu^2 - \frac{u^3}{3} \right), \quad (8.4)$$

и точки экстремумов есть  $u = 0$  и  $u = 2U$ . Зависимость  $W(u)$  приведена на рис. 8.1а, а фазовый портрет осциллятора (8.3) — на рис. 8.1б. Таким образом, имеются два состояния равновесия, одно из которых ( $u = 0$ ) является седлом, а другое  $u = 2U$  — центром.

Исследование фазового портрета позволяет на качественном уровне проанализировать возможные типы стационарных решений. Разумеется, физический смысл имеют только траектории, лежащие внутри сепаратрисной петли, где движение финитно. Вблизи устойчивого состояния равновесия колебания осциллятора являются слабонелинейными, следовательно, решение представляет собой квазигармоническую стационарную волну (рис. 8.2а). Вблизи сепаратрисы движение носит характер сильнонелинейных периодических волн (рис. 8.2б), названных Кортевеком и де Вризом *кноидальными* (смысл этого термина будет пояснен несколько позже). Наконец, движению по *сепаратрисе* соответствует решение в виде уединенной

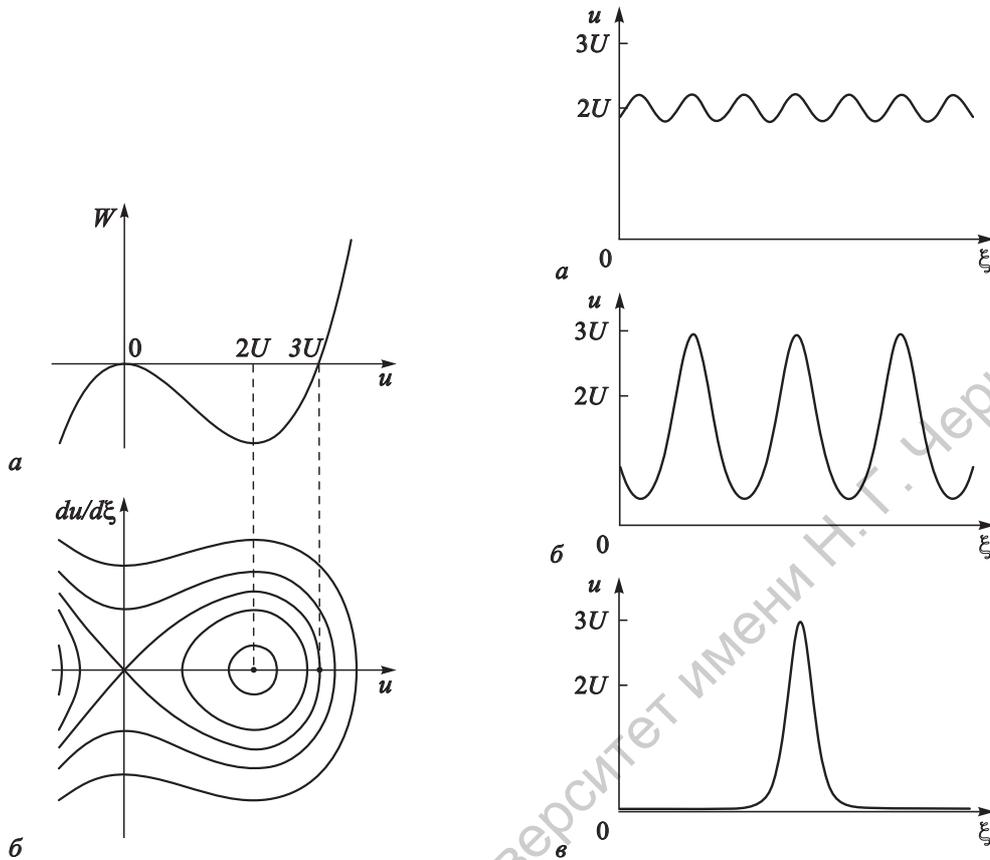


Рис. 8.1. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) для стационарных решений уравнения КдВ

Рис. 8.2. Различные типы стационарных решений уравнения КдВ: а — квазигармоническая периодическая волна; б — кноидальная волна; в — солитон

волны — солитона (рис. 8.2в). Очевидно, что амплитуда солитона  $a = 3U$ , т.е., чем быстрее движется солитон, тем он выше.

Сепаратрисную петлю называют гомоклинической или двоякоасимптотической траекторией [3, 11], приводящей к одному и тому же пределу (состоянию равновесия) с двух сторон ( $\xi \rightarrow \pm\infty$ ). Бесконечно долгому приближению к седловой точке и удалению от нее соответствуют бесконечные «хвосты» солитона.

Найдем явный вид стационарных решений<sup>1</sup>. Интегрирование уравнения (8.3) дает закон сохранения энергии

$$\frac{(u')^2}{2} = \mathcal{E} - W(u), \quad (8.5)$$

<sup>1</sup>Более подробный анализ точных решений уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью см. в [3, гл. 8].

где  $\mathcal{E}$  — постоянная интегрирования, имеющая смысл полной энергии осциллятора. Отсюда

$$u' = \pm \sqrt{2\mathcal{E} - \frac{u^3}{3\beta} + \frac{Uu^2}{\beta}}. \quad (8.6)$$

Знак «+» соответствует движению в верхней полуплоскости, знак «-» — в нижней. Рассмотрим следующие начальные условия:  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = 0$ . Тогда

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2\beta} \left( Uu_0^2 - \frac{u_0^3}{3} \right),$$

и уравнение (8.6) принимает вид

$$\sqrt{\beta}u' = \pm \sqrt{U(u^2 - u_0^2) - \frac{u^3 - u_0^3}{3}}.$$

Раскладывая подкоренное выражение на множители, получаем

$$\sqrt{3\beta}u' = \sqrt{(u_0 - u)(u - u_1)(u - u_2)}, \quad (8.7)$$

где

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ 3U - u_0 \pm \sqrt{3(U + u_0)(3U - u_0)} \right].$$

Движение осциллятора происходит в области  $u_1 < u < u_0$ , так что в (8.7) подкоренное выражение всегда неотрицательно. Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{\xi}{\sqrt{3\beta}} = - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(u_0 - u)(u - u_1)(u - u_2)}}. \quad (8.8)$$

Поскольку  $u$  изменяется от  $u_1$  до  $u_0$ , представим решение в виде

$$u = u_1 + a \cos^2 \varphi, \quad (8.9)$$

где  $a = u_0 - u_1$ . Тогда после несложных преобразований уравнение (8.8) примет вид

$$\frac{\xi}{\sqrt{3\beta}} = \frac{2}{\sqrt{u_0 - u_2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (8.10)$$

Здесь  $k^2 = (u_0 - u_1)/(u_0 - u_2)$ . Интеграл в правой части уравнения (8.10) есть *неполный эллиптический интеграл 1-го рода*  $F(\varphi; k)$  с модулем  $k$  [47]. Таким образом, решение в неявном виде таково:

$$\xi = \sqrt{\frac{12\beta}{u_0 - u_2}} F(\varphi; k).$$

С учетом соотношения (8.9) находим окончательный вид решения для  $u$ , которое выражается через *эллиптические функции Якоби*

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{am} \left( \sqrt{\frac{u_0 - u_2}{12\beta}} \xi; k \right), \\ u &= u_1 + a \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{u_0 - u_2}{12\beta}} \xi; k \right). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Здесь  $\operatorname{am}(x; k)$  — амплитуда Якоби (функция, обратная функции  $F(\varphi; k)$ ), а  $\operatorname{cn}(x; k) = \cos(\operatorname{am}(x; k))$  — эллиптический косинус Якоби [47] — кноида. Поэтому эти волны и назвали кноидальными. Функция  $\operatorname{cn}$  от вещественного аргумента является периодической с периодом  $4K(k)$ , где

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

— *полный эллиптический интеграл 1-го рода*. Таким образом, решение (8.11) представляет собой периодическую волну с амплитудой  $a$  и длиной

$$\lambda = 4 \sqrt{\frac{3\beta}{u_0 - u_2}} K(k).$$

В линейном пределе ( $a \rightarrow 0$ ) модуль эллиптической функции  $k$  также стремится к нулю. Этой ситуации соответствуют слабонелинейные колебания вблизи дна потенциальной ямы на рис. 8.1а, где  $u_{0,1} \approx 2U \pm a/2$ . Нетрудно найти, что  $u_2 \approx -U$ . Таким образом соотношение (8.10) принимает вид

$$u \approx u_1 + a \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{U}{4\beta}} \xi; 0 \right) = 2U + \frac{a}{2} \cos \left( \sqrt{\frac{U}{\beta}} \xi \right).$$

В другом предельном случае  $k \rightarrow 1$  ( $u_{1,2} \approx 0, u_0 \approx 3U$ ) получаем решение в виде солитона

$$u = a \operatorname{sech}^2(\xi/\Delta), \quad (8.12)$$

где  $\Delta = \sqrt{12\beta/a}$  — характерная ширина солитона,  $a = 3U$  — его амплитуда. Профиль решения приведен на рис. 8.2а (см. также рис. 1/9). Таким образом, чем выше солитон, тем он уже, и оценка, сделанная в § 1.4.1, полностью подтверждается.

## 8.2. Модифицированное уравнение КдВ

Модифицированное уравнение КдВ

$$u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (8.13)$$

является эталонным уравнением для сред с кубичной нелинейностью. Исследуем решения в виде стационарных волн. Уравнение (8.13) приводится к виду

$$\beta u''' + \left( \frac{u^3}{3} - Uu \right)' = 0.$$

Однократное интегрирование полученного соотношения дает уравнение нелинейного осциллятора с потенциальной энергией

$$W = -\frac{1}{2\beta} \left( Uu^2 - \frac{u^4}{6} \right). \quad (8.14)$$

Здесь вновь постоянная интегрирования выбрана равной нулю. Форма потенциальной ямы и фазовый портрет осциллятора приведены на рис. 8.3а, б. В данном случае, очевидно, возможны два типа солитонов: положительной и отрицательной полярности, амплитуда которых равна  $\pm\sqrt{6U}$ . Траектории внутри сепаратрисных петель соответствуют периодическим квазигармоническим или кноидальным волнам, похожим на соответствующие решения уравнения КдВ (рис. 8.4а, б). Траектории вне сепаратрисных петель описывают решения в виде знакопеременных периодических волн, иногда называемых сверхнелинейными (рис. 8.4г). Как и для осциллятора с квадратичной нелинейностью, все эти решения можно выразить через эллиптические функции [3, гл. 8]. Однако мы ограничимся тем, что найдем явный вид решения в виде солитона.

Из рис. 8.3 видно, что солитону соответствует  $\mathcal{E} = 0$  в уравнении (8.5). Подставляя туда соотношение (8.14), находим, что

$$u' = \pm \sqrt{\frac{u^2}{6\beta} (6U - u^2)}.$$

Интегрируя это уравнение и рассматривая для определенности солитон положительной полярности, получаем

$$\frac{\xi}{\sqrt{6\beta}} = \int_{\sqrt{6U}}^u \frac{du}{u\sqrt{6U - u^2}},$$

откуда следует решение в неявном виде:

$$\frac{\xi}{\sqrt{\beta}} = -\frac{1}{\sqrt{U}} \ln \frac{\sqrt{6U} + \sqrt{6U - u^2}}{u}.$$

Разрешив его относительно  $u$ , имеем

$$u = a \operatorname{sech}(\xi/\Delta), \quad (8.15)$$

где  $a = \sqrt{6U}$ ,  $\Delta = \sqrt{6\beta}/a$ . Как и для уравнения КдВ, чем больше амплитуда солитона, тем меньше его ширина и больше скорость, хотя связь между этими параметрами несколько иная, чем у уравнения КдВ. Заметим, что поскольку  $a\Delta = \text{const}$ , площадь всех солитонов мКдВ одинакова.

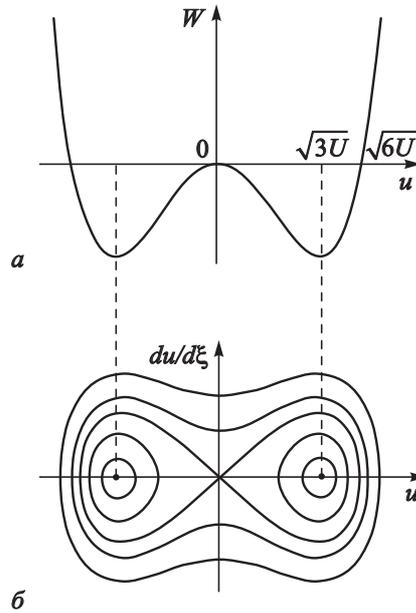


Рис. 8.3. Форма потенциальной ямы (8.14) (а) и фазовый портрет (б) для стационарных решений модифицированного уравнения КдВ

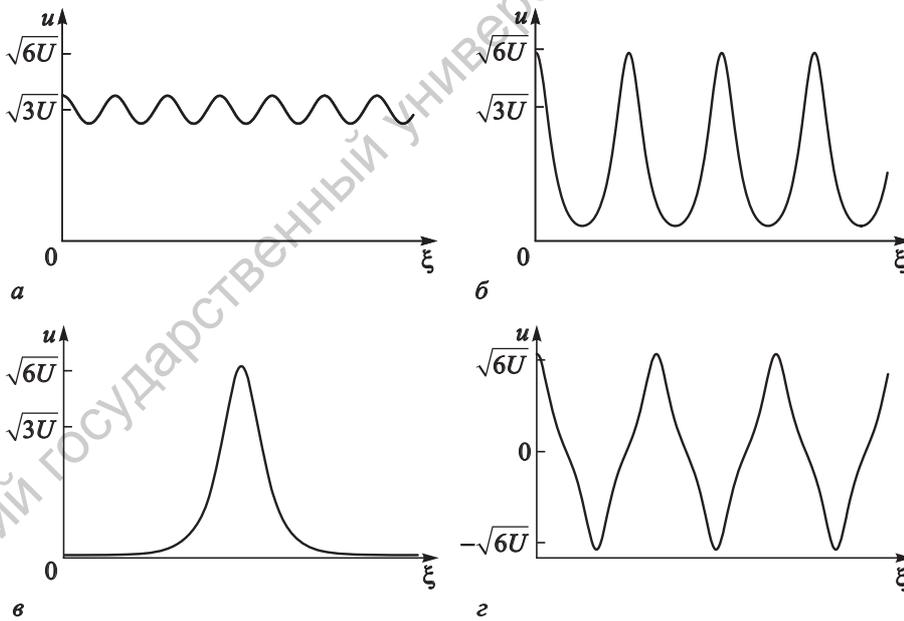


Рис. 8.4. Различные типы стационарных решений уравнения мКдВ: а – квазигармоническая периодическая волна ( $\mathcal{E} \approx -3U^2/4\beta$ ); б – кноидальная волна ( $\mathcal{E} \lesssim 0$ ); в – солитон ( $\mathcal{E} = 0$ ); з – сверхлинейная волна ( $\mathcal{E} > 0$ )

### 8.3. Уравнение Буссинеска

Уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxxx} = 0 \quad (8.16)$$

является двухволновой версией уравнения КдВ, допускающей распространение волн как в прямом, так и во встречном направлениях (§ 1.4.1). Его стационарные решения описываются уравнением

$$\beta u^{IV} + \left( \frac{u^2}{2} + (c^2 - U^2) u \right)'' = 0,$$

что дает после двукратного интегрирования уравнение (8.3) с потенциальной энергией

$$W = -\frac{1}{2\beta} \left( (U^2 - c^2) u^2 - \frac{u^3}{3} \right). \quad (8.17)$$

Для того чтобы потенциальная энергия имела вид, подобный изображенному на рис. 8.1, необходимо, чтобы

$$U^2 > c^2, \quad (8.18)$$

т.е. скорость солитона должна быть больше фазовой скорости распространения линейных волн. Действительно, из уравнения (8.16) в линейном приближении нетрудно получить, что

$$v_{ph}^2(k) = c^2 - \beta k^2 \leq c^2.$$

Понятно, что аналогичным свойством обладают также уравнения КдВ (8.1) и мКдВ (8.13), для которых  $v_{ph} = -\beta k^3$ , а солитоны движутся в положительном направлении. Утверждение о том, что солитоны не могут распространяться с теми же скоростями, что и линейные волны, носит достаточно общий характер. Детальный анализ этой проблемы содержится в работе [87], где условие  $U = v_{ph}(\omega)$  интерпретируется как условие черенковского резонанса на частоте  $\omega$ , при выполнении которого солитоны становятся неустойчивыми и отдают свою энергию волнам на этой частоте.

При выполнении условия (8.18) выражение (8.17) совпадает с (8.4) с точностью до коэффициентов. Поэтому можно сразу воспользоваться результатами § 8.1 и записать решение в виде солитона

$$u = a \operatorname{sech}^2(\xi/\Delta),$$

где  $a = 3(U^2 - c^2)$ ,  $\Delta^2 = 12\beta/a$ . Солитоны совпадают по форме с солитонами уравнения КдВ (8.12), однако могут распространяться как в прямом, так и во встречном направлениях.

Однако к солитонам уравнения Буссинеска следует относиться с определенной осторожностью, поскольку при  $\beta > 0$  линейные возмущения с

волновыми числами  $k^2 > c^2/\beta$  неустойчивы (см. задачу 1.2). Избавиться от неустойчивости можно, рассмотрев среду с аномальной дисперсией ( $\beta < 0$ ). Однако и в этом случае солитоны демонстрируют весьма специфическое поведение, полный анализ которого как возможен на основе метода обратной задачи рассеяния [88]. В частности, оказывается, что при определенных значениях параметров они могут распадаться на два солитона меньшей амплитуды, а при взаимодействии могут сливаться с образованием сингулярности.

**Задача 8.1.** Найдите решения в виде уединенных волн улучшенного уравнения Буссинеска

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - (\beta/c^2)u_{xxt} = 0. \quad (8.19)$$

Коэффициент при дисперсионном члене выбран таким образом, чтобы законы дисперсии уравнений (8.16) и (8.19) совпадали в длинноволновом пределе.

*Ответ:* Решение в виде уединенной волны имеет тот же вид, что и в предыдущем случае,  $u = a \operatorname{sech}^2(\xi/\Delta)$ , где по-прежнему  $a = 3(U^2 - c^2)$ , однако связь между её амплитудой и шириной несколько другая:  $\Delta^2 = 12\beta U^2/(ac^2)$ . Обратим внимание, что при возрастании амплитуды ширина уединенной волны уже не стремится к нулю.

## 8.4. Стационарные ударные волны в среде с дисперсией и диссипацией

Рассмотрим волны в среде с дисперсией и диссипацией. Эта ситуация описывается уравнением КдВ–Бюргера (§ 1.4.2).

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}. \quad (8.20)$$

Для стационарных решений уравнения (8.20) вместо (8.3) получим уравнение нелинейного осциллятора с отрицательным трением

$$u'' - \frac{\nu}{\beta} u' = -\frac{dW}{du}, \quad (8.21)$$

где  $W(u)$  определяется уравнением (8.4). У осциллятора (8.21) по-прежнему два состояния равновесия:  $u_1 = 0$ , которое является седлом, и  $u_2 = 2U$ . Исследуем последнее состояние равновесия на устойчивость. Полагая  $u = 2U + \tilde{u}$ ,  $|\tilde{u}| \ll 2U$ , линеаризуем уравнение (8.21):

$$\tilde{u}'' - \frac{\nu}{\beta} \tilde{u}' + \frac{U}{\beta} \tilde{u} = 0.$$

Отыскивая решение в виде  $\tilde{u} \sim \exp(\lambda\xi)$ , получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \frac{\nu}{\beta} \lambda + \frac{U}{\beta} = 0,$$

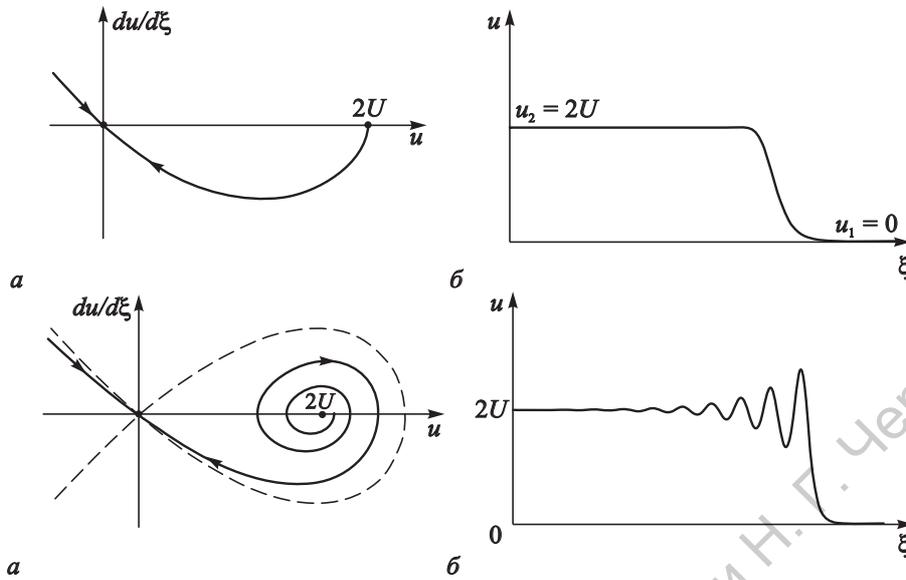


Рис. 8.5. Фазовый портрет осциллятора (8.21) (а) и профиль стационарной ударной волны (б) уравнения КдВ–Бюргерса при  $\nu^2 > 4\beta U$

Рис. 8.6. Фазовый портрет осциллятора (8.21) (а) и профиль стационарной ударной волны (б) уравнения КдВ–Бюргерса при  $\nu^2 < 4\beta U$

корни которого суть

$$\lambda_{\pm} = \frac{\nu}{2\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2 - \frac{U}{\beta}}.$$

При  $\nu^2 > 4\beta U$  корни  $\lambda_{\pm}$  вещественны и состояние равновесия  $u_2$  является неустойчивым узлом. Фазовый портрет и профиль волны для данного случая приведены на рис. 8.5а,б. Осциллятор стартует при  $\xi \rightarrow -\infty$  из неустойчивого состояния равновесия  $u_2$ , приближаясь при  $\xi \rightarrow \infty$  к седловой точке  $u_1 = 0$ . Решение представляет собой ударную волну, аналогичную стационарной ударной волне уравнения Бюргерса. Таким образом, в этом случае диссипативные эффекты доминируют и наличие дисперсии не приводит к качественным изменениям.

Иная ситуация складывается, когда  $\nu^2 < 4\beta U$ . В этом случае  $\lambda_{\pm}$  комплексны и состояние равновесия  $u_2$  является неустойчивым фокусом. Решение представляет собой стационарную ударную волну с осциллирующим передним фронтом, напоминающим последовательность солитонов (рис. 8.6). Ударные волны такого типа наблюдаются в плазме, где носят название бесстолкновительных (в знак того, что диссипация обусловлена не столкновениями частиц, а иными механизмами). К ним относятся, в частности, ионно-звуковые и магнитозвуковые ударные волны [12, 14].

Впервые они были исследованы Р.З. Сагдеевым в 1960-х годах. Кроме того, ударные электромагнитные волны с осциллирующими фронтами наблюдаются в различных нелинейных линиях передачи [89]. В случае слабой диссипации форма переднего фронта ударной волны близка к солитону (8.12). На заднем фронте решение, очевидно, представляет собой экспоненциально нарастающие гармонические осцилляции

$$u \approx 2U + C \exp\left(\frac{\nu\xi}{2\beta}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{4\beta U - \nu^2}{2\beta}}\xi\right).$$

Отметим, что в обоих случаях скорость ударной волны связана со значениями, к которым стремится  $u$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , тем же соотношением, что и для уравнения Бюргерса,

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2}.$$

## 8.5. Уравнение Син–Гордона

### 8.5.1. Стационарные волны

Исследуем стационарные решения уравнения Син–Гордона

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 \sin u = 0, \quad (8.22)$$

которое является эталонным для сред с дисперсией в области низких частот (§ 1.4.2). Очевидно, что они подчиняются *уравнению маятника*

$$u'' + \frac{\omega_0^2}{U^2 - c^2} \sin u = 0. \quad (8.23)$$

Рассмотрим случай  $U^2 < c^2$ . Это неравенство гарантирует, что скорость распространения стационарной волны не совпадает с фазовыми скоростями линейных волн, так как в данном случае  $v_{ph}^2(k) = c^2 + \omega_0^2/k^2$  и диапазон фазовых скоростей ограничен снизу. Тогда уравнение (8.23) описывает маятник, начинающий движение из неустойчивого положения равновесия. Потенциальная энергия осциллятора дается выражением

$$W(u) = \frac{\omega_0^2 \gamma^2}{c^2} (\cos u - 1),$$

где  $\gamma = (1 - U^2/c^2)^{-1/2}$ . Форма потенциальной ямы и фазовый портрет приведены на рис. 8.7а,б. Траектории внутри сепаратрисных петель соответствуют периодическим стационарным волнам, а сепаратрисы, идущие из седла в седло, — солитонам.

В общем случае точные решения уравнения колебаний маятника выражаются через эллиптические функции [3, гл. 7]. Ограничимся анализом

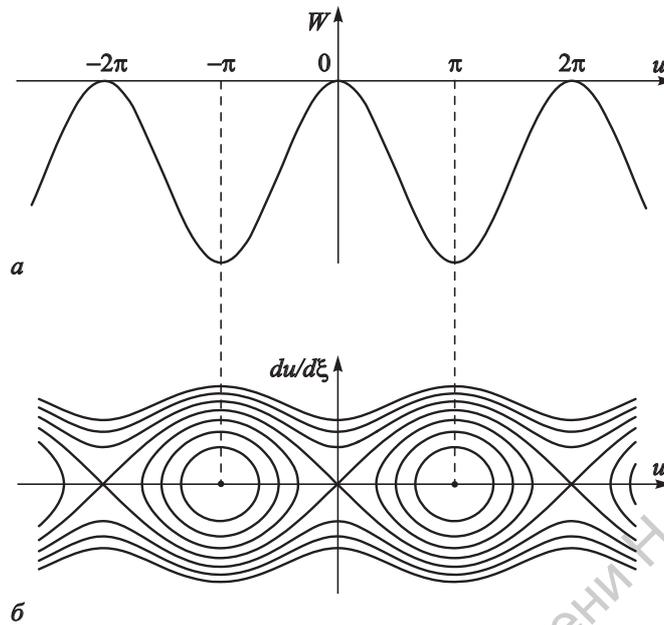


Рис. 8.7. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) для стационарных решений уравнения Син-Гордона

солитонных решений, которым очевидно, соответствует нулевая полная энергия осциллятора. Таким образом, имеем

$$u' = \pm \sqrt{\frac{2\omega_0^2 \gamma^2}{c^2} (1 - \cos u)}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\omega_0 \gamma \sqrt{2}}{c} \xi = \pm \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \cos u}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^u \frac{du}{\sin(u/2)}.$$

Знак «+» соответствует солитону, для которого  $u$  возрастает от 0 до  $2\pi$ , знак «-» — солитону, для которого  $u$ , наоборот, убывает от  $2\pi$  до 0 (антисолитону). Вычисляя интеграл, получаем

$$u = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(\pm \frac{\omega_0 \gamma}{c} \xi\right). \tag{8.24}$$

Профиль решения изображен на рис. 8.8. Такие солитоны получили название «кинк»<sup>2</sup>. Внешне они напоминают, скорее, ударную волну, хотя являются солитонами в самом строгом смысле, в частности, упруго взаимодействуют друг с другом (рис. 8.9). Заметим, что производная от решения (8.24) имеет типичный для солитонов колоколообразный профиль.

<sup>2</sup>От английского «kink», что значит «петля» или «перегиб».

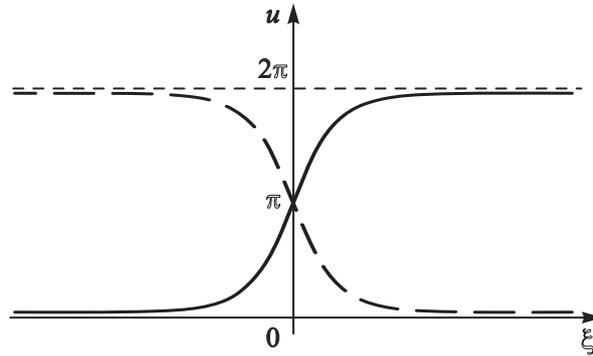


Рис. 8.8. Солитонные решения уравнения Син–Гордона (кинк и антикинк)

Очевидно, что у уравнения (8.22) имеется еще одно семейство солитонов, для которых  $U^2 > c^2$ . Однако специальный анализ (см. [90]) показывает, что эти решения неустойчивы.

**Задача 8.2.** Проанализируйте стационарные волны кубично-нелинейного уравнения Клейна–Гордона

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \omega_0^2 u - \beta u^3.$$

Найдите решения в виде кинков.

Ответ:

$$u = \pm a \operatorname{th} \left( \frac{\omega_0 \gamma}{c\sqrt{2}} \xi \right), \quad \text{где } a = \omega_0 / \sqrt{\beta}, \quad \gamma = (1 - U^2/c^2)^{-1/2}.$$

### 8.5.2. Физические примеры

Если причины универсальности уравнений типа КдВ, Бюргерса или Буссинеска достаточно очевидны (слабая нелинейность, типичная для многих процессов диссипация и дисперсия), то уравнение Син–Гордона имеет, на первый взгляд, довольно специфический вид. Тем не менее, оно встречается при описании множества разнообразных физических систем, поэтому остановимся подробнее на его свойствах.

Впервые уравнение (8.22) возникло не в физике, а в геометрии в связи с изучением поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Особо следует выделить результаты, полученные шведским математиком А. Бэклундом (1875 г.), который нашел преобразования, связывающие между собой два решения этого уравнения. С помощью преобразований Бэклунда, которые будут рассмотрены в лекции 10, можно получать из более простых решений более сложные.

В 1958 г. уравнение Син–Гордона было использовано Т. Скирмом в качестве модельного в нелинейной теории поля [91]. Как известно, линейное

уравнение Клейна–Гордона–Фока

$$\hbar^2 u_{tt} - \hbar^2 c^2 \nabla^2 u + m^2 c^4 u = 0 \quad (8.25)$$

является одной из основных моделей квантовой теории поля, которая

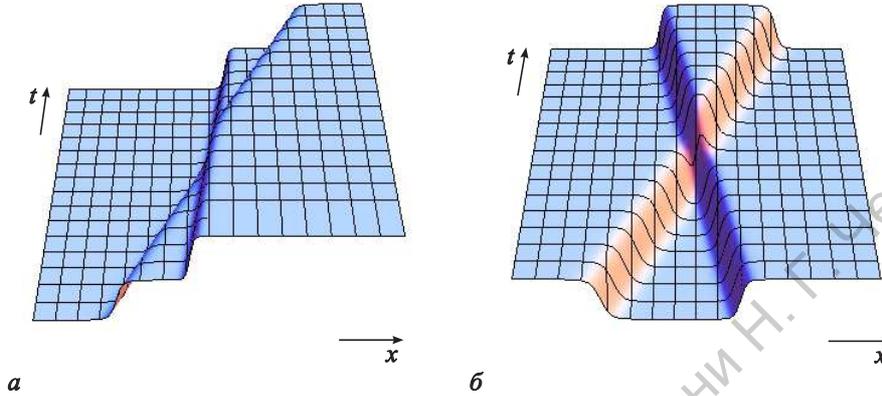


Рис. 8.9. Столкновение двух кинков (а) и кинка с антикинком (б)

описывает релятивистскую бесспиновую частицу массы  $m$  [92] (здесь  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ ,  $c$  — скорость света). Скирм предложил уравнение (8.22) как нелинейное обобщение уравнения (8.25). В его теории солитоны интерпретировались как элементарные частицы, а слабо-нелинейные волны (т.е. несолитонная часть решения) — как бозоны, переносчики взаимодействия. Вдалеке от элементарной частицы, где  $u \approx \text{const}$ , уравнение Син–Гордона можно линеаризовать и перейти к обычной теории, описываемой уравнением Клейна–Гордона–Фока. Таким способом Скирм пытался построить теорию, объединяющую бозоны и фермионы. В 1962 г. Перринг и Скирм продемонстрировали в численном эксперименте упругий характер взаимодействия солитонов (см. рис. 8.9) и даже нашли аналитическое решение, описывающее такое взаимодействие [93]. На сегодняшний день приложение идей теории солитонов в физике элементарных частиц и теории поля продолжает вызывать значительный интерес. Подробный обзор современного состояния этой проблемы можно найти в работе [94].

Весьма полезной при изучении уравнения Син–Гордона оказалась модель цепочки связанных маятников, рассмотренная, например, Э. Скоттом [90]. Рассмотрим вслед за ним цепочку идентичных маятников массы  $M$ , нанизанных на струну и связанных пружинами (рис. 8.10). Маятники могут совершать колебания в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка. Если обозначить угол отклонения  $i$ -го маятника через  $\varphi_i$ , то уравнение движения будет иметь вид

$$I \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = T_{i,i+1} + T_{i-1,i} + T_g. \quad (8.26)$$

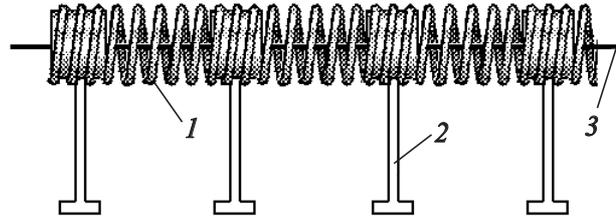


Рис. 8.10. Цепочка связанных маятников Скотта: 1 — пружина; 2 — маятник; 3 — струна

Здесь  $I$  — момент инерции маятника,  $T_{i,i+1}$  и  $T_{i-1,i}$  — возвращающие моменты кручения пружин, связывающих маятник с ближайшими соседями,  $T_g = -Mgl \sin \varphi_i$  — возвращающий момент силы тяжести ( $l$  — расстояние от оси до центра масс). Если считать, что момент кручения пропорционален разности углов отклонения, например,

$$T_{i,i+1} = \kappa (\varphi_{i+1} - \varphi_i),$$

где  $\kappa$  называется постоянной кручения, то уравнение (8.26) принимает вид

$$I \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = \kappa (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) - Mgl \sin \varphi_i.$$

Если ограничиться рассмотрением возмущений, длина волны которых много больше расстояния между маятниками  $d$ , можно ввести непрерывную функцию  $\varphi(x, t)$ , которая подчиняется уравнению Син-Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\kappa d^2}{I} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{Mgl}{I} \sin \varphi = 0.$$

Солитон соответствует волне, в которой маятники совершают полный оборот ( $\varphi$  меняется от 0 до  $2\pi$ , рис. 8.11).

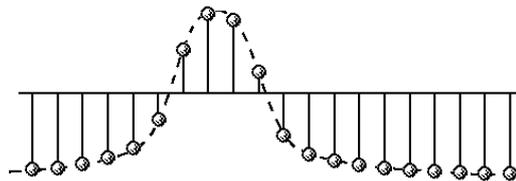


Рис. 8.11. Уединенная волна в цепочке связанных маятников, соответствующая солитону уравнения Син-Гордона. Маятники колеблются в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка

Оказывается, что цепочку связанных маятников можно трактовать как простейшую модель многих нелинейных сред. Одним из примеров является задача о динамике *дислокаций* в кристаллах. Напомним, что дислокации — линейные дефекты кристаллической решетки, нарушающие правильное чередование атомных плоскостей. Пластическая деформация кристаллов обычно связана с таким коллективным перемещением атомов, которое может быть описано, как «движение» дислокации. Простейшая модель дислокации, предложенная еще в 1930-х годах Я.И. Френкелем и Т.А. Конторовой [95], такова. Твердое тело рассматривается как совокупность слоев атомов, связанных упругими силами, роль которых играют пружины. Влияние соседних слоев друг на друга моделируется периодическим потенциалом, в качестве которого проще всего выбрать гармоническую функцию. Таким образом, приходим непосредственно к модели Скотта, которая в длинноволновом пределе дает уравнение Син–Гордона. Солитонное решение описывает одиночную дислокацию, в которой атомы близлежащих слоев сдвигаются на один период решетки, как это показано на рис. 8.12. Дислокация может перемещаться вдоль кристалла с постоянной скоростью.

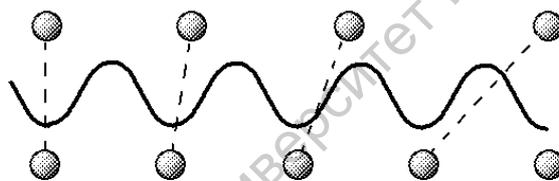


Рис. 8.12. Уединенная дислокация в твердом теле

Несмотря на свою простоту, модель Френкеля–Конторовой оказалась чрезвычайно содержательной; она находит широкое применение в современной физике низкоразмерных систем [96]. В частности, подобные модели играют важную роль в изучении динамики молекулярных цепочек ДНК [97].

Уравнение Син–Гордона описывает также динамику границ доменов в ферромагнетиках. В ферромагнитном материале при температуре ниже критической (температуры Кюри) магнитные моменты атомов ориентированы параллельно друг другу в достаточно больших ( $10^{-3}$ – $10^{-2}$  см) областях, называемых *доменами*. Обычно векторы намагниченности направлены вдоль так называемой оси легкого намагничивания. В отсутствие внешнего магнитного поля они ориентированы таким образом, что суммарная намагниченность образца равна нулю. Границы доменов, называемые также стенками Блоха, имеют конечную протяженность (порядка сотни атомов). Можно показать, что они приближенно описываются солитонными решениями уравнения Син–Гордона.

Пожалуй, простейшей моделью ферромагнитного кристалла является решетка магнитных диполей (магнитных стрелок). Потенциальная энергия диполя должна быть периодической функцией угла отклонения от оси легкого намагничивания  $\varphi$ , имеющей минимумы при  $\varphi = \pi n$ . Аппроксимируя эту зависимость гармонической функцией, получаем в качестве уравнения движения отдельного диполя уравнение маятника, а учет взаимодействия диполей вновь приводит нас к модели Скотта.

Еще одной физической системой, при описании которой возникает уравнение Син-Гордона, является распределенный *контакт Джозефсона*. Рассмотрим вначале точечный контакт, представляющий собой две области сверхпроводящего материала  $S$ , разделенные тонким (толщина порядка  $10 \text{ \AA} = 10^{-9} \text{ м}$ ) слоем изолятора  $I$  (рис. 8.13). При очень низких температурах в сверхпроводниках электроны образуют связанные состояния, называемые *куперовскими парами*. Силы, связывающие куперовскую пару, являются силами притяжения между электронами и кристаллической решеткой. Существенно, что куперовские пары являются бозонами и потому имеют тенденцию накапливаться в наименьшем энергетическом состоянии.

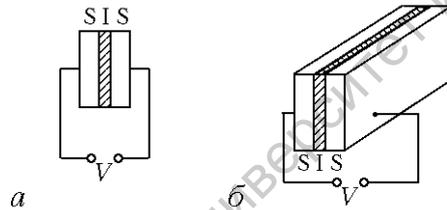


Рис. 8.13. Точечный (а) и протяженный (б) контакты Джозефсона

Эффект, предсказанный в 1962 г. Б. Джозефсоном, состоит в возможности туннелирования электронов через изолирующий слой. Можно показать [98, т. 9], что при этом в контакте возникает ток

$$I = I_0 \sin \varphi, \quad (8.27)$$

где  $I_0$  — так называемый критический ток Джозефсона,  $\varphi$  — разность фаз волновых функций по обе стороны от контакта. Когда разность фаз зависит от времени, возникает разность потенциалов

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (8.28)$$

где  $2e$  — заряд куперовской пары,  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ . Вводя поток магнитного поля

$$\Phi = \int V dt,$$

получаем из соотношений (8.27) и (8.28) уравнение маятника

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{I_0}{C} \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = 0,$$

где  $\Phi_0 = h/2e = 2 \cdot 10^{-13}$  Вб — квант магнитного потока. Протяженный контакт описывается уравнением

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{I_0}{C} \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = 0.$$

Здесь  $L$  и  $C$  — погонные индуктивность и емкость контакта, соответственно.

Эффект Джозефсона находит многочисленные применения в сверхвысокочастотных генераторах, датчиках, приемниках и т.д. Например, из формул (8.27), (8.28) следует, что если поддерживать напряжение на контакте постоянным, возникает переменный ток, порождающий электромагнитное излучение с частотой

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar}.$$

В лекции 12 будет рассмотрен еще один пример: распространение лазерных импульсов в среде из двухуровневых частиц, которое также описывается уравнением Син-Гордона. Более подробный и строгий вывод этого уравнения для упомянутых задач можно найти в книге [16].

## 8.6. Стационарные ленгмюровские волны в холодной плазме

Ленгмюровские волны в плазме связаны с высокочастотным движением электронов [2, 11, 12, 14]. Считая плазму холодной, запишем уравнения движения и непрерывности для электронной компоненты в виде

$$v_t + vv_x = \frac{e}{m} \varphi_x, \quad (8.29)$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (8.30)$$

где  $v$  и  $\rho$ , соответственно, скорость и плотность заряда электронной «жидкости»,  $\varphi$  — потенциал поля пространственного заряда,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона. Будем интересоваться быстрыми движениями электронов, характерная частота которых порядка электронной плазменной частоты

$$\omega_e = \sqrt{\frac{e\rho_0}{\varepsilon_0 m}},$$

где  $\rho_0$  — средняя плотность заряда электронов. На таких временных масштабах ионную компоненту можно рассматривать как неподвижный ионный фон, плотность заряда которого равна  $(-\rho_0)$ . Тогда потенциал  $\varphi$  подчиняется уравнению Пуассона

$$\varphi_{xx} = \frac{\rho - \rho_0}{\varepsilon_0}. \quad (8.31)$$

Уравнения (8.29)–(8.31) уже встречались в лекции 2 при рассмотрении волн в электронном потоке (задача 2.3). В данном случае считается, что невозмущенное движение электронов со скоростью  $v_0$  отсутствует, т.е. рассматривается холодная неподвижная плазма.

Будем искать решения в виде стационарных волн. Уравнения (8.29) и (8.30) дают

$$(v - U)v' = \frac{e}{m} \varphi',$$

$$[(v - U)\rho]' = 0.$$

Как и прежде штрихи означают дифференцирование по  $\xi = x - Ut$ . Проинтегрируем полученные уравнения, считая, что  $v = 0$ ,  $\varphi = 0$  там, где  $\rho = \rho_0$  (невозмущенное состояние). Тогда получаем

$$\frac{(v - U)^2}{2} = \frac{e\varphi}{m} + \frac{U^2}{2}, \quad (8.32)$$

$$\rho = \frac{\rho_0 U}{U - v}. \quad (8.33)$$

Заметим, что из физических соображений  $\rho$  и  $\rho_0$  должны иметь одинаковые знаки, следовательно, из формулы (8.33) имеем, что  $v < U$  (мы ограничиваемся волнами, бегущими слева направо, для которых  $U > 0$ ). Подстановка выражений (8.32) и (8.33) в уравнение Пуассона (8.31) приводит к уравнению нелинейного осциллятора

$$\varphi'' = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 2e\varphi/mU^2}} - 1 \right).$$

Введем безразмерные переменные  $\bar{v} = v/U$ ,  $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$ ,  $\bar{\varphi} = e\varphi/mU^2$ ,  $\bar{\xi} = \omega_e \xi/U$ . Тогда уравнения (8.32) и (8.33) принимают вид (черту над безразмерными переменными будем опускать)

$$\bar{\varphi} = \frac{(\bar{v} - 1)^2}{2} - \frac{1}{2}, \quad (8.34)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{1 - \bar{v}}, \quad (8.35)$$

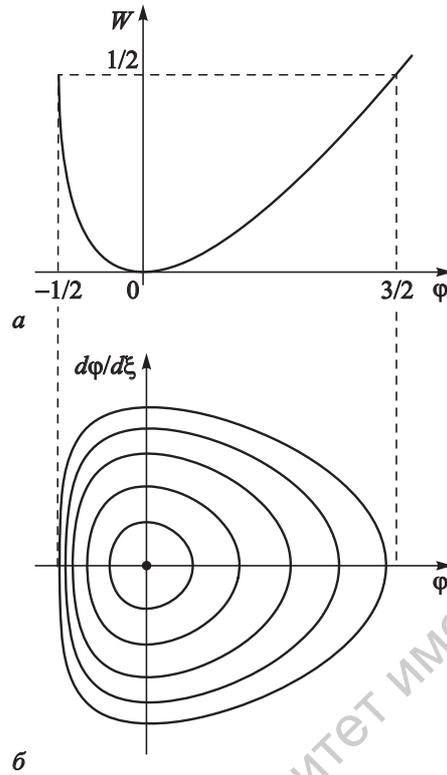


Рис. 8.14. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) для стационарных ленгмюровских волн

а уравнение нелинейного осциллятора для потенциала выглядит следующим образом:

$$\varphi'' = \frac{1}{\sqrt{1+2\varphi}} - 1, \quad (8.36)$$

Потенциальная энергия этого осциллятора определяется выражением

$$W = 1 + \varphi - \sqrt{1+2\varphi}. \quad (8.37)$$

Постоянная интегрирования в соотношении (8.37) выбрана так, чтобы  $W(0) = 0$ . Форма потенциальной ямы и фазовый портрет осциллятора приведены на рис. 8.14а, б. Заметим, что должно выполняться неравенство

$$\varphi > -\frac{1}{2},$$

нарушение которого соответствует опрокидыванию волны. Физически это объясняется тем, что дисперсия в системе слаба и может остановить укрупнение лишь в случае, когда энергия возмущения не слишком велика<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Как и в случае волн пространственного заряда (задача 2.3).

Для нахождения точного решения следует проинтегрировать уравнение (8.36) один раз и получить закон сохранения энергии

$$\varphi' = \pm \sqrt{2(\mathcal{E} - W(\varphi))}. \quad (8.38)$$

Знак «+» соответствует движению в верхней полуплоскости, знак «-» — в нижней. Чтобы проинтегрировать уравнение (8.38), выразим  $\varphi$  через  $v$  при помощи соотношения (8.34). Получим

$$(v-1)v' = \pm \sqrt{2\mathcal{E} - v^2},$$

откуда

$$\pm \xi = \int_0^v \frac{(v-1)dv}{\sqrt{2\mathcal{E} - v^2}}.$$

Вычисляя интеграл, находим решение в неявном виде

$$\xi = \pm \left( \sqrt{2\mathcal{E}} - \sqrt{2\mathcal{E} - v^2} - \arcsin \frac{v}{\sqrt{2\mathcal{E}}} \right). \quad (8.39)$$

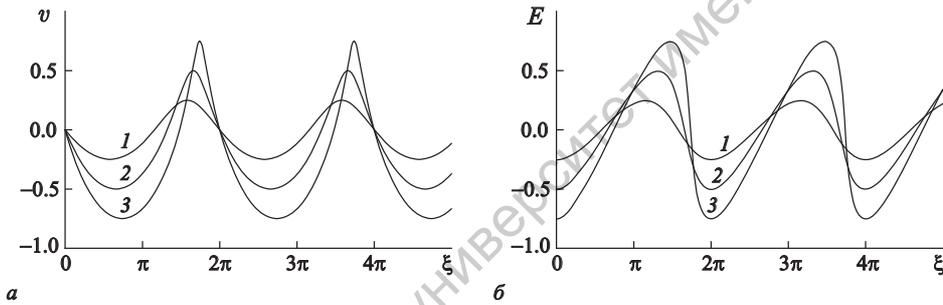


Рис. 8.15. Профили стационарных ленгмюровских волн при  $\sqrt{2\mathcal{E}} = 0.25$  (1), 0.5 (2), 0.75 (3): а — скорость; б — напряженность электрического поля

Решение (8.39) представляет собой периодическую нелинейную волну, амплитуда которой равна  $\sqrt{2\mathcal{E}}$  (рис. 8.15а). Знак «+» соответствует той части профиля, где  $v' < 0$  (соответственно  $\varphi' > 0$ ), знак «-» — той, где  $v' > 0$ . Когда  $2\mathcal{E} \rightarrow 1$  волна опрокидывается; при этом профиль волны скорости в точках максимума заостряется ( $v'' \rightarrow \infty$ ), а плотность заряда, как видно из уравнения (8.35), обращается в бесконечность. Профиль волны электрического поля  $E = -\varphi'$ , приведенный на рис. 8.15б, приобретает вид, типичный для волн в нелинейных средах без дисперсии (лекция 2): хорошо видно, как происходит укручение переднего фронта волны.

Любопытно, что колебания нелинейного осциллятора (8.36) являются изохронными, т.е.

$$\oint \frac{(v-1)dv}{\sqrt{2\mathcal{E} - v^2}} = 2\pi.$$

Таким образом, длина стационарной ленгмюровской волны не зависит от ее амплитуды и равна  $2\pi$  в используемых безразмерных переменных.

## 8.7. Уединенные волны пространственного заряда в электронном пучке

Волны пространственного заряда (ВПЗ) в электронном пучке уже обсуждались в лекции 2 (см. задачу 2.3), где для их описания были получены уравнения, совпадающие с (8.29)–(8.31); единственное отличие сводится к наличию у электронов постоянной дрейфовой скорости  $v_0$ . Однако эти уравнения по существу описывают безграничную электронно-ионную плазму, тогда как реальные электронные пучки ограничены в поперечном сечении. Рассмотрим цилиндрический электронный пучок радиуса  $r_b$ , движущийся вдоль оси цилиндрического металлического волновода (трубы дрейфа) с идеально проводящими стенками. Будем считать движение электронов одномерным, что, как правило, обеспечивается наличием сильного продольного магнитного поля. Такая постановка задачи является достаточно типичной для вакуумной СВЧ электроники. При сделанных допущениях по-прежнему можно пользоваться уравнениями движения (8.29) и непрерывности (8.30), однако уравнение Пуассона нуждается в некоторой модификации.

Строгое решение задачи о потенциале поля пространственного заряда цилиндрического пучка в трубе дрейфа можно найти с помощью метода функции Грина (см., например, [99]), однако получающееся при этом выражение оказывается весьма громоздким. Его можно существенно упростить, если считать возмущения аксиально симметричными, а зависимость функции Грина от продольной координаты аппроксимировать экспоненциально спадающей функцией. В результате можно получить следующее выражение

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0 k_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} (\rho(x', t) - \rho_0) \exp(-k_{\perp}|x - x'|) dx', \quad (8.40)$$

где  $k_{\perp} \simeq \alpha/r_b$ ,  $\alpha$  — константа, которая принимает значения  $1 < \alpha < 2$  в зависимости от соотношения между радиусами пучка и трубы дрейфа [99]. Величину  $\alpha$  подбирают таким образом, чтобы добиться наиболее точной аппроксимации функции Грина. Можно показать [100], что выражение для потенциала поля пространственного заряда (8.40) эквивалентно следующей модификации уравнения Пуассона:

$$\varphi_{xx} - k_{\perp}^2 \varphi = \frac{\rho - \rho_0}{\varepsilon_0}. \quad (8.41)$$

Итак, одномерные нелинейные волны в поперечно ограниченном электронном пучке описываются уравнениями (8.29), (8.30) и (8.41). Единственное отличие от уравнений, рассмотренных в § 8.6, состоит в наличии члена  $-k_{\perp}^2 \varphi$  в уравнении Пуассона. Однако это приводит к качественным

изменениям в поведении системы. Прежде всего заметим, что дисперсионное соотношение для линейных волн имеет вид

$$(\omega - kv_0)^2 = \frac{\omega_e^2 k^2}{k^2 + k_\perp^2}, \quad (8.42)$$

где  $\omega_e$  — электронная плазменная частота. Будем называть  $k_\perp$  поперечным волновым числом. В области  $k \gg k_\perp$  (8.42) переходит в хорошо известное дисперсионное соотношение для ВПЗ в безгранично широком потоке [2, 11, 44]

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_e^2.$$

Однако в области длинных волн поперечная ограниченность изменяет характер дисперсии ВПЗ и может привести к образованию уединенных волн.

Отыскивая решения в виде стационарных волн, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(v - U)v' = \frac{e}{m} \varphi', \quad (8.43)$$

$$[(v - U)\rho]' = 0, \quad (8.44)$$

$$\varphi'' - k_\perp^2 \varphi = \frac{\rho - \rho_0}{\varepsilon_0}. \quad (8.45)$$

Первые два уравнения можно проинтегрировать, однако граничные условия при этом следует несколько изменить по сравнению с § 8.6. Действительно, электронный поток имеет постоянную дрейфовую скорость  $v_0$ , поэтому в невозмущенном состоянии  $v = v_0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ . Тогда уравнения (8.43) и (8.44) после интегрирования дают (ср. (8.32), (8.33))

$$\frac{(v - U)^2}{2} = \frac{e\varphi}{m} + \frac{(v_0 - U)^2}{2}, \quad (8.46)$$

$$\rho = \frac{\rho_0(U - v_0)}{U - v}. \quad (8.47)$$

Из соотношения (8.47) видно, что можно выделить два типа волн: *быстрые* ВПЗ, для которых  $U > v, v_0$  и *медленные*, для которых  $U < v, v_0$ .

Введем безразмерные переменные

$$\bar{v} = \frac{v - v_0}{U - v_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{\varphi} = \frac{e\varphi}{m(v_0 - U)^2}, \quad \bar{\xi} = \frac{\omega_e \xi}{|v_0 - U|}.$$

В новых переменных уравнения (8.46), (8.47) совпадают с полученными в § 8.6 уравнениями (8.34) и (8.35) соответственно, а уравнение (8.48) принимает вид (черту у безразмерных переменных далее опускаем)

$$\varphi'' - M^2 \varphi = \rho - 1,$$

где

$$M^2 = \frac{k_{\perp}^2 (U - v_0)^2}{\omega_e^2}$$

— безразмерный параметр. С учетом (8.34), (8.35) получаем отсюда уравнение нелинейного осциллятора

$$\varphi'' = M^2 \varphi + \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varphi}} - 1. \quad (8.48)$$

Заметим, что из дисперсионного соотношения (8.42) следует выражение для фазовой скорости

$$v_{ph} = v_0 \pm \frac{\omega_e}{\sqrt{k^2 + k_{\perp}^2}},$$

где знак «+» соответствует быстрой ВПЗ, «-» — медленной. Таким образом, фазовая скорость лежит в пределах  $v_0 < v_{ph} < v_c$  для быстрых ВПЗ и  $v_c < v_{ph} < v_0$  — для медленных, где  $v_c = v_0 \pm \omega_e/k_{\perp}$ . Тогда выражение для  $M$  можно переписать следующим образом:

$$M^2 = \frac{(U - v_0)^2}{(v_c - v_0)^2},$$

откуда видно, что этот параметр играет роль *числа Маха*.

Потенциальная энергия осциллятора (8.48) определяется выражением

$$W = 1 + \varphi - \frac{M^2 \varphi^2}{2} - \sqrt{1 + 2\varphi}. \quad (8.49)$$

При  $M \rightarrow 0$  соотношения (8.48) и (8.49), очевидно, переходят в аналогичные выражения (8.36), (8.37), полученные в § 8.6. Также заметим, что должно выполняться неравенство

$$\varphi > -\frac{1}{2},$$

нарушение которого, как и в предыдущем случае, соответствует опрокидыванию волны.

Анализ показывает, что потенциальная энергия  $W(\varphi)$  имеет экстремумы в точках  $\varphi = 0$  и

$$\varphi^* = \frac{4 - M^2}{4M^2} - \frac{\sqrt{M^2 + 8}}{4M},$$

причем при  $M^2 < 1$  имеется минимум в точке  $\varphi = 0$  и максимум в точке  $\varphi^* > 0$ . При  $M^2 > 1$ , наоборот,  $\varphi^* < 0$  и это точка минимума, а  $\varphi = 0$  — точка максимума (рис. 8.16). В обоих случаях структура потенциальной

ямы такова, что возможны решения в виде уединенных волн, которым соответствует движение осциллятора по сепаратрисе седла. Однако при  $M^2 < 1$  такое решение не будет удовлетворять граничному условию  $\varphi \rightarrow 0$  (и, соответственно,  $v \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow 1$ ) при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , т.е. уединенная волна не будет представлять собой локализованное возмущение на фоне однородного невозмущенного потока. Таким образом, следует рассматривать уединенные волны лишь в случае  $M^2 > 1$ . Заметим, что это означает, что уединенные волны не могут распространяться с теми же скоростями, что и линейные ВПЗ: скорость быстрых уединенных волн всегда больше, чем у линейных волн, а скорость медленных — меньше. Случаю  $M^2 < 1$  соответствуют периодические стационарные волны, когда осциллятор колеблется около положения равновесия  $\varphi = 0$ .

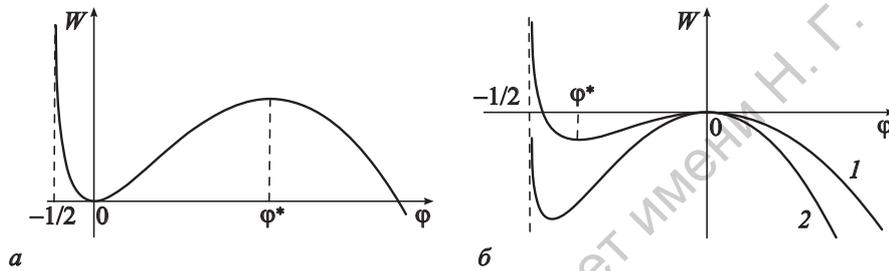


Рис. 8.16. Потенциальная энергия (8.49) для случая  $M < 1$  (а) и  $M > 1$  (б): 1 —  $1 < M < 2$ ; 2 —  $M > 2$

Однако для существования уединенных волн условия  $M^2 > 1$  еще недостаточно. Необходимо, чтобы потенциальная энергия при  $\varphi = -1/2$  была положительной, так как в противном случае происходит опрокидывание волны. Действительно, как видно из рис. 8.16б, (кривая 2) форма потенциальной ямы в этом случае такова, что сепаратриса на фазовой плоскости не существует. Требование  $W(-1/2) > 0$  приводит к ещё одному условию  $M^2 > 4$ . Итак, уединенные волны существуют только при  $1 < M < 2$ . Это равносильно тому, что их скорости (в исходных размерных переменных) лежат в диапазоне

$$v_0 + \frac{\omega_e}{k_\perp} < U < v_0 + \frac{2\omega_e}{k_\perp}$$

для быстрых волн и

$$v_0 - \frac{2\omega_e}{k_\perp} < U < v_0 - \frac{\omega_e}{k_\perp}$$

— для медленных.

Найдем точное решение для уединенной волны. Заметим, что уединенной волне соответствует нулевая полная энергия осциллятора (8.48), поэтому закон сохранения энергии (8.38) приобретает вид

$$\varphi' = \pm \sqrt{-2(1 + \varphi) + M^2 \varphi^2 + 2\sqrt{1 + 2\varphi}}.$$

Выразим в этом уравнении  $\varphi$  через  $v$  с помощью соотношения (8.34):

$$(v-1)v' = \pm v \sqrt{\frac{M^2(v-2)^2}{4} - 1}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\pm \xi = \int \frac{(v-1)dv}{v \sqrt{\frac{M^2(v-2)^2}{4} - 1}}.$$

Вычисляя интеграл, находим решение в неявном виде [100]

$$\begin{aligned} \pm \xi = & \frac{2}{M} \ln \left[ V - \sqrt{V^2 - 1} \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \ln \left[ \frac{MV - 1 + \sqrt{(M^2 - 1)(V^2 - 1)}}{M - V} \right], \end{aligned} \quad (8.50)$$

где

$$V = \frac{M(2 \mp v)}{2}.$$

Здесь верхний знак соответствует быстрой ВПЗ, нижний — медленной. Постоянная интегрирования в (8.50) выбрана таким образом, чтобы вершина уединенной волны находилась в точке  $\xi = 0$ . Быстрая уединенная волна представляет собой импульс положительной полярности, медленная — отрицательной. Заметим, что, поскольку для медленной ВПЗ возмущения скорости и плотности заряда противофазны, а для быстрой — синфазны, уединенная волна в обоих случаях представляет собой сгусток электронов.

Нетрудно найти значения скорости, потенциала и плотности заряда в вершине уединенной волны:

$$\begin{aligned} v_m &= \pm \frac{2(M-1)}{M}, \\ \varphi_m &= -\frac{2(M-1)}{M^2}, \\ \rho_m &= \frac{M}{2-M}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что чем больше амплитуда уединенной волны, тем быстрее она движется, хотя связь между скоростью и амплитудой не столь простая, как для модельных уравнений типа КдВ или Буссинеска (§ 8.1–8.3).

Профили уединенных волн при различных значениях числа Маха приведены на рис. 8.17. Для определенности на рисунке представлены графики для быстрых ВПЗ, графики для медленных волн можно получить

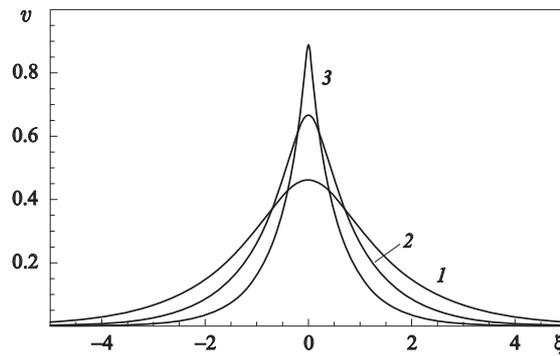


Рис. 8.17. Профили быстрых уединенных волн пространственного заряда при  $M = 1.3$  (1), 1.5 (2), 1.8 (3)

с помощью замены  $v \rightarrow -v$ . При  $M \rightarrow 2$  вершина волны заостряется, аналогично ленгмюровским волнам, рассмотренным выше; при этом  $\rho_m$  обращается в бесконечность.

Как показывают результаты численного моделирования (см. [100, 101]), эволюция весьма широкого класса начальных возмущений завершается образованием одной или нескольких уединенных волн и небольшого *осциллирующего хвоста* (т.е. несолитонной части решения, которая ведет себя подобно линейным диспергирующим волнам). Во многих аспектах уединенные ВПЗ ведут себя аналогично солитонам уравнения КдВ. Так, столкновение двух волн одного типа является упругим с высокой степенью точности, причем взаимодействие волн с близкими и сильно различающимися амплитудами носит качественно различный характер, что было описано в лекции 7 (см. рис. 7.4, 7.5). В то же время, при столкновении быстрой и медленной ВПЗ наблюдаются существенно неупругие эффекты, выражающиеся в образовании заметных осциллирующих хвостов. Это неудивительно, так как упругое взаимодействие, строго говоря, имеет место только для полностью интегрируемых систем<sup>4</sup>, к которым исходные уравнения не относятся. На рис. 8.18 приведены пространственно-временные картины распределения скорости и плотности заряда, иллюстрирующие процессы взаимодействия уединенных волн [100, 101]. Для удобства они представлены в системе отсчета, движущейся со скоростью невозмущенного потока  $u_0$ , в которой быстрая и медленная волны движутся навстречу друг другу.

Влияние конечной температуры электронов на стационарные нелинейные ВПЗ обсуждается в работе [102].

<sup>4</sup>Подробнее это понятие будет обсуждаться в лекции 10.

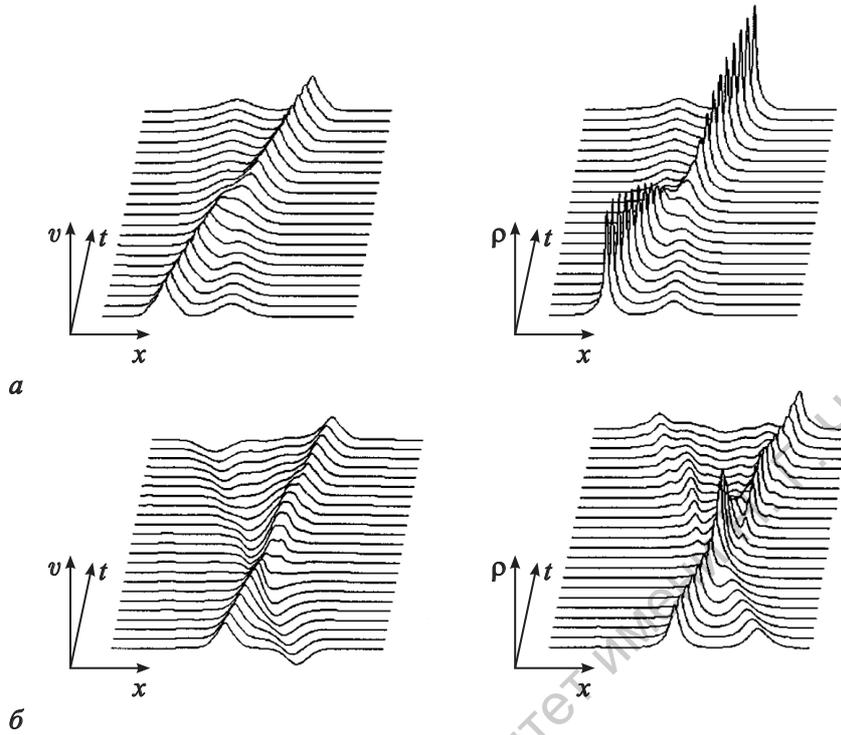


Рис. 8.18. Пространственно-временные картины взаимодействия двух быстрых уединенных ВПЗ (а); быстрой и медленной ВПЗ (б)

### 8.8. Стационарные ионно-звуковые волны

В отличие от ленгмюровских волн, ионно-звуковые волны связаны с медленными движениями ионов [2, 11, 12, 14]. Характерные частоты при этом не превосходят ионной плазменной частоты  $\omega_i$  ( $\omega_i \ll \omega_e$ ). В таком случае можно пренебречь инерцией электронов, т.е. считать, что при изменении потенциала их концентрация изменяется мгновенно (см. § 4.4). Тогда для электронной плотности заряда справедливо *распределение Больцмана*<sup>5</sup>

$$\rho_e = \rho_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right),$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T_e$  — температура электронов. Таким образом, система уравнений, описывающая ионно-звуковые волны, состоит из уравнения движения

$$v_t + vv_x = -\frac{e}{M} \varphi_x, \tag{8.51}$$

<sup>5</sup>В литературе также рассматриваются стационарные ионно-звуковые волны в плазме с другими законами распределения электронов (см., например, [103]).

уравнения непрерывности

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (8.52)$$

и уравнения Пуассона, которое теперь принимает вид

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \rho_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) - \rho \right). \quad (8.53)$$

Здесь  $v$ ,  $\rho$  и  $M$  означают скорость, плотность заряда и массу ионов соответственно.

Ионно-звуковые волны уже рассматривались в § 4.4, где полагалось, что концентрация электронов приближенно равна концентрации ионов, что позволило приближенно считать, что левая часть уравнения (8.42) равна нулю; последнее равносильно пренебрежению дисперсией. Поэтому была получена система гиперболических уравнений, имеющая решения в виде простых волн. Теперь исследуем ионно-звуковые волны с учетом дисперсии и покажем, что возможно существование уединенных волн.

Переходя к стационарным волнам и интегрируя уравнения (8.51), (8.52), находим (ср. с (8.32), (8.33))

$$\frac{(v-U)^2}{2} + \frac{e\varphi}{M} = \frac{U^2}{2},$$

$$\rho = \frac{\rho_0 U}{U-v}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение Пуассона (8.53), получаем уравнение нелинейного осциллятора

$$\varphi'' = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) - \frac{U}{\sqrt{U^2 - 2e\varphi/M}} \right).$$

Вводя безразмерные переменные  $\bar{v} = v/U$ ,  $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$ ,  $\bar{\varphi} = e\varphi/MU^2$ ,  $\bar{\xi} = \omega_i \xi/U$ , приходим к уравнению (черту над безразмерными переменными будем опускать):

$$\varphi'' = \exp(M^2 \varphi) - \frac{1}{\sqrt{1-2\varphi}}. \quad (8.54)$$

Число Маха в данном случае вводится следующим образом:

$$M = \frac{U}{c_s},$$

где  $c_s = \sqrt{k_B T_e/M}$  — скорость ионного звука<sup>6</sup>. Потенциальная энергия осциллятора (8.54) равна

$$W = 1 - \sqrt{1-2\varphi} - \frac{\exp(M^2 \varphi) - 1}{M^2}. \quad (8.55)$$

<sup>6</sup>Это скорость, с которой распространяются линейные волны в длинноволновом пределе, когда дисперсия отсутствует (§ 4.4).

Константа интегрирования выбрана так, чтобы  $W(0) = 0$ . Из уравнений (8.54) и (8.55) следует, что должно выполняться неравенство

$$\varphi < \frac{1}{2}.$$

Нарушение этого условия, как и в предыдущих случаях, означает опрокидывание волны.

Исследуем структуру выражения для потенциальной энергии (8.55) подробнее. Состояния равновесия определяются из условия экстремума функции  $W(\varphi)$  и находятся из уравнения

$$1 - 2\varphi = \exp(-2M^2\varphi). \quad (8.56)$$

Одно из решений полученного уравнения очевидно:  $\varphi = 0$ . Ответим на вопрос, могут ли быть другие экстремумы. Производные функций в левой и правой частях уравнения (8.56) в точке  $\varphi = 0$  равны  $-2$  и  $-2M^2$  соответственно. Следовательно, при  $M < 1$  графики этих функций пересекаются в некоторой точке  $\varphi^* < 0$ , а при  $M > 1$  в точке  $\varphi^* > 0$ . Графические решения уравнения (8.56) и соответствующие формы потенциальной ямы представлены на рис. 8.19.

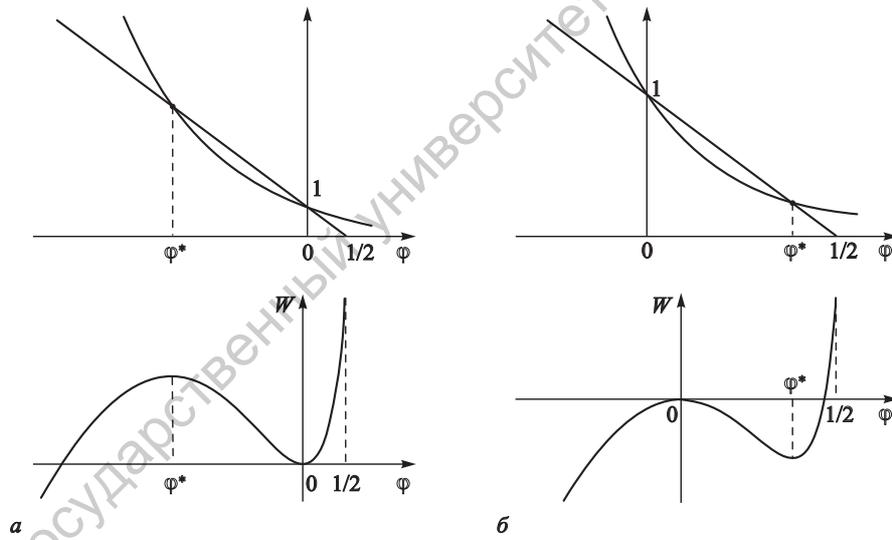


Рис. 8.19. Примеры графического решения уравнения (8.56) (вверху) и соответствующие графики потенциальной энергии (внизу) при  $M < 1$  (а) и  $M > 1$  (б)

Как видим, ситуация вполне аналогична описанной в предыдущем параграфе, где рассматривались волны пространственного заряда. В обоих случаях на фазовом портрете присутствует сепаратриса седла, следовательно, возможны решения в виде уединенных волн. Однако только в случае  $M > 1$  эти решения удовлетворяют граничным условиям, т.е. значения переменных стремятся к невозмущенному состоянию при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ .

Итак, вновь мы приходим к выводу, что уединенные волны распространяются быстрее линейных волн (как следует из линейной теории,  $v_{ph} \leq c_s$ ). Случаю  $M < 1$  соответствуют периодические стационарные волны, когда осциллятор колеблется около положения равновесия  $\varphi = 0$ .

Однако для существования уединенных волн необходимо выполнение ещё одного условия  $W(\varphi = 1/2) > 0$ , так как в противном случае происходит опрокидывание волны (форма потенциальной ямы подобна кривой 2 на рис. 8.16). Отсюда следует, что

$$M^2 + 1 > \exp(M^2/2),$$

т.е. число Маха должно быть меньше некоторого критического значения  $M_c \approx 1.58$ . Таким образом, оно должно лежать в пределах  $1 < M < M_c$ . Соответственно, как и в случае волн пространственного заряда (§ 8.7), диапазон скоростей уединенных волн оказывается ограниченным:

$$c_s < U < U_c \approx 1.58 c_s.$$

При  $U \rightarrow U_c$  вблизи вершины уединенной волны профиль  $\varphi(\xi)$  заостряется, а значение плотности заряда обращается в бесконечность.

Интерес представляет вопрос о характере взаимодействия уединенных ионно-звуковых волн. Как показали результаты экспериментов [104], столкновение попутных волн протекает упруго, тогда как столкновение уединенных волн, движущихся навстречу друг другу, сопровождается образованием осциллирующих хвостов. Аналогичный характер носит взаимодействие уединенных волн пространственного заряда (рис. 8.18).

**Задача 8.3.** Рассмотрите задачу о взаимодействии электромагнитного излучения с ансамблем невзаимодействующих идентичных электронов-осцилляторов, движение которых под действием внешнего электромагнитного поля  $E$  подчиняется уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{e}{m} E. \quad (8.57)$$

Полагая осцилляторы нелинейными, т.е. считая, что

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \alpha P^2),$$

где  $\omega_0, \alpha = \text{const's}$ ,  $P$  — поляризация среды, исследуйте возможные типы стационарных волн<sup>7</sup>.

*Решение:* Умножая уравнение (8.57) на  $(-eN)$ , где  $N$  — число осцилляторов в единице объема, получаем для поляризации уравнение Дуффинга

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega_0^2 (1 + \alpha P^2) P = \varepsilon_0 \Omega^2 E, \quad (8.58)$$

<sup>7</sup>В линейном случае данная задача возникает при построении простейшей классической теории дисперсии света [11, 98, т. 3]. Разнообразные нелинейные волновые процессы в данной системе, включая образование и распространение уединенных волн, рассматривались в работе [105].

где  $\Omega^2 = (e^2 N)/(m\epsilon_0)$ . Поле электромагнитной волны в поляризуемой среде подчиняется волновому уравнению Максвелла

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (8.59)$$

Систему (8.58), (8.59) иногда называют *уравнениями Максвелла–Дуффинга*.

Решения в виде стационарных волн зависят от  $\xi = x - Ut$  и уравнение (8.59) дает

$$\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right) E'' = \mu_0 U^2 P''.$$

Интегрируя это уравнение с нулевыми граничными условиями на бесконечности, получаем соотношение

$$E = \frac{\mu_0 c^2 U^2}{c^2 - U^2} P,$$

которое после подстановки в уравнение (8.58) приводит к уравнению нелинейного осциллятора

$$U^2 P'' + \left(\omega_0^2 + \frac{\Omega^2 U^2}{U^2 - c^2}\right) P + \alpha \omega_0^2 P^3 = 0. \quad (8.60)$$

Оно уже встречалось в § 8.2 при исследовании стационарных решений уравнения мКдВ. Поэтому не будем подробно его анализировать, а сразу найдем решение в виде уединенной волны. Заметим, что для существования таких решений необходимо, чтобы коэффициент при  $P$  в уравнении (8.60) был отрицателен. Таким образом, скорость уединенной волны лежит в пределах

$$\frac{\omega_0^2 c^2}{\omega_0^2 + \Omega^2} < U^2 < c^2.$$

Обратим внимание, что левая часть данного неравенства означает, что уединенные волны распространяются со скоростями, превышающими фазовую скорость линейных волн.

Будем искать решение в виде

$$P = a \operatorname{sech}(\xi/\Delta).$$

Подставляя его в уравнение (8.60), после несложных вычислений получаем

$$\Delta^2 = \frac{2U^2}{\alpha \omega_0^2 a^2}, \quad (8.61)$$

$$a^2 = \frac{2}{\alpha \omega_0^2} \frac{(\Omega^2 + \omega_0^2)U^2 - \omega_0^2 c^2}{c^2 - U^2}. \quad (8.62)$$

**Задача 8.4.** Исследуйте возможные типы стационарных волн в нелинейной линии передачи, одно звено которой представлено на рис. 8.20, причем  $Q(V) = C_0 V - C_2 V^2$ . Такая зависимость характерна, например, для  $p - n$  диода при обратном смещении.

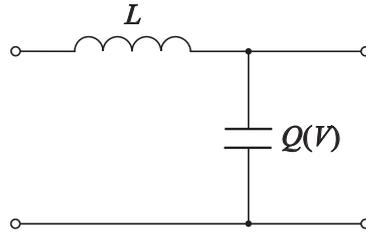


Рис. 8.20. Звено нелинейной радиотехнической линии передачи

*Решение:* Обозначая заряд на  $n$ -й емкости через  $Q_n$ , напряжение на ней через  $V_n$ , а токи, втекающие в  $n$ -й узел и вытекающие из него через  $I_n$  и  $I_{n+1}$  соответственно, запишем уравнения Кирхгофа

$$I_{n+1} - I_n = -\frac{\partial Q_n}{\partial t},$$

$$L_0 \frac{\partial I_n}{\partial t} = V_{n-1} - V_n.$$

Исключая отсюда ток и подставляя зависимость  $Q(V)$ , получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2} - \frac{1}{L_0 C_0} (V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}) - \frac{C_2}{C_0} \frac{\partial^2 (V_n^2)}{\partial t^2} = 0.$$

В длинноволновом приближении перейдем к непрерывной функции  $V(x, t)$  и, разлагая её в ряд в  $n \pm 1$ -м узлах

$$\begin{aligned} V_{n\pm 1} = V[(n \pm 1)d, t] \approx V(nd) \pm d \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \pm \\ \pm \frac{d^3}{6} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{d^4}{24} \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \dots, \end{aligned}$$

( $d$  — период цепочки), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 (V^2)}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = 0.$$

Здесь  $c^2 \equiv d^2/L_0 C_0$ ,  $\alpha = 2C_2/C_0$ ,  $\beta = d^4/(12L_0 C_0)$ . Для стационарных волн получаем уравнение

$$\beta V^{IV} + \left( \alpha U^2 \frac{V^2}{2} + (c^2 - U^2) V \right)'' = 0,$$

которое уже встречалось в § 8.3, где исследовалось уравнение Буссинеска. Поэтому можно сразу записать решение в виде уединенной волны

$$V = a \operatorname{sech}^2(\xi/\Delta),$$

где  $a = 3(U^2 - c^2)/\alpha U^2$ ,  $\Delta^2 = 12\beta/a$ .

## Лекция 9.

# Уравнение Кортевега–де Вриза в конкретных физических задачах

Уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ), первооткрывателями которого считают обычно Кортевега и де Вриза ..., описывает распространение волн на воде при малой дисперсии и малой нелинейности. Оно служит модельным уравнением для любой физической системы с приближенным дисперсионным соотношением между частотой и волновым числом вида  $\omega/k = c_0(1 - \beta k^2)$  и слабой квадратичной нелинейностью. ... найдено много родственных эволюционных уравнений, каждое из которых соответствует балансу между некоторого вида дисперсией (или изменением дисперсии в случае эволюции волнового пакета) и слабой нелинейностью в подходящей системе отсчета. Эти уравнения имеют свойства, аналогичные свойствам уравнения КдВ.

*Дж. Майлс.* Уравнение Кортевега–де Вриза (исторический очерк). В кн.: «Современная гидродинамика. Успехи и проблемы» (М.: Мир, 1984. С. 186)

Как уже не раз отмечалось, уравнения типа КдВ или Бюргерса играют в теории нелинейных волн чрезвычайно важную роль при изучении слабонелинейных длинноволновых процессов в средах с дисперсией и (или) диссипацией. Многие системы самой разной физической природы в определенном приближении описываются подобными уравнениями. В этой лекции будет подробно изложен метод, позволяющий регулярным образом получать «длинноволновые» уравнения в конкретных задачах. Он является разновидностью теории возмущений и известен как редуцированный метод

возмущений (reductive perturbation method)<sup>1</sup>. В отечественной литературе иногда используется более содержательное название «метод медленно меняющегося профиля» [13]. Его сущность состоит во введении новых пространственного и временного масштабов, позволяющих естественным образом описывать длинноволновые процессы. Разнообразные примеры можно найти, в частности, в книгах [16, 23], а более подробную информацию о методах возмущений — в [106]. Ниже получение уравнения КдВ, а также некоторых других «длинноволновых» уравнений (мКдВ и Бюргерса) будет рассмотрено на конкретных физических примерах, относящихся к физике плазмы, газо- и гидродинамике, радиофизике.

### 9.1. Ионно-звуковые волны в плазме

Начнем с примера, который уже рассматривался в § 8.8, где исследовались уединенные ионно-звуковые волны. Покажем, что в определенном приближении они описываются уравнением КдВ. Исходная система уравнений, которая была получена в § 8.8, имеет вид

$$v_t + vv_x = -\frac{e}{M} \varphi_x, \quad (9.1)$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (9.2)$$

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \rho_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) - \rho \right]. \quad (9.3)$$

Нетрудно показать, что линейные ионно-звуковые волны описываются дисперсионным соотношением [2, § 12.5]

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 k^2}{1 + k^2 r_D^2}, \quad (9.4)$$

где  $c_s = \sqrt{k_B T_e / M}$  — скорость ионного звука,  $r_D = \sqrt{\varepsilon_0 k_B T_e / e \rho_0}$  — радиус Дебая, определяющий характерный масштаб, в пределах которого плазму уже нельзя считать квазинейтральной. Отметим, что  $c_s = \omega_i r_D$ , где  $\omega_i = \sqrt{e \rho_0 / \varepsilon_0 M}$  — ионная плазменная частота.

Введем безразмерные переменные  $t' = \omega_i t$ ,  $x' = x / r_D$ ,  $v' = v / c_s$ ,  $\rho' = \rho / \rho_0$ ,  $\varphi' = e\varphi / k_B T_e$ . Тогда уравнения (9.1)–(9.3) принимают вид (штрихи над безразмерными переменными будем опускать)

$$v_t + vv_x = -\varphi_x, \quad (9.5)$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (9.6)$$

$$\varphi_{xx} = \exp(\varphi) - \rho, \quad (9.7)$$

<sup>1</sup>Это название связано с тем, что он позволяет редуцировать исходную систему уравнений к более простому эталонному уравнению.

а дисперсионное соотношение (9.4) становится таким:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{1 + k^2}.$$

В области длинных волн (малых  $k$ ) отсюда можно приближенно получить для волн, распространяющихся слева направо

$$\omega \approx k - \frac{k^3}{2} + \dots \quad (9.8)$$

Случай, когда  $k$  настолько мало, что можно ограничиться лишь первым членом этого разложения (т.е. считать, что ионно-звуковые волны распространяются бездисперсно), был рассмотрен в § 4.4. Покажем, что учет эффектов дисперсии в первом приближении приводит к уравнению КдВ.

Полагая нелинейность слабой, будем искать решения в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \rho_i, \\ v &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i, \\ \varphi &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \varphi_i, \end{aligned} \quad (9.9)$$

причем  $v_i, \rho_i, \varphi_i \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Это означает, что на бесконечности заданы граничные условия в виде невозмущенного состояния. Рассмотрим длинные волны, т.е. будем считать, что  $k = \varepsilon^p \kappa$ , где  $\kappa$  — величина порядка единицы. Показатель  $p$  определим позднее. Подсчитаем фазу волны  $\theta = \omega t - kx$ . С учетом дисперсионного соотношения (9.8) получим, что

$$\theta = k(t - x) - \frac{k^3 t}{2} = \varepsilon^p \kappa(t - x) - \frac{\varepsilon^{3p} \kappa^3 t}{2}. \quad (9.10)$$

Выражение (9.10) подсказывает, каким образом ввести новые пространственную и временную переменные, а именно,

$$\begin{aligned} \tau &= \varepsilon^{3p} t, \\ \xi &= \varepsilon^p (x - t). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Заметим, что при этом осуществляется переход в систему координат, движущуюся со скоростью  $c_s$  (в принятой нормировке эта скорость равна единице). Следовательно, новую пространственную переменную нужно вводить таким образом, чтобы совершался переход в систему отсчета, которая движется со фазовой скоростью линейных волн в пределе  $k \rightarrow 0$ . Это преобразование гарантирует медленность изменения профиля волны.

Подставим соотношения (9.9), (9.11) в уравнения (9.5)–(9.7) и выделим члены одинаковых порядков малости. Обратимся вначале к уравнению (9.5). Получим

$$\begin{aligned}\varepsilon^{p+1} &: -v_{1\xi} + \varphi_{1\xi}, \\ \varepsilon^{p+2} &: -v_{2\xi} + \varphi_{2\xi} + (v_1^2/2)_\xi, \\ \varepsilon^{3p+1} &: v_{1\tau}.\end{aligned}\tag{9.12}$$

Уравнение (9.6) дает

$$\begin{aligned}\varepsilon^{p+1} &: -\rho_{1\xi} + v_{1\xi}, \\ \varepsilon^{p+2} &: -\rho_{2\xi} + v_{2\xi} + (\rho_1 v_1)_\xi, \\ \varepsilon^{3p+1} &: \rho_{1\tau}.\end{aligned}\tag{9.13}$$

Из уравнения (9.7) получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon &: -\varphi_1 + \rho_1, \\ \varepsilon^2 &: -\varphi_2 + \rho_2 - \varphi_1^2/2, \\ \varepsilon^{2p+1} &: \varphi_{1\xi\xi}.\end{aligned}\tag{9.14}$$

Очевидно, что  $p > 0$ . Тогда понятно, что члены порядка  $\varepsilon^{p+1}$  в выражениях (9.12), (9.13) и члены порядка  $\varepsilon$  в выражении (9.14) не могут быть одного порядка малости с какими-либо другими членами в этих уравнениях. Следовательно, их необходимо приравнять к нулю, что после интегрирования с учетом граничных условий дает

$$\rho_1 = v_1 = \varphi_1.\tag{9.15}$$

Если предположить, что  $3p + 1 > p + 2$ ,  $2p + 1 > 2$ , то необходимо приравнять к нулю члены порядков  $\varepsilon^{p+2}$  в выражениях (9.12), (9.13) и члены порядка  $\varepsilon^2$  в (9.14), что после интегрирования и подстановки соотношений (9.15) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}-v_2 + \varphi_2 + v_1^2/2 &= 0, \\ -\rho_2 + v_2 + v_1^2 &= 0, \\ -\varphi_2 + \rho_2 - v_1^2/2 &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда находим, что  $v_1 = 0$ . Следовательно, единственный вариант, дающий нетривиальное решение в первом порядке, состоит в том, чтобы выбрать  $3p + 1 = p + 2$ ,  $2p + 1 = 2$ , т.е.  $p = 1/2$ . Тогда из уравнений (9.12)–(9.14), выражая  $\rho_1$  и  $\varphi_1$  через  $v_1$  с помощью (9.15), получаем

$$v_{1\tau} - v_{2\xi} + \varphi_{2\xi} + \left(\frac{v_1^2}{2}\right)_\xi = 0,\tag{9.16}$$

$$v_{1\tau} - \rho_2 \xi + v_{2\xi} + (v_1^2)_\xi = 0, \quad (9.17)$$

$$v_{1\xi\xi} - \frac{v_1^2}{2} - \varphi_2 + \rho_2 = 0. \quad (9.18)$$

Остается исключить отсюда  $v_2$ ,  $\rho_2$  и  $\varphi_2$ . Продифференцировав уравнение (9.18) по  $\xi$  и сложив полученное с (9.16), будем иметь

$$v_{1\tau} - v_{2\xi} + \rho_2 \xi + v_{1\xi\xi\xi} = 0.$$

Складывая это уравнение с (9.17), получим уравнение КдВ

$$v_{1\tau} + v_1 v_{1\xi} + \frac{1}{2} v_{1\xi\xi\xi} = 0, \quad (9.19)$$

солитоны которого приближенно соответствуют уединенным волнам, рассмотренным в § 8.8, в случае, когда нелинейность является слабой, а скорость  $U$  незначительно превышает  $c_s$ .

**Задача 9.1.** Пользуясь методом медленно меняющегося профиля, получите уравнение КдВ из уравнения Буссинеска

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxxx} = 0.$$

## 9.2. Ленгмюровские волны в поперечно ограниченной плазме

Следующий пример также позаимствован из физики плазмы. В § 8.6 рассматривались плоские ленгмюровские волны в безграничной плазме, когда единственно возможным типом стационарных решений являются периодические волны с укрупненным передним фронтом. Однако поперечная ограниченность системы изменяет характер дисперсии, в результате чего становится возможным образование уединенных волн (см. § 8.7).

Будем рассматривать тонкий плазменный цилиндр, располагающийся вдоль оси цилиндрической металлической трубы. Плазма помещена в сильное продольное магнитное поле, препятствующее поперечному движению электронов. Нелинейные волны в такой системе исследовались теоретически и экспериментально в работе [107]. По существу, задача в аналогичной постановке обсуждалась в § 8.7, где рассматривались волны пространственного заряда в электронном потоке; единственное отличие заключается в том, что здесь рассматривается неподвижная плазма, тогда как электронный поток движется с некоторой постоянной дрейфовой скоростью. Как было показано в § 8.7, для поперечно ограниченной системы можно записать следующую модификацию уравнения Пуассона:

$$\varphi_{xx} - k_{\perp}^2 \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_0). \quad (9.20)$$

Таким образом, исходная система уравнений состоит из уравнения (9.20), а также уравнений движения и непрерывности, которые остаются без изменений, т.е.

$$v_t + vv_x = \frac{e}{m} \varphi_x, \quad (9.21)$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0. \quad (9.22)$$

Прежде всего заметим, что для линейных волн справедливо следующее дисперсионное соотношение (ср. (8.42))

$$\omega^2 = \frac{\omega_e^2 k^2}{k^2 + k_\perp^2}, \quad (9.23)$$

где  $\omega_e$  — электронная плазменная частота. В области  $k \gg k_\perp$  оно переходит в дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_e^2$$

для ленгмюровских колебаний в холодной безграничной плазме. Нас интересует, наоборот, область длинных волн  $k \ll k_\perp$ , где можно разложить правую часть уравнения (9.23) в ряд и получить, что

$$\omega \approx \omega_e \left( \frac{k}{k_\perp} - \frac{1}{2} \frac{k^3}{k_\perp^3} \right). \quad (9.24)$$

Такой закон дисперсии характерен для уравнения КдВ.

Введем безразмерные переменные  $v' = v/v_c$ ,  $\rho' = \rho/\rho_0$ ,  $\varphi' = e\varphi/mv_c^2$ ,  $t' = \omega_e t$ ,  $x' = \omega_e x/v_c$ , где  $v_c = \omega_e/k_\perp$  — фазовая скорость в пределе  $k \rightarrow 0$ . Тогда уравнения (9.20)–(9.22) примут вид

$$v_t + vv_x = \varphi_x, \quad (9.25)$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (9.26)$$

$$\varphi_{xx} - \varphi = \rho - 1, \quad (9.27)$$

а дисперсионное соотношение совпадает с соотношением (9.8). Как и прежде, будем искать решение в виде рядов (9.9). Соображения, в соответствии с которыми вводятся новые пространственный и временной масштабы, в данном случае ничем не отличаются от приведенных в § 9.1. Поэтому сразу запишем

$$\tau = \varepsilon^{3/2} t, \quad \xi = \varepsilon^{1/2} (x - t). \quad (9.28)$$

Перейдем в уравнениях (9.25)–(9.27) к переменным (9.28) и подставим туда разложения (9.9). Тогда члены порядка  $\varepsilon^{3/2}$  в уравнениях (9.25), (9.26) и члены порядка  $\varepsilon$  в (9.27) приводят к уравнениям

$$-v_{1\xi} = \varphi_{1\xi}, \quad \rho_{1\xi} = v_{1\xi}, \quad -\varphi_1 = \rho_1.$$

Проинтегрировав первые два уравнения с нулевыми граничными условиями на бесконечности, получим

$$v_1 = \rho_1 = -\varphi_1. \quad (9.29)$$

Члены порядка  $\varepsilon^{5/2}$  в уравнениях (9.25), (9.26) и члены порядка  $\varepsilon^2$  в (9.27) дают:

$$v_{1\tau} + \left(\frac{v_1^2}{2}\right)_\xi - v_{2\xi} - \varphi_{2\xi} = 0, \quad (9.30)$$

$$\rho_{1\tau} + (\rho_1 v_1)_\xi - \rho_{2\xi} + v_{2\xi} = 0, \quad (9.31)$$

$$\varphi_{1\xi\xi} - \varphi_2 - \rho_2 = 0. \quad (9.32)$$

Выражая  $\varphi_1$ ,  $\rho_1$  через  $v_1$  с помощью соотношений (9.29), дифференцируя уравнение (9.32) по  $\xi$  и вычитая результат из уравнения (9.30), получим

$$v_{1\tau} + \left(\frac{v_1^2}{2}\right)_\xi - v_{2\xi} + \rho_{2\xi} + v_{1\xi\xi\xi} = 0.$$

Складывая получившееся уравнение с уравнением (9.31), приходим к уравнению КдВ

$$v_{1\tau} + \frac{3}{2} v_1 v_{1\xi} + \frac{1}{2} v_{1\xi\xi\xi} = 0. \quad (9.33)$$

В экспериментах, описанных в [107], наблюдались уединенные ленгмюровские волны, поведение которых находилось в качественном соответствии с поведением решений уравнения КдВ.

### 9.3. Гравитационные волны на мелкой воде

Вывод уравнения КдВ для волн на поверхности воды является довольно громоздким, так как требуется выполнить большую предварительную работу, чтобы привести исходные уравнения к виду, удобному для применения методов теории возмущений. Кроме того, эта задача достаточно подробно описана в литературе [16, 35]. Поэтому поступим следующим образом. Рассмотрим уравнения «мелкой воды», полученные в § 4.3 и добавим в первое уравнение член, пропорциональный  $h_{xxx}$ . Тогда

$$v_t + vv_x + gh_x + \beta h_{xxx} = 0, \quad (9.34)$$

$$h_t + (hv)_x = 0. \quad (9.35)$$

Коэффициент  $\beta$  выберем так, чтобы дисперсионное уравнение системы (9.34), (9.35) совпадало с точным соотношением

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH) \quad (9.36)$$

при  $kH \ll 1$  с точностью до членов второго порядка малости. Разлагая в уравнении (9.36)  $\text{th}(kH)$  в ряд и извлекая корень, получаем

$$\omega \approx \sqrt{gH} \left( k - \frac{k^3 H^2}{6} \right). \quad (9.37)$$

Теперь линеаризуем уравнения (9.34) и (9.35), полагая  $v = \tilde{v}$ ,  $h = H + \tilde{h}$ , где  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{h}$  — малые возмущения:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t + g\tilde{h}_x + \beta\tilde{h}_{xxx} &= 0, \\ \tilde{h}_t + H\tilde{v}_x &= 0. \end{aligned}$$

Полагая  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{h} \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ , находим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = gHk^2 \left( 1 - \frac{\beta k^2}{g} \right).$$

Извлекая корень, приближенно получаем следующее выражение:

$$\omega \approx \sqrt{gH}k \left( 1 - \frac{\beta k^2}{2g} \right).$$

Сопоставляя его с соотношением (9.37), находим, что

$$\beta = \frac{gH^2}{3}.$$

Введем безразмерные переменные

$$v' = \frac{v}{\sqrt{gH}}, \quad h' = \frac{h}{H}, \quad t' = t\sqrt{\frac{g}{H}}, \quad x' = \frac{x}{H}.$$

Тогда уравнения (9.34) и (9.35) принимают вид

$$v_t + vv_x + h_x + \frac{1}{3} h_{xxx} = 0, \quad (9.38)$$

$$h_t + (hv)_x = 0. \quad (9.39)$$

Введем новые независимые переменные  $\xi = \varepsilon^{1/2}(x - t)$ ,  $\tau = \varepsilon^{3/2}t$  и будем искать решение в виде рядов

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i, \quad h = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i h_i.$$

Подставляя их в уравнения (9.38), (9.39), получаем

$$\varepsilon^{3/2} (-v_{1\xi} + h_{1\xi}) + \varepsilon^{5/2} \left( -v_{2\xi} + h_{2\xi} + v_{1\tau} + \left( \frac{v_1^2}{2} \right)_{\xi} \right) + \frac{1}{3} h_{1\xi\xi\xi} + \dots = 0,$$

$$\varepsilon^{3/2} (-h_{1\xi} + v_{1\xi}) + \varepsilon^{5/2} \left( -h_{2\xi} + v_{2\xi} + h_{1\tau} + (v_1 h_1)_{\xi} \right) + \dots = 0.$$

Приравнивая к нулю члены порядка  $\varepsilon^{3/2}$ , находим, что

$$v_1 = h_1. \quad (9.40)$$

Члены порядка  $\varepsilon^{5/2}$  дают

$$v_{1\tau} + v_1 v_{1\xi} - v_{2\xi} + h_{2\xi} + \frac{1}{3} h_{1\xi\xi\xi} = 0,$$

$$h_{1\tau} + (v_1 h_1)_\xi - h_{2\xi} + v_{2\xi} = 0.$$

Складывая эти уравнения с учетом (9.40), получаем уравнение КдВ

$$v_{1\tau} + \frac{3}{2} v_1 v_{1\xi} + \frac{1}{6} v_{1\xi\xi\xi} = 0.$$

#### 9.4. Волны в нелинейной линии передачи

Радиотехнические линии передачи, содержащие нелинейные элементы, являются весьма удобными объектами для изучения различных нелинейных волновых процессов [11, 90]. Вернемся к модели, которая обсуждалась в лекции 8 (задача 8.4). Рассмотрим цепочки с квадратичной ( $Q(V) = C_0 V - C_2 V^2$ ) и кубической ( $Q(V) = C_0 V - C_3 V^3$ ) нелинейностями и покажем, что длинноволновые возмущения описываются, соответственно, уравнениями КдВ и мКдВ.

Уравнения Кирхгофа, описывающие данную систему, имеют вид

$$L_0 \frac{\partial I_n}{\partial t} = V_{n-1} - V_n, \quad (9.41)$$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial t} = I_n - I_{n+1}. \quad (9.42)$$

Нетрудно показать, что дисперсионное соотношение для линейных возмущений есть

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \left( \frac{kd}{2} \right),$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ ,  $d$  — расстояние между узлами цепочки. В длинноволновом пределе ( $kd \ll 1$ )

$$\omega \approx \omega_0 \left( kd - \frac{k^3 d^3}{24} \right), \quad (9.43)$$

т.е. дисперсия действительно имеет тот же характер, что и для уравнений КдВ и мКдВ.

Переходя к длинноволновому пределу, введем непрерывные функции  $I(x, t)$ ,  $V(x, t)$  и запишем уравнения (9.41), (9.42) в виде

$$L_0 I_t = -d \cdot V_x + \frac{d^2}{2} V_{xx} - \frac{d^3}{6} V_{xxx} + \dots,$$

$$C_0 V_t - (C_j V^j)_t = -d \cdot I_x - \frac{d^2}{2} I_{xx} - \frac{d^3}{6} I_{xxx} + \dots,$$

где  $j = 2$  или  $3$ . Удобно исключить отсюда  $I$  перекрестным дифференцированием, что дает

$$C_0 V_{tt} - (C_j V^j)_{tt} = \frac{1}{L_0} \left( d^2 V_{xx} + \frac{d^4}{12} V_{xxxx} + \dots \right). \quad (9.44)$$

Членами, содержащими производные шестого порядка и выше, будем пренебрегать в силу их малости. Введем безразмерные переменные

$$t' = \omega_0 t, \quad x' = x/d, \quad V' = \left( \frac{C_2}{C_0} \right) V \text{ или } V' = \sqrt{\frac{C_3}{C_0}} V$$

для  $j = 2$  или  $3$  соответственно. Тогда уравнение (9.44) принимает вид (штрихи у безразмерных переменных опускаем)

$$V_{tt} - V_{xx} - (V^j)_{tt} - \frac{1}{12} V_{xxxx} = 0, \quad (9.45)$$

а закон дисперсии (9.43) описывается соотношением

$$\omega \approx k - \frac{k^3}{24}.$$

Как обычно, перейдем в уравнении (9.45) к новым переменным  $\tau = \varepsilon^3 p t$ ,  $\xi = \varepsilon^p (x - t)$ , тогда

$$\varepsilon^{2p} (V^j)_{\xi\xi} + \varepsilon^{4p} \left( 2V_{\tau\xi} - 2(V^j)_{\tau\xi} + \frac{1}{12} V_{\xi\xi\xi\xi} \right) - \varepsilon^{6p} (V - V^j)_{\tau\tau} = 0. \quad (9.46)$$

Будем искать решение в виде ряда

$$V = \sum_i \varepsilon^i V_i. \quad (9.47)$$

Начнем со случая  $j = 2$ . Подстановка (9.47) в уравнение (9.46) дает

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2p+2} (V_1^2)_{\xi\xi} + \varepsilon^{2p+3} (2V_1 V_2)_{\xi\xi} + \dots + \varepsilon^{4p+1} \left( 2V_{1\tau\xi} + \frac{1}{12} V_{1\xi\xi\xi\xi} \right) + \\ & + \varepsilon^{4p+2} \left( 2V_{2\tau\xi} + \frac{1}{12} V_{2\xi\xi\xi\xi} - 2(V_1^2)_{\tau\xi} \right) + \dots - \\ & - \varepsilon^{6p+1} V_{1\tau\tau} - \varepsilon^{6p+2} (V_2 - V_1^2)_{\tau\tau} - \dots = 0. \end{aligned}$$

Для получения нетривиального решения в первом порядке, очевидно, необходимо положить  $4p + 1 = 2p + 2$ , что дает  $p = 1/2$ . Таким образом,

$$V_{1\tau\xi} + \frac{1}{2} (V_1^2)_{\xi\xi} + \frac{1}{24} V_{1\xi\xi\xi} = 0,$$

что после интегрирования по  $\xi$  приводит к уравнению КдВ

$$V_{1\tau} + V_1 V_{1\xi} + \frac{1}{24} V_{1\xi\xi\xi} = 0.$$

Перейдем теперь к случаю  $j = 3$ . Из уравнения (9.46) получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2p+3} (V_1^3)_{\xi\xi} + \varepsilon^{2p+4} (3V_1^2 V_2)_{\xi\xi} + \dots + \varepsilon^{4p+1} \left( 2V_{1\tau\xi} + \frac{1}{12} V_{1\xi\xi\xi\xi} \right) + \\ & + \varepsilon^{4p+2} \left( 2V_{2\tau\xi} + \frac{1}{12} V_{2\xi\xi\xi\xi} \right) + \varepsilon^{4p+3} \left( 2V_{3\tau\xi} + \frac{1}{12} V_{3\xi\xi\xi\xi} - 2(V_1^3)_{\tau\xi} \right) + \\ & + \dots - \varepsilon^{6p+1} V_{1\tau\tau} - \varepsilon^{6p+2} V_{2\tau\tau} - \varepsilon^{6p+3} (V_3 - V_1^3)_{\tau\tau} - \dots = 0. \end{aligned}$$

В данном случае необходимо положить  $2p + 3 = 4p + 1$ , что дает  $p = 1$ . Тогда для  $V_1$  получается уравнение мКдВ

$$V_{1\tau} + \frac{3}{2} V_1^2 V_{1\xi} + \frac{1}{24} V_{1\xi\xi\xi} = 0.$$

**Задача 9.2.** В задаче 8.3 рассматривалось распространение электромагнитной волны в среде из нелинейных осцилляторов. Получите для этой системы уравнение мКдВ в длинноволновом приближении и сравните его солитонные решения с уединенными волнами, найденными в задаче 8.3.

*Решение:* Данная система описывается уравнениями Максвелла–Дуффинга, которые были получены в лекции 8:

$$E_{xx} - c^{-2} E_{tt} = \mu_0 P_{tt}, \quad (9.48)$$

$$P_{tt} + \omega_0^2 (1 + \alpha P^2) P = \Omega^2 \varepsilon_0 E, \quad (9.49)$$

где  $\Omega^2 = (e^2 N)/(m\varepsilon_0)$ ,  $N$  — число осцилляторов в единице объема. Вначале рассмотрим линейные волны ( $\alpha = 0$ ). Выбирая  $E, P \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ , из уравнений (9.48), (9.49) получим дисперсионное соотношение

$$(\omega^2 - \omega_0^2) (\omega^2 - c^2 k^2) = \omega^2 \Omega^2. \quad (9.50)$$

Дисперсионная диаграмма представлена на рис. 9.1. Очевидно, что интересующий нас характер дисперсии имеет нижняя ветвь. Найдем фазовую скорость в длинноволновой области, считая  $\omega^2 \ll \omega_0^2$ . Тогда из уравнения (9.50) получаем

$$\omega \approx \frac{\omega_0 c k}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} = U_c k.$$

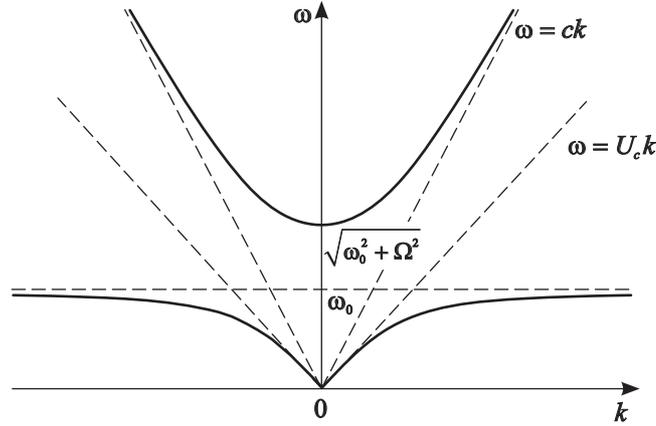


Рис. 9.1. Дисперсионная диаграмма задачи о распространении электромагнитной волны в среде из электронов-осцилляторов

Из результатов § 9.4 следует, что для получения уравнения МКДВ нужно выбрать  $p = 1$ . Таким образом, новые пространственная и временная переменные имеют вид

$$\xi = \varepsilon(x - U_c t), \quad \tau = \varepsilon^3 t.$$

Переходя в уравнениях (9.48) и (9.49) к переменным  $\xi$ ,  $\tau$  и отыскивая решение в виде рядов

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i E_i, \quad P = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i P_i,$$

получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \left( (U_c^2 - c^2) E_{1\xi\xi} + \frac{U_c^2}{\varepsilon_0} P_{1\xi\xi} \right) + \varepsilon^4 \left( (U_c^2 - c^2) E_{2\xi\xi} + \frac{U_c^2}{\varepsilon_0} P_{2\xi\xi} \right) + \\ & + \varepsilon^5 \left( (U_c^2 - c^2) E_{3\xi\xi} + \frac{U_c^2}{\varepsilon_0} P_{3\xi\xi} - 2U_c E_{1\tau\xi} - \frac{2U_c}{\varepsilon_0} P_{1\tau\xi} \right) + \dots = 0, \quad (9.51) \\ & \varepsilon (\omega_0^2 P_1 - \varepsilon_0 \Omega^2 E_1) + \varepsilon^2 (\omega_0^2 P_2 - \varepsilon_0 \Omega^2 E_2) + \\ & + \varepsilon^3 (\omega_0^2 P_3 - \varepsilon_0 \Omega^2 E_3 + \omega_0^2 \alpha P_1^3 + U_c^2 P_{1\xi\xi}) + \dots = 0. \quad (9.52) \end{aligned}$$

Члены порядка  $\varepsilon^3$  в (9.51) и порядка  $\varepsilon$  в (9.52) дают связь между  $E_1$  и  $P_1$ , а именно,

$$E_1 = \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_0 \Omega^2} P_1. \quad (9.53)$$

Члены порядка  $\varepsilon^5$  в (9.51) и порядка  $\varepsilon^3$  в (9.52) приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (U_c^2 - c^2) E_{3\xi\xi} + \frac{U_c^2}{\varepsilon_0} P_{3\xi\xi} - 2U_c E_{1\tau\xi} - \frac{2U_c}{\varepsilon_0} P_{1\tau\xi} &= 0, \\ \omega_0^2 P_3 - \varepsilon_0 \Omega^2 E_3 + \omega_0^2 \alpha P_1^3 + U_c^2 P_{1\xi\xi} &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение проинтегрируем по  $\xi$  с учетом нулевых граничных условий на бесконечности, а второе — продифференцируем. Кроме того выразим  $E_1$  через  $P_1$  при помощи соотношения (9.53). Тогда получим

$$(U_c^2 - c^2) E_{3\xi} + \frac{2U_c^2}{\varepsilon_0} P_{3\xi} - \frac{2U_c(\omega_0^2 + \Omega^2)}{\varepsilon_0\Omega^2} P_{1\tau} = 0,$$

$$\omega_0^2 P_{3\xi} - \varepsilon_0\Omega^2 E_{3\xi} + 3\omega_0^2\alpha P_1^2 P_{1\xi} + U_c^2 P_{1\xi\xi\xi} = 0.$$

Исключая отсюда  $E_3$ ,  $P_3$  при помощи несложных алгебраических преобразований, получаем уравнение мКдВ

$$P_{1\tau} + \frac{3\omega_0^2\alpha(c^2 - U_c^2)}{2U_c(\omega_0^2 + \Omega^2)} P_1^2 P_{1\xi} + \frac{U_c(c^2 - U_c^2)}{2(\omega_0^2 + \Omega^2)} P_{1\xi\xi\xi} = 0. \quad (9.54)$$

Решение уравнения мКдВ в виде солитона было получено в § 8.2. В данных обозначениях оно имеет вид

$$P_1 = a \operatorname{sech}[(\xi - U\tau)/\Delta],$$

где

$$a^2 = \frac{4UU_c(\omega_0^2 + \Omega^2)}{\omega_0\alpha(c^2 - U_c^2)}. \quad (9.55)$$

$$\Delta^2 = \frac{U_c(c^2 - U_c^2)}{2U(\omega_0^2 + \Omega^2)}. \quad (9.56)$$

Здесь  $U = \text{const}$  — скорость солитона. Нетрудно показать, что полученные в задаче 8.3 выражения (8.61), (8.62) для амплитуды и ширины уединенной волны переходят в (9.55), (9.56), если в них положить  $U \rightarrow U_c + U'$ ,  $U' \ll U_c$ . Таким образом, уравнение (9.54) справедливо в случае, когда скорость уединенной волны незначительно превышает критическую. Сравнение решений исходных уравнений (9.48), (9.49) и уравнения мКдВ (9.54) при помощи численного моделирования проведено в статье [105].

## 9.5. Газовая динамика и уравнение Бюргерса

Рассматриваемый в настоящей лекции метод медленно меняющегося профиля применим не только к диспергирующим системам, но и к системам с диссипацией. В последнем случае он приводит к уравнению Бюргерса. Различные решения этого уравнения подробно обсуждались в лекции 5, где, однако, не было показано, как оно возникает в конкретных физических задачах. Обратимся к уравнениям газовой динамики, которые уже рассматривались в § 4.2. Система уравнений, которую примем в качестве исходной, будет состоять из уравнения движения с учетом вязкости

$$\rho(v_t + vv_x) = -p_x + \eta v_{xx}, \quad (9.57)$$

и непрерывности

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0. \quad (9.58)$$

Здесь  $\rho$  — плотность газа,  $v$  — скорость,  $p$  — давление,  $\eta$  — коэффициент вязкости. Давление связано с плотностью уравнением состояния

$$p = \kappa \rho^\gamma. \quad (9.59)$$

Конечно, в данном случае течение нельзя считать изэнтропийным. Однако в акустической волне изменения энтропии малы и в рамках интересующего нас приближения можно воспользоваться уравнением (9.59) [48]. Ограничиваясь слабонелинейными процессами, разложим давление в ряд Тейлора вблизи невозмущенного состояния  $\rho = \rho_0$  с точностью до квадратичных членов

$$p = p_0 + c_s^2 (\rho - \rho_0) + \frac{c_s^2(\gamma - 1)}{2\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots, \quad (9.60)$$

где  $c_s = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$  — скорость линейных звуковых волн.

Вначале рассмотрим распространение линейных волн. Линеаризуя уравнения (9.57), (9.58) по малым возмущениям  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{\rho}$  и полагая, что

$$\tilde{v}, \tilde{\rho} \sim e^{i(\omega t - kx)},$$

получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 + \frac{i\eta}{\rho_0} \omega k^2. \quad (9.61)$$

Рассмотрим случай слабой диссипации, когда второй член в правой части уравнения (9.61) мал, тогда для волн, распространяющихся вправо, получим, что

$$\omega \approx c_s k + \frac{i\nu k^2}{2}, \quad (9.62)$$

где  $\nu = \eta / \rho_0$  — кинематическая вязкость.

Чтобы выяснить, как в данном случае следует ввести переменные  $\xi$ ,  $\tau$ , подсчитаем фазу

$$\theta = \omega t - kx = k(c_s t - x) + \frac{i\nu k^2 t}{2}. \quad (9.63)$$

Введем безразмерные переменные

$$v' = v/c_s, \quad \rho' = \rho/\rho_0, \quad t' = c_s^2 t/\nu, \quad x' = c_s x/\nu.$$

Тогда уравнения (9.57) и (9.58) с учетом (9.60) принимают вид

$$\rho(v_t + vv_x) = - \left[ \rho + (\gamma - 1) \frac{(\rho - 1)^2}{2} \right]_x + v_{xx}, \quad (9.64)$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (9.65)$$

а соотношение (9.63) запишется так:

$$\theta = k(t - x) + ik^2t/2.$$

Полагая  $k = \varepsilon^p \kappa$ , получаем  $\theta = \varepsilon^p \kappa(t - x) + i\varepsilon^{2p} \kappa^2 t/2$ . Таким образом, новые переменные следует выбрать в виде

$$\xi = \varepsilon^p(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{2p}t.$$

Подставляя в уравнения (9.64), (9.65) разложения

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i, \quad \rho = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \rho_i,$$

и переходя к переменным  $\xi, \tau$ , получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{p+1} (-v_{1\xi} + \rho_{1\xi}) + \\ & + \varepsilon^{p+2} (-\rho_1 v_{1\xi} + v_1 v_{1\xi} - v_{2\xi} + \rho_{2\xi} + (\gamma - 1)\rho_1 \rho_{1\xi}) + \dots \\ & \dots + \varepsilon^{2p+1} (v_{1\tau} - v_{1\xi\xi}) + \dots = 0, \\ & \varepsilon^{p+1} (-\rho_{1\xi} + v_{1\xi}) + \dots + \varepsilon^{p+2} (-\rho_{2\xi} + v_{2\xi} + (\rho_1 v_1)_\xi) \\ & \dots + \varepsilon^{2p+1} \rho_{1\tau} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Члены порядка  $\varepsilon^{p+1}$  после интегрирования с нулевыми граничными условиями на бесконечности дают

$$\rho_1 = v_1. \quad (9.66)$$

Для получения нетривиального решения в следующем порядке необходимо выбрать  $p = 1$ , чтобы  $2p + 1 = p + 2$ . Таким образом, члены порядка  $\varepsilon^3$  с учетом (9.66) дают

$$\begin{aligned} v_{1\tau} - v_{1\xi\xi} + (\gamma - 1)v_1 v_{1\xi} - v_{2\xi} + \rho_{2\xi} &= 0, \\ v_{1\tau} + 2v_1 v_{1\xi} - \rho_{2\xi} + v_{2\xi} &= 0, \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения, получаем уравнение Бюргерса

$$v_{1\tau} + \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) v_1 v_{1\xi} = \frac{1}{2} v_{1\xi\xi}. \quad (9.67)$$

Более строгий вывод, учитывающий, в частности, непостоянство энтропии, дан в книге [15].

Заметим, что вместо дисперсионного соотношения (9.62) можно с той же степенью точности записать

$$k \approx \frac{\omega}{c_s} - \frac{i\nu\omega^2}{2c_s^3}.$$

Тогда  $\theta = \omega(t - x/c_s) - i\nu\omega^2 x/2c_s^3$ . Если ввести безразмерные координату и время

$$\tau = \frac{\varepsilon c_s (c_s t - x)}{\nu}, \quad \xi = \frac{\varepsilon^2 c_s x}{\nu},$$

то можно получить уравнение Бюргерса в иной форме

$$v_{1\xi} - \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) v_1 v_{1\tau} = \frac{1}{2} v_{1\tau\tau}. \quad (9.68)$$

В таком виде уравнение более удобно для анализа задачи с граничным условием (задачи о распространении сигнала).

**Задача 9.3.** В § 9.4 были получены уравнения КдВ и мКдВ для волн в нелинейной радиотехнической линии передачи. Рассмотрите линию передачи с высокочастотными потерями (рис. 9.2), считая нелинейность квадратичной, т.е.  $Q = C_0 U - C_2 U^2$ , где  $U$  — падение напряжения на нелинейном элементе. Волны в такой линии по-прежнему описываются уравнениями (9.41), (9.42), причем  $V_n$  и  $U_n$  связаны соотношением

$$V_n = U_n + R\dot{Q}_n.$$

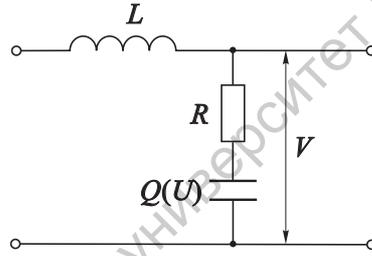


Рис. 9.2. Звено нелинейной радиотехнической линии передачи с высокочастотными потерями

Перейдите в уравнениях (9.41), (9.42) к непрерывному пределу и, пренебрегая дисперсией, получите уравнения

$$\begin{aligned} LI_t &= -d \cdot V_x + \dots, \\ C_0 U_t - (C_2 U^2)_t &= -d \cdot I_x + \dots, \\ V &= U + R [C_0 U_t - (C_2 U^2)_t]. \end{aligned}$$

Исключив из этих уравнений ток, приведите их к безразмерному виду

$$\begin{aligned} U_{tt} - (U^2)_{tt} &= -V_{xx}, \\ V &= U + \nu(U - U^2)_t, \end{aligned} \quad (9.69)$$

где  $\nu = R\sqrt{C_0/L}$  — безразмерный параметр диссипации. Отыскивая решения уравнений (9.69) в виде рядов  $V = \sum_i \varepsilon^i V_i$ ,  $U = \sum_i \varepsilon^i U_i$  и вводя новые переменные

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad \xi = \varepsilon(x - t),$$

получите уравнение Бюргерса

$$V_{1\tau} + V_1 V_{1\xi} = \frac{\nu}{2} V_{1\xi\xi}.$$

**Задача 9.4.** Решите предыдущую задачу, не пренебрегая дисперсией. Диссипацию считайте слабой, полагая, что  $R\sqrt{C_0/L} = \varepsilon^{1/2}\nu$ . Покажите, что в этом случае вместо (9.69) получаются уравнения

$$\begin{aligned} U_{tt} - (U^2)_{tt} &= -V_{xx} + \frac{1}{12} V_{xxxx}, \\ V &= U + \varepsilon^{1/2}\nu(U - U^2)_t. \end{aligned} \tag{9.70}$$

Введите новые пространственную и временную переменные

$$\tau = \varepsilon^{3/2}t, \quad \xi = \varepsilon^{1/2}(x - t),$$

и покажите, что из уравнений (9.70) следует уравнение КдВ–Бюргерса

$$V_{1\tau} + V_1 V_{1\xi} + \frac{1}{24} V_{1\xi\xi\xi} = \frac{\nu}{2} V_{1\xi\xi}.$$

## Лекция 10.

# Точные методы интегрирования нелинейных волновых уравнений

... хотелось бы ... отметить замечательную изобретательность различных исследователей, которым мы обязаны достижениями последних лет. Полученные результаты в огромной степени способствовали изучению нелинейных волн и нелинейных процессов в целом. Различные подходы уже внесли ценнейший вклад в арсенал «математических методов», но главные открытия, несомненно, еще впереди. Немаловажный урок состоит в том, что точные решения всё еще окружают нас со всех сторон и не всегда следует сразу устремляться на поиски малого  $\epsilon$ .

*Джс. Уизем. Линеиные и нелинейные волны (М.: Мир, 1977. С. 591)*

Нелинейные уравнения в частных производных, на которых основывается математическое описание процессов распространения волн, являются весьма сложными для исследования объектами. Тем не менее, для большинства эталонных уравнений, таких как уравнения КдВ, мКдВ, Буссинеска, Син-Гордона, нелинейное уравнение Шрёдингера и др., оказалось возможным разработать чрезвычайно мощные методы аналитического решения, которые позволяют, по крайней мере, в принципе, получать точные решения при произвольных начальных условиях. Данная лекция кратко знакомит с этими методами, центральное место среди которых занимает метод обратной задачи рассеяния. Конечно, наше изложение будет довольно поверхностным. Для более глубокого ознакомления с математическими методами решения «солитонных» уравнений можно порекомендовать такие книги, как [16, 17, 18, 35, 108].

Следуя исторической традиции, основные идеи продемонстрируем на примере уравнения КдВ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (10.1)$$

Такая форма записи наиболее удобна для наших целей.

### 10.1. Законы сохранения уравнения КдВ и преобразование Миуры

Весьма важную информацию о свойствах нелинейных волновых уравнений можно почерпнуть, анализируя их законы сохранения, которые представляют собой соотношения вида

$$P_t + Q_x = 0,$$

причем  $P$  называется сохраняющейся плотностью, а  $Q$  — соответствующим потоком. Мы уже неоднократно обращались к этой теме в предыдущих лекциях. Рассмотрим для уравнения КдВ (10.1) задачу с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Очевидно, что оно само по себе представляет закон сохранения

$$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0.$$

Можно найти и другие законы сохранения. Например, умножив уравнение (10.1) на  $u$ , нетрудно получить

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left(2u^3 + uu_{xx} - \frac{u_x^2}{2}\right)_x = 0.$$

Физический смысл этих соотношений понятен: например, применительно к волнам на поверхности воды они означают сохранение массы и импульса. В середине 1960-х годов различными исследователями было обнаружено более десяти независимых законов сохранения, большинство из которых не имело очевидной физической интерпретации [109], и было высказано предположение, что их число неограниченно.

Подтвердить эту гипотезу удалось Р. Миуре [110], который обнаружил, что преобразование

$$u = v^2 - iv_x$$

приводит к модифицированному уравнению КдВ для функции  $v$

$$v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0.$$

Заметим, что обратное утверждение несправедливо. Этот факт, сам по себе достаточно примечательный, имеет ряд удивительных следствий. Мы

рассмотрим здесь несколько более общий вариант преобразования Миуры, предложенный Гарднером:

$$u = w + i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2, \quad (10.2)$$

где  $\varepsilon$  — произвольный параметр. Нетрудно показать, что подстановка выражения (10.2) в уравнение (10.1) дает

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \left(1 + 2\varepsilon^2 w + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) (w_t + 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx}) = 0.$$

Итак, функция  $w$  удовлетворяет уравнению

$$w_t + 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0. \quad (10.3)$$

Поскольку для функции  $w$  граничные условия на бесконечности также нулевые, интегрирование уравнения (10.3) по всей оси  $x$  приводит к закону сохранения

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w \, dx = 0, \quad (10.4)$$

т.е. величина  $I = \int_{-\infty}^{\infty} w \, dx$  является интегралом движения. Выразим теперь  $w$  через  $u$  в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ :

$$w = w_0(u) + \varepsilon w_1(u) + \varepsilon^2 w_2(u) + \dots \quad (10.5)$$

Подстановка выражения (10.5) в (10.2) дает

$$\begin{aligned} w_0 &= u, \\ w_1 &= -iu_x, \\ w_2 &= -u_{xx} - u^2, \\ &\dots, \\ w_{n+2} + i(w_{n+1})_x + \sum_{k=0}^n w_k w_{n-k} &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что в силу произвольности  $\varepsilon$  из условия (10.4) следует

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w_n(u) \, dx = 0$$

для всех степеней  $\varepsilon$ . Поскольку ряд (10.5) бесконечен, один закон сохранения для уравнения (10.3) дает бесконечное число интегралов движения для уравнения КдВ (10.1)

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} w_n(u) \, dx.$$

Для нечетных  $n$  интегралы тождественно равны нулю, однако четные приводят к нетривиальным сохраняющимся величинам, несколько первых из которых имеют вид

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dx,$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( u^3 - \frac{u_x^2}{2} \right) dx.$$

Из классической механики известно, что гамильтонова система с  $N$  степенями свободы, имеющая  $N$  независимых интегралов движения, является *интегрируемой* и допускает точное решение путем введения переменных «действие–угол» [12, 20]. Естественно возникает вопрос: что означает наличие бесконечного числа законов сохранения для системы с бесконечным числом степеней свободы<sup>1</sup>? Оказалось, что в этом случае имеется возможность получения точного аналитического решения уравнения (10.1) при помощи метода, открытого в 1967 г. Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой [112] и получившего название метода обратной задачи рассеяния.

## 10.2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения КдВ

Вернемся к преобразованию (10.2). При помощи подстановки

$$w + \frac{1}{2\varepsilon^2} = \frac{i\psi_x}{\varepsilon\psi}$$

оно приводится к виду

$$\psi_{xx} + (u + \lambda)\psi = 0, \quad (10.6)$$

где  $\lambda \equiv 1/4\varepsilon^2$ . Уравнение (10.6) аналогично стационарному квантовомеханическому уравнению Шрёдингера с потенциалом  $V = -u(x, t)$  и энергией  $\lambda$ , причем время  $t$  входит в него просто как параметр. Используя идеи и математический аппарат квантовой механики, авторы [112] разработали метод точного решения уравнения КдВ, названный ими *обратным преобразованием рассеяния* (inverse scattering transform). В отечественной литературе утвердился термин «метод обратной задачи рассеяния». Аналогия с

<sup>1</sup>Интерпретация уравнения КдВ как полностью интегрируемой бесконечномерной гамильтоновой системы принадлежит В.Е. Захарову и Л.Д. Фаддееву [111]. Подробнее о гамильтоновой структуре интегрируемых нелинейных волновых уравнений см. [20].

квантовой механикой является чисто формальной, носит математический, а не физический характер. Последующие обобщения метода обратной задачи на широкий класс нелинейных волновых уравнений оказались свободными от квантовомеханической интерпретации. Тем не менее, именно эта аналогия позволила авторам [112] преодолеть существенные математические трудности, встретившиеся на их пути.

Итак, уравнение (10.6) представляет задачу на собственные значения для оператора  $d^2/dx^2 + u(x)$ , причем ее нетривиальное решение  $\psi(x)$  называется *собственной функцией*, а соответствующее  $\lambda$  — *собственным значением* оператора. Подобные задачи играют большую роль в квантовой механике, так как собственные значения интерпретируются как значения, которые может принимать физическая величина [113]. Совокупность всех возможных собственных значений называется спектром оператора.

Важно отметить, что оператор Шрёдингера является *эрмитовым*. Напомним, что оператор  $\hat{L}$  называется эрмитовым или самосопряженным, если для любых двух квадратично интегрируемых функций  $\psi_{1,2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\psi_1^*(\hat{L}\psi_2) - \psi_2(\hat{L}^*\psi_1^*)] dx = 0,$$

Знак «\*» здесь и далее обозначает комплексное сопряжение. Спектр собственных значений эрмитова оператора является чисто вещественным.

С точки зрения квантовой механики функция  $\psi(x)$  в уравнении (10.6) представляет собой волновую функцию частицы, движущейся в силовом поле с потенциалом  $V = -u(x)$ , или, как говорят, рассеивающейся на потенциале  $V$ . Далее ограничимся рассмотрением случая, когда  $u(x)$  достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности. Более строго, необходимо выполнение условия (см., например, [16])

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)|u(x)| dx < \infty.$$

В этом случае спектр отрицательных собственных значений будет дискретным, а соответствующие собственные функции на бесконечности также обращаются в нуль. Такие состояния называются *связанными*, поскольку частица локализована в потенциальной яме  $V(x)$ . Спектр положительных собственных значений непрерывен и соответствует инфинитному движению [113].

Принципиальный интерес представляет вопрос о том, каким образом зависят от  $t$  функции  $\psi$  и  $\lambda$ , если функция  $u(x, t)$  эволюционирует согласно уравнению КдВ (10.1). Выразив из уравнения (10.6)  $u$  через  $\psi$  и  $\lambda$  и подставив полученное в уравнение (10.1), находим

$$\lambda_t \psi^2 + (\psi Q_x - \psi_x Q)_x = 0, \quad (10.7)$$

где  $Q = \psi_t + \psi_{xxx} - 3(\lambda - u)\psi_x$ . Рассмотрим вначале некоторое дискретное собственное значение  $\lambda_n$  и соответствующую ему собственную функцию  $\psi_n(x, t)$ , на которую наложим условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx = 1. \quad (10.8)$$

Тогда из уравнения (10.7) следует важный результат

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = 0, \quad (10.9)$$

т.е. *дискретные собственные значения являются интегралами движения*. Как будет показано далее, каждому дискретному собственному значению соответствует один солитон в решении уравнения (10.1). Поэтому соотношение (10.9) выражает свойство устойчивости солитонов, их неуничтожимость при любых взаимодействиях.

Уравнение (10.7) после двукратного интегрирования принимает вид

$$(\psi_n)_t + (\psi_n)_{xxx} - 3(\lambda_n - u)(\psi_n)_x = A_n \psi_n + B_n \psi_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\psi_n^2}, \quad (10.10)$$

где  $A_n, B_n$  — константы интегрирования. В силу того, что  $|\psi_n|$  стремится к нулю на бесконечности, необходимо положить  $B_n = 0$ . Выберем  $\psi_n$  таким образом, чтобы  $\psi_n \sim \exp(\kappa_n x)$ , при  $x \rightarrow -\infty$ , где введено обозначение  $\kappa_n^2 = -\lambda_n$ . Отсюда следует, что  $A_n = 4\kappa_n^3$ . Запишем  $\psi_n$  при  $x \rightarrow \infty$  в виде

$$\psi_n \sim c_n(t) e^{-\kappa_n x}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (10.10) дает  $(c_n)_t = 8\kappa_n^3 c_n$ , откуда

$$c_n(t) = c_n(0) e^{8\kappa_n^3 t}. \quad (10.11)$$

Теперь рассмотрим собственные значения непрерывного спектра  $\lambda = k^2 > 0$ . Решение уравнения Шрёдингера (10.6) при  $|x| \rightarrow \infty$  представляет собой линейную комбинацию экспонент  $\exp(\pm ikx)$ . Наложим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \psi &\sim e^{-ikx} + R(k, t) e^{ikx}, & x \rightarrow \infty, \\ \psi &\sim T(k, t) e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Соотношения (10.12) означают, что  $\psi$  выбирается в виде гармонической волны, набегающей на потенциал  $V = -u(x)$  из  $x = \infty$ . Часть волны проходит сквозь потенциал с коэффициентом прохождения  $T$ , часть отражается с коэффициентом отражения  $R$ , причем имеет место соотношение

$$|R|^2 + |T|^2 = 1.$$

Поскольку  $\lambda$  принадлежит непрерывному спектру, можно по-прежнему положить  $\lambda_t = 0$  и получить аналог уравнения (10.10). Подставив в него выражения (10.12), найдем, что  $A = 4ik^3$ , а  $R$  и  $T$  подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = 8ik^3 R.$$

Следовательно, коэффициент прохождения является интегралом движения, а коэффициент отражения изменяется во времени как

$$R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3 t}. \quad (10.13)$$

Непрерывный спектр соответствует несолитонной части решения, представляющей собой слабонелинейные возмущения, называемые иногда *осциллирующими хвостами*. Величину  $|R(k)|$  можно интерпретировать как амплитуду группы волн, связанную с волновым числом  $k$ .

Таким образом, можно предложить следующую схему построения решения уравнения (10.1) с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Вначале решается задача на собственные значения для уравнения (10.6) с потенциалом  $u_0(x)$  и определяется совокупность величин, которая в квантовой механике называется *данными рассеяния*

$$S = \{ \lambda_n, c_n, n = 1, \dots, N; R(k), k^2 > 0 \}.$$

Затем по формулам (10.11), (10.13) находятся  $c_n(t)$ ,  $R(k, t)$  в произвольный момент времени  $t$ . Остается восстановить потенциал уравнения Шрёдингера по данным рассеяния  $S(t)$ , т.е. решить *обратную задачу*. По счастью, в квантовой механике решение было найдено еще в конце 1950-х годов. Для этой цели служит линейное интегральное уравнение

$$K(x, y; t) + B(x + y; t) + \int_x^\infty B(y + z)K(x, z; t) dz = 0, \quad (10.14)$$

называемое *уравнением Гельфанда–Левитана–Марченко*. Здесь

$$B(x; t) = \sum_{n=1}^N c_n(t)e^{-\kappa_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t)e^{ikx} dk, \quad (10.15)$$

причем  $t$  выступает просто как параметр. Из уравнения (10.14) находится функция  $K(x, y; t)$ , по которой восстанавливается потенциал

$$u(x, t) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x; t). \quad (10.16)$$

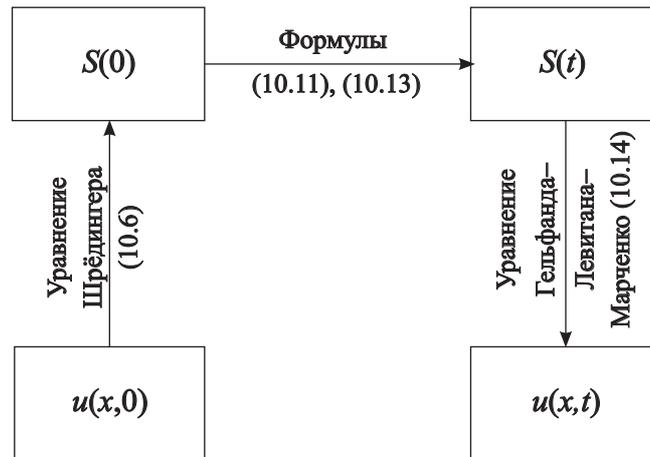


Рис. 10.1. Схема решения методом обратной задачи рассеяния

Наглядное представление описанной выше процедуры дает схема, представленная на рис. 10.1, которая напоминает решение линейных волновых уравнений при помощи преобразования Фурье. В действительности между этими методами существует глубокая аналогия, и можно строго показать, что уравнения метода обратной задачи в линейном пределе переходят в уравнения метода Фурье [17, 18].

Разумеется, не всегда возможно найти решение в явном виде. Однако это удастся сделать для ряда важных частных случаев, например, для *многосолитонных решений*, которым посвящен следующий параграф.

### 10.3. Многосолитонные решения

Рассмотрим задачу с начальным условием

$$u(x, 0) = \frac{a}{\operatorname{ch}^2(x/\Delta)}. \quad (10.17)$$

Решение задачи на собственные значения для уравнения (10.6) с потенциалом (10.17) приводится в литературе по квантовой механике (см., например, [113]). Уровни энергии дискретного спектра даются формулой

$$\lambda_n = -\frac{(s-n)^2}{\Delta^2}, \quad n < s,$$

где  $s = (-1 + \sqrt{1 + 4a\Delta^2})/2$ . Отсюда следует, что при  $a\Delta^2 = 2$  (именно это соотношение соответствует солитону уравнения (10.1))  $s = 1$ ,  $n = 0$  и имеется единственное собственное значение  $\lambda_0 = -1/\Delta^2$ .

Наиболее важным в этом случае является то, что  $R(k, 0) \equiv 0$ , то есть потенциал (10.17) является *безотражательным*. Таким образом, соотношение (10.15) принимает вид

$$B(x; t) = c_0 e^{8\kappa_0^3 t - \kappa_0 x},$$

где  $\kappa_0 = \sqrt{-\lambda_0} = 1/\Delta$ ,  $a = 2\kappa_0^2$ . Подставляя  $B(x; t)$  в уравнение (10.14), получаем

$$K(x, y; t) + c_0 e^{8\kappa_0^3 t - \kappa_0(x+y)} + c_0 e^{8\kappa_0^3 t - \kappa_0 y} \int_x^\infty K(x, z; t) e^{-\kappa_0 z} dz = 0.$$

Это уравнение решается при помощи разделения переменных. Полагая

$$K(x, y; t) = K_0(x; t) e^{-\kappa_0 y},$$

приводим его к виду

$$K_0(x; t) + c_0 e^{8\kappa_0^3 t - \kappa_0 x} + c_0 e^{8\kappa_0^3 t} K_0(x; t) \int_x^\infty e^{-2\kappa_0 z} dz = 0,$$

откуда без труда находим решение

$$K(x, x; t) = -\frac{2\kappa_0}{1 + \frac{2\kappa_0}{c_0} \exp(2\kappa_0 x - 8\kappa_0^3 t)}.$$

Тогда формула (10.16) дает

$$u(x, t) = \frac{2\kappa_0^2}{\operatorname{ch}^2(\kappa_0 x - 4\kappa_0^3 t - \delta_0)},$$

где введено обозначение  $c_0/2\kappa_0 = \exp(2\delta_0)$ . Таким образом, решение представляет собой солитон с правильными соотношениями между скоростью, шириной и амплитудой.

Теперь рассмотрим общий случай чисто дискретного спектра с  $N$  собственными значениями. Решение теперь будет описывать  $N$  взаимодействующих солитонов. Из уравнения (10.15) следует, что

$$B(x; t) = \sum_{n=1}^N c_n(t) e^{-\kappa_n x},$$

где зависимость коэффициентов  $c_n$  от времени определяется формулой (10.11). Уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко принимает вид

$$K(x, y; t) + \sum_{n=1}^N c_n(t) e^{-\kappa_n(x+y)} + \sum_{n=1}^N \left( c_n(t) e^{-\kappa_n y} \int_x^\infty K(x, z; t) e^{-\kappa_n z} dz \right) = 0.$$

Полагая  $K(x, y; t) = \sum_n K_n(x; t) \exp(-\kappa_n y)$ , приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$K_n(x; t) + c_n(t) \sum_{m=1}^N \left( \frac{\exp[-(\kappa_n + \kappa_m)x]}{\kappa_n + \kappa_m} K_m(x; t) \right) = -c_n(t) e^{-\kappa_n x}. \quad (10.18)$$

Перепишем ее в виде

$$[D]\mathbf{K} = \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{K}$  — вектор с компонентами  $K_1, K_2, \dots, K_N$ ,  $[D]$  — матрица размера  $N \times N$ , элементы которой определяются выражением

$$D_{nm} = \delta_{nm} + c_n(t) \frac{\exp[-(\kappa_n + \kappa_m)x]}{\kappa_n + \kappa_m}, \quad (10.19)$$

$\delta_{nm}$  — символ Кронекера, а  $\mathbf{P}$  — вектор, состоящий из правых частей уравнений (10.18). Решение этой системы имеет вид

$$K_n(x; t) = \frac{1}{D} \det[D^{(n)}],$$

где  $D = \det[D]$ , а  $[D^{(n)}]$  — матрица, полученная заменой  $n$ -го столбца матрицы  $[D]$  на вектор  $\mathbf{P}$ . Отсюда находим, что

$$K(x, x; t) = \frac{1}{D} \sum_{n=1}^N \left( \det[D^{(n)}] e^{-\kappa_n x} \right) = \frac{1}{D} \frac{dD}{dx}.$$

Итак, окончательный вид многосолитонного решения таков:

$$u(x, t) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln D. \quad (10.20)$$

В частности, для взаимодействия двух солитонов имеем

$$D = 1 + e^{-2\theta_1} + e^{-2\theta_2} + e^{-2(\theta_1 + \theta_2 + \delta_{12})}, \quad (10.21)$$

где  $\theta_i = \kappa_i x - 4\kappa_i^3 t - \delta_i$ ,  $\exp(2\delta_i) = c_i(0)/2\kappa_i$  для  $i = 1, 2$ ;  $\exp(-2\delta_{12}) = \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right)^2$ .

Проанализируем это выражение подробнее. Пусть  $\kappa_1 > \kappa_2$ . Рассмотрим на плоскости  $(x, t)$  область, в которой  $\theta_1 \approx 0$ , т.е.

$$x \approx 4\kappa_1^2 t + \frac{\delta_1}{\kappa_1}. \quad (10.22)$$

Тогда нетрудно подсчитать, что  $\theta_2 \approx 4\kappa_2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)t + \kappa_2\delta_1/\kappa_1 - \delta_2$ . При  $t \rightarrow \infty$  видно, что  $\exp(-\theta_2)$  стремится к нулю, следовательно, третий и четвертый члены в выражении (10.21) малы и

$$D \approx 1 + e^{-2\theta_1}.$$

Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$  вдоль линии (10.22) имеем

$$u(x, t) \approx \frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2 \theta_1},$$

т.е. одиночный солитон.

С другой стороны, при  $t \rightarrow -\infty$ , когда  $\exp(-\theta_2)$  велико, в уравнении (10.21) доминируют третий и четвертый члены:

$$D \approx e^{-2\theta_2} + e^{-2(\theta_1 + \theta_2 + \delta_{12})}.$$

Подставляя это выражение в формулу (10.20), после несложных вычислений находим

$$u(x, t) \approx \frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_1 + \delta_{12})}.$$

Вновь получено решение в виде одиночного солитона, траектория которого, однако, сдвинута вдоль оси  $x$  на величину  $-\delta_{12}/\kappa_1$ . Таким образом, солитон с большей амплитудой приобрел сдвиг вперед по сравнению с тем, как бы он двигался в отсутствие взаимодействия.

Аналогично, в области, где

$$x \approx 4\kappa_2^2 t + \frac{\delta_2}{\kappa_2},$$

т.е.  $\theta_2 \approx 0$ , имеем

$$u(x, t) \approx \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2 \theta_2}, \quad t \rightarrow -\infty,$$

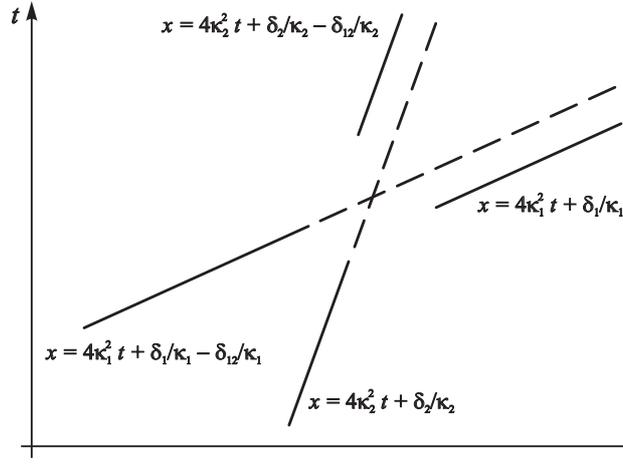
$$u(x, t) \approx \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_2 + \delta_{12})}, \quad t \rightarrow \infty,$$

откуда видно, что меньший солитон в результате взаимодействия сдвигается назад на величину  $\delta_{12}/\kappa_2$ .

Итак, решение описывает столкновение двух солитонов, которые меняются местами в процессе взаимодействия, полностью восстанавливая свою форму и скорость. При  $t \rightarrow \pm\infty$  солитоны находятся далеко друг от друга и  $u(x, t)$  можно представить в виде суперпозиции двух невзаимодействующих солитонов. Единственным свидетельством столкновения остается небольшой *фазовый сдвиг*. Траектории солитонов на плоскости  $(x, t)$  приведены на рис. 10.2. Двухсолитонное взаимодействие уже обсуждалось в § 7.4, где были приведены данные компьютерного эксперимента. Теперь эти результаты получили строгое обоснование.

В заключение приведем полезную формулу, позволяющую оценить число образующихся солитонов в случае, когда начальное возмущение  $u_0(x)$  велико в том смысле, что

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u_0(x)} dx \gg 1.$$

Рис. 10.2. Траектории двух взаимодействующих солитонов на плоскости  $(x, t)$ 

Для уравнения Шрёдингера (10.6) это соответствует ситуации, когда существует большое число близко расположенных дискретных энергетических уровней, т.е. свойства квантовой системы близки к классическим. Тогда можно воспользоваться *правилом квантования Бора–Зоммерфельда* [113], которое в данных обозначениях имеет вид

$$\oint p dx = \oint \sqrt{\lambda_n + u_0(x)} dx = 2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Максимальное значение  $n = N$  соответствует  $\lambda_N \approx 0$ . Таким образом, мы получаем простую оценку числа образующихся солитонов [114]

$$N \sim \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u_0(x)} dx = \frac{S}{\pi}.$$

#### 10.4. Обратная задача рассеяния в формулировке Лакса

Существенное обобщение метода обратной задачи было сделано Лаксом [115]. Прежде чем перейти к изложению его результатов, заметим, что нам удалось проинтегрировать уравнение КдВ, представив его в виде условия совместности двух линейных уравнений

$$\widehat{L}\psi = \lambda\psi, \quad (10.23)$$

$$\psi_t = \widehat{A}\psi, \quad (10.24)$$

где линейные операторы  $\widehat{L}$  и  $\widehat{A}$  имеют вид

$$\widehat{L} = -\left(\widehat{D}^2 + u(x, t)\right), \quad (10.25)$$

$$\hat{A} = -4\hat{D}^3 - 3u_x - 6u\hat{D} + C, \quad (10.26)$$

$\hat{D} \equiv \partial/\partial x$ ,  $C = \text{const}$ . Продифференцируем уравнение (10.23) по  $t$ . Поскольку собственные значения оператора  $\hat{L}$  не зависят от  $t$ , получим

$$\hat{L}_t\psi + \hat{L}\psi_t = \lambda\psi_t.$$

С учетом уравнения (10.24) это уравнение принимает вид

$$\hat{L}_t\psi + \hat{L}\hat{A}\psi = \lambda\hat{A}\psi = \hat{A}\lambda\psi = \hat{A}\hat{L}\psi.$$

Итак, имеем уравнение

$$\hat{L}_t = [\hat{A}, \hat{L}], \quad (10.27)$$

где  $[\hat{A}, \hat{L}] = \hat{A}\hat{L} - \hat{L}\hat{A}$  — коммутатор операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{L}$ . Уравнение (10.27) следует рассматривать как оператор, действующий на функцию  $\psi$ . Оно называется *уравнением Лакса*, а  $\hat{L}$  и  $\hat{A}$  — *операторной парой Лакса*.

Представляет интерес следующий вопрос: существуют ли другие операторы  $\hat{A}$ , кроме (10.26), сохраняющие спектр оператора  $\hat{L}$ ? Для каждого такого оператора уравнение (10.27) приводило бы к уравнению в частных производных, интегрируемому методом обратной задачи. Лаксу удалось отыскать целое семейство подобных операторов

$$\hat{A}_n = -c_n \left( \hat{D}^{2n+1} + \sum_{j=1}^n (b_j \hat{D}^{2j-1} + \hat{D}^{2j-1} b_j) \right) + C, \quad (10.28)$$

где  $b_j$  — функционалы от  $u$  и ее производных по  $x$ , которые выбираются так, чтобы уравнение Лакса (10.27) не содержало оператора  $\hat{D}$ . Постоянная интегрирования  $C$  (которая, в принципе, может зависеть от  $t$ ), очевидно, коммутирует с оператором  $\hat{L}$  и не дает вклада в уравнение (10.27). Она находится из условия нормировки собственных функций (см. § 10.2). Далее будем полагать  $C = 0$ .

В простейшем случае  $n = 0$  из уравнения (10.28) получаем

$$\hat{A} = \hat{D}$$

и уравнение (10.27) дает линейное уравнение переноса

$$u_t + u_x = 0.$$

Выбор  $n = 1$ ,  $b_1 = 3u/4$ ,  $c_1 = 4$  приводит к уравнению КдВ (10.1). При  $n = 2$  можно получить следующее уравнение:

$$u_t + \frac{1}{32} (u_{xxxx} + 5u_x^2 + 10uu_{xx} + 10u^3)_x = 0.$$

Выбирая операторы (10.28) со всё более высокими номерами  $n$ , будем получать эволюционные уравнения, содержащие производные по  $x$  и нелинейности все более высоких порядков. Таким образом, с задачей на собственные значения (10.23) ассоциируется целое семейство интегрируемых уравнений, называемое иерархией уравнения КдВ.

Можно пойти и на дальнейшие обобщения. Не обязательно ограничиваться оператором  $\hat{L}$  вида (10.25). Любое уравнение, представимое в виде (10.27), т.е. в

виде условия совместности уравнений (10.23) (задача на собственные значения) и (10.24), которое определяет эволюцию собственных функций во времени, будет полностью интегрируемым. Исходная аналогия с квантовой механикой, которая играла важную роль в работе Гарднера, Грина, Крускала и Миуры, таким образом, явно отходит на второй план.

### 10.5. Дальнейшее обобщение метода обратной задачи

Несмотря на результаты Лакса, полная интегрируемость уравнения КдВ некоторое время воспринималась как случайность, своего рода математический курьез. Положение изменилось после появления работы В.Е. Захарова и А.Б. Шабата [116]. Заметим, что задачу на собственные значения (10.23) для оператора Шрёдингера можно записать в матричной форме

$$\hat{L}\mathbf{V} = ik\mathbf{V}, \quad (10.29)$$

где  $\mathbf{V}$  — вектор с компонентами  $(v_1, v_2)$ ,  $\lambda = k^2$ ,

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\hat{D}, & u(x, t) \\ -1, & \hat{D} \end{pmatrix}.$$

Захаров и Шабат рассмотрели задачу на собственные значения для оператора

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\hat{D}, & u(x, t) \\ \pm u^*(x, t), & \hat{D} \end{pmatrix},$$

где  $u$  — комплексная функция, и нашли оператор  $\hat{A}$ , такой, что уравнением Лакса оказалось нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)

$$iu_t + \frac{1}{2} u_{xx} \pm |u|^2 u = 0.$$

Таким образом, им удалось распространить метод обратной задачи рассеяния на НУШ [116], а затем и на ряд других важных уравнений [117].

Наконец, ключевую роль сыграла работа Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура [118], которые рассмотрели наиболее общий вариант матричного  $(2 \times 2)$  оператора вида

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\hat{D}, & q(x, t) \\ -r(x, t), & \hat{D} \end{pmatrix},$$

где  $q$  и  $r$ , вообще говоря, независимые функции. Следуя этой работе, перепишем (10.29) в несколько иной форме:

$$\mathbf{V}_x = P\mathbf{V}, \quad (10.30)$$

где  $P$  — квадратная матрица вида

$$P = \begin{pmatrix} -ik, & q(x, t) \\ r(x, t), & ik \end{pmatrix}.$$

Пусть вектор  $\mathbf{V}$  эволюционирует во времени согласно уравнению

$$\mathbf{V}_t = Q\mathbf{V}, \quad (10.31)$$

$$Q = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & -a \end{pmatrix}, \quad (10.32)$$

где  $a, b, c$  — функционалы от  $q, r$  и их производных по  $x$ . Записывая условие совместности уравнений (10.30) и (10.31), т.е. условие равенства смешанных производных  $\mathbf{V}_{xt} = \mathbf{V}_{tx}$ , и требуя, чтобы спектральный параметр  $k$  не зависел от времени, получаем

$$P_t - Q_x + [P, Q] = 0. \quad (10.33)$$

Уравнение (10.33) должно приводить к полностью интегрируемым эволюционным уравнениям относительно функций  $q$  и  $r$ . Разумеется, нетрудно переписать уравнения (10.30) и (10.33) в виде задачи на собственные значения и уравнения Лакса, соответственно.

Записывая матричное уравнение (10.33) покомпонентно, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} a_x - qc + rb &= 0, \\ q_t - 2aq - b_x - 2ikb &= 0, \\ r_t + 2ar - c_x + 2ikc &= 0. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Будем искать решения этой системы в виде рядов по степеням параметра  $k$ :  $a = \sum_{i=0}^n k^i a_i$  и т.д. В простейшем случае  $n = 1$ , приравняв в уравнениях (10.34) члены при одинаковых степенях  $k$ , найдем

$$\begin{aligned} b_1 = c_1 &= 0, \quad b_0 = ia_1q, \quad c_0 = ia_1r, \\ (a_1)_x &= (a_0)_x = 0, \\ q_t - 2a_0q - ia_1q_x &= 0, \\ r_t + 2a_0r - ia_1r_x &= 0. \end{aligned}$$

Выбирая  $a_0 = 0, a_1 = i$ , приходим к линейному уравнению переноса

$$q_t + q_x = 0.$$

При этом матрицу  $Q$  можно представить в виде

$$Q^{(n=1)} = ik \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0, & q \\ r, & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.35)$$

К нетривиальному результату приводит выбор  $n = 2$ . В этом случае из уравнений (10.34) получаем

$$\begin{aligned} b_2 = c_2 &= 0, \quad b_1 = ia_2q, \quad c_1 = ia_2r, \\ b_0 &= ia_1q - \frac{1}{2}a_2q_x, \quad c_0 = ia_1r + \frac{1}{2}a_2r_x, \\ (a_2)_x &= (a_1)_x = 0, \quad (a_0)_x - \frac{a_2}{2}(qr)_x = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_t - 2a_0q - ia_1q_x + \frac{1}{2}a_2q_{xx} &= 0, \\ r_t + 2a_0r - ia_1r_x - \frac{1}{2}a_2r_{xx} &= 0. \end{aligned}$$

Выбор  $a_0 = iqr/2$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = i$  дает

$$\begin{aligned} q_t - iq^2r + \frac{i}{2}q_{xx} &= 0, \\ r_t - iqr^2 - \frac{i}{2}r_{xx} &= 0, \end{aligned} \quad (10.36)$$

$$Q^{(n=2)} = ik^2 \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0, & q \\ r, & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -qr, & q_x \\ -r_x, & qr \end{pmatrix}. \quad (10.37)$$

Если положить  $r = \pm q^*$ , уравнения (10.36) превращаются в нелинейное уравнение Шрёдингера

$$iq_t \pm q^2q^* - \frac{1}{2}q_{xx} = 0.$$

Рассмотрим случай  $n = 3$ . По аналогии с выражениями (10.35), (10.37) можно сразу записать

$$Q^{(n=3)} = ik^3 \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} - k^2 \begin{pmatrix} 0, & q \\ r, & 0 \end{pmatrix} - \frac{ik}{2} \begin{pmatrix} -qr, & q_x \\ -r_x, & qr \end{pmatrix} + \tilde{Q}.$$

Тогда из уравнений (10.34) находим, что

$$b_0 = \frac{1}{4}(q_{xx} - 2q^2r), \quad c_0 = \frac{1}{4}(r_{xx} - 2qr^2)$$

$$a_0 = \frac{1}{4}(r_xq - q_xr),$$

$$q_t + \frac{1}{4}(6qrq_x - q_{xxx}) = 0,$$

$$r_t + \frac{1}{4}(6qrr_x - r_{xxx}) = 0.$$

Выбор  $r = -1$ , очевидно, приводит к уравнению КдВ

$$q_t = \frac{1}{4}(6qq_x + q_{xxx}),$$

а выбор  $r = \pm q$  — к уравнению мКдВ

$$q_t = \frac{1}{4}(q_{xxx} \mp 6q^2q_x).$$

Наконец, необязательно ограничиваться положительными степенями  $k$ . Выбирая

$$Q = \begin{pmatrix} a_{-1}, & b_{-1} \\ c_{-1}, & -a_{-1} \end{pmatrix} \frac{1}{k},$$

получаем следующие уравнения:

$$(a_{-1})_x = qc_{-1} - rb_{-1}, \quad 2qa_{-1} = -(b_{-1})_x, \quad 2ra_{-1} = (c_{-1})_x,$$

$$q_t = 2ib_{-1}, \quad r_t = -2ic_{-1}.$$

Подстановка  $q = -r = u_x/2$  дает

$$b_{-1} = c_{-1} = -\frac{i u_{xt}}{4},$$

$$(c_{-1})_x = -a_{-1} u_x, \quad (10.38)$$

$$(a_{-1})_x = c_{-1} u_x, \quad (10.39)$$

Из уравнений (10.38), (10.39) следует, что

$$(c_{-1}^2 + a_{-1}^2)_x = 0.$$

Это условие удовлетворяется, если выбрать  $c_{-1} = C \sin u$ ,  $a_{-1} = C \cos u$ , где  $C$  — константа. Полагая  $C = -i/4$ , получаем уравнение Син-Гордона

$$u_{xt} = \sin u.$$

Таким образом, получаем бесконечную последовательность (иерархию) интегрируемых уравнений, в которую входят сразу несколько эталонных уравнений. Другой вид матрицы  $P$ , соответственно, приведет к другой иерархии. Например, уравнение Буссинеска и уравнения трехволнового взаимодействия интегрируются при помощи матричной задачи рассеяния  $(3 \times 3)$  [119].

Завершая этот параграф, дадим определение полностью интегрируемого уравнения. Под этим термином будем подразумевать уравнение, которое можно представить в виде (10.33), т.е. в виде условия совместности системы линейных уравнений (10.30), (10.31). Эквивалентное определение можно дать, основываясь на уравнении Лакса. Можно также дать строгое определение солитона, как решения полностью интегрируемого уравнения, которому соответствует спектр, состоящий из единственного дискретного собственного значения. Заметим, что существование бесконечного набора законов сохранения, обсуждавшееся в § 10.1, не является синонимом полной интегрируемости. Более того, полностью интегрируемые системы не обязательно являются гамильтоновыми. Наиболее интересным примером такого рода являются уравнения самоиндуцированной прозрачности, которые будут обсуждаться в лекции 12.

## 10.6. Метод Хироты и многосолитонные решения

### 10.6.1. Уравнение КдВ

Кроме метода обратной задачи рассеяния существует ряд других способов получения точных решений интегрируемых уравнений. В частности, оригинальный метод был предложен Р. Хиротой [120]. Продемонстрируем его применение на примере уравнения КдВ. Хирота использовал преобразование

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x, t), \quad (10.40)$$

напоминающее преобразование Коула–Хопфа для уравнения Бюргера, которое приводит уравнение КдВ к *билинейной форме*

$$f f_{xt} - f_x f_t + 3f_{xx}^2 - 4f_x f_{xxx} + f f_{xxxx} = 0. \quad (10.41)$$

Уравнение (10.41) выглядит гораздо сложнее исходного уравнения (10.1), однако ему можно придать более изящную форму. Введем оператор  $\widehat{D}_x$ , действующий на упорядоченную пару функций  $f(x), g(x)$

$$\widehat{D}_x f \cdot g \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial (f(x + \varepsilon)g(x - \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \right] = f_x g - f g_x.$$

Аналогично можно ввести оператор  $\widehat{D}_t$  и операторы более высокого порядка. В этих обозначениях уравнение (10.41) принимает вид

$$\widehat{P} f \cdot f \equiv \left( \widehat{D}_x \widehat{D}_t + \widehat{D}_x^4 \right) f \cdot f = 0. \quad (10.42)$$

Отметим некоторые важные свойства операторов Хироты. Прежде всего рассмотрим, как они действуют на экспоненты. Очевидно, что

$$\widehat{D}_x^n e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} = (k_1 - k_2)^n e^{(k_1 + k_2)x},$$

следовательно,

$$\widehat{P} e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} = P(k_1 - k_2; \omega_1 - \omega_2) e^{\theta_1 + \theta_2},$$

где  $\theta_i = \omega_i t + k_i x$ ,  $P(k; \omega) = k\omega + k^4$ . Более того, аналогичное соотношение справедливо, вообще говоря, для любого оператора вида  $\widehat{P} = P(\widehat{D}_x; \widehat{D}_t)$ , где  $P(\widehat{D}_x; \widehat{D}_t)$  — некий полином. Заметим также, что  $P(0; 0) = 0$ ,  $P(k; \omega) = P(-k; -\omega)$ . Таким образом,  $\widehat{P} f \cdot g = \widehat{P} g \cdot f$ .

Будем искать решение в виде ряда

$$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots,$$

где  $\varepsilon$  — произвольный параметр. Подставляя это разложение в уравнение (10.42) и приравнивая к нулю члены при разных степенях  $\varepsilon$ , получаем

$$\widehat{L} f_1 = 0, \quad (10.43)$$

$$\widehat{L} f_2 = -\frac{1}{2} \widehat{P} f_1 \cdot f_1, \quad (10.44)$$

$$\widehat{L} f_3 = -\widehat{P} f_1 \cdot f_2, \quad (10.45)$$

...

где  $\widehat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ . Решение уравнения (10.43) выберем в виде  $f_1 = \exp(\theta)$ ,  $\theta = \omega t + kx$ , причем  $\omega = -k^3$ . Тогда

$$\widehat{P} e^\theta \cdot e^\theta = P(0; 0) e^{2\theta} = 0.$$

Таким образом, правая часть уравнения (10.44) равна нулю и, следовательно, можно положить все  $f_n = 0$  при  $n > 1$ . В результате получим решение уравнения (10.42) в виде

$$f = 1 + \exp(kx - k^3 t + \varphi),$$

где  $\varphi = \ln \varepsilon$ . Без ограничения общности можно положить эту величину равной нулю. Пользуясь соотношением (10.40), нетрудно показать, что оно соответствует односолитонному решению уравнения КдВ. Следует еще раз отметить сходство с преобразованием Коула–Хопфа, которое придает аналогичную форму решению уравнения Бюргера в виде стационарной ударной волны (§ 5.6).

Выберем теперь  $f_1$  в виде суммы двух экспонент

$$f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2},$$

где  $\theta_i = \omega_i t + k_i x$ ,  $\omega_i = -k_i^3$ . Подставляя это выражение в уравнение (10.44), получаем

$$\widehat{L}f_2 = -\frac{1}{2} \left( \widehat{P}e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_1} + 2\widehat{P}e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} + \widehat{P}e^{\theta_2} \cdot e^{\theta_2} \right) = -P(k_1 - k_2; \omega_1 - \omega_2) e^{\theta_1 + \theta_2}.$$

Отсюда легко находится решение  $f_2 = A \exp(\theta_1 + \theta_2)$ , где

$$A = -\frac{P(k_1 - k_2; \omega_1 - \omega_2)}{P(k_1 + k_2; \omega_1 + \omega_2)} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (10.46)$$

Теперь уравнение (10.45) принимает вид

$$\begin{aligned} \widehat{L}f_3 &= -A \left( \widehat{P}e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_1 + \theta_2} + \widehat{P}e^{\theta_2} \cdot e^{\theta_1 + \theta_2} \right) = \\ &= -A \left( P(k_2; \omega_2) e^{2\theta_1 + \theta_2} + P(k_1; \omega_1) e^{\theta_1 + 2\theta_2} \right). \end{aligned}$$

Но  $P(k_i; \omega_i) = 0$  в силу выбора  $\omega_i = -k_i^3$ , так что правая часть этого уравнения обращается в нуль. Следовательно, начиная с  $n = 3$  можно положить  $f_n = 0$  и получить решение

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A e^{\theta_1 + \theta_2}. \quad (10.47)$$

Нетрудно убедиться, что оно в точности соответствует двухсолитонному решению (10.21), полученному в § 10.3 методом обратной задачи рассеяния. Таким образом, метод Хироты позволяет, в принципе, находить в явном виде точные  $N$ -солитонные решения, выбирая

$$f_1 = \sum_{i=1}^N \exp(k_i x - k_i^3 t),$$

хотя по мере увеличения  $N$  выкладки становятся всё более громоздкими.

### 10.6.2. Модифицированное уравнение КдВ

При помощи метода Хироты можно исследовать и многие другие интегрируемые уравнения (см., например, [16, 121]). В частности, модифицированное уравнение КдВ

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

заменой  $u = g/f$  приводится к системе билинейных уравнений

$$g^2 = ff_{xx} - f_x^2 = \frac{1}{2} \widehat{D}_x^2 f \cdot f, \quad (10.48)$$

$$\begin{aligned} g_t f - g f_t + f g_{xxx} - 3f_x g_{xx} + 3f_{xx} g_x - g f_{xxx} = \\ = \left( \widehat{D}_t + \widehat{D}_x^3 \right) g \cdot f = 0. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Подставляя в уравнения (10.48), (10.49)  $g$  и  $f$  в виде

$$\begin{aligned} g &= \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \dots \\ f &= 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + \dots, \end{aligned}$$

получаем

$$g_1^2 = f_{2xx}, \quad (10.50)$$

$$2g_1 g_3 = \frac{1}{2} \widehat{D}_x^2 f_2 \cdot f_2 + f_{4xx}, \quad (10.51)$$

$$g_3^2 + 2g_1 g_5 = \widehat{D}_x^2 f_2 \cdot f_4 + f_{6xx}, \quad (10.52)$$

...

$$g_{1t} + g_{1xxx} = 0, \quad (10.53)$$

$$g_{3t} + g_{3xxx} = - \left( \widehat{D}_t + \widehat{D}_x^3 \right) g_1 \cdot f_2, \quad (10.54)$$

$$g_{5t} + g_{5xxx} = - \left( \widehat{D}_t + \widehat{D}_x^3 \right) g_1 \cdot f_4 - \left( \widehat{D}_t + \widehat{D}_x^3 \right) g_3 \cdot f_2, \quad (10.55)$$

...

Выберем решения уравнений (10.50), (10.53) следующим образом:

$$f_2 = e^{2\theta}, \quad g_1 = 2ke^\theta,$$

где  $\theta = kx - k^3 t$ . Тогда нетрудно показать, что уравнения (10.51), (10.54) принимают вид

$$2g_1 g_3 = f_{4xx},$$

$$g_{3t} + g_{3xxx} = 0.$$

Следовательно, можно положить  $g_3, g_5, \dots, f_4, f_6, \dots$  равными нулю и получить односолитонное решение

$$f = 1 + e^{2\theta}, \quad g = 2ke^\theta;$$

$$u = k \operatorname{sech} \theta.$$

Аналогичным образом, выбирая  $g_1 = 2k_1 \exp(\theta_1) + 2k_2 \exp(\theta_2)$ , можно после некоторых вычислений получить двухсолитонное решение:

$$\begin{aligned} g &= 2k_1 e^{\theta_1} + 2k_2 e^{\theta_2} + 2A (k_2 e^{2\theta_1 + \theta_2} + k_1 e^{2\theta_2 + \theta_1}), \\ f &= 1 + e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2} + 2(1 - A)e^{\theta_1 + \theta_2} + A^2 e^{2(\theta_1 + \theta_2)}, \end{aligned} \quad (10.56)$$

где  $A$  по-прежнему определяется формулой (10.46). Анализируя его подобно тому, как это было сделано в § 10.3 для уравнения КдВ, нетрудно показать, что в результате взаимодействия больший солитон приобретает сдвиг вперед на величину  $\ln(A/k_1)$ , а меньший — назад на величину  $\ln(A/k_2)$  (для определенности считаем, что  $k_1 > k_2$ ).

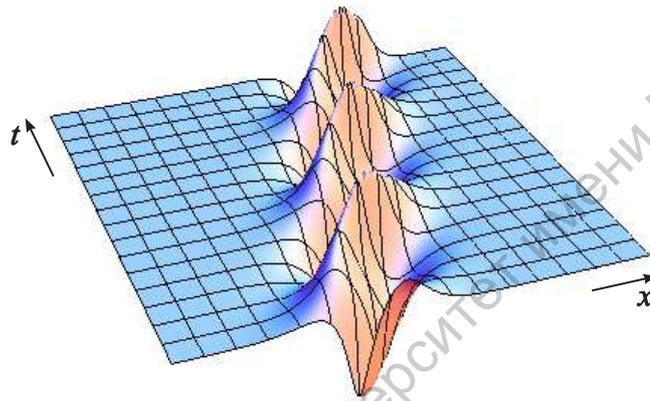


Рис. 10.3. Бризерное решение уравнения мКдВ

Многосолитонные решения уравнения мКдВ более разнообразны, поскольку солитоны могут иметь различную полярность, когда  $k_{1,2}$  имеют разные знаки. В частности, большую роль играют так называемые *бризеры* (от английского to breathe — дышать), которые можно интерпретировать как связанное состояние двух разнополярных солитонов, осциллирующих друг относительно друга. Бризерное решение нетрудно найти, полагая в формулах (10.56), описывающих двухсолитонное взаимодействие,  $k_1$  и  $k_2$  комплексно сопряженными. Дело в том, что для модифицированного уравнения КдВ задача на собственные значения уже не является самосопряженной<sup>2</sup>, поэтому дискретные собственные значения не обязательно вещественны, а могут возникать комплексно сопряженными парами. Это приводит к появлению нового типа солитонов, которого не было у уравнения КдВ. Распространение бризера иллюстрирует рис. 10.3.

**Задача 10.1.** Покажите, что замена (10.40) приводит уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - u_{xx} - 6(uu_x)_x - u_{xxxx} = 0$$

<sup>2</sup>В отличие от задачи на собственные значения для оператора Шрёдингера, § 10.2.

к билинейной форме

$$\left(\widehat{D}_t^2 - \widehat{D}_x^2 - \widehat{D}_x^4\right) f \cdot f = 0.$$

Действуя по схеме, описанной в § 10.6.1, найдите решения, описывающие взаимодействие двух солитонов, в виде (10.47), где  $\theta_i = \omega_i t + k_i x$ ,  $\omega_i = \pm k_i \sqrt{1 + k_i^2}$ , знак «+» соответствует солитону, движущемуся в прямом направлении, «-» — во встречном, а величина, определяющая фазовый сдвиг солитонов при взаимодействии, равна

$$A = \frac{3(k_1 - k_2)^2 + \left(\sqrt{1 + k_1^2} \mp \sqrt{1 + k_2^2}\right)^2}{3(k_1 + k_2)^2 + \left(\sqrt{1 + k_1^2} \mp \sqrt{1 + k_2^2}\right)^2}.$$

В этой формуле верхний знак соответствует попутному столкновению солитонов, нижний — столкновению солитонов, движущихся навстречу друг другу. В длинноволновом пределе, когда  $k_{1,2}^2 \ll 1$ , для попутного столкновения это выражение переходит в (10.46), тогда как для лобового столкновения  $A \rightarrow 1$ .

**Задача 10.2.** Найдите явный вид бризерного решения модифицированного уравнения КдВ, полагая в формулах (10.56)  $k_1, k_2$  комплексно сопряженными.

*Решение:* Пусть  $k_{1,2} = k_r \pm ik_i$ , где  $k_{r,i}$  — вещественные. Тогда нетрудно найти, что

$$\begin{aligned}\theta_{1,2} &= \theta_r \pm i\theta_i, \\ \theta_r &= k_r x - (k_r^3 - 3k_r k_i^2)t + \delta_r, \\ \theta_i &= k_i x - (3k_r^2 k_i - k_i^3)t + \delta_i, \\ A &= -k_i^2/k_r^2,\end{aligned}$$

где  $\delta_{r,i}$  — произвольные константы. Как мы видели выше, величина  $A$  определяет фазовый сдвиг, который приобретают солитоны в результате взаимодействия. При обычном столкновении солитонов  $A > 0$ , так что в результате взаимодействия солитоны как-бы отталкиваются друг от друга: больший приобретает сдвиг вперед, меньший — назад. Для бризера  $A < 0$ , т.е. между солитонами действует сила притяжения, приводящая к возникновению связанного состояния.

Формулы (10.56) после некоторых вычислений дают

$$\begin{aligned}g &= -4k_r e^{\theta_r} \left(1 + \frac{k_i^2}{k_r^2} \exp(2\theta_r)\right) \left(\cos \theta_i \operatorname{th}(\theta_r + \varphi) + \frac{k_i}{k_r} \sin \theta_i\right), \\ f &= \left(1 + \frac{k_i^2}{k_r^2} \exp(2\theta_r)\right)^2 \left(1 + \frac{k_r^2}{k_i^2} \cos^2 \theta_i \operatorname{sech}^2(\theta_r + \varphi)\right),\end{aligned}$$

где  $\varphi = \ln(k_i/k_r)$ . Таким образом, решение имеет вид

$$u = \frac{g}{f} = -2k_r \operatorname{sech}(\theta_r + \varphi) \left[ \frac{\sin \theta_i + (k_r/k_i) \cos \theta_i \operatorname{th}(\theta_r + \varphi)}{1 + (k_r/k_i)^2 \cos^2 \theta_i \operatorname{sech}^2(\theta_r + \varphi)} \right].$$

Оно представляет собой осциллирующий волновой пакет, модулированный огибающей в форме гиперболического секанса (рис. 10.3).

**Задача 10.3.** Покажите, что уравнение Син–Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$$

заменой переменных  $\xi = (x - t)/2$ ,  $\tau = (x + t)/2$ , которая фактически означает переход к интегрированию вдоль характеристик, приводится к виду

$$u_{\xi\tau} = \sin u. \quad (10.57)$$

Полагая  $u = 4 \operatorname{arctg}(g/f)$ , представьте уравнение (10.57) в билинейной форме

$$\begin{aligned} fg_{\xi\tau} - g_{\xi}f_{\tau} - g_{\tau}f_{\xi} + gf_{\xi\tau} &= fg, \\ gg_{\xi\tau} - g_{\xi}g_{\tau} &= ff_{\xi\tau} - f_{\xi}f_{\tau}. \end{aligned}$$

Отыскивая решения полученной системы в виде рядов

$$\begin{aligned} g &= \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \dots \\ f &= 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + \dots, \end{aligned}$$

найдите одно- и двухсолитонные решения. Покажите, что выбор  $g_1 = \exp(\theta)$ , где  $\theta = k\xi + \tau/k$ , приводит к  $f_{2,4,\dots} = 0$ ,  $g_{3,5,\dots} = 0$ , в результате чего получается односолитонное решение  $u = 4 \operatorname{arctg}[\exp(\theta)]$ .

Выбирая  $g_1$  в виде суммы двух экспонент

$$g_1 = \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2),$$

где  $\theta_{1,2} = k_{1,2}\xi + \tau/k_{1,2}$ , найдите двухсолитонное решение

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \frac{\operatorname{sh}[(\theta_1 - \theta_2)/2]}{\operatorname{ch}[(\theta_1 + \theta_2)/2]} \right).$$

**Задача 10.4.** Альтернативная форма метода Хироты для уравнения Син–Гордона была предложена Гиббоном и Эйлбеком (см. [16, гл. 1]). Положите  $u_{\xi}^2 = 2g/f$  и потребуйте, чтобы

$$g^2 = ff_{\xi\xi} - f_{\xi}^2. \quad (10.58)$$

Убедитесь, что при этом

$$u_{\xi}^2 = 4(\ln f)_{\xi\xi}. \quad (10.59)$$

Умножьте уравнение Син–Гордона (10.57) на  $u_{\xi}$ , подставьте туда выражение (10.59) и проинтегрируйте с учетом граничных условий  $u = 0 \pmod{2\pi}$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Покажите, что это приводит к уравнению

$$\cos u = 1 - 2(\ln f)_{\xi\tau}. \quad (10.60)$$

Далее с учетом (10.59) и (10.60) получите из (10.57) второе билинейное уравнение

$$g_{\tau}^2 = f_{\tau}f_{\xi\xi\tau} - f_{\xi\tau}^2 + ff_{\xi\tau} - f_{\xi}f_{\tau}. \quad (10.61)$$

Решая уравнения (10.58) и (10.61) по схеме, описанной в предыдущей задаче, найдите одно- и двухсолитонные решения.

**Задача 10.5.** Заменой переменных  $u = g/f$  приведите нелинейное уравнение Шрёдингера

$$iu_t + u_{xx} + \beta|u|^2u = 0$$

к билинейной форме

$$gg^* = \frac{2}{\beta} (ff_{xx} - f_x^2),$$

$$i(g_t f - g f_t) + g f_{xx} - 2g_x f_x + f g_{xx} = 0,$$

и, действуя по схеме, описанной выше, найдите одно- и двухсолитонные решения.

**Задача 10.6.** Пример интегрируемой дискретной динамической системы представляет цепочка Тоды [84]: цепочка связанных частиц, потенциал взаимодействия между которыми экспоненциально зависит от расстояния. Уравнения движения элементов цепочки имеют вид

$$\dot{u}_n = \exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1}).$$

Введите новые переменные  $v_n$ , такие, что  $u_n = u_{n-1} - v_n$ , причем  $v_n$  и все их производные стремятся к нулю при  $n \rightarrow \pm\infty$ , и покажите, что

$$1 + \ddot{v}_n = \exp(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}).$$

Найдите замену переменных  $v_n = F(f_n)$ , приводящую это уравнение к билинейной форме

$$f_n \ddot{f}_n - \dot{f}_n^2 = f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2.$$

Отыскивая решение в виде

$$f_n = 1 + \varepsilon f_n^{(1)} + \varepsilon^2 f_n^{(2)} + \dots,$$

получите выражения для одно- и двухсолитонных решений.

## 10.7. Преобразования Бэклунда

Еще один способ построения многосолитонных решений интегрируемых уравнений дают преобразования, названные в честь шведского математика А. Бэклунда, который впервые построил подобное преобразование для уравнения Син-Гордона  $u_{\xi\tau} = \sin u$ . Точнее, им были установлены соотношения, связывающие между собой два решения этого уравнения  $u$  и  $U$ :

$$\begin{aligned} \frac{(u+U)_\xi}{2} &= k \sin\left(\frac{u-U}{2}\right), \\ \frac{(u-U)_\tau}{2} &= \frac{1}{k} \sin\left(\frac{u+U}{2}\right), \end{aligned} \tag{10.62}$$

где  $k$  — параметр. Соотношения (10.62) позволяют конструировать новые решения из уже известных. Выберем, например, в качестве  $U$  тривиальное решение  $U = 0$ . Тогда будем иметь следующие уравнения:

$$\frac{u_\xi}{2} = k \sin\left(\frac{u}{2}\right), \quad \frac{u_\tau}{2} = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{u}{2}\right).$$

Интегрирование полученных соотношений приводит к односолитонному решению

$$\begin{aligned} u &= 4 \operatorname{arctg}(\exp \theta), \\ \theta &= k\xi + \frac{1}{k} \tau, \end{aligned} \tag{10.63}$$

что совпадает с найденным в лекции 8. Положительные значения  $k$  соответствуют кинкам, отрицательные — антикинкам.

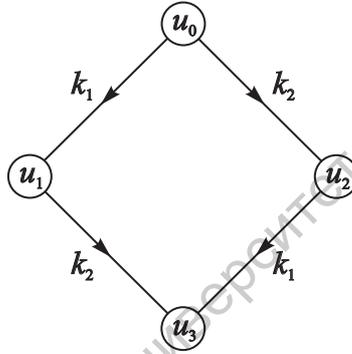


Рис. 10.4. Диаграмма, иллюстрирующая свойство коммутативности преобразований Бэклунда

Теперь найдем двухсолитонное решение, используя свойство *коммутативности* преобразований Бэклунда, которое состоит в следующем. Если выбрать некоторое решение  $u = u_0$ , которое связано соотношениями (10.62) с параметрами  $k_1$  и  $k_2$  с решениями  $u_1$  и  $u_2$  соответственно, то применение к  $u_1$  преобразования с  $k = k_2$ , а к  $u_2$  преобразования с  $k = k_1$  приводит к одному и тому же результату  $u_3$  (рис. 10.4). Запишем преобразования (10.62) для пар  $(u_0, u_1)$  и  $(u_2, u_3)$  в виде

$$\frac{(u_0 + u_1)_\xi}{2} = k_1 \sin\left(\frac{u_0 - u_1}{2}\right),$$

$$\frac{(u_0 - u_1)_\tau}{2} = \frac{1}{k_1} \sin\left(\frac{u_0 + u_1}{2}\right),$$

$$\frac{(u_2 + u_3)_\xi}{2} = k_1 \sin\left(\frac{u_2 - u_3}{2}\right),$$

$$\frac{(u_2 - u_3)_\tau}{2} = \frac{1}{k_1} \sin\left(\frac{u_2 + u_3}{2}\right).$$

Сложим первое соотношение с третьим, а четвертое вычтем из второго, тогда

$$\frac{(u_0 + u_1 + u_2 + u_3)_\xi}{2} = k_1 \sin\left(\frac{u_0 - u_1}{2}\right) + k_1 \sin\left(\frac{u_2 - u_3}{2}\right),$$

$$\frac{(u_0 - u_1 - u_2 + u_3)_\tau}{2} = \frac{1}{k_1} \sin\left(\frac{u_0 + u_1}{2}\right) - \frac{1}{k_1} \sin\left(\frac{u_2 + u_3}{2}\right).$$

Аналогично, преобразования для пар  $(u_0, u_2)$  и  $(u_1, u_3)$  дают

$$\frac{(u_0 + u_1 + u_2 + u_3)_\xi}{2} = k_2 \sin\left(\frac{u_0 - u_2}{2}\right) + k_2 \sin\left(\frac{u_1 - u_3}{2}\right),$$

$$\frac{(u_0 - u_1 - u_2 + u_3)_\tau}{2} = \frac{1}{k_2} \sin\left(\frac{u_0 + u_2}{2}\right) - \frac{1}{k_2} \sin\left(\frac{u_1 + u_3}{2}\right).$$

Вычитая полученные уравнения друг из друга так, чтобы уничтожились производные, получаем

$$k_1 \left[ \sin\left(\frac{u_0 - u_1}{2}\right) + \sin\left(\frac{u_2 - u_3}{2}\right) \right] = k_2 \left[ \sin\left(\frac{u_0 - u_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{u_1 - u_3}{2}\right) \right].$$

Записывая сумму тригонометрических функций через произведение, будем иметь

$$k_1 \sin\left(\frac{u_0 - u_1 + u_2 - u_3}{4}\right) = k_2 \sin\left(\frac{u_0 + u_1 - u_2 - u_3}{4}\right).$$

Отсюда после некоторых тригонометрических преобразований находим, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u_0 - u_3}{4}\right) = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \operatorname{tg}\left(\frac{u_1 - u_2}{4}\right). \quad (10.64)$$

Если выбрать в качестве  $u_0$  тривиальное решение  $u_0 = 0$ , то  $u_{1,2}$  являются односолитонными решениями (10.63) и уравнение (10.64) дает

$$u_3 = 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \frac{\operatorname{sh}[(\theta_1 - \theta_2)/2]}{\operatorname{ch}[(\theta_1 + \theta_2)/2]}\right). \quad (10.65)$$

Это решение описывает взаимодействие двух кинков, когда  $k_{1,2}$  имеют одинаковые знаки, и взаимодействие кинка и антикинка, если знаки разные. Оно совпадает с решением, полученным выше с помощью метода Хироты (задача 10.3).

Подобно уравнению мКдВ уравнение Син–Гордона также имеет бризерные решения, которые можно найти в явном виде, полагая в формуле (10.65)  $k_{1,2} = k_r \pm ik_i$ . Тогда после несложных преобразований получаем

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{k_r \sin \theta_i}{k_i \operatorname{ch} \theta_r} \right),$$

где

$$\theta_r = k_r \xi + \frac{k_r \tau}{k_r^2 + k_i^2} + \delta_r,$$

$$\theta_i = k_i \xi - \frac{k_i \tau}{k_r^2 + k_i^2} + \delta_i,$$

$\delta_{r,i}$  — произвольные константы. Пример бризерного решения приведен на рис. 10.5.

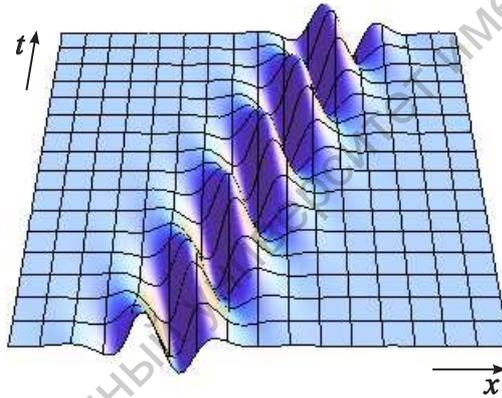


Рис. 10.5. Бризерное решение уравнения Син–Гордона

Дадим теперь определение преобразований Бэклунда, следуя [17]. Пусть  $u(x, t)$  и  $U(x, t)$  удовлетворяют уравнениям в частных производных

$$P(u) = 0, \quad (10.66)$$

$$Q(U) = 0. \quad (10.67)$$

Тогда соотношения

$$R_j [(u), (U), (k)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $(u)$  и  $(U)$  обозначают наборы (не обязательно одинаковой длины), состоящие из  $u$ ,  $U$  и их различных частных производных,  $(k)$  — набор параметров, называются преобразованиями Бэклунда уравнений (10.66) и

(10.67), если они гарантируют, что  $u$  удовлетворяет уравнению (10.66) когда  $U$  удовлетворяет уравнению (10.67), и наоборот. В случае, когда  $u$  и  $U$  удовлетворяют одному и тому же уравнению, говорят об *автопреобразовании* Бэклунда.

В § 10.1 рассматривалось преобразование Миуры

$$u = v^2 - iv_x, \quad (10.68)$$

которое переводит решение уравнения мКдВ  $v(x, t)$  в решение уравнения КдВ  $u(x, t)$ . Обратное утверждение в общем случае неверно: не для всякого  $u$ , удовлетворяющего уравнению КдВ,  $v$  является решением уравнения мКдВ. Следовательно, преобразование Миуры само по себе еще не является преобразованием Бэклунда. Необходимо добавить к нему уравнение

$$v_t = -iu_{xx} - 2(uv)_x, \quad (10.69)$$

которое гарантирует, что  $u(x, t)$  будет удовлетворять уравнению КдВ [122]. Итак, соотношения (10.68), (10.69) составляют преобразования Бэклунда, связывающие решения уравнений КдВ и мКдВ. Более подробную информацию о преобразованиях Бэклунда можно найти, например, в книгах [17, 35].

**Задача 10.7.** Нарисуйте диаграмму, аналогичную представленной на рис. 10.4, для трехсолитонного решения.

**Задача 10.8.** Уравнение КдВ  $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$  заменой переменных  $u = 2w_x$  приводится к виду

$$w_t + 6(w_x)^2 + w_{xxx} = 0.$$

Два независимых решения этого уравнения  $w$  и  $W$  связаны автопреобразованиями Бэклунда [123]

$$(w + W)_x = k^2 - (w - W)^2,$$

$$(w - W)_t = 6(w - W)^2(w - W)_x - k^2(w - W)_x - (w - W)_{xxx},$$

где  $k$  — параметр. Действуя по схеме, описанной в § 10.7, найдите одно- и двухсолитонные решения уравнения КдВ.

**Задача 10.9.** Как было показано в лекции 5 (см. задачи 5.2, 5.3), уравнение КдВ  $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$  имеет автомодельное решение вида  $u = (3t)^{-2/3}\psi(z)$ ,  $z = x/\sqrt[3]{3t}$ , где функция  $\psi(z)$  удовлетворяет уравнению

$$\psi''' = 2\psi + z\psi' - 6\psi\psi'. \quad (10.70)$$

Для модифицированного уравнения КдВ  $v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$  автомодельное решение имеет вид  $v = (3t)^{-1/3}\phi(z)$ , где  $\phi(z)$  удовлетворяет уравнению

$$\phi'' = z\phi - 2\phi^3 + C, \quad (10.71)$$

$C$  — произвольная постоянная. Покажите, что уравнения (10.70) и (10.71) и связаны преобразованием Миуры. Точнее, сделайте в (10.70) замену  $\psi = \phi^2 - \phi'$  и покажите, что

$$\psi''' - 2\psi - z\psi' + 6\psi\psi' = \left( \frac{d^2}{dz^2} - 2\phi \frac{d}{dz} \right) (\phi'' - z\phi + 2\phi^3 - C).$$

## Лекция 11.

# Модулированные волны в нелинейных средах

Л.И. Мандельштам понимал под модуляцией всякий процесс медленных изменений в высокочастотной колебательной системе, «при котором она успевает совершить много свободных колебаний прежде, чем их амплитуда, частота и фаза изменятся сколько-нибудь заметным образом»; т.е. модулированные колебания в классической теории — это квазипериодическое колебание с достаточно медленно меняющимися параметрами. ... Наиболее важной отличительной чертой современной теории является, по существу, расширение понятия модуляции, включающее не только преобразования модуляции, но и процессы их рождения — самомодуляции.

*А.В. Гапонов-Грегов, М.И. Рабинович. Л.И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний (УФН. 1979. Т. 128, № 4. С. 611, 612)*

В предыдущих лекциях основное внимание было уделено анализу слабонелинейных длинноволновых возмущений, описываемых уравнениями типа КдВ или Бюргерса. Перейдем к изучению другого важного класса задач, связанного с распространением квазигармонических *волновых пакетов*. Подобные процессы играют большую роль в различных областях физики. Например, передача информации в оптическом, микроволновом или радиодиапазоне осуществляется посредством *модуляции* высокочастотной несущей волны низкочастотным информационным сигналом. Временной спектр модулированного сигнала сосредоточен вблизи несущей частоты  $\omega_0$ . В этом случае переменные, характеризующие волновое движение, можно представить в виде

$$u(x, t) = A(x, t)e^{i\theta} + \text{к.с.},$$

где  $\theta = k_0x - \omega_0t$  — быстро меняющаяся фаза,  $A(x, t)$  — медленно меняющаяся амплитуда (огибающая), к.с. — комплексно сопряженные чле-

ны. Условие медленности изменения амплитуды (и, следовательно, узости спектра волнового пакета) означает, что

$$|A_t| \ll | -i\omega_0 A|, \quad |A_x| \ll |ik_0 A|.$$

Таким образом, представляется разумным выделить уравнения, описывающие динамику *огнблующей* волнового пакета, что существенно упрощает задачу. На этом принципе основаны методы теоретического анализа квазигармонических волн в нелинейных средах, которые будут рассмотрены ниже. Отметим, что квазигармонические волновые процессы характерны прежде всего для сред с сильной дисперсией, когда фазовые скорости различных гармоник отличаются значительно.

### 11.1. Теория Уизема

Первая попытка систематического изучения модулированных нелинейных волн была предпринята Дж. Уиземом в середине 1960-х годов. В своих работах он исходил из представления уравнений в лагранжевой форме [9], однако это не является обязательным. Продемонстрируем основные идеи теории Уизема на примере нелинейного уравнения Клейна–Гордона с кубической нелинейностью (см. § 1.4.2)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_c^2 u - \beta u^3 = 0. \quad (11.1)$$

Заметим, что уравнение (11.1) можно рассматривать как слабонелинейный вариант уравнения Син–Гордона, полученный разложением  $\sin u$  в ряд ( $\beta = \omega_c^2/6$ ).

Будем искать решение уравнения (11.1) в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\ u_0 &= A(x, t) e^{i\theta(x, t)} + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon \ll 1$ , и введем величины  $\omega(x, t) = -\theta_t$ ,  $k(x, t) = \theta_x$ , которые получили название *мгновенных частоты и волнового числа*. Прежде всего заметим, что в силу определения  $\omega$  и  $k$  будет выполняться соотношение

$$k_t + \omega_x = 0, \quad (11.2)$$

— так называемый *закон сохранения волнового числа*. Будем считать, что функции  $A$ ,  $\omega$  и  $k$  меняются медленно ( $A_t, A_x \sim \varepsilon$  и т.д.). Тогда можно рассматривать их как функции медленных переменных  $T = \varepsilon t$ ,  $X = \varepsilon x$ . Нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} u_t &= (-i\omega A + \varepsilon A_T) e^{i\theta} + \text{к.с.}, \\ u_{tt} &= (-\omega^2 A - i\varepsilon(\omega_T A + 2\omega A_T) + \varepsilon^2 A_{TT}) e^{i\theta} + \text{к.с.} \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно получить для  $u_x$ ,  $u_{xx}$ .

Подставим полученные соотношения в уравнение (11.1), умножим на  $\exp(-i\theta)$  и усредним по периоду  $2\pi/\omega$ . Тогда для членов порядка 1 и  $\varepsilon$ , соответственно, получим уравнения

$$\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2 - 3\beta|A|^2, \quad (11.3)$$

$$(\omega A^2)_T + c^2 (kA^2)_X = 0. \quad (11.4)$$

Уравнение (11.3) называется *нелинейным дисперсионным соотношением*. Из него следует, что в первом приближении нелинейные эффекты выражаются в зависимости частоты волны от амплитуды. Здесь прослеживается аналогия с колебаниями нелинейного осциллятора, период которых зависит от энергии [3, 11, 12]. Изменение различных характеристик распространения волны в нелинейной среде при изменении ее амплитуды называют *самовоздействием*. Некоторые явления, связанные с самовоздействием (само модуляция, самофокусировка), будут рассмотрены в последующих параграфах.

Уравнение (11.4) с учетом соотношений (11.2), (11.3) можно записать в виде

$$(A^2)_T + (\omega' A^2)_X = 0, \quad (11.5)$$

где  $\omega' = \partial\omega/\partial k$  — групповая скорость. Оно носит название закона *сохранения волнового действия* и аналогично закону сохранения энергии.

## 11.2. Критерий Лайтхилла и модуляционная неустойчивость

Система уравнений Уизема состоит из законов сохранения волнового числа (11.2) и волнового действия (11.5), а также нелинейного дисперсионного соотношения

$$\omega = \omega(k, |A|^2), \quad (11.6)$$

в котором содержится специфика конкретной задачи. Например, для волн на поверхности глубокой воды соотношение такого типа

$$\omega^2 = gk(1 + k^2|A|^2) \quad (11.7)$$

было получено Стоксом, который нашел решение в виде периодической стационарной волны, период которой зависит от амплитуды (волна Стокса). Очевидно, что в линейном пределе ( $|A|^2 \rightarrow 0$ ) уравнение (11.6) должно переходить в линейное дисперсионное соотношение  $\omega = \omega_0(k)$ . Таким образом, в случае слабой нелинейности можно представить соотношение (11.6) в виде

$$\omega \approx \omega_0(k) + \omega_2(k)|A|^2 + \dots$$

Важный результат был получен Лайтхиллом [124], который показал, что в случае

$$\omega_0''\omega_2 > 0,$$

где  $\omega_0'' = d^2\omega_0/dk^2$ , система уравнений (11.2), (11.5), (11.6) является гиперболической, а в случае

$$\omega_0''\omega_2 < 0 \tag{11.8}$$

— эллиптической. Условие (11.8) будем называть *критерием Лайтхилла*.

Применительно к задачам распространения волн эллиптичность системы свидетельствует о наличии неустойчивости, поскольку задача Коши для эллиптических уравнений является некорректной. Такая неустойчивость была обнаружена Бенджамином и Фейром в результате неудачных попыток экспериментально реализовать волну Стокса на поверхности глубокой воды. В работе [125]<sup>1</sup> было показано, что неустойчивость вызвана взаимодействием несущей волны с частотой  $\omega_0$  и возмущений, называемых сателлитами, с близкими частотами, симметрично отстоящими от несущей ( $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Delta\omega$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ). Если выполнен критерий Лайтхилла (11.8), сателлиты нарастают, черпая энергию из основной волны. Этот процесс можно рассматривать как *четырёхволновой резонанс*

$$2\omega_0 = \omega_+ + \omega_-, \tag{11.9}$$

$$2k(\omega_0) = k(\omega_+) + k(\omega_-). \tag{11.10}$$

Поскольку  $\Delta\omega$  мало, можно разложить дисперсионное соотношение в ряд  $k(\omega) = k(\omega_0) + k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \dots$ , откуда видно, что равенство (11.10) выполняется с точностью до членов второго порядка малости. Если умножить соотношения (11.9) и (11.10) на постоянную Планка, то видно, что они выражают законы сохранения энергии и импульса в процессе распада двух квантов несущей волны на кванты волн-сателлитов.

Возмущения с частотами, близкими к  $\omega_0$ , для которых выполнены условия резонанса, можно рассматривать как модуляцию основной волны. Поэтому неустойчивость Бенджамина–Фейра получила название *модуляционной*. Для волн на воде решение в виде ряда, главный член которого имеет вид

$$A \cos(kx - \omega(k, A^2)t),$$

где  $\omega(k, A^2)$  определяются соотношением (11.7), было найдено Дж. Стоксом еще в 1849 г. Сходимость этого ряда доказал Т. Леви-Чивитта в 1925 г. Однако сходимость еще не означает устойчивость решения. Потребовалось, таким образом, более 120 лет, чтобы понять, что волна Стокса на глубокой воде неустойчива<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Любопытно, что экспериментальные результаты, изложить которые планировалось во второй части работы [125], фактически так и не были опубликованы.

<sup>2</sup>Хороший исторический обзор развития представлений о модуляционной неустойчивости и связанных с ней явлений можно найти в [126].

### 11.3. Нелинейное уравнение Шрёдингера и метод многих масштабов

Другой подход к исследованию динамики огибающей волновых пакетов связан с получением нелинейного параболического уравнения, называемого *нелинейным уравнением Шрёдингера* (НУШ). В лекции 1 было показано, как оно получается из нелинейного дисперсионного соотношения при помощи эвристического подхода. Существует более строгий метод получения НУШ (и других уравнений для огибающей), называемый *методом многих масштабов*, который аналогичен одноименному методу в теории колебаний [3, 106].

Вернемся к нелинейному уравнению Клейна–Гордона (11.1). Будем искать решение в виде ряда

$$u = \sum_i \varepsilon^i u_i,$$

причем  $u_i$  будут являться функциями нескольких пространственных и временных переменных  $X_n = \varepsilon^n x$ ,  $T_n = \varepsilon^n t$ . При этом производные преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + \dots, \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots. \end{aligned}$$

Подставим эти соотношения в уравнение (11.1) и выделим члены одинаковых порядков малости. Члены порядка  $\varepsilon$  дают

$$\hat{L}u_1 = 0, \quad (11.11)$$

где  $\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} + \omega_c^2$  — оператор, соответствующий линейной части уравнения Клейна–Гордона. Решение уравнения (11.11) выберем в виде квазигармонической волны с амплитудой, зависящей от медленных переменных:

$$u_1 = A(X_1, X_2 \dots; T_1, T_2 \dots) e^{i\theta} + \text{к.с.},$$

где  $\theta = k_0 X_0 - \omega_0 T_0$ , причем  $\omega_0$  и  $k_0$  связаны дисперсионным соотношением

$$\omega_0^2 = \omega_c^2 + c^2 k_0^2. \quad (11.12)$$

Члены порядка  $\varepsilon^2$  приводят к уравнению

$$\begin{aligned} \hat{L}u_2 &= -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} + 2c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_0 \partial X_1} = \\ &= 2i \left( \omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_1} + c^2 k_0 \frac{\partial A}{\partial X_1} \right) e^{i\theta} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (11.13)$$

Поскольку действие оператора  $\widehat{L}$  на функцию  $\exp(i\theta)$ , где  $\omega_0$  и  $k_0$  удовлетворяют соотношению (11.12), дает нуль, решение уравнения (11.13) будет носить секулярный характер ( $u_2 \sim \theta \exp(i\theta)$ ). Единственный способ избежать этого состоит в том, чтобы приравнять к нулю члены, стоящие в правой части:

$$\omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_1} + c^2 k_0 \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0.$$

С учетом дисперсионного соотношения (11.12) это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad (11.14)$$

где  $v_g = d\omega_0/dk$  — групповая скорость. Таким образом, в первом приближении возмущения огибающей распространяются с групповой скоростью.

Теперь уравнение (11.13) принимает вид

$$\widehat{L}u_2 = 0,$$

следовательно, можно положить  $u_2 = 0$ . Тогда для членов порядка  $\varepsilon^3$  получаем

$$\begin{aligned} \widehat{L}u_3 = - \left( \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} - c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_2} - 2ic^2 k_0 \frac{\partial A}{\partial X_2} - 3\beta |A|^2 A \right) e^{i\theta} + \\ + \beta A^3 e^{3i\theta} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (11.15)$$

Члены, пропорциональные  $\exp(i\theta)$ , по-прежнему будут приводить к секулярному решению, следовательно, их нужно положить равными нулю:

$$2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_2} + 2ic^2 k_0 \frac{\partial A}{\partial X_2} - \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + 3\beta |A|^2 A = 0.$$

С учетом соотношений (11.12) и (11.14) получаем

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial T_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial X_2} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + \frac{3\beta}{2\omega_0} |A|^2 A = 0,$$

где  $\omega_0'' = d^2\omega_0/dk^2 = c^2\omega_c^2/\omega_0^3$ . Наконец, переходя в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, приходим к НУШ

$$i \frac{\partial A}{\partial T} + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + q |A|^2 A = 0, \quad (11.16)$$

где  $T \equiv T_2$ ,  $X \equiv X_1$ ,  $q = 3\beta/2\omega_0$ .

Для волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости это уравнение впервые получил В.Е. Захаров [127] при помощи разработанного им гамильтоновского формализма. Позднее НУШ независимо было получено

в работах [128, 129] для случая произвольной глубины, где было показано, что критерий Лайтхилла выполнен при  $k_0 H > 1.36$ , где  $H$  — глубина слоя. Таким образом, данное условие можно рассматривать как своего рода границу между приближениями «мелкой» и «глубокой» воды.

Заметим, что для НУШ (11.16) критерий (11.8) принимает вид

$$\omega_0'' q > 0. \quad (11.17)$$

Поскольку согласно дисперсионному соотношению (11.12)  $\omega_0'' > 0$ , в случае  $\beta > 0$  условие (11.17) выполнено, что свидетельствует о модуляционной неустойчивости. Рассмотрим эту неустойчивость подробнее.

#### 11.4. Неустойчивость пространственно-однородного решения

Разделим в уравнении (11.16) вещественную и мнимую части, полагая  $A = a \exp(i\varphi)$ , где  $a$  и  $\varphi$  вещественны. После несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} -a\varphi_T + \frac{\omega_0''}{2} (a_{XX} - a(\varphi_X)^2) + qa^3 &= 0, \\ a_T + \frac{\omega_0''}{2} (2a_X\varphi_X + a\varphi_{XX}) &= 0. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Разделим первое уравнение на  $a$  и продифференцируем по  $X$ , а второе умножим на  $a$ . Тогда, обозначая  $K = \varphi_X$ , будем иметь

$$K_T + \omega_0'' K K_X = \frac{\omega_0''}{2} \left( \frac{a_{XX}}{a} \right)_X + 2qa a_X, \quad (11.19)$$

$$(a^2)_T + \omega_0'' (a^2 K)_X = 0. \quad (11.20)$$

Уравнение (11.19) является аналогом закона сохранения волнового числа (11.2). Ему можно придать вид

$$K_T + \Omega_X = 0,$$

где

$$\Omega = \frac{\omega_0'' K^2}{2} - qa^2 - \frac{\omega_0'' a_{XX}}{2a}.$$

Очевидно, что это уравнение играет роль нелинейного дисперсионного соотношения. Уравнение (11.20) имеет вид закона сохранения волнового действия (11.4).

Полагая  $a_X = 0$ ,  $K = 0$ , найдем пространственно-однородное решение уравнений (11.18):

$$\begin{aligned} a &= a_0 = \text{const}, \\ \varphi_T &= qa_0^2. \end{aligned}$$

Итак, имеем решение

$$A = a_0 \exp(iqa_0^2 T), \quad (11.21)$$

которое описывает периодическую стационарную волну с нелинейным сдвигом частоты, аналогичную волне Стокса. Исследуем решение (11.21) на устойчивость, для чего положим  $a = a_0 + \tilde{a}$ ,  $K = \tilde{K}$ , где  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{K}$  — малые возмущения. Линеаризуя уравнения (11.19), (11.20), получаем

$$\tilde{a}_T + \frac{\omega_0'' a_0}{2} \tilde{K}_X = 0,$$

$$\tilde{K}_T = \frac{\omega_0''}{2a_0} \tilde{a}_{XXX} + 2qa_0 \tilde{a}_X.$$

Исключим отсюда  $\tilde{K}$  перекрестным дифференцированием:

$$\tilde{a}_{TT} + \omega_0'' qa_0^2 \tilde{a}_{XX} + \left(\frac{\omega_0''}{2}\right)^2 \tilde{a}_{XXXX} = 0.$$

Подставляя решение в виде  $\tilde{a} \sim \exp(\lambda T + i\kappa X)$ , приходим к уравнению

$$\lambda^2 = q\omega_0'' a_0^2 \kappa^2 - \left(\frac{\omega_0'' \kappa^2}{2}\right)^2. \quad (11.22)$$

Очевидно, что если выполнен критерий Лайтхилла (11.17), имеются вещественные и положительные значения  $\lambda$ , следовательно, решение (11.21) неустойчиво. Зависимость  $\lambda(\kappa)$  для этого случая представлена на рис. 11.1. Инкремент неустойчивости достигает максимума  $\lambda_m = qa_0^2$  при  $\kappa^2 = \kappa_m^2 = 2qa_0^2/\omega_0''$  и обращается в нуль при  $\kappa^2 = \kappa_0^2 = 4qa_0^2/\omega_0''$ . Таким образом, неустойчивыми оказываются возмущения в диапазоне волновых чисел  $\kappa^2 < \kappa_0^2$ .

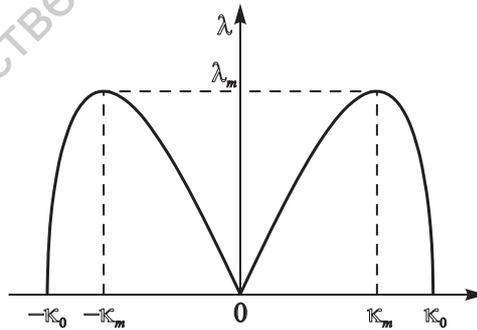


Рис. 11.1. Зависимость инкремента модуляционной неустойчивости  $\lambda$  от волнового числа  $\kappa$

Очевидно, что существует аналогия между НУШ и уравнениями Уизема. Однако они не являются эквивалентными, так как теория Уизема

не требует малости амплитуды. Тем не менее, можно получить предельный переход между двумя теориями, сделав в уравнениях (11.3) и (11.4) замены

$$A \rightarrow \varepsilon A, \quad \omega \rightarrow \omega_0 - \varepsilon \varphi_T, \quad k \rightarrow k_0 + \varepsilon \varphi_X,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, а  $\omega_0$  и  $k_0$  связаны нелинейным дисперсионным соотношением (11.12). При этом в уравнение (11.3) следует добавить члены, пропорциональные  $A_{TT}/A$ ,  $A_{XX}/A$ , которые теперь имеют одинаковый порядок малости с величиной  $|A|^2$  (см. [9, 17]).

### 11.5. Стационарные решения НУШ. «Светлые» и «темные» солитоны

Исследуем стационарные решения уравнения (11.16), которые будем искать в виде  $a = a(\xi)$ ,  $\varphi = \varphi(\zeta)$ , где  $\xi = X - UT$ ,  $\zeta = X - VT$ . Строго говоря, их нельзя назвать стационарными в смысле того определения, которое было дано в лекции 8, поскольку они характеризуются двумя скоростями  $U$ ,  $V$ .

Уравнения (11.18) принимают вид

$$aV\varphi' + \frac{\omega_0''}{2} (a'' - a(\varphi')^2) + qa^3 = 0, \quad (11.23)$$

$$-U(a^2)' + \omega_0''(a^2\varphi')' = 0. \quad (11.24)$$

Интегрируя уравнение (11.24) с нулевыми граничными условиями, получаем, что  $\varphi' = U/\omega_0''$ , откуда

$$\varphi = \frac{U\zeta}{\omega_0''}.$$

Подставляя это решение в уравнение (11.23), приходим к уравнению нелинейного осциллятора

$$a'' - \frac{U(U - 2V)}{(\omega_0'')^2} a + \frac{2q}{\omega_0''} a^3 = 0, \quad (11.25)$$

которое уже встречалось в § 8.2 при анализе уравнения мКдВ. Поэтому, не приводя подробных выкладок, сразу запишем выражение для солитона:

$$a = a_m \operatorname{sech}(\xi/\Delta),$$

где  $\Delta^2 = (\omega_0'')^2 / U(U - 2V)$ ,  $a_m^2 = \omega_0''/q\Delta^2$ . Отметим, что солитонные решения существуют лишь при  $U > 2V$ . Окончательный вид решения в виде солитона огибающей таков (см. рис. 1.12):

$$A = a \exp i\varphi = \frac{a_m \exp(iU(X - VT)/\omega_0'')}{\operatorname{ch} [a_m \sqrt{q/\omega_0''} (X - UT)]}. \quad (11.26)$$

Выражение (11.26) описывает медленное изменение амплитуды и фазы волнового пакета.

При наличии модуляционной неустойчивости малые модуляции пространственно-однородного пучка волн постепенно нарастают, т.е., как говорят, происходит *само модуляция*. В результате волновой пакет разбивается на последовательность НУШ-солитонов. Хорошей иллюстрацией этого процесса служит рис. 11.2, где приведены осциллограммы напряжения в нелинейной радиотехнической линии передачи [130]. Считается, что повреждение «девятого вала» также объясняется образованием солитона огибающей на глубокой воде.

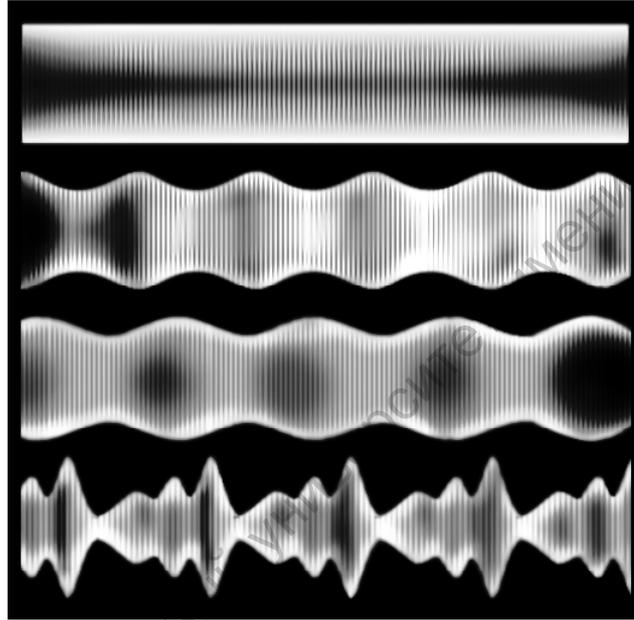


Рис. 11.2. Осциллограммы напряжения в нелинейной радиотехнической линии передачи, иллюстрирующие развитие модуляционной неустойчивости [130]

Теперь рассмотрим случай, когда  $\omega_0'' q < 0$  и модуляционной неустойчивости нет. Для определенности будем считать, что  $\omega_0'' > 0$ ,  $q = -|q| < 0$ . Потенциальная энергия осциллятора (11.25) имеет вид

$$W = -\frac{U(U - 2V)a^2}{2(\omega_0'')^2} - \frac{|q|a^4}{2\omega_0''}.$$

В случае  $U > 2V$  существует единственное неустойчивое состояние равновесия  $a = 0$  и стационарных решений нет. Иная ситуация реализуется при  $U < 2V$ : имеется одно состояние равновесия типа центр ( $a = 0$ ) и два состояния типа седло в точках

$$a_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{U(2V - U)}{2\omega_0''|q|}}.$$

Форма потенциальной ямы и фазовый портрет осциллятора представлены на рис. 11.3. Решения в виде солитонов, которые соответствуют сепаратрисам, идущим из седла в седло, имеют вид

$$a = a_m \operatorname{th}(\xi/\Delta),$$

где  $\Delta^2 = (\omega_0'')^2 / U(2V - U)$ ,  $a_m^2 = \omega_0'' / |q| \Delta^2$ . Окончательно для солитона огибающей получаем

$$A = a_m \exp [iU(X - VT) / \omega_0''] \operatorname{th} \left[ a_m \sqrt{|q/\omega_0''|} (X - UT) \right].$$

Соответствующий профиль волны  $u = \operatorname{Re}(A \exp(i\theta))$  приведен на рис. 11.4. Поскольку это решение соответствует локальному уменьшению интенсивности, оно называется «темным» солитоном в противоположность «светлому» солитону, описываемому соотношением (11.26).

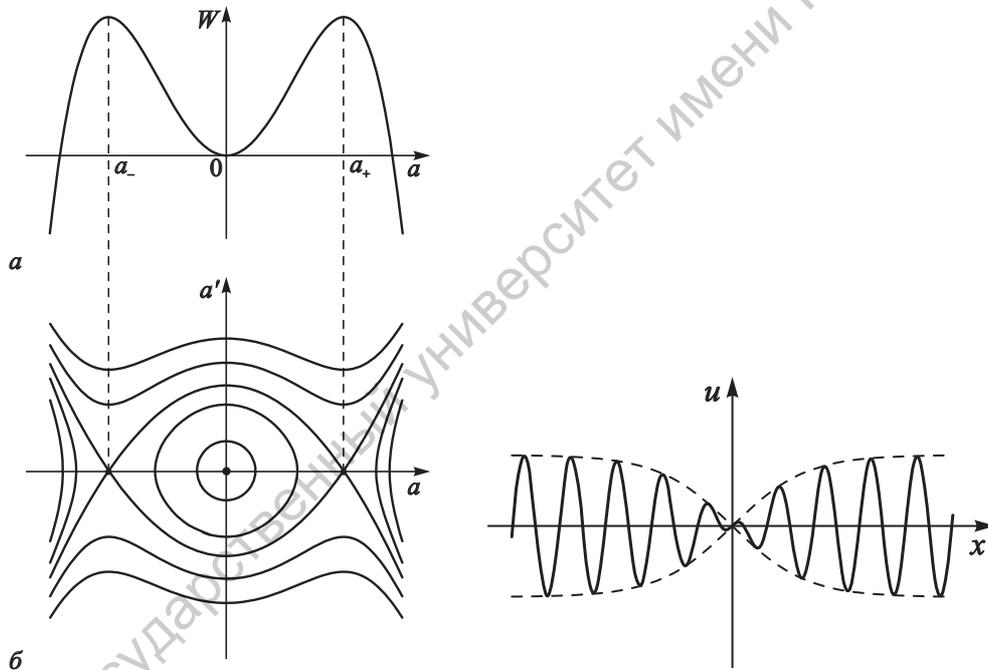


Рис. 11.3. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) нелинейного осциллятора (11.25) при  $\omega_0''q < 0$ ,  $U < 2V$

Рис. 11.4. Решение в виде «темного» солитона огибающей

**Задача 11.1.** Получите нелинейное уравнение Шрёдингера и исследуйте его на наличие модуляционной неустойчивости для систем, которые описываются следующими уравнениями:

- а) уравнением КДВ  $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$ ;
- б) уравнением мКДВ  $u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0$ ;

в) уравнением Буссинеска  $u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxx} = 0$ .

*Решение:* Начнем с уравнения КдВ (а). Подставим решение в виде ряда

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 \dots$$

и введем новые пространственно-временные переменные  $T_{0,1,2}$ ,  $X_{0,1,2}$ . Тогда для членов порядка  $\varepsilon$  будем иметь

$$\widehat{L}u_1 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial T_0} + \beta \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^3} = 0.$$

Решение этого уравнения выберем в виде

$$u_1 = A(X_1, T_1, X_2, T_2)e^{i\theta} + \text{к.с.}, \quad (11.27)$$

где  $\theta = kX_0 - \omega T_0$ ,  $\omega = -\beta k^3$ . Члены порядка  $\varepsilon^2$  дают

$$\widehat{L}u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial T_1} + \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{u_1^2}{2} \right) + 3\beta \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^2 \partial X_1} = 0. \quad (11.28)$$

Подставляя сюда выражение (11.27) и требуя уничтожения членов, пропорциональных  $\exp(i\theta)$ , которые приводят к секулярному росту, получаем уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad (11.29)$$

где  $v_g = -3\beta k^2$  — групповая скорость. Таким образом, уравнение (11.28) принимает вид

$$\widehat{L}u_2 = -ikA^2 e^{2i\theta} + \text{к.с.}$$

Решение этого уравнения легко находится и может быть представлено следующим образом:

$$u_2 = B(X_1, T_1, X_2, T_2) + \frac{A^2 \exp(2i\theta)}{6\beta k^2} + \text{к.с.} \quad (11.30)$$

Здесь вещественная функция  $B$  возникает как постоянная интегрирования, но может зависеть от медленных переменных. Теперь запишем уравнение для членов порядка  $\varepsilon^3$ :

$$\begin{aligned} \widehat{L}u_3 + \frac{\partial u_1}{\partial T_2} + \frac{\partial u_2}{\partial T_1} + \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial X_0} + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{u_1^2}{2} \right) + \\ + 3\beta \left( \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^2 \partial X_2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0 \partial X_1^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_0^2 \partial X_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Подставим сюда выражения (11.27) и (11.30) и исключим секулярные члены. В данном случае таковыми будут как слагаемые, пропорциональные  $\exp(i\theta)$ , так и слагаемые, зависящие только от медленных переменных. Приравнявая последние к нулю, получаем

$$\frac{\partial B}{\partial T_1} + \frac{\partial |A|^2}{\partial X_1} = 0.$$

С учетом уравнения (11.29) отсюда находим, что

$$B = -\frac{|A|^2}{v_g} = \frac{|A|^2}{3\beta k^2}.$$

Тогда члены, пропорциональные  $\exp(i\theta)$  в уравнении (11.31), дают нуль:

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial T_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial X_2} \right) - 3\beta k \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + \frac{1}{6\beta k^2} |A|^2 A = 0, \quad (11.32)$$

Поскольку коэффициенты при нелинейном и дисперсионном членах имеют разные знаки, то модуляционной неустойчивости нет.

Перейдем теперь к модифицированному уравнению КдВ (6). Очевидно, что решение для  $u_1$  вновь будет иметь вид (11.27). Поскольку нелинейное слагаемое кубическое, то в порядке  $\varepsilon^2$  нелинейные члены не появятся и вместо уравнения (11.28) будем иметь

$$\hat{L}u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial T_1} + 3\beta \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^2 \partial X_1} = 0.$$

Условие уничтожения секулярных членов приводит к уравнению (11.29) для амплитуды  $|A|$ . Таким образом,

$$\hat{L}u_2 = 0,$$

что позволяет выбрать решение в виде  $u_2 = 0$ . Тогда члены порядка  $\varepsilon^3$  дают

$$\hat{L}u_3 + \frac{\partial u_1}{\partial T_2} + \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{u_1^3}{3} \right) + 3\beta \left( \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^2 \partial X_2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0 \partial X_1^2} \right) = 0.$$

Приравнивая к нулю в правой части члены, пропорциональные  $\exp(i\theta)$ , после некоторых преобразований приходим к нулю:

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial T_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial X_2} \right) - 3\beta k \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} - k|A|^2 A = 0.$$

Теперь, в отличие от уравнения (11.32), знаки коэффициентов при нелинейном и дисперсионном членах совпадают (если  $\beta > 0$ ), следовательно, пространственно-однородное решение неустойчиво. Это, в частности, означает, что неустойчивыми будут решения в виде периодических стационарных волн (см. § 8.2).

Для уравнения Буссинеска (в) оператор  $\hat{L}$  есть

$$\hat{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} - \beta \frac{\partial^4}{\partial X_0^4},$$

а дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = c^2 k^2 - \beta k^4. \quad (11.33)$$

Для членов порядка  $\varepsilon^2$  получаем уравнение

$$\hat{L}u_2 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} - 2c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_0 \partial X_1} - \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} \left( \frac{u_1^2}{2} \right) - 4\beta \frac{\partial^4 u_1}{\partial X_0^3 \partial X_1} = 0,$$

которое после подстановки выражения (11.27) и приравнивания к нулю секулярных членов, пропорциональных  $\exp(i\theta)$ , дает

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + \frac{c^2 k - 2\beta k^3}{\omega} \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad (11.34)$$

$$\widehat{L}u_2 = -2k^2 A^2 e^{2i\theta} + \text{к.с.} \quad (11.35)$$

Уравнение (11.34), как обычно, означает, что возмущения огибающей в первом приближении распространяются с групповой скоростью, поскольку из дисперсионного соотношения (11.33) нетрудно найти, что  $v_g = (c^2 k - 2\beta k^3)/\omega$ . Далее из физических соображений ограничимся областью волновых чисел  $k^2 < c^2/2\beta$ , где групповая скорость положительна (см. § 1.4.1).

Из уравнения (11.35) можно получить решение для  $u_2$  в виде

$$u_2 = B(X_1, T_1, X_2, T_2) + \frac{A^2 \exp(2i\theta)}{6\beta k^2} + \text{к.с.}, \quad (11.36)$$

что совпадает с выражением (11.30). Члены порядка  $\varepsilon^3$  приводят к уравнению

$$\begin{aligned} \widehat{L}u_3 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 T_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 T_1} - \\ - c^2 \left( 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_0 X_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_0 X_1} \right) \frac{\partial^2 (u_1 u_2)}{\partial X_0^2} - \frac{\partial^2 (u_1^2)}{\partial X_0 X_1} - \\ - \beta \left( 4 \frac{\partial^4 u_1}{\partial X_0^3 \partial X_2} + 6 \frac{\partial^4 u_1}{\partial X_0^2 \partial X_1^2} + 4 \frac{\partial^4 u_2}{\partial X_0^3 \partial X_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда соотношения (11.27) и (11.36) и приравнивая к нулю члены, пропорциональные  $\exp(i\theta)$ , получаем

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial T_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial X_2} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} - \frac{k^2}{2\omega} AB - \frac{1}{12\beta\omega} |A|^2 A = 0, \quad (11.37)$$

где  $\omega_0'' = (c^2 - v_g^2 - 6\beta k^2)/\omega$ . Чтобы определить  $B$ , необходимо обратиться к членам порядка  $\varepsilon^4$  и выделить медленно меняющиеся слагаемые. В результате будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 B}{\partial T_1^2} - c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2 |A|^2}{\partial X_1^2}. \quad (11.38)$$

Поскольку из уравнения (11.34) следует, что

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) |A|^2 = (v_g^2 - c^2) \frac{\partial^2 |A|^2}{\partial X_1^2},$$

уравнение (11.38) можно проинтегрировать, получив

$$B = \frac{|A|^2}{v_g^2 - c^2}.$$

В итоге уравнение (11.37) принимает вид

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial T_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial X_2} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} - \left( \frac{k^2}{2\omega(v_g^2 - c^2)} + \frac{1}{12\beta\omega} \right) |A|^2 A = 0.$$

Подсчитав произведение коэффициентов при нелинейном и дисперсионном членах, убеждаемся, что оно равно

$$\frac{(v_g^2 - c^2 + 6\beta k^2)^2}{24\beta\omega^2(v_g^2 - c^2)} < 0,$$

следовательно, модуляционная неустойчивость невозможна.

**Задача 11.2.** Взаимодействие низкочастотных ионно-звуковых и высокочастотных ленгмюровских волн в плазме описывается уравнениями Захарова [131], которые в безразмерном виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} iE_t + E_{xx} &= nE, \\ n_{tt} - n_{xx} &= (|E|^2)_{xx}. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Здесь  $E$  — комплексная амплитуда ленгмюровской волны,  $n$  — концентрация ионов. Заметим, что если пренебречь во втором уравнении членом  $n_{tt}$ , система (11.39) переходит в НУШ.

Действуя аналогично § 11.4, рассмотрите устойчивость пространственно-однородного решения

$$n = n_0, \quad E = a_0 \exp(-in_0 t).$$

Положите в (11.39)  $E = a \exp(i\varphi)$  и приведите эти уравнения к виду, аналогичному (11.19), (11.20):

$$\begin{aligned} a_t + 2a_x K + aK_x &= 0, \\ K_t + KK_x &= \left(\frac{a_{xx}}{a}\right)_x - n_x, \\ n_{tt} - n_{xx} &= (a^2)_x, \end{aligned}$$

где  $K = \varphi_x$ . Линеаризуйте полученные уравнения и, полагая что возмущения зависят от  $x$  и  $t$  как  $\exp(\lambda t + i\kappa x)$ , найдите характеристическое уравнение

$$(\lambda^2 + \kappa^4)(\lambda^2 + \kappa^2) = 2a_0^2 \kappa^4.$$

Проанализируйте его корни и получите формулу для инкремента модуляционной неустойчивости

$$\lambda^2 = \frac{\kappa^2}{2} \left[ -(1 + \kappa^2) + \sqrt{(1 - \kappa^2)^2 + 8a_0^2} \right].$$

**Задача 11.3.** Действуя аналогично § 11.5, найдите решение уравнений Захарова (11.39) в виде уединенной волны. Покажите, что при выборе граничных условий  $n(x \rightarrow \pm\infty) = n_0$ ,  $E(x \rightarrow \pm\infty) = 0$  это решение имеет вид

$$\begin{aligned} E &= a_m \operatorname{sech}(\xi/\Delta) \exp(iU\xi/2), \\ n &= n_0 - \frac{1}{\Delta^2} \operatorname{sech}^2(\xi/\Delta), \end{aligned}$$

где  $\xi = x - Ut$ ,  $\zeta = x - Vt$ ,

$$\Delta^2 = \frac{4}{U(U - 2V) + 4n_0}, \quad a_m^2 = \frac{1 - U^2}{\Delta^2}.$$

При этом должны выполняться условия  $U(U - 2V) + 4n_0 > 0$ ,  $U^2 < 1$ .

Развитие модуляционной неустойчивости приводит к образованию уединенных волн, которые, как видно из приведенного выше решения, представляют собой области с пониженной плотностью плазмы — *каверны*. Частицы плазмы выталкиваются из каверны силами высокочастотного давления электромагнитного поля. Однако уединенные волны устойчивы только в одномерном случае. В трехмерном случае происходит *коллапс*, т.е. необратимое сжатие каверны и, соответственно, нарастание амплитуды поля [131]. Процесс продолжается до тех пор, пока характерный размер каверны не станет порядка радиуса Дебая, после чего включается диссипативный механизм, обусловленный затуханием Ландау (см. [2, гл. 12]). Коллапсом большого числа случайно расположенных каверн объясняется механизм возникновения ленгмюровской турбулентности.

**Задача 11.4.** Рассмотрите модуляционную неустойчивость системы связанных НУШ

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\omega_1''}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + (\beta_1 |A_1|^2 + \gamma_1 |A_2|^2) A_1, \\ i \frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{\omega_2''}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + (\beta_2 |A_2|^2 + \gamma_1 |A_1|^2) A_2. \end{aligned} \quad (11.40)$$

Системы, аналогичные (11.40), возникают в различных физических задачах, если нужно учесть нелинейное взаимодействие различных типов волн (например, быстрых и медленных волн пространственного заряда в электронном потоке [132], компонент различных поляризаций в двулучепреломляющих волоконных световодах [133, 134] и др.) или различных частотных составляющих многочастотного волнового пакета [135]. Эффекты нелинейного взаимодействия (*фазовой кросс-модуляции*) в уравнениях (11.40) описываются членами  $\gamma_{1,2} |A_{2,1}|^2$ .

Покажите, что уравнения (11.40) имеют пространственно-однородное решение

$$A_1 = a_{10} \exp [i (\beta_1 a_{10}^2 + \gamma_1 a_{20}^2) t],$$

$$A_2 = a_{20} \exp [i (\beta_2 a_{20}^2 + \gamma_2 a_{10}^2) t].$$

Исследуйте это решение на устойчивость аналогично § 11.4 и получите характеристическое уравнение четвертого порядка

$$\begin{aligned} \left[ \lambda^2 - \beta_1 \omega_1'' a_{10}^2 \kappa^2 + \left( \frac{\omega_1'' \kappa^2}{2} \right)^2 \right] \left[ \lambda^2 - \beta_2 \omega_2'' a_{20}^2 \kappa^2 + \left( \frac{\omega_2'' \kappa^2}{2} \right)^2 \right] = \\ = -\gamma_1 \gamma_2 \omega_1'' \omega_2'' a_{10}^2 a_{20}^2 \kappa^4 \end{aligned}$$

Проанализируйте корни этого уравнения и покажите, что при выполнении условия

$$\gamma_1 \gamma_2 > \beta_1 \beta_2$$

модуляционная неустойчивость имеет место даже если  $\beta_{1,2}\omega''_{1,2} < 0$ , т.е. критерий Лайтхилла для каждой из волн в отдельности не выполнен. В таком случае говорят о модуляционной неустойчивости индуцированной фазовой кросс-модуляцией.

**Задача 11.5.** Динамика огибающих прямой ( $A^+$ ) и встречной ( $A^-$ ) волн в распределенном резонаторе (отрезке нелинейной среды конечной протяженности с отражениями на границах) описывается системой связанных НУШ [136]

$$i \left( \frac{\partial A^+}{\partial t} + V \frac{\partial A^+}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A^+}{\partial x^2} + \beta (|A^+|^2 + 2|A^-|^2) A^+,$$

$$i \left( \frac{\partial A^-}{\partial t} - V \frac{\partial A^-}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A^-}{\partial x^2} + \beta (|A^-|^2 + 2|A^+|^2) A^-.$$

Пространственно-однородное решение этой системы имеет вид

$$A^\pm = a_0^\pm \exp \left[ i\beta \left( (a_0^\pm)^2 + 2(a_0^\mp)^2 \right) t \right].$$

Считая, что коэффициенты отражения на границах близки к единице, так что можно положить  $a_0^+ = a_0^- = a_0$ , исследуйте это решение на устойчивость. Покажите, что корни характеристического уравнения имеют вид

$$\lambda_\pm^2 = \kappa^2 \left[ \beta\omega_0''a_0^2 - V^2 - \left( \frac{\omega_0''\kappa^2}{2} \right)^2 \pm 2\sqrt{\beta^2\omega_0''^2a_0^4 - \left( \beta\omega_0''a_0^2 - \left( \frac{\omega_0''\kappa^2}{2} \right)^2 \right) V^2} \right].$$

Обсудите различные возможные ситуации: сколько корней с положительной вещественной частью имеется при тех или иных значениях параметров (подробнее см. [136]). Постройте зависимости инкрементов модуляционной неустойчивости от  $\kappa$  при различных значениях  $a_0$ .

## 11.6. Электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике. Солитоны в волоконных световодах

Для анализа распространения электромагнитных волн в нелинейном диэлектрике воспользуемся моделью среды из слабонелинейных осцилляторов, которая уже обсуждалась в задачах 8.3, 9.2. Электромагнитное поле описывается при помощи волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (11.41)$$

а поляризация  $P$  подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega_0^2(1 - \alpha P^2)P = \varepsilon_0 \Omega^2 E, \quad (11.42)$$

где  $\omega_0$  — собственная частота линейных колебаний осцилляторов,  $\alpha$  — положительная константа,  $\Omega^2 = (e^2 N)/(m\varepsilon_0)$ ,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона соответственно,  $N$  — объемная концентрация осцилляторов.

Получим нелинейное уравнение Шрёдингера для огибающей квазигармонического волнового пакета. Будем искать решение в виде рядов

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 + \dots, \\ E &= \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon^3 E_3 + \dots, \end{aligned} \quad (11.43)$$

и введем новые пространственные и временные масштабы  $X_{0,1,2}$ ,  $T_{0,1,2}$  в соответствии с формулами § 11.3. В порядке  $\varepsilon$ , очевидно, получим линеаризованный вариант системы (11.41), (11.42), а именно,

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial X_0^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_0^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0^2},$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 P_1 = \varepsilon_0 \Omega^2 E_1.$$

Отыскивая  $E_1$  в виде

$$E_1 = A e^{i\theta} + \text{к.с.}, \quad (11.44)$$

где  $\theta = kX_0 - \omega T_0$  и амплитуда  $A$  зависит от медленных переменных, находим, что

$$P_1 = \frac{\varepsilon_0 \Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} E_1 = \varepsilon_0 \chi_1 E_1, \quad (11.45)$$

причем частота  $\omega$  и волновое число  $k$  должны быть связаны дисперсионным соотношением

$$(\omega^2 - c^2 k^2)(\omega^2 - \omega_0^2) = \omega^2 \Omega^2. \quad (11.46)$$

В формуле (11.45) введена линейная диэлектрическая восприимчивость  $\chi_1(\omega) = \Omega^2/(\omega_0^2 - \omega^2)$ . Соотношение (11.46) полезно переписать в виде

$$\omega^2 n_0^2 = c^2 k^2, \quad (11.47)$$

где  $n_0(\omega)$  — линейный показатель преломления, для которого имеем формулу Зелемейера

$$n_0^2 = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 + \chi_1. \quad (11.48)$$

Члены порядка  $\varepsilon^2$  в уравнениях (11.41) и (11.42) имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 E_2}{\partial X_0^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial T_0^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P_2}{\partial T_0^2} + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial^2 E_1}{\partial X_0 \partial X_1} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \mu_0 \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0 \partial T_1} \right) = 0, \quad (11.49) \\ &\frac{\partial^2 P_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 P_2 - \varepsilon_0 \Omega^2 E_2 + 2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0 \partial T_1} = 0. \end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения  $E_2$  и подставив в первое, получим, что

$$\begin{aligned} \widehat{L}P_2 + 2\varepsilon_0\Omega^2 \left( \frac{\partial^2 E_1}{\partial X_0 \partial X_1} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \mu_0 \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + \\ + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \right) \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0 \partial T_1} = 0, \end{aligned} \quad (11.50)$$

где

$$\widehat{L} \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \right) - \frac{\Omega^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2}.$$

Подставляя сюда соотношения (11.44), (11.45) для  $E_1$  и  $P_1$  и требуя уничтожения секулярных членов, находим, что  $A$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial X_1} + k' \frac{\partial A}{\partial T_1} = 0, \quad (11.51)$$

где

$$\begin{aligned} k' &= \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^{-1/2} \left( 1 + \frac{\Omega^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{c} \left( n_0 + \omega \frac{dn_0}{d\omega} \right) = \frac{1}{v_g}. \end{aligned} \quad (11.52)$$

Теперь уравнение (11.50) принимает вид

$$\widehat{L}P_2 = 0,$$

следовательно,  $E_2, P_2 \sim \exp(i\theta)$ . В таком случае из уравнений (11.49) находим

$$\begin{aligned} E_2 &= Be^{i\theta} + \text{к.с.}, \\ P_2 &= \varepsilon_0 \chi_1 \left( B - \frac{2i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{i\theta} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (11.53)$$

где  $B = B(X_1, T_1)$ .

Наконец, выделим в уравнениях (11.41), (11.42) члены порядка  $\varepsilon^3$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_3}{\partial X_0^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_3}{\partial T_0^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P_3}{\partial T_0^2} + \\ + 2 \left( \frac{\partial^2 E_2}{\partial X_0 \partial X_1} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial X_0 \partial X_2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_0 \partial T_2} \right) + \\ + \frac{\partial^2 E_1}{\partial X_1^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_1^2} - \mu_0 \left( 2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial T_0 \partial T_1} + 2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_1^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 P_3}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 P_3 - \varepsilon_0 \Omega^2 E_3 + 2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial T_0 \partial T_1} + 2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_1^2} - \omega_0^2 \alpha P_1^3 = 0. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений  $E_3$ , получаем

$$\begin{aligned} \widehat{L}P_3 + \varepsilon_0\Omega^2 \left[ 2 \left( \frac{\partial^2 E_1}{\partial X_0 \partial X_2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_0 \partial T_2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0 \partial T_2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{\partial^2 E_2}{\partial X_0 \partial X_1} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial T_0 \partial T_1} - \mu_0 \frac{\partial^2 P_2}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + \frac{\partial^2 E_1}{\partial X_1^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_1^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_1^2} \right] + \\ + \left( \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \right) \left[ 2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_0 \partial T_2} + 2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial T_1^2} - \omega_0^2 \alpha P_1^3 \right] = 0, \end{aligned}$$

Подставляя сюда соотношения (11.44), (11.45), (11.51) и (11.53) и приравнявая к нулю секулярные члены, получаем НУШ

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial X_2} + k' \frac{\partial A}{\partial T_2} \right) + \beta \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + \gamma |A|^2 A = 0, \quad (11.54)$$

а также уравнение для функции  $B$

$$\frac{\partial B}{\partial X_1} + k' \frac{\partial B}{\partial T_1} = 0.$$

В уравнении (11.54)

$$\beta = -\frac{k''}{2} = \frac{\omega\Omega^2 (\omega^4 + 2\omega^2\omega_0^2 - 3\omega_0^2(\Omega^2 + \omega_0^2))}{2c(\omega_0^2 - \omega^2)^4 \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^{3/2}}, \quad (11.55)$$

$$\gamma = \frac{3\alpha\varepsilon_0^2\omega^2\omega_0^2\Omega^6}{2kc^2(\omega_0^2 - \omega^2)^4}. \quad (11.56)$$

Из этих соотношений следует, что модуляционная неустойчивость возможна на верхней ветви дисперсионной характеристики (см. рис. 9.1), где  $k'' < 0$ , т.е. в области аномальной дисперсии групповой скорости ( $v_g$  растет с ростом  $k$ ).

Если из уравнения (11.42) приближенно выразить поляризацию в виде

$$P \approx \varepsilon_0\chi(E) E = \varepsilon_0 (\chi_1 E + \chi_3 E^3 + \dots), \quad (11.57)$$

то можно найти, что

$$\chi_3 \approx \frac{\alpha\varepsilon_0^2\omega_0^2\chi_1^3}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (11.58)$$

Теперь, если ввести *нелинейный показатель преломления*

$$n = n_0 + n_2 |A|^2, \quad (11.59)$$

то, учитывая, что  $n^2 = 1 + \chi(E)$ , и полагая нелинейную добавку в формуле (11.59) малой, будем иметь

$$n_2 \approx \frac{3\chi_3}{2n_0}.$$

Таким образом, выражение (11.56) можно переписать в виде

$$\gamma = \frac{\omega n_2}{c}. \quad (11.60)$$

Уравнение (11.54), очевидно, несправедливо вблизи резонансной частоты  $\omega_0$ . Более того, в реальном диэлектрике таких частот несколько и вместо формулы (11.48) следует записать

$$n_0^2 = 1 + \sum_n \frac{\Omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2}.$$

Поэтому дисперсионная диаграмма имеет вид, подобный изображенному на рис. 11.5 (ср. рис. 9.1), и область частот, в которой  $k'' < 0$ , ограничена. Длину волны  $\lambda_0$ , на которой  $k'' = 0$ , называют длиной волны нулевой дисперсии. Например, для кварцевого стекла  $\lambda_0 = 1.3$  мкм, а резонансные длины волн равны 0.068 мкм, 0.116 мкм и 9.869 мкм.

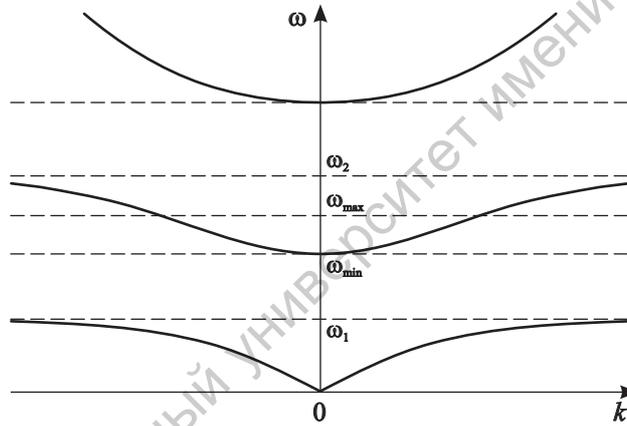


Рис. 11.5. Дисперсионные кривые электромагнитной волны в среде из электронов-осцилляторов при наличии двух резонансных частот. Модуляционная неустойчивость реализуется в области  $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$

Рассмотренная задача имеет большое практическое значение, так как дает простейшее описание распространения электромагнитных солитонов в диэлектрических волноводах (*волоконных световодах*)<sup>3</sup>. Именно уникальные свойства солитонов, такие, как их способность распространяться без искажений на большие расстояния, очень существенны для применения в волоконно-оптических системах связи [133, 134].

Разумеется, волну в волоконном световоде нельзя считать плоской. Вместо соотношения (11.44) следует записать

$$E_1 = F(y, z) A e^{i\theta} + \text{к.с.},$$

<sup>3</sup>Поэтому уравнение (11.54) записано в виде, более удобном для анализа распространения сигналов, когда имеется производная по координате лишь первого порядка.

где функция  $F$  описывает поперечное распределение волноводной моды. Однако величины  $k'$ ,  $k''$  при этом изменяются незначительно, по крайней мере, если длина несущей волны не слишком близка к  $\lambda_0$ . Выражение (11.60) модифицируется следующим образом [133, 137]:

$$\gamma = \frac{\omega n_2}{c} \frac{\int \int |F|^4 dydz}{\int \int |F|^2 dydz}.$$

В волоконно-оптических системах связи информация передается в виде закодированной последовательности импульсов. Длительность импульсов определяет скорость передачи информации  $B$  (бит/с). В линейных световодах дисперсионное расплывание импульсов ограничивает величину  $B$  и максимально возможную длину системы  $L$  (точнее, произведение  $BL$ ). Так, согласно [133], для типичных параметров световодов  $B \approx 100$  Мбит/с при  $L = 50$  км. При работе вблизи длины волны нулевой дисперсии можно увеличить  $B$  до 2 Гбит/с. В связи с этим весьма выгодным представляется использование для передачи информации именно солитонов, для которых дисперсионные эффекты в точности компенсируются нелинейными. Эта идея была выдвинута в 1973 г. А. Хасегавой и Ф. Ташпертом [138] и реализована экспериментально в 1980 г. Л. Молленауэром с сотрудниками из Лаборатории Белл [139], которые впервые наблюдали устойчивое распространение оптических солитонов длительностью 7 пс на расстояние 700 м.

Конечно, реальные импульсы в оптическом волокне всё-таки расплываются. За это ответственны факторы, которые не были учтены при выводе уравнения (11.54), в первую очередь — затухание. Поэтому используют длину волны 1.55 мкм (для кварцевого стекла), на которой потери минимальны. Ключевую роль для передачи солитонов на большие расстояния сыграла идея периодически усиливать солитоны за счет вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР). В 1988 г. за счет ВКР-усиления было обеспечено распространение солитонов на расстояние свыше 4 000 км без заметного увеличения их длительности [140]. Наконец, оказалось, что наиболее выгодно использовать волокно, в котором чередуются участки с нормальной и аномальной дисперсией групповой скорости (так называемые dispersion managed solitons). С помощью этой технологии осуществлена передача информации со скоростью 10 Гбит/с на расстояния свыше 10 000 км, а со скоростью в несколько сот Гбит/с — на расстояния порядка 1000 км (в этом случае по одному волокну передается сразу большое число сигналов с различной длиной волны). В 2002 г. в Австралии была введена в действие первая коммерческая солитонная линия связи протяженностью около 4 000 км [134]. Исторический обзор развития оптических коммуникационных технологий, использующих солитоны, можно найти в работах [141, 142].

## 11.7. Самофокусировка света

Модуляционная неустойчивость может проявляться по отношению не только к продольным, но и поперечным возмущениям. В последнем случае возникает явление *самофокусировки*. В данном параграфе будет рассмотрена самофокусировка электромагнитной волны в нелинейном диэлектрике.

Пусть показатель преломления зависит от интенсивности в соответствии с формулой (11.59), причем  $n_2 > 0$ . Тогда фазовая скорость  $v_{ph} = c/n(E)$  уменьшается с ростом амплитуды поля. Рассмотрим распространение ограниченного волнового пучка с колоколообразным распределением интенсивности, подобным изображенному на рис. 11.6а. Так как на оси пучка, где интенсивность максимальна,  $v_{ph}$  меньше, чем на краях, первоначально плоский фронт пучка деформируется, как это показано на рис. 11.6б. Эффективная ширина пучка уменьшается, т.е. происходит его самофокусировка. В случае  $n_2 < 0$  среда, наоборот, является дефокусирующей.

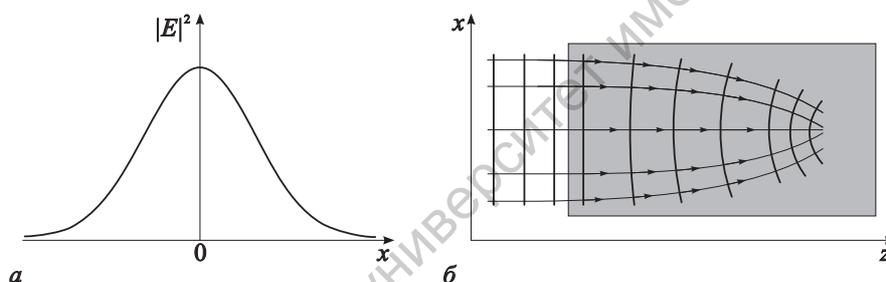


Рис. 11.6. Распределение интенсивности в поперечном сечении волнового пучка (а) и искажение его фронта при самофокусировке (б)

Это явление было предсказано Г.А. Аскарьяном в 1962 г. из весьма простых соображений [143]. Он предположил, что в оптически прозрачной среде распространяется мощный луч лазера. Такой луч за счет целого ряда эффектов (нелинейной поляризуемости, электрострикции, разогрева и т.п.) немного изменяет показатель преломления среды. Если среда становится оптически более плотной (показатель преломления увеличивается), то луч создает сам себе нечто вроде линзы, которая будет его фокусировать. Поэтому центральная часть волнового фронта несколько отстает от периферических, и волна становится сходящейся<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Согласно формуле Диплома на открытие № 67 с приоритетом от 22.12.1961 г., выданного Аскарьяну: «Установлено неизвестное ранее явление самофокусировки электромагнитных и звуковых лучей, заключающееся в уменьшении расходимости (или увеличении сходимости) лучей из-за появления поперечного градиента нелинейного показателя преломления и возникновения нелинейного волновода, уменьшающего сечение пучка».

При описании оптической самофокусировки будем предполагать, что дисперсионными эффектами можно пренебречь. Тогда можно считать, что поляризация среды связана с напряженностью поля алгебраическим соотношением (11.57), где коэффициенты  $\chi_{1,3}$  есть константы. Запишем неоднородное волновое уравнение Максвелла

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}.$$

Подставив в него выражение (11.57), получим

$$(1 + \chi_1) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - c^2 \Delta_{\perp} E + \chi_3 \frac{\partial^2 (E^3)}{\partial t^2} = 0, \quad (11.61)$$

где  $z$  — продольная координата,  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа по поперечным координатам. Используем стандартный аппарат метода многих масштабов, однако разложения будем вести по всем трем пространственным переменным. Поле  $E$ , как обычно, представим в виде

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon^3 E_3 + \dots$$

и будем искать решение в виде квазиплоской волны, т.е. выберем в порядке  $\varepsilon$

$$E_1 = A e^{i(kz - \omega t)} + \text{к.с.},$$

где амплитуда  $A$  зависит от медленных переменных  $T_1, X_1, Y_1, Z_1, \dots$ . Частота  $\omega$  и волновое число  $k$  связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = \frac{ck}{n_0}.$$

Напомним, что в рамках сделанных приближений  $n_0 = \sqrt{1 + \chi_1} = \text{const}$  (дисперсии нет).

Выделяя из уравнения (11.61) члены порядка  $\varepsilon^2$ , находим

$$\hat{L} E_2 + 2 \left[ (1 + \chi_1) \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_0 \partial T_1} - c^2 \frac{\partial^2 E_1}{\partial Z_0 \partial Z_1} \right] = 0, \quad (11.62)$$

где  $\hat{L} = (1 + \chi_1) \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial Z_0^2}$ . Условие уничтожения секулярных членов, как обычно, приводит к уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + \frac{c}{n_0} \frac{\partial A}{\partial Z_1} = 0, \quad (11.63)$$

и уравнение (11.62) принимает вид  $\hat{L} E_2 = 0$ , что позволяет выбрать  $E_2 = 0$ .

Члены порядка  $\varepsilon^3$  в уравнении (11.61) дают

$$\begin{aligned} \hat{L}E_3 + (1 + \chi_1) \left( 2 \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial T_1^2} \right) - \\ - c^2 \left( 2 \frac{\partial^2 E_1}{\partial Z_0 \partial Z_2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial Y_1^2} \right) + \chi_3 \frac{\partial^2 (E_1^3)}{\partial T_0^2} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $E_1$  и приравнявая нулю секулярные члены, получаем

$$\begin{aligned} 2i \left( \omega (1 + \chi_1) \frac{\partial A}{\partial T_2} + kc^2 \frac{\partial A}{\partial Z_2} \right) - (1 + \chi_1) \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + \\ + c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1^2} + c^2 \Delta_{\perp} A + 3\omega^2 \chi_3 |A|^2 A = 0, \end{aligned}$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2}$ . В силу соотношения (11.63) члены, содержащие производные по  $Z_1$  и  $T_1$ , взаимно уничтожаются. Это обусловлено тем, что не учитываются дисперсионные эффекты ( $dv_g/dk = 0$ ). Перейдя к новым переменным  $Z = Z_2$ ,  $T = T_2 - n_0 Z_2/c$ , получим неоднмерный вариант НУШ:

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} A + \gamma |A|^2 A = 0, \quad (11.64)$$

где  $\gamma$  по прежнему описывается формулой (11.60).

Уравнение (11.64) описывает процесс стационарной самофокусировки и позволяет найти пространственное распределение интенсивности волнового пучка. В плоском двумерном случае ( $\Delta_{\perp} \equiv \partial^2/\partial X_1^2$ ) оно превращается в обычное НУШ, имеющее решения в виде солитонов (11.26). Процесс образования солитонов из начального возмущения теперь соответствует распаду волнового пучка на несколько более узких самофокусированных пучков, форма которых в дальнейшем не изменяется. Их стабильность вызвана взаимной компенсацией нелинейных и дифракционных эффектов. Отметим, что характерная ширина пучка обратно пропорциональна амплитуде солитона  $a_m$  в формуле (11.26), а скорость  $U$  теперь определяет угол между направлением его распространения и осью  $z$ . Такая ситуация реализуется, например, при самофокусировке нелинейных магнитостатических волн в ферритовых пленках [144, 145].

Для нелинейной оптики более интересной представляется ситуация, когда пучок является не плоским, а цилиндрическим. В общем случае уравнение (11.64) не является интегрируемым и его точное решение найти не удастся. Однако оно обладает двумя важными интегралами движения, которые помогают выяснить характер эволюции волнового пучка. Первый можно найти, умножив уравнение (11.64) на  $A^*$  и вычитая из него комплексно-сопряженное, что дает

$$i \frac{\partial |A|^2}{\partial Z} + \frac{1}{2k} (A^* \Delta_{\perp} A - A \Delta_{\perp} A^*) = 0.$$

Проинтегрируем это соотношение по поперечному сечению. Поскольку

$$A^* \Delta_{\perp} A - A \Delta_{\perp} A^* = \nabla_{\perp} (A^* \nabla_{\perp} A - A \nabla_{\perp} A^*),$$

интеграл от этой величины обращается в нуль, так как  $A(x, y \rightarrow \pm\infty) = 0$ . Следовательно,  $dI_1/dZ = 0$ , где

$$I_1 = \int |A|^2 ds_{\perp}. \quad (11.65)$$

Чтобы найти другой интеграл, умножим уравнение (11.64) на  $\partial A^*/\partial Z$  и сложим с комплексно-сопряженным выражением. В результате получим

$$\frac{1}{2k} \left( \frac{\partial A^*}{\partial Z} \Delta_{\perp} A + \frac{\partial A}{\partial Z} \Delta_{\perp} A^* \right) + \gamma |A|^2 \frac{\partial |A|^2}{\partial Z} = 0.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\partial A^*}{\partial Z} \Delta_{\perp} A + \frac{\partial A}{\partial Z} \Delta_{\perp} A^* = \nabla_{\perp} \left( \frac{\partial A^*}{\partial Z} \nabla_{\perp} A + \frac{\partial A}{\partial Z} \nabla_{\perp} A^* \right) - \frac{\partial |\nabla_{\perp} A|^2}{\partial Z},$$

следовательно, интегрирование по поперечному сечению приводит к уравнению  $dI_2/dZ = 0$ , где

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{k} |\nabla_{\perp} A|^2 - \gamma |A|^4 \right) ds_{\perp}. \quad (11.66)$$

Если использовать аналогию с квантовой механикой, то интегралы (11.65) и (11.66) имеют смысл, соответственно, числа квазичастиц и полной энергии.

Далее, можно ввести величину  $J = \int r^2 |A|^2 ds_{\perp}$  (при этом, очевидно, величина  $J/I_1$  будет иметь смысл эффективной ширины пучка) и, используя так называемый *метод моментов* [146, 147], показать, что

$$\frac{d^2 J}{dZ^2} = 8I_2.$$

Дважды интегрируя это соотношение, получаем

$$J = C_1 + C_2 Z + 4I_2 Z^2,$$

где  $C_{1,2}$  — постоянные интегрирования. Видно, что если начальные условия таковы, что  $I_2 < 0$ , то на достаточно больших расстояниях правая часть данного выражения становится отрицательной, в то время как  $J$  по определению положительная величина. Это говорит о том, что в точке  $Z_c$ , где  $J$  изменяет знак, эффективная ширина волнового пучка обращается в нуль, а амплитуда поля на оси — в бесконечность, т.е. происходит его *коллапс*. При этом уравнение (11.64), очевидно, теряет справедливость.

В действительности процесс самофокусировки продолжается до тех пор, пока не происходит пробой диэлектрика.

Разумеется, явление самофокусировки наблюдается не только в нелинейной оптике. Например, активно исследуется самофокусировка различных типов волн в акустике и физике плазмы. Имеется обширная литература, в которой подробно обсуждаются различные вопросы, связанные с нелинейной дифракцией волновых пучков (см., например, [9, 13]). В частности, можно порекомендовать книгу [147], целиком посвященную проблеме самофокусировки.

### 11.8. Трехволновое взаимодействие в квадратично-нелинейной среде

Предыдущие параграфы были посвящены явлениям, связанным с нелинейным самовоздействием волновых пакетов в сильно диспергирующих средах. Именно при сильной дисперсии, когда фазовые скорости основной и высших гармоник отличаются значительно, волну с полным основанием можно считать квазигармонической. Однако даже в этом случае важную роль могут играть эффекты резонансного взаимодействия квазигармонических волновых пакетов. Наиболее существенным среди них является взаимодействие трех волн, частоты и волновые числа которых связаны соотношениями

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 &= \omega_3, \\ k_1 + k_2 &= k_3,\end{aligned}\tag{11.67}$$

которые называются условиями *трехволнового резонанса*. Заметим, что модуляционную неустойчивость можно рассматривать как предельный случай четырехволнового резонанса (11.9), (11.10) ( $\omega_{\pm}$  близки к  $\omega_0$ ).

Рассмотрим распространение трех волновых пакетов с частотами и волновыми числами, удовлетворяющими условиям (11.67), в квадратично-нелинейной среде. Тогда, применяя метод многих масштабов, нетрудно убедиться, что в порядке  $\varepsilon^2$  возникнут члены, пропорциональные  $\exp[i(\theta_j \pm \theta_k)]$ , где  $\theta_j = k_j x - \omega_j t$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Поскольку соотношения (11.67) можно переписать в виде

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_3,$$

в качестве условия уничтожения секулярных членов вместо уравнений типа

$$\frac{\partial A_j}{\partial T_1} + v_j \frac{\partial A_j}{\partial X_1} = 0,$$

где  $A_j$  — амплитуды взаимодействующих волн,  $v_j$  — их групповые скорости

сти, будем иметь систему связанных нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial T} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} &= \sigma_1 A_3 A_2^*, \\ \frac{\partial A_2}{\partial T} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial X} &= \sigma_2 A_3 A_1^*, \\ \frac{\partial A_3}{\partial T} + v_3 \frac{\partial A_3}{\partial X} &= -\sigma_3 A_1 A_2.\end{aligned}\tag{11.68}$$

Здесь  $\sigma_j$  — коэффициенты нелинейного взаимодействия, которые в консервативной среде являются вещественными. Поскольку в данном случае уравнения возникают в порядке  $\varepsilon^2$  и требуется лишь одна пара медленных переменных, индексы у них будем опускать:  $T \equiv T_1$ ,  $X \equiv X_1$ . Уравнения (11.68) называются *уравнениями трехволнового взаимодействия* и являются одной из эталонных систем теории нелинейных волн. Они описывают широкий круг явлений в различных областях физики [11, 18]. В частности, трехволновым взаимодействиям для поверхностных волн на воде посвящена статья [148], для волн в плазме — книга [149]. Подобно многим другим эталонным уравнениям, система (11.68) интегрируема методом обратной задачи рассеяния [18, 119, 150, 151]. Обсудим основные свойства этих уравнений.

### 11.8.1. Параметрическая (распадная) неустойчивость

Вначале остановимся на взаимодействии волн с положительной энергией. В этом случае все коэффициенты  $\sigma_j$  имеют одинаковые знаки (для определенности будем считать их положительными). Прежде всего отметим, что уравнения (11.68) имеют пространственно-однородные решения вида  $A_{i,j} = 0$ ,  $A_k = A_0$ , где  $A_0 = \text{const}$ ,  $i \neq j \neq k$ . Исследуем эти решения на устойчивость. Рассмотрим ситуацию, когда отлична от нуля амплитуда одной из низкочастотных волн. Положим  $A_1 = A_0 + a_1(X, T)$ ,  $A_{2,3} = a_{2,3}(X, T)$ , где  $a_{1,2,3}$  — малые возмущения. Тогда, линеаризуя второе и третье уравнения (11.68), находим

$$\frac{\partial a_2}{\partial T} + v_2 \frac{\partial a_2}{\partial X} = \sigma_2 A_0^* a_3,$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial T} + v_3 \frac{\partial a_3}{\partial X} = -\sigma_3 A_0 a_2.$$

Отыскивая решение в виде  $a_{2,3} \sim \exp[i(KX - \Omega T)]$ , получаем дисперсионное соотношение связанных волн, которое имеет вид

$$(\Omega - v_2 K)(\Omega - v_3 K) = \sigma_2 \sigma_3 |A_0|^2.$$

Поскольку правая часть этого уравнения положительна, связь является пассивной [2, 11, 152] и малые возмущения с течением времени не нарастают.

Теперь рассмотрим решение  $A_{1,2} = 0$ ,  $A_3 = A_0 = \text{const}$ , когда отлична от нуля амплитуда высокочастотной волны. В этом случае линеаризация первого и второго уравнений (11.68) дает

$$\frac{\partial a_1}{\partial T} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial X} = \sigma_1 A_0 a_2^*,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial T} + v_2 \frac{\partial a_2}{\partial X} = \sigma_2 A_0 a_1^*,$$

откуда следует дисперсионное соотношение

$$(\Omega - v_1 K)(\Omega - v_2 K) = -\sigma_1 \sigma_2 |A_0|^2.$$

Правая часть этого уравнения отрицательна, следовательно, в данном случае связь активная, что говорит о присутствии неустойчивости [2, 11, 152]. Таким образом, малые возмущения низкочастотных волн нарастают экспоненциально, черпая энергию из высокочастотной волны. Разумеется, экспоненциальный рост имеет место лишь на начальном этапе, когда возмущения всё еще можно считать малыми. Такая неустойчивость называется *параметрической*, так как ее можно трактовать как неустойчивость волн, распространяющихся в периодически-неоднородной среде, промодулированной волной  $A_3$  [11, 90, 152]. Отметим, что параметрическая неустойчивость может быть как *конвективной* ( $v_{1,2}$  имеют одинаковые знаки), так и *абсолютной* (знаки разные) (см. [2, 11, 90]). Важно также подчеркнуть, что эта неустойчивость является нелинейной так как тривиальное решение  $A_{1,2,3} = 0$ , очевидно, устойчиво.

Высокочастотная волна  $A_3$  называется *волной накачки*, а из низкочастотных волн одна представляет собой *полезный сигнал*, а другая называется *холостой*. На языке квазичастиц соотношения (11.67) можно рассматривать как законы сохранения энергии и импульса в процессе распада кванта волны накачки на кванты сигнальной и холостой волн. Поэтому параметрическую неустойчивость также называют *распадной*.

Уравнения трехволнового взаимодействия позволяют проанализировать стадию насыщения неустойчивости. Для этого рассмотрим стационарный вариант уравнений (11.68) ( $\partial/\partial T \equiv 0$ ). Вводя в уравнениях (11.68) переменные

$$A'_i = A_i \sqrt{\frac{\sigma_j \sigma_k}{v_j v_k}},$$

где  $i \neq j \neq k$ , и опуская штрихи, получим

$$\frac{dA_1}{dX} = A_2^* A_3, \quad (11.69)$$

$$\frac{dA_2}{dX} = A_1^* A_3, \quad (11.70)$$

$$\frac{dA_3}{dX} = -A_1 A_2. \quad (11.71)$$

Уравнения (11.69)–(11.71) описывают стационарный режим параметрического усиления. Умножим уравнение (11.69) на  $A_1^*$  и сложим с комплексно-сопряженным. Тогда

$$\frac{d|A_1|^2}{dX} = A_1^* A_2^* A_3 + \text{к.с.}$$

Аналогично из уравнений (11.70) и (11.71) находим

$$\frac{d|A_2|^2}{dX} = A_1^* A_2^* A_3 + \text{к.с.},$$

$$\frac{d|A_3|^2}{dX} = -A_1 A_2 A_3^* + \text{к.с.}$$

Из этих соотношений нетрудно получить три закона сохранения, два из которых являются независимыми:

$$|A_1|^2 - |A_2|^2 = I_1, \quad (11.72)$$

$$|A_3|^2 + |A_1|^2 = I_2, \quad (11.73)$$

$$|A_3|^2 + |A_2|^2 = I_2 - I_1, \quad (11.74)$$

где  $I_{1,2}$  — интегралы движения. Уравнения (11.72)–(11.74) показывают, как перераспределяется мощность накачки между сигнальной и холостой волнами. В теории параметрических колебаний они носят название *соотношений Мэнли–Роу* [2, 3, 11, 152].

Разделим в уравнениях (11.69)–(11.71) вещественные и мнимые части, полагая  $A_j = a_j \exp(i\varphi_j)$ , где  $a_j$  и  $\varphi_j$  вещественны. После несложных преобразований получаем

$$\dot{a}_1 = a_2 a_3 \cos \Phi,$$

$$\dot{a}_2 = a_1 a_3 \cos \Phi,$$

$$\dot{a}_3 = -a_1 a_2 \cos \Phi, \quad (11.75)$$

$$\dot{\Phi} = \left( \frac{a_1 a_2}{a_3} - \frac{a_2 a_3}{a_1} - \frac{a_1 a_3}{a_2} \right) \sin \Phi,$$

где  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$ , а точка обозначает дифференцирование по  $X$ . Последнее уравнение приводится к виду

$$\dot{\Phi} = - \left( \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) \text{tg } \Phi = - \frac{d}{dX} (\ln(a_1 a_2 a_3)) \text{tg } \Phi.$$

Интегрируя это уравнение, находим еще один закон сохранения в виде

$$a_1 a_2 a_3 \sin \Phi = G.$$

Тогда система (11.75) упрощается. Вводя  $N_j = a_j^2$ , получаем уравнения

$$\dot{N}_j = 2\sqrt{N_1 N_2 N_3 - G^2}.$$

С учетом соотношений (11.72)–(11.74) для  $N_3$  будем иметь

$$\dot{N}_3 = 2\sqrt{N_3(I_2 - N_3)(I_2 - I_1 - N_3) - G^2}. \quad (11.76)$$

Подкоренное выражение представляет собой полином с тремя нулями, который в общем случае можно записать в виде  $(N_3 - N_a)(N_3 - N_b)(N_3 - N_c)$ , причем  $0 \leq N_a \leq N_b \leq N_c$ . Вводя новую переменную

$$y = \sqrt{\frac{N_3 - N_a}{N_b - N_a}},$$

приведем уравнение (11.76) к виду

$$\dot{y} = \sqrt{N_c - N_a} \sqrt{(1 - y^2)(1 - m^2 y^2)},$$

где  $m^2 = \frac{N_b - N_a}{N_c - N_a} < 1$ . Решение этого уравнения выражается через эллиптические функции Якоби следующим образом:

$$y = \operatorname{sn} \left( \sqrt{N_c - N_a} X; m \right).$$

Окончательно находим, что

$$N_3 = N_a + (N_b - N_c) \operatorname{sn}^2 \left( \sqrt{N_c - N_a} X; m \right). \quad (11.77)$$

Далее при помощи соотношений (11.72)–(11.74) нетрудно найти зависимости амплитуд волн от координаты. Типичные зависимости  $A_{1,2,3}(X)$  при параметрической неустойчивости, иллюстрирующие процесс периодической перекачки энергии из высокочастотной волны в низкочастотные и обратно, представлены на рис. 11.7а. На рис. 11.7б изображены аналогичные зависимости в случае, когда вначале доминирует одна из низкочастотных волн и эффективное усиление невозможно.

Если обе низкочастотные волны на входе в систему имеют достаточно большую интенсивность, то возможен процесс, обратный распаду, а именно, слияние квантов на частотах  $\omega_{1,2}$  с образованием кванта частоты  $\omega_3$ . В результате можно осуществить усиление высокочастотной волны. Это явление получило название *преобразования частоты вверх* или *ап-конверсии* (up-conversion).

Системы с трехволновым параметрическим взаимодействием находят широкое применение в технике. Так, взаимодействие оптических волн, распространяющихся в диэлектрическом кристалле с квадратичной зависимостью поляризации от напряженности электрического поля (например,

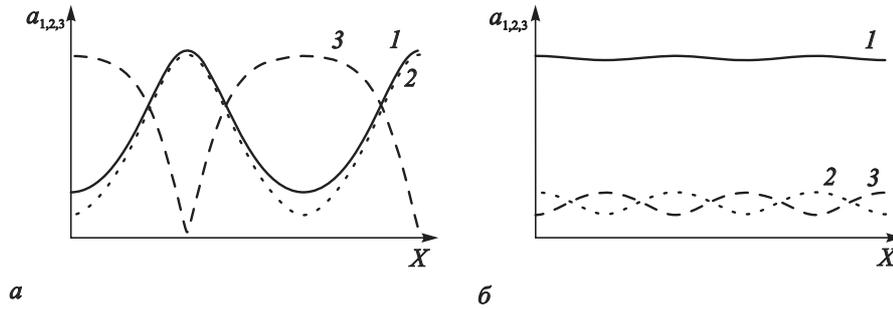


Рис. 11.7. Стационарные пространственные распределения амплитуд волн при трехволновом параметрическом взаимодействии, когда  $a_3(0) \gg a_{1,2}(0)$  (а) и  $a_1(0) \gg a_{2,3}(0)$  (б)

$\text{LiNbO}_3$  — ниобат лития, KDP — дигидрофосфат калия и др.) лежит в основе принципа действия *параметрических усилителей и генераторов света* [153], впервые предложенных в 1962 г. С.А. Ахмановым и Р.В. Хохловым [154, 155], а также независимо от них Р. Кроллом и Н. Кингстоном. Основное достоинство параметрических устройств по сравнению с оптическими квантовыми генераторами (лазерами) заключается в возможности более широкой и плавной перестройки частоты излучения, что важно, например, для спектроскопических исследований. Были разработаны их акустические аналоги — параметрические усилители ультразвука, основанные на взаимодействии различных типов упругих волн в твердом теле [15, гл. VI]; отметим, что в этом случае приходится принимать специальные меры по созданию нужного типа дисперсии. В радиодиапазоне реализованы распределенные параметрические усилители и генераторы на основе нелинейных радиотехнических линий передачи (аналогичных рассмотренным в лекциях 8,9) [90, 152]. В микроволновом диапазоне можно осуществить параметрическое усиление магнитостатических волн в ферромагнитных пленках [156], различных типов волн в электронных потоках [152, 157] и плазменно-пучковых системах [158]. Наибольший интерес представляют *лазеры на свободных электронах* (ЛСЭ), в которых сигнальная волна генерируется в результате взаимодействия релятивистского электронного пучка с полем накачки, роль которой выполняет периодическое электро- или магнитостатическое поле или же электромагнитная волна, бегущая навстречу пучку [2, 159]. ЛСЭ обладают теоретически безграничными возможностями перестройки частоты излучения. В частности, в настоящее время ведется разработка ЛСЭ вплоть до рентгеновского диапазона [160].

### 11.8.2. Вырожденное параметрическое взаимодействие

Если частоты низкочастотных волн совпадают, трехволновое взаимодействие становится *вырожденным*. Резонансные условия (11.67) в этом случае принимают вид

$$2\omega_1 = \omega_2, \quad 2k_1 = k_2,$$

а уравнения (11.68), соответственно, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial T} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} &= \sigma_1 A_2 A_1^*, \\ \frac{\partial A_2}{\partial T} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial X} &= -\sigma_2 A_1^2. \end{aligned} \quad (11.78)$$

Как видим, в данном случае взаимодействие осуществляется между первой и второй гармониками волны, точно так же, как и при параметрическом резонансе в сосредоточенных колебательных системах [2, 3].

Помимо параметрического усиления, в вырожденном случае возможно ещё одно интересное явление: *генерация второй гармоники* (см., например, [153]). Это один из наиболее впечатляющих нелинейно-оптических эффектов, впервые описанный в 1961 г. П. Франкеном и соавторами [161], которые наблюдали превращение красного лазерного луча в синий при прохождении через кристалл кварца. Как видно из уравнений (11.78), даже если на входе в нелинейную среду амплитуда второй гармоники равна нулю, за счет квадратичной нелинейности будет происходить ее генерация. Стационарную теорию вырожденного параметрического усиления и генерации второй гармоники можно построить аналогично тому, как это было сделано в § 11.8.1 для невырожденного случая.

**Задача 11.6.** Проанализируйте стационарный режим вырожденного параметрического усиления по следующей схеме:

1. Положите в уравнениях (11.78)  $\partial/\partial T \equiv 0$  и найдите замену переменных, приводящую эти уравнения к виду, не содержащему коэффициентов:

$$\frac{dA_1}{dX} = A_2 A_1^*, \quad \frac{dA_2}{dX} = -A_1^2.$$

2. Получите отсюда систему уравнений для вещественных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dX} &= a_1 a_2 \cos \Phi, \\ \frac{da_2}{dX} &= -a_1^2 \cos \Phi, \\ \frac{d\Phi}{dX} &= \left( \frac{a_1^2}{a_2} - 2a_2 \right) \sin \Phi, \end{aligned} \quad (11.79)$$

где  $\Phi = \varphi_2 - 2\varphi_1$ .

3. Покажите, что система уравнений (11.79) имеет два первых интеграла

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= I, \\ a_1^2 a_2 \sin \Phi &= G. \end{aligned}$$

4. Введите новые переменные  $x = -a_2 \cos \Phi$ ,  $y = a_2 \sin \Phi$  и с учетом интегралов движения получите из (11.79) динамическую систему второго порядка [162] (точка обозначает производную по  $X$ )

$$\dot{x} = I - x^2 - 3y^2, \quad \dot{y} = 2xy.$$

Найдите неподвижные точки этой системы, определите их тип и постройте фазовый портрет. Обсудите связь вида различных фазовых траекторий на плоскости  $x, y$  и зависимостей амплитуд волн  $a_{1,2}$  от координаты. Укажите основные отличия от невырожденного случая.

**Задача 11.7.** Рассмотрите процесс генерации второй гармоники, которому отвечают граничные условия  $a_1(0) = a_0$ ,  $a_2(0) = 0$ . Покажите, что в этом случае в уравнениях (11.79) можно положить  $\Phi = 0$ , и найдите решение полученных уравнений в виде

$$a_1 = a_0 \operatorname{sech}(a_0 X), \quad a_2 = a_0 \operatorname{th}(a_0 X).$$

### 11.8.3. Взрывная неустойчивость

Перейдем к рассмотрению трехволновых взаимодействий, в которых участвуют волны с положительной и отрицательной энергией<sup>5</sup>. В общем случае уравнения (11.68) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial T} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} &= s_1 \sigma_1 A_3 A_2^*, \\ \frac{\partial A_2}{\partial T} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial X} &= s_2 \sigma_2 A_3 A_1^*, \\ \frac{\partial A_3}{\partial T} + v_3 \frac{\partial A_3}{\partial X} &= -s_3 \sigma_3 A_1 A_2, \end{aligned} \quad (11.80)$$

где  $s_j = \pm 1$  — знаки энергий взаимодействующих волн, а коэффициенты  $\sigma_j$  по-прежнему считаются положительными. Особый интерес представляет ситуация, когда отрицательной энергией обладает либо высокочастотная, либо обе низкочастотные волны. Рассмотрим для простоты пространственно-однородный вариант уравнений (11.80) ( $\partial/\partial X \equiv 0$ ). Переходя к переменным  $A'_i = A_i \sqrt{\sigma_j \sigma_k}$  и разделяя вещественные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_2 a_3 \cos \Phi, \\ \dot{a}_2 &= a_1 a_3 \cos \Phi, \\ \dot{a}_3 &= a_1 a_2 \cos \Phi, \end{aligned} \quad (11.81)$$

$$\dot{\Phi} = - \left( \frac{a_1 a_2}{a_3} + \frac{a_2 a_3}{a_1} + \frac{a_1 a_3}{a_2} \right) \sin \Phi,$$

<sup>5</sup>Напомним, что волнами с отрицательной энергией называются волны, для которых при росте амплитуды энергия системы уменьшается [2].

где по-прежнему  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$ , а точка обозначает дифференцирование по  $T$ . Вместо соотношений Мэнли-Роу (11.72)–(11.74) теперь будем иметь

$$a_1^2 - a_2^2 = I_1, \quad a_3^2 - a_2^2 = I_2, \quad a_3^2 - a_1^2 = I_2 - I_1. \quad (11.82)$$

Из соотношений (11.82) следует, что, в отличие от параметрической неустойчивости, амплитуды всех трех волн в данном случае будут нарастать одновременно. Однако тут нет противоречия с законом сохранения энергии, поскольку рост амплитуды волны с отрицательной энергией сопровождается уменьшением энергии системы.

Заметим, что если при  $T = 0$  амплитуды всех волн были одинаковыми:  $a_1 = a_2 = a_3 = a$ , то это условие будет выполнено и в любой последующий момент времени. Тогда уравнения (11.81) сводятся к системе уравнений второго порядка

$$\dot{a} = a^2 \cos \Phi, \quad (11.83)$$

$$\dot{\Phi} = -3a \sin \Phi, \quad (11.84)$$

которую несложно проанализировать на фазовой плоскости. Прежде всего, отметим, что согласно уравнениям (11.83), (11.84),  $a$  растет при  $\cos \Phi > 0$  и убывает при  $\cos \Phi < 0$ , тогда как  $\Phi$  растет при  $\sin \Phi < 0$  и убывает при  $\sin \Phi > 0$ . Можно также найти уравнение фазовых траекторий в явном виде. Умножим (11.83) на  $a\dot{\Phi}$ , а (11.84) на  $a\dot{a}$ , вычтем их друг из друга и проинтегрируем получившееся соотношение. Получим

$$a^3 \sin \Phi = \text{const}.$$

В результате можно построить фазовый портрет, который приведен на рис. 11.8 (очевидно, что достаточно ограничиться областью  $-\pi \leq \Phi \leq \pi$  или рассматривать динамику системы на фазовом цилиндре).

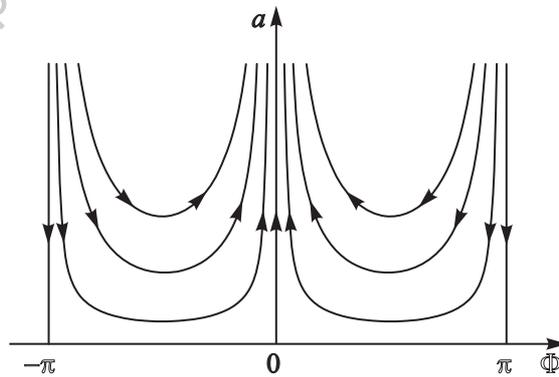


Рис. 11.8. Фазовый портрет системы (11.83), (11.84)

Поскольку при  $\Phi = 0$  фазы волн остаются постоянными, соответствующая фазовая траектория есть вертикальная прямая. На этой прямой уравнение (11.83) принимает вид

$$\dot{a} = a^2.$$

Решение данного уравнения с начальным условием  $a(T = 0) = a_0$  есть

$$a = \frac{a_0}{1 - a_0 T}.$$

Отсюда следует, что амплитуда нарастает, обращаясь в бесконечность при  $T = T^* = a_0^{-1}$ . Имеются также вертикальные фазовые траектории  $\Phi = \pm\pi$ , на которых амплитуда монотонно убывает, но они, очевидно, неустойчивы. Таким образом, поведение произвольного начального возмущения с малой амплитудой будет следующим. Вначале устанавливается состояние с  $\Phi$ , близким к нулю. После этого фазы взаимодействующих волн уже практически не меняются, т.е. происходит синхронизация фаз. Далее амплитуды волн начинают быстро нарастать, обращаясь в бесконечность за конечный промежуток времени. Такая неустойчивость называется *взрывной*. Взрывная неустойчивость реализуется, например, при взаимодействии некоторых типов волн в плазме [149], в радиотехнической линии передачи с нелинейными активными элементами, в которых зависимость тока от напряжения имеет вид  $I(U) \sim -U^2$  [163], а также в системах типа электронный поток — электромагнитная волна [164, 165].

Более сложный характер носит динамика пространственно-неоднородных возмущений. Анализ показывает, что взрывная неустойчивость возможна лишь если энергия начального возмущения достаточно велика, т.е. существует порог неустойчивости. Рассмотрим, например, ситуацию, когда в начальный момент времени возбуждена одна из волн, для определенности —  $A_1$ , причем возмущение имеет вид прямоугольного импульса

$$A_1(X, T = 0) = \begin{cases} A_0 = \text{const}, & 0 < X < 1, \\ 0, & X < 0, X > 1, \end{cases}$$

$$|A_{2,3}(X, T = 0)| \ll |A_0|.$$

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $v_1$ . Тогда уравнения трехволнового взаимодействия принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial T} &= A_3 A_2^*, \\ \frac{\partial A_2}{\partial T} + u_2 \frac{\partial A_2}{\partial X} &= A_3 A_1^*, \\ \frac{\partial A_3}{\partial T} + u_3 \frac{\partial A_3}{\partial X} &= A_1 A_2, \end{aligned}$$

где  $u_2 = v_2 - v_1$ ,  $u_3 = v_3 - v_1$ . На начальной стадии развития неустойчивости, когда амплитуду  $A_1$  можно считать постоянной, эти уравнения становятся такими:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_2}{\partial T} + u_2 \frac{\partial A_2}{\partial X} &= A_0^* A_3, \\ \frac{\partial A_3}{\partial T} + u_3 \frac{\partial A_3}{\partial X} &= A_0 A_2.\end{aligned}$$

Исключая отсюда  $A_3$ , будем иметь

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} + u_2 \frac{\partial}{\partial X} \right) \left( \frac{\partial}{\partial T} + u_3 \frac{\partial}{\partial X} \right) A_2 = |A_0|^2 A_2. \quad (11.85)$$

Полагая  $A_2 \sim \exp[i(KX - \Omega T)]$ , получаем дисперсионное соотношение

$$(\Omega - u_2 K)(\Omega - u_3 K) = -|A_0|^2.$$

Анализ дисперсионного соотношения показывает, что если  $u_2$  и  $u_3$  имеют одинаковые знаки, то неустойчивость носит конвективный характер [2, 11]. Следовательно, с течением времени возмущения волн  $A_{2,3}$  покидают область, в которой локализовано возмущение волны  $A_1$ , и взрывной рост амплитуд не наблюдается. Таким образом, для возбуждения взрывной неустойчивости необходимо вносить возмущение волны, имеющей промежуточную групповую скорость.

Если это условие выполнено, то неустойчивость является абсолютной. Без ограничения общности положим  $u_2 = u$ ,  $u_3 = -u$ . Тогда уравнение (11.85) принимает вид неустойчивого уравнения Клейна–Гордона (см. § 1.4.2)

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial T^2} - u^2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial X^2} = |A_0|^2 A_2, \quad (11.86)$$

причем граничные условия имеют вид

$$A_2(X=0) = 0, \quad \left( \frac{\partial A_2}{\partial T} + u \frac{\partial A_2}{\partial X} \right) \Big|_{X=1} = 0. \quad (11.87)$$

Уравнение (11.86) описывает линейное взаимодействие встречных волн с энергиями разных знаков. Его решение с граничными условиями (11.87) подробно описано в литературе, в основном в связи с задачами сверхвысокочастотной электроники (см., например, [36, 166]). Анализ показывает, что малые возмущения начинают экспоненциально нарастать во времени при выполнении условия

$$\frac{|A_0|^2}{u^2} \geq \frac{\pi}{2}. \quad (11.88)$$

В этом случае по мере нарастания возмущений неустойчивость будет выходить на нелинейную (взрывную) стадию. Если же условие (11.88) не выполнено, то с течением времени импульсы будут разбегаться за счет различия групповых скоростей.

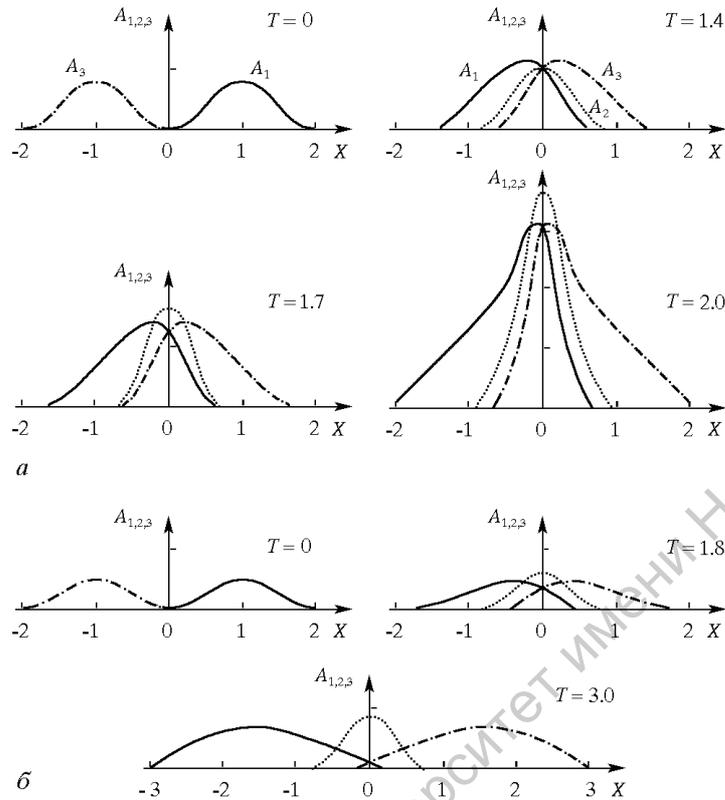


Рис. 11.9. Эволюция амплитуд волн при взрывной неустойчивости [167]:  $a$  — амплитуды импульсов превышают критическое значение — импульсы сливаются;  $b$  — амплитуды меньше критических — импульсы разбегаются

Аналогичные оценки порога взрывной неустойчивости в несколько иной форме были получены в работах [167, 168] и подтверждены результатами численных экспериментов [151, 165, 167, 168]. На рис. 11.9 приведены пространственные распределения амплитуд взаимодействующих волн в различные моменты времени, иллюстрирующие процессы разбегания импульсов, когда порог неустойчивости не достигнут, и слияния с последующим развитием взрывной неустойчивости, когда этот порог превышен [167].

Более строгое аналитическое исследование распадной и взрывной неустойчивостей возможно на основе метода обратной задачи рассеяния [18, 150, 151].

## Лекция 12.

# Нелинейные волны в средах с неустойчивостями

Устойчивость можно определить как свойство системы быть невосприимчивой к малым возмущениям. Вообще говоря, возмущения не обязательно должны быть бесконечно малыми по величине, однако, всегда принципиальное значение имеет вопрос об их нарастании. ... для сплошной среды число степеней свободы является бесконечно большим, и задача становится ... трудной. К тому же основные уравнения представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных.

*Р. Бетчов, В. Криминале. Вопросы гидродинамической устойчивости (М.: Мир, 1971. С. 12)*

Волновые процессы в средах, в которых возникают и развиваются различные неустойчивости, играют важную роль в различных областях физики и техники. Как было показано в § 1.6, можно выделить два типа подобных неустойчивостей. К первому типу следует отнести неустойчивости в *активных средах*, в которых диссипация может быть как положительной, так и отрицательной. В качестве примеров можно привести рабочее вещество оптического квантового генератора, состоящее из частиц с инверсной заселенностью (число атомов или молекул на верхних энергетических уровнях больше, чем на нижних), полупроводники с отрицательным дифференциальным сопротивлением, некоторые химические и биологические системы. Универсальной моделью для описания этих неустойчивостей служит *уравнение Гинзбурга–Ландау*. Неустойчивости второго типа вызваны взаимодействием волн с *положительной и отрицательной энергиями*. Они характерны для так называемых неравновесных сред, в которых имеются некомпенсированные потоки вещества или энергии, например, гидродинамические течения или электронные потоки. Такие неустойчи-

ности описываются нелинейными волновыми уравнениями типа Клейна–Гордона.

В лекции 11 уже рассматривались некоторые волновые неустойчивости: модуляционная, параметрическая, взрывная. Следует, однако, подчеркнуть, что все они являются нелинейными в том смысле, что возмущения малой амплитуды устойчивы, а неустойчивость является следствием нелинейного взаимодействия волн. В настоящей лекции рассматриваются системы, в которых неустойчивы уже линейные возмущения. Впрочем, учет нелинейных эффектов и здесь носит принципиальный характер, так как позволяет ответить на вопрос, чем завершится развитие неустойчивости.

### 12.1. Уравнение Гинзбурга–Ландау

Обратимся вначале к активным средам, в которых неустойчивость связана с наличием отрицательной диссипации. Такие среды описываются комплексными нелинейными дисперсионными соотношениями вида

$$\omega = \omega_r(k, |A|^2) + i\omega_i(k, |A|^2, \nu), \quad (12.1)$$

где  $\omega_{r,i}$  являются вещественными функциями, от волнового числа  $k$  и медленно меняющейся амплитуды волны  $A$ , а  $\nu$  — некоторый управляющий параметр, в зависимости от которого диссипация может быть как положительной, так и отрицательной. В § 1.6 при помощи эвристического подхода из соотношения (12.1) было получено уравнение Гинзбурга–Ландау:

$$i(A_t + v_g A_x) + \beta A_{xx} + \gamma |A|^2 A = i\alpha A. \quad (12.2)$$

Это уравнение справедливо вблизи *точки бифуркации*  $\nu = \nu_c$ ,  $k = k_c$ , в которой  $\omega_i$  меняет знак, т.е. появляется отрицательная диссипация. В уравнении (12.2)  $v_g = \partial\omega_r/\partial k$  — групповая скорость,

$$\begin{aligned} \alpha &= (\nu - \nu_c) \frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}, \\ \beta &= \beta_r + i\beta_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\omega_r}{\partial k^2} + i \frac{\partial^2\omega_i}{\partial k^2} \right), \\ \gamma &= \gamma_r + i\gamma_i = - \left( \frac{\partial\omega_r}{\partial|a|^2} + i \frac{\partial\omega_i}{\partial|a|^2} \right), \end{aligned}$$

причем все производные вычисляются в точке  $\nu = \nu_c$ ,  $k = k_c$ ,  $|A|^2 = 0$ . Напомним, что в этой точке  $\omega_i = \partial\omega_i/\partial k = 0$ .

В пространственно-однородном случае ( $\partial/\partial x = 0$ ) уравнение (12.2) сводится к *укороченному уравнению Ван дер Поля–Дуффинга*

$$A_t = \alpha A - \gamma_i |A|^2 A + i\gamma_r |A|^2 A, \quad (12.3)$$

которое описывает процесс установления колебаний в широком классе автоколебательных систем [3, 11, 19]. Очевидно, что при положительных  $\alpha$  (т.е. при  $\nu > \nu_c$ ) малые возмущения являются нарастающими, при отрицательных — затухающими. Член  $-\gamma_i|A|^2A$  в правой части уравнения (12.3) характеризует эффекты нелинейного затухания. Поэтому следует ограничиться рассмотрением случая  $\gamma_i > 0$ . В противном случае чтобы описать стадию насыщения неустойчивости необходимо включить в уравнение высшие нелинейности (например, члены, пропорциональные  $|A|^4A$ ). Член  $i\gamma_r|A|^2A$  описывает нелинейный сдвиг частоты колебаний.

Таким образом, уравнение Гинзбурга–Ландау можно рассматривать как простейшее обобщение уравнения Ван дер Поля–Дуффинга на распределенные системы. Члены, пропорциональные  $A_x$ ,  $A_{xx}$  в уравнении (12.2), очевидно, описывают эффекты пространственного распространения волны. При этом член  $\beta_r A_{xx}$  характеризует дисперсию, а  $i\beta_i A_{xx}$  — высокочастотную диссипацию, если  $\beta_i < 0$ . В дальнейшем будем предполагать это условие выполненным. Можно показать, что если  $\beta_i > 0$  или  $\gamma_i < 0$ , решения уравнения Гинзбурга–Ландау «взрываются», т.е. обращаются в бесконечность за конечное время.

Уравнение Гинзбурга–Ландау играет большую роль в нелинейной динамике неравновесных сред [169]–[172]. Оно описывает, в частности, вихри Тейлора в течении Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами [32], плоское течение Пуазейля [31], концентрационные волны в химических системах типа реакция–диффузия [33]. Конкретный пример: образование конвективных валов в слое жидкости, подогреваемого снизу [30], будет подробно рассмотрен в § 12.2.

### 12.1.1. Анализ на абсолютную и конвективную неустойчивости

При  $\alpha > 0$  тривиальное решение уравнения (12.2)  $A = 0$  неустойчиво: малые возмущения нарастают во времени и в пространстве. Покажем, что эта неустойчивость может быть как абсолютной, так и конвективной.

Напомним определения абсолютной и конвективной неустойчивостей (см., например, [2, 11, 90]). Если дисперсионное соотношение имеет комплексные корни с  $\text{Im}(\omega(k)) > 0$  то возмущение  $u(x, t) \sim \exp[i(kx - \omega(k)t)]$  нарастает во времени. Если это нарастание происходит таким образом, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t)| = \infty$  в любой фиксированной точке  $x$ , то такую неустойчивость называют *абсолютной*. Если же возмущение, нарастая, сносится вдоль системы, так что в любой точке  $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t)| = 0$ , то неустойчивость называется *конвективной*. Понятия абсолютной и конвективной неустойчивостей ввел Л.Д. Ландау в 1954 г., а позднее независимо от него — П. Стэррок.

Рассмотрим линеаризованный вариант уравнения Гинзбурга–Ландау

(12.2), а именно,

$$A_t + v_g A_x - i\beta A_{xx} = \alpha A.$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{i(kx - \omega(k)t)} dk, \quad (12.4)$$

где  $\omega$  и  $k$  связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = kv_g + \beta k^2 + i\alpha, \quad (12.5)$$

а Фурье-амплитуды  $A_k$  определяются из начальных условий. В уравнении (12.5) частота и волновое число полагаются комплексными:  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ,  $k = k_r + ik_i$ .

Асимптотическую форму возмущения при  $t \rightarrow \infty$  можно определить, вычисляя интеграл (12.4) методом перевала:

$$A(x, t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{i \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_s} t}} A(k_s) e^{f(k_s)t},$$

где  $f(k) = i(kx/t - \omega(k))$ ,  $k_s$  — точка перевала, определяемая из условия  $df/dk|_{k_s} = 0$ , т.е.

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial k_r} = \frac{x}{t}, \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial k_r} = 0.$$

Из соотношения (12.5) находим, что

$$\begin{aligned} \beta_r k_{si} &= -\beta_i k_{sr}, \\ v_g + \frac{2|\beta|^2 k_{sr}}{\beta_r} &= \frac{x}{t}, \end{aligned}$$

где  $k_s = k_{sr} + ik_{si}$ . Величина  $\sigma(k_s) = \text{Re}(f(k_s)) = \omega_i(k_s) - k_{si}x/t$  представляет собой инкремент неустойчивости. Понятно, что неустойчивость является абсолютной, если  $\sigma|_{x/t=0} > 0$ , т.е.

$$\omega_i(k_r^{(0)}) = \alpha - \frac{v_g \beta_i k_r^{(0)}}{\beta_r} - \frac{|\beta|^2 \beta_i (k_r^{(0)})^2}{\beta_r^2} > 0,$$

где  $k_r^{(0)} = k_{sr}|_{x/t=0} = -\beta_r v_g / 2|\beta|^2$ . Отсюда получаем, что

$$\alpha > -\frac{\beta_i v_g^2}{4|\beta|^2} \equiv \alpha_a.$$

Итак, неустойчивость является конвективной при

$$0 < \alpha < \alpha_a$$

и абсолютной при

$$\alpha > \alpha_a.$$

Напомним, что коэффициент  $\beta_i$  считается отрицательным.

### 12.1.2. Модуляционная неустойчивость

В пространственно-однородном случае уравнение Гинзбурга–Ландау сводится к укороченному уравнению Ван дер Поля–Дуффинга (12.3). Разделим в этом уравнении вещественную и мнимую части, полагая  $A = a \exp(i\varphi)$ , где  $a$  и  $\varphi$  вещественны. Получим

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha a - \gamma_i a^3, \\ \varphi_t &= \gamma_r a^2. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Решение первого из этих уравнений имеет вид

$$a = \frac{a_m}{\sqrt{1 + C \exp(-\alpha t)}},$$

где  $C$  — постоянная интегрирования,  $a_m = \sqrt{\alpha/\gamma_i}$ . Таким образом, решение (12.6) описывает процесс установления стационарного состояния

$$A = a_m \exp(i\gamma_r a_m^2 t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma_i}} \exp\left(\frac{i\alpha\gamma_r t}{\gamma_i}\right). \quad (12.7)$$

Исследуем это решение на устойчивость. Перейдя в уравнении (12.2) в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, и разделив вещественную и мнимую части, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} a_t + \beta_r (a\varphi_{xx} + 2a_x\varphi_x) + \beta_i (a_{xx} - a(\varphi_x)^2) &= \alpha a - \gamma_i a^3, \\ a\varphi_t - \beta_r (a_{xx} - a(\varphi_x)^2) + \beta_i (a\varphi_{xx} + 2a_x\varphi_x) - \gamma_r a^3 &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим  $K = \varphi_x$  и линеаризуем эти уравнения вблизи решения (12.7), полагая  $a = a_m + \tilde{a}$ ,  $K = \tilde{K}$ , где  $\tilde{a}$  и  $\tilde{K}$  — малые возмущения. Получим

$$\begin{aligned} \tilde{a}_t + \beta_r a_m \tilde{K}_x + \beta_i \tilde{a}_{xx} &= \alpha \tilde{a} - 3\gamma_i a_m^2 \tilde{a} = -2\gamma_i a_m^2 \tilde{a}, \\ \tilde{K}_t - \beta_r \frac{\tilde{a}_{xxx}}{a_m} + \beta_i \tilde{K}_{xx} - 2\gamma_r a_m \tilde{a}_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Будем искать решение в виде  $\tilde{a}, \tilde{K} \sim \exp(\lambda t + i\kappa x)$ . Тогда уравнения (12.8) принимают вид

$$\begin{aligned} (\lambda - \beta_i \kappa^2 + 2\gamma_i a_m^2) \tilde{a} &= -i\kappa \beta_r a_m \tilde{K}, \\ (\lambda - \beta_i \kappa^2) \tilde{K} &= \left(2i\kappa \gamma_r a_m - \frac{i\kappa^3 \beta_r}{a_m}\right) \tilde{a}, \end{aligned}$$

откуда следует характеристическое уравнение

$$(\lambda - \beta_i \kappa^2)(\lambda - \beta_i \kappa^2 + 2\gamma_i a_m^2) = \beta_r \kappa^2 (2\gamma_r a_m^2 - \beta_r \kappa^2).$$

Корни этого уравнения есть

$$\lambda_{\pm} = \beta_i \kappa^2 - \gamma_i a_m^2 \pm \sqrt{\gamma_i^2 a_m^4 + \beta_r \kappa^2 (2\gamma_r a_m^2 - \beta_r \kappa^2)}. \quad (12.9)$$

Нетрудно показать, что корень  $\lambda_+$  будет вещественным и положительным, когда

$$\kappa^2 < \kappa_0^2 = \frac{2a_m^2(\beta_r \gamma_r + \beta_i \gamma_i)}{|\beta|^2}.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\beta_r \gamma_r + \beta_i \gamma_i > 0 \quad (12.10)$$

возмущения, волновые числа которых лежат в диапазоне  $\kappa^2 < \kappa_0^2$ , неустойчивы. Эта неустойчивость является аналогом *модуляционной неустойчивости* для консервативных сред (лекция 11), а критерий (12.10), полученный в работе [173], очевидно, играет роль критерия Лайтхилла.

**Задача 12.1.** Провести анализ характера модуляционной неустойчивости для нелинейного уравнения Шрёдингера (см. лекцию 11)

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A = 0. \quad (12.11)$$

*Решение:* Будем рассматривать полубезграничную нелинейную среду, которая возбуждается на левой границе (в точке  $x = 0$ ) гармоническим сигналом

$$A(0, t) = A_0 \exp(-i\omega t). \quad (12.12)$$

Наша задача состоит в том, чтобы исследовать на устойчивость решение уравнения (12.11) в виде бегущей гармонической волны

$$A(x, t) = A_0 \exp[i(kx - \omega t)], \quad (12.13)$$

где частота  $\omega$  и волновое число  $k$  связаны нелинейным дисперсионным соотношением

$$\omega = kV + \frac{\omega_0'' k^2}{2} - \beta |A_0|^2. \quad (12.14)$$

Будем считать выполненным критерий Лайтхилла (11.17), причем без ограничения общности положим  $\omega_0'' > 0$ ,  $\beta > 0$ .

Зададим малое возмущение монохроматического решения (12.13)

$$A(x, t) = (A_0 + \tilde{a}(x, t)) \exp[i(kx - \omega t)].$$

Продельвая выкладки, аналогичные представленным в § 11.4, получим характеристическое уравнение, связывающее частоту  $\Omega$  и волновое число  $\kappa$  малого возмущения:

$$(\Omega - \kappa v_g(\omega))^2 = \left( \frac{\omega_0'' \kappa^2}{2} \right)^2 - \beta \omega_0'' |A_0|^2 \kappa^2, \quad (12.15)$$

где  $v_g(\omega) = V + \omega''_0 k$  — групповая скорость на частоте  $\omega$  (вообще говоря, зависящая от амплитуды). Если, подобно тому, как это было сделано в § 11.4, считать  $\kappa$  вещественным, можно выразить корни уравнения (12.16) в виде  $\Omega = \kappa v_g \pm i\lambda$ , где  $\lambda$  — инкремент неустойчивости, который определяется формулой (11.22). Неустойчивыми являются возмущения с волновыми числами в области (см. рис. 11.1)

$$\kappa^2 < \kappa_0^2 = \frac{4\beta|A_0|^2}{\omega''_0}.$$

Максимальное значение инкремента  $\lambda_m = \beta|A_0|^2$  имеет возмущение с волновым числом

$$\kappa_m = \frac{\kappa_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\beta|A_0|^2}{\omega''_0}}.$$

Единственное отличие от результатов § 11.4 состоит в том, что в данном случае мы не можем перейти в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, так как имеем задачу с граничным условием.

Однако для того, чтобы определить, является ли неустойчивость абсолютной или конвективной, этого недостаточно<sup>1</sup>. Следует считать и  $\Omega$ , и  $\kappa$  комплексными и воспользоваться методикой, изложенной в § 12.1.1.

Введем безразмерные переменные  $z = \kappa/\kappa_m$ ,  $w = \Omega/\lambda_m$  и перепишем дисперсионное соотношение (12.15) в виде (перед мнимой частью выбираем знак «+», что соответствует нарастающей волне)

$$w = az + i\sqrt{z^2(2 - z^2)}, \quad (12.16)$$

где  $a = \frac{v_g}{|A_0|} \sqrt{\frac{2}{\beta\omega''_0}}$  — безразмерный параметр.

Дифференцируя уравнение (12.16) и приравнявая полученное соотношение к нулю, находим точки перевала:

$$z_s = \pm \sqrt{1 + \frac{a^2 \mp a\sqrt{a^2 - 16}}{8}}. \quad (12.17)$$

Наличие двух точек перевала связано с тем, что возмущение имеет вид двух сателлитов, расположенных симметрично относительно несущей частоты. Контур интегрирования должен пройти только через одну из точек перевала, причем таким образом, чтобы непосредственно в точке перевала его направление совпадало с направлением градиентного спуска, т.е.  $\text{Im}(w) = \text{const}$ . В данном случае это направление параллельно вещественной оси. Кроме того, контур должен обойти в нижней полуплоскости точки  $z = 0, \pm\sqrt{2}$ , в которых функция  $w(z)$  не аналитична.

Критерий абсолютной неустойчивости, т.е. условие того, что возмущение нарастает со временем в фиксированной точке пространства, очевидно, имеет вид

<sup>1</sup>Уточним, что мы в данном случае понимаем под абсолютной и конвективной неустойчивостью, так как, строго говоря, эти понятия определены для линейных процессов. В то же время, модуляционная неустойчивость возникает лишь на фоне достаточно интенсивной несущей волны, т.е. является принципиально нелинейным явлением. Тем не менее, если мы интересуемся характером эволюции малых возмущений огибающей  $\tilde{a}(x, t)$  на линейной стадии их развития, можно практически без изменения пользоваться классическими определениями, приведенными в § 12.1.1.

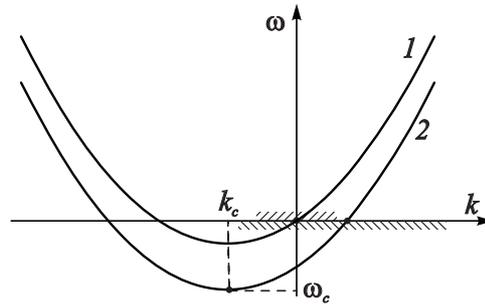


Рис. 12.1. Дисперсионная диаграмма в случае конвективной (1) и абсолютной (2) модуляционной неустойчивости. Штриховкой выделен диапазон волновых чисел, в котором имеет место неустойчивость

$\text{Im}(w(z_s)) > 0$ . Подставляя сюда выражение (12.17), получим  $a^2 > 16$  или, с учетом определения  $a$ ,

$$\beta|A_0|^2 > \frac{v_g^2}{8\omega_0''}. \quad (12.18)$$

Однако необходимо учесть, что  $v_g$  в (12.18) в свою очередь зависит от частоты и амплитуды. Выразив эту зависимость с помощью нелинейного дисперсионного соотношения (12.14), получим

$$\beta|A_0|^2 > \frac{1}{3} \left( \frac{V^2}{2\omega_0''} + \omega \right). \quad (12.19)$$

Таким образом, когда амплитуда входного сигнала превышает критическое значение, которое определяется формулой (12.19), происходит смена характера неустойчивости с конвективной на абсолютную. Принципиальной особенностью является то, что этот эффект носит нелинейный характер, поскольку наблюдается по мере увеличения интенсивности волны. Ему можно придать простую физическую трактовку: закон дисперсии (12.14) является параболическим и допускает распространение волн с частотами выше критической частоты  $\omega_c = -V^2/(2\omega_0'') - \beta|A_0|^2$ . С ростом  $|A_0|^2$  дисперсионная кривая смещается вниз (рис. 12.1). Одновременно диапазон волновых чисел, в котором имеет место модуляционная неустойчивость, расширяется и начинает захватывать область в окрестности критической частоты, где групповая скорость стремится к нулю. В результате неустойчивость становится абсолютной.

Разницу между абсолютной и конвективной модуляционной неустойчивостью иллюстрируют рис. 12.2, 12.3, на которых приведены результаты численного решения уравнения (12.11) с граничным условием (12.12) [174, 175]. Чтобы исключить эффекты отражения и реализовать режим однонаправленного распространения, граничное условие справа ставилось в виде так называемого поглощающего слоя, т.е. считалось, что интересующая нас область имеет некоторую конечную длину  $L$ , а при  $x > L$  в уравнение (12.11) искусственно вводится затухание с коэффициентом, экспоненциально нарастающим вдоль координаты. На рисунках показаны примеры пространственно-временной динамики и зависимости амплитуды от времени в точке  $x = L$ . Видно, что в случае конвективной неустойчивости на переднем фронте появляются нарастающие возмущения, которые сносятся вдоль системы и покидают её через правую границу. В фиксированной точке

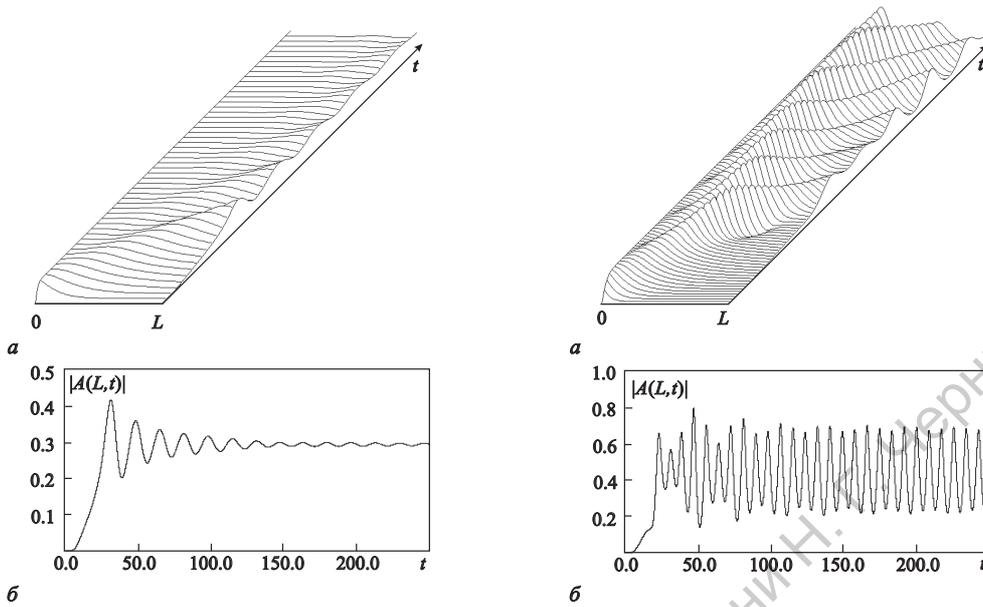


Рис. 12.2. Картина пространственно-временной динамики (а) и зависимость амплитуды от времени в точке  $L = 10$  (б) при конвективной модуляционной неустойчивости ( $\omega_0''/2 = 1, \beta = 1, \omega = 0, V = 1.2, |A_0| = 0.3$ )

Рис. 12.3. Картина пространственно-временной динамики (а) и зависимость амплитуды от времени в точке  $L = 10$  (б) при абсолютной модуляционной неустойчивости ( $V = 1.4, |A_0| = 0.6$ , остальные параметры те же, что на рис. 12.2)

осцилляции амплитуды постепенно затухают, и в итоге устанавливается одночастотный режим распространения с постоянной амплитудой. При абсолютной неустойчивости нарастающие возмущения непрерывно генерируются вдоль всей длины системы, и устанавливается режим автомодуляции, в котором амплитуда сигнала периодически осциллирует.

Необходимо, однако, учитывать, что описание при помощи НУШ (12.11) является приближенным и основано на аппроксимации дисперсионной характеристики реальной системы параболой (см. § 1.5), что справедливо лишь в некоторой окрестности несущей частоты. Поэтому пользоваться критерием (12.18) следует с определенной осторожностью, так как область вблизи критической частоты может оказаться за рамками применимости параболической аппроксимации.

## 12.2. Конвекция Рэлея–Бенара

Продemonстрируем получение уравнения Гинзбурга–Ландау на конкретном физическом примере. Рассмотрим задачу о тепловой конвекции в плоском слое идеальной жидкости, подогреваемом снизу, следуя работе [30]. Исходная система уравнений, состоящая из уравнений Эйлера, непрерывности и теплопроводности, в предположении, что жидкость несжима-

ема, имеет вид (см. например, [43])

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] &= \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} - \nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right) &= \kappa \nabla^2 T. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $\eta$  и  $\kappa$  — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности, соответственно,  $C_p$  — теплоемкость,  $T$  — температура. На верхней границе слоя ( $z = l$ ) поддерживается постоянная температура  $T_1$ , на нижней ( $z = 0$ ) — температура  $T_2 = T_1 + \Delta T$  (рис. 12.4). В отсутствие конвекции, когда теплоотвод осуществляется только за счет теплопроводности,  $\mathbf{v} = 0$ . Тогда, считая, что равновесное распределение температуры  $T_e$  зависит только от вертикальной координаты  $z$ , можем написать

$$T_e = T_1 + \Delta T (1 - z/l).$$

Будем считать задачу двумерной. Это означает, что все переменные зависят только от горизонтальной координаты  $x$  и вертикальной  $z$ . Введем функцию тока  $\psi$ , определяемую соотношениями

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

а также переменную  $\theta = T - T_e$  — отклонение температуры от равновесно-

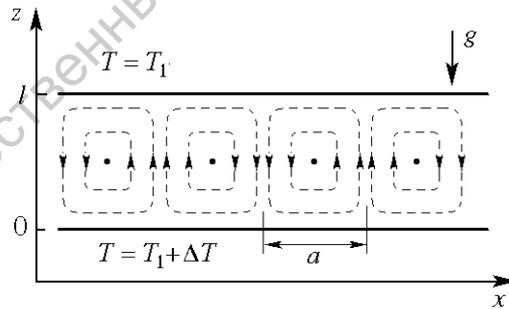


Рис. 12.4. Образование валов при тепловой конвекции

го значения. Кроме того, используем *приближение Буссинеска*, т.е. всюду, где  $\rho$  не стоит под знаком дифференциала, будем считать  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ . При дифференцировании положим

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)],$$

где  $\alpha$  — коэффициент объемного расширения,  $T_0 = (T_1 + T_2)/2$ . Тогда система уравнений (12.20) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} &= \nu\nabla^4\psi + \alpha g \frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} &= \frac{\Delta T}{l} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \chi\nabla^2\theta, \end{aligned} \quad (12.21)$$

где  $\nu = \eta/\rho_0$  — кинематическая вязкость,  $\chi = \kappa/\rho_0 C_p$  — температуропроводность,

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, z)} \equiv \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Введем безразмерные переменные  $t' = \chi t/l^2$ ,  $x' = x/l$ ,  $z' = z/l$ ,  $\psi' = \psi/\chi$ ,  $\theta' = \theta/\Delta T$ . Подставляя эти выражения в систему (12.21) и опуская штрихи, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} &= \text{Pr} \left( \nabla^4\psi + \text{Ra} \frac{\partial\theta}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} + \nabla^2\theta. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Здесь  $\text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля,  $\text{Ra} = \alpha g \Delta T l^3 / \nu \chi$  — число Рэлея.

Будем искать решение системы (12.22) в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \psi &= \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \varepsilon^3\psi_3 + \dots, \\ \theta &= \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3\theta_3 + \dots \end{aligned}$$

Тогда в порядке  $\varepsilon$  получим линеаризованный вариант уравнений (12.22) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla^2\psi_1)}{\partial t} - \text{Pr} \left( \nabla^4\psi_1 + \text{Ra} \frac{\partial\theta_1}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial t} - \nabla^2\theta_1 - \frac{\partial\psi_1}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Для простоты выберем свободные граничные условия на обеих граничных поверхностях:

$$\psi = \nabla^2\psi = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1.$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, будем искать решение уравнений (12.23) в виде

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \theta_{11} \end{pmatrix} A \exp[i(kx - \omega t)] \sin \pi z.$$

Положим  $k = \pi a$ . Тогда из системы (12.23) следует дисперсионное соотношение

$$[i\omega - \pi^2 \text{Pr} (a^2 + 1)] [i\omega - \pi^2 (a^2 + 1)] = \text{Pr Ra} \frac{a^2}{a^2 + 1}. \quad (12.24)$$

Это квадратное уравнение относительно  $\omega$ , корни которого легко находятся в следующем виде:

$$\omega_{\pm} = -\frac{i}{2} \left[ \pi^2 (a^2 + 1) (\text{Pr} + 1) \pm \sqrt{\frac{4a^2}{a^2 + 1} \text{Pr Ra} + \pi^4 (\text{Pr} - 1)^2 (a^2 + 1)^2} \right].$$

Поскольку подкоренное выражение всегда положительно, оба корня дисперсионного соотношения (12.24) являются чисто мнимыми. Стационарное состояние теряет устойчивость, когда корень  $\omega_-$  меняет знак. Разрешая уравнение  $\omega_- = 0$  относительно числа Рэлея, которое выберем в качестве управляющего параметра, получаем

$$\text{Ra} = \frac{\pi^4 (a^2 + 1)^3}{a^2}.$$

Нетрудно найти, что это выражение имеет минимум, когда  $a = 1/\sqrt{2}$ . Итак, при

$$\text{Ra} > \text{Ra}_c \equiv \frac{27\pi^4}{4} \quad (12.25)$$

возникает конвекция: более теплая жидкость поднимается к верхней границе, где охлаждается и опускается вниз. В результате образуется система конвективных валов (рис. 12.4), причем отношение их продольного размера к поперечному определяется величиной  $a$ .

По мере увеличения градиента температуры (т.е. числа Рэлея) первой теряет устойчивость мода с  $k = \pi/\sqrt{2}$ . При этом зависимость  $\omega_-(k)$  имеет вид, полностью аналогичный изображенному на рис. 1.13.

Получим уравнение Гинзбурга–Ландау, описывающее динамику амплитуды возмущения в окрестности точки бифуркации ( $k = \pi/\sqrt{2}$ ,  $\text{Ra} = \text{Ra}_c$ ). Используем обычный аппарат метода многих масштабов. Введем медленную координату  $X = \varepsilon x$  и время  $T = \varepsilon^2 t$  (позволим себе несколько упростить выкладки, оставив лишь «нужные» масштабы, которые войдут в окончательное уравнение). Положим также  $\text{Ra} = \text{Ra}_c + \varepsilon^2$ . Таким образом, малый параметр  $\varepsilon$  имеет смысл превышения бифуркационным параметром критического значения. В порядке  $\varepsilon$  будем искать решение в виде

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \theta_{11} \end{pmatrix} A(X, T) \exp\left(\frac{i\pi x}{\sqrt{2}}\right) \sin \pi z + \text{к.с.} \quad (12.26)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (12.23), найдем, что

$$\psi_{11} = -\frac{3\pi i}{\sqrt{2}}, \quad \theta_{11} = 1. \quad (12.27)$$

В порядке  $\varepsilon^2$  получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla^2 \psi_2)}{\partial t} - \text{Pr} \left( \nabla^4 \psi_2 + \text{Ra}_c \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) &= \\ &= \text{Pr} \left( 4 \frac{\partial^2 (\nabla^2 \psi_1)}{\partial x \partial X} + \text{Ra}_c \frac{\partial \theta_1}{\partial X} \right) - \frac{\partial (\psi_1, \nabla^2 \psi_1)}{\partial (x, z)}, \quad (12.28) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \nabla^2 \theta_2 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} &= 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial X} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X} - \frac{\partial (\psi_1, \theta_1)}{\partial (x, z)}. \end{aligned}$$

Решение уравнений (12.28) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{21} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial X} \exp \left( \frac{i\pi x}{\sqrt{2}} \right) \sin \pi z + \begin{pmatrix} \psi_{20} \\ \theta_{20} \end{pmatrix} |A|^2 \sin 2\pi z + \text{к.с.}$$

С учетом соотношений (12.26), (12.27) нетрудно найти, что

$$\frac{\partial (\psi_1, \nabla^2 \psi_1)}{\partial (x, z)} = 0, \quad \frac{\partial (\psi_1, \theta_1)}{\partial (x, z)} = -3\pi^2 |A|^2 \sin 2\pi z.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (12.28) и выделяя члены, пропорциональные  $\sin 2\pi z$ , получим

$$\psi_{20} = 0, \quad \theta_{20} = -\frac{3\pi}{4}. \quad (12.29)$$

Для коэффициентов  $\psi_{21}$  и  $\theta_{21}$ , очевидно, будем иметь неопределенную систему уравнений. Из нее удастся найти лишь одно соотношение, связывающее эти величины:

$$\psi_{21} = 1 - \frac{3i\pi}{\sqrt{2}} \theta_{21}. \quad (12.30)$$

Уравнения порядка  $\varepsilon^3$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla^2 \psi_3)}{\partial t} - \text{Pr} \left( \nabla^4 \psi_3 + \text{Ra}_c \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) &= F, \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial t} - \nabla^2 \theta_3 - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} &= G, \end{aligned} \quad (12.31)$$

где

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\partial (\nabla^2 \psi_1)}{\partial T} + \text{Pr} \left( 4 \frac{\partial^2 (\nabla^2 \psi_2)}{\partial x \partial X} + \text{Ra}_c \frac{\partial \theta_2}{\partial X} \right) + 2 \text{Pr} \frac{\partial^2 (\nabla^2 \psi_1)}{\partial X^2} - \\ &\quad - \frac{\partial (\psi_1, \nabla^2 \psi_2)}{\partial (x, z)} - \frac{\partial (\psi_2, \nabla^2 \psi_1)}{\partial (x, z)} + \text{Pr} \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \\ G &= -\frac{\partial \theta_1}{\partial T} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial X} + \frac{\partial \psi_2}{\partial X} - \frac{\partial (\psi_1, \theta_2)}{\partial (x, z)} - \frac{\partial (\psi_2, \theta_1)}{\partial (x, z)}. \end{aligned}$$

Исключая  $\theta_3$  из уравнений (12.31), имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \left( \frac{\partial (\nabla^2 \psi_3)}{\partial t} - \text{Pr} \nabla^4 \psi_3 \right) - \text{Pr} \text{Ra}_c \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} = \\ = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) F + \text{Pr} \text{Ra}_c \frac{\partial G}{\partial x}. \end{aligned}$$

Для того чтобы решение не было секулярным, необходимо в правой части этого уравнения приравнять к нулю члены, пропорциональные  $e^{i\pi x/\sqrt{2}} \sin \pi z$ . Это дает

$$\begin{aligned} \frac{3\pi^2 \psi_{11}}{2\text{Pr}} \frac{\partial A}{\partial T} + \left( -\frac{6i\pi^3}{\sqrt{2}} \psi_{21} + \text{Ra}_c \theta_{21} - 3\pi^2 \psi_{11} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{i\pi}{\sqrt{2}} A + \\ + \frac{3i\pi^3}{2\sqrt{2}} \left[ -\frac{\partial A}{\partial T} + \left( 1 + \frac{2i\pi}{\sqrt{2}} \theta_{21} + \psi_{21} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{i\pi^2 \psi_{11} \theta_{20}}{\sqrt{2}} |A|^2 A \right] = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда соотношения (12.25), (12.26), (12.29) и (12.30), после ряда вычислений получаем уравнение Гинзбурга–Ландау в виде

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\text{Pr}}{\text{Pr} + 1} \left[ \frac{8}{3} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{2}{9\pi^2} A - \frac{9\pi^4}{8} |A|^2 A \right]. \quad (12.32)$$

При этом члены, содержащие неизвестную величину  $\theta_{21}$  взаимно уничтожаются. Слагаемые в правой части уравнения (12.32) отвечают за вязкую диссипацию, неустойчивость и нелинейное насыщение, соответственно.

### 12.3. Об автоколебаниях в распределенных системах. Динамическая модель пространственного развития турбулентности

Распределенные автоколебательные системы (РАС) весьма распространены и в природе, и в технике [11, 176]. К ним относятся функциональные системы живого организма (системы кровообращения, дыхания, речи), духовые и струнные музыкальные инструменты, приборы вакуумной и квантовой электроники — генераторы электромагнитного излучения микроволнового и оптического диапазонов, переменные звезды (цефеиды), автокаталитические химические реакции. Некоторые процессы, связанные с существованием различных биологических видов также носят автоколебательный характер.

Не претендуя на чрезмерную строгость, дадим определение РАС, предложенное М.И. Рабиновичем: *автоколебательной назовем неконсерватив-*

ную систему, в которой в результате развития неустойчивости возможно установление незатухающих волновых или колебательных движений, параметры которых (амплитуда и форма колебаний или волн, частота, а в более общем случае — спектр колебаний) определяются самой системой и не зависят от конечного изменения начальных условий.

Уравнение Гинзбурга–Ландау является эталонной моделью широкого класса распределенных автоколебательных систем<sup>2</sup>. Особый интерес представляет тот факт, что решения этого уравнения могут иметь характер не только периодических или квазипериодических, но и хаотических автоколебаний, аналогичных детерминированным хаотическим колебаниям в конечномерных динамических системах. Исследование сложной динамики уравнения Гинзбурга–Ландау (и других РАС) имеет большое значение, поскольку позволяет установить определенную связь между турбулентностью в распределенных средах и динамическим хаосом в системах с малым числом степеней свободы.

Среди работ, посвященных этой проблеме, следует выделить статью [177], в которой была предложена динамическая модель пространственно-го развития турбулентности. В ней рассматривается цепочка однонаправленно связанных укороченных уравнений Ван дер Поля

$$\dot{A}_j + \delta(A_j - A_{j-1}) = \alpha A_j - \gamma |A_j|^2 A_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (12.33)$$

где точкой обозначается производная по времени. Физическими моделями, которые описываются уравнениями (12.33), могут служить, например, цепочка однонаправленно связанных автогенераторов или гидродинамическое течение, связанное с периодической системой полостей. Очевидно, что уравнение Гинзбурга–Ландау (12.2) приводится к виду (12.33), если положить  $\beta = 0$  и записать простейшую конечно-разностную аппроксимацию пространственной производной

$$\frac{\partial A}{\partial x} \approx \frac{A_j - A_{j-1}}{\Delta},$$

где  $\Delta$  — шаг по координате. В этом случае  $\delta = v_g/\Delta$ .

Результаты численного моделирования системы (12.33), представленные в работе [177], показали, что в широкой области параметров в цепочке устанавливается пространственно-неоднородный турбулентный режим, причем наблюдается постепенное усложнение колебаний вниз по потоку (рис. 12.5). При малых  $j$  колебания являются квазимонохроматическими (рис. 12.5а). По мере роста  $j$  они сменяются сначала режимами биений с большим числом спектральных компонент (рис. 12.5б), а затем слаботурбулентными колебаниями (рис. 12.5в). При дальнейшем движении вниз по потоку средняя мощность турбулентности возрастает, а спектр усложняется (рис. 12.5г, д). Наконец, при достаточно больших  $j$  какие-либо изменения

<sup>2</sup>В случае, когда неустойчивость является абсолютной (см. § 12.1.1).

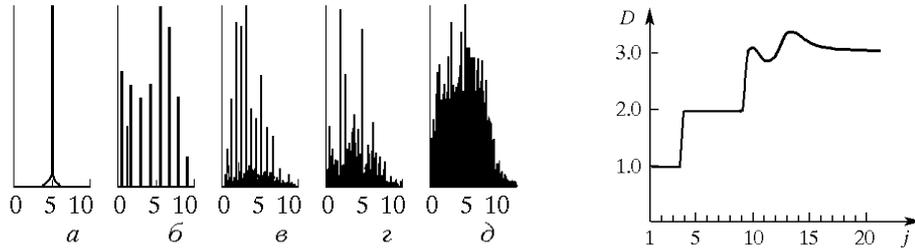


Рис. 12.5. Спектры мощности, иллюстрирующие пространственное развитие турбулентности вдоль цепочки:  $a - j = 2$ ;  $б - j = 9$ ;  $в - j = 10$ ;  $г - j = 12$   $д - j = 20$  и  $50$  [177]

Рис. 12.6. Изменение размерности аттрактора вдоль цепочки [177]

характеристик движения прекращаются и устанавливается стационарный пространственно-однородный турбулентный режим. Несмотря на то, что размерность фазового пространства системы весьма высока (т.е. система по своим свойствам близка к распределенной), турбулентному движению соответствует странный аттрактор, имеющий небольшую фрактальную размерность (рис. 12.6).

Цепочки и решетки связанных автогенераторов являются полезными физически содержательными моделями, позволяющими выяснить многие закономерности развития пространственно-временного хаоса в сплошных средах. К настоящему времени опубликовано довольно много работ, посвященных исследованиям (как компьютерным, так и экспериментальным) сложной динамики в цепочках, состоящих из генераторов различных типов. Обзор некоторых результатов можно найти, например, в книге [178, гл. 14].

#### 12.4. Взаимодействие электромагнитного излучения со средой из двухуровневых частиц

Перейдем к рассмотрению другого класса волновых неустойчивостей, вызванных взаимодействием волн с положительной и отрицательной энергиями. Как было показано в § 1.6, в этом случае динамика медленно меняющейся амплитуды возмущения с частотой и волновым числом, определяемым условиями синхронизма, описывается нелинейными уравнениями типа Клейна–Гордона. Взаимодействие волн, у которых групповые скорости направлены в одну сторону, приводит к конвективной неустойчивости. Если же групповые скорости направлены навстречу друг другу, то неустойчивость абсолютная. В качестве примеров можно привести взаи-

модействие электронного потока, движущегося в скрещенных электро- и магнитостатическом полях, с электромагнитной волной [36, 166], гидродинамическую неустойчивость Кельвина–Гельмгольца [34], а также взаимодействие когерентного электромагнитного излучения со средой из двухуровневых частиц — квантовых осцилляторов. Рассмотрим последнюю задачу подробнее.

#### 12.4.1. Двухуровневая среда. Уравнения Блоха

Прежде всего, отметим, что среда из *двухуровневых атомов* является сильно нелинейной. Действительно, из квантовой механики известно [113], что спектр энергетических уровней гармонического осциллятора является эквидистантным: частоты переходов между любыми соседними уровнями одинаковы. У нелинейного (ангармонического) осциллятора спектр неэквидистантный. В случае, когда частоты переходов отличаются столь сильно, что частота падающей на среду электромагнитной волны находится в резонансе лишь с одной из частот (рис. 12.7), можно ограничиться приближением двухуровневой системы.

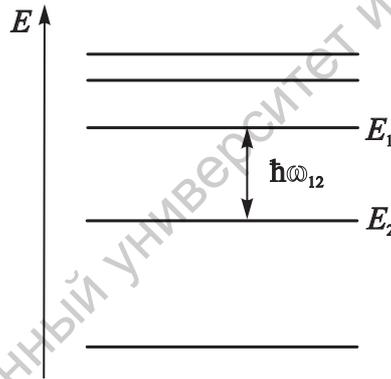


Рис. 12.7. Энергетический спектр ангармонического квантового осциллятора. Частота падающего электромагнитного излучения близка к частоте перехода  $\omega_{12}$

Пусть частота когерентного электромагнитного излучения близка к частоте перехода между уровнями 1 и 2:  $\omega \approx \omega_1 - \omega_2 = (E_1 - E_2)/\hbar$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ , и пусть  $\psi_{1,2}(\mathbf{r})$  — волновые функции, соответствующие стационарным состояниям с энергиями  $E_{1,2}$ . Они удовлетворяют стационарному уравнению Шрёдингера

$$\hat{H}_0\psi_i = E_i\psi_i, \quad i = 1, 2, \quad (12.34)$$

где  $\hat{H}_0$  — гамильтониан атома. Зависящую от времени волновую функцию можно представить в виде суперпозиции этих состояний как

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a_1(t)\psi_1(\mathbf{r}) + a_2(t)\psi_2(\mathbf{r}), \quad (12.35)$$

где  $a_{1,2}$  — заселенности уровней, удовлетворяющие условию нормировки

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1.$$

Волновая функция (12.35) подчиняется нестационарному уравнению Шрёдингера

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (12.36)$$

где  $\hat{H} = \hat{H}_0 - \mathbf{d}\mathbf{E}$  — гамильтониан атома, взаимодействующего с электромагнитным полем,  $\mathbf{E}$  — напряженность поля,  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  — дипольный момент атома. Далее будем предполагать векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{d}$  параллельными.

Подставляя волновую функцию (12.35) в уравнение (12.36) с учетом соотношений (12.34), будем иметь

$$i\hbar \left( \frac{\partial a_1}{\partial t} + i\omega_1 a_1 \right) \psi_1 + i\hbar \left( \frac{\partial a_2}{\partial t} + i\omega_2 a_2 \right) \psi_2 = -a_1 dE \psi_1 - a_2 dE \psi_2.$$

Умножая это уравнение на  $\psi_1^*$  и интегрируя по всему пространству с использованием свойства ортогональности собственных функций стационарного уравнения Шрёдингера ( $\int \psi_i^* \psi_j dV = \delta_{ij}$ ), получаем

$$i\hbar \left( \frac{\partial a_1}{\partial t} + i\omega_1 a_1 \right) = ea_1 \int \psi_1 r E \psi_1^* dV + ea_2 \int \psi_2 r E \psi_1^* dV.$$

Поле  $E$  в этом выражении, вообще говоря, зависит от координат. Однако, на столь малых масштабах, как размеры одного атома, этой зависимостью можно пренебречь и вынести  $E$  за знак интеграла. Тогда, считая, что у атома отсутствует постоянный дипольный момент, т.е.

$$\int \psi_i \mathbf{r} \psi_i^* dV = 0,$$

будем иметь

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + i\omega_1 a_1 = \frac{ip_0 a_2 E}{\hbar}, \quad (12.37)$$

где  $p_0 = -e \int \psi_1 \mathbf{r} \psi_2^* dV$ . Аналогично можно получить уравнение для  $a_2$  в следующем виде:

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + i\omega_2 a_2 = \frac{ip_0 a_1 E}{\hbar}. \quad (12.38)$$

Поляризация атома  $p$  определяется выражением

$$p = -e \int \psi^* \mathbf{r} \psi dV.$$

Подставляя сюда волновую функцию (12.35), находим, что

$$p = p_0 (a_1 a_2^* + a_1^* a_2). \quad (12.39)$$

Рассмотрим поле  $E$  в виде квазигармонической волны с медленно меняющимися амплитудой  $\mathcal{E}$  и фазой  $\varphi$ , т.е.

$$E = \mathcal{E}(x, t) \cos(kx - \omega t + \varphi(x, t)),$$

причем  $k = \omega/c$ , а частота равна частоте перехода  $\omega_1 - \omega_2$ . В уравнениях (12.37), (12.38)  $E$  — поле в точке, где находится атом. Если атом движется с некоторой скоростью  $v$ , то частота за счет эффекта Доплера приобретает сдвиг на величину  $\Delta\omega = kv$ . Таким образом, в системе отсчета, связанной с атомом,

$$E = \mathcal{E}(x, t) \cos(kx - \omega t + \Delta\omega t + \varphi(x, t)). \quad (12.40)$$

Сдвигом частоты у медленно меняющихся величин  $\mathcal{E}$  и  $\varphi$  пренебрегаем. Тогда, вводя новые переменные  $u_{1,2}$ , такие, что

$$a_1 = iu_1 \exp \left[ -i\omega_1(t - x/c) + \frac{i\Delta\omega t}{2} \right],$$

$$a_2 = u_2 \exp \left[ -i\omega_2(t - x/c) - \frac{i\Delta\omega t}{2} \right]$$

приведем уравнения (12.37), (12.38) к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{i\Delta\omega u_1}{2} = \frac{p_0 u_2 \mathcal{E}}{2\hbar} e^{i\varphi},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{i\Delta\omega u_2}{2} = \frac{p_0 u_1 \mathcal{E}}{2\hbar} e^{-i\varphi}. \quad (12.41)$$

Уравнение (12.39) для поляризации атома можно переписать в виде

$$p = p_0 \left( -iu_1^* u_2 \exp i \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) - \Delta\omega t \right] + \text{к.с.} \right).$$

Вводя так называемые огибающие поляризации

$$I = i(u_1 u_2^* e^{-i\varphi} - u_1^* u_2 e^{i\varphi}),$$

$$J = -(u_1 u_2^* e^{-i\varphi} + u_1^* u_2 e^{i\varphi}),$$

получим, что

$$p = p_0(I \cos \Phi + J \sin \Phi), \quad (12.42)$$

где  $\Phi = kx - \omega t + \Delta\omega t + \varphi$ .

Теперь введем относительную разность заселенностей уровней  $N = |u_1|^2 - |u_2|^2$ . Тогда из уравнений (12.41) нетрудно получить следующую систему уравнений

$$N_t = -\frac{p_0 \mathcal{E} J}{\hbar},$$

$$I_t = -(\Delta\omega + \varphi_t) J, \quad (12.43)$$

$$J_t = (\Delta\omega + \varphi_t) I + \frac{p_0 \mathcal{E} N}{\hbar},$$

носящую название *уравнений Блоха*. При их выводе предполагалось, что электромагнитная волна представляет собой ультракороткий оптический импульс, длительность которого много меньше времен релаксации, т.е. характерных временных масштабов, на которых происходит спонтанный переход системы из верхнего состояния в нижнее. Это приближение справедливо, если продолжительность импульса порядка 1 нс и менее. С другой стороны, длительность такого импульса всё еще значительно больше периода оптической волны, так что волну вполне можно считать квазигармонической. Более подробный вывод уравнений Блоха можно найти, например, в книгах [16, 35].

### 12.4.2. Самоиндуцированная прозрачность

Квазиклассическое описание распространения электромагнитной волны в двухуровневой среде дается системой уравнений Блоха (12.43) и уравнениями Максвелла. Термин «квазиклассическое» означает, что для электромагнитного поля используются уравнения классической, а не квантовой электродинамики. Считая задачу одномерной, запишем волновое уравнение в виде

$$E_{tt} - c^2 E_{xx} = -\varepsilon_0^{-1} P_{tt}. \quad (12.44)$$

Пусть  $N_0$  — среднее число атомов в единице объема, и атомы распределены по скоростям (т.е. по  $\Delta\omega$ ) с некоторой функцией распределения  $g(\Delta\omega)$ . Тогда поляризация среды  $P(x, t)$  дается выражением

$$P(x, t) = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) p(\Delta\omega, x, t) d(\Delta\omega), \quad (12.45)$$

где  $p(\Delta\omega, x, t)$  определяется формулой (12.42). Таким образом, несмотря на то, что частоты перехода всех атомов одинаковы, спектр излучения имеет конечную ширину. Это явление называется *неоднородным уширением*.

Подставляя в уравнение (12.44) поле  $E$  в виде (12.40), а поляризацию в виде (12.45) и пренебрегая вторыми производными от медленно меняющихся функций, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t + c\mathcal{E}_x &= \frac{\omega p_0 N_0}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) J(\Delta\omega, x, t) d(\Delta\omega), \\ \mathcal{E}(\varphi_t + c\varphi_x) &= \frac{\omega p_0 N_0}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) I(\Delta\omega, x, t) d(\Delta\omega). \end{aligned} \quad (12.46)$$

Система уравнений (12.43), (12.46) носит название уравнений самоиндуцированной прозрачности.

Явление *самоиндуцированной прозрачности* (self-induced transparency), открытое в 1967 г. Макколом и Ханом [179], заключается в следующем.

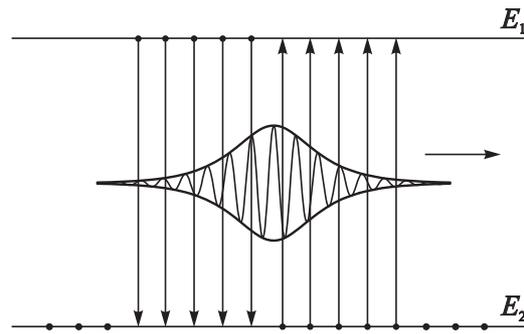


Рис. 12.8. Переходы в двухуровневой среде, обеспечивающие солитонное распространение импульса при самоиндуцированной прозрачности

Рассмотрим ультракороткий оптический импульс, распространяющийся в среде из двухуровневых частиц, находящихся в нижнем (невозбужденном) энергетическом состоянии. В случае резонанса, когда несущая частота электромагнитной волны близка к частоте перехода, частицы начинают поглощать энергию поля и переходят в верхнее состояние. Передний фронт импульса при этом ослабляется. Задний фронт распространяется в среде, которая уже находится в возбужденном состоянии. Взаимодействие импульса с частицами среды вызывает переходы с верхнего уровня на нижний, сопровождающиеся излучением (рис. 12.8). Соответствующие участки профиля волны начинают усиливаться. В результате импульс приобретает равновесную солитоноподобную форму и распространяется с постоянной скоростью подобно стационарной волне.

Уравнения самоиндуцированной прозрачности являются системой, полностью интегрируемой при помощи метода обратной задачи рассеяния [16, 35, 180]. Интересно, что задача на собственные значения решается для уравнений (12.41), которые имеют четкий физический смысл, так как следуют непосредственно из уравнения Шрёдингера для двухуровневой системы.

### 12.4.3. Распространение импульсов в усиливающей среде. Автомоделные решения

Более интересно проанализировать случай, когда в начальный момент большинство атомов находится в возбужденном состоянии, т.е. имеет место инверсная заселенность. Эта ситуация соответствует активной среде, которую можно использовать для усиления оптического импульса. Несмотря на то, что исходная система уравнений (12.43), (12.46) по-прежнему является интегрируемой, получить аналитическое решение при произвольных начальных условиях весьма сложно, поскольку солитоны оказываются неустойчивыми, а несолитонная часть решения экспоненциально нарастает во времени. Однако, если пренебречь неоднородным уширением, т.е.

считать атомы неподвижными, задача значительно упрощается.

В приближении неподвижных атомов  $g(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega)$ , где  $\delta$  — дельта-функция Дирака, и уравнения (12.46) принимают вид:

$$\mathcal{E}_t + c\mathcal{E}_x = \frac{\omega p_0 N_0}{2\varepsilon_0} J,$$

$$\mathcal{E}(\varphi_t + c\varphi_x) = \frac{\omega p_0 N_0}{2\varepsilon_0} I.$$

Без ограничения общности можно положить  $\varphi = 0$ ,  $I = 0$ . Тогда, вводя новую переменную  $A = p_0\mathcal{E}/\hbar$ , получим следующую систему уравнений:

$$A_t + cA_x = \Omega^2 J, \quad (12.47)$$

$$J_t = AN \quad (12.48)$$

$$N_t = -AJ, \quad (12.49)$$

где  $\Omega^2 = \omega p_0^2 N_0 / 2\hbar\varepsilon_0$ . Из уравнений (12.48) и (12.49) следует закон сохранения

$$J^2 + N^2 = 1.$$

Это условие удовлетворяется подстановкой

$$J = \pm \sin U, \quad N = \pm \cos U.$$

Тогда из уравнений (12.48), (12.49) получаем, что  $A = U_t$ , и уравнение (12.47) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) U = \pm \Omega^2 \sin U.$$

Если ввести новые независимые переменные  $\xi = \Omega x/c$ ,  $\tau = \Omega(t - x/c)$ , придем к уравнению Син-Гордона

$$U_{\xi\tau} = \pm \sin U. \quad (12.50)$$

Случай  $N = -\cos U$  (нижний знак в уравнении (12.50)) соответствует невозбужденной среде, поскольку в отсутствие электромагнитного импульса ( $U = 0$ ) имеем  $N = -1$ , т.е. все атомы находятся в нижнем энергетическом состоянии. При этом уравнение (12.50) является обычным уравнением Син-Гордона, солитонные решения которого описывают устойчивое распространение импульсов при самоиндуцированной прозрачности. Выбор  $N = \cos U$  соответствует среде с инверсной заселенностью, так как при  $U = 0$  все атомы возбуждены ( $N = 1$ ). Поскольку тривиальное решение  $U(\xi, \tau) = 0$  неустойчиво, уравнение (12.50) естественно назвать *неустойчивым уравнением Син-Гордона*.

Как показано, например, в [35], решение, описывающее усиливающиеся импульсы, фактически определяется функцией, зависящей от автомодельной переменной  $\eta = \xi\tau$ . Уравнение (12.50) при этом принимает вид

$$\eta U'' + U' - \sin U = 0,$$

где штрихи означают дифференцирование по  $\eta$ . Решение полученного

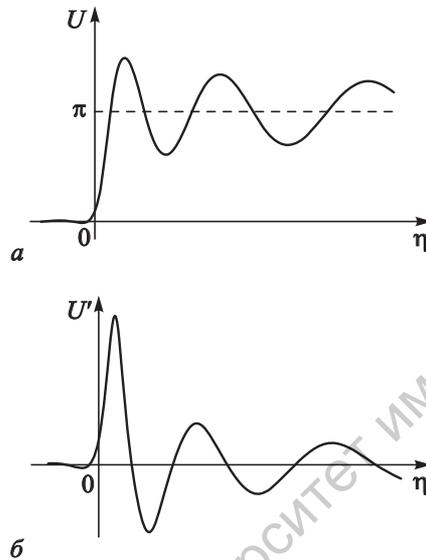


Рис. 12.9. Автомодельное решение уравнения Син-Гордона (а) и его производная (б)

уравнения можно найти только численно. Для того чтобы избежать сингулярностей при  $\eta = 0$ , необходимо выбрать начальные условия так, чтобы  $U'(0) = \sin U(0)$ . Пример решения с таким начальным условием приведен на рис. 12.9. Поскольку  $U$  изменяется от 0 до  $\pi$  при изменении  $\eta$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , оно получило название  $\pi$ -импульса (в отличие от солитонов, называемых  $2\pi$ -импульсами). Для безразмерной амплитуды электромагнитного поля имеем

$$A = \frac{\partial U}{\partial t} = \Omega \xi \frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Отсюда следует, что по мере распространения импульса его амплитуда растет линейно. В то же время, протяженность импульса линейно сокращается, так как  $U$  зависит от автомодельной переменной  $\eta = \xi\tau$ .

Роль, которую играет автомодельное решение, наглядно иллюстрируют результаты численного моделирования уравнения Син-Гордона, представленные на рис. 12.10. Для удобства уравнение было переписано в виде  $U_{tt} - c^2 U_{xx} = \sin(U)$ , начальное условие выбиралось в виде гауссова импульса  $U(x; t = 0) = \exp(-x^2)$ ,  $U_t(x; t = 0) = 0$ . На рис. 12.10 показаны зависимости  $U(x)$  в различные моменты времени, которые указаны на

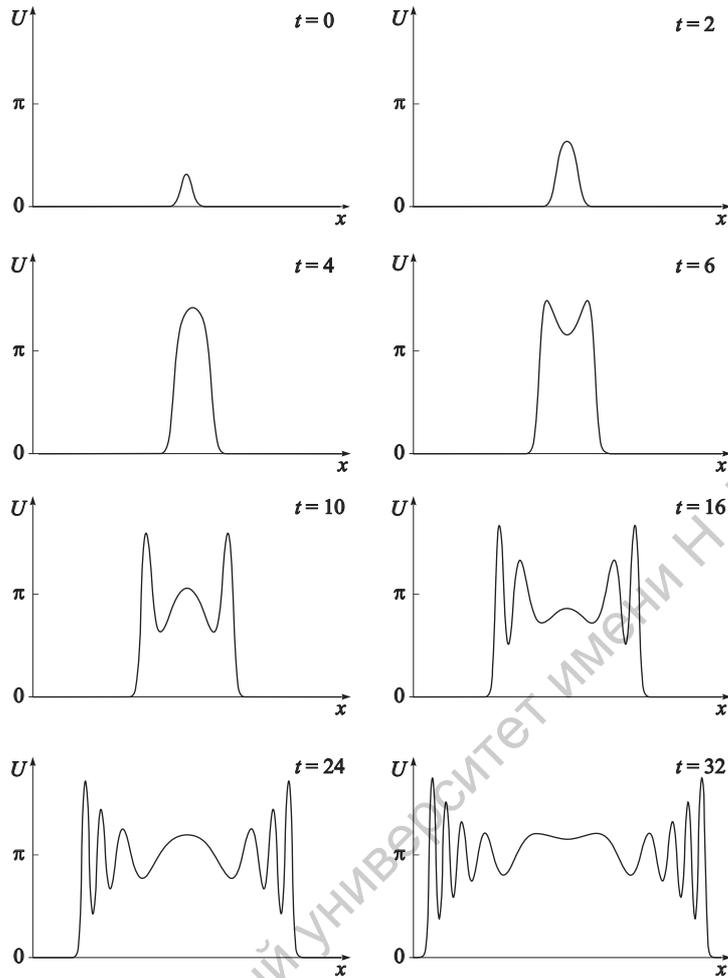


Рис. 12.10. Динамика усиления короткого импульса для неустойчивого уравнения Син-Гордона

графиках. На начальной стадии, когда амплитуда мала, происходит экспоненциальное усиление импульса. Затем, по мере роста импульса начинают проявляться нелинейные эффекты, приводящие к насыщению ( $t \approx 4$ ). После этого у импульса образуются осциллирующие фронты, которые распространяются со скоростями примерно равными  $\pm c$ . Здесь мы наблюдаем поведение, типичное для гиперболических систем (лекция 4), где возмущения распространяются вдоль характеристик. Эволюция фронтов носит очевидный автомодельный характер. В центре импульса поле слабо осциллирует, постепенно стремясь к  $\pi$  (ср. рис. 12.9a).

Более строгий анализ усиления ультракороткого импульса в протяженном лазерном усилителе на основе метода обратной задачи рассеяния [180] подтверждает, что асимптотическая форма решения при больших  $x$  оказы-

вается близкой к автомодельной. Эффекты неоднородного уширения при этом становятся несущественными.

### 12.5. Волны в нелинейных активных линиях передачи

Нелинейные активные линии передачи с распределенными параметрами используются в радиофизике и электронике для генерации, усиления и преобразования нано- и субнаносекундных импульсов [90, 181]. Существует множество вариантов подобных систем: распределенные туннельные и сегнетоэлектрические переходы, линии с ферритовым заполнением, протяженные сверхпроводящие джозефсоновские переходы и т.д. Обычно они выполняются в виде микрополосковых или коаксиальных линий с твердотельным заполнением или в виде искусственных линий ( $LC$ -цепочек), нагруженных нелинейными активными элементами. С другой стороны, подобные системы являются типичными объектами исследования в теории нелинейных волн [11], и их анализ позволяет лучше понять особенности распространения волн в активных средах.

Рассмотрим линию передачи, эквивалентная схема которой изображена на рис. 12.11а. Здесь  $L$  и  $C$  — погонные емкость и индуктивность линии, а вольтамперная характеристика нелинейного элемента имеет вид  $i(V) = -\varepsilon g (1 - \beta V^2) V$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр (рис. 12.11б). Поскольку в области

$$-\frac{1}{\sqrt{3\beta}} < V < \frac{1}{\sqrt{3\beta}}$$

дифференциальная проводимость  $di/dV$  отрицательна, элемент является активным.

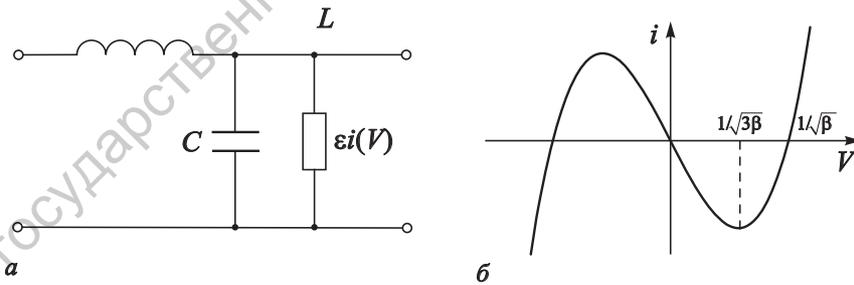


Рис. 12.11. Эквивалентная схема нелинейной активной линии передачи (а) и вольтамперная характеристика активного элемента (б)

Распространение волн в данной линии описывается телеграфными уравнениями

$$\begin{aligned} I_x &= -CV_t - \varepsilon i(V), \\ V_x &= -LI_t. \end{aligned} \tag{12.51}$$

Исключив отсюда  $I$  перекрестным дифференцированием, получим

$$V_{tt} - c^2 V_{xx} + \varepsilon i_t(V) = 0, \quad (12.52)$$

где  $c = 1/\sqrt{LC}$ . В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  уравнение (12.52) переходит в обыкновенное волновое уравнение  $V_{tt} - c^2 V_{xx} = 0$ , решение которого в виде стационарной волны, распространяющейся слева направо, есть  $V = V(\xi)$ , где  $\xi = x - ct$ . При  $\varepsilon \ll 1$  можно считать, что

$$V_{tt} - c^2 V_{xx} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) V \approx 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

и переписать уравнение (12.52) в одноволновом приближении

$$V_t + c V_x = \frac{\varepsilon g}{2C} (1 - \beta V^2) V. \quad (12.53)$$

Будем искать решения уравнения (12.53) в виде, близком к стационарному:  $V = V(\xi, \tau)$ , где  $\tau = \varepsilon t$  — медленное время. Тогда из уравнения (12.53) будем иметь

$$V_\tau = \frac{g}{2C} (1 - \beta V^2) V.$$

Обозначив  $m = \beta V^2$ , получим

$$m_\tau = \sigma m(1 - m),$$

где  $\sigma = g/C$ . Решение этого уравнения с начальным условием  $m(0) = m_0$  есть

$$m = \frac{m_0}{m_0 + (1 - m_0) \exp(-\sigma \tau)}.$$

Таким образом, если  $m_0 \neq 0$ , то при  $t \rightarrow \infty$  имеем

$$m \rightarrow 1, \quad V \rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

Следовательно, если на вход линии подается униполярный импульс произвольной формы, то в процессе распространения он превращается в прямоугольный со стандартной амплитудой. Распространение возмущений с амплитудой, меньшей  $1/\sqrt{\beta}$ , сопровождается усилением. Если же подать на вход синусоидальный сигнал, то он превращается в последовательность прямоугольных импульсов (рис. 12.12). Таким образом, произвольное начальное возмущение превращается либо в пространственно-однородное, либо в разрывное: разрывы образуются там, где  $m_0(x) = 0$ .

Причиной возникновения разрывов является пренебрежение дисперсией. В предыдущих параграфах настоящей лекции рассматривались в основном сильнодиспергирующие среды в которых фазовые скорости различных гармоник отличаются значительно, что позволяет считать волну

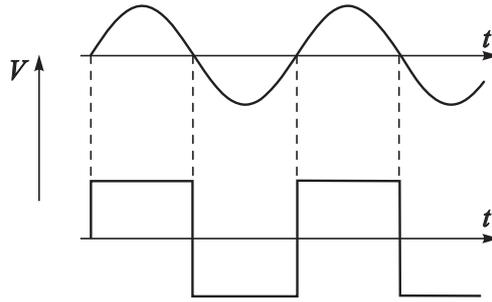


Рис. 12.12. Превращение синусоидальной волны в разрывную

квазигармонической и описывать ее при помощи уравнений для медленно меняющихся амплитуд.

Исследуем влияние *высокочастотной диссипации*, для чего рассмотрим линию передачи, эквивалентная схема которой приведена на рис. 12.13. В этом случае вместо уравнения (12.53) будем иметь

$$V_t + cV_x - \nu V_{xx} = \gamma(1 - \beta V^2)V, \quad (12.54)$$

где  $\nu = R/2L$ ,  $\gamma = \varepsilon g/2C$ . Будем искать решения этого уравнения в виде стационарных волн. Переходя в уравнении (12.54) к переменной  $\xi = x - Ut$ , получим уравнение нелинейного осциллятора с затуханием

$$\nu V'' + (U - c)V' + \gamma(1 - \beta V^2)V = 0, \quad (12.55)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по  $\xi$ . Очевидно, что периодические решения существуют лишь при  $U = c$ . Тогда уравнение (12.55) принимает вид

$$V'' + \frac{\gamma}{\nu}(1 - \beta V^2)V = 0.$$

Решения этого уравнения анализировались в § 11.5. На фазовом портрете (рис. 11.3) имеется континуум замкнутых фазовых траекторий, соответствующих периодическим стационарным волнам. Можно, однако, показать, что все эти решения неустойчивы относительно малых возмущений [90]. Кроме того существуют решения в виде уединенных волн

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{th}(\xi/\Delta), \quad (12.56)$$

где  $\Delta^2 = 2\nu/\gamma$ . Им соответствуют сепаратрисы, идущие из седла в седло.

Решения (12.56) описывают тонкую структуру фронтов импульса, которые ранее представлялись в виде разрывов. Таким образом, высокочастотная диссипация приводит к сглаживанию разрывных фронтов. Следует отметить очевидную аналогию с уравнениями простой волны и Бюргера (лекции 2, 5). Первое имеет разрывные решения; во втором введение диссипации приводит к появлению ударных волн.

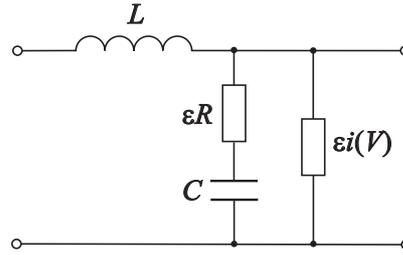


Рис. 12.13. Эквивалентная схема активной линии передачи с высокочастотными потерями

Наконец, исследуем влияние *реактивной нелинейности*, для чего будем считать емкость нелинейной:  $C = C(V)$ . Уравнение (12.54) в этом случае следует дополнить еще одним нелинейным слагаемым. Предполагая нелинейность квадратичной, получим

$$V_t + cV_x + VV_x - \nu V_{xx} = \gamma(1 - \beta V^2)V. \quad (12.57)$$

Пренебрежем диссипативной нелинейностью, т.е. положим  $\beta = 0$ . Для решений в виде стационарных волн будем иметь уравнение

$$(c - U)V' + VV' - \nu V'' = \gamma V.$$

По-прежнему будем считать, что  $U = c$ , тогда

$$V'' - \frac{1}{\nu}VV' + \frac{\gamma}{\nu}V = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} V' &= W \\ \nu W' &= V(W - \gamma). \end{aligned} \quad (12.58)$$

Отсюда находим уравнение интегральных кривых

$$\nu \frac{dW}{dV} = \frac{V(W - \gamma)}{W}. \quad (12.59)$$

Нетрудно видеть, что существует интегральная кривая (прямая)  $W = \gamma$ . Разделяя переменные в уравнении (12.59), находим, что

$$\nu \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma - W}\right) dW = V dV.$$

Это соотношение легко интегрируется, приводя к уравнению фазовых траекторий в виде

$$\frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = \nu \left( W + \gamma \ln \frac{\gamma - W}{\gamma} \right), \quad (12.60)$$

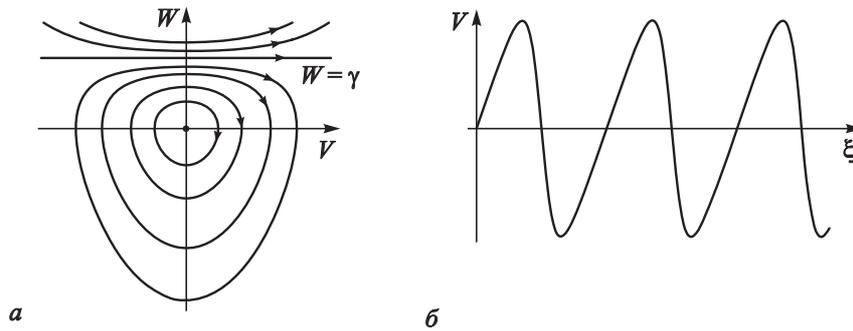


Рис. 12.14. Фазовый портрет системы (12.58) (а) и профиль решения с большой амплитудой (б)

где  $V_0 = V(W = 0)$ . Финитные движения существуют при  $W < \gamma$ .

Фазовый портрет представлен на рис. 12.14а. Волны с большой амплитудой имеют участок медленных изменений, которому на фазовой плоскости соответствует движение вблизи прямой  $W = \gamma$ , и участок быстрых изменений — движение по уходящей далеко вниз петле. Таким образом, решение представляет собой стационарную нелинейную волну, близкую по форме к пилообразной, но со сглаженным передним фронтом (рис. 12.14б). Подобные волны типичны для нелинейных недиспергирующих сред. Аналогичные решения были найдены выше в задаче 3.1, где рассматривался процесс образования и распространения стационарных пилообразных волн в активной среде, которая описывается уравнением

$$u_t + uu_x = \gamma u.$$

Поскольку высокочастотная диссипация в последнем уравнении явно не учитывается, полученные в задаче 3.1 решения содержали разрывы.

На качественном уровне появление таких волн можно пояснить следующим образом. Поскольку в системе имеется неустойчивость, первоначально малая амплитуда волны, поданной на вход линии, нарастает. При этом реактивная нелинейность вызывает укручение переднего фронта. На спектральном языке этому процессу соответствует перекачка энергии из низших гармоник в высшие. Благодаря высокочастотной диссипации высшие гармоники интенсивно затухают, что приводит к насыщению неустойчивости. В результате образуется стационарный профиль, изображенный на рис. 12.14б.

Значительно более подробное обсуждение различных вопросов, связанных с распространением электромагнитных волн в активных нелинейных линиях передачи, содержится в книгах [90, 181].

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Физматлит, 2000.
- [2] Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001.
- [3] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002 (1-е изд.), 2005 (2-е изд.).
- [4] Scott Russell J. Report on waves. Rept. 14th meetings of the British Assoc. for the Advancement of Science. London: John Murray, 1844. P. 311–390.
- [5] Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1895. Vol. 39. P. 422–443.
- [6] Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems // Los Alamos Sci. Lab. Report LA-1940, 1955.  
Ферми Э. Научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 647–657.
- [7] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15, № 6. P. 240–243.
- [8] Данилов Ю.А. Нелинейность // Знание — сила. 1982. № 11. С. 34.
- [9] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [10] Корпел А., Банерджи П.П. Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям // ТИИЭР. 1984. Т. 72, № 9. С. 6–30.
- [11] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
- [12] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
- [13] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
- [14] Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.
- [15] Руденко О.В., Солюян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
- [16] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.

- [17] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
- [18] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [19] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
- [20] Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
- [21] Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2001.
- [22] Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003.
- [23] Инфельд Э., Роуландс Дж. Нелинейные волны, солитоны и хаос. М.: Физматлит, 2006.
- [24] Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. М.: Физматлит, 2007.
- [25] Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008.
- [26] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2010.
- [27] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. 1948. Vol. 1. P. 171–199.
- [28] Benjamin T.B., Bona J.G., Machoney J.J. Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems // Phil. Trans. Roy. Soc. 1972. Vol. 272A. P. 47–78.
- [29] Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 1064–1091.  
Ландау Л.Д. Собрание трудов. Т. 2. М.: Наука, 1969. С. 126–152.
- [30] Newell A.C., Whitehead J.A. Finite-bandwidth, finite-amplitude convection // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 38, № 2. P. 279–303.
- [31] Stewartson K., Stuart J.T. Nonlinear instability of plane Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48, № 3. P. 529–545.
- [32] Tagg R., Edwards W.S., Swinney H.L. Convective versus absolute instability in flow between counterrotating cylinders // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42, № 2. P. 831–837.
- [33] Kuramoto Y., Tzuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction–diffusion systems // Prog. Theor. Phys. 1975. Vol. 54, № 3. P. 687–699.
- [34] Кузнецов Е.А., Лушников П.М. Нелинейная теория возбуждения волн ветром за счет неустойчивости Кельвина–Гельмгольца // ЖЭТФ. 1995. Т. 108, № 2. С. 614–630.
- [35] Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983.

- [36] Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Нестационарные нелинейные явления в системе электронный поток в скрещенных полях — обратная электромагнитная волна // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20, № 2. С. 300–312.
- [37] Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. О трехмерных солитонах // ЖЭТФ. 1974. Т. 66, № 2. С. 594–600.
- [38] Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах // ДАН. Сер. Математика. Физика. 1970. Т. 192. С. 753–756.
- [39] Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989.
- [40] Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акустический журнал. 1969. Т. 15, № 1. С. 106–109.
- [41] Кузнецов В.П. Уравнения нелинейной акустики // Акустический журнал. 1970. Т. 16, № 4. С. 548–553.
- [42] Гуревич А.В., Пятаевский Л.П. Нелинейные волны с дисперсией и нелокальным затуханием // ЖЭТФ. 1991. Т. 99, № 5. С. 1470–1478.
- [43] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
- [44] Шевчик В.Н. Основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1959.
- [45] Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987.
- [46] Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
- [47] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
- [48] Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990.
- [49] Кацман Ю.А. Уравнения колебаний однородных электронных потоков // ЖТФ. 1952. Т. 22, № 9. С. 1467–1476.
- [50] Савельев В.Я. К теории клайстронов // ЖТФ. 1940. Т. 10, № 16. С. 1356–1371.
- [51] Гуревич А.В., Зыбин К.П., Медведев Ю.В. Нелинейная теория джинсовской неустойчивости в холодном бездиссипативном веществе // ЖЭТФ. 1993. Т. 104, № 4. С. 3369–3386.
- [52] Гуревич А.В., Зыбин К.П. Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория // УФН. 1995. Т. 165, № 7. С. 723–758.
- [53] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их применение в газовой динамике. М.: Наука, 1978.

- [54] Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН. 1995. Т. 165, № 9. С. 1011–1036.
- [55] Руденко О.В. Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения // УФН. 2007. Т. 177, № 4. С. 374–383.
- [56] Гласс И.И. Ударные волны и человек. М.: Мир, 1977.
- [57] Дафермос К. Квазилинейные гиперболические системы, вытекающие из законов сохранения. В кн.: «Нелинейные волны» / Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Мир, 1977. С. 91–112.
- [58] Cole J.D. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. Vol. 9. P. 225–236.
- [59] Hopf E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$  // Comm. Pure Appl. Math. 1950. Vol. 3. P. 201–230.
- [60] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.
- [61] Хохлов Р.В. Теория ударных радиоволн в нелинейных линиях передачи // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6, № 6. С. 917–925.
- [62] Солуян С.И., Хохлов Р.В. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1961. № 3. С. 52–61.
- [63] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
- [64] Fay R.D. Plane sound waves of finite amplitude // J. Acoust. Soc. America. 1931. Vol. 3, № 2. Part I, P. 222–241.
- [65] Руденко О.В., Солуян С.И. Некоторые нестационарные задачи теории волн конечной амплитуды в сплошных средах // ДАН. 1970. Сер. Математика. Физика. Т. 190, №4. С. 815–818.
- [66] Руденко О.В. Математические модели, точные решения, методы анализа. В кн.: «Нелинейные волны'2006» / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова и В.И. Некоркина. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007. С. 139–150.
- [67] Дородницын В.А., Есенин Г.Г. Симметрия нелинейных явлений. В кн. «Компьютеры и нелинейные явления». М.: Наука, 1988. С. 123–191.
- [68] Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. М.: КомКнига, 2006.
- [69] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
- [70] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
- [71] Эйби Дж.А. Землетрясения. М.: Недра, 1982.
- [72] Ферхутен Дж., Тернер Ф., Вейс Л., Вархафтинг К., Файф У. Земля. Введение в общую геологию. Т. 1,2. М.: Мир, 1974.

- [73] *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1974.
- [74] *Имшенник В.С., Надёжин Д.К.* Сверхновая 1987А в Большом Магеллановом Облаке: наблюдения и теория // УФН. 1988. Т. 156, № 4. С. 561–651.
- [75] *Моррисон Д.Р.О.* Сверхновая 1987А: обзор // УФН. 1988. Т. 156, № 4. С. 719–752.
- [76] *Scott Russell J.* The modern system of naval architecture. I. London: Day and Son, 1865.
- [77] *Boussinesq J.* Théorie de l'intumescence liquid applée onde solitarie ou de translation se propagent dans un canal rectangularie // Comptes Rendus. 1871. Vol. 72. P. 755–759.
- [78] *Lord Rayleigh.* On waves // Phil. Mag. 1876. Vol. 1. P. 257–279.
- [79] *Пелиновский Е.Н.* Нелинейно-дисперсионная теория волн цунами: взгляд после катастрофического цунами в Индийском океане. В кн.: «Нелинейные волны'2006» / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова и В.И. Некоркина. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007. С. 363–407.
- [80] *Ткаченко С.Н., Френкель Я.И.* К теории теплопроводности диэлектрических кристаллов // ЖЭТФ. 1938. Т. 8, № 5. С. 570–577.
- [81] *Скотт Э., Чу Ф., Маклафлин Д.* Солитон — новое понятие в прикладных науках // В кн.: Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. С. 215–284.
- [82] *Буллаф Р., Кодри П.* Солитон и его история. В кн.: «Солитоны» / Под ред. Р. Буллафа и П. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 11–77.
- [83] *Юэн Г., Лэйк Б.* Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987.
- [84] *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
- [85] *Израилев Ф.М., Чириков Б.В.* Статистические свойства нелинейной струны // ДАН. 1966. Сер. Математика. Физика. Т. 166, № 1. С. 57–59.
- [86] Focus Issue: The Fermi–Pasta–Ulam Problem — the First 50 Years // Chaos. 2005. Vol. 15, № 1.
- [87] *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Оптические солитоны и квазисолитоны // ЖЭТФ. 1998. Т. 113, № 5. С. 1892–1914.
- [88] *Bogdanov L.V., Zakharov V.E.* The Boussinesq equation revisited // Physica D. 2002. Vol. 165. P. 137–162.
- [89] *Гапонов А.В., Островский Л.А., Фрейдман Г.И.* Ударные электромагнитные волны // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9–10. С. 1376–1413.
- [90] *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
- [91] *Skyrme T.H.R.* A non-linear theory of strong interaction // Proc. Roy. Soc. London. 1958. Vol. A247. P. 260–278.

- [92] Кейн Г. Современная физика элементарных частиц. М.: Мир, 1989.
- [93] Perring J.K., Skyrme T.H.R. A model unified field equation // Nucl. Physics. 1962. Vol. 31. P. 550–555.
- [94] Белова Т.И., Кудрявцев А.Е. Солитоны и их взаимодействие в классической теории поля // УФН. 1997. Т. 167, № 4. С. 377–406.
- [95] Конторова Т.А., Френкель Я.И. К теории пластической деформации и двойникования. Ч. I // ЖЭТФ. 1938. Т. 8, № 1. С. 89–95.
- [96] Браун О.М., Кившарь Ю.С. Модель Френкеля–Конторовой. Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008.
- [97] Якушев Л.В. Нелинейная физика ДНК. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007.
- [98] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1967.
- [99] Роу Дж. Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1969.
- [100] Рыскин Н.М. Уединенные волны пространственного заряда // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 84–92.
- [101] Trubetskov D.I., Mchedlova E.S., Anfinogentov V.G., Ponomarenko V.I., Ryskin N.M. Nonlinear waves, chaos and patterns in microwave electronic devices // Chaos. 1996. Vol. 6, № 3. P. 358–367.
- [102] Дубинов А.Е. Теория нелинейных волн пространственного заряда в нейтрализованных электронных потоках: газодинамический подход // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 3. С. 239–246.
- [103] Дубинов А.Е., Дубинова А.А. Нелинейная теория ионно-звуковых волн в идеальной плазме с вырожденными электронами // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 10. С. 935–947.
- [104] Ikezi H., Taylor R.J., Baker R.D. Formation and interaction of ion-acoustic solitons // Phys. Rev. Lett. 1970. Vol. 25, № 1. P. 11–14.
- [105] Ведерко А.В., Дубровская О.Б., Марченко В.Ф., Сухоруков А.П. О солитонах с малым числом периодов во времени или в пространстве // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1992. Т. 33, № 3. С. 4–20.
- [106] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
- [107] Ikezi H., Barrett P.J., White R.B., Wong A.Y. Electron plasma waves and free-streaming electron bursts // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14, № 9. P. 1997–2005.
- [108] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [109] Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D. Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion // J. Math. Phys. 1968. Vol. 9, № 8. P. 1204–1209.

- [110] *Miura R.M.* Korteweg–de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation // *J. Math. Phys.* 1968. Vol. 9, № 8. P. 1202–1204.
- [111] *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д.* Уравнение Кортевега–де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // *Функциональный анализ и его приложения.* 1971. Т. 5, № 4. С. 18–27.
- [112] *Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg–de Vries equation // *Phys. Rev. Lett.* 1967. Vol. 19, № 19. P. 1095–1097.
- [113] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
- [114] *Карпман В.И., Соколов В.П.* О солитонах и собственных значениях уравнения Шрёдингера // *ЖЭТФ.* 1968. Т. 54, № 5. С. 1568–1580.
- [115] *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // *Commun. Pure Appl. Math.* 1968. Vol. 21. P. 467–490.  
*Лэкс П.Д.* Инвариантные функционалы нелинейных волновых уравнений. В кн.: «Нелинейные волны» / Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Мир, 1977. С. 297–316.
- [116] *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *ЖЭТФ.* 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.
- [117] *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. Ч. I // *Функциональный анализ и его приложения.* 1974. Т. 6, № 3. С. 43–53.  
*Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. Ч. II // *Функциональный анализ и его приложения.* 1979. Т. 13, № 3. С. 13–22.
- [118] *Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H.* The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems // *Stud. Appl. Math.* 1974. Vol. 53. P. 249–315.
- [119] *Ablowitz M.J., Haberman R.* Resonantly coupled nonlinear evolution equations // *J. Math. Phys.* 1975. Vol. 16, № 11. P. 2301–2305.
- [120] *Hirota R.* Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons // *Phys. Rev. Lett.* 1972. Vol. 27. P. 1192–1194.
- [121] *Хирота Р.* Прямые методы в теории солитонов. В кн.: «Солитоны» / Под ред. Р. Буллафа и П. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 175–192.
- [122] *Wahlquist H.D., Estabrook F.B.* Prolongation structures of nonlinear evolution equations // *J. Math. Phys.* 1975. Vol. 16, № 1. P. 1–7.
- [123] *Wahlquist H.D., Estabrook F.B.* Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg–de Vries equation // *Phys. Rev. Lett.* 1973. Vol. 31. P. 1386–1390.

- [124] *Lighthill M.J.* Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems // *J. Inst. Math. Appl.* 1965. Vol. 1, № 3. P. 269–306.
- [125] *Benjamin T.B., Feir J.E.* The disintegration of wave trains in deep water. Pt. I. Theory // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 27, № 3. P. 417–430.
- [126] *Zakharov V.E., Ostrovsky L.A.* Modulation instability: The beginning // *Physica D.* 2009. Vol. 238. P. 540–548.
- [127] *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // *ПМТФ.* 1968. № 2. С. 86–94.
- [128] *Davey A.* The propagation of a weakly nonlinear wave // *J. Fluid Mech.* 1972. Vol. 53. P. 769–781.
- [129] *Hasimoto H., Ono H.* Nonlinear modulation of gravity waves // *J. Phys. Soc. Japan.* 1972. Vol. 33. P. 805–811.
- [130] *Островский Л.А., Соустов Л.В.* «Самомодуляция» электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1972. Т. 15, № 2. С. 242–248.
- [131] *Захаров В.Е.* Коллапс ленгмюровских волн // *ЖЭТФ.* 1972. Т. 62, № 5. С. 1745–1760.
- [132] *Рыскин Н.М.* Модуляционная неустойчивость волн пространственного заряда // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1994. Т. 2, № 5. С. 93–100.  
*Рыскин Н.М.* Модуляционная неустойчивость волн пространственного заряда. Численный эксперимент // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1994. Т. 2, № 6. С. 48–55.
- [133] *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996.
- [134] *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. М.: Физматлит, 2005.
- [135] *Рыскин Н.М.* Связанные нелинейные уравнения Шредингера для описания распространения многочастотных волновых пакетов в нелинейной среде с дисперсией // *ЖЭТФ.* 1994. Т. 106, № 5(11). С. 1542–1546.
- [136] *Балякин А.А., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* Нелинейная динамика модуляционной неустойчивости в распределенных резонаторах под внешним гармоническим воздействием // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2007. Т. 50, № 9. С. 800–820.
- [137] *Хаус Х.* Волны и поля в оптоэлектронике. М.: Мир, 1988.
- [138] *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulse in dispersive dielectric fibers. 1. Anomalous dispersion // *Appl. Phys. Lett.* 1973. Vol. 23, № 3. P. 142–144.  
*Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulse in dispersive dielectric fibers. 2. Normal dispersion // *Appl. Phys. Lett.* 1973. Vol. 23, № 4. P. 171–172.

- [139] *Mollenauer L., Stolen R., Gordon J.* Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 1095–1098.
- [140] *Mollenauer L., Smith K.* Demonstration of soliton transmission over more than 4000 km in fiber with loss periodically compensated by Raman gain // *Opt. Letters.* 1988. Vol. 13, № 8. P. 675–677.
- [141] *Hasegawa A.* An historical review of application of optical solitons for high speed communications // *Chaos.* 2000. Vol. 10, № 3. P. 475–485.
- [142] *Nakazawa M., Kubota H., Suzuki K., Yamada E., Sahara A.* Recent progress in soliton transmission technology // *Chaos.* 2000. Vol. 10, № 3. P. 486–514.
- [143] *Аскаръян Г.А.* Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного луча на электроны и атомы // *ЖЭТФ.* 1962. Т. 42, № 6. С. 1567–1570.
- [144] *Bauer M., Mathieu C., Demokritov S.O., Hillebrands B., Kolodin P.A., Sure S., Dotsch H., Grimalsky V., Rapoport Yu., Slavina A.N.* Direct observation of two-dimensional self-focusing of spin waves in magnetic films // *Phys. Rev. B.* 1997. Vol. 56, № 14. P. R8483–R8486.
- [145] *Дудко Г.М., Филимонов Ю.А.* Самофокусировка ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках: численный эксперимент // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 6. С. 29–40.
- [146] *Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И.* Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов) // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1971. Т. 14, № 9. С. 1453–1463.
- [147] *Власов С.Н., Таланов В.И.* Самофокусировка волн. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1997.
- [148] *Филлипс О.М.* Взаимодействие волн. В кн.: «Нелинейные волны» / Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Мир, 1977. С. 197–220.
- [149] *Вильгельмссон Х., Вейланд Я.* Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981.
- [150] *Захаров В.Е., Манаков С.В.* Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах // *ЖЭТФ.* 1975. Т. 69, № 5. С. 1654–1673.
- [151] *Kaup D.J., Reiman A., Bers A.* Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions. I. Interaction in a homogeneous medium // *Rev. Mod. Phys.* 1979. Vol. 51, № 2. P. 275–310.
- [152] *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: Иностранная литература, 1963.
- [153] *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика. Генераторы второй гармоники и параметрические генераторы света. М.: Радио и связь. 1982.

- [154] *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Об одной возможности усиления световых волн // ЖЭТФ. 1962. Т. 43, № 7. С. 351–353.
- [155] *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Параметрические усилители и генераторы света // УФН. 1966. Т. 88, № 3. С. 439–460.
- [156] *Вашиковский А.В., Стальмазов В.С., Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1993.
- [157] *Лопухин В.М., Рошаль А.С.* Электроннолучевые параметрические усилители. М.: Сов. радио, 1968.
- [158] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
- [159] *Маршалл Т.* Лазеры на свободных электронах. М.: Мир, 1987.
- [160] *McNeil B.* Free electron lasers: First light from hard X-ray laser // Nature Photonics. 2009. Vol. 3, № 7. P. 357–377.
- [161] *Franken P.A., Hill A.E., Peters C.W., Weinreich G.* Generation of optical harmonics // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 7, № 4. P. 118–119.
- [162] *Хохлов Р.В.* О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6, № 7. С. 1116–1127.
- [163] *Кляшко С.В., Рабинович М.И., Реутов В.П.* Наблюдение взрывной неустойчивости параметрически связанных волн // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16, № 7. С. 384–387.
- [164] *Буц В.А., Измайлов А.Н.* Взрывная неустойчивость в системах с электронным пучком // ЖТФ. 1976. Т. 46, № 11. С. 2451–2453.
- [165] *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Взрывная неустойчивость в системах типа «два взаимодействующих электронных потока — обратная электромагнитная волна» // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4–5. С. 65–77.
- [166] Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкого. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975.
- [167] *Рабинович М.И., Реутов В.П., Цветков А.А.* О слиянии волновых импульсов и пучков при взрывной неустойчивости // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, № 8. С. 525–532.
- [168] *Bers A., Kaup D.J., Reiman A.H.* Nonlinear interaction of three wave packets in a homogeneous medium // Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 37, № 4. P. 182–185.
- [169] *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* Уравнение Гинзбурга–Ландау и нелинейная динамика неравновесных сред // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 32, № 2. С. 131–143.
- [170] *Рабинович М.И., Езерский А.Б.* Динамическая теория формообразования. М.: Янус-К, 1998.
- [171] *Abarbanel H.D.I., Rabinovich M.I., Sushchik M.M.* Introduction to nonlinear dynamics for physicists. World Scientific, 1993, Lecture 25.

- [172] *Aranson I.S., Kramer L.* The world of the complex Ginzburg–Landau equation // *Rev. Mod. Phys.* 2002. Vol. 74, № 1. P. 99–143.
- [173] *Lange C., Newell A.C.* A stability criterion for envelope equations // *SIAM J. Appl. Math.* 1974. Vol. 27. P. 441–456.
- [174] *Балякин А.А., Рыскин Н.М.* Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // *Письма в ЖТФ.* 2004. Т. 30, № 5. С. 6–13.
- [175] *Balyakin A.A., Ryskin N.M.* Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency // *Nonlin. Phenom. Complex Systems.* 2004. Vol. 7, № 1. P. 34–42.
- [176] *Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
- [177] *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М.* Динамическая модель пространственного развития турбулентности // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39, № 12. С. 561–564.
- [178] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Изд. группа URSS, 2009.
- [179] *McCall S.L., Hahn E.L.* Self-induced transparency by pulsed coherent light // *Phys. Rev. Lett.* 1967. Vol. 18, № 21. P. 908–911.
- [180] *Манаков С.В.* Распространение ультракороткого оптического импульса в двухуровневом лазерном усилителе // *ЖЭТФ.* 1982. Т. 83, № 1. С. 68–83.
- [181] *Богатырев Ю.К.* Импульсные устройства с нелинейными распределенными параметрами. М.: Сов. радио, 1974.