

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского»

Балашовский институт (филиал)

Интервальная математика и надежные вычисления

Методические указания к курсу
для студентов направления 010500 «Прикладная математика и информатика»

Балашов 2011

УДК 519.6
ББК 22.19
М54

Автор-составитель
М. А. Ляшко

Методические указания к курсу «Интервальная математика и надежные вычисления» составлены в соответствии с учебной программой и предназначены для студентов 3 курса факультета математики, экономики и информатики направления 010500 «Прикладная математика и информатика». В них представлены содержание изучаемого курса, планы практических занятий, домашние лабораторные работы, вопросы к зачету.

Рекомендуется к опубликованию в электронной библиотеке кафедрой математики Балашовского института (филиала) Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского.

Работа представлена в авторской редакции.

© Ляшко М.А., 2011

Содержание

1. Требования ГОС ВПО по направлению 010500 «Прикладная математика и информатика» к содержанию дисциплины	4
2. Цели и задачи изучения дисциплины	4
3. Содержание дисциплины	6
4. Содержание практических занятий и самостоятельной работы студента	7
5. Библиографический список	11
6. Интернет-ресурсы	11
7. Вопросы к зачету	12

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

1. Требования ГОС ВПО по направлению 010500 «Прикладная математика и информатика» к содержанию дисциплины

Курс относится к региональной компоненте блока дисциплин направления (ДН(М).Р.1), его содержание определяется вузом. Курс «Интервальная математика и надежные вычисления» изучается студентами очной формы обучения в 6 семестре и опирается на содержание дисциплин фундаментальной математической подготовки «Математика: Математический анализ», «Математика: Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения», дисциплин направления «Языки программирования и методы трансляции», «Методы оптимизации», «Численные методы». В качестве формы итогового контроля запланирован зачет.

2. Цели и задачи изучения дисциплины

Грамотный специалист, связанный с обработкой данных, полученных из эксперимента, должен иметь представление о причинах возникновения погрешностей при организации расчетов на компьютере и о методах получения надежного результата. Данный курс позволит студентам осознать важность интервального подхода и на практике убедиться в надежности интервальных вычислений.

Целями освоения дисциплины «Интервальная математика и надежные вычисления» являются:

- овладение основными фактами, идеями и методами интервальной математики на примерах приближенного вычисления интегралов, решения дифференциальных уравнений, решения систем линейных алгебраических уравнений;
- знакомство с новой технологией научных вычислений с гарантированными двусторонними оценками искомого результата в случае невозможности получения точного значения;
- знакомство со стандартом на научные вычисления, требующего получения двусторонних гарантированных границ;
- развитие способности применять методы интервального анализа в научных исследованиях.

В результате освоения дисциплины выполняются задачи обучения. Студент, завершивший обучение по данной дисциплине, должен:

знать:

1. интервальные модели неопределенности в математике и прикладных науках;
2. примеры ненадежных вычислений;
3. принципы организации интервальных и традиционных вычислений;
4. определение операций интервальной арифметики;
5. законы интервальной арифметики;
6. постулируемые свойства машинной арифметики;

7. источники возникновения инструментальной погрешности;
8. правила организации интервальных процедур при составлении программ;
9. примеры интервальной реализации ненадежных алгоритмов: двустороннюю реализацию решения системы линейных алгебраических уравнений; двустороннюю реализацию решения задачи Коши; двустороннюю реализацию вычисления определенного интеграла;
10. оценку точности интервального расчета;
11. возможность использования пересечений для уточнения интервального результата;
12. совмещение интервального расчета с другими видами вычислений;
13. стандарт на научные вычисления, требующий получения двусторонних гарантированных границ;
14. основы современных технологий сбора, обработки и представления информации;

уметь:

1. строить интервальные продолжения функций;
2. выполнять операции интервальной арифметики как интервальные продолжения арифметических действий;
3. использовать законы интервальной арифметики;
4. получать минимальные машинные интервальные расширения;
5. реализовывать интервальную вычислительную систему на каком-либо языке программирования;
6. реализовывать ненадежные алгоритмы в интервальной интерпретации;
7. решать интервальные системы линейных алгебраических уравнений;
8. находить значение определенного интеграла с двусторонней оценкой;
9. находить решение задачи Коши с двусторонней оценкой;
10. использовать пересечение оценок для уточнения;
11. совмещать интервальный расчет с другими видами вычислений;
12. использовать в процессе обучения данной дисциплине разнообразные ресурсы, в том числе потенциал других учебных предметов;
13. использовать современное ППО для автоматизации расчетов и проведения компьютерного эксперимента в области интервального анализа;

владеть:

1. навыками решения задач в области интервального анализа;
2. навыками работы с программными средствами профессионального назначения, использующими стандарт на научные вычисления, требующий получения двусторонних гарантированных границ;
3. способами ориентации в профессиональных источниках информации (в том числе журналах, сайтах, образовательных порталах);
4. различными средствами коммуникации;
5. способами совершенствования профессиональных знаний и умений путем использования образовательной среды БИ СГУ, региона, области, страны.

3. Содержание дисциплины

Введение в интервальную организацию вычислений. Интервальные модели неопределенности в математике и прикладных науках. Представление вещественных чисел машинными. Примеры ненадежных вычислений. Вычитание близких значений. Неустойчивость рекуррентных вычислений. Машинная локализация чисел и множеств. Интервальные и традиционные вычисления. Элементарная теория погрешностей. Локализирующие множества и действия над ними. Интервальные функции. Интервальные продолжения. Операции интервальной арифметики как интервальные продолжения арифметических действий. Законы интервальной арифметики. Субдистрибутивность. Интервальные продолжения числовых функций. Интервальные расширения. Минимальные машинные интервальные расширения. Постулируемые свойства машинной арифметики. Формат машинных чисел. Случай абсолютно точной арифметики. Инструментальная погрешность. Сохранение монотонности машинными арифметическими операциями. Надежность операции сравнения чисел. Вариант реализации интервальной вычислительной системы. Стандартные интервальные процедуры типа «приближенное минимальное расширение + мажоризация». Организация интервальных процедур. Составление программ. Обзор современного ППО для автоматизации расчетов и проведения компьютерного эксперимента в области интервального анализа.

Двустороннее решение элементарных задач. Построение таблицы функции. Построение таблицы экранных значений и их коррекция. Пересечение результатов. Примеры интервальной реализации ненадежных алгоритмов. Функции размытого аргумента. Внешние и внутренние оценки. Возможность уточнения оценок экстремумов. Реализация интервального метода Ньютона. Интервальные векторы и матрицы. Система линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами (интервальная СЛАУ, ИСЛАУ). Двусторонняя реализация решения системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Пример Райхмана. Итерационные методы решения ИСЛАУ. Интегрирование непрерывных функций. Интегрирование интервальных функций. Явные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проблема грубости композиционного интервального расчета. Эффект однократности вхождения аргумента. Ширина локализирующего отрезка и точность интервального расчета. Интервальное условие Липшица. Примеры теоретического анализа точности интервального расчета. Точность внешней и внутренней оценки множества значений функции. Проблема уточнения композиционного интервального расширения. Монотонность по включению в одномерном и многомерном случаях. Использование пересечений. Совмещение интервального расчета с другими видами вычислений.

4. Содержание практических занятий и самостоятельной работы студента

Практическое занятие № 1

Тема: Операции интервальной арифметики

Задачи для решения на занятии

1. Проведите вычисления с использованием операций интервальной арифметики и правил теории погрешностей. Сделайте вывод. Например,

$$[4; 6] \cdot [3, 5; 3, 7] - \frac{[2, 1; 2, 7]}{[2; 4]}.$$

2. Вычислите, используя направленное округление в вычислительной системе с тремя знаками после запятой. Например,

$$[-4; 6, 78] \cdot [3, 53; 3, 721] - \frac{[-2; 7]}{[1, 2; 4, 1]}.$$

Самостоятельно. Составить программу реализации операций интервальной арифметики (без направленного округления) и выполнить домашнюю лабораторную работу № 1.

Лабораторная работа № 1

Организация интервальных процедур

Задание. Используя определение интервальных арифметических операций, организовать процедуры реализации интервальных арифметических операций и составить программу на языке Pascal вычисления значения данного рационального выражения. Например, такого:

$$[4; 6] \cdot [3, 5; 3, 7] - \frac{[2, 1; 2, 7]}{[2; 4]}.$$

Практическое занятие № 2

Тема: Построение таблицы функции

Задачи для решения на занятии

Для данного значения аргумента и данной функции предложите несколько схем вычисления значений функции и проведите расчеты. Сравните результаты. Сделайте вывод. Например,

$$1) x = [-1; 3], \quad f(x) = x^5 - 3x^2 + x - 1.$$

$$2) x = [2, 7; 3], \quad f(x) = x + \sin x.$$

Самостоятельно. Программу реализации операций интервальной арифметики дополнить процедурой направленного округления и выполнить домашнюю лабораторную работу № 2.

Лабораторная работа № 2

Организация интервальных процедур с направленным округлением.

Построение таблиц функций

Задание. Используя процедуры интервальных арифметических операций с направленным округлением, составить программу получения таблицы функции, указанной преподавателем, с заданным шагом на заданном промежутке.

Практическое занятие № 3

Тема: Интервальный метод Ньютона

Задача для решения на занятии

Найти все решения уравнения $f(x) = 0$ интервальным методом Ньютона на указанном интервале. Например,

$$x \in [-3; 4], \quad f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x.$$

Самостоятельно. Составить программу реализации интервального метода Ньютона и выполнить домашнюю лабораторную работу № 3.

Лабораторная работа № 3

Программная реализация интервального метода Ньютона

Задание. Используя процедуры интервальных арифметических операций с направленным округлением, пересечения локализующих множеств, составить программу реализации интервального метода для нахождения корней уравнения $f_i(x) = 0$ на указанном промежутке:

$$x \in [-3; 8], \quad f_1(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x, \quad f_2(x) = f_1(x) + 24, \quad f_3(x) = f_1(x) + 24, 1.$$

Практическое занятие № 4

Тема: Построение ОМР ИСЛАУ

Задача для решения на занятии

Построить объединенное множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений и найти его интервальную оболочку. Например,

$$\begin{cases} [2; 4]x_1 + [-2; 0]x_2 = [-2; 2], \\ [-1; 0]x_1 + [2; 4]x_2 = [-2; 2]. \end{cases}$$

Самостоятельно. Построить объединенное множество решений указанной преподавателем интервальной системы линейных алгебраических уравнений и найти его интервальную оболочку.

Практическое занятие № 5

Тема: Решение ИСЛАУ методом Гаусса

Задача для решения на занятии

Решить интервальную систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса и сравнить найденное решение с полученной на предыдущем занятии интервальной оболочкой. Например,

$$\begin{cases} [2; 4]x_1 + [-2; 0]x_2 = [-2; 2], \\ [-1; 0]x_1 + [2; 4]x_2 = [-2; 2]. \end{cases}$$

Самостоятельно. Решить такую же задачу для указанной преподавателем интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Например,

$$\begin{pmatrix} [5; 5] & [-2; 0] & [-1; 0] \\ [-2; 0] & [10; 10] & [-3; -1] \\ [-2; -1] & [-4; -2] & [10; 10] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-2; 2] \\ [-5; 5] \\ [0; 0] \end{pmatrix}.$$

Практическое занятие № 6

Тема: Решение ИСЛАУ методом итераций

Задача для решения на занятии

Привести интервальную систему линейных алгебраических уравнений к виду, удобному для итераций, и решить ее интервальным методом итераций и методом Зейделя. Сравнить найденное решение с полученной предварительно интервальной оболочкой. Например,

$$\begin{cases} [2; 4]x_1 + [-2; 0]x_2 = [-2; 2], \\ [-1; 0]x_1 + [2; 4]x_2 = [-2; 2]. \end{cases}$$

Самостоятельно. Выполнить домашнюю лабораторную работу № 4.

Лабораторная работа № 4

Интервальная реализация решения системы линейных алгебраических уравнений

Задание. Используя процедуры интервальных арифметических операций с направленным округлением, составить программу решения ИСЛАУ методом итераций и методом Зейделя. Например,

$$\begin{pmatrix} [5; 5] & [-2; 0] & [-1; 0] \\ [-2; 0] & [10; 10] & [-3; -1] \\ [-2; -1] & [-4; -2] & [10; 10] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-2; 2] \\ [-5; 5] \\ [0; 0] \end{pmatrix}.$$

Практическое занятие № 7

Тема: Решение задачи Коши методом Эйлера

Задача для решения на занятии

Решить задачу Коши в обычной и в интервальной постановке методом Эйлера. Сравнить результаты. Например,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 y - x, & x \in [0; 2], \quad h = 0,2; \quad h = 0,5. \\ y(0) \in [-2; 2], \end{cases}$$

Самостоятельно. Решить такую же задачу для указанной преподавателем задачи Коши. Выполнить домашнюю лабораторную работу № 5.

Лабораторная работа № 5

Интервальная реализация решения задачи Коши

Задание. Используя процедуры интервальных арифметических операций с направленным округлением, решить задачу Коши в обычной и в интервальной постановке методом Эйлера методом двойной аппроксимации. Сравнить результаты. Например,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 y - x, & x \in [0; 2], \quad h = 0,01; \quad h = 0,0001. \\ y(0) \in [-2; 2], \end{cases}$$

Практическое занятие № 8

Тема: Двусторонняя реализация вычисления определенного интеграла

Задача для решения на занятии

Дать интервальную оценку значению интеграла. Например, $\int_0^2 \sin 3x dx$.

Самостоятельно. Решить такую же задачу для указанного преподавателем интеграла.

Практическое занятие № 9

Контрольная работа

1. Вычислить, используя направленное округление, в интервальной вычислительной системе с тремя знаками после запятой, и традиционным способом:

$$[-4; 6,78] \cdot [3,53; 3,721] - \frac{[-2; 7]}{[1,2; 4,1]}.$$

2. Построить объединенное множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений и найти его интервальную оболочку:

$$\begin{cases} [2; 4]x_1 + [-2; 0]x_2 = [-2; 2], \\ [-1; 0]x_1 + [2; 4]x_2 = [-2; 2]. \end{cases}$$

3. Локализовать ОМР данной ИСЛАУ итерационным методом.

5. Библиографический список

1. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления [Текст] : Пер. с англ. / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
2. Двусторонние численные методы [Текст] / Б. С. Добронев, В. В. Шайдунов. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1990. – 208 с.
3. Жолен, Л. Прикладной интервальный анализ [Текст] / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 468 с.
4. Калмыков, С. А. Методы интервально анализа [Текст] / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З.Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, 1986. – 224 с.
5. Кулиш, У. Достоверные вычисления. Базовые численные методы [Текст] / У. Кулиш, Д. Рац, Р. Хаммер, М. Хокс. Пер. с англ. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 496 с. – (Компьютерные математические вычисления).
6. Меньшиков, Г.Г. Интервальный анализ и методы вычислений [Текст] : конспект лекций. Выпуски 1-9 / Г. Г. Меньшиков. – С.-Петербург: Из-во СПбГУ, 1996 - 99.

6. Интернет-ресурсы

1. <http://www.nsc.ru/interval/>

Этот веб-сайт содержит информацию и ссылки по различным аспектам интервального анализа и его приложений внутри самой математики и на практике. Разделы сайта «Программное обеспечение», «Электронная библиотека», «Научная жизнь», «Образование», «Приложения», «Интерактивный решатель» содержат все необходимое для освоения данной дисциплины и решения прикладных задач с нечеткими входными данными.

2. www.exponenta.ru

Образовательный математический сайт. Содержит материалы по работе с математическими пакетами Mathcad, MATLAB, Mathematical Maple и др., методические разработки, примеры решения задач, выполненные с использованием математических пакетов. Форум и консультации для студентов и школьников.

3. www.math.ru/lib

Большая библиотека, содержащая книги, серии брошюр, сборников. В библиотеке представлены не только книги по математике, но и по физике, и по истории науки.

4. <http://window.edu.ru>

Единое окно доступа к образовательным ресурсам сайта Министерства образования и науки РФ.

7. Вопросы к зачету

1. Интервальные модели неопределенности в математике и прикладных науках.
2. Представление вещественных чисел машинными.
3. Примеры ненадежных вычислений.
4. Машинная локализация чисел и множеств.
5. Локализирующие множества и действия над ними.
6. Интервальные функции. Интервальные продолжения.
7. Операции интервальной арифметики как интервальные продолжения арифметических действий.
8. Законы интервальной арифметики.
9. Интервальные продолжения числовых функций.
10. Интервальные расширения. Минимальные машинные интервальные расширения.
11. Постулируемые свойства машинной арифметики. Формат машинных чисел.
12. Случаи абсолютно точной арифметики. Инструментальная погрешность.
13. Сохранение монотонности машинными арифметическими операциями.
14. Реализация интервальной вычислительной системы. Стандартные интервальные процедуры типа «приближенное минимальное расширение + мажоризация».
15. Организация интервальных процедур. Составление программ.
16. Построение таблицы функции.
17. Пересечение результатов.
18. Пример интервальной реализации ненадежных алгоритмов: вычитание близких значений.
19. Пример интервальной реализации ненадежных алгоритмов: неустойчивость рекуррентных вычислений.
20. Функции размытого аргумента. Внешние и внутренние оценки. Возможность уточнения оценок экстремумов.
21. Интервальная реализация метода Ньютона.
22. Построение ОМР ИСЛАУ.

23. Двусторонняя реализация решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
24. Двусторонняя реализация решения системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом.
25. Эффект однократности вхождения аргумента. Ширина локализирующего отрезка и точность интервального расчета.
26. Интервальное условие Липшица.
27. Примеры теоретического анализа точности интервального расчета. Точность внешней и внутренней оценки множества значений функции.
28. Проблема уточнения композиционного интервального расширения.
29. Монотонность по включению в одномерном и многомерном случаях. Использование пересечений.
30. Совмещение интервального расчета с другими видами вычислений.
31. Вычислительные системы и среды со встроенными интервальными процедурами.

Учебно-методическое издание

Автор-составитель
Ляшко Марина Александровна

Интервальная математика и надежные вычисления

Методические указания к курсу
для студентов направления 010500 «Прикладная математика и информатика»

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского