**Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского**

***И.Ю. Выгодчикова***

# ЗАДАЧИ РАЦИОНАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

Учебное пособие для студентов
**Специальности «Прикладная информатика»**

Рекомендует:
Кафедра математической экономики
Механико-математического факультета СГУ

**Саратов 2011 г.**

**Автор: И.Ю. Выгодчикова**

## АННОТАЦИЯ

В пособии содержатся некоторые вопросы математической экономики, относящиеся к моделированию и оптимизации поведения экономических агентов. Рассматриваются задачи рационального поведения потребителя, максимизации прибыли фирмы, а также задачи, возникающие при взаимодействии производителей и потребителей. Приведены задачи линейного программирования и методы их решения с примерами и иллюстрациями. Даны задания для самостоятельного решения, контрольная работа, тесты. Представлены рекомендации по использованию стандартных прикладных программ.

Блок вопросов, рассмотренных в учебном пособии «Задачи рационального поведения в экономике» может наполнять лекционные и практические занятия со студентами дистанционной формы обучения специальности «прикладная информатика» для курсов «математическая экономика», «методы оптимизации», специальных курсов и специальных семинаров.

## ВВЕДЕНИЕ

*Задачи рационального поведения экономических агентов решаются в рамках более широкой дисциплины — математической экономики. Математическая экономика* — раздел экономической науки, занимающийся анализом свойств и применения для выработки решений математических моделей экономических процессов. В некоторых случаях эти модели могут рассматриваться как часть математической теории на стыке с экономической наукой. Математическая экономика отделяется обычно от эконометрики, занимающейся статистической оценкой и анализом экономических зависимостей и моделей на основе изучения эмпирических данных. В математической экономике исследуются теоретические модели, основанные на определенных формальных предпосылках (линейность, выпуклость, монотонность и т.п. зависимости, конкретные формулы взаимосвязи величин).

Математические модели, используемые в экономике, можно подразделять на классы по ряду признаков, относящихся к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария: модели макро- и микроэкономические, теоретические и прикладные, оптимизационные и равновесные, статические и динамические.

*Макроэкономические* модели описывают экономику как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели: ВНП, потребление, инвестиции, занятость, процентную ставку, количество денег и другие.

*Микроэкономические* модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики, либо поведение отдельной такой составляющей в рыночной среде, в том числе с учётом *временной* ценности финансовых измерителей экономических явлений. Центральное место в рамках микроэкономики занимают модели поведения потребителей и фирм-товаропроизводителей. Также рассматриваются рыночные аспекты моделирования поведения фирм в условиях монополии и олигополии.

Именно микроэкономическим моделям и посвящён, преимущественно, изложенный ниже материал.

Математическая экономика, вообще говоря, не занимается изучением степени обоснованности того, что данная зависимость имеет тот или иной вид (например, что величина потребления является линейной возрастающей функцией дохода), — это оставляется для эконометрики. Задачей математической экономики является изучение вопроса о существовании решения оптимизационной задачи, полученной в результате моделирования, условиях его неотрицательности, стационарности, наличия других свойств. Это обычно осуществляется, как и в математике, путем дедуктивного получения следствий (теорем) из априорно сделанных предпосылок (аксиом).

Моделирование экономического поведения на микроуровне связано с анализом двух основных субъектов - потребителей, покупающих товары для удовлетворения своих потребностей, и фирм-товаропроизводителей, которые в данном случае играют роль экономических агентов.

*Экономическим агентом* является участник экономических отношений, обладающий некоторым набором экономических ресурсов, имеющий сформированную систему предпочтений и вступающий в товарно-денежные отношения с определённой целью.

Итак, для успешного моделирования поведения агента нужно выявить его первоочередные цели и те блага, которые ему нужны для удовлетворения своих целей, а также те ресурсы, которыми он обладает для приобретения указанных благ.

Немного идеализируя реальную ситуацию, считаем, что, принимая решение, агент сопоставляет свои возможности, рационализирует предпочтения и выбирает оптимальную (наиболее желательную, наиболее прибыльную) из возможных альтернативных вариантов реализации своего решения.

При моделировании поведения потребителя целевой функцией является так называемая функция полезности. По своей сути полезность блага (utility) – это его способность удовлетворять одну или несколько человеческих потребностей. Ясно, что потребности бывают самые разнообразные, от самых первичных – в еде и одежде, до потребностей более высокого уровня – в информации, общении и самореализации [7,8]. Чаще всего задачу потребителя рассматривают для товаров повседневного спроса.

**Автор: И.Ю. Выгодчикова**

При моделировании деятельности фирмы, возникает сложность с классификацией ресурсов, используемых для производства конечной продукции. Часто, особенно в макроэкономическом анализе, используют только 2 вида ресурсов – трудовые ресурсы и основные производственные фонды, однако при этом следует математически грамотно выбирать единицы измерения показателей.

## Тема 1. Задача поведения рационального потребителя

Рассмотрим поведение рационального потребителя на рынке. Обозначим через $x_i$ количество приобретаемого потребителем товара i-го вида, и пусть он рассчитывает приобрести n товаров, израсходовав на это I денежных единиц из своего дохода.

Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R_+^n$ будем называть набором товаров, а $C = R_+^n$ - *пространством товаров*. Введём в рассмотрение вектор цен этих товаров $p = (p_1, ..., p_n) \in R_+^n$.

Множество $D = \{ x \in R_+^n : \langle p, x \rangle \le I \}$ назовём множеством доступных потребителю товаров, а $Б = \{ x \in R_+^n : \langle p, x \rangle = I \}$ - бюджетным множеством [1,2,4]. Ясно, что если потребитель закупит товары из *бюджетного* множества, он израсходует весь свой доход, выделенный на покупку товаров.

Выбор потребителем того или иного набора товаров характеризуется некоторым отношением *предпочтения.* Считается, что относительно любых двух наборов товаров $x, y \in R_+^n$ потребитель может сказать, что либо один из них предпочтительнее другого, либо эти наборы для него одинаково привлекательны. Отношения предпочтения формализуются с помощью функции полезности $u(x)$, причём неравенство $u(x) > u(y)$ означает, что набор $x$ предпочтительнее набора $y$, а равенство $u(x) = u(y)$ означает, что эти наборы для потребителя равно желаемы.

Итак, *функция полезности* – это скалярная функция многих переменных, определённая на пространстве товаров, которая каждому набору товаров из этого пространства ставит в соответствие число, условно выражающая полезность этого набора.

Обычно функция полезности удовлетворяет следующим свойствам (*аксиомы полезности*) [1,2,4]:

1) функция полезности $u(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема на пространстве товаров C,

2) все частные производные функции полезности первого порядка, называемые *предельными полезностями (англ. Marginal Utility),* являются положительными внутри С:

$$u'(x) = MU(x) = (MU_1(x), \dots, MU_n(x)) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right),\ MU_j(x) > 0,\ j = \overline{1,n},$$

отсюда вытекает, что функция полезности возрастает по каждой переменной внутри С.

Вспомним определение частной производной: это предел отношения приращения функции к приращению соответствующей переменной при условии, что последнее стремится к нулю, следовательно, предельная полезность приближённо показывает, насколько измениться полезность при изменении количества соответствующего товара в наборе на единицу, то есть для потребителя «чем больше товара он получает, тем лучше».

3) матрица Гёссе $u''(x)$ является отрицательно определённой внутри С. Это влечёт вогнутость функции полезности внутри С и, кроме того, отрицательность элементов главной диагонали (иногда требование вогнутости ослабляют, заменяя последним):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} MU_j(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^{\ 2}} < 0,\ j = \overline{1,n},$$

то есть предельная полезность любого товара уменьшается по мере потребления (закон убывающей предельной полезности, или закон Госсена). Это вполне понятно, например, покупка автомобиля принесёт огромную радость, приобретение второго автомобиля тоже вызовет положительные эмоции, но в меньшей степени, чем покупка первого.

Функция полезности, удовлетворяющая таким требованиям, обычно называется *неоклассической.*

Примерами могут служить функция с постоянной эластичностью замещения (n=2)

$$u(x) = a\left[\frac{\delta}{x_1^{\ \rho}} + \frac{1-\delta}{x_2^{\ \rho}}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}},\ a > 0,\ 0 < \gamma \le 1,\ \rho \ge 0,\ 0 < \delta < 1.$$

мультипликативная функция (Кобба–Дугласа)

$$u(x) = a x_1^{\ \alpha_1} \dots x_n^{\ \alpha_n},\ a > 0,\ \alpha_k > 0,\ k = \overline{1,n},\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \le 1.$$

При логарифмировании последней функции получаем следующую функцию (a=1):

$$u(x) = \alpha_1 \ln x_1 + \dots + \alpha_n \ln x_n,\ \alpha_k > 0,\ k = \overline{1,n}.$$

Рациональный потребитель выберет из множества доступных ему товаров такой товарный набор, который принесёт ему наибольшее удовлетворение.

**Автор: И.Ю. Выгодчикова**

**Задача потребительского выбора формализуется следующим образом:**

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \to \max_{x \in D = \left\{x \in R_+^n : \langle p, x \rangle \le I\right\}}. \qquad (4)$$

Решение задачи (4) при заданном уровне дохода и заданных ценах называют оптимальным набором для потребителя, или потребительским выбором.

Решение этой задачи в общем случае зависит от цен потребительских товаров и дохода потребителя. Такое соответствие порождает *функции спроса* на потребительские товары, $x^*(p,I) = \left(x_1^*(p,I),\ldots,x_n^*(p,I)\right)$.

Если функция полезности является неоклассической, задача (4) сводится к задаче выпуклого программирования и при её решении обычно применяется теорема Куна-Таккера [1]. Отыскать оптимальный набор для потребителя $x^* = \left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right) \in D$ в этом случае можно, решив систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : p_j = \dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} : p_k = \mu, \quad j,k = \overline{1,n},\ j \ne k, \\ \langle p, x^* \rangle = I, \end{cases} \qquad (5)$$

где μ - неизвестный множитель, иногда называемый предельной полезностью денег.

Систему (5) можно проинтерпретировать следующим образом: чтобы получить наибольшее удовлетворение от покупок, потребитель расходует свой доход $\langle p, x^* \rangle = I$ таким образом, что отношение предельной полезности к цене одинаково для всех закупаемых товаров. Например, чтобы потребитель приобрёл ещё 1 банку в 3 раза более дорогого кофе вместо ещё одной пачки чая, он должен «любить» кофе не менее чем в 3 раза больше, чем чай.

Исследование функций спроса $x_1^*(p,I),\ldots,x_n^*(p,I)$ позволяет выявить типологию потребительских товаров. Например, если при росте своего благосостояния потребитель спрашивает больше данного товара, то товар называется ценным, в противном случае – малоценным. Если с ростом цены товара потребитель приобретает меньшее количество этого товара, товар называется нормальным, или подверженным закону спроса. В противном случае товар называется *товаром Гиффена* Типичными примерами товаров Гиффена служат товары первой необходимости (например, рис), составляющие основную долю в потреблении для малообеспеченных слоёв населения. Если цена риса возрастёт, то потребитель исключит из своего набора относительно более дорогие товары (мясо, рыбу), и ещё более увеличит потребление риса. Следует отметить также, что товары Гиффена не могут быть ценными.

Выделяют также взаимодополняющие и взаимозаменяемые товары. Спрос на первые при росте цены товара–субститута падает, а на вторые увеличивается (при условии, что доход потребителя также растёт в зависимости от цены, а полезность не меняется).

**Пример 1.** Рассмотрим функцию полезности

$$u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Решая систему (5), получаем функции спроса на товары

$$x_1^* = \frac{I}{2p_1},\ x_2^* = \frac{I}{2p_2}$$

(оба товара являются ценными и нормальными), причём множитель $\lambda = 2/I$ выражает предельную полезность денег. Далее, продифференцируем тождество $u(x_1^*, x_2^*) = 2\ln I - \ln p_1 - \ln p_2 - \ln 4 \equiv \text{const}$ по $p_1$, считая, что доход потребителя зависит от цен товаров $I = I(p_1, p_2)$ (для наглядности аргументы I опускаем):

$$\frac{2}{I}\frac{\partial I}{\partial p_1} - \frac{1}{p_1} = 0, \text{ откуда получаем } \frac{\partial I}{\partial p_1} = \frac{I}{2p_1}.$$

Тогда $\dfrac{\partial x_1^*|_{comp}}{\partial p_1} = \dfrac{2p_1 \partial I/\partial p_1 - 2I}{4p_1^2} = -\dfrac{I}{4p_1^2},\ \dfrac{\partial x_1^*|_{comp}}{\partial p_2} = \dfrac{\partial I/\partial p_2}{2p_1} = -\dfrac{I}{4p_1 p_2},$

$$\frac{\partial x_2^*|_{comp}}{\partial p_2} = -\frac{I}{4p_2^2},\ \frac{\partial x_2^*|_{comp}}{\partial p_1} = -\frac{I}{4p_1 p_2}.$$

В данном примере оба товара являются взаимодополняющими. Обычно при предельном анализе функций спроса используют известное в математической экономике уравнение Слуцкого ([1-3]), которое позволяет сократить объём вычислений.

Уравнение Слуцкого получается в результате предельного анализа системы (5). В непрерывной форме оно записывается в виде:

$$\frac{\partial x_i^*(p, I)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^*(p, I_{comp})}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^*(p, I)}{\partial I} x_j^*(p, I),\ i, j = \overline{1, n},$$

при малых изменениях цен товаров и дохода можно использовать дискретный аналог этого уравнения:

$$\frac{\Delta x_i^*(p, I)}{\Delta p_j} \approx \frac{\Delta x_i^*(p, I_{comp})}{\Delta p_j} - \frac{\Delta x_i^*(p, I)}{\Delta I} x_j^*(p, I),\ i, j = \overline{1, n}.$$

Левая часть уравнения Слуцкого называется «общим эффектом» влияния изменения $j-ой$ цены на объём спроса на $i-ый$ товар, справа стоит разница между «эффектом замены», вызванного изменением объёма спроса на $i-ый$ товар при замене одного товара другим с учётом изменения $j-ой$ цены и компенсированном изменении дохода (всегда

$\frac{\partial x_i^*(p, I_{comp})}{\partial p_i} < 0$, поскольку спрос на относительно подорожавший товар при росте дохода падает, а спрос на подешевевший товар при снижении дохода повышается) и «эффектом дохода», то есть изменение спроса при изменении дохода.

Здесь $I_{comp} = I(p)|_{u=const}$.

Таблица 1. Классификация товаров

| Группа | Определение | Следствие |
|---|---|---|
| 1. Ценные $i$ | $\frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I} > 0$ | $\frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_i} < 0$ |
| 2. Товары Гиффена $i$ | $\frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_i} > 0$ | $\frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I} < 0$ |
| 3. Малоценные, нормальные $i$ | $\frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I} < 0, \frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_i} < 0$ | |
| Взаимозаменяемые $i, j$ | $\frac{\partial x_i^*(p, I_{comp})}{\partial p_j} > 0$ | |
| Взаимодополняющие $i, j$ | $\frac{\partial x_i^*(p, I_{comp})}{\partial p_j} < 0$ | |

*Замечание 1*. Из уравнения Слуцкого, при $i = j$, вытекает, что товары Гиффена всегда являются малоценными, а ценные товары нормальными (ценных товаров Гиффена не существует!)

*Замечание 2*. Можно доказать, что выполняется *условие агрегации Энгеля*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I} = 1,$$

*из которого следует, что оптимальный набор потребительских товаров содержит хотя бы один ценный товар.*

**Пример 2.** Рассмотрим функцию полезности $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$. Решая систему (6), получаем функции спроса на товары $x_1^* = \frac{I}{2p_1}$, $x_2^* = \frac{I}{2p_2}$ (оба товара являются ценными и нормальными), причём множитель $\lambda = 2/I$ выражает предельную полезность денег. Далее, продифференцируем тождество $u(x_1^*, x_2^*) = 2\ln I - \ln p_1 - \ln p_2 - \ln 4 \equiv const$ по $p_1$, считая, что доход потребителя зависит от цен товаров $I = I(p_1, p_2)$ (для наглядности аргументы I опускаем):

$$\frac{2}{I}\frac{\partial I}{\partial p_1}-\frac{1}{p_1}=0 \text{, откуда получаем } \frac{\partial I}{\partial p_1}=\frac{I}{2p_1}\text{. Тогда}$$

$$\frac{\partial x_1^*|_{comp}}{\partial p_1}=\frac{2p_1\partial I/\partial p_1-2I}{4p_1^2}=-\frac{I}{4p_1^2},\ \frac{\partial x_1^*|_{comp}}{\partial p_2}=\frac{\partial I/\partial p_2}{2p_1}=-\frac{I}{4p_1p_2},$$

$$\frac{\partial x_2^*|_{comp}}{\partial p_2}=-\frac{I}{4p_2^2},\ \frac{\partial x_2^*|_{comp}}{\partial p_1}=-\frac{I}{4p_1p_2}.$$

В данном примере товары являются взаимодополняющими.

*Эластичность в экономике*

Для наглядности рассмотрим функцию одной переменной. *Эластичностью* функции $z(y)$ по переменной $y$ называется величина:

$$\varepsilon=\frac{dz}{dy}:\frac{z}{y}\approx\frac{\Delta z}{z}:\frac{\Delta y}{y}=\left(\frac{\Delta z}{z}\cdot 100\%\right):\left(\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%\right),$$

приближённо показывающая, на сколько процентов изменится значение функции при изменении значения аргумента на 1 %.

Выделяют ценовую (прямую, при $i=j$, и перекрёстную, при $i\neq j$) эластичность спроса

$$\varepsilon_{p_j}\left(x_i^*(p,I)\right)=\frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_j}:\frac{x_i^*(p,I)}{p_j},$$

а также эластичность спроса по доходу:

$$\varepsilon_I\left(x_i^*(p,I)\right)=\frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I}:\frac{x_i^*(p,I)}{I}$$

В примерах 1, 2 прямые эластичности спроса на каждый из товаров равны -1, перекрёстные равны 0., эластичности спроса по доходу равны 1.

*Геометрическая интерпретация решения задачи выбора рационального потребителя для случая двух товаров.*

*Кривой безразличия* для потребителя называется геометрическое место точек пространства затрат, в каждой из которых полезность одинакова. Множество кривых безразличия представляет собой *карту безразличия*. Рассмотрим наборы товаров с кривой безразличия. Для них $u(x_1,x_2)=\text{const}$.

Тогда $du(x_1,x_2)=0$. Поскольку $du(x_1,x_2)=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2$, то

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\text{кр. безр}}=-\frac{MU_1(x_1,x_2)}{MU_2(x_1,x_2)}<0.$$

Если мы увеличим количество первого товара, то количество второго должно сократиться (полезность набора постоянна), причём предельная полезность первого товара сократится, а второго – возрастёт, с учётом знака, вдоль изокванты производная $\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\text{кр. безр}}$ возрастает, что свидетельствует о выпуклости неявной функции $x_2 = x_2(x_1)$. Предельная норма замещения $i$-го товара $j$-м $S_{ij} = \dfrac{MU_1(x_1, x_2)}{MU_2(x_1, x_2)}$ характеризует относительную привлекательность товаров друг к другу.

Из (5) вытекает

$$\left.\frac{dx_2^*}{dx_1^*}\right|_{\text{кр. безр } u(x)=u\left(x^*\right)} = -\frac{MU_1\left(x_1^*, x_2^*\right)}{MU_2\left(x_1^*, x_2^*\right)} = -\frac{\dfrac{\partial u\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_2}} = -\frac{p_1}{p_2},$$

$$x_2^* = -\frac{p_1}{p_2} x_1^* + \frac{I}{p_2}.$$

Отсюда следует, что касательная к кривой безразличия $\left\{x \in R_+^2 : u(x) = u\left(x^*\right)\right\}$ в точке $x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ параллельна линии, содержащей бюджетное множество $\text{Б} = \left\{x \in R_+^2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 = I\right\}$. А так как оптимальный для задачи потребительского выбора набор $x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ принадлежит одновременно кривой безразличия и бюджетному множеству, то он лежит в точке касания бюджетного множества и указанной кривой безразличия.

**Пример 3.** Функция полезности имеет вид $u(x_1, x_2) = 4x_1x_2$, а доход, выделенный для покупки данных товаров, равен 24. В оптимальный набор вошли 2 единицы первого товара и 3 единицы второго товара. При каких ценах на товары $p_1$, $p_2$ потребитель сделал этот выбор?

Решение. Решим задачу геометрически. Поскольку количества товаров не могут быть отрицательными, построения производим в первом квадранте плоскости. Кривая безразличия $4x_1x_2 = c$ является гиперболой (рис. 1).

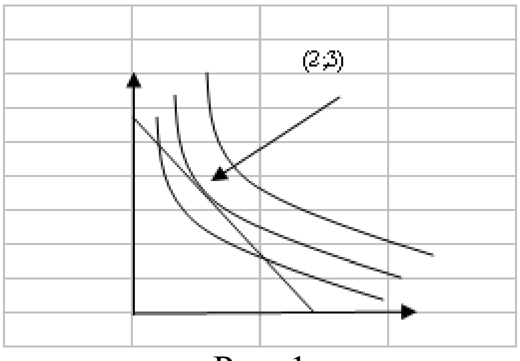



Рис. 1

Бюджетная линия $p_1x_1 + p_2x_2 = 24$ и одна из кривых безразличия касаются в точке $(2;3)$, и в этой точке получаем

$S_{12}\left(2;3\right)=\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{x_2}{x_1}\left(2;3\right)=3/2$. Ввиду того что $2p_1+3p_2=24$, получаем $p_1=6,\ p_2=4$.

## Тема 2. Задача фирмы

Рассмотрим задачу оптимизации прибыли фирмы-товаропроизводителя. При математической формализации этой задачи часто используется понятие *производственной функции*.

Пусть фирма использует в производстве $n$ видов ресурсов в количествах $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in T=R_+^n$ соответственно и изготавливает один вид продукции.

*Производственной функцией (ПФ)* называется функция $f\left(x\right): R_+^n\rightarrow R_+$, которая каждому набору ресурсов $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in T$ ставит в соответствие максимальное количество готовой продукции $f\left(x\right)$, изготовленное при использовании этих ресурсов.

Обычно к ПФ предъявляются следующие требования (неоклассические свойства).

1. Функция $f\left(x\right)$ непрерывна на $R_+^n$, дважды непрерывно дифференцируема внутри пространства затрат $T$.

2. Градиент $f'\left(x\right)$ содержит лишь положительные компоненты внутри $T$. Отсюда вытекает, что функция $f\left(x\right)$ строго возрастает по каждой переменной внутри $T$.

3. Матрица Гёссе $f''\left(x\right)$ отрицательно определена внутри $T$. Отсюда вытекает строгая вогнутость функции $f\left(x\right)$, а также отрицательность элементов главной диагонали матрицы $f''\left(x\right)$.

По своим свойствам ПФ мало чем отличается от функции полезности потребителя. Существенным отличием является то, что значение ПФ является реальным экономическим показателем, выражая количество выпускаемой продукции в соответствующих единицах измерения.

Приведём примеры неоклассических функций:

1) квадратичная функция $f\left(x\right)=\left\langle xB,x\right\rangle+\left\langle a,x\right\rangle$, где $B$ – симметричная отрицательно определённая матрица размерности $n$ и $a+2xB>0$;

2) мультипликативная функция (Кобба – Дугласа)

$$f\left(x\right)=ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n},\ a>0,\ \alpha_k>0,\ k=\overline{1,n},\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\le 1.$$

При логарифмировании этой функции получаем следующую функцию ($a=1$):

$$f(x) = \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n,\ \alpha_k > 0,\ k = \overline{1,n}.$$

3) функция с постоянной эластичностью замещения ($n = 2$)

$$f(x) = a\left[\frac{\delta}{x_1^{\rho}} + \frac{1-\delta}{x_2^{\rho}}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}},\ a > 0,\ 0 < \gamma \le 1,\ \rho \ge 0,\ 0 < \delta < 1.$$

При $\rho \to +\infty$ эта функция преобразуется к виду

$$f(x) = \min\left\{ a x_1^{\gamma}; b x_2^{\gamma} \right\},\ a > 0,\ b > 0,\ 0 < \gamma \le 1,$$

а при $\gamma = 1$ называется *функцией Леонтьева*. Заметим, что функция с постоянной эластичностью не везде дифференцируема, но вогнута.

Будем считать, что производственная функция фирмы удовлетворяет неоклассическим требованиям. Градиент производственной функции содержит предельные продукты ресурсов. Из неоклассических свойств (второго и третьего) вытекает положительность предельных продуктов и отрицательность элементов главной диагонали матрицы Гёссе (предельный продукт любого ресурса убывает при увеличении применения того же ресурса).

Пусть $w = (w_1, \ldots, w_n) \in R_+^n$ – цены ресурсов. Тогда переменные издержки составят $\langle w, x \rangle$. Обозначим через $c_0$ постоянные издержки фирмы, $p > 0$ – цену реализации готовой продукции. Тогда от продажи изготовленной продукции фирма получит прибыль

$$\Pi(x) = pf(x) - \langle w, x \rangle - c_0.$$

Поскольку постоянные издержки не зависят от объёма вовлекаемых в производство ресурсов, считаем их равными нулю, тогда получаем задачу:

$$\Pi(x) = pf(x) - \langle w, x \rangle \to \max_{x \in T}. \qquad (6)$$

Оптимальный набор ресурсов (решение рассматриваемой задачи) обозначим через $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Таким образом, перед фирмой стоит задача выбора: в каких количествах применять ресурсы в производстве ($x = ?$), чтобы достичь максимальной прибыли?

Задача (6) называется *долгосрочной задачей фирмы,* поскольку в долгосрочной перспективе финансовые ресурсы фирмы не ограничены. Целевая функция в задаче (4.1) является линейной комбинацией строго вогнутой ПФ $f(x)$ и линейных функций $x_j$, $j = \overline{1,n}$, поэтому она строго вогнута внутри Т, следовательно, достигает максимума на этом множестве в стационарной точке. Тогда решение задачи (6) сводится к решению относительно компонент вектора $x$ системы уравнений

$$p\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = w_j,\ j = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

К такому же выводу можно прийти, используя теорему Куна – Таккера (см. [2]).

Таким образом, вектор $x^*$ является решением системы (7), следовательно, выполняются равенства

$$p\frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_j} = w_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Решение задачи фирмы $x^* = x^*\left(p,w\right)$ называют *вектор-функцией спроса на ресурсы,* а её компоненты – *функциями спроса на ресурсы*. Подставляя это решение в производственную функцию, получаем *функцию предложения* готовой продукции $q\left(p,w\right) = f\left(x^*\left(p,w\right)\right)$.

При предельном анализе поведения фирмы-товаропроизводителя используют понятие *предельный продукт ресурса (Marginal Product)*. Предельным продуктом $j$-го ресурса в точке $x$ называется частная производная $MP(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, $j=\overline{1,n}$.

На языке приращений предельный продукт $j$-го ресурса приближённо показывает, на сколько изменится объём выпуска готовой продукции при изменении количества вовлекаемого ресурса на единицу.

Соотношения (8) означают, что фирма достигнет максимальной прибыли при условии, что стоимости предельных продуктов ресурсов будут равны ценам этих ресурсов.

Для двухфакторной макроэкономической ПФ Кобба – Дугласа $Y = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ предельный продукт капитала равен $Y/K$ (фондоотдаче), а предельный продукт труда равен $Y/L$ (производительности труда).

**Однородность ПФ.** Если все ресурсы увеличить в $\alpha$ раз, то производство может измениться в $\alpha^\delta$ раз. В этом случае $f\left(\alpha x\right) = \alpha^\delta f\left(x\right)$ и тогда говорят, что ПФ однородна степени $\delta$. Если $\delta > 1$, то ПФ характеризуется возрастающим эффектом масштаба производства, если $\delta < 1$, то убывающим, если $\delta = 1$, то постоянным (производство растёт в той же пропорции, что и затраты ресурсов).

В краткосрочной перспективе финансовые ресурсы фирмы ограничены. Пусть фирма планирует затратить на покупку ресурсов не более чем $I$ денежных единиц. Получаем задачу:

$$\Pi\left(x\right) \to \min_{x\in D=\left\{x\in R_+^n:\ \langle w,\, x\rangle \le I\right\}}. \tag{9}$$

Если производственная функция удовлетворяет неоклассическим свойствам, то этими свойствами будет обладать и функция прибыли [1], задача (9) сводится к задаче выпуклого программирования:

$$-\Pi\left(x\right) \to \max_{x\in D=\left\{x\in R_+^n:\ \langle w,\, x\rangle \le I\right\}}$$

и при её решении обычно применяется теорема Куна-Таккера [1]. Отыскать оптимальный набор ресурсов $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) \in T$ в этом случае можно, решив систему:

$$p\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = w_j + \lambda, \quad j = \overline{1,n}, \lambda\left(\langle w, x\rangle - I\right) = 0, \quad \lambda \ge 0. \qquad (10)$$

Для случая $\lambda = 0$ система уравнений (10) сводится к системе (7). Если при этом выполняется неравенство $\langle w,x\rangle \le I$, то решение будет оптимальным для задачи (9), причём оно совпадёт с решением долгосрочной задачи. Если же $\lambda > 0$, то получаем $\langle w,x\rangle = I$. Подставив последнее равенство в целевую функцию задачи (9), отбрасывая константы и множитель $p > 0$, получаем, что краткосрочная задача фирмы аналогична задаче (6).

**Пример 4.** Пусть производственная функция фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ (n=2). Решением долгосрочной задачи фирмы (6) будут функции спроса на ресурсы: $x_1^* = \frac{p^2}{4w_1^2}$, $x_2^* = \frac{p^2}{4w_2^2}$, зависящие от цен этих ресурсов $w_1, w_2$ и цены готовой продукции p. Функция предложения $f\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)$, а оптимальная прибыль $\Pi^* = \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right) - \frac{p^2}{4}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)$. Такое же решение будет иметь и краткосрочная задача фирмы при условии, что $I \ge p^2 \frac{w_1 + w_2}{4w_1 w_2}$. Если последнее неравенство не выполняется, получаем для фирмы другое решение: $x_1^* = \frac{Iw_2}{w_1(w_1 + w_2)}$, $x_2^* = \frac{Iw_1}{w_2(w_1 + w_2)}$. При этом функция предложения имеет вид $f\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{\sqrt{Iw_1 w_2}}{\sqrt{w_1 + w_2}}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)$, а оптимальная прибыль составляет $\Pi^* = p\frac{\sqrt{Iw_1 w_2}}{\sqrt{w_1 + w_2}}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right) - I$.

Как правило, с ростом цен ресурсов фирма снижает спрос на них. Если фирма закупает большее количество ресурса с ростом цены своей продукции, то такой ресурс считается ценным (в рассмотренном выше примере оба ресурса являются ценными).

**Автор: И.Ю. Выгодчикова**

## Тема 3. Задачи экономических агентов с учётом ценовой динамики

Рассмотрим некоторые задачи, которые возникают при учёте взаимодействия между экономическими агентами.

Задача оптимального выбора экономического агента существенно усложняется, если цену продукции считать не постоянной величиной, а зависящей от объёма спроса и предложения на продукцию $p = p(x)$.

Пусть фирма имеет чёткое представление, сколько ресурсов она должна использовать для производства того или иного количества продукции, и важно лишь знать, сколько произвести готовой продукции. В данном случае производственная функция не рассматривается.

Если фирма является на рынке монополистом, то она должна произвести столько товара, чтобы полностью удовлетворить платёжеспособный спрос на него, поэтому можно считать, что при сформировавшейся цене объёмы спроса и предложения совпадают (имеет место ситуация равновесия). Обозначим через $q$ этот объём. Поскольку объёмы спроса и предложения зависят от цены товара, то существует и обратная зависимость – цены $p$ от объёма $q$: $p = p(q)$. Предположим, что функция издержек фирмы в зависимости от объёма производства $c(q)$. Задача фирмы сводится к задаче максимизации функции прибыли, которая является действительной функцией одной переменной $q$:

$$\Pi(\mathbf{q}) = p(q)q - c(q) \to \max_{q \ge 0} \qquad (11)$$

В случае олигополии, когда на рынке некоторого товара конкурируют несколько фирм, каждая из них определяет свой объём производства, но увеличение общего объёма производства олигополистов приведёт к снижению рыночной цены продукции. Поэтому для определения оптимального объёма производства каждой фирмы нужно решить одновременно несколько задач:

$$\Pi^k(q_1, \dots, q_m) = p(q)q_k - c_k(q_k) \to \max_{q_k \ge 0}, \ \mathbf{k} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{m}}, \qquad (12)$$
$$q = q_1 + \dots + q_m.$$

где $q_k$ – объём производства, $c_k(q_k)$ - издержки, $\Pi_k(q_1, \dots, q_m)$ - прибыль k – ой фирмы, $q$ – объём спроса на товар при равновесной цене $p(q)$.

**Пример 5.** Спрос на товары описывается уравнением $v = 20 - p$, где $p$ – цена продукции. Функция издержек каждой фирмы $c_k = q_k^2$, где $q_k$ – объём производства k –ой фирмы.

Решением задачи монополиста: $\Pi(q) = q(20 - q) - q^2 \to \max_{q \ge 0}$ будет стационарная точка функции прибыли $q^* = 5$. В этой точке функция прибыли будет принимать своё максимальное значение, поскольку вторая производная отрицательна. При этом цена товара установится на уровне 15 денежных единиц, прибыль монополиста составит 50 денежных единиц.

В случае дуополии, имеем две задачи:

$$П_1(q_1)=q_1(20-q_1-q_2)-q_1^2 \to \max_{q1\geq 0}, \quad П_2(q_2)=q_2(20-q_1-q_2)-q_2^2 \to \max_{q2\geq 0}.$$

Пусть объём выпуска каждой фирмы не зависит от объёма выпуска конкурента и считается постоянной величиной (условия Курно), тогда:

$$\frac{\partial П_1(q_1)}{\partial q_1}=20-4q_1-q_2=0, \quad \frac{\partial П_2(q_2)}{\partial q_2}=20-4q_2-q_1=0,$$

Решением будут объёмы выпуска $q_1^*=q_2^*=4$ условные единицы, цена товара будет 12 денежных единиц, а прибыли дуополистов по 32 денежных единицы. Отметим, что при монополии товара выпускается меньше чем при дуополии, цена выше и прибыль монополиста выше.

## Вспомогательные сведения к темам 1-3

Для решения задач поведения рационального потребителя и фирмы можно применить *метод выпуклого программирования*.

Приведём упрощённую задачу выпуклого программирования (ВП).

Пусть $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, $f_j(x)$, $j=\overline{0,m}$, - выпуклые и дифференцируемые на $R^n$ функции, $D=\{x\in R^n : f_j(x)\leq 0,\, j=\overline{1,m}\}$.

Кроме того, считаем, что $\exists \hat{x}\in R^n : f_j(x)<0,\, j=\overline{1,m}$ (для множества D выполняется условие Слейтера).

Рассматривается задача:

$$f_0(x)\to \min_{x\in D}. \tag{13}$$

Приведём следствие из теоремы Куна-Таккера ([1],[2],[3]).

**Теорема (Куна-Таккера).** Для того чтобы точка $x^*\in D$ была решением задачи (13), необходимо и достаточно, чтобы нашлись неотрицательные числа $\lambda_j$, $j=\overline{1,m}$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_0(x)}{\partial x_i}+\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j\dfrac{\partial f_j(x^*)}{\partial x_i}=0, \quad i=\overline{1,n}, \\ \lambda_j f_j(x^*)=0, \quad j=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотренные задачи могут быть решены в электронной таблице MSExcel, с использованием прикладной программы «Поиск решения» (активизировать соответствующую надстройку, в Excel 2007 расположение меню надстроек немного отличается от прежних версий).

**Автор: И.Ю. Выгодчикова**

## Тема 4. Микроэкономические модели установления равновесной цены

Рассмотрим паутинообразную модель равновесия с запаздыванием предложения и модель Эванса для случая линейных функций спроса и предложения:

$$D = b - ap,\ S = l + mp,\ a,b,l,m > 0.$$

Ясно, что $b > l$, поскольку при нулевой цене спрос превышает предложение.

<u>Паутинообразная модель с запаздыванием предложения</u>. Пусть $t = 0,1,...$ и в начальный момент времени сформировался спрос, который будет удовлетворён в следующий момент, но цена изменится, тогда

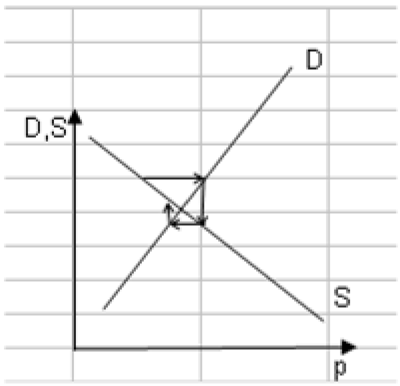



Рис. Паутинообразная модель с запаздыванием предложения

$$D = b - ap_0 = l + mp_1 \Rightarrow$$

$$p_1 = -\frac{a}{m}p_0 + \frac{b-l}{m};$$

$$D = b - ap_1 = l + mp_2 \Rightarrow$$

$$p_2 = (-1)\frac{a}{m}p_1 + \frac{b-l}{m};$$

$$p_2 = (-1)^2\left(\frac{a}{m}\right)^2 p_1 + \frac{b-l}{m}\left(1 - \frac{a}{m}\right)$$

;

…

По индукции получаем формулу

$$p_n = (-1)^n\left(\frac{a}{m}\right)^n p_1 + \frac{b-l}{m}\left(1 - \frac{a}{m} + \left(\frac{a}{m}\right)^2 + ... + \left(\frac{a}{m}\right)^{n-1}\right);$$

$$p_n = (-1)^n\left(\frac{a}{m}\right)^n p_1 + \frac{b-l}{m}\cdot\frac{1-\left(-\frac{a}{m}\right)^n}{1+\frac{a}{m}} \xrightarrow{n\to\infty,\, a<m} p^* = \frac{b-l}{a+m}.$$

Следовательно, равновесная цена устанавливается только при $a < m$.

<u>Модель Эванса.</u> Предполагается, что положительное изменение цены пропорционально изменению спроса над предложением: $dp = \gamma(D - S)dt$, $\gamma > 0$, $p(0) = p_0$. Поставляя $D = b - ap$, $S = l + mp$, получаем линейное

неоднородное дифференциальное уравнение с начальным условием. Его решение всегда сходится к равновесной цене

$$p(t)=\frac{b-l}{a+m}\left(1-e^{-\gamma(a+m)t}\right)+p_0\,e^{-\gamma(a+m)t}\xrightarrow{n\to\infty}p^*=\frac{b-l}{a+m}.$$

## Тема 5. Некоторые аспекты макроэкономического моделирования

### 5.1. О макроэкономических производственных функциях

Моделирование производственной системы может осуществляться как на микроуровне, так и на макроуровне. При моделировании экономики обычно используются двухфакторные ПФ (переменные $x_1$ и $x_2$ будем обозначать $K$ и $L$). Экономика рассматривается как целостная неструктурированная единица, на вход которой поступают ресурсы, а на выходе получается результат функционирования экономики в форме валового выпуска или валового внутреннего продукта (ВВП). Пусть $K$ – объём основных и оборотных фондов, $L$ – среднесписочное число занятых в экономике, $Y$ – ВВП. Тогда ПФ принимает вид $Y=F(K,L)$.

Чаще всего для этих целей применяется ПФ Кобба – Дугласа

$$Y=AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},$$

которая удовлетворяет неоклассическим требованиям: при $\alpha_i\in(0,1)$ $\alpha_1+\alpha_2<1$.

Для оценки параметров ПФ Кобба – Дугласа используется известный в эконометрике метод наименьших квадратов (МНК). Сначала производится логарифмическая линеаризация модели, после соответствующей замены переменных эта функция становится линейной моделью множественной регрессии.

Регрессионный анализ статистических данных позволяет экспериментально определить параметры корреляционных зависимостей между экономическими показателями путём наблюдения за характером их изменений. С использованием полученной модели можно прогнозировать варианты развития экономических процессов и явлений, изучать тенденции изменения экономических показателей. Простой приём логарифмирования уравнения и замены переменных позволяет получить линейную регрессионную модель, параметры которой оцениваются традиционным МНК.

По данным о зависимости объёма выпуска $Y$ от трудовых $L$ и капитальных $K$ затрат ресурсов оцениваются коэффициенты модели

$$Y=\beta_0K^{\beta_1}L^{\beta_2}\,\mathbf{exp}(\varepsilon),$$

где ε – случайная ошибка.

**Пример.** *Регрессионный анализ параметров ПФ Кобба – Дугласа по данным 12 наблюдений*.

Анализ исходных данных: логарифмируем уравнение, составляем на основании исходных данных таблицу логарифмированных данных:

| T | Y | K | L | [redacted] | lnY | lnK | lnL | ln $\hat{Y}$ | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 100 | 100 | | 4,60517 | 4,6052 | 4,60517 | 4,62914 | -0,024 |
| 2 | 112 | 114 | 110 | | 4,7185 | 4,7362 | 4,70048 | 4,73654 | -0,018 |
| 3 | 124 | 131 | 123 | | 4,82028 | 4,8752 | 4,81218 | 4,86024 | -0,04 |
| 4 | 143 | 149 | 125 | | 4,96284 | 5,0039 | 4,82831 | 4,89429 | 0,06855 |
| 5 | 151 | 176 | 138 | | 5,01728 | 5,1705 | 4,92725 | 5,01033 | 0,00695 |
| 6 | 155 | 198 | 140 | | 5,04343 | 5,2883 | 4,94164 | 5,04115 | 0,00228 |
| 7 | 153 | 216 | 145 | | 5,03044 | 5,3753 | 4,97673 | 5,08646 | -0,056 |
| 8 | 184 | 236 | 154 | | 5,21494 | 5,4638 | 5,03695 | 5,15518 | 0,05975 |
| 9 | 189 | 266 | 154 | | 5,24175 | 5,5835 | 5,03695 | 5,17301 | 0,06874 |
| 10 | 227 | 335 | 196 | | 5,42495 | 5,8141 | 5,27811 | 5,42973 | -0,0048 |
| 11 | 218 | 397 | 193 | | 5,3845 | 5,9839 | 5,26269 | 5,44081 | -0,0563 |
| 12 | 179 | 417 | 147 | | 5,18739 | 6,0331 | 4,99043 | 5,19711 | -0,0097 |

Оцениваем параметры ПФ по МНК (программа «Регрессия» надстройки Excel «Пакет анализа»), сервис, анализ данных. Результаты анализа данных приведены ниже.

1. Коэффициент детерминации R-квадрат, а также скорректированный R-квадрат с поправкой на число степеней, близки к 1, что свидетельствует о хорошем качестве регрессии (табл. 3).

Таблица 3

| Регрессионная статистика | | Наименования | Коэффициенты |
|---|---|---|---|
| Множественный R | 0,984288223 | Y-пересечение | – 0,302620532 |
| R-квадрат | 0,968823307 | Переменная X 1 | 0,148805624 |
| Нормированный R-квадрат | 0,961895153 | Переменная X 2 | 0,922089963 |
| Стандартная ошибка | 0,049408866 | | |
| Наблюдения | 12 | | |

Коэффициенты

| $\ln\hat{\beta}_0$ | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\beta}_2$ | $\exp(\hat{\beta}_0)$ |
|---|---|---|---|
| – 0,3026 | 0,14881 | 0,92209 | 0,73888 |

2. Выборочное уравнение регрессии имеет вид

$$\ln\hat{Y} = -0{,}303 + 0{,}149\ln K + 0{,}922\ln L,$$

откуда

$$\boxed{\hat{Y} = 0{,}739K^{0{,}149}L^{0{,}922}.}$$

## 5.2. О макроэкономических моделях Леонтьева и Солоу

Рассмотрим пример линейной балансовой модели многоотраслевой экономики – статическую модель В.В. Леонтьева.

Пусть в экономике производится, продаётся и покупается $n$ продуктов, причём каждая отрасль производит только один продукт. Пусть для производства единицы $j$-го продукта нужно затратить $a_{ij}$ единиц $i$-го продукта ($i$-й отрасли), $x_i$ и $y_i$ валовой выпуск $i$-го продукта и конечный спрос на него соответственно. Модель Леонтьева:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i,\ i = \overline{1,n},$$

называется *продуктивной* (работоспособной), если она разрешима в неотрицательных $x_i$, $i = \overline{1,n}$.

В матричной форме

$$X - AX = Y,$$

$$X = (x_1, \ldots, x_n)',\ A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n},\ Y = (y_1, \ldots, y_n)'.$$

$$X = (I - A)^{-1} Y.$$

$I$ – единичная матрица $n \times n$.

**Примеры. 1.** $n = 1$, $a_{11} = 0.1$, $Y = 10$, получаем $X = 11{,}11$, модель продуктивна.

**2.** $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$, получаем $X = \begin{pmatrix} 18.2 \\ 31.8 \end{pmatrix}$, модель продуктивна.

Модель Солоу с дискретным временем. В модели Солоу экономика рассматривается как единое неструктурированное замкнутое целое, производящее один универсальный продукт.

Показатели: $Y$ (ВВП), $I$ (валовые инвестиции), $C$ (фонд потребления), $K$ – основные производственные фонды (ОПФ), $L$ (число занятых в производственной сфере).

Кроме того, задан $\mu$ – годовой коэффициент износа ОПФ, $\nu$ – годовой темп прироста числа занятых.

Модель содержит два статических звена (структура):

$$Y_t = F(K_t, L_t),\ Y_t = I_t + C_t$$

и два динамических звена:

$$K_t = (1-\mu)K_{t-1} + I_{t-1},\ L_t = (1+\nu)L_{t-1},\ t = \overline{0,T}.$$

При переходе к непрерывному времени получаем модель:

$$Y = F(K, L),\ Y = I + C,\ \frac{dK}{dt} = -\mu K + I,\ \frac{dl}{dt} = \nu L,\ t = \overline{0,T}.$$

Начальные значения ОПФ и трудовых ресурсов заданы.

## Тема 6. Примеры экономических задач линейного программирования

Сложность поставленной задачи зависит от вида целевой функции и ограничений. Самыми простыми в теории экстремальных задач считаются задачи линейного программирования (ЛП) – задачи, в которых целевая функция $Z(x)$, а также функции, задающие ограничения, являются линейными.

В *общем виде* задача линейного программирования записывается следующим образом:

$$Z(x) := \langle c, x \rangle \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i \in [1:k],$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i \in [k+1:m],$$
$$x_j \ge 0, \; j \in [1:s], \qquad (6.1)$$

где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $\langle c, x \rangle = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$.

Система равенств и неравенств (ограничений задачи) определяет в пространстве $R^n$ множество $\Omega$ допустимых значений переменных задачи ЛП, называемое также *полиэдром планов*. Вектор $x \in \Omega$ называют *допустимым планом,* или просто *планом* задачи ЛП.

Обозначим

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \in R^m,$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (6.2)$$
$$A^i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}), \; i \in [1:m], \; A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T, \; j \in [1:n].$$

Наряду с *общей формой* задач ЛП (6.1) выделяют также следующие формы.

А. *Основная* задача ЛП:

$$Z(x) := \langle c, x \rangle \to \max, \quad Ax \le b. \qquad (6.3)$$

Б. *Стандартная* задача ЛП:

$$Z(x) := \langle c, x \rangle \to \max, \quad Ax \le b, \quad x \ge 0_n. \qquad (6.4)$$

В. *Каноническая* задача ЛП:

$$Z(x) := \langle c, x \rangle \to \max, \quad Ax = b, \quad x \ge 0_n. \qquad (6.5)$$

Здесь $0_n = (0, \ldots, 0)^T \in R^n$.

Путём замены переменных и эквивалентных алгебраических преобразований любая задача ЛП представляется в каждой из перечисленных форм. К примеру, система равенств $Ax = b$ эквивалентна системе неравенств $Ax \le b$, $(-A)x \le -b$, а любую переменную $x_i$, на которую не наложено требование неотрицательности, можно заменить разностью двух неотрицательных переменных $x_i = u_i - v_i$, $u_i \ge 0$, $v_i \ge 0$.

**Пример 6.1.** Привести к канонической форме задачу

$$-x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_2 \ge 2x_1 - 2, \quad x_1 - x_2 \le 1, \quad x_2 \ge 0. \tag{6.6}$$

Решение. 1. Преобразуем целевую функцию, умножив её на $(-1)$:

$$x_1 - 2x_2 \to \max,$$

а ограничения запишем в виде

$$x_1 + x_2 = 1, \quad 2x_1 - x_2 \le 2, \quad x_1 - x_2 \le 1, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Преобразуем ограничения – неравенства к форме равенств, введя дополнительные переменные $x_3 \ge 0$ и $x_4 \ge 0$:

$$x_1 + x_2 = 1, \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \quad x_1 - x_2 + x_4 = 1,$$
$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \tag{6.7}$$

3. Добьёмся неотрицательности всех переменных, входящих в задачу. Рассмотрим два способа.

Способ 1. Делаем замену

$$x_1 = u_1 - v_1,\ u_1 \ge 0,\ v_1 \ge 0$$

и записываем задачу (6.6) в канонической форме:

$$u_1 - v_1 - 2x_2 \to \max,$$

$$u_1 - v_1 + x_2 = 1, \quad 2u_1 - 2v_1 - x_2 + x_3 = 2, \quad u_1 - v_1 - x_2 + x_4 = 1,$$
$$x_2 \ge 0,\ u_1 \ge 0,\ v_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \tag{6.8}$$

Способ 2. Выражаем переменную $x_1$, например, из первого равенства (6.7), $x_1 = 1 - x_2$, и подставляем в остальные равенства и в целевую функцию. Получаем задачу в канонической форме:

$$1 - 3x_2 \to \max,$$

$$-3x_2 + x_3 = 0, \quad -2x_2 + x_4 = 0,$$
$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Заметим, что решение задачи не изменится, если вместо функции $1 - 3x_2$ максимизировать функцию $-x_2$.

При втором способе (исключении переменных, на которые не наложено требование неотрицательности) требуется производить дополнительные вычисления, однако полученная задача содержит меньше переменных, чем задача (6.8).

**Пример 6.2.** Исключив две переменные, записать задачу

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3,$$
$$x_i \ge 0,\ i \in [1:4],$$

в стандартной форме.

Решение. Используя преобразование матрицы системы, произведём исключение переменных $x_1$ и $x_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} [1] & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & [5] & -13 & 10 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1.4 & 0 & 1.4 \\ 0 & 1 & -2.6 & 2 & -0.6 \end{array}\right).$$

(сначала из второй строки матрицы вычли первую, умноженную на $3$, а первую строку оставили без изменений; затем к первой строке прибавили вторую, делённую на $5$, а вторую строку поделили на $5$).

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 + 1.4x_3 = 1.4, \\ x_2 - 2.6x_3 + 2x_4 = -0.6, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x_1 = -1.4x_3 + 1.4, \\ x_2 = 2.6x_3 - 2x_4 - 0.6. \end{cases}$$

Подставляя найденные выражения переменных $x_1$ и $x_2$ в целевую функцию и ограничения $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, получаем задачу ЛП с двумя переменными в стандартной форме:

$$-9.8x_3 + 3x_4 \to \max,$$
$$x_3 \le 1, \quad -13x_3 + 10x_4 \le -3, \quad x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Наиболее мощным численным методом решения задач ЛП является симплекс-метод (см., напр., [1,5]), который реализован во многих прикладных программах, в частности, MSExcel, MathCad, wxmaxima. При изложении алгоритма симплекс-метода удобно использовать вспомогательный инструмент – симплекс-таблицу, а основанием для итерационных преобразований служат 3 теоремы Данцига.

Ознакомимся с геометрическим методом решения задач ЛП. Сам по себе геометрический подход универсален в том плане, что он используется также для решения нелинейных задач, однако в последнем случае геометрические построения могут быть весьма сложными. Геометрическим методом целесообразно решать задачи с двумя переменными.

Задача ЛП с двумя переменными имеет вид

$$\begin{gathered} Z(x) := c_1x_1 + c_2x_2 \to \max, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{gathered} \tag{6.9}$$

Для многих экономических задач вводятся требования не отрицательности переменных: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, которые можно рассматривать как два указанных в задаче (6.9) неравенства: $-1 \cdot x_1 + 0 \leq 0, 0 - 1 \cdot x_2 \leq 0$.

Для задачи (6.9) полиэдр планов, если он не пуст, будет многоугольным множеством (ограниченным многоугольником или неограниченным многоугольным множеством):

$$\Omega := \left\{x = (x_1; x_2) \in R^2 : \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i \in 1:m\right\}.$$

*Линией уровня целевой функции задачи ЛП* называется прямая $\pi(\alpha) := \left\{ x \in R^2 : c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha \right\} \quad \forall\, \alpha \in R$. Все линии уровня параллельны между собой и имеют общую нормаль $c = (c_1; c_2)$. Вектор $c = (c_1; c_2)$ является градиентом целевой функции и указывает направление её возрастания.

Чтобы решить задачу геометрически, нужно смещаться с одной линии уровня к другой в направлении вектора $c$ до того момента, когда полиэдр не останется по одну сторону от линии уровня, но при этом линия уровня будет иметь с полиэдром хотя бы одну общую точку. Эта точка или любая из них и даёт решение задачи.

На рис. 1 наглядно видно, что решение может быть как единственным, так и неединственным.

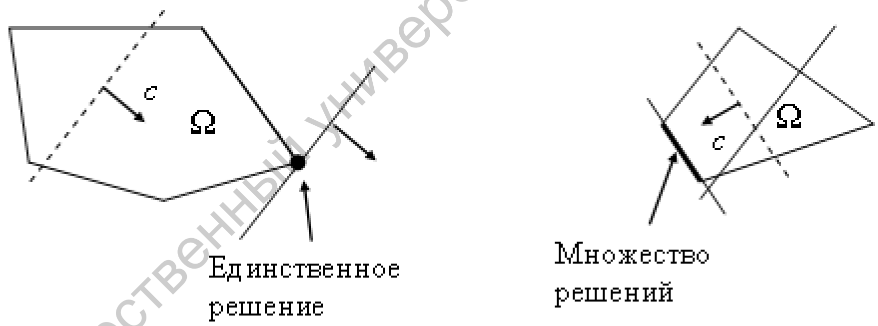



Рис. 1

Если при всех сколь угодно больших $\alpha$ пересечение линии $\pi(\alpha)$ с полиэдром $\Omega$ не пусто, то значение целевой функции на допустимом множестве может быть сколь угодно большим, и, следовательно, задача ЛП в этом случае не имеет решения (рис. 2).

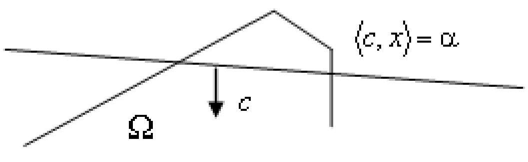



Рис. 2

**Пример 6.3.** Используя геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad x_1 - x_2 \ge -2, \\ &(\mathrm{II}) \quad x_1 + 2x_2 \le 7, \\ &(\mathrm{III}) \quad 4x_1 - 3x_2 \le 6, \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Решение. Начинаем с построения полиэдра планов. По условию $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, значит, полиэдр располагается в первой четверти координатной плоскости. Каждое неравенство (I), (II), (III) определяет в пространстве $R^2$ полуплоскость.

Сначала строим прямую линию $x_1 - x_2 = -2$, например, по точкам $(0;2)$, $(-1;1)$. Чтобы определить ту из двух полученных полуплоскостей, которая определяется неравенством (I), берём любую точку, не принадлежащую прямой $x_1 - x_2 = -2$, например, точку $(0;0)$, и подставляем в неравенство (I). Получаем верное числовое тождество $0 \ge -2$. Следовательно, выбираем ту полуплоскость, которая содержит точку $(0;0)$.

Аналогично строим полуплоскости, определяемые неравенствами (II), (III). Затем находим пересечение этих трёх полуплоскостей и первой координатной четверти. Полученный пятиугольник $\Omega$ (рис. 3) является полиэдром планов задачи.

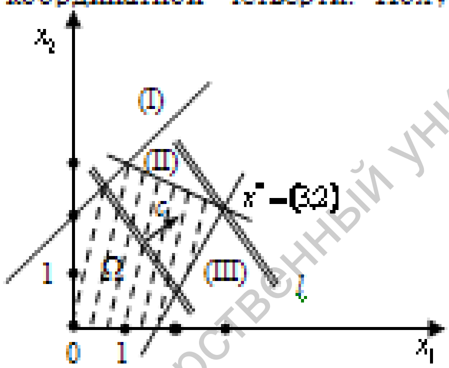



Рис. 3. Обозначения: $c = (2;1)$; $\Omega$ – заштрихованный пятиугольник; $x_1 - x_2 = -2$ (I); $x_1 + 2x_2 = 7$ (II); $4x_1 - 3x_2 = 6$ (III)

Далее, из любой точки пространства $R^2$ строим свободный вектор $c(2;1)$, проводим семейство прямых линий, перпендикулярных вектору $c$ (то есть семейство линий уровня). Наконец, находим «последнюю в направлении вектора $c$» линию уровня, у которой ещё есть общие точки с полиэдром $\Omega$. Из рис. 3 видно, что такой линией будет прямая $l$. Находим точку пересечения прямых линий

$$x_1 + 2x_2 = 7, \quad 4x_1 - 3x_2 = 6,$$

получаем $x^* = (3;2)$. Эта точка и будет решением задачи.

**Пример 6.4.** *Задача определения оптимального ассортимента продукции.* Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – $\alpha$ и $\beta$. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Суточный расход сырья на 1 единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ и суточные запасы сырья даны в таблице.

| Сырьё | Расход сырья в сутки на 1 ед. продукции | | Запас сырья, ед. |
|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | |
| α | 2 | 3 | 9 |
| β | 3 | 2 | 13 |

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовая цена единицы продукции $П_1$ составляет 3 д.е., а $П_2$ – 4 д.е.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Обозначим через $x_1$ и $x_2$ суточные объёмы производства продукции $П_1$ и $П_2$ соответственно. Поскольку производство продукции $П_1$ и $П_2$ ограниченно имеющимся в распоряжении предприятия сырьём каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, получаем следующую систему ограничений:

$$\begin{array}{lr} (\mathrm{I}) & 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ (\mathrm{II}) & 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ (\mathrm{III}) & x_1 - x_2 \le 1, \\ (\mathrm{IV}) & x_2 \le 2, \end{array} \qquad (6.10)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Доход от реализации $x_1$ единиц продукции $П_1$ и $x_2$ единиц $П_2$ составит $Z(x) := 3x_1 + 4x_2$. Нужно из всех объёмов выпуска $x_1$ и $x_2$, удовлетворяющих системе неравенств (6.10), выбрать те, при которых доход будет максимальным:

$$3x_1 + 4x_2 \to \max. \qquad (6.11)$$

Используя геометрические построения (рис. 4), найдём решение задачи (6.10), (6.11). Учитывая, что $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, строим полиэдр планов. Решение достигается в точке

$$x^* = (2.4;1.4),\ Z(2.4;1.4) = 12.8.$$

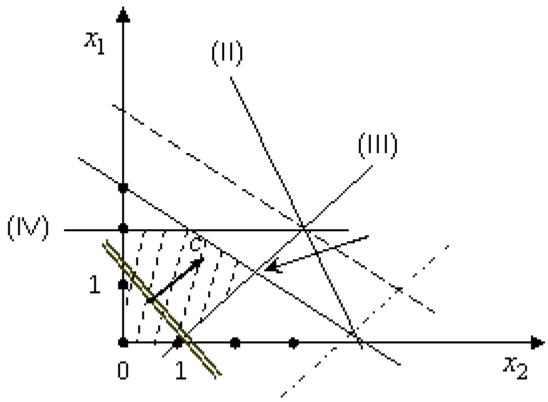



Рис. 4. Обозначения: $c = (3;4)$;

$2x_1 + 3x_2 = 9$ (I); $3x_1 + 2x_2 = 13$ (II);

Рассмотрим решение задач ЛП в MSExcel. Можно таким же способом решать задачу в других электронных таблицах, например, Calc, Gnumeric.

Для выполнения этого задания нужно ввести в ячейки электронной таблицы MSExcel коэффициенты при переменных из целевой функции и левых частей ограничений. Пометить (можно цветом) ячейки, в которых будут вычислены оптимальные значения переменных. Воспользовавшись функцией СУММПРОИЗВ, в следующем столбце вычислить суммы произведений переменных и соответствующих коэффициентов (сначала столбец содержит 0). Первая ячейка в этом столбце будет служить целевой ячейкой при осуществлении «Поиска решения». Для решения задачи (6.10), (6.11) заносим исходные данные в таблицу MSExcel.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| | | | | Правые части огр. |
| Целевая функция | 3 | 4 | 0 | |
| Ограничение 1 | 2 | 3 | 0 | 9 |
| Ограничение 2 | 3 | 2 | 0 | 13 |
| Ограничение 3 | 1 | – 1 | 0 | 1 |
| Ограничение 4 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| Переменные | | | | |
| | $x_1$ | $x_2$ | | |

Ячейка D2 =СУММПРОИЗВ(B2:C2;B$7:C$7).

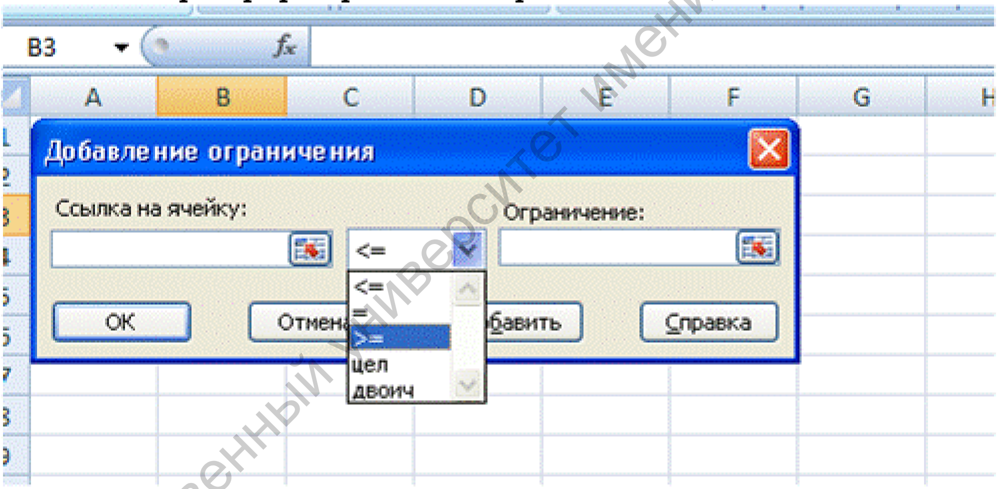
Затем нужно воспользоваться надстройкой «Поиск решения». Устанавливаем: $D$2 – целевая ячейка, выбираем максимальное значение, $B$7:$C$7 – изменяемые ячейки, добавляем ограничения (добавить, выбираем слева ячейку D$3, знак ≤, а справа E$3, снова добавить, выбираем слева ячейку D$4, знак ≤, а справа E$4, и так далее), после занесения всех ограничений выполняем расчёты.

В итоге получаем такой результат.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| Целевая функция | 3 | 4 | 12,8 | Правые части огр. |
| Ограничение 1 | 2 | 3 | 9 | 9 |
| Ограничение 2 | 3 | 2 | 10 | 13 |
| Ограничение 3 | 1 | – 1 | 1 | 1 |
| Ограничение 4 | 0 | 1 | 1,4 | 2 |
| Переменные | 2,4 | 1,4 | | |
| | $x_1$ | $x_2$ | | |

Ответ: $x^* = (2{,}4;1{,}4)$.

Указание. Можно потребовать целочисленности ограничений: добавить ограничения цел. при формировании ограничений:




## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Для изготовления двух видов продукции П1 и П2 используется 3 вида сырья С1, С2, С3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации продукции, приведены в следующей таблице.

| Вид сырья | Запас сырья | Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции | |
|---|---|---|---|
| | | П1 | П2 |
| С1 | 20 | 2 | 5 |
| С2 | 40 | 8 | 5 |
| С3 | 30 | 5 | 6 |
| Прибыль от реализации единицы продукции, руб. | | 50 | 40 |

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.

**2.** Для изготовления двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ используется три вида сырья С1, С2, С3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации продукции, приведены в таблице.

| Вид сырья | Запас сырья | Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции | |
|---|---|---|---|
| | | $П_1$ | $П_2$ |
| С1 | 20 | 2 | 5 |
| С2 | 40 | 8 | 5 |
| С3 | 30 | 5 | 6 |
| Прибыль от реализации единицы продукции, руб. | | 50 | 40 |

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.

**3.** При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 единиц питательного вещества А, не менее 8 единиц вещества В и не менее 12 единиц вещества С. Для составления рациона используют 2 вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в таблице.

| Питательные вещества | Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма | |
|---|---|---|
| | Корм 1 вида | Корм 2 вида |
| А | 3 | 1 |
| В | 1 | 2 |
| С | 1 | 6 |
| Стоимость 1 кг корма, руб. | 4 | 6 |

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причём затраты на него должны быть минимальными.

**4.** Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья – $\alpha$ и $\beta$. Суточный расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ и запасы сырья даны в таблице.

| **Сырьё** | **Расход сырья на 1 ед. продукции** | | Запас сырья, единиц |
|---|---|---|---|
| | **$П_1$** | **$П_2$** | |
| **$\alpha$** | **4** | **3** | **20** |
| **$\beta$** | **3** | **2** | **15** |

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовая цена единицы продукции $П_1$ составляет 3 д.е., а $П_2$ – 2 д.е.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

**5.** Предприятие располагает тремя видами сырья и может выпускать одну и ту же продукцию двумя способами. При этом за один час работы первым способом выпускается 20, а вторым способом – 60 единиц продукции. Количество сырья (кг) того или иного вида, расходуемого за 1 ч работы при различных способах производства, и запасы сырья (кг) приведены в таблице.

| Способ производства | Вид сырья | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| Первый | 10 | 20 | 15 |
| Второй | 40 | 30 | 45 |
| Запасы сырья, кг | 200 | 190 | 150 |

Определить сочетание способов производства, при котором достигается максимальный выпуск.

**6.** В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено 5 м$^2$ площади. На приобретение оборудования предприятие может израсходовать 25 000 руб., при этом оно может приобретать оборудование двух видов. Комплект оборудования первого вида стоит 6 000 руб., а комплект оборудования второго вида стоит 4 000 руб. Приобретение одного комплекта оборудования первого вида позволяет увеличить выпуск продукции за смену на 3, а одного комплекта оборудования второго вида – на 2 единицы. Зная, что для установки одного комплекта оборудования первого вида требуется 1 м$^2$ площади, а для установки одного комплекта оборудования второго вида – 1,5 м$^2$ площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который позволит максимально увеличить выпуск продукции.

**Автор: И.Ю. Выгодчикова**

## Тест

**1.** Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1 + 4\sqrt{x_2}$. Тогда кривая безразличия задаётся уравнением:

а) $x_1 + 4\sqrt{x_2} = c$; б) $1 + 2/\sqrt{x_2} = c$; в) $x_1 / 4\sqrt{x_2} = c$; г) $4x_1\sqrt{x_2} = c$.

**2.** Функция спроса на товар имеет вид $d(p) = \dfrac{p+6}{p+1}$ ($p$ – цена товара), а функция предложения $q(p) = 2p + 1.5$. Тогда равновесная цена и равновесный объём производства равны:

а) $p^* = 2,\ q^* = 5.5$; б) $p^* = 2,\ q^* = 8/3$; в) $p^* = 1,\ q^* = 3.5$; г) $p^* = 1,\ q^* = 7$.

**3.** Неоклассическая мультипликативная ПФ имеет вид ($K$ – капитальные ресурсы, $L$ – трудовые ресурсы):

а) $F(K, L) = 0.3K + 0.5L$; б) $F(K, L) = K^{0.3}L^{0.5}$;

в) $F(K, L) = K^{0.3}L^{5}$; г) $F(K, L) = K^{-0.3}L^{-0.7}$.

**4.** Неоклассическая мультипликативная ПФ имеет вид ($K$ – капитальные ресурсы, $L$ – трудовые ресурсы) $F(K, L) = 0.3K^{0.4}L^{0.5}$. При увеличении объёма капитала на 1 % валовой выпуск увеличится на:

а) 0.4 %; б) 0.3 %; в) 0.5 %; г) 0.7 %.

**5.** Функция полезности имеет вид $u(x_1, x_2) = 4x_1x_2$, а доход, выделенный для покупки данных товаров, равен 24. В оптимальный набор вошли
2 единицы первого товара и 3 единицы второго товара. При каких ценах на товары – $p_1$, $p_2$ потребитель сделал этот выбор?

а) $p_1 = 1,\ p_2 = 1$; б) $p_1 = 4,\ p_2 = 2$; в) $p_1 = 6,\ p_2 = 4$; г) $p_1 = 4,\ p_2 = 6$.

**6.** Фермер выращивает культуры $A$ и $B$ на площади 600 кв. футов. Каждая культура $A$ занимает 1 кв. фут, а культура $B$ – 4 кв. фута. Функция полезности имеет вид $u(x_A, x_B) = 4x_Ax_B$, где $x_A$, $x_B$ – число культур видов $A$ и $B$ соответственно. Сколько культур каждого вида посадить, чтобы максимизировать полезность?

а) $x_A^* = 220$, $x_B^* = 950$; б) $x_A^* = 175$, $x_B^* = 100$;

в) $x_A^* = 300$, $x_B^* = 75$; г) $x_A^* = 100$, $x_B^* = 200$.

7. В 1976 г. на Бразилию приходилась примерно треть мирового экспорта кофе. Когда в 1976–1977 гг. заморозки уничтожили около 75 % урожая кофе в Бразилии, цена кофе возросла на 400 %. Какова была эластичность спроса на кофе?

а) $-0.045$; б) $0.045$; в) $0.06$; г) $-0.06$.

**8.** В краткосрочном периоде ПФ фирмы имеет вид

$$F(l) = 15 + 8l + 5l^2 - l^3,$$

где $l$ – число занятых сотрудников на фирме.
А. Сколько работников нанимать, чтобы достичь максимального выпуска? В. При каком уровне занятости эластичность производства равна –0,5?

а) А. 4. В. 4; б) А. 5. В. 1; в) А. 4. В. 5; г) А. 5. В. 7.

**9.** В условиях дуополии Курно рыночный спрос задаётся соотношением $D = 300 - p$, где $p$ – цена товара, а каждая фирма имеет постоянные предельные издержки, равные 10. Тогда параметры состояния равновесия Курно (объёмы производства и цена) равны:

а) 51.6, 51.6, 246.8; б) 96.7, 96.7, 106.6;
в) 51.6, 48.4, 246.8; г) 96.7, 96.7, 100.6.

**10.** Фирме, производящей продукцию на трёх заводах в количествах $x_1$, $x_2$ и $x_3$ условных единиц соответственно, нужно выпустить в месяц не менее 210 условных единиц продукции, причём следует минимизировать суммарные затраты. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе, если функции издержек заводов имеют вид $c_1(x_1) = x_1 + 0{,}05x_1^2$, $c_2(x_2) = x_2 + 0{,}025x_2^2$, $c_3(x_3) = 2x_3 + 1/60x_3^2$ соответственно?

а) (40,80,90); б) (70,70,70); в) (80,40,90); 4) (70,60,80).

**11.** Функции общих издержек в условиях дуополии Курно выражаются уравнениями $C_1 = 0.5q_1{}^2 + 4q_1 + 5$, $C_2 = q_2{}^2 + 5q_2 + 7$. Рыночный спрос $D = 40 - 2p$. Определите цену равновесия и величины выпусков на данном рынке в условиях равновесия.

а) (14.56, 7.04, 3.84); б) (14.56, 10.04, 3.84);
в) (12.56, 7.04, 3.84); г) (14.56, 7.04, 8.84).

**12.** Дана функция издержек монополиста $c = 5q + 0{,}25q^2$ и функция выпуска $q = 160 - p$. Найти оптимальную цену и объём производства продукции.

а) 72, 98; б) 82, 98; в) 32, 98; г) 62, 98.

**13.** ПФ фирмы имеет вид $Y = 100KL$. Цена труда составляет 30, а цена капитала – 120. Чему равны средние издержки производства 100 единиц продукции, если фирма выбирает самый дешёвый способ производства?

а) 120; б) 1.2; в) 2; г) 100.

**14.** Цена меди на мировом рынке составляет 0,75 долл. за фунт. Ежегодно продаётся 750 млн фунтов меди. Ценовая эластичность спроса на медь равна $-0{,}4$. Найти линейную функцию спроса на медь ($p$ – цена).

а) $D = 1050 + 400p$;  б) $D = 1050 - 400p$;

в) $D = 1050 - 200p$;  г) $D = 1050 + 200p$.

**15.** Дана функция спроса на некоторый товар $D = 8 - 0.5p$. При какой цене $p$ коэффициент эластичности спроса по цене равен $-0.5$?

а) 16;  б) 16/3;  в) 8/3;  г) 32/3.

**16.** Издержки производства 100 штук некоторого товара составляют 300 тыс. руб., а 500 штук – 600 тыс. руб. Считая функцию издержек линейной, определите величину издержек для выпуска 400 штук изделий.

а) 500;  б) 535;  в) 525;  г) 520.

**17.** Предположим, что когда фирма увеличивает применяемый капитал с 120 до 150, используемый труд с 500 до 625, выпуск продукции увеличивается с 200 до 220. Какой эффект роста масштаба производства имеет место в данном случае?

а) возрастающий;

б) убывающий;

в) ПФ не является однородной.

**18.** Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Хотя недельный расход корма для цыплят зависит от их возраста, в дальнейшем будем считать, что в среднем (за 8 недель) он составляет 1 фунт. Для того чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимых весовых кондиций, кормовой рацион должен удовлетворять определённым требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов (ингредиентов). В качестве ингредиентов рассмотрим следующие: известняк, зерно и соевые бобы. Требования к питательности рациона сформулируем, учитывая 3 вида питательных веществ: кальций, белок и клетчатку. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента.

Заметим, что известняк не содержит ни белка, ни клетчатки.

| Ингредиент | Содержание питательных веществ, фунт/(фунт ингредиента) | | | Стоимость, долл./фунт |
|---|---|---|---|---|
| | Кальций | Белок | Клетчатка | |
| Известняк | 0,38 | 0 | 0 | 0,04 |
| Зерно | 0,001 | 0,09 | 0,02 | 0,15 |
| Бобовые | 0,002 | 0,5 | 0,08 | 0,4 |

Смесь должна содержать не менее 0,8 %, но не более 1,2 % кальция, не менее 22 % белка и не более 5 % клетчатки.

Требуется определить для птицеводческой фермы количество (в фунтах) каждого из трёх ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и её питательности.

Указание: провести расчёты для 1 цыплёнка.

а) известняка 583,49 фунта; зерна 11 971,44 фунта; бобовых 6 455,14 фунта; стоимость смеси равна 4 584,36 долл.

б) известняка 563,42 фунта; зерна 12 971,44 фунта; бобовых 6 465,14 фунта; стоимость смеси равна 4 554,31 долл.

в) известняка 583,42 фунта; зерна 971,44 фунта; бобовых 6 435,14 фунта; стоимость смеси равна 2 554,31 долл.

г) известняка 1 553,42 фунта; зерна 10 971,44 фунта; бобовых 6 415,14 фунта; стоимость смеси равна 5 554,31 долл.

## 5. Программа курса

### Тема 1. Математическая теория поведения рационального потребителя ([1,2,4,6-10])

**Автор: И.Ю. Выгодчикова**

1. Предпочтения потребителя. Понятие функции полезности потребителя (ФПП). Аксиомы полезности. Кривые безразличия. Примеры функций полезности и их карт безразличия.
2. Пространство товаров, множество доступных потребителю товаров, бюджетное множество. Математическая формализация задачи потребительского выбора.
3. Применение теоремы Куна-Таккера к задаче выбора потребителя. Функции спроса на товары. Однородность функций спроса.
4. Предельные полезности потребительских товаров. Характеристики эластичности функций спроса на товары (ценовая прямая и перекрёстная эластичность, эластичность спроса по доходу). Предельная норма замещения между товарами двух видов. Интерпретация решения задачи выбора рационального потребителя с точки зрения предельного анализа, экономическая суть множителя Лагранжа.
5. Уравнение Слуцкого. Классификация потребительских товаров (ценные, товары Гиффина, нормальные малоценные; взаимозаменяемые и взаимодополняющие товары). Условие агрегации Энгеля.
6. Геометрическая интерпретация решения задачи выбора рационального потребителя в случае 2-ух товаров.

**Тема 2. Математическая теория фирмы ([1,2,4,6-10])**

7. Понятие производственной функции (ПФ), неоклассические свойства ПФ, примеры ПФ.
8. Математическая формализация задачи оптимизации прибыли фирмы.
9. Изокосты и изокванты. Предельные продукты ресурсов. Характеристики эластичности производства, эластичность замещения между затратами двух видов. Однородность ПФ, эффект расширения масштаба производства.
10. Применение теоремы Куна-Таккера к долгосрочной задаче фирмы, интерпретация результата. Функции спроса на ресурсы, функция предложения выпуска. Классификация ресурсов.
11. Геометрическая интерпретация решения задачи фирмы. Долгосрочный путь расширения фирмы.

**Тема 3. Задача фирмы с учётом рыночных законов ([1,2,4,6])**

12. Постановка задачи монополиста и задач олигополистов при оптимизации прибыли за счёт выбора ресурсов.
13. Постановка задача монополии нахождения оптимального выпуска и постановка задачи дуополии для частного случая линейной зависимости объёма спроса от цены.
14. Нахождение равновесной тройки при условии Курно.

**Тема 4. Микроэкономическое равновесие и ценовая динамика: взаимодействие производителей и потребителей ([1,2,4,6])**

27. Паутинообразная модель рынка. Устойчивость равновесия.
28. Модель Эванса.

**Автор: И.Ю. Выгодчикова**

**Тема 5. Некоторые аспекты макроэкономического моделирования ([1,2,4, 11-13])**

29. Макроэкономические статические ПФ
30. Статическая модель В.В. Леонтьева, продуктивность. Модель равновесных цен.
31. Динамическая модель Леонтьева. Динамическая модель Солоу.

**Тема 6. Примеры экономических задач линейного программирования ([1,2-6])**

32. Постановка задачи линейного программирования (ЛП). Каноническая формы задач ЛП. Примеры задач ЛП(транспортная задача, задача о рационе, задача эффективного производства). Геометрическая интерпретация решения задачи ЛП двух переменных.
33. Идея симплекс-метода. Теоремы Данцига. Симплекс-таблица.

*ЛИТЕРАТУРА*


1. *С.И. Дудов, С.П. Сидоров. Курс математической экономики. - Саратов, изд-во СГУ, 2002.*
2. *И.Ю. Выгодчикова Задачи рационального поведения экономических агентов. - Изд-во СГУ, 2009 г, 44 с. 1. И.В.*
3. *Орлова, В.А. Половникова. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование. – М.: Вузовский учебник, 2007.*
4. *В.А. Колемаев. Математическая экономика. - М., 2005.*
5. *С.И. Дудов, А.П. Хромов. Методы оптимизации. Саратов, изд-во СГУ. - 2002.*
6. *Н.Н. Данилов. Курс математической экономики. - Новосибирск: 2002,- 444с.*
7. *Р.С. Пиндайк, Д.Л. Рубинфельд. Микроэкономика. - М. 2001.*
8. *Х.Р. Вэриан. Микроэкономика, промежуточный уровень. Современный подход. - М., 1997.*
9. *Роберт Х. Франк. Микроэкономика и поведение. - М.: Инфра, 2000. – 694 с.*
10. *Дорнбуш, Рудигер. Макроэкономика. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 783 с..*
11. *Долан, Эдвин Дж. Макроэкономика. - С.-Пб.: АО «С.-П..о.», 1997. – 405 с.*
12. *Мэнкью, Н. Грегори. Макроэкономика. - М.: Изд-во Моск. ун-та,1994.– 735 с.*
13. *Сакс, Джеффри Д.. Макроэкономика. – М.: Дело, 1996. – 847 с.*

14. *Е.В. Бережная, В.И. Бережной. Математические методы моделирования экономических систем. М., «Финансы и статистика», 2001.*
15. *Т.А. Агапова. С.Ф. Серёгина. Макроэкономика. - М., 2007.*
16. *В.А. Колемаев. Экономико-математическое моделирование. - М., 2005.*
17. *М. Интрилигатор. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М. Прогресс, 1986.*