

Саратовский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского

Д.И. Трубецков

А.Г. Рожнев

Лекции по теории  
колебаний и волн

# ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

*Учебное пособие для студентов физических  
специальностей вузов*

Саратов, 2011

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>6</b>
<b>1 Линейный гармонический осциллятор</b>	<b>8</b>
1.1 Общие замечания и определения . . . . .	8
1.2 Консервативный осциллятор . . . . .	10
1.3 Примеры осцилляторов в физике, химии, биологии . . . . .	12
1.3.1 Грузик на пружинке . . . . .	12
1.3.2 Маятник . . . . .	12
1.3.3 Колебательный контур . . . . .	13
1.3.4 Химический осциллятор . . . . .	13
1.3.5 Модель хищник — жертва . . . . .	15
1.4 “Экономический маятник” — линейные колебания в простой модели экономики . . . . .	17
1.5 Электрон в магнитном поле. Электроны — осцилляторы . . . . .	18
1.6 Изохронные и неизохронные колебания . . . . .	24
1.7 Энергетические соотношения для усредненных величин. Теорема вириала . . . . .	27
<b>2 Осциллятор как динамическая система</b>	<b>30</b>
2.1 Динамические системы: основные определения и классификация . . . . .	30
2.2 Особая точка типа центр . . . . .	33
2.3 Положения равновесия и особые точки . . . . .	34
2.4 Фазовый портрет системы хищник-жертва . . . . .	35
2.5 Особая точка типа седло . . . . .	36
2.6 Устойчивость положений равновесия . . . . .	40
<b>3 Линейный осциллятор с затуханием</b>	<b>42</b>
3.1 Основные свойства осциллятора с затуханием. Логарифмический декремент и добротность . . . . .	42
3.2 Колебания с медленно меняющейся амплитудой . . . . .	46

3.3	Метод нормальных колебаний . . . . .	53
3.4	Немного о квантовом осцилляторе . . . . .	55
3.5	Особая точка типа устойчивый фокус. Аттракторы . . . . .	56
3.6	Осциллятор с сильным затуханием. Устойчивый узел . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Осцилляторы с отрицательным трением. Общая классификация особых точек на фазовой плоскости</b>	<b>60</b>
4.1	Примеры систем с отрицательным трением . . . . .	60
4.2	Фазовые портреты: неустойчивый фокус и неустойчивый узел	63
4.3	Общая классификация особых точек на фазовой плоскости . . . . .	65
4.4	Понятие бифуркации динамической системы . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Осциллятор под действием внешних сил. Резонанс</b>	<b>70</b>
5.1	Примеры и эталонное уравнение . . . . .	70
5.2	Метод комплексных амплитуд . . . . .	72
5.3	Случай гармонической внешней силы . . . . .	75
5.4	Резонанс . . . . .	78
5.5	Фазовые соотношения при резонансе . . . . .	81
5.6	Энергетические соотношения при резонансе и метод усреднения . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Осциллятор под произвольным внешним воздействием</b>	<b>87</b>
6.1	Периодическая внешняя сила . . . . .	87
6.2	Произвольная внешняя сила . . . . .	89
6.3	Предельные случаи . . . . .	91
6.3.1	Резкий толчок . . . . .	91
6.3.2	Очень медленное изменение внешней силы . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Осциллятор с изменяющимися параметрами</b>	<b>95</b>
7.1	Вводные замечания . . . . .	95
7.2	Параметрическая неустойчивость . . . . .	98
7.3	Теория Флоке . . . . .	102
7.4	Модельная система . . . . .	105
7.5	Уравнение Матье . . . . .	107
7.6	Неустойчивость в двухконтурной схеме. Соотношения Мэнли-Роу . . . . .	112
7.7	Медленное изменение параметров. Адиабатический инвариант	120
7.8	Движение в быстро осциллирующем поле . . . . .	128

<b>8</b>	<b>Колебания в системе связанных осцилляторов</b>	<b>136</b>
8.1	Примеры связанных осцилляторов . . . . .	136
8.2	Два связанных идентичных осциллятора . . . . .	141
8.3	Парциальные системы и парциальные частоты . . . . .	146
8.4	Два связанных осциллятора с силовой связью . . . . .	148
8.5	Связанные осцилляторы под действием гармонической силы	156
8.6	Колебания системы $N$ связанных осцилляторов . . . . .	162
8.7	Цепочка идентичных осцилляторов . . . . .	167
	<b>Литература</b>	<b>180</b>

“Я начну с классической линейной теории колебаний. Такие понятия, как гармонический осциллятор, логарифмический декремент, нормальные и парциальные частоты, резонанс, принцип суперпозиции, спектральный подход и т.д., обладают для физика исключительно большой наглядностью и в совокупности создают стройную, цельную и прозрачную картину процессов, происходящих в линейных колебательных системах.

Эти понятия и все это линейное мировоззрение тесно связаны с математикой. Математический аппарат, трактующий линейные колебательные системы, весьма разработан и чрезвычайно адекватен физическим задачам классической теории линейных колебаний. В своей дискретной части он связан с алгеброй линейных преобразований и квадратичных форм, в своей распределенной части — с проблемой собственных значений, теорией специальных функций и т.д. Адекватность этого аппарата физическим задачам классической теории линейных колебаний не должна нас удивлять, так как именно эта область может служить наиболее разительным примером взаимного плодотворного сотрудничества физики и математики. Достаточно вспомнить знаменитый спор Эйлера, Д’Аламбера и Лагранжа о теории колебаний струны, откуда ведут свое происхождение многие относящиеся сюда понятия и методы. С Лагранжа же в сущности начинается и теория малых колебаний, т.е. теория линейных дискретных систем”.

*А.А. Андронов. “Л.И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний”. В книге “Академик Л.И. Мандельштам. К столетию со дня рождения. — М.: Наука, 1970, с.107–108.*

# Предисловие

Настоящее учебное пособие является переработанной версией первой части учебника “Линейные колебания и волны”, вышедшей в серии “Современная теория колебаний и волн” в издательстве “Физматлит” в 2001 году [1]. Его содержание соответствует программе курса “Линейные колебания”, который читается на протяжении ряда лет студентам первого курса обучения на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета.

Главной целью, к достижению которой стремились авторы этой книги, было показать единство колебательных процессов совершенно различной природы, интересуясь, в первую очередь, свойствами этих процессов, а не деталями поведения системы, связанными с проявлениями ее природы (физической, биологической, химической и т.д.). Общие свойства реальных систем устанавливаются на основе анализа моделей, основная из которых классический линейный осциллятор и его модификации. В первой лекции рассматривается линейный гармонический осциллятор. В качестве примеров анализируются математический маятник, колебательный контур, система хищник - жертва, химический и экономический “маятники”. Там же определенное внимание уделено неизохронным колебаниям. Осциллятор как динамическая система, поведение которой исследуется с помощью фазовой плоскости, является героем лекции 2. Анализ различных состояний равновесия для линейного осциллятора с затуханием продолжен в лекции 3, где вводится понятие нормальных колебаний, неоднократно используемое на протяжении всех книги. Изучение фазовой плоскости завершает лекция 4, где рассматривается осциллятор с отрицательным трением и дана общая классификация особых точек на фазовой плоскости. Здесь же кратко обсуждается понятие бифуркации.

Первое усложнение модели — осциллятор под действием внешней силы (лекции 5 и 6). Следующий шаг состоит в рассмотрении осциллятора с изменяющимися во времени параметрами и параметрического резонанса (лекция 7). Важным в этой лекции представляется изложение математического аппарата, связанного с исследованием уравнения Матье, методом усреднения, приближением Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна и нахождением адиабатических инвариантов.

В последней лекции этого учебного пособия модель осциллятора ис-

пользуется как “кирпичик” для построения более сложных систем: двух связанных осцилляторов и цепочки связанных осцилляторов. Здесь вводятся важные понятия собственных мод и собственных частот колебаний, связанности колебаний, рассматривается влияние граничных условий на собственные частоты. Материал этой лекции служит фундаментом для перехода к изучению линейных волн в различных физических системах, что является предметом логически следующего за данной книгой учебного пособия “Линейные волны” [2], также входящего в серию “Лекции по теории колебаний и волн”.

Читатель обнаружит в этой книге довольно много математики, но это не математика ради математики. Эта книга — учебник, и мы старались писать ее так, чтобы все выкладки были максимально полными. По нашему убеждению, математический аппарат, используемый в линейной теории колебаний и волн, является основой всего математического образования физика. Подробное воспроизведение всех выкладок в процессе чтения книги позволит освоить этот аппарат в наиболее полной степени.

Некоторые вспомогательные вопросы включены в учебное пособие в виде задач. Однако этих задач не так много, поскольку их основная часть издана в виде отдельного задачника [3]. Мы надеемся, что совместное изучение теории и решение большого числа задач, поможет читателю более глубоко освоить эту увлекательную науку.

# Лекция 1

## Линейный гармонический осциллятор

*Общие замечания и определения. Консервативный осциллятор. Примеры осцилляторов в физике, химии, биологии. “Экономический маятник” — линейные колебания в простой модели экономики. Электрон в магнитном поле. Электроны — осцилляторы. Изохронные и неизохронные колебания. Энергетические соотношения для усредненных величин. Теорема вириала.*

### 1.1 Общие замечания и определения

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется *линейным гармоническим осциллятором*.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x(t)$  — переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.),  $\gamma$  — параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре),  $\omega_0$  — собственная частота колебаний,  $t$  — время. Точками сверху принято обозначать производные по времени:  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  и т.д.

Уравнение (1.1) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером *линейной* динамической системы. Основные понятия теории динамических систем будут рассмотрены в гл. 2, здесь же мы обсудим свойство линейности.



Поведение линейных систем описывается функциональным уравнением  $\hat{\mathcal{L}}x = f$ , где  $\hat{\mathcal{L}}$  — линейный оператор,  $f$  — известная функция. Оператор  $\hat{\mathcal{L}}$  называется линейным, если для любых двух функций  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  из области его определения выполняется условие  $\hat{\mathcal{L}}[C_1x_1(t) + C_2x_2(t)] = C_1\hat{\mathcal{L}}x_1(t) + C_2\hat{\mathcal{L}}x_2(t)$ , где  $C_1, C_2$  — постоянные. Из линейности оператора  $\hat{\mathcal{L}}$  следуют два утверждения, составляющие содержание *принципа суперпозиции*.

1. Если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два решения уравнения  $\hat{\mathcal{L}}x = 0$ , то их линейная комбинация  $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$  также является решением.
2. Если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два решения неоднородного уравнения  $\hat{\mathcal{L}}x = f$ , то их разность  $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$  является решением соответствующего однородного уравнения  $\hat{\mathcal{L}}x = 0$ .

Доказательство этих утверждений элементарно просто. Принцип суперпозиции играет фундаментальную роль во всей линейной теории колебаний и волн, именно благодаря ему часто удается построить решение линейной задачи в замкнутом виде.

Большинство колебательных систем подчиняется принципу суперпозиции только приближенно, при выполнении определенных условий, чаще всего — малости отклонения системы от положения равновесия. Однако, как показано ниже, не всегда малость отклонения является достаточным условием линейности колебаний.

Математическим аппаратом, адекватным задачам теории колебаний, является теория обыкновенных дифференциальных уравнений [4–6], а в случае линейных систем — теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения, в которые время не входит явным образом, соответствуют *автономным* системам. Их параметры и действующие на них внешние силы не зависят от времени. Гармонический осциллятор (1.1) — автономная система.

*Порядок* дифференциального уравнения определяется степенью входящей в него старшей производной. Порядок уравнения совпадает с числом независимых начальных условий, которые необходимо задать в фиксированный момент времени, чтобы однозначно определить решение. Помимо порядка дифференциального уравнения используют также понятие *числа степеней свободы*. Оно равно порядку дифференциального уравнения, деленному на два. Уравнению второго порядка соответствует система с одной степенью свободы, третьего порядка — с полутора степенями, четвертого порядка — с двумя, и т.д. Линейный осциллятор — это система с одной степенью свободы.

## 1.2 Консервативный осциллятор

Если потери в системе отсутствуют ( $\gamma = 0$ ), то вместо (1.1) получаем уравнение *консервативного* осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.2)$$

энергия колебаний которого сохраняется во времени. Такой осциллятор является частным случаем нелинейного консервативного осциллятора

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (1.3)$$

для которого постоянной во времени остается сумма кинетической и потенциальной энергий

$$W = W_k + W_n = \frac{\alpha \dot{x}^2}{2} + \alpha \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi. \quad (1.4)$$

Коэффициент  $\alpha$  имеет свой смысл для каждой конкретной системы. Например, для грузика на пружинке  $\alpha$  — масса. Дифференцируя (1.4) по времени, получаем  $\dot{W} = \alpha \dot{x}[\dot{x} + f(x)] = 0$ , т.е. величина  $W$  действительно не зависит от  $t$ .

Чтобы в системе (1.3) существовали колебания, потенциальная энергия  $W_n(x)$  как функция  $x$  должна иметь локальный минимум. Считая отклонения осциллятора от точки минимума  $x_0$  малыми, положим  $W_n(x) \approx W_n(x_0) + \beta(x - x_0)^2/2$ ,  $\beta = d^2W_n(x_0)/dx^2 \neq 0$ . Используя это выражение в формуле для полной энергии и приравнявая  $\dot{W}$  нулю, получаем уравнение (1.2), причем

$$\omega_0^2 = \beta/\alpha. \quad (1.5)$$

Таким образом, уравнение гармонического осциллятора получается из общего случая (1.3) в результате замены функции потенциальной энергии ее квадратичной аппроксимацией вблизи локального минимума. Если  $\beta = 0$ , то в разложении потенциальной энергии в ряд Тейлора необходимо удерживать следующие за квадратичным слагаемые, в этом случае уравнение осциллятора не будет линейным даже для малых колебаний.

Формула (1.5) очень удобна для вычисления собственных частот линейных систем с одной степенью свободы, для этого достаточно выразить потенциальную и кинетическую энергии системы через любую подходящую переменную  $x$ , определяющую состояние системы, и разложить полученные выражения в ряд до квадратичных слагаемых по  $x$  и  $\dot{x}$ . Много подобных задач можно найти в [7].

Решение уравнения (1.2) хорошо известно:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.6)$$

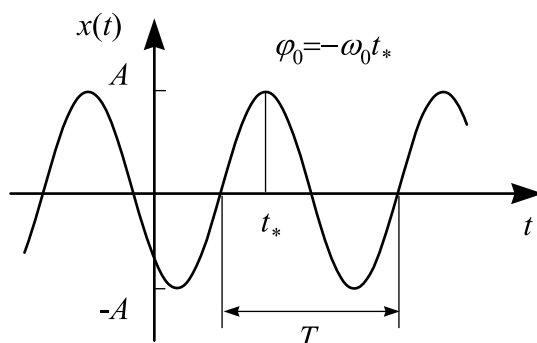


Рис. 1.1. Решение уравнения гармонического осциллятора

Здесь  $A$  — амплитуда колебаний,  $\varphi_0$  — начальная фаза. Зависимость  $x(t)$  показана на рис. 1.1. Период колебаний — интервал времени, через который состояние системы повторяется — связан с собственной частотой формулой  $T = 2\pi/\omega_0$ . Начальная фаза определяет сдвиг графика косинуса относительно нулевого момента времени: время  $t_*$  первого с начала отсчета максимального отклонения в сторону положительных  $x$  связано с начальной фазой формулой  $\varphi_0 = -\omega_0 t_*$ . Так как  $\varphi_0$  всегда находится под аргументом синуса или косинуса, то она определена с точностью до произвольного, кратного  $2\pi$ , слагаемого. Например фазы  $0$  и  $2\pi$ ,  $-\pi$  и  $\pi$  эквивалентны.

Амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями. Если при  $t = 0$  координата и скорость<sup>1</sup> осциллятора равны, соответственно,  $x_0$  и  $v_0$ , то из (1.6) следует

$$x_0 = A \cos \varphi_0, \quad v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi_0. \quad (1.7)$$

Отсюда находим

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2} \quad (1.8)$$

и

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{-v_0/\omega_0}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}}. \quad (1.9)$$

Разлагая в (1.6) косинус суммы и используя соотношения (1.7), решение можно также представить в виде

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (1.10)$$

<sup>1</sup>Под координатой осциллятора понимается любая переменная, однозначно определяющая его состояние, а под скоростью — производная координаты по времени. Например, если для электрического контура в качестве “координаты” выступает заряд на конденсаторе, то “скорость” равна  $\dot{Q} = I$  — току через конденсатор.

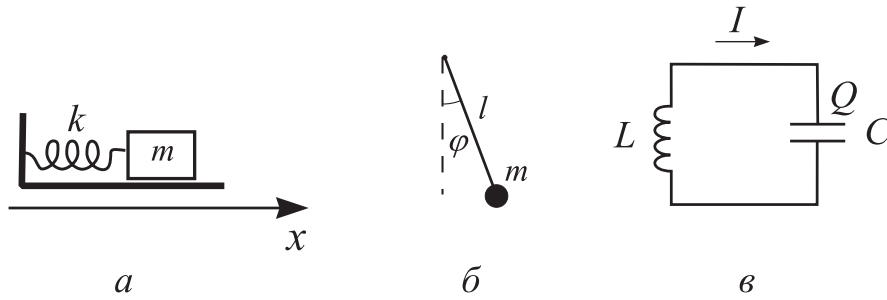


Рис. 1.2. Примеры осцилляторов: грузик на пружинке (а), маятник (б) и колебательный контур (в).

иногда более удобном для решения задач с начальными условиями. Если начальные условия сформулированы для произвольного момента времени  $t_0$ , то в формулы (1.6) и (1.10) следует вместо  $t$  подставить  $t - t_0$ .

### 1.3 Примеры осцилляторов в физике, химии, биологии

Рассмотрим примеры систем, в которых появляется уравнение линейного осциллятора. Для полноты изложения, начнем со “школьных” примеров — грузика на пружинке, маятника и колебательного контура.

#### 1.3.1 Грузик на пружинке

Брусек массы  $m$  лежит на гладкой горизонтальной поверхности и прикреплен к стенке пружиной (рис. 1.2,а). При смещении бруска на величину  $x$  от положения равновесия возникает сила  $F(x)$ , которую при малых деформациях пружины можно с достаточной точностью аппроксимировать линейным соотношением  $F(x) = -kx$  (закон Гука). Знак минус показывает, что сила является возвращающей, т.е. она направлена в сторону, противоположную смещению бруска. Динамику системы описывает второй закон Ньютона  $m\ddot{x} = -kx$ , что очевидно совпадает с уравнением (1.2), причем  $\omega_0^2 = k/m$ . Подчеркнем, что в общем случае больших деформаций сила  $F(x)$  не является линейной функцией  $x$ , поэтому такие колебания будут нелинейными.

#### 1.3.2 Маятник

Рассмотрим простейший случай, когда маятник представляет собой точечную массу  $m$  на невесомом жестком стержне длиной  $l$ , который может свободной вращаться вокруг оси, проходящей через один из его концов

(рис. 1.2,б). Уравнение вращательного движения  $I\ddot{\varphi} = M$  ( $I = ml^2$  — момент инерции маятника,  $M = -mgl \sin \varphi$  — момент силы тяжести,  $\varphi$  — угол поворота маятника) приводится к виду

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (1.11)$$

где  $\omega_0^2 = g/l$ . Это уравнение называется *уравнением математического маятника*. Считая угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия малым, можно положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ , в результате чего вновь получается уравнение линейного осциллятора. Отметим, что сделанное приближение означает, что возвращающий (знак минус в формуле для  $M$ ) момент сил пропорционален углу поворота.

### 1.3.3 Колебательный контур

В этом случае уравнение получается из закона Киргофа  $L\dot{I} + V_c = 0$  ( $V_c$  — напряжение на конденсаторе), записанного для замкнутого контура (рис. 1.2,в). Заряд на конденсаторе функционально связан с приложенным напряжением:  $Q = Q(V_c)$ , эта зависимость носит название вольт-фарадной характеристики. Если конденсатор заполняет обычный диэлектрик, то при малых напряжениях можно положить  $Q = V_c/C$ , где  $C$  — линейная емкость. Тогда, учитывая соотношение  $I = \dot{Q}$ , получаем уравнение осциллятора  $\ddot{Q} + 1/(LC)Q = 0$ . Собственная частота колебаний равна  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ .

Во всех рассмотренных примерах уравнение гармонического осциллятора получается с помощью замены некоторой функциональной связи между физическими величинами, характеризующими состояние системы, линейным соотношением. Такая замена возможна, если отклонение системы от положения равновесия мало. Подобная процедура называется *линеаризацией* и она эквивалентна, как мы видели, замене выражения для потенциальной энергии полиномом второй степени.

То обстоятельство, что уравнения для всех систем совпадают, позволяет распространить выводы, получаемые для одной из них, на остальные. Такому переводу с “языка” одной системы на “язык” другой помогает словарь, представленный в таблице 1.1. При небольшом опыте вы сможете добавлять в эту таблицу новые колонки, соответствующие другим примерам осцилляторов.

Приведем еще два нетривиальных, хотя уже и ставших классическими примера линейных осцилляторов, которые встречаются в химии и биологии.

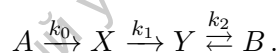
### 1.3.4 Химический осциллятор

В химии простейшим примером колебательной реакции, протекающей в гомогенной (однородной) среде, является модель Лотки [8, 9], кинетиче-

Грузик на пружинке	Маятник	Колебательный контур
Деформация пружинки $x$	Угол поворота маятника $\varphi$	Заряд конденсатора $Q$
Скорость грузика $\dot{x}$	Угловая скорость вращения $\dot{\varphi}$	Ток в контуре $I$
Масса грузика $m$	Момент инерции маятника $I$	Индуктивность $L$
Жесткость пружинки $k$	Коэффициент между углом поворота и моментом силы $mgl$	Величина, обратная емкости $1/C$
Возвращающая сила — сила Гука $F = -kx$	Возвращающий момент силы тяжести $M = -mgl\varphi$	Напряжение на емкости (с обратным знаком) $-V_c = -Q/C$
Кинетическая энергия $W_k = m\dot{x}^2/2$	Энергия вращения маятника $W_{вр} = I\dot{\varphi}^2/2$	Энергия магнитного поля в индуктивности $W_m = LI^2/2$
Потенциальная энергия пружинки $W_n = kx^2/2$	Потенциальная энергия поля силы тяжести $W_n = mgl\varphi^2/2$	Энергия электрического поля в конденсаторе $W_e = Q^2/2C$
Сила трения $F_{тр} = -\lambda\dot{x}$	Момент силы трения $M_{тр} = -\chi\dot{\varphi}$	Напряжение на сопротивлении (с обратным знаком) $-V_R = -RI$

Таблица 1.1. Соответствие между физическими величинами и параметрами различных линейных осцилляторов

ская схема которой



Данная запись соответствует следующей гипотетической реакции. В некотором объеме находится вещество А, расход которого в процессе реакции почти незаметен (говорят, что А находится в избытке). Происходит превращение молекул вещества А в молекулы вещества X. Эта реакция нулевого порядка протекает с постоянной скоростью  $k_0$ . Далее, X превращается в Y с тем большей скоростью, чем больше концентрация Y (это обстоятельство в кинетической схеме отмечено обратной стрелкой над Y). Эта реакция является реакцией второго порядка. Наконец, молекулы Y необратимо распадаются, образуя вещество B (реакция первого порядка). Используя правила составления кинетических уравнений [9] и сохранив для концентрации веществ обозначения A, X, Y и B, запишем математическую модель реакции Лотки в следующем виде:

$$\dot{X} = k_0 - k_1XY, \quad \dot{Y} = k_1XY - k_2Y, \quad \dot{B} = k_2Y. \quad (1.12)$$

Если концентрации X и Y не меняются во времени, то реакция может протекать так, что скорость образования B будет постоянной.

Сказанному соответствуют условия  $\dot{X} = \dot{Y} = 0$ , или

$$k_0 - k_1 X_0 Y_0 = 0, \quad k_1 X_0 Y_0 - k_2 Y_0 = 0, \quad (1.13)$$

где  $X_0$  и  $Y_0$  — равновесные концентрации. Из системы (1.13) следует, что

$$X_0 = k_2/k_1, \quad Y_0 = k_0/k_2. \quad (1.14)$$

Предположим, что существуют малые отклонения  $x(t)$  и  $y(t)$  от равновесных значений концентраций  $X_0, Y_0$ , т.е. будем считать  $X(t) = X_0 + x(t)$ ,  $Y(t) = Y_0 + y(t)$ , причем  $|x| \ll X_0$ ,  $|y| \ll Y_0$ . Подставляя выражения для  $X(t)$  и  $Y(t)$  в первые два уравнения системы (1.12), учитывая (1.14) и пренебрегая произведениями переменных величин как членами второго порядка малости, получим

$$\dot{x} = -k_2 y - (k_1 k_0/k_2)x, \quad \dot{y} = (k_1 k_0/k_2)x. \quad (1.15)$$

Система уравнений (1.15) сводится к уравнению линейного осциллятора (1.1), если формально обозначить  $k_1 k_0/k_2 = 2\gamma$ ,  $k_1 k_0 = \omega_0^2$ . Разумеется, нелинейная система уравнений (1.12) богаче решениями, чем уравнение линейного осциллятора (1.1), которое получилось из нее лишь в силу сделанных допущений о малости возмущений концентрации. Если сохранить нелинейность, то модель Лотки может служить составным элементом более сложных периодических химических реакций.

Самая известная из колебательных химических реакций — реакция Белоусова - Жаботинского [10, 11]. В ней периодически (примерно раз в секунду) происходит изменение цвета раствора, в котором идет реакция окисления малоновой кислоты  $C_3H_4O_4$  смесью  $KBrO_2$  и  $Ce(SO_4)_2$ . Изменение цвета раствора с голубого на розовый происходит за счет образования в растворе ионов ( $Ce^{4+}$ ). Эта реакция хорошо изучена и с точки зрения теории колебаний. В математическом плане она сложнее реакции Лотки, поскольку в ней взаимодействуют три вещества и возможно существование автоколебательных режимов.

### 1.3.5 Модель хищник — жертва

Следующий пример — известная модель экологии “хищник — жертва” (модель Вольфегера [8, 9, 12]). В этой модели рассматриваются два вида животных, один из которых питается другим. Соответствующую задачу часто формулируют в виде вопроса: “Могут ли рыси съесть всех зайцев?” (или лисы — зайцев, или щуки — карасей, в зависимости от фантазии авторов).

Пусть на замкнутом ареале живут два вида — хищники и вегетарианцы — жертвы. Жертвы (их число  $N_1(t)$ ) питаются растительной пищей, имеющейся в избытке, а хищники (их число  $N_2(t)$ ) питаются только жертвами.

Если жертвы живут на ареале одни и пищи им хватает, то численность этого вида будет увеличиваться:

$$\dot{N}_1 = \varepsilon_1 N_1. \quad (1.16)$$

( $\varepsilon_1$  — коэффициент прироста — постоянный и положительный). Заметим, что уравнение (1.16) аналогично рассмотренной выше химической реакции первого порядка. Если бы на ареале жили одни хищники, то из-за отсутствия пищи они бы вымерли:

$$\dot{N}_2 = -\varepsilon_2 N_2. \quad (1.17)$$

( $\varepsilon_2$  — постоянный и положительный коэффициент изменения вида — вымирания). Можно допустить, что при совместном проживании видов численность хищников будет увеличиваться тем быстрее, чем больше их частота столкновений с жертвами. Эта частота столкновений пропорциональна  $N_1 N_2$ . Таким образом, для описания численности двух совместно существующих видов мы приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{N}_1 = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_2 N_2), \quad \dot{N}_2 = -N_2(\varepsilon_2 + \gamma_1 N_1), \quad (1.18)$$

где  $\gamma_2$  — положительная постоянная, характеризующая гибель жертв из-за встречи с хищниками;  $\gamma_1$  — положительная постоянная, характеризующая размножение хищников.

Подобно тому, как мы поступали в случае модели Лотки, найдем состояния равновесия  $N_1^0$  и  $N_2^0$ . Из уравнений (1.18) при  $\dot{N}_1 = 0$  и  $\dot{N}_2 = 0$  имеем

$$N_1^0 = \varepsilon_2 / \gamma_1, \quad N_2^0 = \varepsilon_1 / \gamma_2. \quad (1.19)$$

Для малых отклонений численности видов от стационарных значений ( $N_1(t) = N_1^0 + n_1(t)$  и  $N_2(t) = N_2^0 + n_2(t)$ ) после линеаризации уравнений (1.18) получим

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= -\gamma_2 N_1^0 n_2 = -(\gamma_2 \varepsilon_2 / \gamma_1) n_2, \\ \dot{n}_2 &= \gamma_1 N_2^0 n_1 = (\gamma_1 \varepsilon_1 / \gamma_2) n_1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Дифференцируя первое уравнение системы ((1.20) по времени и используя второе уравнение, приходим к уравнению для гармонического осциллятора:

$$\ddot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0, \quad (1.21)$$

где  $\omega_0^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$  (такое же уравнение получается и для  $n_2$ ). Если в (1.21) ввести обозначение  $n_1 = x$ , то приходим к уравнению (1.2).

Отметим, что в уравнениях (1.18) существует еще одна точка равновесия  $N_1^0 = 0$ ,  $N_2^0 = 0$ , вблизи которой система ведет себя совершенно иначе, чем гармонический осциллятор. Это поведение будет более подробно исследовано в лекции 2.



## 1.4 “Экономический маятник” — линейные колебания в простой модели экономики <sup>2</sup>

Будем называть экономическую систему замкнутой, если весь произведенный продукт либо потребляется, либо вкладывается в рамках этой же экономической системы, т.е. отсутствуют экспорт, импорт и приток капитала извне. Пусть  $Y$  — объем производства,  $C$  — потребление,  $I$  — капиталовложения. Для некоторой замкнутой экономической системы в момент времени  $t$  можно написать  $Y = C + I$ . Если имеет место приток капитала (например, правительственные расходы  $G$ ), то экономика уже перестает быть замкнутой и объем производства увеличивается на величину  $G$ :

$$Y = C + I + G. \quad (1.22)$$

Потребление возрастает с увеличением объема производства, т.е.

$$C = Yd = Y(1 - S), \quad (1.23)$$

где  $d$  и  $S$  — предельные склонности к потреблению и сбережению. Предположим, что правительственные расходы  $G_0$  постоянны. В каждый момент времени  $t$  в экономике существует спрос  $D(t)$ , определяющий желаемый уровень потребления и капиталовложений. Задача состоит в следующем: сбалансировать экономику таким образом, чтобы объем производства совпал со спросом, т.е.  $D(t) = Y(t)$ . Однако на практике производство не может мгновенно реагировать на изменение спроса (существует запаздывание  $\tau$ , которое связано со временем, необходимым, например, для постройки нового завода и т.п.). Чтобы сбалансировать экономику при наличии запаздывания, нужно составлять планы на будущее и строить производство так, чтобы удовлетворить прогнозируемый спрос, полагая

$$D(t) = (1 - S)Y(t - \tau) + I(t) + G_0. \quad (1.24)$$

В уравнении (1.24) сделано предположение, что за время  $\tau$  капиталовложения существенно не меняются, т.е.  $I(t - \tau) = I(t)$ . При малых  $\tau$  разность  $[Y(t) - Y(t - \tau)]/\tau \approx dY/dt$ , поэтому

$$Y(t - \tau) = Y(t) - \frac{dY}{dt} \tau + O(\tau^2), \quad (1.25)$$

где через  $O(\tau^2)$  обозначены все величины порядка  $\tau^2$  и выше. Уравнение (1.23) с учетом соотношения (1.24) и основного требования  $D(t) = Y(t)$  с точностью до величины первого порядка относительно  $\tau$  принимает вид:

$$(1 - S)\tau \frac{dY}{dt} = -SY(t) + I(t) + G_0. \quad (1.26)$$

<sup>2</sup>В изложении этого параграфа мы следуем книге [13]

Хотя величина  $I(t)$  за время порядка  $\tau$  существенно не меняется, она не является постоянной. Капиталовложения зависят от общей тенденции развития производства. Одна из возможных стратегий в области капиталовложения — “принцип акселератора”, согласно которому желательно выполнение соотношения ( $I(t) = adY/dt$ ,  $a > 0$ ). Это равенство не может точно выполняться, но к нему можно приближаться, если считать, что

$$\frac{dI}{dt} = b\left[a\frac{dY}{dt} - I(t)\right], \quad b > 0. \quad (1.27)$$

Уравнения (1.26) и (1.27) являются динамической моделью экономики. Поставим  $I(t)$  из уравнения (1.27) в уравнение (1.26); тогда имеем:

$$(1 - S)\tau\frac{d^2Y}{dt^2} + S\frac{dY}{dt} = ba\frac{dY}{dt} - b(1 - S)\tau\frac{dY}{dt} - bSY + bG_0.$$

Вводя обозначения  $y(t) = Y(t) - G_0/S$ , получим

$$(1 - S)\tau\frac{d^2y}{dt^2} + [S - ba + (1 - S)\tau b]\frac{dy}{dt} + Sby = 0.$$

Таким образом, разность между объемом производства и постоянной величиной  $G/S$  удовлетворяет уравнению (1.1) где

$$2\gamma = \frac{S - ba(1 - S)\tau b}{\tau(1 - S)} \quad \omega_0^2 = \frac{Sb}{\tau(1 - S)} > 0. \quad (1.28)$$

Если величина  $\gamma$  неотрицательна, то имеют место либо затухающие колебания ( $\gamma$ ), либо колебания величины  $Y$  около  $G_0/S$  ( $\gamma = 0$ ). Последнее соответствует периодам подъема и спада в экономике. Когда  $\gamma < 0$ , то, как будет показано в дальнейшем, возникает неустойчивость, с возрастанием времени пики подъемов увеличиваются все больше, так же, как и глубина спадов.

## 1.5 Электрон в магнитном поле. Электроны — осцилляторы

Следующий пример осциллятора вновь из области физики, это движение заряженной частицы (электрона) в однородном магнитном поле. На первый взгляд этот пример отличается от рассмотренных выше физических осцилляторов. Мы уже привыкли, что для существования гармонических колебаний необходимо наличие возвращающей силы (или момента силы, или напряжения, как в контуре), которая растет пропорционально отклонению системы от положения равновесия. В данном случае такой “силы” нет, однако получаемое уравнение оказывается совпадающим с уравнением гармонического осциллятора. Пусть электрон движется в однородном магнитном поле  $H_0$ , направленном вдоль оси  $z$ . Будем предполагать,

что скорость электрона может быть достаточно большой и пользоваться релятивистскими уравнениями движения. Они имеют вид

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{e}{c}[\mathbf{v}, H_0 \mathbf{z}^0], \quad (1.29)$$

где  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  — импульс электрона,  $e$  — абсолютная величина его заряда,  $c$  — скорость света,  $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$  — релятивистская масса,  $m_0$  — масса покоя,  $\mathbf{z}^0$  — единичный вектора в направлении оси  $z$ . В правой части (1.29) стоит сила Лоренца, действующая на электрон со стороны магнитного поля. Ее составляющая вдоль магнитного поля равна нулю, поэтому продольная компонента импульса сохраняется  $p_z = \text{const}$ . Легко видеть, что сохраняется также величина (но не направление!) полного импульса. Чтобы показать это, умножим (1.29) скалярно на  $\mathbf{p}$ . Тогда в левой части получаем  $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = (1/2)dp^2/dt$ , а в правой части  $\mathbf{p} \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{z}^0] = m\mathbf{z}^0 \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{v}] = 0$ . Таким образом,  $p^2 = \text{const}$ . Отсюда следует, что масса  $m$  в процессе движения также остается неизменной, и тогда в уравнении (1.29) ее можно вынести из под знака производной, после чего переписать это уравнение, разделив продольное и поперечное движения частицы, в виде

$$\dot{v}_x = -\omega_c v_x, \quad \dot{v}_y = \omega_c v_y \quad (1.30)$$

и  $v_z = \text{const}$ . Здесь введена величина  $\omega_c$  с размерностью частоты:

$$\omega_c = \frac{eH_0}{mc} = \frac{eH_0 \sqrt{1-v^2/c^2}}{m_0 c}, \quad (1.31)$$

которая называется *циклотронной* частотой вращения электрона.

Введем вместо двух функций  $x(t)$  и  $y(t)$  одну комплексную функцию  $Z(t) = x(t) + iy(t)$ . Умножим второе уравнение в (1.30) на мнимую единицу и сложим с первым; в результате получаем

$$\ddot{Z} + i\omega_c \dot{Z} = 0. \quad (1.32)$$

Уравнение (1.32) отличается от уравнения гармонического осциллятора, но оно также имеет колебательные решения. Чтобы показать это, проинтегрируем (1.32) один раз по времени:  $\dot{Z} + i\omega_c Z = Z_0$ , ( $Z_0$  — постоянная интегрирования) и введем новую переменную  $\tilde{Z} = Z - Z_0$ . Для нее получается уравнение

$$\dot{\tilde{Z}} + i\omega_c \tilde{Z} = 0, \quad (1.33)$$

решение которого есть  $\tilde{Z}(t) = \tilde{Z}(0) \exp(-i\omega_c t)$ . Таким образом,  $Z(t) = Z_0 + \tilde{Z}(0) \exp(-i\omega_c t)$  и, разделяя действительную и мнимую части  $Z(t)$ , получаем для поперечных координат электрона формулы

$$x(t) = x_0 + r_c \cos(\omega_c t - \varphi_0), \quad y(t) = y_0 - r_c \sin(\omega_c t - \varphi_0), \quad (1.34)$$

где  $Z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $r_c = |\tilde{Z}|$ ,  $\varphi_0 = \text{Arg } \tilde{Z}$ . Соотношения (1.34) показывают, что в плоскости  $(x, y)$ , поперечной к направлению магнитного поля, электрон вращается по окружности радиуса  $r_c$  с центром в точке с координатами  $(x_0, y_0)$ , причем вращение происходит по часовой стрелке. Угловая скорость вращения равна циклотронной частоте. С учетом продольного движения, траектория электрона есть винтовая линия. Положение центра орбиты и ее радиус определяются начальными условиями. В частности легко показать, что радиус орбиты связан с сохраняющейся величиной поперечной скорости электрона соотношением  $r_c = v_{\perp}/\omega_c$ .

Из уравнения (1.32) можно получить и непосредственно уравнение осциллятора. Для этого сделаем подстановку  $Z(t) = \exp(-i\omega_c t/2)Y(t)$ ; для функции  $Y(t)$  имеем

$$\ddot{Y} + (\omega_c/2)^2 Y = 0, \quad (1.35)$$

что совпадает с (1.2), если положить  $\omega_0 = \omega_c/2$ .

Поведение совокупности большого числа электронов в постоянном магнитном поле во многом аналогично поведению системы большого числа несвязанных между собой осцилляторов. Чтобы подчеркнуть эту аналогию, используют специальный термин *электроны — осцилляторы*. Среда из электронов-осцилляторов определяет свойства таких сложных систем, как плазма в магнитном поле (циклотронный резонанс и спектр возможных электромагнитных волн [14, 15]), металлы (геликоидальные и магнитоплазменные волны [14, § 88-89]) и многих других. Если следовать законам квантовой механики, необходимо учитывать то, что энергия осциллятора квантуется, то есть может принимать только определенные дискретные значения. Квантовые уровни энергии осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$  равны

$$E_0 = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2}) \quad (1.36)$$

( $n$  — номер уровня). Для электрона в магнитном поле  $\omega_0 = \omega_c$ , формула (1.36) в этом случае определяет значения уровней Ландау [16] — дискретных уровней энергии вращения. Отметим, что квантуется только поперечное к магнитному полю движение, так как продольные импульс и связанная с ним кинетическая энергия могут принимать произвольные, определяемые начальными условиями, значения.

Существование уровней Ландау приводит к таким макроскопическим эффектам, как диамагнетизм Ландау [17], квантовые осцилляции проводимости металлов (эффект Шубникова-де Гааза) [14, § 90], квантовый эффект Холла [18, 19].

В электронике СВЧ среда из электронов — осцилляторов используется в качестве активного вещества для генерации и усиления мощного электромагнитного излучения. На этом принципе работают, в частности, *лазеры на циклотронном резонансе* (МЦР) [20]. Простейшим МЦР - генератором является гиромонотрон (рис. 1.3,а). В нем электронный поток

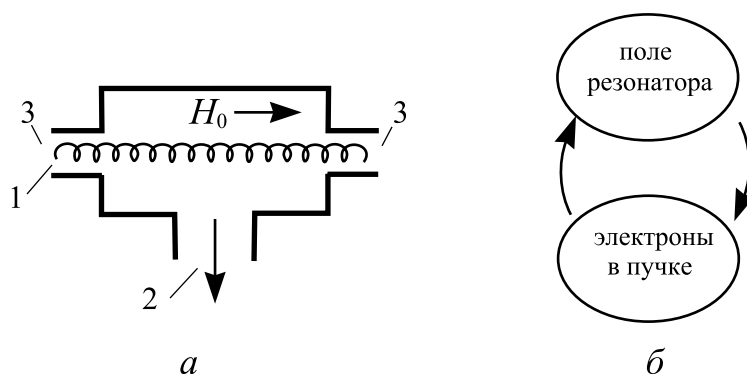


Рис. 1.3. Простейший мазер на циклотронном резонансе — МЦР-монотрон. *а* — схематическое устройство монотрона [20]: 1 — винтовой электронный пучок (показана траектория только одного электрона), 2 — вывод электромагнитной энергии, 3 — отверстия в стенках резонатора для транспортировки пучка; *б* — качественная картина самосогласованного взаимодействия пучка с полем в резонансном электронном генераторе [21].

движется в сильном продольном магнитном поле через металлическую полость, называемую *резонатором*. Поперечная компонента скорости электронов создается за счет специальной конструкции электронной пушки, поэтому каждый электрон движется по винтовой траектории. Все вместе электроны образуют среду из несвязанных между собой (если не учитывать поле пространственного заряда электронов) осцилляторов.

Предназначение резонатора двоякое. С одной стороны, он поддерживает колебания электромагнитного поля, которое действует на электроны и индуцирует в пучке переменный ток. Этот ток, в свою очередь, возбуждает в резонаторе дополнительное поле, которое при определенных условиях складывается с первичным полем, усиливая его. Таким образом, электромагнитное поле действует на электроны, а электроны возбуждают поле в резонаторе. Говорят, что происходит самосогласованное взаимодействие электронного пучка и электромагнитного поля. Сказанное схематически иллюстрируется рисунком 1.3, *б*<sup>3</sup>.

Представленная на этом рисунке схема лежит в основе работы всех резонансных электронных СВЧ генераторов [21]. Гиромонотрон выделяется среди них тем, среда из осцилляторов состоит из вращающихся в постоянном магнитном поле электронов. При взаимодействии с полем резонатора, осцилляторы могут как забирать у него энергию, так и отдавать ее благодаря процессам индуцированного (вынужденного) поглощения или индуцированного излучения, точно также, как это делают атомы рабочего

<sup>3</sup>Интересно отметить, что колебания поля в резонаторе также описываются уравнением гармонического осциллятора, на который действует внешняя сила.

вещества в оптических лазерах. Наглядная качественная картина работы МЦР-монотрона, опирающаяся на аналогию между поведением классического и квантового осцилляторов, была дана в лекциях [20]<sup>4</sup>. Известно, что если квантовая система имеет дискретные уровни  $E_n$ , ее переход из начального состояния  $n$  в конечное состояние  $m$  под действием переменного поля сопровождается поглощением или излучением кванта поля с частотой  $\omega_{n,m}$ , определяемой формулой Бора

$$E_n - E_m = \pm \hbar \omega_{n,m}. \quad (1.37)$$

Знак плюс соответствует излучению кванта, а знак минус — его поглощению. Для осциллятора энергетические уровни определяются формулой (1.36). Если процессы излучения преобладают над процессами поглощения, то в целом энергия переходит от пучка к полю, усиливая его. Легко показать, что в среде из линейных осцилляторов энергия может только поглощаться. Связано это с тем, что спектр энергий линейного осциллятора *эквидистантный*, т.е. расстояние между любыми двумя соседними уровнями одинаково и равно, как следует из (1.36),  $\Delta E = \hbar \omega_0$ . Взаимодействие наиболее эффективно, если переходы происходят между соседними уровнями, когда номер уровня  $n$  меняется на единицу, из (1.37) при этом следует, что расстояние между уровнями должно равняться энергии кванта, или  $\omega_0 \approx \omega$  ( $\omega$  — частота поля в резонаторе). По законам квантовой механики [22] вероятность перехода  $n \rightarrow n+1$  с поглощением кванта пропорциональна величине  $(n+1)|E(\omega_{n+1,n})|^2$ , а вероятность перехода  $n \rightarrow (n-1)$  с излучением кванта пропорциональна величине  $n|E(\omega_{n,n-1})|^2$ , где  $|E(\omega)|$  — амплитуда колебаний поля на частоте  $\omega$ . Таким образом, интенсивность энергообмена между электронами и полем  $I$  определяется выражением

$$I \sim n|E(\omega_{n,n-1})|^2 - (n+1)|E(\omega_{n+1,n})|^2. \quad (1.38)$$

Если спектр эквидистантный, то  $\omega_{n,n-1} = \omega_{n+1,n}$ , и из (1.38) получаем  $I < 0$ , т.е. энергия может только поглощаться.

Может показаться, что уровни Ландау образуют эквидистантный спектр и МЦР-монотрон работать не может, однако это не так. Дело в том, что циклотронная частота  $\omega_c$  сама зависит от энергии электрона через релятивистскую массу  $m$ , поэтому соотношение (1.36) нужно рассматривать как неявную формулу для определения энергии, так как она входит и в левую и в правую части (1.36). Следовательно энергетический спектр среды из электронов — осцилляторов является неэквидистантным. Расстояния между соседними уровнями лишь приближенно равны  $\hbar \omega_c$ , по мере увеличения энергии спектр сгущается (рис. 1.4). На классическом языке это эквивалентно уменьшению частоты вращения электронов с ростом их

<sup>4</sup>Для понимания следующего материала следует знать основы квантовой физики. Впрочем, он может быть пропущен без ущерба для дальнейшего изложения.

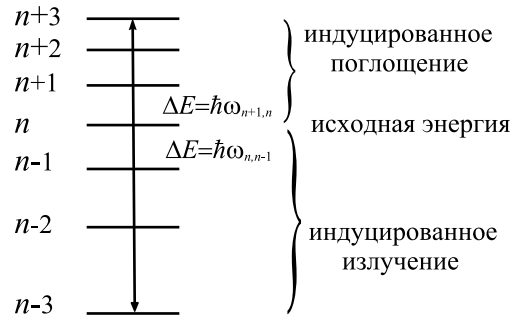


Рис. 1.4. Спектр уровней Ландау для среды из электронов—осцилляторов [20].

скорости. Действительно, при  $\beta = v/c \ll 1$ , формулу (1.31) можно приближенно записать в виде

$$\omega_c \approx \frac{eH_0}{m_0c} (1 - \beta^2/2), \quad (1.39)$$

что подтверждает сказанное. Поэтому поглощение (переходы  $n \rightarrow n + 1$ ) и излучение (переходы  $n \rightarrow n - 1$ ) происходят на разных, хотя и очень близких частотах

$$\omega_{n+1,n} - \omega_{n,n-1} \approx - \left( \frac{\hbar\omega_c}{E_n} \right) \frac{\beta^2}{2} \omega_c.$$

Если интенсивность спектра переменной силы  $|E(\omega)|$  на частотах  $\omega_{n+1,n}$  и  $\omega_{n,n-1}$  разная, то вероятность излучения может превысить вероятность поглощения. Из выражения (1.38) видно, что для этого, во всяком случае, требуется выполнение условия  $d|E(\omega_c)|^2/d\omega > 0$ .

У нас нет возможности останавливаться на этом рассмотрении более подробно, детали простых, но красивых оценок, которые позволяют определить основные параметры и рабочие характеристики МЦР-генераторов можно найти в лекциях [20]. Здесь упомянем только одно обстоятельство. На самом деле величина элементарного кванта энергии  $\hbar\omega_c$ , которым обмениваются пучок и поле, настолько мала по сравнению с энергией, излучаемой монотроном, что квантовые эффекты не играют в его работе практически никакого значения. Взаимодействие носит чисто классический характер и большинство существующих теорий МЦР-приборов используют классические, а не квантовые законы. Привлечение квантовой аналогии оказывается, однако, очень полезным для выяснения сути явления и проведения оценок. Такая ситуация характерна для многих задач теории колебаний и волн.

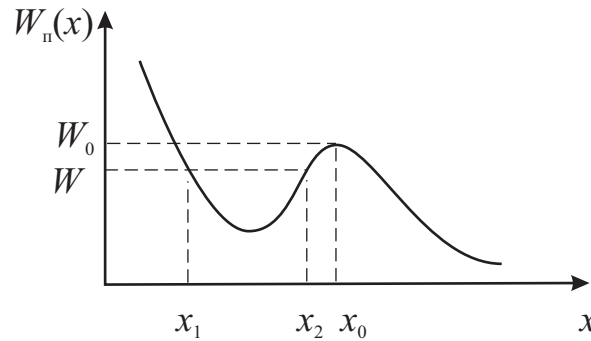


Рис. 1.5. Колебания частицы в потенциальной яме;  $x_1$  и  $x_2$  — точки поворота.

## 1.6 Изохронные и неизохронные колебания

В предыдущем параграфе показано, что частота электрона — осциллятора зависит от его энергии. В таких случаях говорят, что колебания осциллятора *неизохронные*. В противном случае, когда такой зависимости нет, осциллятор называется *изохронным*. В уравнении (1.2) частота  $\omega_0$  считается константой, поэтому колебания обычного линейного осциллятора *изохронные*. Если уравнение осциллятора нелинейное, то его колебания чаще всего (но не всегда) будут *неизохронными*.

Рассмотрим этот вопрос более подробно на примере одномерного движения частицы массы  $m$  в поле с потенциальной энергией, показанной на рис. 1.5. Очевидно, что если полная энергия частицы  $W$  меньше, чем  $W_0$  — высота максимума потенциальной кривой — и она находится слева от точки  $x_0$ , то частица будет совершать колебания между двумя точками  $x_1$  и  $x_2$ , которые можно найти из решения уравнения

$$W_{\text{п}}(x) = W. \quad (1.40)$$

Точки  $x_1$  и  $x_2$  называются точками поворота. В системе сохраняется энергия  $m\dot{v}^2/2 + W_{\text{п}}(x) = W = \text{const}$ , поэтому

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2[W - W_{\text{п}}(x)]/m}. \quad (1.41)$$

Два знака корня соответствуют движению частицы слева направо и справа налево. Для двух этих участков траектории в каждой точке  $x$  скорости равны друг другу по абсолютной величине, поэтому время движения от  $x_1$  до  $x_2$  равно времени движения от  $x_2$  до  $x_1$ . Используя уравнение (1.41), можно записать для времени одного полного цикла, т.е. для периода колебаний

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2[W - W_{\text{п}}(x)]/m}}. \quad (1.42)$$



Из этой формулы следует, что для произвольной потенциальной функции  $W_{\Pi}(x)$  период колебаний, вообще говоря, должен зависеть от энергии  $W$ . Эта зависимость обусловлена, во-первых, наличием  $W$  в знаменателе подинтегрального выражения, а во-вторых, тем, что пределы интегрирования также зависят от энергии, так как они есть результат решения уравнения (1.40).

Обратимся к примерам. Самый простой случай, это линейный осциллятор, для него  $W_{\Pi}(x) = kx^2/2$ . Поскольку  $W_{\Pi}(x)$  — четная функция и точки поворота  $x_{1,2} = \pm a$  симметрично расположены относительно нуля, то интеграл в (1.42) можно брать только по положительным значениям  $x$ , а результат умножить на два. Подставляя соотношение  $ka^2/2 = W$  вместе с выражением для  $W_{\Pi}(x)$  в (1.42), получаем

$$T = 4\sqrt{m/k} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\sqrt{m/k} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

Как и следовало ожидать, получился тривиальный результат: линейный осциллятор совершает изохронные колебания с периодом  $T = 2\pi/\omega_0$ .

Второй пример — маятник, причем будем считать, что угол отклонения от нижнего положения равновесия может быть большим (но не превышать по модулю  $\pi$ , чтобы движение маятника было колебательным). Потенциальная энергия равна  $W_{\Pi}(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi)$ , и, используя аналогию между грузиком на пружинке и маятником, записываем выражение для периода колебаний

$$T = 4 \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2[W - mgl(1 - \cos \varphi)]/I}}. \quad (1.43)$$

Максимальный угол отклонения  $\varphi_m$  находится из условия  $W = mgl(1 - \cos \varphi_m)$ , подставляя которое в (1.43), получаем

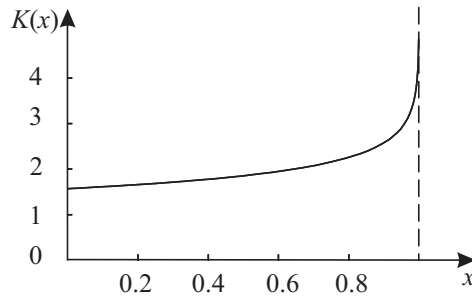
$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_m)}} = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_m/2) - \sin^2(\varphi/2)}}, \quad (1.44)$$

$\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . Обозначим  $\tilde{\kappa} = \sin(\varphi_m/2) = \sqrt{W/(2mgl)}$ ,  $0 < \tilde{\kappa} < 1$ , и сделаем замену переменных  $\sin(\varphi/2) = \tilde{\kappa}t$ , тогда формулу (1.44) можно преобразовать к виду

$$T = \frac{4}{\omega_0} K(\tilde{\kappa}^2). \quad (1.45)$$

где  $K(x)$  — полный эллиптический интеграл первого рода [23]

$$K(x) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-xt^2}}. \quad (1.46)$$

Рис. 1.6. Функция  $K(x)$ 

Вид функции  $K(x)$  показан на рис. 1.6, из него следует, что период колебаний математического маятника увеличивается с ростом амплитуды колебаний, причем в пределе  $\varphi_m \rightarrow \pi$ , когда маятник близко подходит к верхнему положению равновесия, период стремится к бесконечности. Таким образом, математический маятник совершает неизохронные колебания.

Полезно определить поправку к периоду линейных колебаний  $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ , если  $\varphi_m$  мало, но конечно, что соответствует случаю  $\xi \approx \varphi/2 \ll 1$ . В этом пределе в формуле (1.46) можно положить  $(1 - \xi^2 t^2)^{-1/2} \approx 1 + \xi^2 t^2/2$ , тогда приближенно

$$K(\xi^2) \approx \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\xi^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2 dx}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right).$$

Подставляя этот результат в формулу (1.45) и выражая  $\xi$  через  $\varphi_m$ , получаем

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\varphi_m^2}{16}\right). \quad (1.47)$$

Из формулы (1.47) следует, что поправка к периоду за счет нелинейности колебаний мала: маятник можно считать изохронным при выполнении условия  $\varphi_m^2/16 \ll 1$ . При угле в  $30^\circ$  относительное изменение периода составляет 0,017, то есть не более двух процентов. Таким образом, при малых отклонениях колебания маятника можно считать изохронными, а при достаточно больших углах этого делать уже нельзя.

Итак, *линейные* колебания изохронны. Однако это не значит, что таковыми будут любые *малые* колебания. Рассмотрим потенциальную энергию вида  $W_{\text{п}}(x) = c|x|^n$ , где  $c > 0$  — константа, а  $n > 1$  — показатель степени, который может быть нецелым. Для такого потенциала точка минимума  $x = 0$ , малые колебания вблизи минимума подчиняются закону  $m\ddot{x} + cn \operatorname{sign}(x)|x^{n-1}| = 0$ . Это уравнение нелинейное, если  $n \neq 2$ . Период колебаний определяется по формуле (1.42), в которую следует подставить  $x_{1,2} = \pm a$ ,  $W = ca^n$ ,  $a$  — максимальное отклонение частицы от нуля. После

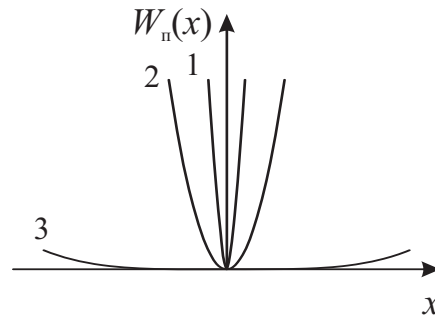


Рис. 1.7. Потенциальная энергия  $W_n(x) = c|x|^n$ : 1 —  $1 < n < 2$ , 2 —  $n = 2$ , 3 —  $n > 2$ .

простых преобразований получаем

$$T = 2\sqrt{2mc^{-(n+2)/(2n)}} W^{-(n-2)/2n} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}.$$

Интеграл есть число порядка единицы, зависящее только от  $n$ , поэтому  $T(W) \sim W^{-(n-2)/2n}$ . При  $n = 2$ , как и должно быть, колебания изохронны. Если  $1 < n < 2$ , то с уменьшением энергии период уменьшается, стремясь к нулю при  $W \rightarrow 0$ , если же  $n > 2$ , то с уменьшением энергии период, увеличивается, стремясь в нулевом пределе к бесконечности. Разное поведение системы в этих двух случаях объясняется различием в форме графика функции потенциальной энергии (рис. 1.7): при  $1 < n < 2$  с уменьшением энергии расстояние между точками поворота уменьшается быстрее, чем средняя скорость частицы на интервале  $[-a, a]$ , при  $n > 2$ , расстояние между точками поворота уменьшается, наоборот, медленнее, чем средняя скорость.

Этот пример показывает, что ответ на вопрос, будут ли изохронными колебания зависит не от того, являются они малыми или нет, а от того, являются колебания линейными, или они существенно нелинейны.

## 1.7 Энергетические соотношения для усредненных величин. Теорема вириала

При решении задач в которых фигурирует энергия, необходимо всегда конкретизировать вид осциллятора, так как входящие в уравнения коэффициенты зависят от его физической природы. Выберем в качестве примера осциллятора грузик на пружинке. Его энергия состоит из суммы кинетической энергии движения грузика  $W_k = m\dot{x}^2/2$  и потенциальной энергии пружины  $W_n = kx^2/2$ . Используя найденное решение (1.6), полу-

чаем

$$W_{\text{к}} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)], \quad W_{\text{п}} = \frac{kA^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]. \quad (1.48)$$

Из этих формул видно, что и кинетическая и потенциальная энергии меняются с частотой, в два раза большей, чем частота изменения координаты. Полная энергия  $W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = m\omega_0^2 A^2 = kA^2/2$ , естественно, сохраняется. Видно, что энергия, запасенная в гармоническом осцилляторе, пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний.

Наряду с соотношениями для мгновенных значений энергии, в теории важную роль играют формулы, связывающие усредненные величины. Для их вывода сделаем несколько определений.

Функция  $f(t)$  действительной переменной  $t$  называется периодической, если существует такое число  $T$ , что для любого  $t$  выполняется  $f(t+T) = f(t)$ . Очевидно, что если  $T$  — период, то периодом будут также  $2T$ ,  $3T$ , и т.д. Если функция  $f(t)$  кусочно непрерывна и отлична от константы, то она имеет единственный наименьший период, который для краткости называют просто периодом.

Средним значением периодической функции называется число

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt. \quad (1.49)$$

Черта сверху обычно означает операцию усреднения за период. Очевидно, что результат усреднения не зависит от конкретного значения  $t$  в пределах интегрирования, поэтому их чаще всего кладут равными 0 и  $T$ .

Операцию усреднения полезно ввести и для непериодической функции. Соответствующее определение имеет вид

$$\overline{f(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(t) dt. \quad (1.50)$$

**Задача 1.1.** Покажите, что для периодической функции определение (1.50) приводит к тому же результату, что и определение (1.49).

**Задача 1.2.** Докажите формулы

$$\overline{\sin \omega t} = \overline{\cos \omega t} = 0, \quad \overline{\sin \omega t \cos \omega t} = 0, \quad \overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t} = 1/2.$$

**Задача 1.3.** Покажите, что если  $f(t)$  — периодическая функция, то  $\overline{\dot{f}(t)} = 0$ . Покажите, что этот результат сохраняет силу для непериодической функции  $f(t)$ , если она вместе со своей первой производной ограничена.

Вычислим средние значения кинетической и потенциальной энергий. Применяя операцию усреднения к формулам (1.48) и используя результаты задачи 1.2, легко находим

$$\overline{W}_k = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}, \quad \overline{W}_n = \frac{kA^2}{4}. \quad (1.51)$$

Поскольку  $\omega_0^2 = k/m$ , то  $\overline{W}_k = \overline{W}_n = m\omega_0^2 A^2/4$ . Итак, для гармонического осциллятора  $\overline{W}_k = \overline{W}_n = W/2$ . Это обстоятельство играет важную роль в определении статистических свойств газа из осцилляторов, как в классическом, так и в квантовом случаях. Равенство средних значений потенциальной и кинетической энергий характерно только для потенциальной энергии в виде параболы, т.е. только для гармонического осциллятора.

Равенство средних значений является частным случаем известной в механике теоремы *вириала* [24]. В простейшем виде она формулируется для одномерного движения частицы под действием силы  $F(x)$ . Умножим уравнение Ньютона  $m\ddot{x} = F(x)$  на  $x(t)$  и воспользуемся формулой  $x\ddot{x} = d(x\dot{x})/dt - \dot{x}^2$ . Это приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt}(mx\dot{x}) - m\dot{x}^2 = xF(x). \quad (1.52)$$

Усредним (1.52) по времени и, пользуясь результатом задачи 1.3, получаем

$$2\overline{W}_k + V = 0, \quad (1.53)$$

где  $V = \overline{xF(x)}$  — вириал системы [24]. Операция усреднения правомерна в двух случаях:

1. движение системы периодическое;
2. в процессе движения координата и скорость системы остаются ограниченными.

Мы предполагаем, что одно из этих условий выполнено.

Вернемся теперь к задаче о движении частицы в потенциальном поле  $W_n(x) = c|x|^n$ . Вычисляя вириал, получаем,  $V = -x \overline{dW_n/dx} = -n\overline{W}_n$ . Поэтому можно записать  $2\overline{W}_k - n\overline{W}_n = 0$  и  $\overline{W}_k + \overline{W}_n = W$ , откуда следует

$$\overline{W}_k = \frac{nW}{n+2}, \quad \overline{W}_n = \frac{2W}{n+2}. \quad (1.54)$$

Видно, что при  $n > 2$  справедливо соотношение  $\overline{W}_k > \overline{W}_n$ , а при  $1 < n < 2$ , наоборот, соотношение  $\overline{W}_k < \overline{W}_n$ . Равенство усредненных энергий выполняется только для гармонического осциллятора.

## Лекция 2

# Осциллятор как динамическая система

*Динамические системы: основные определения и классификация. Примеры систем на фазовой плоскости. Линейный осциллятор: особая точка типа центр. Положения равновесия и особые точки. Фазовый портрет системы хищник — жертва. Особая точка типа седло.*

### 2.1 Динамические системы: основные определения и классификация

Уравнение гармонического осциллятора позволяет найти его состояние, т.е. координату и скорость в любой момент времени, если эти величины известны в некоторый начальный момент (при  $t = t_0$ ). Согласно этому свойству, осциллятор принадлежит к классу *динамических систем*. Понятие динамической системы лежит в основе всей современной теории колебаний, включая нелинейную динамику и теорию хаоса. Термины и методы теории динамических систем будут постоянно использоваться в этой книге, поэтому цель данной лекции — дать основные определения, касаясь, в основном, тех понятий, которые используются именно в линейной теории колебаний и волн. Теорию нелинейных динамических систем можно изучить, например, по книгам [25–27]<sup>1</sup>. Здесь также будет рассмотрен один из главных методов теории динамических систем используемых при исследовании систем второго порядка, к которым относится и осциллятор, — метод фазовой плоскости. Метод фазовой плоскости был развит в работах Л.И. Мандельштама и его учеников и замечательно изложен в лекциях [28] и книге [25].

---

<sup>1</sup>Эти вопросы будут являться также предметом других книг серии “Лекции по теории колебаний и волн”, к которой принадлежит этот учебник.

Интуитивное определение динамической системы базируется на понятиях *состояния* и детерминированной, т.е. однозначно предопределенной эволюции во времени системы любой природы. Хотя существуют более строгие математические определения (см., например, [5]), мы воспользуемся определением динамической системы, понятным физикам, которое принадлежит В.С. Афраймовичу [29]: “Динамическая система — математический объект, соответствующий реальным физическим (химическим, биологическим и др.) системам, эволюция во времени которых на бесконечном интервале времени однозначно определяется начальным состоянием. Можно сказать, что реальному процессу соответствует динамическая система, если этот процесс удастся описать с помощью системы уравнений (разностных, дифференциальных, интегральных и т.д.), допускающих существование на бесконечном интервале времени единственного решения для любого начального условия.”

Таким образом, динамическая система должна иметь единственное решение на бесконечности. Не любое дифференциальное уравнение, даже такое, для которого выполняются условия существования и единственности решения, определяет динамическую систему; например уравнение

$$\dot{x} = x^2 \quad (2.1)$$

имеет решение  $x(t) = x_0/(1 - x_0 t)$ , подчиняющееся при  $t = 0$  начальному условию  $x = x_0$ . Если  $x_0 > 0$ , то при  $t = 1/x_0$  решение обращается в бесконечность и дальше неопределено. Значит уравнение (2.1), имеющее само по себе смысл для всех начальных значений  $x_0$ , не отвечает никакой динамической системе. Интересно отметить, что если ограничить множество возможных состояний системы условием  $x < 0$ , то (2.1) становится динамической системой. Таким образом, чтобы определить динамическую систему, необходимо задать не только закон ее эволюции, но и множество ее возможных состояний.

Детерминированное описание динамической системы подразумевает, что случайные флуктуации, существующие в любой реальной системе и описываемые вероятностными законами, не принимаются во внимание. Поэтому такой подход справедлив только если эти флуктуации малы и не могут существенно повлиять на поведение системы.

Данное выше определение динамической системы неполно, пока не определено, что такое состояние. Под состоянием системы в момент времени  $t$  будем понимать значения физических (соответственно химических, биологических и т.д.) величин, количество которых достаточно для того, чтобы определить эти же величины в последующие моменты времени. Такие величины называются *динамическими переменными*. Например, для осциллятора состояние системы однозначно определено заданием его координаты и скорости.

Множество всех возможных состояний системы называется *фазовым пространством*. На фазовом пространстве должно быть определено рас-

стояние между любыми двумя элементами. Если число динамических переменных конечно и равно  $N$ , то фазовое пространство имеет конечную размерность, совпадающую с  $N$ . В таком случае фазовое пространство может быть вложено в обычное евклидово пространство конечной размерности. Системы с фазовым пространством конечной размерности называются *конечномерными* или *сосредоточенными*. Примеры из лекции 1 относятся к сосредоточенным системам.

Во многих случаях состояние системы определяется заданием одной или нескольких функций. Например, колебания рояльной струны при некоторой идеализации описываются уравнением  $y_{tt} - v^2 y_{xx} = 0$ , где  $y(x, t)$  — поперечное смещение струны от положения равновесия,  $v$  — скорость поперечных волн, нижние индексы означают дифференцирование по соответствующим независимым переменным. Чтобы рассчитать колебания струны, необходимо при  $t = 0$  задать две функции — начальное смещение  $y(x, 0)$  и начальную поперечную скорость  $y_t(x, 0)$ , т.е. бесконечный набор динамических переменных. Системы, обладающие таким свойством, называются *бесконечномерными* или *распределенными*. Сосредоточенные системы чаще всего описываются с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, а распределенные системы — с помощью дифференциальных уравнений в частных производных.

Кроме этого, динамические системы подразделяются на системы с непрерывным временем и системы с дискретным временем. В первом случае параметр  $t$  пробегает все возможные значения от начального  $t_0$  до бесконечности, во втором случае  $t$  принимает определенные дискретные значения. Например, в биологии дискретность времени может быть связана с сезонностью и годовыми циклами развития. Последовательные состояния системы во времени можно просто нумеровать индексом, принимающим целые значения. Поведение системы с дискретным временем описывается отображениями. Чрезвычайно популярна простая модель, описывающая развитие биологического вида, так называемое логистическое отображение  $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ , где  $\lambda$  — положительный действительный параметр. Несмотря на кажущуюся простоту, логистическое отображение демонстрирует очень сложную динамику, исследование которой внесло огромный вклад в развитие современной теории динамического хаоса [30].

Динамические системы разделяются также на *автономные* и *неавтономные*. Автономным системам отвечают дифференциальные или разностные уравнения, в которые время не входит явным образом. Это значит, что параметры физической системы не зависят от времени и на нее не действуют внешние силы. Неавтономные системы — это системы, в уравнения которых время входит явно.

Рассмотрим конечномерную динамическую систему с непрерывным временем. Любая точка, принадлежащая ее фазовому пространству определяет возможное начальное состояние. Эволюция состояния системы системы во времени сопровождается изменением ее динамических переменных



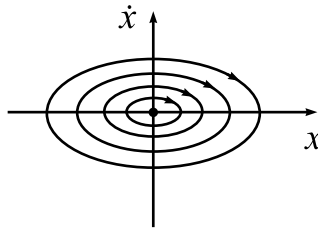


Рис. 2.1. Особая точка типа центр. Стрелки показывают направление движения изображающей точки.

$x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , при этом точка, изображающая состояние системы в фазовом пространстве, перемещается вдоль некоторой кривой, которая называется *фазовой траекторией*. Для систем с дискретным временем фазовой траекторией называют упорядоченное множество состояний системы  $x_0, x_1, \dots$ , которые она принимает в соответствии с законом эволюции.

**Задача 2.1.** Исходя из определения динамической системы, покажите, что ее фазовые траектории не могут пересекаться.

## 2.2 Особая точка типа центр

Линейный осциллятор — динамическая система с непрерывным временем и размерностью фазового пространства, равной двум. В качестве динамических переменных выступают координата осциллятора  $x$  и его скорость<sup>2</sup>  $\dot{x}$ . Поскольку обе эти величины могут принимать произвольные действительные значения, то фазовым пространством линейного осциллятора является плоскость  $R^2$ , на которой можно ввести декартовую систему координат, откладывая вдоль осей  $x$  и  $\dot{x}$ . Картину фазовых траекторий осциллятора проще всего получить, записав закон сохранения энергии в виде

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2W/k})^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\sqrt{2W/m})^2} = 1, \quad (2.2)$$

откуда следует, что фазовые траектории являются эллипсами с полуосями  $\sqrt{2W/k}$  и  $\sqrt{2W/m}$ . При изменении энергии осциллятора  $W$  размер эллипса также меняется, так что вся совокупность траекторий представляет собой систему вложенных друг в друга эллипсов, охватывающих начало координат (рис. 2.1). Помимо этого, есть еще одна траектория  $x(t) \equiv 0$ ,  $\dot{x}(t) \equiv 0$ , отвечающая осциллятору, покоящемуся в положении равновесия.

Картина фазовых траекторий вблизи положения равновесия гармонического осциллятора называется *особой точкой типа центр*.

<sup>2</sup>Для механических систем часто вместо скорости удобно использовать импульс  $p = m\dot{x}$ .

Наличие замкнутых фазовых траекторий говорит о том, что движение системы является периодическим. Действительно, если в момент  $t_0 + T$  изображающая точка оказывается в той же точке фазового пространства, в которой она была в момент  $t_0$ , то дальше, на временном интервале  $[t_0 + 2T, t_0 + 3T]$ , она повторит движение на интервале  $[t_0 + T, t_0 + 2T]$ , что и доказывает сделанное утверждение. Разумеется это свойство выполняется для любых автономных динамических систем, как с непрерывным, так и с дискретным временем, независимо от их размерности.

### 2.3 Положения равновесия и особые точки

Динамическая система второго порядка с непрерывным временем описывается в общем случае системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (2.3)$$

(для упрощения записи мы обозначили  $\dot{x} = y$ ). Предположим, что  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — аналитические функции своих переменных. Решения системы уравнений

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0 \quad (2.4)$$

определяют положения равновесия динамической системы: если в некоторый момент  $x = x_0, y = y_0$ , где  $(x_0, y_0)$  — решение (2.4), то система и дальше будет оставаться в этом состоянии. Разделим второе уравнение в (2.3) на первое, и получим дифференциальное уравнение, которому подчиняются траектории на фазовой плоскости:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (2.5)$$

Каждая фазовая траектория динамической системы (2.3) является либо целой интегральной кривой уравнения (2.5), либо ее частью. Если правая часть в (2.5) с некоторой точке фазовой плоскости удовлетворяет условию существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения [5], то через эту точку проходит единственная интегральная кривая уравнения (2.5). Такая точка называется неособой. Условия существования и единственности нарушаются в точках, где выполняются уравнения (2.4). Таким образом, положения равновесия на фазовой плоскости являются одновременно особыми точками уравнения (2.5). По этой причине положения равновесия удобно классифицировать по типу особой точки. Через особую точку может проходить произвольное число интегральных кривых, либо не проходить ни одной [25]. В первом случае особые интегральные кривые состоят из кусков нескольких фазовых траекторий, во втором сама особая точка дает отдельную траекторию ( $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$ ).

Как было показано в предыдущем параграфе, линейному осциллятору отвечает особая точка второго типа, называемая центром. В случае центра система фазовых траекторий состоит из вложенных друг в друга гладких замкнутых кривых, окружающих положение равновесия. Центр присутствует на фазовой плоскости всех систем, для которых линеаризованные уравнения вблизи положения равновесия сводятся к уравнению линейного осциллятора (1.2) и у которых существует закон сохранения [27, 31]. Этот результат принадлежит А.М. Ляпунову, его доказательство выходит за рамки линейной теории.

Опираясь на это утверждение, можно сразу сказать, что рассмотренные в лекции 1 нелинейный маятник, грузик на нелинейной пружинке и колебательный контур также имеют центр на фазовой плоскости. При учете нелинейности замкнутые траектории уже не будут в точности эллипсами, однако картина траекторий вблизи центра будет топологически эквивалентна картине траекторий линейного осциллятора.

## 2.4 Фазовый портрет системы хищник-жертва

Поскольку численности популяция обоих видов не могут быть отрицательными ( $N_1 \geq 0$ ,  $N_2 \geq 0$ ), то фазовым пространством будет четверть плоскости ( $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0$ ). В § 1.3 установлено, что вблизи точки с координатами  $N_1^0 = \varepsilon_1/\gamma_2$ ,  $N_2^0 = \varepsilon_2/\gamma_1$  нелинейные уравнения (1.18) приводятся к виду уравнений линейного осциллятора. Покажем, что в этой точке на фазовой плоскости расположен центр. Для этого получим для уравнений (1.18) закон сохранения.

Удобно перейти к безразмерным координатам  $x = N_1/N_1^0$ ,  $y = N_2/N_2^0$ . Сделав такой переход в (1.18) и поделив второе из этих уравнений на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha x(y-1)}{y(x-1)},$$

где  $\alpha = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ . Это уравнение легко проинтегрировать:

$$(x - \ln x) + \alpha(y - \ln y) = C, \quad (2.6)$$

$C$  — постоянная интегрирования. При заданном  $C$  уравнение (2.6) определяет интегральную кривую на фазовой плоскости  $x, y$ . Подставляя в (2.6)  $x = 1 + \tilde{x}$ ,  $y = 1 + \tilde{y}$ ,  $|\tilde{x}|, |\tilde{y}| \ll 1$ , и разлагая логарифмы в ряд с помощью формулы  $\ln(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ , получаем, что вблизи особой точки закон сохранения принимает вид  $\tilde{x}^2/2 + \alpha\tilde{y}^2/2 = C$ . Это говорит о том, что фазовые траектории вблизи особой точки являются вложенными друг в друга эллипсами, т.е. мы имеем дело с центром. Впрочем, этот вывод можно было бы сделать сразу, на основании закона сохранения (2.6), используя сформулированный выше критерий существования центра. Фазовый портрет системы хищник — жертва приведен на рис. 2.2,а.

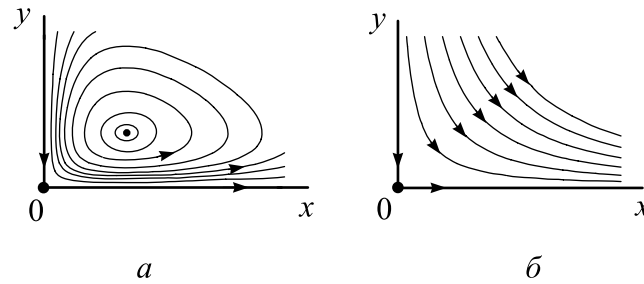


Рис. 2.2. Фазовый портрет системы хищник — жертва (а) и вид фазовых траекторий в окрестности особой точки типа седло (б)

**Задача 2.2.** Покажите, что на фазовой плоскости системы хищник — жертва все траектории, кроме положений равновесия и положительных полуосей  $x$  и  $y$  являются замкнутыми, т.е. отвечают периодическому движению.

## 2.5 Особая точка типа седло

Система хищник — жертва имеет на фазовой плоскости еще одну особую точку — положение равновесия  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 0$ . Исследуем поведение фазовых траекторий вблизи нее. Для такого анализа достаточно считать в уравнениях (1.18) величины  $N_1$  и  $N_2$  малыми и провести линеаризацию, отбросив в (1.18) произведения малых величин  $N_1 N_2$ . В результате такой процедуры получаем в безразмерных переменных:

$$\dot{x} = \varepsilon_1 x, \quad \dot{y} = -\varepsilon_2 y. \quad (2.7)$$

Решение этих уравнений не вызывает труда:  $x(t) = x_0 \exp(\varepsilon_1 t)$ ,  $y(t) = y_0 \exp(-\varepsilon_2 t)$  (считается, что при  $t = 0$  изображающая точка имеет на фазовой плоскости координаты  $(x_0, y_0)$ ). Из этого решения видно, что численность жертв экспоненциально нарастает, в то время, как численность хищников экспоненциально убывает с течением времени. Вдоль направления, параллельного оси  $y$ , точка приближается к положению равновесия, а вдоль направления, параллельного оси  $x$ , — убывает от него. Это поведение кардинально отличается от того, что мы имели в случае центра. Можно найти форму фазовой траектории вблизи особой точки. Для этого прологарифмируем выражения для  $x(t)$  и  $y(t)$  и приравняем  $t$  из обеих формул. Такая процедура приводит к соотношению  $\ln(x/x_0)/\varepsilon_1 + \ln(y/y_0)/\varepsilon_2 = \text{const}$ , из которого следует, что

$$x(t)y^\alpha(t) = x_0 y_0^\alpha = \text{const}, \quad (2.8)$$

где  $\alpha = \varepsilon_1/\varepsilon_2 > 0$ . Это уравнение показывает, что вблизи особой точки фазовые траектории имеют вид гипербол, причем роль асимптот выполняют оси координат.

Оси координат являются *особыми* траекториями. Чтобы исследовать их, предположим, что численность хищников при  $t = 0$  равна нулю. Подставив  $y = 0$  в уравнения, полученные после нормировки (1.18), находим  $\dot{y} = 0$ , т.е. равна нулю и скорость изменения хищников. Следовательно, величина  $y = 0$  не меняется со временем. В этом случае уравнение для  $x(t)$  из (1.18) совпадает с первым уравнением линеаризованной системы (2.7) и имеет то же самое решение  $x(t) = x_0 \exp(\varepsilon_1 t)$ . Это знаменитый закон Мальтуса, говорящий о том, что в условиях достаточного количества пищи и в отсутствии врагов вид размножается экспоненциально.

Найденное решение означает, что если в начальный момент изображающая точка лежит на положительной полуоси  $x$ , то она будет оставаться на ней всегда, удаляясь в пределе  $t \rightarrow \infty$  на бесконечность.

Можно рассматривать динамику в “обратном” времени, т.е. в пределе  $t \rightarrow -\infty$ . Очевидно, что при этом система приближается к нулевому положению равновесия, однако с течением времени изображающая точка движется все медленнее и медленнее, так что особая точка никогда не будет достигнута.

Таким образом, положительная полуось  $x$  (с выброшенной точкой  $x = 0$ ) представляет собой особую траекторию системы, двигаясь вдоль которой система выходит из положения равновесия при  $t = -\infty$  и удаляется на бесконечность при  $t \rightarrow \infty$ . Полное время движения по такой траектории бесконечно.

Аналогично исследуется случай, когда при  $t = 0$  точка лежит на оси  $y$ . В этом случае  $x(t) \equiv 0$  и  $y(t) = y_0 \exp(-\varepsilon_2 t)$ . Эти формулы описывают вторую особую траекторию, двигаясь вдоль которой система приходит из бесконечности при  $t = -\infty$  и приближается к особой точке, никогда не попадая в нее, в пределе  $t \rightarrow \infty$ .

Рассмотренная особая точка называется особой точкой типа *седло*, а траектории, входящие и выходящие из седла, называются *сепаратрисами*. Картина фазовой плоскости вблизи седла характеризуется наличием следующих компонент: положения равновесия, сепаратрис и остальных фазовых траекторий, имеющие вид гипербол. Сепаратрисы разделяют области фазового пространства на множества траекторий с разным поведением при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Вид фазовых траекторий вблизи седла для системы хищник — жертва показан на рис. 2.2, б. На этом рисунке седло в некотором смысле вырождено, поскольку фазовое пространство системы ограничено условиями  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Ниже будет рассмотрен случай, когда таких ограничений нет.

Рассмотрим одномерное движение частицы вблизи максимума потенциальной энергии (рис. 2.3, а). Отсчитывая координату частицы  $x$  от точки максимума, запишем разложение потенциальной энергии в ряд вблизи этой точки:  $W_{\text{п}}(x) = W(0) - \beta^2 x^2/2 + O(x^3)$ . Мы предполагаем, что

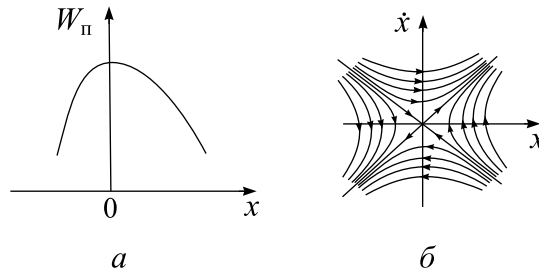


Рис. 2.3. Особая точка типа седло: вид потенциальной функции вблизи максимума (а) и картина фазовых траекторий вблизи неподвижной точки (б).

$\beta^2 = (d^2W_{\pi}/dx^2)_{x=0} > 0$ . Тогда линейное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} - \beta^2 x = 0. \quad (2.9)$$

Оно отличается от уравнения консервативного осциллятора (1.2) только знаком перед вторым слагаемым. Решая уравнение (2.9) и вычисляя производную от полученного решения, получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}, \\ \dot{x}(t) &= \beta(C_1 e^{\beta t} - C_2 e^{-\beta t}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $C_{1,2}$  — константы интегрирования. Комбинируя два уравнения в (2.10), запишем

$$\begin{aligned} C_1 e^{\beta t} &= \frac{1}{2} [x(t) + \dot{x}(t)/\beta], \\ C_2 e^{-\beta t} &= \frac{1}{2} [x(t) - \dot{x}(t)/\beta]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Предположим сначала, что  $C_1 C_2 \neq 0$ . Тогда, перемножив почленно уравнения в (2.11), получаем

$$\frac{x^2}{4C_1 C_2} - \frac{\dot{x}^2}{4C_1 C_2} = 1. \quad (2.12)$$

Это каноническое уравнение гиперболы.

Рассмотрим условия, при которых требование  $C_1 C_2 \neq 0$  нарушается. Пусть сначала  $C_2 = 0$ . Из второго уравнения (2.10) следует, что это возможно, если  $\dot{x}(t) = \beta x(t)$ . Множество точек на фазовой плоскости, удовлетворяющее этому условию, есть прямая с угловым коэффициентом  $\beta$ , проходящая через начало координат. Таким образом, изображающая точка остается на этой прямой во все последующие моменты времени.

Подставив  $C_2 = 0$  в (2.10), находим с увеличением  $t$  система уходит на бесконечность. При  $t \rightarrow -\infty$  изображающая точка, напротив, стремится к

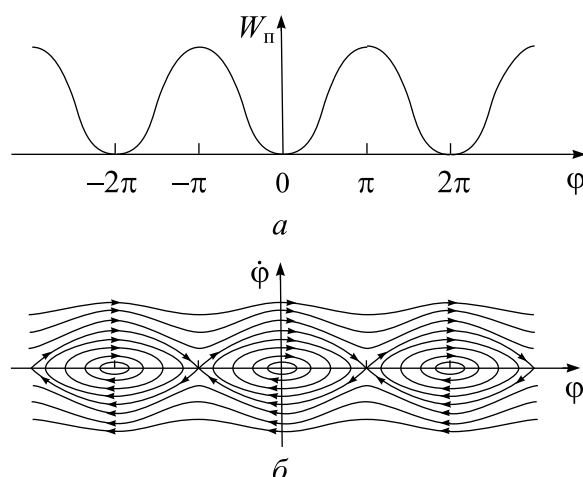


Рис. 2.4. Фазовая плоскость математического маятника: (а) — вид потенциальной функции и (б) — картина фазовых траекторий.

точке равновесия. Прямая  $\dot{x} = \beta x$  состоит из двух сепаратрис, выходящих из точки равновесия и, вдобавок, самой этой точки.

Аналогично, если  $C_1 = 0$ , то  $\dot{x}(t) = -\beta x(t)$ . Движение системы вдоль этой прямой таково, что при  $t \rightarrow \infty$  она приближается к точке равновесия, а при  $t \rightarrow -\infty$  — удаляется от нее. Эта прямая состоит из второй пары сепаратрис, входящих в особую точку и самой этой точки.

Таким образом в общем случае картины фазовых траекторий вблизи седла состоит из неподвижной точки, четырех особых траекторий — пары сепаратрис, входящих в особую точку и пары выходящих из нее, и остальных траекторий, которые вблизи седла близки по форме к гиперболам (рис. 2.3,б).

Еще одним примером системы, у которой на фазовой плоскости присутствуют седла, является математический маятник. Для него график потенциальной энергии имеет вид, показанный на рис. 2.4,а. Вблизи нижнего положения равновесия (т.е. при  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ , полная энергия системы приближенно равна  $W = mgl\varphi^2/2 + ml^2\dot{\varphi}^2/2$ , что соответствует локальному минимуму функции  $W(\varphi, \dot{\varphi})$ . Такие же минимумы расположены в точках  $\varphi = 2\pi n, \dot{\varphi} = 0$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . На фазовой плоскости маятника в этих точках находятся центры. Вблизи точек  $\varphi = \pi(2n + 1), \dot{\varphi} = 0$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  функция  $W(\varphi, \dot{\varphi}) \approx W = mgl[\varphi - \pi(2n + 1)]^2/2 + ml^2\dot{\varphi}^2/2$  — это седловые точки, на фазовой плоскости здесь находятся седла. Общая картина фазовых траекторий показана на рис. 2.4,б.

Движению вдоль сепаратрис соответствует тому, что маятник бесконечно долго находится в верхнем положении равновесия, затем, набирая скорость, отклоняется от него, делает оборот и вновь бесконечно долго приближается к верхнему положению равновесия, которое будет достиг-

нуто только при  $t \rightarrow \infty$ . Если энергия маятника больше, чем  $2mgl$ , то он вращается по или против часовой стрелки вокруг точки подвеса. На фазовой плоскости это соответствует траекториям, лежащим вне сепаратрис. Таким образом, сепаратрисы разделяют траектории с разным характером движения.

## 2.6 Устойчивость положений равновесия

Вид фазовых траекторий вблизи центра и седла показывает, что если начальные условия заданы вблизи неподвижной точки, то поведение системы на больших временах может быть совершенно различным. В случае центра система совершает малые колебания и в любой момент времени остается вблизи точки равновесия. В случае седла фазовая траектория удаляется от положения равновесия на большие расстояния, если только начальное положение специально не было выбрано на сепаратрисе, входящей в седло. Это наблюдение приводит к понятию устойчивости неподвижной точки динамической системы. Введем определение устойчивой неподвижной точки, применимое к конечномерным динамическим системам [25, 27].

Неподвижная точка  $\mathbf{x}_0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0\}$  динамической системы в  $N$ -мерном фазовом пространстве называется устойчивой (по Ляпунову), если для любого  $\epsilon > 0$  всегда найдется такое  $\delta(\epsilon) > 0$ , что из условия  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$  следует выполнение условия  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \epsilon$  для любого  $t > 0$ . Если такого числа  $\delta$  не существует, то система называется неустойчивой.

Символ  $\|\dots\|$  означает расстояние в фазовом пространстве. Говоря другим языком, особая точка называется устойчивой, если система гарантированно остается достаточно близко от положения равновесия во все моменты времени, при условии, что ее начальное положение в фазовом пространстве выбрано произвольным, но достаточно близким к положению равновесия.

Кроме понятия устойчивости по Ляпунову, в теории динамических систем вводится также понятие асимптотически устойчивого положения равновесия.

Положение равновесия  $\mathbf{x}_0$  называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ .

Таким образом, для асимптотической устойчивости требуется, чтобы траектория системы не только все время оставалась в окрестности неподвижной точки, но и стремилась к ней при  $t \rightarrow \infty$ .

Центр является устойчивой по Ляпунову особой точкой, но не является асимптотически устойчивой. Седло — неустойчивая особая точка.



**Задача 2.3.** Докажите строго это утверждение.

Более подробное обсуждение роли устойчивости и неустойчивости в различных системах, а также критерии, позволяющие определить устойчивость особой точки конечномерной динамической системы, содержатся в лекции 6 учебного пособия “Линейные волны”, входящего в серию “Лекции по теории колебаний и волн” [2].

## Лекция 3

# Линейный осциллятор с затуханием

*Основные свойства осциллятора с затуханием. Логарифмический декремент и добротность. Колебания с медленно меняющейся амплитудой. Метод нормальных колебаний. Немного о квантовом осцилляторе. Особая точка типа устойчивый фокус. Аттракторы. Осциллятор с сильным затуханием. Устойчивый узел*

### 3.1 Основные свойства осциллятора с затуханием.

#### Логарифмический декремент и добротность

В предыдущих лекциях основное внимание уделялось консервативному осциллятору в котором нет диссипации энергии. В реальных системах диссипация почти всегда присутствует, поэтому ее необходимо учитывать. Введение даже очень малых потерь качественно меняет динамику осциллятора — вместо периодических колебаний получаются затухающие. Меняется и вид фазовой плоскости. Все эти вопросы будут рассмотрены в данной лекции.

В механических системах обычный способ введения затухания состоит в принятии гипотезы, согласно которой сила трения, действующая на осциллятор, пропорциональна его скорости:  $F_{\text{тр}} = -\lambda\dot{x}$ . Ясно, что такое предположение справедливо только для жидкого трения [32], и, вдобавок, выполняется лишь при относительно малых скоростях. Однако желание оставаться в рамках линейной теории заставляет считать это гипотезу справедливой.

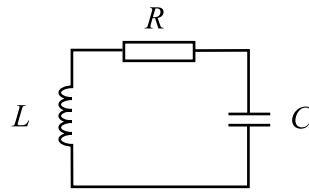


Рис. 3.1. Осциллятор с затуханием

Потери энергии в линейных электрических цепях обусловлены джоулевым нагревом. Закон Ома  $V_R = RI$  для сопротивления  $R$  ( $V_R$  — напряжение на сопротивлении,  $I$  — ток через него) экспериментально подтверждается значительно лучше, чем его аналог в механике. Уравнение колебаний в электрическом контуре с учетом сопротивления (рис. 3.1) имеет вид

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0. \quad (3.1)$$

После переобозначений  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ ,  $2\gamma = R/L$  это уравнение приводится к виду (1.1). Коэффициент  $\gamma$  называется коэффициентом затухания. Для механической осциллятора (грузик на пружинке) коэффициент затухания равен  $\gamma = \lambda/(2m)$ .

Для решения уравнения (1.1) воспользуемся общим методом решения линейных однородных дифференциальных уравнений [6]. Будем искать решение в виде  $x(t) = \exp(pt)$ . Подставляя  $x(t)$  в (1.1), проводя все дифференцирования и сокращая на общий множитель  $\exp(pt)$ , получаем, что предполагаемое решение действительно будет таковым, если параметр  $p$  удовлетворяет уравнению

$$p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0. \quad (3.2)$$

Это уравнение называется характеристическим для уравнения (1.1). Оно имеет два корня

$$p_{1,2} = -\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (3.3)$$

которые либо действительны, если  $\gamma \geq \omega_0$ , либо комплексно сопряжены друг другу, если  $0 < \gamma < \omega_0$ . Основной интерес для нас пока будет представлять второй случай.

В этом режиме формулу (3.3) можно переписать в виде

$$p_{1,2} = -\gamma \mp i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (3.4)$$

Корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости  $p$ . Двум корням характеристического уравнения соответствуют два решения  $x_{1,2} = \exp(p_{1,2}t)$ , поэтому, согласно принципу суперпозиции (см. лекцию 1), их линейная комбинация

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \quad (3.5)$$

( $C_{1,2}$  — константы) также является решением. В теории линейных дифференциальных уравнений показано, что если  $p_1 \neq p_2$ , то формула (3.5) дает общее решение. Константы  $C_{1,2}$  находятся из начальных условий. Предположим, что при  $t = 0$  выполняются начальные условия  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ , т.е. заданы координата и скорость осциллятора. Тогда обычным образом из (3.5) получаем:

$$C_1 + C_2 = x_0, \quad p_1 C_1 + p_2 C_2 = v_0. \quad (3.6)$$

Решение системы уравнений (3.6) дает

$$C_1 = \frac{p_2 x_0 - v_0}{p_2 - p_1}, \quad C_2 = \frac{p_1 x_0 - v_0}{p_1 - p_2}. \quad (3.7)$$

Если выполнено условие слабого затухания, используя формулу (3.4), будем иметь

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left( x_0 + i \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \right), \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left( x_0 - i \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Обратим внимание, что  $C_1 = C_2^*$ . Такое соотношение должно выполняться всегда, если  $x(t)$  — действительная функция. Подставляя формулы (3.8) в (3.5), после простых преобразований приходим к окончательному выражению:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (3.9)$$

Эта формула дает решение уравнения гармонического осциллятора с затуханием для заданных при  $t = 0$  начальных условий. Напомним, что если начальные условия ставятся в момент времени  $t_0$ , то в (3.9) вместо  $t$  следует написать  $t - t_0$ .

Решение уравнения гармонического осциллятора можно также представить в виде

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.10)$$

где

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + \gamma x_0)^2 / \omega^2}, \quad (3.11)$$

$$\cos \varphi_0 = x_0 / A_0, \quad \sin \varphi_0 = -(v_0 + \gamma x_0) / (\omega A_0). \quad (3.12)$$

Зависимость координаты от времени  $x(t)$ , задаваемая выражением (3.10), показана на рис. 3.2.

Видно, что движение осциллятора больше не является периодическим, поэтому понятие амплитуды, периода и частоты колебаний в их прежнем

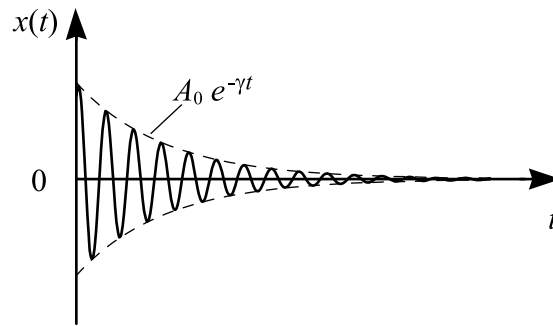


Рис. 3.2. Затухающие колебания

понимании теряют смысл. Тем не менее, некоторые черты периодического процесса сохраняются. В частности, из (3.10) следует, что положение равновесия осциллятора проходит через равные интервалы времени  $T/2$ , где  $T = 2\pi/\omega$ . Легко показать, что точки максимума и минимума  $x(t)$  также следуют периодически через интервалы времени  $T$ . По этой причине параметр  $\omega$  иногда называют частотой затухающих колебаний, а величину  $T$  — их периодом, несмотря на то, что функция  $x(t)$ , конечно, непериодическая.

Запишем формулу (3.10) в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.13)$$

где функция

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \quad (3.14)$$

описывает изменение во времени “размаха” колебаний. Величину  $A(t)$  называют просто амплитудой затухающих колебаний. С течением времени амплитуда экспоненциально уменьшается, так что через время порядка нескольких  $\tau = 1/\gamma$  колебания полностью затухают. Чтобы дать представление о скорости затухания, скажем, что через время  $2\tau$  амплитуда затухает в  $e^2 \approx 7,4$  раза, за время  $4\tau$  — в  $e^4 \approx 54,6$  раза, за время  $10\tau$  — в  $2,2 \cdot 10^4$  раз. Таким образом,  $\tau$  определяет характерное время изменения амплитуды и, следовательно, энергии колебаний.

Обозначим через  $A_n$  последовательные значения максимальных отклонений осциллятора от точки равновесия в сторону положительных значений  $x$ . Очевидно, что эти максимумы подчиняются рекуррентной формуле  $A_{n+1} = e^{-\gamma T} A_n$ . Величина  $d = \gamma T$  называется *логарифмическим декрементом затухания* осциллятора. За период  $T$  амплитуда уменьшается в  $\exp(-d)$  раз. Если, как это часто бывает,  $d \ll 1$ , то  $A_{n+1}/A_n \approx 1 - d$ , откуда следует, что относительное изменение амплитуды за период равно логарифмическому декременту.

В современной теории колебаний чаще используют другой параметр, характеризующий затухание в осцилляторе — добротность. Она определя-

ется через декремент с помощью формулы<sup>1</sup>.

$$Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\omega}{2\gamma}. \quad (3.15)$$

Добротность и логарифмический декремент — безразмерные величины, поэтому они характеризуют потери осциллятора более полно, нежели коэффициент затухания. Два осциллятора с одинаковой добротностью теряют одинаковую долю своей начальной энергии за одинаковые промежутки времени, если измерять их в периодах  $T$ .

Из формулы (3.4) видно, что частота затухающих колебаний  $\omega$  отличается от параметра  $\omega_0$  в уравнении (1.1), однако это отличие мало для систем со слабым затуханием, для которых выполняется условие  $\gamma \ll \omega_0$ . Используя его, выражение для  $\omega$  можно представить в виде

$$\omega = \omega_0(1 - \gamma^2/\omega_0^2)^{-1/2} \approx \omega_0[1 - \gamma^2/(2\omega_0^2)].$$

С той же точностью выражение для добротности записывается как

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}\right).$$

Отсюда видно, что  $Q \approx \omega_0/(2\gamma)$ , причем погрешность этой формулы составляет не более 0,5% при  $Q > 5$ .

Добротность разных осцилляторов может различаться друг от друга на много порядков. Радиотехнические контура обычно имеют добротность несколько десятков. Механические осцилляторы более добротны, для них  $Q$  порядка сотни. Резонаторы электронных СВЧ приборов, в которых происходят колебания электромагнитного поля имеют добротность от нескольких сотен до нескольких тысяч единиц. Открытые резонаторы, используемые в технике СВЧ миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов характеризуются добротностью порядка  $10^4$ , тоже самое относится к оптическим резонаторам, применяемым в лазерах. Наконец, возбужденный атом можно трактовать как осциллятор, а спонтанное излучение кванта энергии и переход на нижний уровень — как затухание колебаний. Добротность такого резонатора составляет  $10^8$ .

### 3.2 Колебания с медленно меняющейся амплитудой

Затухающие колебания линейного осциллятора не являются гармоническими, поскольку их амплитуда меняется во времени. Тем не менее, если

<sup>1</sup>Мы надеемся, что использование традиционного обозначения добротности через  $Q$  не внесет путаницы ее с зарядом на обкладках конденсатора

добротность осциллятора велика, то в формуле (3.13) характерные временные масштабы изменения обоих сомножителей сильно различаются. Как показано выше, амплитуда  $A(t)$  заметно меняется за время порядка  $\tau$ , а для косинуса характерным временным масштабом является период  $T$ . Если добротность велика ( $Q \gg 1$ ), отношение  $\tau/T = 1/(\gamma T) = 1/d$  есть большая величина. Для таких систем “локально” можно считать, что колебания *почти гармонические*. Оговорка “почти” означает, что если проводить измерения координаты осциллятора  $x(t)$  на интервале времени в несколько периодов, то для того, чтобы отличить эту функцию от синусоиды, потребуется аппаратура с достаточно большой точностью, причем эта точность должна увеличиваться при переходе к системам с большей добротностью.

Различить гармонический сигнал и колебания затухающего осциллятора можно и формально математическим способом. Для этого следует воспользоваться аппаратом преобразования Фурье, которое разлагает произвольную функцию времени по совокупности гармонических колебаний.

Пусть  $f(t)$  — функция времени, удовлетворяющая достаточно общим условиям<sup>2</sup>, тогда ее можно представить в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.16)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.17)$$

Формула (3.16), очевидно, осуществляет разложение функции  $f(t)$  на гармонические сигналы, а параметр  $\omega$  играет роль их частоты. Функция  $F(\omega)$  называется фурье-спектром, или частотным спектром сигнала  $f(t)$ . Вычислим фурье-спектр затухающего колебания (3.9), ограничившись, для простоты, случаем начальных условий  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$  (покоящийся осциллятор получает толчком скорость  $v_0$ ). Подставляя формулу (3.9) в (3.17) и учитывая, что  $x(t) = 0$  при  $t < 0$ , после несложных преобразований получаем

$$X(\omega') = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 + (\omega' - \omega)^2} \sqrt{\gamma^2 + (\omega' + \omega)^2}} \quad (3.18)$$

(мы использовали обозначение  $\omega'$  для текущей частоты, т.к. символ  $\omega$  уже занят — он обозначает собственную частоту осциллятора).

<sup>2</sup>Функция  $f(t)$  должна быть абсолютно интегрируемой в промежутке  $(-\infty, +\infty)$  и на любом конечном интервале удовлетворять условиям Дирихле, т.е. иметь не более чем конечное число разрывов первого рода и этот интервал должен допускать разбиение на конечное число подинтервалов, на которых  $f(t)$  меняется монотонно [33, § 14].

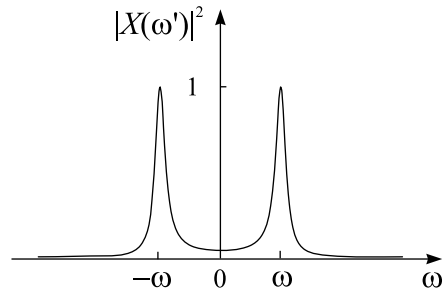


Рис. 3.3. Фурье спектр затухающего колебания линейного осциллятора

Функция  $|X(\omega')|^2$  (ее еще называют спектром мощности сигнала) показана на рис. 3.3. Из него следует, что для затухающего колебания спектр, вообще говоря, является сплошным: он состоит из гармонических сигналов со всеми возможными частотами от  $-\infty$  до  $\infty$ . Если затухание мало ( $\gamma \ll \omega$ ), то функция спектр имеет вид двух острых пиков вблизи частот  $\omega' = \omega$  и  $\omega' = -\omega$ . Доминирующий вклад в полный сигнал дают спектральные составляющие с частотами, лежащими вблизи этих значений. Ширина пиков определяется величиной коэффициента затухания  $\gamma$ . Рассмотрим, например, поведение  $|X(\omega')|^2$  вблизи точки  $\omega' = \omega$ . В приближении  $\gamma/\omega \ll 1$  второй корень в знаменателе можно при этом считать постоянным и равным  $2\omega$ , и записать

$$X(\omega') \approx \frac{v_0/(2\omega\gamma)}{\sqrt{1 + (\omega' - \omega)^2/\gamma^2}}. \quad (3.19)$$

Отсюда видно, что функция  $|X(\omega')|^2$  имеет максимум в точке  $\omega' = \omega$  и при отстройке от этого значения на величину  $\gamma$  уменьшается вдвое. Поэтому шириной спектра можно считать величину  $2\gamma$ . Поведение функции  $|X(\omega')|^2$  вблизи точки  $\omega' = -\omega$  не требует специального исследования, поскольку для действительных функций  $f(t)$  из (3.17) легко показать, что их спектр должен удовлетворять условию  $F^*(\omega') = F(-\omega')$ .

**Замечание.** Обратите внимание, что для действительных функций их фурье-спектр всегда имеет компоненты как на положительных, так и на отрицательных частотах. Это легко понять, рассмотрев простейший случай гармонического сигнала  $x(t) = \cos \omega_0 t$ . По формуле Эйлера  $x(t) = (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2$ , следовательно частотный спектр косинуса состоит из двух дискретных частот  $\pm\omega_0$ . По этой причине, кстати, считается, что гармоническому осциллятору соответствует две собственные частоты  $\pm\omega_0$ , таким образом, число собственных частот совпадает с числом динамических переменных осциллятора и размерностью его фазового пространства.

Рассмотрение примера осциллятора со слабым затуханием показывает, что если спектр колебания сосредоточен в относительно узкой области



$\Delta\omega$  относительно некоторой центральной частоты  $\omega_0$ , то его оказывается полезным представить в виде

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (3.20)$$

где функции  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  —медленно меняющиеся амплитуда и фаза колебания. Медленность их изменения означает, что за "период"  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , соответствующий центральной частоте, функции  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  меняются мало. Другой способ выразить это свойство заключается в неравенствах  $|\dot{A}/(\omega_0 A)| \ll 1$  и  $|\dot{\varphi}/(\omega_0 \varphi)| \ll 1$ . Для линейного осциллятора с затуханием во времени меняется только амплитуда, условие медленности ее изменения совпадает с условием  $\gamma \ll \omega_0$ , т.е. с условием слабого затухания.

Последовательный учет медленности изменения амплитуды и фазы колебаний позволяет получить приближенное аналитическое решение многих задач, точное решение для которых неизвестно. Несколько таких примеров применительно к линейным системам, приведено в лекции 7 и в [2, лекции 9]. Для более общего случая нелинейных систем большое число подобных задач исследуется в [34–36].

Для сигналов с медленно меняющимися параметрами полезно также обобщить операцию усреднения, введенную в лекции 1. Поскольку  $f(t)$  непериодическая, то казалось бы, необходимо использовать определение (1.50). Однако, подставляя в эту формулу вместо  $f(t)$  выражение (3.10), получаем  $\overline{x(t)} = 0$ ,  $\overline{x^2(t)} = 0$  и т.д. Следовательно, таким образом определенное среднее не несет никакой информации о сигнале. Между тем интуитивно ясно, что если за много периодов колебаний их амплитуда и фаза практически не меняются, то должны иметь, например, смысл понятия средних потенциальной и кинетической энергий колебаний за период, причем разумно предположить, что они должны определяться формулами (1.51), в которые следует подставить вместо  $A_0$  текущее значение амплитуды  $A(t)$ .

Введем понятие локального усреднения для функции  $\mathcal{F}[f(t)]$  от сигнала  $f(t)$  с помощью формулы

$$\widetilde{\mathcal{F}[f(t)]} = \left\langle \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \mathcal{F}[f(t')] dt' \right\rangle. \quad (3.21)$$

Смысл операции, обозначаемой угловыми скобками  $\langle \dots \rangle$ , будет пояснен чуть позднее, а сначала исследуем интеграл внутри них. Взглянув на формулу (1.50), можно видеть, что этот интеграл точно такой же, как и в операции определения среднего для периодической функции. Теперь, однако,  $f(t)$  непериодическая, и это приводит к тому, что в результате интегрирования получается быстро осциллирующая функция.

Покажем это на простом примере, вычислив среднюю мощность потерь за период колебаний линейного осциллятора в виде грузика на пружинке.

Мгновенная мощность равна  $P(t) = F_{\text{тр}}\dot{x} = -\lambda\dot{x}^2$ . Используя решение (3.9), скорость осциллятора представим в виде

$$\dot{x}(t) = V_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \psi), \quad (3.22)$$

где  $V_0 = \sqrt{v_0^2 + (\omega_0^2 x + \gamma v_0)^2 / \omega^2}$ ,  $\arctg \psi = (\omega_0^2 x + \gamma v_0) / (\omega v_0)$ . Подставляя это соотношение в формулу для мгновенной мощности и интегрируя по периоду  $T$ , получаем

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t') dt' = -\lambda V_0^2 \frac{1}{T} \int_t^{t+T} e^{-2\gamma t'} \cos^2(\omega t' + \psi) dt'.$$

Простое, но несколько громоздкое вычисление интеграла показывает, что это выражение равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t') dt' = & \frac{-\lambda V_0^2 e^{-2\gamma t}}{2} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{2\gamma T} \left\{ 1 + \right. \\ & \left. + \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2} [\gamma \cos(2\omega t + 2\psi) - \omega \sin(2\omega t + 2\psi)] \right\}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что помимо первого слагаемого в фигурных скобках, не зависящего от текущего момента времени  $t$ , есть еще два быстро меняющихся во времени члена. Частота их изменения равна  $2\omega$ , а амплитуда порядка  $\gamma/\omega \ll 1$ . Несмотря на относительную малость, просто так их отбросить нельзя. Например, при вычислении производной по времени от выражения (3.23), эти слагаемые умножаются на дополнительный множитель  $2\omega$ , и оказываются того же порядка, что и единица. Еще одна неприятность состоит в том, что полученный в (3.23) результат зависит от выбора пределов интегрирования: если вместо  $t$  и  $t + T$  в определении (3.21) взять, скажем  $t - T/2$  и  $t + T/2$ , то вид этих членов изменится.

Чтобы избавиться от подобных проблем, следует провести еще одно, второе усреднение, оставив в (3.23) только те спектральные компоненты, которые отвечают медленно меняющимся функциям. Это условие соответствует отбрасыванию в (3.23) быстро меняющихся слагаемых, пропорциональных синусу и косинусу. Именно такая операция обозначается в (3.21) угловыми скобками.

На спектральном языке такое усреднение соответствует тому, что в фурье-спектре величины  $(1/T) \int_t^{t+T} \mathcal{F}[x(t')] dt'$  — следует оставить только спектральные компоненты, лежащие вблизи нулевой частоты и отфильтровать спектральные компоненты, лежащие вблизи частот  $\omega_0$ ,  $2\omega_0$ ,  $3\omega_0$  и т.д.

Процедура двойного усреднения поясняется рисунками 3.4 и 3.5. На первом из них показан качественный вид функции  $P(t)$  после первого

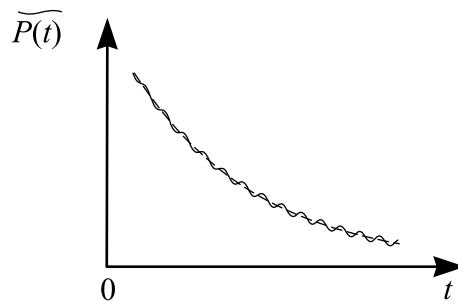


Рис. 3.4. Зависимость средней по периоду колебаний мощности потерь осциллятора от времени. Сплошная линия — формула (3.23), пунктир — результат усреднения быстро переменных компонент.

усреднения (сплошная линия) и после второго усреднения (пунктир). Цель второго усреднения — сгладить мелкие дрожания функции  $P(t)$ . На втором рисунке показаны спектры функции  $P(t)$  до операции второго усреднения и после нее.

Понятия медленно меняющейся амплитуды и фазы колебаний на самом деле определены неоднозначно, потому что для произвольного колебания  $x(t)$  можно ввести бесконечно много пар функций  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ , которые будут давать с помощью формулы (3.20) одну и ту же функцию  $x(t)$  [36]. Точно также, неоднозначной является операция усреднения  $\langle \dots \rangle$ . Если амплитуда и фаза заметно меняются на интервале времени  $T_0$ , то спектры вблизи частот  $\omega_0, 2\omega_0, \dots$  сильно перекрываются, при этом операция фильтрации спектра оказывается неопределенной. Спектр для такого случая показан на рис. 3.5, б пунктиром. В такой ситуации пользоваться понятиями медленно меняющихся амплитуды и фазы колебаний следует с осторожностью, поскольку для получения аналитических результатов с достаточной точностью это необходимо проводить вычисления в высших приближениях по малому параметру  $\varepsilon = |\dot{A}/A|$ , при этом простой способ усреднения, введенный здесь, может приводить к ошибкам. В таких случаях следует использовать более мощные методы, являющиеся развитием

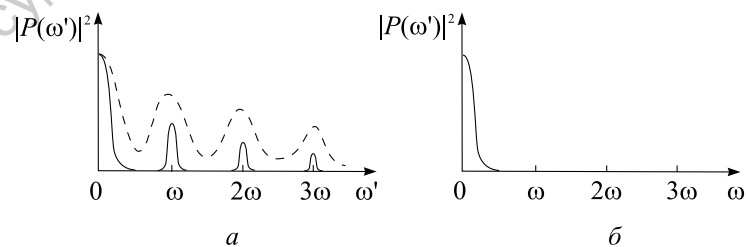


Рис. 3.5. Спектр мощности потерь осциллятора с затуханием до (а) и после (б) операции усреднения. На рис. а пунктиром показан спектр для случая, когда операция усреднения теряет смысл

описанных здесь идей [34–36].

Из приведенного обсуждения может показаться, что вычисление локальных средних — сложная процедура. На самом деле это не так. Правильный результат в первом неисчезающем порядке по  $\varepsilon$  будет получаться, если при интегрировании в (3.21) амплитуду  $A(t)$  и фазу  $\varphi(t)$  считать постоянными, не обращая внимания на их зависимость от времени. Для полиномиальной функции  $\mathcal{F}$  в этом случае все операции усреднения сводятся к вычислениям средних от степеней синусов и косинусов, которые находятся элементарно.

Вычислим в качестве примера, используя это правило, вновь среднюю мощность потерь. Считая, что величина  $V(t) = V_0 \exp(-\gamma t)$  в формуле (3.22) постоянна, и вынося ее за знак интегрирования, имеем

$$\widetilde{P}(t) = -\lambda V_0^2 e^{-2\gamma t} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t' + \psi) dt' = -\frac{\lambda V_0^2 e^{-\gamma t}}{2}. \quad (3.24)$$

Это выражение отличается от получаемого с помощью усреднения из формулы (3.23) только множителем  $(1 - e^{-2\gamma T})/(2\gamma T) \approx 1 - \gamma T + O(\gamma^2 T^2)$ , который при  $\gamma T \ll 1$  близок к единице.

Процедура усреднения обладает полезным свойством: она перестановочна с операцией дифференцирования по времени. Действительно,

$$\frac{\widetilde{df}}{dt} = \left\langle \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{df}{dt} dt \right\rangle = \frac{f(t+T) - f(t)}{T} \approx \frac{df(t)}{dt}$$

Последнее приближенное равенство выполняется благодаря тому, что за время  $T$  усредненная функция  $\widetilde{f}(t)$  меняется слабо

С помощью усреднения можно получать полезные соотношения между средними от различных физических величин. Выведем, например, усредненный закон сохранения энергии для осциллятора с затуханием. Для этого умножим уравнение (1.1) на  $2\dot{x}$ , воспользуемся тождествами  $2x\dot{x} = dx^2/dt$  и  $2\dot{x}\ddot{x} = d\dot{x}^2/dt$  и учтем, что  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $2\gamma = \lambda/m$ . Полученное в результате этих преобразований уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = -\lambda\dot{x}^2. \quad (3.25)$$

Оно имеет очевидный смысл: скорость изменения энергии осциллятора равна мощности силы трения. Однако непосредственно в таком виде, это соотношение мало пригодно для использования, поскольку все входящие в него величины являются быстропеременными: за период  $T$  каждая успевает дважды измениться от максимального значения до нуля и обратно. Усредним уравнение (3.25), используя процедуру усреднения (3.21). Тогда в правой части получается величина  $\langle P(t) \rangle$ , которая уже вычислена

нами, а при усреднении левой части можно переставить операции дифференцирования и усреднения. В результате получаем

$$\frac{d\widetilde{W}}{dt} = -2\gamma\widetilde{W}. \quad (3.26)$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.25) и тем, что  $\lambda V_0^2 \exp(-\gamma t)/2 = 2\gamma m V_0^2 \exp(-\gamma t)/2 = 2\gamma\widetilde{W}$ . Решая дифференциальное уравнение (3.26), находим, что  $\widetilde{W}(t) = \widetilde{W}(0) \exp(-2\gamma t)$ . Это соотношение показывает, что средняя энергия уменьшается по экспоненте вдвое быстрее, чем амплитуда колебаний.

### 3.3 Метод нормальных колебаний

Уравнение линейного гармонического осциллятора можно представить в форме, отличающейся от (1.1). Такой переход производится с помощью линейного преобразования от динамических переменных  $x$  и  $v$  к новым переменным, которые выбираются так, чтобы получающиеся для них уравнения имели бы максимально простой вид.

Прежде всего, запишем уравнение второго порядка (1.1) в виде двух уравнений первого порядка, введя дополнительную переменную  $v$ :

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x - 2\gamma v. \quad (3.27)$$

Умножим первое и второе уравнения на некоторые константы  $\alpha$  и  $\beta$  и сложим их. Такая процедура приводит к выражению

$$\frac{d}{dt}[\alpha x + \beta v] = -\frac{\omega_0^2 \beta}{\alpha} \left[ \alpha x + \frac{(\alpha - 2\gamma\beta)\alpha}{-\omega_0^2 \beta} v \right] \quad (3.28)$$

Выберем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы в этой формуле множители перед  $v$ , а, следовательно, и полные выражения в прямых скобках, справа и слева были одинаковы. Это выполняется, если  $\beta = -(\alpha^2 - 2\gamma\alpha)/(\omega_0^2)$ , или

$$\omega_0^2 (\beta/\alpha)^2 - 2\gamma (\beta/\alpha) + 1 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения получаем

$$(\beta/\alpha)_{1,2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) = \frac{\gamma \pm i\omega}{\omega_0^2}. \quad (3.29)$$

(мы предположили, что  $\gamma < \omega_0$  и использовали обозначения (3.4). Уравнение (3.29) определяет только отношение коэффициентов, а не каждый из них по отдельности. Это объясняется линейностью уравнений (3.28). Один из коэффициентов, скажем  $\alpha$ , следует находить из дополнительных соображений.

Введем функции  $a(t)$  и  $a^*(t)$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha \left( x + \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} v \right), \\ a^*(t) &= \alpha \left( x + \frac{\gamma - i\omega}{\omega_0^2} v \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Эти величины называют *нормальными колебаниями*. Подставляя формулы (3.29) в уравнение (3.28), находим, что нормальные колебания удовлетворяют уравнениям

$$\dot{a}(t) = (-\gamma - i\omega) a(t), \quad (3.31)$$

$$\dot{a}^*(t) = (-\gamma + i\omega) a^*(t). \quad (3.32)$$

Уравнения (3.31)-(3.32) называют уравнениями гармонического осциллятора в форме нормальных колебаний. Их решения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0)e^{i(-\omega+i\gamma)t}, \\ a^*(t) &= a^*(0)e^{i(\omega+i\gamma)t}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Заметим, что если по физическому смыслу координата и скорость осциллятора — действительные величины, то начальные значения нормальных колебаний  $a(0)$  и  $a^*(0)$  комплексно сопряжены друг другу. Тогда из решений (3.33) следует, что нормальные колебания будут сопряжены друг другу и во все последующие моменты времени. В таком случае для описания динамики осциллятора достаточно одного из уравнений (3.31)-(3.32). Поскольку нормальные колебания — комплексные функции, то число степеней свободы при переходе от уравнения (1.1) к уравнениям (3.31)-(3.32) не уменьшается.

Из формул (3.33) следует, что колебанию  $a(t)$  соответствует комплексная собственная частота  $-\omega + i\gamma$ , а колебанию  $a^*(t)$  — собственная частота  $\omega + i\gamma$ . Этим исчерпывается спектр собственных частот линейного осциллятора с затуханием.

Запись уравнений осциллятора в форме нормальных колебаний часто значительно облегчает решение сложной задачи. Подобные примеры рассмотрены в лекции 5 (действие на осциллятор произвольной внешней силы), лекции 7 (параметрические колебания в двухконтурной схеме), лекции 8 (связанные колебания системы большого числа осцилляторов).

До этого момента коэффициент  $\alpha$  оставался неопределенным. Как уже говорилось, поскольку уравнения линейны, его выбор обусловлен только соображениями удобства. Часто просто считают  $\alpha = 1$ , при рассмотрении параметрических процессов принято выбирать  $\alpha$  так, чтобы в пределе нулевого затухания  $\gamma = 0$  энергия осциллятора определялась выражением

$$W = \omega_0 a^*(t) a(t). \quad (3.34)$$

Тогда для каждого типа осциллятора коэффициент  $\alpha$  получается свой. Например для грузика на пружинке подставляя в (3.34)  $W = (mv^2/2 + kx^2/2)$  и формулы (3.30), находим, что  $\alpha = \sqrt{k/(2\omega_0)}$ . В такой нормировке нормальные колебания равны

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{\frac{k}{2\omega_0}} \left( x + \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} v \right), \\ a^*(t) &= \sqrt{\frac{k}{2\omega_0}} \left( x + \frac{\gamma - i\omega}{\omega_0^2} v \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Для осцилляторов других типов легко получить аналогичные выражения. Из уравнений (3.35) можно выразить величины  $x$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} [(1 + i\gamma/\omega)a + (1 - i\gamma/\omega)a^*], \\ v &= \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} \frac{\omega_0^2}{i\omega} [a - a^*]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.4 Немного о квантовом осцилляторе<sup>3</sup>

Нормальные колебания осциллятора играют фундаментальную роль в теоретической физике. Как известно, переход от классических динамических уравнений к квантовым осуществляется с помощью замены динамических переменных соответствующими операторами, действующими на волновую функцию системы. Эти операторы подчиняются определенным коммутационным соотношениям. Нормальные колебания  $a(t)$  и  $a^*(t)$  для консервативного осциллятора являются такими динамическими переменными, для операторов которых коммутационные соотношения выглядят наиболее просто. Так же простой вид имеет выраженный через эти операторы гамильтониан. В квантомеханических уравнениях удобно выбрать такую нормировку нормальных колебаний, чтобы гамильтониан имел вид

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^* \hat{a}. \quad (3.37)$$

Этому соответствует выбор  $\alpha = \sqrt{k/(2\hbar\omega_0)}$ . Операторы  $\hat{a}^*$  и  $\hat{a}$  называют, соответственно, операторами рождения и уничтожения. Нетрудно показать, что для них перестановочные соотношения принимают форму

$$\hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a} = 1.$$

Собственные значения гамильтониана (3.37), т.е. квантовые уровни энергии равны

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2). \quad (3.38)$$

<sup>3</sup>Читатель, не знакомый с основами квантовой механики, может пропустить этот параграф

Здесь  $n$  — номер уровня, или, как еще говорят, число квантов. Добавка  $1/2$  соответствует нулевой энергии осциллятора и имеет чисто квантовую природу. Оператор рождения, действуя на волновую функцию системы с энергией  $E_n$ , переводит ее в состояние с энергией  $E_{n+1}$ . Аналогично, оператор уничтожения переводит систему из состояния  $E_n$  в состояние  $E_{n-1}$ . Из формул (3.37) и (3.38) следует, что  $n = \langle \hat{a}^* \hat{a} \rangle - 1/2$ , угловые скобки определяют операцию квантомеханического усреднения по волновой функции. В классическом пределе  $n$  очень велико и добавкой  $1/2$  можно пренебречь, а операторы рождения и уничтожения превращаются в нормальные колебания. Отсюда получаем формулу для числа квантов колебаний  $n = a^* a$ , которую часто используют и в классическом случае.

### 3.5 Особая точка типа устойчивый фокус. Аттракторы

Воспользуемся уравнениями нормальных колебаний для построения картины фазовых траекторий осциллятора с затуханием. В фазовой плоскости выберем комплексную плоскость  $a = a' + ia''$  с координатами  $a'$  и  $a''$  — действительной и мнимой частью нормального колебания.

Динамика изображающей точки на плоскости задается первым уравнением в (3.33). Вычислив его модуль и аргумент, получаем

$$|a(t)| = |a(0)|e^{-\gamma t}, \quad \text{Arg } a(t) = \text{Arg } a(0) - \omega_0 t. \quad (3.39)$$

Эти уравнения задают в полярной системе координат в параметрической форме логарифмическую спираль (рис. 3.6,а). Радиус-вектор, соединяющий начало координат с изображающей точкой, равномерно вращается по часовой стрелке и его длина уменьшается по экспоненциальному закону. С течением времени система приближается к положению равновесия, но никогда его не достигает, при этом спираль совершает бесконечное число оборотов.

Несложно найти и вид траектории на фазовой плоскости  $(x, v)$ . Из соотношений (3.32) следует связь между динамическими переменными  $a', a''$  и  $x, v$  (для упрощения формул считаем  $\alpha = 1$ ):

$$x = (a' - \gamma a''/\omega), \quad v = \omega_0^2 a''/\omega. \quad (3.40)$$

Отсюда видно, что отображение плоскости  $(a', a'')$  на плоскость  $(x, \dot{x})$ , ( $\dot{x} = v$ ) является линейным преобразованием и качественный вид фазовых траекторий при этом сохраняется (рис. 3.6,б). В случае малого затухания ( $\gamma \ll \omega_0$ ) отображение близко к тождественному, поэтому для высокочастотных осцилляторов можно считать, что фазовые траектории на плоскости  $(x, v)$  близки к логарифмической спирали.

Положение равновесия линейного осциллятора с затуханием соответствует на фазовой плоскости особой точке типа *фокус*. Очевидно, что эта



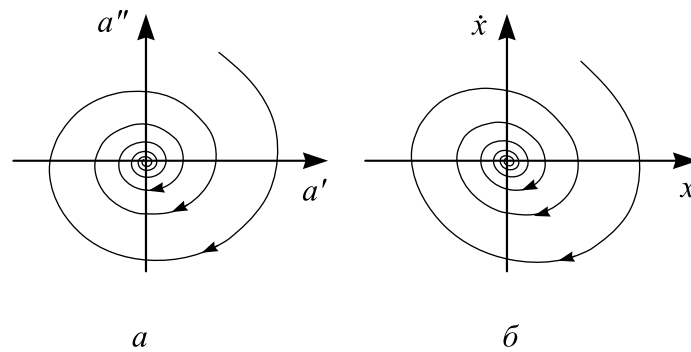


Рис. 3.6. Особая точка типа устойчивый фокус:  $a$  — на комплексной плоскости  $a$ ,  $b$  — на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$

особая точка устойчива, поскольку все траектории с течением времени стремятся к ней. Устойчивый фокус является простейшим примером *аттрактора*. Аттрактором динамической системы называется множество в фазовом пространстве, к которому стремятся все достаточно близкие к нему траектории. Аттракторов в динамической системе общего вида может быть много (в том числе и бесконечно много) и их знание очень важно, поскольку они определяют характер режима, который установится в системе после переходного процесса.

### 3.6 Осциллятор с сильным затуханием. Устойчивый узел

До сих пор рассматривался случай, когда затухание осциллятора не очень велико ( $\gamma < \omega_0$ ) и было показано, что при этом движение осциллятора сохраняет черты колебательного процесса. Исследуем теперь случай сильного затухания<sup>4</sup>  $\gamma > \omega_0$ .

Общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, полученное в 3.1, пригодно и в этом случае. Корни характеристического уравнения, определяемые формулой (3.3), теперь оба действительные и отрицательные, причем  $|p_1| > |p_2|$ . Коэффициенты  $C_{1,2}$  в общем решении (3.5) равны

$$C_1 = -\frac{|p_1|x_0 - v_0}{|p_1| - |p_2|}, \quad C_2 = \frac{|p_2|x_0 - v_0}{|p_1| - |p_2|}. \quad (3.41)$$

Чтобы качественно установить характер движения, зададимся вопросом: при каких начальных условиях система может пройти через положение равновесия? Математически этот вопрос формулируется так: при каких

<sup>4</sup>Пограничный случай  $\gamma = \omega_0$  не представляет особого интереса, так как является *нетипичным*: бесконечно малое изменение параметров нарушает это условие.

условиях существует решение уравнения  $x(t) = 0$ ? Запишем это уравнение, используя в качестве  $x(t)$  выражение (3.5):  $C_1 \exp(-|p_1|t) + C_2 \exp(-|p_2|t) = 0$ , или

$$\exp[(|p_1| - |p_2|)t] = -C_1/C_2. \quad (3.42)$$

Очевидно, что решение уравнения (3.42) существует, только если  $C_1$  и  $C_2$  имеют разные знаки. В этом случае оно равно

$$t_* = \frac{\ln(-C_1/C_2)}{|p_1| - |p_2|}. \quad (3.43)$$

Если при этом  $|C_1| > |C_2|$ , то траектория, проходящая через точку  $(x_0, v_0)$  пересечет ось  $v$  в будущем (при  $t_* > 0$ ). Если же  $|C_1| < |C_2|$ , то такое пересечение было в прошлом (при  $t_* < 0$ ). Траектории, пересекающие ось  $v$ , а заодно и, как нетрудно показать точно таким же способом, ось  $x$ , лежат на фазовой плоскости целиком в областях  $I$  и  $II$ , ограниченных отрезками прямых  $v = -|p_1|x$  (прямая  $L_1$  на рис. 3.7) и  $v = -|p_2|x$  (прямая  $L_2$ ). Для точек из областей  $III$  и  $IV$  коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  имеют одинаковый знак, и лежащие в этих областях траектории стремятся к положению равновесия, не переходя через граничные линии.

Из (3.5) следует, что при  $t \rightarrow \infty$  каждая траектория стремится к началу координат, а при  $t \rightarrow -\infty$  уходит на бесконечность. Можно установить также асимптотическое поведение траекторий. Поскольку  $|p_1| > |p_2|$ , то при  $t \rightarrow \infty$  первая экспонента в (3.5) затухает быстрее, чем вторая (мы полагаем, что оба коэффициента,  $C_1$  и  $C_2$  отличны от нуля), и при достаточно больших временах  $x(t) \approx C_2 \exp(-|p_2|t)$ ,  $v(t) \approx -|p_2|C_2 \exp(-|p_2|t)$ , откуда следует, что  $v(t) \approx -|p_2|x(t)$ . Это значит, что при приближении к началу координат каждая траектория стремится "коснуться" прямой  $L_2$ .

Аналогично при  $t \rightarrow -\infty$  имеем  $v(t) \approx -|p_1|x(t)$  — это соотношение показывает, что вдали от положения равновесия все траектории выстраиваются параллельно прямой  $L_1$ . Исключения из общего поведения составляют сами прямые  $L_1$  и  $L_2$ : легко показать, что если в начальный момент изображающая точка находилась на одной из них, то она будет оставаться на этой же прямой и во все последующие моменты времени, монотонно стремясь к точке равновесия. Каждая прямая состоит из трех траекторий: точки равновесия и двух лучей, лежащих в верхней и нижней полуплоскостях фазовой плоскости.

Этих сведений достаточно, чтобы нарисовать качественный вид фазовых траекторий (рис. 3.7) вблизи положения равновесия. Этот тип особой точки называется *устойчивый узел*. Такое движение соответствует апериодическому затуханию: колебаний в системе нет. Примером осциллятора с сильным затуханием является например, грузик или маятник, движущиеся в среде с большой вязкостью.

Легко также нарисовать зависимость  $x(t)$  (см. рис. 3.8) [25]. Если уравнение (3.42) имеет положительный корень, то система один раз проходит

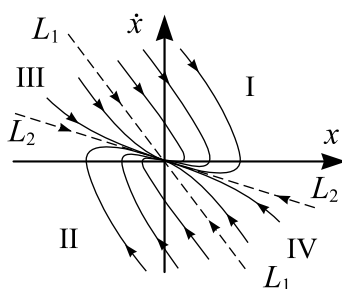


Рис. 3.7. Особая точка типа устойчивый узел. Пунктиром показаны прямые  $L_1$  и  $L_2$

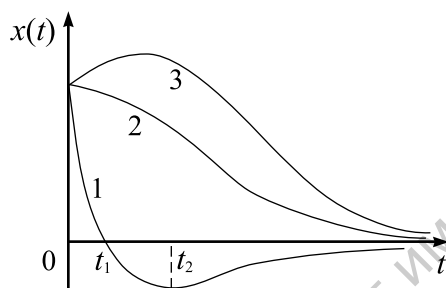


Рис. 3.8. Вид решения для осциллятора с сильным затуханием при различных начальных условиях.

положение равновесия в некоторый момент времени  $t_1$ , затем достигает максимума отклонения в момент времени  $t_2$  а затем монотонно стремится к нулю (кривая 1 на рис. 3.8). Если же у (3.42) имеется отрицательный корень или их нет вообще, то возможны два случая: либо осциллятор монотонно стремится к положению равновесия (кривая 2), либо он сначала удаляется от точки равновесия, но затем его скорость обращается в нуль и он вновь возвращается к состоянию покоя (кривая 3).

## Лекция 4

# Осцилляторы с отрицательным трением. Общая классификация особых точек на фазовой плоскости

*Примеры систем с отрицательным трением. Фазовые портреты: неустойчивый фокус и неустойчивый узел. Общая классификация особых точек на фазовой плоскости. Понятие бифуркации динамической системы.*

### 4.1 Примеры систем с отрицательным трением

В системах, лишенных источника энергии процессы всегда протекают так, что первоначальная энергия возбуждения либо сохраняется, либо уменьшается с течением времени. Для осциллятора это свойство выражается в том, что коэффициент затухания удовлетворяет условию  $\gamma > 0$ . Между тем, существует большое число примеров, когда энергия поступает к осциллятору извне, приводя на линейной стадии процесса к раскачке колебаний. Системы, обладающие подобным свойством, играют огромную роль в технике, обеспечивая возможность преобразования энергии от постоянного источника в энергию колебательного процесса. В теории колебаний подобные системы называются автогенераторами или автоколебательными системами.

Подробное исследование автогенераторов будет проведено в учебном пособии “Нелинейные колебания”, входящем в серию “Лекции по теории колебаний и волн”, поскольку для полного объяснения их свойств принципиальным является учет нелинейности. Здесь наше внимание будет сосре-

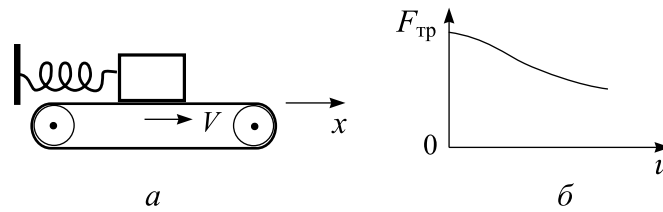


Рис. 4.1. Механическая система с отрицательным трением (а) и зависимость силы "сухого" трения от относительной скорости бруска и ленты (б).

доточено на начальной стадии процесса генерации — раскатке колебаний начиная с бесконечно малых начальных условий.

Одним из основных свойств автогенератора является то, что если он находится в покое (колебаний нет), то в идеальном случае отсутствия шумов он будет находиться в этом состоянии бесконечно долго. Однако малейшая флуктуация динамических переменных приводит к тому, что возникают колебания с нарастающей во времени амплитудой. Через некоторое время в системе устанавливаются колебания, свойства которых не зависят от начальных условий. Это состояние устойчиво и к внешнему воздействию (если оно, конечно, не превышает некоторого уровня) и к флуктуациям параметров системы<sup>1</sup>. Рассмотрим несколько примеров.

Простейшим механическим примером служит устройство, показанное на рис. 4.1,а [25, 39]. Брусок, прикрепленный к пружине лежит на ленте транспортера, которая может двигаться с регулируемой скоростью  $V$ . Между бруском и лентой существует сила "сухого" трения, качественный вид зависимости которой от их относительной скорости  $u = V - \dot{x}$  показан на рис. 4.1,б. Уравнение колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(V - \dot{x}). \quad (4.1)$$

Предположим, что скорость бруска мала ( $|\dot{x}| \ll V$ ) и разложим функцию  $F(u)$  в ряд вблизи точки  $u = V$ , ограничившись двумя слагаемыми:  $F(V - \dot{x}) \approx F(V) - \dot{x}F'(V)$ . Тогда из (4.1) получаем

$$m\ddot{x} + [\lambda + F'(V)]\dot{x} + kx = F(V). \quad (4.2)$$

Постоянное слагаемое в правой части уравнения (4.2) приводит только к смещению положения равновесия на величину  $x_0 = F(V)/k$ , поэтому для малых отклонений от этой точки  $\xi = x - x_0$  выполняется уравнение

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + k\xi = 0, \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>Такая схема установления колебаний характерна для так называемого "мягкого" режима возбуждения генератора [25, 37, 38].

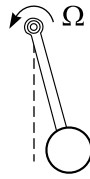


Рис. 4.2. Маятник Фроуда

где  $2\gamma = [\lambda + F'(V)]/m$ . Это уравнение совпадает по форме с (1.1), но теперь параметр  $\gamma$  может быть отрицательным. Это случается, если  $F'(V) < -\lambda$ . В случае сухого трения график функции  $F(u)$  имеет спадающий участок, на котором  $F'(u) < 0$ , поэтому при определенном выборе параметров системы такое требование можно выполнить. Формально условие  $\gamma < 0$  отвечает системе с отрицательным трением.

Совершенно также работает маятник Фроуда [25] (рис. 4.2). Он прикреплен к муфте, насаженной на вал, который вращается с угловой скоростью  $\Omega$ . Момент силы трения между валом и муфтой имеет вид, аналогичный функции  $F(u)$ . Уравнения системы после соответствующих переобозначений в точности повторяют уравнения (4.1)–(4.3), поэтому мы не будем на них останавливаться.

Самым важным примером системы с отрицательным трением несомненно является радиотехнический генератор [25, 37, 38]. Его обобщенная схема показана на рис. 4.3. Сигнал с колебательного контура подается на вход усилителя, а его выход нагружен на катушку  $L_1$ , которая индуктивно связана с катушкой контура. Конструкция усилителя может быть различной. Раньше это были ламповые усилители, сейчас используются транзисторные схемы.

Ограничиваясь линейным случаем, будем считать, что вольт-амперная характеристика усилителя (т.е. функция, связывающая напряжение на входе  $V$  с током на выходе  $i$ ) линейна:  $i = SV$ . Величина  $S$  называется крутизной характеристики. Уравнения, описывающие генератор, имеют вид

$$\begin{aligned} L\dot{I} + RI &= -V + Mi, \\ V &= Q/C, \quad i = SV. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Все обозначения показаны на рис. 4.3. В первом из этих уравнений член

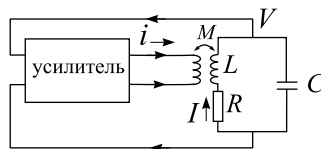


Рис. 4.3. Радиотехнический генератор

$Mdi/dt$  отвечает за обратную связь за счет взаимной индукции катушки контура и катушки в цепи выхода усилителя. Для простоты полагаем, что входное сопротивление усилителя бесконечно, тогда  $I = dQ/dt$ . Учитывая это в (4.4) и комбинируя все уравнения, получаем

$$\ddot{Q} + \frac{RC - MS}{LC} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (4.5)$$

Вводя обозначения  $2\gamma = (RC - MS)/(LC)$ ,  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ , вновь приходим к уравнению осциллятора (1.1). Знак  $\gamma$  может быть отрицательным, если коэффициент взаимной индукции положителен и достаточно велик:  $M > RC/S$ .

## 4.2 Фазовые портреты: неустойчивый фокус и неустойчивый узел

Решение (3.5) уравнения осциллятора с затуханием пригодно и в случае, когда  $\gamma < 0$ . Корни характеристического уравнения теперь равны  $p_{1,2} = |\gamma| \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  и, считая что  $|\gamma| < \omega_0$ , имеем

$$p_{1,2} = |\gamma| \pm i\omega. \quad (4.6)$$

На комплексной плоскости  $p$  корни лежат справа от мнимой оси и симметрично относительно действительной оси. Решение, отвечающее заданным начальным условиям, получается из (3.10)-(3.12) простой заменой  $\gamma \rightarrow -|\gamma|$ .

$$x(t) = A_0 e^{|\gamma|t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.7)$$

где

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0 - |\gamma|x_0)^2/\omega^2}, \quad (4.8)$$

$$\cos \varphi_0 = x_0/A_0, \quad \sin \varphi_0 = -(v_0 - |\gamma|x_0)/(\omega A_0). \quad (4.9)$$

Амплитуда колебаний теперь не убывает, а нарастает со временем (см. рисунок 4.4). Положение равновесия  $x = 0$ ,  $v = 0$  оказывается неустойчивым: сколь угодно малое отклонение системы от этих значений приводит к раскачке колебаний. Разумеется, энергия, необходимая на это, черпается из внешнего источника. В случае механической системы это работа, производимая мотором и необходимая для поддержания постоянной скорости ленты транспортера, в генераторе — работа постоянного источника, питающего усилитель.

В отличие от устойчивых особых точек — центра и устойчивых фокуса и узла, уравнение осциллятора с отрицательным трением не может

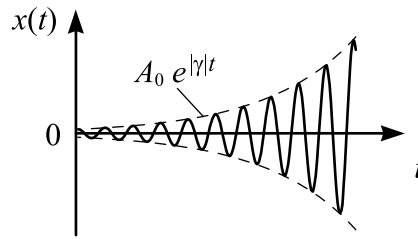


Рис. 4.4. Нарастающие колебания осциллятора с отрицательным трением

описывать систему на бесконечном интервале времени. Рано или поздно, амплитуда колебаний станет настолько большой, что сделанные при выводе уравнения предположения будут нарушены. Обычно это происходит за счет нелинейных эффектов. После этого момента для описания динамики реальной системы следует использовать более общую нелинейную модель.

Можно получить картину фазовых траекторий осциллятора с отрицательным трением точно также, как это было сделано в случае устойчивого фокуса, однако мы воспользуемся другим, более поучительным способом. Представим уравнения осциллятора в виде

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x + 2|\gamma|v \quad (4.10)$$

и произведем с ними следующие преобразования. Во-первых, сделаем замену  $v = -v'$  в уравнениях (4.10), они при этом перейдут в

$$\dot{x} = -v', \quad \dot{v}' = \omega_0^2 x + 2|\gamma|v', \quad (4.11)$$

а во-вторых, сменим направление течения времени:  $t = -t'$ , тогда уравнения (4.11) превратятся в уравнения

$$\dot{x} = v', \quad \dot{v}' = -\omega_0^2 x - 2|\gamma|v', \quad (4.12)$$

Но эти соотношения совпадают с уравнениями осциллятора с обычным, положительным затуханием! Для него картина на фазовой плоскости нам известна — это устойчивый фокус. По этой причине фазовая плоскость осциллятора с отрицательным трением получается в результате таких же преобразований: смены знаков перед  $v$  и  $t$ . Первая операция соответствует на фазовой плоскости отражению фазовых траекторий в плоскости оси  $x$ , а вторая — изменению направления стрелок, показывающих направление движения изображающих точек по траекториям. В итоге фазовый портрет для осциллятора с отрицательным затуханием имеет вид, показанный на рис. 4.5,а.

В заключении этого параграфа совсем кратко остановимся на случае сильной неустойчивости, когда  $\gamma > \omega_0$ . Как и при сильном затухании, движение носит апериодический характер. Корни характеристического уравнения равны  $p_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ , оба корня действительные и положительные. При  $t \rightarrow \infty$  одна из экспонент в (3.6) растёт быстрее, чем вторая, и,



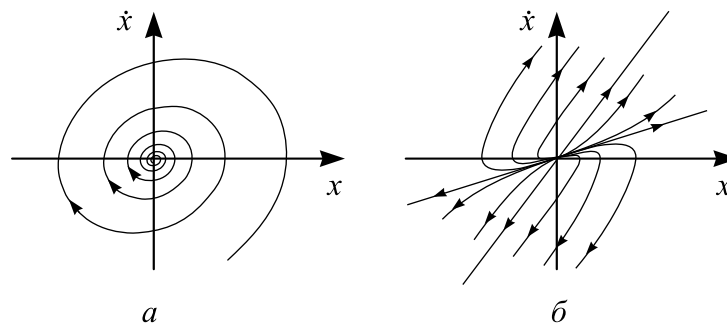


Рис. 4.5. Фазовые портреты для осциллятора с отрицательным трением: (а) — неустойчивый фокус ( $|\gamma| < \omega_0$ ), (б) — неустойчивый узел ( $|\gamma| > \omega_0$ ).

следовательно,  $x(t) \sim \exp(p_1 t)$ . Нарастание решения носит характер аperiодической экспоненциальной неустойчивости. Все слова, сказанные относительно ограниченности линейной модели в случае неустойчивого фокуса, применимы в полной мере и здесь. Фазовый портрет получается из устойчивого узла с помощью тех же преобразований  $v = -v'$  и  $t = -t'$ , он показан на рис. 4.6,б. Эта особая точка называется неустойчивым узлом.

### 4.3 Общая классификация особых точек на фазовой плоскости

Исследованными нами в гл. 2–4 случаями ограничиваются все возможные "типичные" виды особых точек не только для линейного дифференциального уравнения (1.1), но и для произвольной нелинейной системы второго порядка. Рассмотрим, следуя [25], систему с динамическими переменными  $x$  и  $y$ , которая описывается двумя дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y), \quad (4.13)$$

где функции  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  предполагаются аналитическими функциями своих переменных. Состояния равновесия определяются решениями нелинейной системы уравнений

$$F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0. \quad (4.14)$$

Предположим, что точка  $(x_0, y_0)$  на фазовой плоскости есть такая неподвижная точка. Для исследования характера траекторий вблизи нее представим  $x$  и  $y$  в виде  $x = x_0 + \xi$ ,  $y = y_0 + \eta$ ,  $\xi, \eta$  — малые добавки<sup>2</sup>. Подставляя

<sup>2</sup>Критерий малости — возможность сохранения в разложениях  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  вблизи точки  $(x_0, y_0)$  только членов первого порядка по  $\xi$  и  $\eta$ .

эти формулы в (4.13), разлагая  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  в ряды Тейлора и ограничиваясь линейными слагаемыми, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= a\xi + b\eta, \\ \dot{\eta} &= c\xi + d\eta,\end{aligned}\tag{4.15}$$

где  $a = F_x(x_0, y_0)$ ,  $b = F_y(x_0, y_0)$ ,  $c = G_x(x_0, y_0)$ ,  $d = G_y(x_0, y_0)$ . Чтобы уравнения имели смысл, необходимо, чтобы выполнялись условия  $a^2 + b^2 \neq 0$  и  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Если они нарушены, одно из уравнений (4.15) имеет нулевые коэффициенты, это значит, что ограничиваться только линейными членами разложения нельзя при его получении нельзя. Будем считать эти условия выполненными. Таким образом, для описания динамики системы вблизи положения равновесия можно пользоваться уравнением линейного приближения (4.15)<sup>3</sup>.

Ищем решение (4.15) в виде  $\xi(t) = \xi_0 \exp(pt)$ ,  $\eta(t) = \eta_0 \exp(pt)$ . Тогда величины  $\xi_0$  и  $\eta_0$  должны удовлетворять линейной системе уравнений

$$\begin{aligned}(a - p)\xi_0 + b\eta_0 &= 0, \\ c\xi_0 + (d - p)\eta_0 &= 0.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Она имеет решение, только если  $(p - a)(p - d) - bc = 0$ , или

$$p^2 - (a + d)p + ad - bc = 0,\tag{4.17}$$

Это характеристическое уравнение для системы (4.15). Его корни равны

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left( S \pm \sqrt{S^2 - 4D} \right).\tag{4.18}$$

где  $S = a + d$  — след матрицы коэффициентов  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , а  $D$  — ее детерминант.

В зависимости от значений величин  $S$  и  $D$ , возможны всего пять различных случаев расположения корней  $p_{1,2}$  на комплексной плоскости  $p$ , и, соответственно, пять различных типов особых точек:

1. при  $S > 0, D \geq 0, S^2 < 4D$  два комплексно сопряженных корня лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости  $p$ . Это случай особой точки типа неустойчивый фокус (см. гл. 4, 4.2);
2. при  $S > 0, D > 0, S^2 > 4D$  характеристическое уравнение имеет два действительных положительных корня. Это особая точка типа неустойчивый узел (гл. 4, 4.2);
3. при  $S < 0, D > 0, S^2 < 4D$  два комплексно сопряженных корня лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости  $p$ . Это случай особой точки типа устойчивый фокус (гл. 3, 3.5);
4. при  $S < 0, D > 0, S^2 > 4D$  характеристическое уравнение имеет два действительных отрицательных корня. Это особая точка типа устойчивый узел (гл. 3, 3.6)

<sup>3</sup>У этого утверждения есть одно исключение, о котором будет сказано ниже.

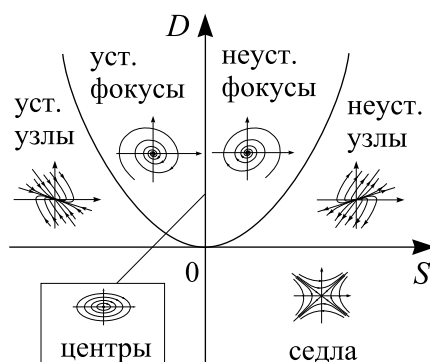


Рис. 4.6. Области на плоскости параметров  $(S, D)$ , в которых реализуются различные типы особых точек.

5. если  $D < 0$ , характеристическое уравнение имеет два действительных корня разных знаков, эта особая точка является седлом (гл. 2, 2.5).

На рисунке 4.6 показано расположение соответствующих областей на плоскости параметров  $(S, D)$ .

Все остальные возможности отвечают положению системы на плоскости параметров на границах между областями, и сколь угодно малое их изменение приведет к тому, что точка, изображающая систему, сместится в одну из этих областей. По этой причине такие "граничные" случаи не представляют физического интереса.

Исключением является случай, когда  $S = 0, D > 0$ . Из (4.18) следует, что при этом  $p_{1,2} = \pm i\sqrt{D}$  и формально можно сделать вывод, что особая точка является центром. Оказывается, однако, что это не всегда так. Дело в том, что условие  $S = 0$  эквивалентно тому, что у линеаризованной системы (4.15) существует закон сохранения, т.е. она является консервативной. Чтобы показать это, умножим первое из уравнений (4.15) на величину  $a - i\omega$ , где  $\omega = \sqrt{D} = \sqrt{-a^2 - cb}$  (мы сразу учли, что  $a = -d$ ), а второе уравнение на  $b$  и сложим их. После простых преобразований получаем

$$\frac{d}{dt} [(a - i\omega)\xi + b\eta] = -i\omega [(a - i\omega)\xi + b\eta].$$

Обозначив выражение в прямых скобках через новую переменную  $\alpha$ , получаем для нее  $\dot{\alpha} = -i\omega\alpha$ . По виду это уравнение нормальных колебаний, совпадающее с уравнением (3.31), если положить в нем  $\gamma = 0$ . Его решение есть  $\alpha(t) = \alpha(0) \exp(-i\omega t)$ , поэтому величина  $|\alpha|^2 = (a\xi + b\eta)^2 + \omega^2\xi^2$  сохраняется во времени.

Следовательно, траектории вблизи особой точки системы (4.15) имеют вид вложенных друг в друга эллипсов, и это центр. Однако наличие центра в линеаризованных уравнениях не означает, что особая точка имеет тот же характер и в полных уравнениях (4.13). Возможны ситуации, когда закон сохранения появляется в результате процедуры линеаризации. Подобным

примером служит система [27]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= -x - y(x^2 + y^2).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Линеаризованная вблизи нуля система  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x$ , удовлетворяет условию  $S = 0$  и для обоих переменных легко получить уравнение консервативного осциллятора. Тем не менее, в полной системе (4.19) закона сохранения нет: если умножить первое уравнение на  $x$ , второе на  $y$  и сложить их, то получим для величины  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  уравнение  $\dot{r} = -r^3$ , решение которого  $r(t) = [2t + 1/r^2(0)]^{-1/2}$ . При  $t \rightarrow \infty$  получаем  $r(t) \rightarrow 0$ , следовательно закон сохранения для уравнений (4.19) отсутствует. Этот пример еще раз иллюстрирует положение теоремы Ляпунова, уже упомянутой на стр. 35.

Итак, если исходная система консервативная, то положение равновесия, для которого  $S = 0$ ,  $D > 0$ , является центром. На плоскости параметров  $(S, D)$  этому случаю соответствует положительная полуось  $D$  (см. рис. 4.6). Казалось бы, можно вновь не обращать на этот случай особого внимания, т.к. малое изменение параметров приведет к смещению системы с этой линии и превращению эллипса либо в устойчивый, либо в неустойчивый фокус. Однако для консервативной системы этот аргумент теряет силу. Если потребовать, чтобы при "шевелении" параметров система оставалась консервативной, то условие  $S = 0$  должно сохраняться, это значит, изображающая систему точка просто сместится вдоль оси  $D$ .

Перечисленные выше пять особых точек и дополнительно к ним центр являются типичными: при произвольных случайно выбранных параметрах динамической системы на плоскости, ее положения равновесия с вероятностью единица окажутся одной из пяти особых точек. Если же система второго порядка консервативная, то на ее фазовой плоскости в типичном случае могут быть только седла и центры.

#### 4.4 Понятие бифуркации динамической системы

Пусть функции  $F$  и  $G$  в (4.13) кроме переменных  $x$  и  $y$ , зависят еще от параметра  $\lambda$ . Выберем одну из неподвижных точек, и будем наблюдать за изменением характера фазовых траекторий вблизи нее при изменении параметра. Если меняется  $\lambda$ , то будут меняться и коэффициенты в линеаризованной системе (4.15), значит на плоскости  $(S, D)$ , точка, отвечающая текущим значениям параметра, будет двигаться вдоль некоторой непрерывной линии (рис. 4.7. Пока точка находится внутри одной из областей 1–5, небольшое изменение параметра не меняет типа особой точки и характера траекторий вблизи нее. Если же система находится на одной из границ этих областей (например, в одной из точек:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) то малое изменение параметра приводит к изменению типа особой точки и вида

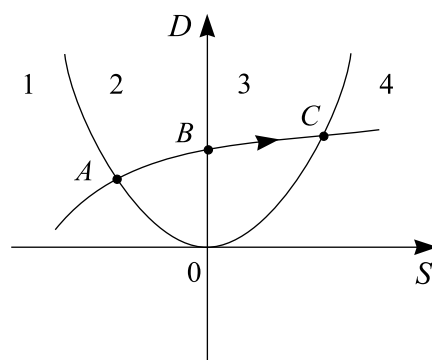


Рис. 4.7. К объяснению понятия бифуркации

фазовых траекторий. Такое перестроение фазового портрета системы называется *бифуркацией*, а значение параметра, при котором оно происходит — бифуркационным. Более точное определение [25] гласит: значение параметра  $\lambda = \lambda_0$  называется обыкновенным, если существует  $\varepsilon > 0$ , такое, что для всех  $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$  топологическая структура разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые одна и та же. Значения параметров, при которых это условие не выполняется, называются бифуркационными.

Простейший пример бифуркации — превращение устойчивого фокуса линейного осциллятора при  $\gamma < \omega_0$  в неустойчивый фокус при  $\gamma > \omega_0$ . Бифуркационным значением при этом является  $\gamma = \omega$ .

Теория бифуркаций является обширным и хорошо развитым разделом теории динамических систем. Более подробно вопросы, относящиеся к теории бифуркаций рассматриваются в учебном пособии “Нелинейные колебания”, входящем в серию “Лекции по теории колебаний и волн”.

## Лекция 5

# Осциллятор под действием внешних сил. Резонанс

*Примеры и эталонное уравнение. Метод комплексных амплитуд. Случай гармонической внешней силы. Резонанс. Фазовые соотношения при резонансе. Энергетические соотношения и резонансная кривая.*

### 5.1 Примеры и эталонное уравнение

В природе не существует абсолютно изолированных от окружения систем, поэтому одной из задач линейной теории колебаний является исследование поведения гармонического осциллятора под действием внешней силы. При этом выясняется замечательное свойство осциллятора, состоящее в том, что он избирательно откликается на гармоническое воздействие с частотой, близкой к его собственной частоте. Такое явление называется *резонансом*. Круг вопросов, связанных с резонансом в колебательных системах является предметом этой лекции.

Начнем, как всегда, с примеров. На рис. 5.1,а показан маятник, который прикреплен к одному из концов пружины жесткостью  $k$ , а другой конец пружины может совершать заданное движение в горизонтальном направлении по закону  $x_0(t)$ . Пусть в состоянии покоя и при недеформированной пружине  $x_0 = 0$ . Уравнение движения системы записывается аналогично тому, как это было сделано в лекции 1, но теперь необходимо дополнительно учесть момент силы, действующей на маятник со стороны пружины. Считая отклонения маятника и деформацию пружины малыми величинами, запишем уравнение вращательного движения:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi + kl[x_0(t) - x].$$

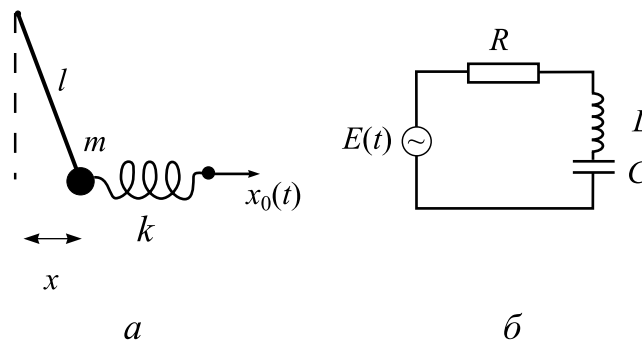


Рис. 5.1. Примеры осцилляторов под внешним воздействием: маятник (а) и колебательный контур (б)

Учитывая, что  $x \approx \varphi l$ , получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t), \quad (5.1)$$

где  $\omega_0^2 = g/l + k/m$ ,  $F(t) = kx_0(t)/m$ . Мы пришли к уравнению гармонического осциллятора, в правой части которого вместо нуля стоит заданная функция независимой переменной  $t$ .

Второй пример — электрический контур на рис. 5.1,б. В цепь последовательно с другими элементами включен источник ЭДС. Закон Киргофа для контура имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t), \quad (5.2)$$

и, учитывая, что  $\dot{Q} = I$ , приходим к уравнению

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{Q}{LC} = \frac{1}{L} E(t).$$

Вводя стандартные обозначения  $2\gamma = R/L$ ,  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ , а также функцию  $F(t) = E(t)/L$ , вновь получаем уравнение вида (5.1), в котором, кроме того, учтены потери энергии в контуре.

Эти примеры показывают, что эталонное уравнения для гармонического осциллятора с затуханием под внешним воздействием имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t). \quad (5.3)$$

Сделаем небольшое замечание относительно использования термина “сила”. На самом деле, функция, стоящая справа в уравнении (5.3) для механических систем совпадает с физической силой лишь с точностью до множителя  $1/m$ , а для систем другой природы вообще не является силой. Однако термин “сила” стал общеупотребительным для обозначения внешнего воздействия на колебательную систему, вообще говоря, зависящего от времени.

То обстоятельство, что система является линейной, позволяет получить точное решение уравнения (5.3) для произвольных начальных условий и произвольного вида функции  $F(t)$ . Вспомним сформулированный в лекции 1 принцип суперпозиции. Применяя этот принцип к уравнению (5.3), можно сказать, что его решение можно представить в виде  $x(t) = X(t) + \xi(t)$ , где  $X(t)$  — общее решение однородного уравнения, а  $\xi(t)$  — какое-либо частное решение уравнения (5.3).

Предположим, что  $\xi(t)$  известно. Тогда

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \xi(t). \quad (5.4)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются начальными условиями, которые для простоты будем ставить при  $t = 0$ . Если  $x_0$  и  $v_0$  — начальные смещение и скорость осциллятора, то легко получить

$$A = x_0 - \xi(0), \quad B = \frac{[v_0 - \dot{\xi}(0)] + \gamma[x_0 - \xi(0)]}{\omega}. \quad (5.5)$$

Из этих соотношений видно, что значения постоянных  $A$  и  $B$  зависят от выбора частного решения  $\xi(t)$ . Это решение, как уже говорилось, можно получить при произвольном виде функции  $F(t)$ , однако некоторые важные частные случаи полезно исследовать отдельно. Самым главным таким случаем является случай гармонического воздействия, когда сила имеет вид

$$F(t) = F_0 \cos(pt + \psi_0), \quad (5.6)$$

$F_0$  — амплитуда внешней силы,  $p$  — ее частота,  $\psi_0$  — фаза (отметим, что при расчете процессов установления колебаний фаза внешней силы важна и ее нельзя просто положить равной нулю). Для получения решения в этом случае воспользуемся методом комплексных амплитуд.

## 5.2 Метод комплексных амплитуд

Метод комплексных амплитуд столь широко используется в теории колебаний, радиофизике и физике вообще, что часто в книгах и научных статьях его применение специально даже не оговаривается. Метод предназначен для описания линейных систем, в которых происходят гармонические или близкие к гармоническим колебания. Для вывода основных соотношений метода полезно воспользоваться геометрической интерпретацией, связывающей колебательный процесс с вращением некоторого вектора на плоскости<sup>1</sup>. Не определяя конкретную физическую природу колебаний, будем в этом разделе говорить просто о гармоническом сигнале  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$  с частотой  $\omega$ , амплитудой  $x_0$  и начальной фазой

<sup>1</sup>Эта же аналогия лежит в основе другого метода — метода векторных диаграмм, который используется в электротехнике для расчета электрических схем.



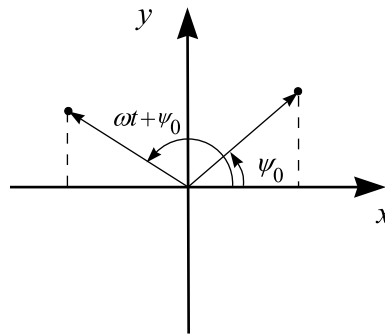


Рис. 5.2. К определению комплексной амплитуды гармонического колебания

$\varphi_0$ . Рассмотрим на плоскости  $(x, y)$  (см. рис. 5.2) вектор длины  $x_0$ , выходящий из начала координат и составляющий в момент  $t = 0$  угол  $\varphi_0$  с положительным направлением оси  $x$ . Если вектор вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , то проекция его конца на ось  $x$  меняется по закону  $x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , т.е. в соответствии с законом изменения  $x(t)$ . Мы получаем соответствие между гармоническим колебанием и движением точки на плоскости. С другой стороны, эту плоскость можно представить как комплексную плоскость  $z = x + iy$ , тогда движение точки будет описываться комплексной функцией

$$z(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + i \sin(\omega t + \varphi_0) = x_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = \bar{X} e^{i\omega t},$$

где  $\bar{X} = x_0 \exp(i\varphi_0)$ . Функция  $z(t)$  называется *комплексным сигналом*, отвечающим гармоническому сигналу  $x(t)$ , а величина  $\bar{X}$  называется *комплексной амплитудой* сигнала<sup>2</sup>. Непосредственно из определения этих величин следует формула

$$x(t) = \operatorname{Re}(\bar{X} e^{i\omega t}), \quad (5.7)$$

позволяющая вычислить настоящий сигнал, если известны его комплексная амплитуда и частота. Комплексная амплитуда соединяет в себе две характеристики сигнала — амплитуду и начальную фазу, таким образом, что

$$\bar{X} = x_0 e^{i\varphi_0}, \quad \text{или} \quad x_0 = |\bar{X}| \quad \varphi_0 = \operatorname{Arg} \bar{X}. \quad (5.8)$$

Комплексная амплитуда обладает рядом важных свойств.

1. **Линейность.** Сумме гармонических колебаний с одинаковой частотой соответствует комплексная амплитуда, являющаяся суммой комплексных амплитуд каждого из колебаний. Условно это свойство можно

<sup>2</sup>Мы будем обозначать комплексную амплитуду сигнала таким же символом как и сам сигнал, но заглавными буквами и с чертой сверху

записать в следующем виде: если

$$x_1(t) \leftrightarrow \bar{X}_1, x_2(t) \leftrightarrow \bar{X}_2, \quad \text{то} \quad x_1(t) + x_2(t) \leftrightarrow \bar{X}_1 + \bar{X}_2, \quad (5.9)$$

и если

$$x(t) \leftrightarrow \bar{X}, \quad \text{то} \quad Cx(t) \leftrightarrow C\bar{X}. \quad (5.10)$$

Здесь  $C$  — действительная константа, а знак  $\leftrightarrow$  обозначает соответствие между сигналом и его комплексной амплитудой.

2. Свойство производной. Комплексная амплитуда производной гармонического сигнала получается из комплексной амплитуды самого сигнала умножением на  $i\omega$ :

$$\text{если } x(t) \leftrightarrow \bar{X}, \quad \text{то} \quad \dot{x}(t) \leftrightarrow i\omega\bar{X}. \quad (5.11)$$

3. Свойство интеграла. Комплексная амплитуда интеграла от гармонического сигнала получается из комплексной амплитуды сигнала делением на  $i\omega$ :

$$\text{если } x(t) \leftrightarrow \bar{X}, \quad \text{то} \quad \int x(t) dt \leftrightarrow \bar{X}/(i\omega). \quad (5.12)$$

**Задача 5.1.** Докажите свойства (5.9)-(5.12).

Здесь необходимо сделать два важных замечания, которые при использовании метода комплексных амплитуд иногда ускользают из поля зрения. В свойстве (5.9) важным требованием является то, что оба сигнала имеют одинаковую частоту. Складывать комплексные амплитуды сигналов с различными частотами нельзя, это приведет к неверным результатам. Второе замечание касается свойства (5.12). Очевидно, что результатом интегрирования гармонической функции является сумма гармонического сигнала и постоянной интегрирования. Частота первого слагаемого равна частоте исходного сигнала, в то время как частота постоянной равна нулю. Когда говорят о комплексной амплитуде, речь, разумеется, идет только о первом слагаемом.

Использование метода комплексных амплитуд эффективно в линейных системах, когда благодаря принципу суперпозиции колебания с несколькими частотами можно рассматривать независимо друг от друга. При вычислении величин, квадратично зависящих от  $x(t)$ , следует быть осторожным. Так, например, функции  $x^2(t)$  нельзя поставить в соответствие никакой комплексной амплитуды, поскольку она содержит колебания с частотами 0 и  $2\omega$ , отличными от частоты колебаний самого сигнала  $x(t)$ .

Тем не менее, существует важная формула, связывающая *среднее по времени* значение квадратичной функции от сигнала с его комплексной

амплитудой. Рассмотрим эту связь на примере колебательного контура, рассчитав среднюю за период колебаний мощность джоулевых потерь, если в контуре поддерживаются стационарные колебания с частотой  $\omega$ . Пусть  $V(t)$  и  $I(t)$  — мгновенные значения напряжения на сопротивлении и тока через него, тогда по закону Джоуля-Ленца мгновенная мощность потерь равна

$$\begin{aligned} P(t) = I(t)V(t) &= \frac{1}{4} (\bar{V} e^{i\omega t} + \text{к.с.}) (\bar{I} e^{i\omega t} + \text{к.с.}) = \\ &= \frac{1}{4} (\bar{V} \bar{I}^* + \bar{V}^* \bar{I} + \bar{V} \bar{I} e^{i2\omega t} + \bar{V}^* \bar{I}^* e^{-i2\omega t}). \end{aligned}$$

Здесь к.с. означает операцию комплексного сопряжения. После усреднения по периоду колебаний получаем

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{V} \bar{I}^*). \quad (5.13)$$

Для омического сопротивления  $V = RI$ , поэтому (5.13) превращается в известные формулы  $\overline{V(t)} = R|\bar{I}|^2/2 = |\bar{V}|^2/(2R)$ .

Комплексную величину  $P_c = \bar{V} \bar{I}^*/2$  в электротехнике и электронике принято называть комплексной мощностью, выделяющейся на элементе схемы. Очевидно, что  $P_c = P_a + iP_r$ , где активная мощность взаимодействия  $P_a$  определяется формулой (5.13), а реактивная мощность равна  $P_r = \operatorname{Im}(\bar{V} \bar{I}^*)/2$ . Как будет видно в дальнейшем, понятие реактивной мощности тесно связано с понятием вириала, используемым в механике. Для сопротивления реактивная мощность равна нулю.

Рассмотрим теперь вместо сопротивления индуктивность контура. Для нее напряжение и ток связаны соотношением  $V = L\dot{I}$ , поэтому, используя свойство (5.11), для комплексных амплитуд можно записать  $\bar{V} = i\omega \bar{I}$ . Комплексная мощность теперь равна  $P_c = i\omega L|\bar{I}|^2/2$ . Активная мощность, как и следовало ожидать, равна нулю (потерь в индуктивности нет), а реактивная пропорциональна средней за период энергии, накопленной в индуктивности.

### 5.3 Случай гармонической внешней силы

Используем метод комплексных амплитуд для нахождения частного решения  $\xi(t)$  уравнения (5.3) в случае, когда  $F(t)$  — гармонический сигнал:

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = F_0 \cos(pt + \psi_0). \quad (5.14)$$

Предположим, что это решение также имеет вид гармонического сигнала с частотой внешней силы. Комплексные сигналы, соответствующие  $\xi(t)$  и  $F(t)$ , есть  $z(t) = \bar{\Xi} \exp(ipt)$  и  $\mathcal{F}(t) = \bar{F} \exp(ipt)$ . Подставляя  $\xi(t) =$

$(z + z^*)/2$  и  $F(t) = (\mathcal{F} + \mathcal{F}^*)/2$  в (5.14) и разделяя слагаемые, пропорциональные  $\exp(ipt)$  и  $\exp(-ipt)$ , которые по отдельности должны равняться нулю, получаем уравнение для комплексного сигнала

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \mathcal{F}(t).$$

Формально это уравнение совпадает с (5.14), но его решение следует искать среди комплексных функций. Подставляя в него выражения для  $z(t)$  и  $\mathcal{F}(t)$ , дифференцируя, и сокращая на общую экспоненту, получаем алгебраическую связь между комплексными амплитудами:  $(-p^2 + 2i\gamma p + \omega_0^2)\bar{\Xi} = \bar{F}$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} &= \frac{\bar{F}}{-p^2 + 2i\gamma p + \omega_0^2} = \\ &= \frac{-p^2 + \omega_0^2 - 2i\gamma p}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2} \bar{F} = \frac{e^{i\psi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}} \bar{F}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Величина  $\psi$  определяется формулами

$$\cos \psi = \frac{\omega_0^2 - p^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}}, \quad \sin \psi = \frac{-2\gamma p}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}}. \quad (5.16)$$

Используя (5.15) в формуле  $\xi(t) = \text{Re}[\bar{\Xi} \exp(ipt)]$ , получаем выражение для частного решения в виде

$$\xi(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}} \cos(pt + \psi + \psi_0). \quad (5.17)$$

Это гармоническое колебание с частотой внешнего сигнала, амплитуда которого равна

$$A(p) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}}, \quad (5.18)$$

а угол  $\psi$  есть сдвиг фазы между внешней силой и откликом на нее осциллятора.

**Задача 5.2.** Убедитесь прямой подстановкой, что формула (5.17) действительно дает решение уравнения (5.14).

Полное решение записывается в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}} \cos(pt + \psi + \psi_0). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  вычисляются по формулам (5.5), в которых, в соответствии с (5.17), следует положить  $\xi(0) = A(p) \cos(\psi + \psi_0)$ ,  $\dot{\xi}(0) = -pA(p) \sin(\psi + \psi_0)$ .

Решение (5.19) показывает, что движение осциллятора под внешним гармоническим воздействием является суперпозицией двух движений: первое слагаемое описывает собственные затухающие колебания осциллятора, а второе происходит с частотой внешней силы и является *вынужденным* движением осциллятора. Амплитуда и фаза собственных колебаний зависят как от начальных условий, так и, через константы  $A$  и  $B$ , от параметров внешней силы. В выражение для вынужденных колебаний начальные условия не входят, поэтому это движение целиком определяется внешним воздействием. Самое важное состоит в том, что оба слагаемых различным образом ведут себя на больших временах. Экспоненциальный множитель  $\exp(-\gamma t)$  в первом слагаемом приводит к тому, что за время порядка нескольких  $\tau \sim 1/\gamma$  с момента начала действия силы собственные колебания практически полностью затухают и вклад в полное движение будет давать только вынужденное колебание.

Таким образом, полная картина процесса следующая. После начала действия силы в течении времени порядка нескольких  $\tau$  (это время называется временем установления) движение представляет собой суперпозицию собственных затухающих колебаний осциллятора с частотой  $\omega$  и вынужденных незатухающих колебаний с амплитудой и частотой, зависящих только от параметров внешней силы. После окончания времени установления остаются только вынужденные колебания.

Наиболее отчетливо процесс установления можно наблюдать в специальном случае, когда сначала осциллятор покоился ( $x_0 = 0, v_0 = 0$ ) и в момент времени  $t = 0$  на него начинает действовать сила  $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ . Будем также считать, что добротность осциллятора велика. Из формул (5.16) следует, что вынужденное колебание сдвинуто по фазе на  $\psi = -\pi/2$  относительно внешней силы, а подставив  $p = \omega_0$  в (5.18), получаем, что амплитуда вынужденных колебаний равна  $F_0/(2\gamma\omega_0)$ . В полном решении необходимо учесть также собственные колебания осциллятора:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t) - \frac{F_0}{2\gamma\omega_0} \cos \omega_0 t.$$

В первом слагаемом сделана замена  $\omega$  на  $\omega_0$ , т.к. эти частоты мало отличаются друг от друга, и накапливающаяся из-за такой замены ошибка в фазе колебаний за время установления будет мала. Потребовав выполнение начальных условий, получаем  $A = F_0/(2\gamma\omega_0)$ ,  $B = F_0/(2\omega_0^2)$ . Так как  $A/B = \omega_0/\gamma \gg 1$ , то слагаемое, пропорциональное коэффициенту  $B$  дает заметный вклад в полное колебание только в течении нескольких первых периодов действия внешней силы, а затем его влиянием можно пренебречь. В итоге получаем простой результат:

$$x(t) = -\frac{F_0}{2\gamma\omega_0} (1 - e^{-\gamma t}) \cos \omega_0 t. \quad (5.20)$$

Процесс установления колебаний, рассчитанный по формуле (5.20), показан на рис. 5.3. На начальном этапе, пока  $t \ll \tau$ , амплитуда колебаний

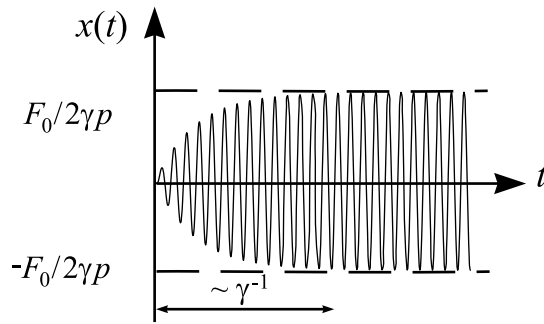


Рис. 5.3. Установление колебаний в осцилляторе при точном резонансе

меняется во времени по линейному закону:  $1 - \exp(-\gamma t) \approx \gamma t$ , поэтому  $x(t) \approx -F_0 t / (2\omega_0) \cos \omega_0 t$ , однако затем происходит насыщение и на временах порядка времени установления амплитуда выходит на стационарный уровень  $A_m = F_0 / (2\gamma\omega_0)$ .

## 5.4 Резонанс

Через достаточно большое время после начала действия силы в системе устанавливаются вынужденные колебания, амплитуда и фаза которых задаются формулами (5.18) и (5.16). Исследуем эти соотношения более подробно. Начнем с амплитуды. Введем безразмерную величину  $u = p/\omega_0$  и перепишем формулу (5.18) в виде

$$A(u) = \frac{F_0/\omega_0^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + u^2/Q^2}}, \quad (5.21)$$

$Q = \omega_0/2\gamma$  — добротность осциллятора. Зависимости  $A(u)$  для разных значений добротности приведены на рис. 5.4. Из них видно, что максимальное значение амплитуды достигается при  $p \approx \omega_0$ . Возрастание амплитуды вынужденных колебаний, когда частота внешней силы близка к собственной частоте осциллятора, называется *резонансом*, а зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия называется резонансной кривой. Кривые на рис. 5.4 показывают, что чем выше добротность системы, тем “острее” резонансная кривая. Максимальное значение амплитуды достигается при частотах, несколько меньших, чем  $\omega_0$ , однако чем больше добротность, тем резонансная частота ближе к  $\omega_0$ . Точное значение резонансной частоты можно найти, вычислив нуль производной функции  $A(u)$ . Обозначим выражением под корнем в (5.21) через  $D(u) = (1-u^2)^2 + u^2/Q^2$ , тогда  $D'(u) = -4u(1-u^2) + 2u/Q^2$ , следовательно  $A(u)$  имеет два экстремума  $u = 0$  и  $u = \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$ . Второй корень соответствует резонансу, отсюда получаем  $\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$ . В условиях большой

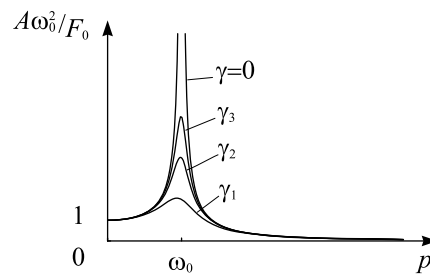


Рис. 5.4. Резонансные кривые осциллятора для различных величин затухания.  $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$ .

добротности  $\omega_p \approx \omega_0[1 - 1/(4Q^2)]$ . Видно, что уже при  $Q = 5$  относительная разность между  $\omega_p$  и  $\omega_0$  оказывается меньше одного процента. Для колебательных систем, у которых добротность больше нескольких десятков, этой разностью почти всегда можно пренебречь. По этой причине в дальнейшем мы будем полагать  $\omega_p = \omega_0$  без специальных оговорок.

Если внешняя сила постоянна ( $p = 0$ ), то статическое смещение осциллятора равно  $A(0) = F_0/\omega_0^2$ . Положив в (5.21)  $p = \omega_0$ , получаем, что точно в резонансе амплитуда колебаний есть  $A_m = F_0/(2\gamma\omega_0)$ . Отношение  $A_m/A(0) = Q$ , откуда видно, что для добротных систем размах резонансных колебаний может достигать огромных величин! Система, устойчивая к внешнему статическому воздействию, может быть разрушена, если внешняя сила содержит частотные компоненты, совпадающие с резонансной частотой. Именно поэтому необходим тщательный расчет резонансных частот таких сложных колебательных систем, как балки, мосты, турбины моторов, корпуса самолетов и кораблей, а также сложных электрических схем.

Красивый пример использования резонанса можно найти у Л.И. Мандельштама [40, с.251]. "Звонарь на колокольне, раскачивающий тяжелый колокол, пользуется, хотя и бессознательно, тем же явлением. Он не в состоянии преодолеть тяжесть колокола одним усилием и поэтому поступает так. Он дает веревке слабый толчок: колокол отклоняется, но очень незначительно, а затем возвращается обратно; как раз в момент возвращения звонарь дает следующий толчок и такими ритмичными, следующими в *tempo* колебаний колокола толчками, он его раскачивает до тех пор, пока язык не ударит по колоколу. Вот почему, между прочим, звонить в тяжелый колокол, особенно снизу, при помощи веревки, т.е. в условиях, когда следить за колебаниями нельзя, требует немалого навыка".

Резонансные кривые на рис. 5.4 соответствуют системам с малой добротностью. Если добротность осциллятора велика, то качественный вид резонансных кривых оказывается иным из-за необходимости другого выбора масштабов по осям координат. Чтобы исследовать этот случай, разложим функцию  $D(u)$  вблизи резонансного значения в ряд, ограничившись

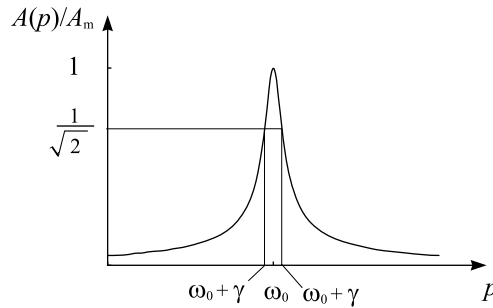


Рис. 5.5. Резонансная кривая осциллятора в случае большой добротности. Ширина резонансной кривой на уровне  $A/A_m = 1/\sqrt{2}$  равна  $2\gamma$ .

двумя слагаемыми. Пренебрегая поправками порядка  $1/Q^2$  к основным членам разложения, получим  $D(u) \approx 1/Q^2 + 4(u - 1)^2$ . Подставляя это разложение в (5.21) и возвращаясь к размерным величинам, получаем

$$A(p) = \frac{F_0/(2\gamma\omega_0)}{\sqrt{1 + (p - \omega_0)^2/\gamma^2}}. \quad (5.22)$$

В этом приближении резонансная кривая симметрична относительно частоты  $\omega_0$ . Полученная зависимость часто называется лоренцевой кривой, или лоренцевым распределением, поскольку она играет важную роль в теории дисперсии света, построенной Г.Лоренцем. Резонансная кривая, отвечающая уравнению (5.22), приведена на рис. 5.5.

На измерении формы резонансной кривой основан метод экспериментального определения параметров осциллятора — собственной частоты и добротности. Для этого в эксперименте снимают зависимость амплитуды колебаний осциллятора от частоты и строят ее в координатах  $(p, A^2/A_m^2)$ . Максимум этой кривой приходится на резонансную частоту. Кроме того, из (5.22) следует, что при  $p = \omega_0 \pm \gamma$  квадрат амплитуды уменьшается в два раза по сравнению с резонансным значением. Поэтому измерив ширину резонансной кривой на уровне  $1/2$ , можно определить  $\Delta\omega = 2\gamma$  и вычислить добротность осциллятора по формуле  $Q = \omega_0/\Delta\omega_0$ .

Рассмотрим теперь случай резонанса в осцилляторе без затухания. Прямая подстановка в (5.18)  $\gamma = 0$  и  $p = \omega_0$  дает бесконечность, поэтому иногда можно встретить утверждение, что амплитуда колебаний консервативного осциллятора в резонансе бесконечна. На самом деле это утверждение неверно и ошибка состоит в том, что вынужденное решение (5.17) найдено в предположении, существования стационарных колебаний с постоянной амплитудой, что в данном случае не выполняется. Чтобы получить правильный ответ, следует действовать более аккуратно. Рассмотрим, например, осциллятор без затухания, который покоится и при  $t = 0$  на него начинает действовать сила  $F(t) = F_0 \cos(pt + \psi_0)$ , причем



сначала  $p \neq \omega_0$ . Решение равно

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{\omega_0^2 - p^2} \cos(pt + \psi_0)$$

Находя коэффициенты  $A$  и  $B$  из начальных условий, приводим эту формулу к виду

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - p^2} [\cos(pt + \psi_0) - \cos(\omega_0 t + \psi_0)] - \frac{F_0}{\omega_0(\omega_0 + p)} \sin \psi_0 \sin \omega_0 t.$$

При переходе к пределу  $p \rightarrow \omega_0$  в первом слагаемом следует аккуратно вычислить неопределенность типа  $0/0$ , что дает

$$x(t) = -\frac{F_0}{2\omega_0^2} \sin \psi_0 \sin \omega_0 t + \frac{F_0 t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t + \psi_0), \quad (5.23)$$

Видно, что решение является суммой двух слагаемых, одно из которых ограничено, а второе соответствует колебанию с линейно растущей во времени амплитудой. Таким образом, в любой момент времени решение остается конечным, однако колебания никогда не выходят на стационарный уровень. Через некоторое время второе слагаемое оказывается преобладающим, в итоге получаются колебания с линейно растущей амплитудой. В реальных системах, конечно, такое возрастание будет в конце концов ограничено одним из неучтенных факторов: малым затуханием или нелинейностью.

## 5.5 Фазовые соотношения при резонансе

Исследуем теперь фазовые соотношения между вынуждающей силой и откликом осциллятора. Сдвиг фазы между этими колебаниями задается формулами (5.16). Из них, во-первых, следует, что при любой частоте  $\sin \psi < 0$ , т.е.  $-\pi < \psi < 0$ . Следовательно отклик всегда отстает по фазе от воздействия. Во-вторых, из (5.16) следует, что

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{-2\gamma p}{\omega_0^2 - p^2}$$

Предположим, что частота  $p$  такова, что резонанса нет. Это значит, что  $|\omega_0 - p| \gg \gamma$ . Если  $\omega_0 \gg p$ , то  $\operatorname{tg} \psi \approx \psi \approx -p/(Q\omega_0)$ , если же  $\omega_0 \ll p$ , то  $\operatorname{tg} \psi \approx \omega_0/(Qp)$  и  $\psi \approx -\pi + \omega_0/(Qp)$ . Таким образом, вне резонанса колебания осциллятора происходят либо в фазе с внешним воздействием ( $p \ll \omega_0$ ), либо в противофазе с ним ( $p \gg \omega_0$ ). Переход из одного состояния в другое при изменении частоты воздействия происходит в узкой полосе шириной порядка  $2\gamma$  вблизи резонансной частоты. Точно в резонансе ( $p = \omega_0$ ) сдвиг фазы равен  $\psi = -\pi/2$ .

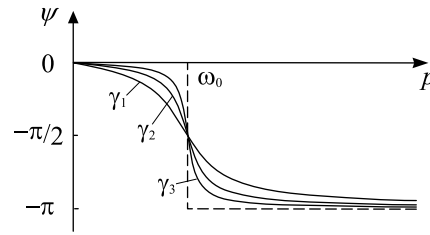


Рис. 5.6. Фаза вынужденных колебаний осциллятора относительно фазы внешней силы.  $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$ .

Зависимости  $\psi(p)$  для нескольких значений добротности приведены на рис. 5.6. Отметим, что при увеличении добротности, эти кривые все более приближаются к функции-ступеньке. Для осциллятора без потерь  $\psi = 0$ , если  $p < \omega_0$  и  $\psi = -\pi$ , если  $p > \omega_0$ .

Явление резонанса проявляется буквально на каждом шагу. Приведем несколько примеров.

Резонанс лежит в основе принципа действия сверхвысокочастотных электронных приборов, в которых используются высокодобротные объемные резонаторы. Типичными приборами этого класса являются клистроны, а простейшим из них можно назвать двухрезонаторный пролетный усилительный клистрон (рис. 5.7) [41]. Входной сигнал от внешнего источника с частотой  $\omega$ , близкой к собственной частоте  $\omega_0$  резонатора, воздействует на электронный пучок внутри высокочастотного зазора. Поэтому на входе в трубу дрейфа электроны имеют разные скорости. Труба дрейфа — пространство, свободное от внешних высокочастотных полей. В этом пространстве из-за конечного времени пролета электроны, покинувшие резонатор с большими скоростями, догоняют электроны, вылетевшие раньше с меньшими скоростями. Это приводит к группированию электронов, образованию электронных сгустков — уплотнений и в результате — к возникновению переменной составляющей тока [42, гл. 2]. Если частота возбуждения входного резонатора близка к собственной частоте выходного, то электронные сгустки будут возбуждать его резонансным образом, что приведет к усилению входного сигнала. Когда входной сигнал велик, в пучке начинают сказываться нелинейные процессы и возникают гармоники тока частоты  $\omega$ . Такие гармоники будут эффективно возбуждать колебания в выходном резонаторе опять-таки при выполнении условий резонанса во времени, которые для  $n$ -й гармоники запишутся в виде  $n\omega \approx \omega_0$  ( $n$ -целое). Это будет уже клистрон-умножитель частоты.

Использование явления резонанса чрезвычайно разнообразно. На его основе определяют, в частности, собственные колебания молекул в веществе. Молекулы некоторых газов, молекулы с электрическим дипольным моментом, парамагнитные атомы и ионы во внешнем магнитном поле и т.п. имеют такой набор энергетических уровней, которому соответству-

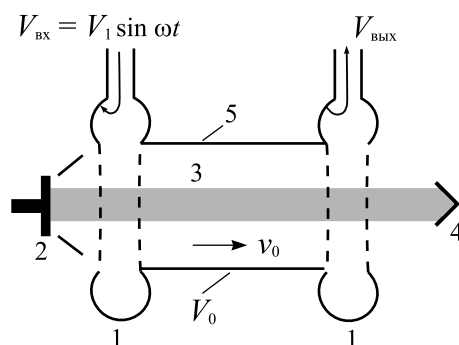


Рис. 5.7. Схематическое изображение двухрезонаторного клистрона – усилителя: 1 – входной и выходной объемные резонаторы; 2 – электронная пушка; 3 – электронный поток; 4 – коллектор, собирающий электроны; 5 – трубка дрейфа;  $V_0$  – потенциал резонаторов и трубки дрейфа;  $V_{вх}$  и  $V_{вых}$  – СВЧ входное и выходное напряжения.

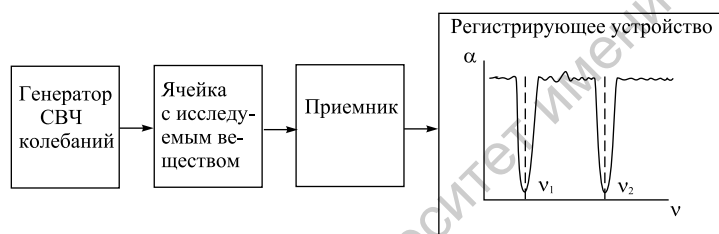


Рис. 5.8. Блок-схема спектрографа:  $\alpha$  – величина, характеризующая поглощение,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – резонансные частоты

ют собственные (резонансные) частоты, лежащие в сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне радиоволн. Если такая молекула или атом облучаются СВЧ электромагнитными колебаниями, частота которых удовлетворяет условию  $h\nu = W_{в} - W_{н}$ , ( $h$  – постоянная Планка;  $W_{в}, W_{н}$  – значения энергии на верхнем и нижнем уровнях), то может произойти резонансное поглощение.

Для изучения поглощения СВЧ колебаний атомами или молекулами применяют радиоспектрографы (рис. 5.8) [43]. От генератора СВЧ колебаний<sup>3</sup> излучение попадает в поглощающую ячейку – объемный резонатор (или отрезок волновода), заполненный исследуемым веществом. Когда частота сигнала, подаваемого от внешнего источника, совпадает в резонаторе

<sup>3</sup>В качестве генератора СВЧ колебаний часто применяют отражательные клистроны (рис. 5.8), в которых модуляция электронов по скорости и передача энергии сгруппированным пучком электронов высокочастотному полю осуществляется в одном резонаторе благодаря тому, что электроны группируются в тормозящем статическом поле в пространстве резонатор-отражатель (электрод с потенциалом  $V_R$  на рис. 5.9) и возвращаются в резонатор. Частоту колебаний можно плавно изменять, меняя напряжение на отражателе. Сигнал от клистрона, поступающий в ячейку, модулируется по частоте.

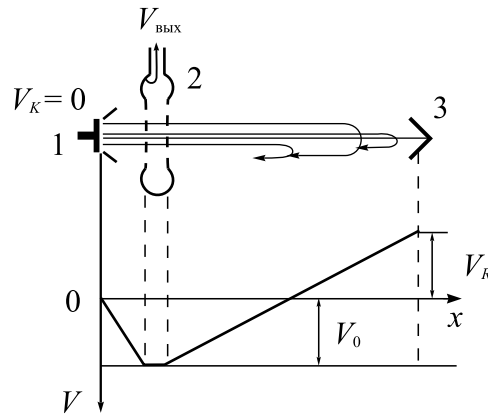


Рис. 5.9. Схематическое изображение клистронного генератора и картина распределения статического потенциала вдоль длины прибора;

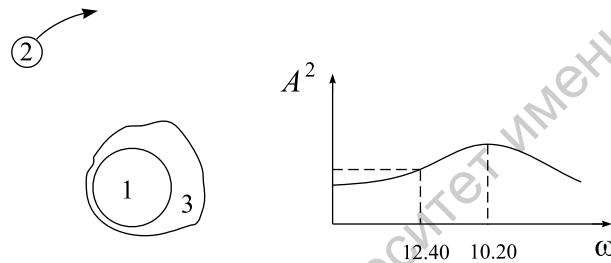


Рис. 5.10. К определению собственных параметров Земля — атмосфера:  $T = 2\pi/\omega = 10$  ч. 20 мин. 1 — Земля, 2 — Луна, 3 — атмосфера Земли.

или волноводе с резонансной частотой поглощения исследуемого вещества, то происходит поглощение СВЧ излучения, которое приводит к ослаблению сигнала на выходе приемника и к появлению на кривой зависимости поглощаемой мощности от частоты пиков — максимумов поглощения спектральных линий. Исследование резонансных частот, ширины и формы спектральных линий позволяет определить структуру молекул, структуру атомных ядер и строение электронных оболочек атомов, устанавливать характер взаимодействия между атомами и молекулами в веществе и т. д. (подробнее см. [43]).

Резонанс можно использовать и для глобальных измерений. С его помощью удалось, например, определить параметры осциллятора Земля — атмосфера [44]. Внешней силой в этом случае служит Луна, которая вращается вокруг Земли и вызывает два раза в сутки приливы атмосферы с периодом 12 часов 40 минут. Если атмосферу сместить, то благодаря возвращающей гравитационной силе возникнут ее колебания относительно Земли. Для измерения параметров  $\gamma$  и  $\omega_0$  такого глобального осциллятора достаточно найти  $A^2/A_m^2$  и  $\psi$  при каком-нибудь одном значении  $\omega$ . Так и было сделано: измерили величину атмосферных приливов и время их за-

держки, что позволило по одной известной точке построить резонансную кривую (рис. 5.10).

## 5.6 Энергетические соотношения при резонансе и метод усреднения

Полезно получить выражения для резонансной кривой и фазы вынужденных колебаний другим способом, в основе которого лежит метод усреднения. Проведем этот вывод на примере колебательного контура, описываемого уравнением (5.2). Умножим его на  $I = \dot{Q}$  и учтем, что  $2Q\dot{Q} = dQ^2/dt$ ,  $2\dot{Q}\ddot{Q} = d(\dot{Q})^2/dt$ ,  $\omega_0^2 = (1/LC)$  и  $\gamma = R/(2L)$ . Полученное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{LI^2(t)}{2} + \frac{Q^2(t)}{2C} \right) + RI^2(t) = E(t)I(t). \quad (5.24)$$

Очевидно, что это закон сохранения энергии: работа, совершаемая ЭДС, расходуется на изменение энергии в контуре и омические потери. Усредним это уравнение по времени, предполагая, что переходный процесс завершился и в контуре существуют только периодические вынужденные колебания. При усреднении полной производной по периоду получается нуль, поэтому результат усреднения таков:

$$\overline{RI^2(t)} = \overline{E(t)I(t)}. \quad (5.25)$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии в среднем за период.

Одного уравнения недостаточно, чтобы определить амплитуду и фазу колебаний. Для получения второго уравнения умножим (5.2) на  $Q(t)$  и воспользуемся формулой  $Q\ddot{Q} = d(Q\dot{Q})/dt - \dot{Q}^2$ . Получаем

$$\frac{d}{dt} (Q\dot{Q} - \gamma Q^2) - \dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2 = \frac{1}{L} E(t)Q(t).$$

После усреднения по времени слагаемое с полной производной вновь исчезает, а оставшееся выражение приводится к виду

$$\frac{\overline{Q^2(t)}}{2C} - \frac{\overline{LI^2(t)}}{2} = \frac{1}{2} \overline{E(t)Q(t)}. \quad (5.26)$$

В левой части (5.26) стоит разность средних за период значений электрической и магнитной энергий колебаний. Физический смысл этого соотношения становится понятным, если привлечь аналогию между колебаниями в контуре и колебаниями механической системы, например грузика на пружинке. Уравнения второй системы получаются из первой заменами  $Q(t) \rightarrow x(t)$ ,  $I(t) \rightarrow v(t)$ ,  $L \rightarrow m$ ,  $1/C \rightarrow k$  и  $E(t) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{вн}}(t)$  ( $\mathcal{F}_{\text{вн}}$  — внешняя

сила, действующая на грузик). При этом уравнение (5.26) преобразуется в

$$\frac{\overline{kx^2(t)}}{2} - \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{1}{2} \overline{\mathcal{F}_{\text{вн}}(t)x(t)},$$

или  $2(\overline{W_{\text{п}}} - \overline{W_{\text{к}}}) = \overline{\mathcal{F}_{\text{вн}}(t)x(t)}$ . Поскольку упругая сила, действующая на грузик, равна  $\mathcal{F}_{\text{упр}} = -kx$ , то эта формула может быть переписана следующим образом:  $2\overline{W_{\text{к}}} + V = 0$ , где  $V = \overline{(\mathcal{F}_{\text{вн}} + \mathcal{F}_{\text{упр}})x(t)}$  — вириал системы [24]. Таким образом, уравнение (5.26) есть полный аналог теоремы вириала (1.53) для механических систем, о которой шла речь в лекции 1.

До сих пор единственным предположением, сделанным при выводе уравнений (5.25) и (5.26) было предположение о периодичности движения осциллятора. Конкретизируем его, считая, что ЭДС меняется по гармоническому закону<sup>4</sup>  $E(t) = E_0 \cos pt$ , а отклик осциллятора равен  $Q(t) = Q_0 \cos(pt + \psi)$ . В этом случае все средние в формулах (5.25) и (5.26) легко вычисляются, что дает соотношения

$$\begin{aligned} Rp^2Q_0^2 &= -pQ_0E_0 \sin \psi, \\ \frac{Q_0^2}{2C} - \frac{p^2L^2Q_0^2}{2} &= \frac{1}{2}Q_0E_0 \cos \psi, \end{aligned} \quad (5.27)$$

или

$$\begin{aligned} 2\gamma pQ_0 &= -E_0/L \sin \psi, \\ (\omega_0^2 - p^2)Q_0 &= E_0/L \cos \psi, \end{aligned} \quad (5.28)$$

Возводя в квадрат и складывая эти формулы, получаем

$$Q_0^2 = \frac{E_0^2/L^2}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2p^2},$$

что, очевидно, с точностью до переобозначений совпадает с формулой для резонансной кривой (5.18). Подставив найденное значение  $Q_0$  в (5.28), получаем формулы (5.16) для сдвига фазы  $\psi$ .

<sup>4</sup>Фазу внешней силы  $\psi_0$  можно положить равной нулю, так как рассматривается только установившееся решение, и отсчет времени можно выбрать так, чтобы обеспечить выполнение этого условия.

## Лекция 6

# Осциллятор под произвольным внешним воздействием

*Периодическая внешняя сила. Произвольная внешняя сила. Предельные случаи: толчок и медленное изменение внешнего воздействия.*

### 6.1 Периодическая внешняя сила

В этой лекции будут рассмотрены несколько случаев, когда сила, действующая на осциллятор не является гармонической. Речь будет идти о режиме установившихся колебаний, когда собственным движением осциллятора можно пренебречь.

Рассмотрим сначала случай периодической силы с периодом  $T$ , т.е.  $F(t + T) = F(t)$ . Известно, что периодическую функцию можно разложить в ряд по гармоническим компонентам — синусам и косинусам, это разложение называется рядом Фурье [33, § 14]. Ряд Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} F(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \chi_n\right), \quad (6.1) \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  определяются формулами

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \overline{F(t)}, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ , а фаза гармоники с номером  $n$  — формулами

$$\cos \chi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \chi_n = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}. \quad (6.3)$$

Ряд Фурье существует и сходится к исходной функции  $F(t)$ , если она на периоде абсолютно интегрируема и удовлетворяет условиям Дирихле (см. примечание на стр. 47). В точке разрыва первого рода ряд Фурье сходится к значению, равному полусумме предельных значений функции справа и слева от разрыва.

Благодаря принципу суперпозиции отклик осциллятора на периодическую силу можно рассчитать как сумму откликов на действие каждой временной гармоники. Поэтому сразу можно записать вынужденное решение в виде

$$\xi(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_n^2)^2 + 4\gamma^2 p_n^2}} \cos(p_n t + \chi_n + \psi_n), \quad (6.4)$$

где  $p_n = 2\pi n/T$  — частота  $n$ -й Фурье гармоники, а фазовые сдвиги  $\psi_n$ , определяются из формул, подобных (5.16), в которых вместо  $p$  следует подставить  $p_n$ .

Обычно наибольший интерес вызывает случай, когда осциллятор имеет высокую добротность. При этом характер решения зависит от того, попадает частота хотя бы одной из гармоник в полосу резонанса, или нет. Если существует такое  $n$ , что выполняется условие  $|\omega_0 - 2\pi n/T| \lesssim \gamma$ , то гармоника с этим номером оказывает значительно большее воздействие на осциллятор чем все остальные благодаря резонансу<sup>1</sup>. В таком случае

$$\xi(t) \approx \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_n^2)^2 + 4\gamma^2 p_n^2}} \cos(p_n t + \chi_n + \psi_n). \quad (6.5)$$

<sup>1</sup>Предполагается, естественно, что для этого значения  $n$  выполняется условие  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \neq 0$ .



Если же все гармоники находятся вне резонанса, то их результирующее воздействие определяется, в основном, скоростью спада амплитуд  $a_n$  и  $b_n$  с ростом  $n$ .

Таким образом, резонанс возможен не только под действием гармонической внешней силы, но и когда внешняя сила периодическая, следовательно данное выше определение резонанса требует обобщения. Резонанс под действием периодической внешней силы будет возникать, если собственная частота системы близка к частоте одной из фурье-гармоник силы  $p_n = 2\pi n/T$ , и амплитуда этой гармоники  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  не равна нулю.

Часто пользуются комплексной формой записи ряда Фурье:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nt/T}, \quad (6.6a)$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-i2\pi nt/T} dt. \quad (6.6b)$$

Связь между представлениями (6.1) и (6.6a) легко получить, если воспользоваться условием, что функция  $F(t)$  — действительная. Тогда  $c_n = c_{-n}^*$  и формулу (6.6a) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} F(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n e^{i2\pi nt/T} + c_n^* e^{-i2\pi nt/T} \right) = \\ &= c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( c'_n \cos \frac{2\pi nt}{T} - c''_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $c'_n$  и  $c''_n$  — действительная и мнимая части  $c_n$ . Сравнивая это соотношение с формулой (6.1), получаем, что  $c_0 = a_0$ ,  $a_n = 2c'_n$ ,  $b_n = -2c''_n$ ,  $\chi_n = \text{Arg } c_n$ . Формула (6.4) при этом принимает вид

$$\xi(t) = \frac{c_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|c_n| \cos(p_n t + \chi_n + \psi_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_n^2)^2 + 4\gamma^2 p_n^2}}. \quad (6.7)$$

## 6.2 Произвольная внешняя сила

Уравнение гармонического осциллятора допускает точное решение для вынужденных колебаний и в случае произвольной внешней силы. Для вывода соответствующей формулы воспользуемся переходом к нормальным колебаниям. Для этого перепишем уравнение (5.3) в виде двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = v, \quad (6.8a)$$

$$\dot{v} = -2\gamma v - \omega_0^2 x + F(t) \quad (6.8b)$$

Умножая второе из этих уравнений на коэффициент  $\beta$  и складывая со вторым, получаем

$$\frac{d}{dt}(x + \beta v) = -\beta \omega_0^2 \left( x - \frac{1 - 2\gamma\beta}{\omega_0^2 \beta} v \right) + \beta F(t). \quad (6.9)$$

Потребуем, чтобы выражения в круглых скобках справа и слева совпали, это выполняется, если  $\beta = -(1 - 2\gamma\beta)/(\omega_0^2 \beta)$ , или

$$\omega_0^2 \beta^2 - 2\gamma\beta + 1 = 0.$$

Отсюда находим  $\omega_0^2 \beta_{1,2} = (\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) = (\gamma \pm i\omega)$ . Подстановка  $\beta = \beta_1$  в (6.9) приводит к уравнению

$$\frac{da}{dt} = -(\gamma + i\omega)a + \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} F(t), \quad (6.10)$$

а подстановка  $\beta = \beta_2$  — к уравнению

$$\frac{da^*}{dt} = -(\gamma - i\omega)a^* + \frac{\gamma - i\omega}{\omega_0^2} F(t), \quad (6.11)$$

где  $a(t)$  и  $a^*(t)$  — нормальные колебания (см. лекцию 3), равные

$$a(t) = x + \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} v, \quad a^*(t) = x + \frac{\gamma - i\omega}{\omega_0^2} v, \quad (6.12)$$

Обратив эти формулы, запишем выражения для  $x(t)$  и  $v(t)$  через нормальные колебания:

$$x = \frac{1}{2} [(1 + i\gamma/\omega) a + (1 - i\gamma/\omega) a^*], \quad v = \frac{\omega_0^2}{2i\omega} (a - a^*). \quad (6.13)$$

Решение уравнения (6.10) ищем в виде  $a(t) = A(t) \exp[(-\gamma - i\omega)t]$ ; для  $A(t)$  получается уравнение  $\dot{A} = (\gamma + i\omega) \exp[(\gamma + i\omega)t] F(t)/\omega_0^2$ , проинтегрировав которое и подставив результат в формулу для комплексной амплитуды, получаем

$$a(t) = \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} \int_0^t e^{-(\gamma+i\omega)(t-t')} F(t') dt'. \quad (6.14)$$

Используя это выражение в первом из уравнений (6.13), будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega(t-t') F(t') dt'. \quad (6.15)$$

При выводе (6.15) предполагалось, что сила начинает действовать на неподвижный осциллятор в момент времени  $t = 0$ . Если начальные координата и (или) скорость осциллятора ненулевые, то к (6.15) следует добавить слагаемые, соответствующие собственным затухающим колебаниям. Другой вариант начальных условий состоит в том, что к моменту времени  $t$  сила действует достаточно долго. В этом случае в уравнении (6.15) нижний предел интегрирования следует заменить на  $-\infty$ .

Если потерь нет ( $\gamma = 0$ ), то формулу (6.15) можно преобразовать к виду  $x(t) = A(t) \cos \omega_0 t + B(t) \sin \omega_0 t$ , где

$$A(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 t' F(t') dt', \quad B(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \cos \omega_0 t' F(t') dt'. \quad (6.16)$$

Если, например,  $F(t) = F_0 \sin \omega_0 t$ , то  $A(t) = (F_0/2\omega_0)[t - \sin(2\omega_0 t)/(2\omega_0)]$  и при  $t \rightarrow \infty$  решение неограниченно — получаем секулярный рост. Очевидно, что если с ростом  $t$  коэффициенты  $A(t)$  и  $B(t)$  остаются малыми, то резонанса в системе нет. Таким образом, условие отсутствия резонанса записывается в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \begin{array}{l} \sin \omega_0 t' \\ \cos \omega_0 t' \end{array} \right\} F(t') dt' = 0. \quad (6.17)$$

Математически это соотношение означает, что функция  $F(t)$  не должна содержать собственных функций задачи. В общем случае, когда затухание не равно нулю, математически строгое определение резонанса (6.17) заменяется физическим условием “значительного возрастания амплитуды колебаний”.

## 6.3 Предельные случаи

### 6.3.1 Резкий толчок

Предположим, что сила  $F(t)$  имеет характерный вид короткого импульса длительностью  $\Delta\tau$  (рис. 6.1,а), причем  $\Delta\tau \ll 2\pi/\omega_0 \ll 1/\gamma$ . В этом случае можно считать, что осциллятору резким толчком сообщается импульс  $m \int_0^{\Delta\tau} F(\tau) d\tau$ , после чего он начинает совершать колебания по закону

$$x(t) = \frac{\int_0^{\Delta\tau} F(\tau) d\tau}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t. \quad (6.18)$$

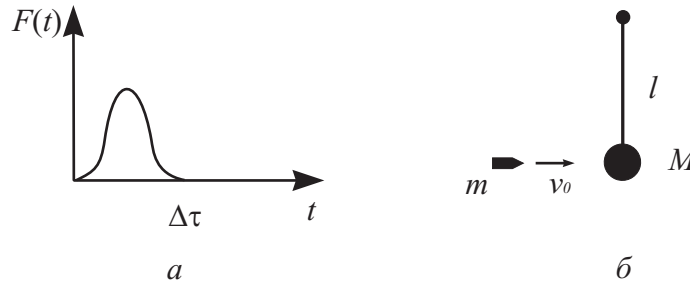


Рис. 6.1. Действие на осциллятор резкого толчка: качественный вид внешней силы (а) и устройство баллистического маятника (б).

Как получить этот очевидный с физической точки зрения результат из общей формулы (6.15)? Представим ее в виде

$$x(t) = \left[ -\frac{1}{\omega} \int_0^t e^{\gamma\tau} \sin \omega\tau F(\tau) d\tau \right] e^{-\gamma t} \cos \omega t + \left[ \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{\gamma\tau} \cos \omega\tau F(\tau) d\tau \right] e^{-\gamma t} \sin \omega t.$$

При  $t > \Delta\tau$  верхний предел интегрирования можно положить равным  $\Delta\tau$ , при этом под интегралами можно приближенно считать  $\sin \omega\tau \approx \omega\tau$ ,  $\cos \omega\tau \approx 1$  и  $\exp(\gamma\tau) \approx 1$ . Тогда отношение первого из этих интегралов ко второму оценивается как  $\omega\Delta\tau \ll 1$ , поэтому первым слагаемым можно пренебречь, в результате чего приходим к формуле (6.18).

Формула (6.18) лежит в основе работы баллистических приборов, служащих для определения импульса кратковременно действующих сил [45]. К таким приборам относятся, в частности, баллистический маятник, служащий для измерения скорости пули и баллистический гальванометр, измеряющий количество заряда, прошедшего по цепи.

Устройство баллистического маятника показано на рис. 6.1,б. Пуля массой  $m$ , имеющая скорость  $v_0$ , попадает в неподвижный маятник массы  $M \gg m$  и застревает в нем. В результате этого маятник приобретает начальную горизонтальную скорость  $V \approx mv_0/M$ . В эксперименте удобней всего измерять величину первого максимального отклонения маятника от положения равновесия. Подставляя в (6.18)  $\int_0^{\Delta\tau} F(\tau) d\tau = V$ , легко находим, что это отклонение равно

$$X_1 = \frac{mv_0}{M\omega} e^{-\gamma t_1} \sin \omega t_1, \quad (6.19)$$

где  $t_1 = \arctg(\omega/\gamma)/\omega$ . Таким образом, величина первого максимального отклонения пропорциональна скорости:  $X_1 = \beta v_0$ , где константа  $\beta$  обычно

определяют градуировкой прибора. Тем не менее, формула (6.19) необходима для выбора параметров прибора и оценки погрешностей.

### 6.3.2 Очень медленное изменение внешней силы

Этот случай соответствует выполнению других соотношений между временными масштабами задачи:  $\Delta\tau \gg 1/\gamma \gg 2\pi/\omega_0$ . Характерное время изменения внешней силы можно определить, например, как  $\Delta\tau \sin |F/F'|$ . Интуитивно ясно, что если сила меняется очень медленно, то в каждый момент времени осциллятор успевает “подстроиться” к ее текущей величине, меняя положение равновесия. В уравнении (5.3) первое и второе слагаемые слева, пропорциональные соответственно силе инерции и силе трения, пренебрежимо малы по сравнению с возвращающей силой (третье слагаемое), которая почти целиком уравнивает внешнюю силу справа. Отсюда следует простое соотношение

$$x(t) \approx \frac{F(t)}{\omega_0^2}. \quad (6.20)$$

Почтительно получить его прямо из общей формулы (6.15). Предположим, что  $F(t)$  дифференцируема, тогда в (6.15) можно провести интегрирование по частям:

$$x(t) = \frac{F(t)}{\omega^2} - \frac{F(0)e^{-\gamma t} \cos \omega t}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \cos \omega(t-t') \left[ \frac{dF(t')}{dt} + \gamma F(t') \right] dt'. \quad (6.21)$$

Второе слагаемое в этом выражении представляет собой собственные затухающие колебания осциллятора, возникшие из-за скачкообразного “включения” внешней силы при  $t = 0$ . Через время порядка  $1/\gamma$  они затухают, поэтому на интересующих нас масштабах времени это слагаемое пренебрежимо мало.

Используя оценку  $F' \sim F/\tau$ , получаем, что последнее слагаемое в (6.21) имеет порядок

$$\max \left( \frac{1}{\omega\tau}, \frac{\gamma}{\omega} \right) \left[ \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \cos \omega(t-t') F(t') dt' \right].$$

Выражение в квадратных скобках имеет тот же порядок величины, что и само  $x(t)$  (см. (6.15)), значит все это слагаемое в  $\max(1/(\omega\tau), \gamma/\omega) \ll 1$  раз меньше, чем первый член в (6.21). В результате в (6.21) остается только первое слагаемое, что совпадает с выражением (6.20) в приближении большой добротности.

Заметим, что если существуют производные функции  $F(t)$  более высокого порядка, то интегрирование по частям может быть повторено еще несколько раз, таким образом получается разложение для  $x(t)$  в асимптотический ряд по степеням  $1/\omega$ .

## Лекция 7

# Осциллятор с изменяющимися параметрами

*Примеры осцилляторов с переменными параметрами: колебательный контур, маятник с вибрирующим подвесом, качели. Параметрический резонанс. Теория Флоке. Параметрическая неустойчивость в модельной системе. Уравнение Маттье. Метод Ван-дер-Поля для основного параметрического резонанса. Влияние затухания. Параметрическая неустойчивость в двухконтурной схеме. Соотношения Мэнли-Роу. Медленное изменение параметров осциллятора. Адиабатический инвариант. Движение в быстро осциллирующем поле. Маятник Капицы. Лазер на свободных электронах.*

### 7.1 Вводные замечания

Существует несколько способов, которыми можно сообщить энергию колебательной системе. С тремя из них мы уже познакомились в предыдущих лекциях. Во-первых, можно сделать это в начальный момент времени, выведя осциллятор из положения равновесия или толкнув его, т. е. использовать начальные условия. Во-вторых, можно реализовать систему с отрицательным трением, когда положение равновесия станет неустойчивым. Третий способ состоит в действии на осциллятор внешней силы, находящейся с ним в резонансе. Оказывается, что существует еще один способ, заключающийся в *изменении параметров осциллятора во времени*. При определенных условиях это может приводить к появлению неустойчивости в системе, а также к ряду других интересных физических эффектов.

Рассмотрим колебательный контур, емкость которого меняется во времени (рис. 7.1,а), что можно обеспечить, например, механически изменяя

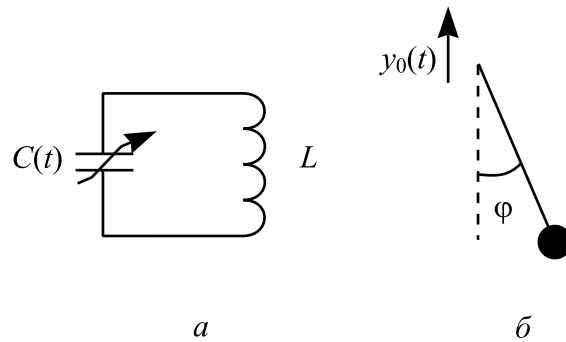


Рис. 7.1. Примеры осцилляторов с переменными параметрами: колебательный контур с меняющейся емкостью (а) и маятник, точка подвеса которого движется с ускорением в вертикальном направлении (б).

расстояние между пластинами конденсатора<sup>1</sup>. Мгновенное значение заряда на конденсаторе  $Q(t)$  связано с напряжением на нем  $V_c(t)$  соотношением  $Q(t) = C(t)V_c(t)$ , а уравнение Киргхофа для контура имеет вид  $L\dot{I}(t) + V_c(t) = 0$ . Учитывая, что  $I(t) = \dot{Q}(t)$ , получаем уравнение

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC(t)}Q(t) = 0. \quad (7.1)$$

Это уравнение имеет вид уравнения гармонического осциллятора, частота колебаний которого меняется во времени. С математической точки зрения, мы имеем дело с линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Отметим, что если в качестве динамической переменной выбрать не заряд, а ток в контуре, то вместо (7.1) получается уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[ LC(t) \frac{dI(t)}{dt} \right] + I(t) = 0. \quad (7.2)$$

Это означает, что уравнения (7.1) и (7.2) эквивалентны и могут быть получены друг из друга заменой переменных.

Другой пример осциллятора с переменными параметрами дает маятник, точка подвеса которого совершает движение с ускорением в вертикальном направлении по заданному закону  $y = y_0(t)$  (рис. 7.1,б). Переход в неинерциальную систему отсчета, в которой точка подвеса покоится, позволяет записать уравнение маятника:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi - m\ddot{y}_0(t)l\varphi,$$

<sup>1</sup>В современных радиотехнических схемах роль переменной емкости обычно играет заряженный слой свободных носителей в области  $p-n$ -перехода полупроводникового диода, а изменение емкости во времени обеспечивается изменением постоянного напряжения смещения на диоде.



где  $\varphi$  — угол отклонения маятника от положения равновесия, который считается малым. Второе слагаемое в правой части есть момент силы инерции  $F_{ин} = -m\ddot{y}_0(t)$ , действующей в вертикальном направлении в неинерциальной системе отсчета. Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\ddot{\varphi} + \left( \omega_0^2 + \frac{\ddot{y}_0(t)}{l} \right) \varphi = 0. \quad (7.3)$$

Видно, что (7.3) с точностью до переобозначений совпадает с уравнением (7.1) (здесь  $\omega_0^2 = g/l$ ).

Третий пример хорошо знаком читателю с детства: это качели. Для того, чтобы увеличивать амплитуду качания, мальчик на качелях должен приседать и выпрямлять ноги в определенные моменты времени согласованно с движением самих качелей. При этом происходит изменение во времени положения центра тяжести и момента инерции системы в целом. Не записывая соответствующего уравнения, скажем, что после некоторых упрощений оно также может быть приведено к виду (7.1).

В этих примерах изменению подвергается частота колебательной системы. Можно, однако, рассмотреть систему, в которой меняется во времени также и величина потерь, например колебательный контур с переменными сопротивлением и емкостью. В этом случае уравнение осциллятора имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma(t)\dot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0. \quad (7.4)$$

Заменой переменных

$$x(t) = \exp \left[ - \int^t \gamma(t') dt' \right] y(t), \quad (7.5)$$

такое уравнение преобразуется в уравнение

$$\ddot{y}(t) + [\omega^2(t) - \gamma^2(t) - \dot{\gamma}(t)] y(t) = 0, \quad (7.6)$$

в котором слагаемое с первой производной от  $y(t)$  по времени отсутствует. Таким образом, в наиболее общем случае линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами можно привести к канонической форме:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0. \quad (7.7)$$

Это уравнение будет основным объектом исследования в данной лекции.

С физической точки зрения наибольший интерес представляют такие системы, которые в некотором смысле близки по своим свойствам к гармоническому осциллятору. Так происходит, если  $\omega(t)$  — функция, близкая к константе, тогда в нулевом приближении можно считать, что в системе

существуют колебания с периодом  $2\pi/\omega(t)$ . Свойства системы оказываются существенно зависящими от соотношения двух характерных временных масштабов: периода колебаний и характерного времени изменения функции  $\omega(t)$ , назовем его  $\tau$ . Можно выделить три случая:

1. Оба временных масштаба имеют один порядок, т.е.  $\tau \sim 2\pi/\omega(t)$ . При этом говорят о *параметрических колебаниях*. Наиболее важен случай, когда  $\omega(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ , тогда возможно возникновение параметрической неустойчивости, когда малое начальное отклонение системы от положения равновесия будет приводить к нарастанию колебаний. Именно это происходит при раскачивании качелей.
2. Функция  $\omega(t)$  мало меняется за время одного колебания, т.е.  $\tau \gg 2\pi/\omega(t)$ . Это соответствует *адиабатически медленному* изменению параметров системы.
3. Параметры системы меняются значительно быстрее, чем характерный период колебаний осциллятора. В этом случае также возможны интересные физические эффекты, связанные с дополнительной силой, возникающей за счет эффекта усреднения быстрых колебаний в неоднородных пространственных полях.

Аналізу всех этих ситуаций посвящена настоящая лекция.

## 7.2 Параметрическая неустойчивость

Пусть квадрат частоты осциллятора в уравнении (7.7) можно представить в виде  $\omega^2(t) = \omega_0^2 f(t)$ , где  $f(t+T) = f(t)$ ,  $f(t)$  — безразмерная периодическая функция, которую мы будем считать мало уклоняющейся от единицы,  $T$  — ее период,  $\omega_0$  — величина с размерностью частоты. Если  $\omega(t)$  близка к константе  $\omega_0$  то мы ожидаем, что решения близки к гармоническим колебаниям с периодом  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Подчеркнем, что параметры  $T$  и  $T_0$  *независимы*, и наибольший интерес представляет случай, когда они относятся как небольшие целые или полуцелые числа. Почему это так, можно понять на примере все того же колебательного контура с переменной емкостью.

Пусть в контуре возбуждены колебания, а емкость конденсатора меняется следующим образом. В момент, когда заряд на пластинах конденсатора максимален, пластины резко раздвигают, делая емкость равной значению  $C_1$ , при этом напряжение на конденсаторе скачком увеличивается. Через четверть периода свободных колебаний в получившемся контуре, т.е. через время  $\pi\sqrt{LC_1}/2$ , заряд на пластинах оказывается равным нулю. В этот момент пластины резко сдвигают, так что емкость становится равной значению  $C_2 > C_1$ . Еще через время  $\pi\sqrt{LC_2}/2$ , когда заряд конденсатора снова оказывается максимальным, но противоположным по знаку заряду в начальный момент, пластины снова раздвигают, еще раз увеличивая

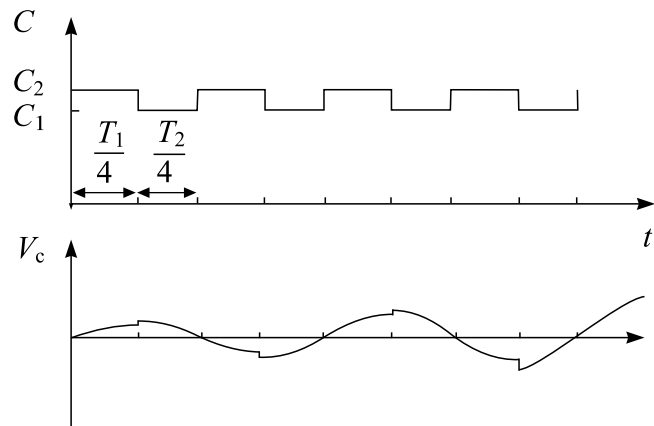


Рис. 7.2. Изменение емкости в колебательном контуре и напряжения на ней в зависимости от времени

напряжение, и так далее. Графики изменения емкости конденсатора и напряжения на нем в зависимости от времени показаны на рис. 7.2. Нетрудно понять, что в таком процессе будет постоянно совершаться работа, которая пойдет на увеличение энергии осциллятора, т. е. на рост амплитуды колебаний. Такое возрастание амплитуды колебаний при периодическом изменении параметров гармонического осциллятора называется *параметрическим резонансом*.

Можно сделать и количественные оценки. Пусть в момент перед раздвижением пластин напряжение на них равно  $V_c$ , а энергия в системе  $W = C_2 V_c^2 / 2$  (вся энергия сосредоточена в этот момент в конденсаторе). При резком увеличении расстояния между пластинами заряд на них не успевает измениться, а напряжение скачком увеличивается до значения  $V'_c$ , которое можно найти из закона сохранения заряда  $C_2 V_c = C_1 V'_c$ . Энергия в контуре становится равной  $W' = C_1 V'^2_c / 2$ . Собирая эти соотношения вместе, получаем для изменения энергии

$$\Delta W = W' - W = W \left( \frac{C_2}{C_1} - 1 \right) \approx W \frac{\Delta C}{C},$$

где  $\Delta C = C_2 - C_1$ ,  $C = (C_1 + C_2) / 2$  (считаем, что  $\Delta C / C \ll 1$ ). Поскольку за один цикл пластины раздвигаются дважды, для энергии, закачиваемой в систему за время одного "периода" колебаний осциллятора, равного  $\pi(\sqrt{LC_1} + \sqrt{LC_2}) \approx 2\pi\sqrt{LC}$ , можно записать

$$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{2\Delta C}{C}. \quad (7.8)$$

Для периода изменения параметра  $T$  выполняется соотношение

$$T = \frac{\pi}{2} \left( \sqrt{LC_1} + \sqrt{LC_2} \right) \approx \frac{T_0}{2}. \quad (7.9)$$

Это значит, что наиболее эффективно энергия закачивается в систему, когда период изменения параметра примерно равен половине собственного периода колебаний осциллятора.

Можно, однако, раздвигать пластины не каждый раз, когда заряд на конденсаторе максимален, а через раз, энергия все равно будет поступать в систему, хотя и в меньшем количестве. Условие такого резонанса вместо (7.9) примет вид  $T \approx T_0$ . Очевидно, что в общем случае можно раздвигать пластины только в каждый  $n$ -й благоприятный для этого момент, что позволяет обобщить условие параметрического резонанса, записав его следующим образом:

$$T \approx \frac{nT_0}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.10)$$

Для  $n = 1$  говорят об основном резонансе, для произвольного значения  $n$  — о резонансе  $n$ -го порядка.

Проведенное рассмотрение не учитывает потерь в системе, что легко сделать. Если потери малы, то оба эффекта — параметрическую неустойчивость и влияние затухания — можно рассматривать независимо друг от друга. За счет затухания потери энергии за период равны  $\Delta W \approx -2\gamma T_0 W$ , где  $\gamma$  — коэффициент затухания. С учетом (7.8), общее изменение энергии есть

$$\Delta W = W \left( \frac{2\Delta C}{C} - 2\gamma T_0 \right),$$

откуда получаем, что если  $\Delta C/C > \gamma T_0 = d = \pi/Q$  ( $d$  — логарифмический декремент,  $Q$  — добротность осциллятора), то в целом колебания нарастают. Таким образом при конечных потерях в системе параметрическая неустойчивость возникает только при достаточно большой глубине модуляции параметра.

Отметим, что для развития неустойчивости требуется, чтобы изначально колебания в системе уже существовали. Если осциллятор покоится, то изменение его параметров не приводит к появлению колебаний.

Проще и удобнее сделать так, чтобы параметры системы менялись непрерывным образом, а не скачками. Пусть, например, емкость в контуре меняется по закону  $C(t) = C_0 + \Delta C \cos(2\omega_0 t)$ , где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$ ,  $\Delta C \ll C_0$  (предполагается, что реализован наиболее благоприятный случай основного резонанса). Так как значение емкости мало отклоняется от своего среднего, то можно считать, что в течение одного периода амплитуда колебаний почти не меняется и напряжение на емкости равно  $V_c(t) = \bar{V}_c \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $\varphi$  — сдвиг фазы. При изменении емкости конденсатора на малую величину  $\Delta C$  совершается работа  $\Delta A = -W_c \Delta C/C$ ,  $W_c = CV_c^2/2$  — энергия, запасенная в конденсаторе. Поэтому за один пе-

риод колебаний совершается работа

$$A = -\frac{1}{2} \int_t^{t+2\pi/\omega_0} V_c^2(t') \dot{C}(t') dt'.$$

Подставляя выражения для  $C(t)$  и  $V_c(t)$ , получаем

$$A = \Delta C \omega_0 \bar{V}^2 \int_t^{t+2\pi/\omega_0} \sin 2\omega_0 t' \cos^2(\omega_0 t' + \varphi) dt' = -\frac{\pi \Delta C}{C_0} W \sin 2\varphi.$$

Вся эта работа идет на приращение энергии системы. Максимальным прирост энергии будет, если  $\varphi = -\pi/4$  или  $\varphi = 3\pi/4$ , при этом  $\Delta W/W = \pi \Delta C/C$ . Если в системе есть потери, то, как и в предыдущем случае, глубина модуляции должна быть достаточно большой для возникновения неустойчивости:

$$\frac{\Delta C}{C_0} > \frac{2}{Q}. \quad (7.11)$$

Этот анализ является приближенным, так как в нем не учитывались некоторые важные факторы. Например, условие резонанса может выполняться только приближенно, или частота колебаний в контуре на самом деле может немного отличаться от  $\omega_0$ , и так далее. Однако сам результат (7.11) оказывается верным, что будет показано ниже.

**Задача 7.1.** Предположим, что мальчик раскачивает качели, дважды за период качания резко приседая и резко выпрямляя ноги. В какие именно моменты он должен это делать, чтобы качели раскачивались наиболее эффективно? Как нужно действовать, если процесс приседания и вставания растянут во времени?

Итак, проведенное качественное рассмотрение позволяет выделить основные особенности параметрического резонанса:

1. Параметрический резонанс может появляться в колебательной системе при периодическом изменении ее параметров, если выполняются определенные соотношения (7.10) между периодом изменения параметров и собственным периодом колебаний системы.
2. Для развития неустойчивости необходимо, чтобы колебания в системе уже существовали. Если осциллятор покоится в положении равновесия, то изменение параметров не ведет к возникновению колебаний.
3. Если в системе есть потери, глубина модуляции параметров должна быть достаточно большой, чтобы неустойчивость появилась.

### 7.3 Теория Флоке

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами можно привести к виду

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0, \quad (7.12)$$

где  $\omega^2(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ . Для произвольной функции  $\omega^2(t)$  это уравнение называется уравнением Хилла [46]. Существует общая теория линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, результаты которой, применительно к уравнению второго порядка (7.12), будут даны здесь без строгих доказательств. Их можно найти, например, в [6, 35, 46].

У уравнения (7.12) существует два линейно независимых решения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , так что любое решение представимо в виде их линейной комбинации. С другой стороны, делая в (7.12) замену  $t \rightarrow t + T$ , мы вновь получаем то же самое уравнение, следовательно функции  $x_1(t + T)$  и  $x_2(t + T)$  также должны являться решениями исходного уравнения. Поэтому, используя матричные обозначения, можно записать

$$\begin{bmatrix} x_1(t + T) \\ x_2(t + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

где коэффициенты  $a_{i,j}$  — постоянные, причём в каждой строке матрицы  $[A]$  хотя бы один из коэффициентов не равен нулю. Матрица  $[A]$  называется *матрицей отображения за период*, и она играет главную роль при анализе параметрических систем.

Детерминант матрицы  $[A]$  равен единице, что можно показать следующим образом. Запишем уравнение (7.12) для решений  $x_{1,2}(t)$ :

$$\ddot{x}_1(t) + \omega^2(t)x_1(t) = 0, \quad \ddot{x}_2(t) + \omega^2(t)x_2(t) = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на  $x_2(t)$ , а второе — на  $x_1(t)$ , и вычтем одно из другого. В результате получим  $\ddot{x}_1x_2 - x_1\ddot{x}_2 = d(\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2)/dt = 0$ , т. е.  $\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2 = \text{const}$ . Приравнявая эти комбинации в моменты времени  $t$  и  $t + T$ , и, используя (7.13), непосредственно получаем

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det [A] = 1. \quad (7.14)$$

Собственные числа матрицы отображения за период называются *мультипликаторами*, они определяются из уравнения

$$\det [A - \mu I] = \begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0, \quad (7.15)$$

или, с учетом (7.14),

$$\mu^2 - (a_{11} + a_{22})\mu + 1 = 0. \quad (7.16)$$

Корни квадратного уравнения (7.16) равны

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \text{Sp} [A] \pm \sqrt{\text{Sp} [A]^2 - 4} \right], \quad (7.17)$$

где  $\text{Sp} [A] = a_{11} + a_{22}$  - след матрицы, то есть сумма ее диагональных элементов. Так как мы полагаем функцию  $\omega^2(t)$  действительной, то коэффициенты матрицы  $[A]$  также будут действительными числами. В зависимости от величины  $\text{Sp} [A]$  возможны три случая:

1.  $|\text{Sp} [A]| < 2$ , при этом мультипликаторы являются комплексно сопряженными величинами, причем  $\mu_1 \mu_2 = 1$ , то есть оба мультипликатора лежат на единичной окружности в комплексной плоскости  $\mu$ . Матрица  $[A]$  при этом может быть с помощью преобразования подобия  $[B] = [P]^{-1} [A] [P]$  ( $[P]$  — квадратная невырожденная матрица) приведена к диагональному виду, так что на главной диагонали матрицы  $[B]$  лежат собственные значения. Отсюда легко показать (см. [35]), что два линейно независимых решения уравнения (7.12) вида

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = [P]^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

обладают следующим свойством:  $u_{1,2}(t+T) = \mu_{1,2} u_{1,2}(t)$ . Общее решение этого функционального уравнения есть

$$u_{1,2}(t) = e^{\lambda_{1,2} t} \Phi(t), \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{T} \ln \mu_{1,2}, \quad (7.19)$$

где  $\Phi_{1,2}(t)$  — периодические с периодом  $T$  функции.

На больших временах эти решения остаются ограниченными. Действительно, для произвольного  $t$  имеем  $|u_1(t+nT)| = |\mu_1^n u_1(t)| = |\mu_1^n| |u_1(t)| = |u_1(t)|$ . То же самое справедливо и для  $u_2(t)$ . Так как произвольное решение представляется в виде линейной суперпозиции решений  $u_{1,2}(t)$ , то отсюда вытекает ограниченность решения. Неустойчивости в системе нет.

2. Если  $|\text{Sp} [A]| > 2$ , то из соотношения (7.17) получаются два действительных мультипликатора, один из которых по модулю обязательно больше, а другой — меньше единицы. В этом случае опять можно так выбрать два линейно независимых решения, что для них будут выполняться формулы (7.19). Однако теперь ограниченности решения нет. Если, например,  $|\mu_1| > 1$ , то имеем  $|u_1(t+nT)| = |\mu_1|^n |u_1(t)|$ . Видно, что функция  $u_1(t)$  по модулю неограниченно возрастает. Аналогично показывается, что функция  $u_2(t)$  при больших  $t$  стремится к нулю. Поэтому при произвольных ненулевых начальных условиях система будет уходить от положения равновесия, что соответствует параметрической неустойчивости.

3. Если  $\text{Sp}[A] = \pm 2$ , то мультипликаторы равны между собой и по модулю равны единице. Несколько более сложное рассмотрение показывает (подробности см. в [6, 35]), что в этом случае линейно независимые решения можно выбрать или в виде чисто периодических функций  $u_{1,2}(t)$ , период которых равен  $T$ , если  $\mu_{1,2} = 1$ , или  $2T$ , если  $\mu_{1,2} = -1$ , либо периодической функцией будет только одно из решений, а второе представимо в форме  $u_2(t) = t\Phi(t)$ , где  $\Phi(t)$  — снова периодическая функция. Во всяком случае, одно из решений является периодическим. Здесь мы имеем дело с граничной ситуацией между устойчивым и неустойчивым поведением системы.

Эти свойства решений уравнений Хилла служат основой для их численного или приближенного аналитического определения.

Линейно независимые решения, подчиняющиеся условиям (7.19) называются решениями Флоке, а сама эта формула служит математическим выражением одного из утверждений так называемой *теоремы Флоке*: если собственные числа матрицы отображения за период системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами различны, то можно выбрать ее линейно независимые решения так, что будет выполняться соотношение (7.19).

Обратимся еще раз к свойствам решений Флоке. Когда неустойчивости нет, то комплексно сопряженные мультипликаторы лежат на единичной окружности в комплексной плоскости  $\mu$ , поэтому их можно представить в виде  $\mu_{1,2} = \exp[\pm i\vartheta]$ , следовательно  $\lambda_{1,2} = \pm i\vartheta/T$ . Подставляя это соотношение в (7.19) и разлагая периодические функции  $\Phi_{1,2}(t)$  в ряды Фурье, получаем, что движение системы представляется в виде суперпозиции гармоник с частотами  $\omega_n = (2\pi n \pm \vartheta)/T$ . Так как в общем случае величина  $\vartheta$  несоизмерима с  $2\pi$ , то движение носит квазипериодический характер.

Если параметры системы таковы, что реализуется неустойчивость, то  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . Если к тому же считать, что неустойчивость слабая, в том смысле, что мультипликаторы близки по модулю к единице, то  $|\lambda_{1,2}|T \ll 1$ . Тогда одно из решений Флоке представляет собой сумму периодических гармоник с основной частотой  $2\pi/T$ , амплитуды которых медленно растут во времени пропорционально  $e^{\lambda t}$ , а для второго решения они уменьшаются пропорционально  $e^{-\lambda t}$ , где  $\lambda$  — общий модуль величин  $\lambda_{1,2}$ .

Предположим, что функция  $\omega^2(t)$  зависит от параметра  $\varepsilon$  так, что при  $\varepsilon = 0$  имеем  $\omega^2(t) = \omega_0^2 = \text{const}$ , и зададимся вопросом, как ведет себя система при достаточно малых  $\varepsilon$ . На плоскости параметров  $(\omega_0 T, \varepsilon)$  каждой точке соответствует либо устойчивое, либо неустойчивое движение, либо точка принадлежит границе между этими случаями. Благодаря непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра [6, 46] можно утверждать, что области устойчивого и неустойчивого движения образуют открытые множества<sup>2</sup>: если при некоторых

<sup>2</sup>Напомним, что в математике множество называется открытым, если оно состоит



значениях параметров система устойчива (неустойчива), то выполняется  $|\operatorname{Sp}[A]| < 2$  (соответственно  $|\operatorname{Sp}[A]| > 2$ ). Малое изменение параметров приведет к малому изменению значения  $\operatorname{Sp}[A]$ , так что система останется устойчивой (неустойчивой).

При  $\varepsilon = 0$  матрицу  $[A]$  легко построить в явном виде. Действительно, в этом случае система есть просто гармонический осциллятор, для которого два линейно независимых решения есть  $\cos \omega_0 t$  и  $\sin \omega_0 t$ . Используя формулы тригонометрии, запишем

$$\begin{bmatrix} \cos \omega_0(t+T) \\ \sin \omega_0(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 T & -\sin \omega_0 T \\ \sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

откуда  $\operatorname{Sp}[A] = 2 \cos \omega_0 T$ . Следовательно, если  $\omega_0 T \neq \pi n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то  $|\operatorname{Sp}[A]| < 2$ , поэтому все точки на оси  $\omega_0$ , кроме точек, для которых выполняется условие

$$\frac{T}{T_0} = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.21)$$

соответствуют устойчивым системам. Кроме того, все системы, отличающиеся от них на бесконечно малое значение  $\varepsilon$  также устойчивы. Зоны неустойчивости на плоскости параметров  $(\omega_0 T, \varepsilon)$  могут подходить к оси абсцисс только в точках (7.21). Детальный анализ показывает, что в конкретных случаях так и происходит. Этот результат является обоснованием условий (7.10) параметрического резонанса.

Строго говоря, при  $n = 0$  также имеем  $\operatorname{Sp}[A] = 2$ , поэтому система может демонстрировать неустойчивое поведение и вблизи начала координат на плоскости параметров, однако это соответствует пределу  $T \gg 2\pi/\omega_0$ , и по нашему соглашению не относится к случаю параметрического резонанса.

## 7.4 Осциллятор с параметрической неустойчивостью (модельная система)

Исследуем модельную систему, для которой возможно получить вид зон параметрической неустойчивости явным образом. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] x(t) = 0, \quad (7.22)$$

которое описывает осциллятор с частотой, испытывающей  $\delta$ -образные возмущения. Амплитуда толчков пропорциональна безразмерному параметру

---

только из внутренних точек, т. е. если каждая его точка имеет окрестность, также целиком принадлежащую множеству.

$\varepsilon$  и они следуют с периодом  $T$ . Матрицу отображения за период такой системы можно найти явным образом. Пусть  $x_n$  и  $y_n = \dot{x}/\omega_0$  — координата и нормированная скорость осциллятора сразу после  $n$ -го толчка. В промежутках между толчками движение происходит по закону гармонического осциллятора с частотой  $\omega_0$ , поэтому перед  $(n+1)$ -м толчком для этих величин можно записать

$$\begin{bmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 T & \sin \omega_0 T \\ -\sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

В результате толчка координата осциллятора не изменяется, а изменение скорости можно найти, проинтегрировав уравнение (7.22) по бесконечно малому интервалу времени, содержащему момент  $(n+1)$ -го импульса. Уравнения, связывающие динамические переменные до и после толчка, имеют вид  $x_{n+1} = x'_{n+1}$ ,  $y_{n+1} = y'_{n+1} - \varepsilon x'_{n+1}$ , или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Матрица отображения за период изменения параметра дается произведением матриц в (7.23) и (7.24):

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 T & \sin \omega_0 T \\ -\sin \omega_0 T - \varepsilon \cos \omega_0 T & \cos \omega_0 T - \varepsilon \sin \omega_0 T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Границы зон параметрической неустойчивости определяются уравнением  $|\text{Sp}[A]| = |2 \cos \omega_0 T - \varepsilon \sin \omega_0 T| = 2$ , которое распадается на два отдельных случая:

а).  $\cos \omega_0 T - (\varepsilon/2) \sin \omega_0 T = 1$ .

После простых тригонометрических преобразований это уравнение сводится к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \sin(\omega_0 T/2) = 0, \\ \text{tg}(\omega_0 T/2), \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \omega_0 T = 2\pi n, \\ \omega_0 T = -2 \arctg(\varepsilon/2) + 2\pi n, \end{cases}$$

для  $n = 1, 2, \dots$ . На плоскости параметров  $(\omega_0 T, \varepsilon)$  линии, заданные этими уравнениями, ограничивают зоны параметрической неустойчивости, опирающиеся своим острием на точки с координатами  $\omega_0 T = 2\pi n$  на оси абсцисс (см. рис. 7.3).

б).  $\cos \omega_0 T - \varepsilon \sin \omega_0 T/2 = -1$ .

Из этого уравнения получаем

$$\begin{cases} \cos(\omega_0 T/2) = 0, \\ \text{ctg}(\omega_0 T/2), \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \omega_0 T = (2n+1)\pi, \\ \omega_0 T = 2 \text{arccctg}(\varepsilon/2) + 2\pi n, \end{cases}$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Соответствующие линии на рис. 7.3 образуют "клювы" опирающиеся остриями на точки с координатами  $\omega_0 T = (2n+1)\pi$ .

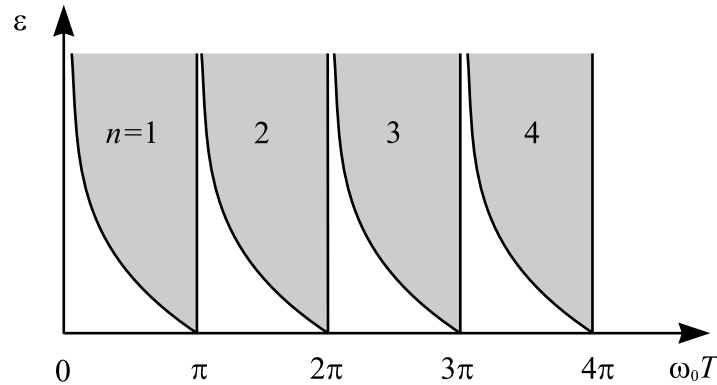


Рис. 7.3. Зоны параметрической неустойчивости на плоскости параметров для модельной системы (7.22).

Мы нашли границы зон неустойчивости, а для определения того, где система устойчива, а где нет, необходим дополнительный анализ. Для этого рассмотрим предел  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Тогда  $|\text{Sp}[A]| \approx \varepsilon |\sin \omega_0 T|$ , поэтому, если  $\omega_0 T \neq \pi n$ , для достаточно больших  $\varepsilon$  выполняется  $|\text{Sp}[A]| > 2$ . В этом пределе зоны неустойчивости преобладают, что соответствует заштрихованным областям на рис. 7.3.

В рассмотренном примере форма зон неустойчивости не зависит от номера параметрического резонанса, что объясняется очень резкой, в форме  $\delta$ -импульсов, зависимостью параметра от времени. Для более реалистичных ситуаций ширина зоны быстро убывает с ее номером.

**Задача 7.2.** Емкость колебательного контура скачком меняется со значения  $C_1$  на значение  $C_2$  и обратно через каждый интервал времени  $T/2$ . Получите матрицу отображения за период  $T$  и найдите две первые зоны параметрической неустойчивости на плоскости параметров  $(\omega_0 T, \Delta C/C)$ , считая, что  $\Delta C/C \ll 1$ , где  $\Delta C = C_2 - C_1$ ,  $C = (C_1 + C_2)/2$ ,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

## 7.5 Уравнение Матье

Наиболее важен случай, когда параметры системы меняются по гармоническому закону. При этом уравнение (7.12) можно записать в виде

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 (1 + \varepsilon \cos \omega t) x(t) = 0. \quad (7.26)$$

Это уравнение называется *уравнением Матье*. Его точные решения выражаются через специальные функции, называемые функциями Матье [23], непосредственный анализ которых затруднителен. Поэтому в этих целях используют различные приближенные аналитические методы<sup>3</sup>. В их ос-

<sup>3</sup>Прекрасным введением в эти методы может служить книга [35].

нове лежит предположение, что параметр  $\varepsilon$  мал ( $\varepsilon \ll 1$ ). Если вспомнить условие параметрического резонанса (7.21), то в задаче появляется еще один малый параметр  $\delta = (\omega_0 - n\omega/2)$ ,  $|\delta| \ll \omega_0$ . Последовательный учет малости величин  $\varepsilon$  и  $\delta/\omega_0$  позволяет получить приближенное решение уравнения Матье.

Покажем, как сделать это для случая основного резонанса ( $n = 1$ ). Решение будем искать в виде:

$$x(t) = a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2}. \quad (7.27)$$

Смысл этого представления таков. Если  $\varepsilon = 0$  и  $\delta = 0$ , то выражение (7.27) дает точное решение, причем  $a$  и  $b$  — постоянные. Если же эти параметры малы, то можно считать, что величины  $a$  и  $b$  становятся медленно меняющимися функциями времени по сравнению с синусом и косинусом. Формулу (7.27) можно переписать в виде  $x(t) = A(t) \cos[\omega t/2 + \varphi(t)]$ , т.е. в виде колебания с медленно меняющейся амплитудой и фазой.

Введение двух функций  $a(t)$  и  $b(t)$  вместо одной действительной функции  $x(t)$  дает некоторый произвол в их определении, который можно исключить, потребовав, чтобы они удовлетворяли какому-нибудь функциональному соотношению. Положим, что выполняется условие

$$\dot{a}(t) \cos \frac{\omega t}{2} + \dot{b}(t) \sin \frac{\omega t}{2} = 0. \quad (7.28)$$

Вычислим, используя (7.28), первую и вторую производную от (7.27):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{\omega}{2} \left[ a(t) \sin \frac{\omega t}{2} - b(t) \cos \frac{\omega t}{2} \right], \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{\omega}{2} \left[ \dot{a}(t) \sin \frac{\omega t}{2} - \dot{b}(t) \cos \frac{\omega t}{2} \right] - \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 \left[ a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в исходное уравнение (7.26), получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{2} \dot{a}(t) \sin \frac{\omega t}{2} + \frac{\omega}{2} \dot{b}(t) \cos \frac{\omega t}{2} &= -[\omega_0^2 - \left( \frac{\omega}{2} \right)^2] \left[ a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2} \right] - \\ &\quad - \varepsilon \omega_0^2 \left[ a(t) \cos \omega t \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \cos \omega t \sin \frac{\omega t}{2} \right]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Уравнения (7.28) и (7.29) позволяют выразить величины  $\dot{a}(t)$  и  $\dot{b}(t)$  по отдельности:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2} \dot{a}(t) &= [\omega_0^2 - \left( \frac{\omega}{2} \right)^2] \left[ a(t) \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right] + \\ &\quad + \varepsilon \omega_0^2 \left[ a(t) \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \cos \omega t + b(t) \sin^2 \frac{\omega t}{2} \cos \omega t \right], \\ \frac{\omega}{2} \dot{b}(t) &= -[\omega_0^2 - \left( \frac{\omega}{2} \right)^2] \left[ a(t) \cos^2 \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \right] - \\ &\quad - \varepsilon \omega_0^2 \left[ a(t) \cos^2 \frac{\omega t}{2} \cos \omega t + b(t) \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \cos \omega t \right]. \end{aligned}$$

Используя тригонометрические формулы, эти соотношения можно привести к виду

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{2}\dot{a}(t) &= [\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2][a(t)\sin\omega t - b(t)\cos\omega t + b(t)] + \\ &\quad + \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2}[a(t)\sin 2\omega t - b(t)\cos 2\omega t + 2b(t)\cos\omega t - b(t)], \\ \frac{\omega}{2}\dot{b}(t) &= -[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2][a(t)\cos\omega t + b(t)\sin\omega t + a(t)] - \\ &\quad - \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2}[a(t)\cos 2\omega t + b(t)\sin 2\omega t + 2a(t)\cos\omega t + a(t)].\end{aligned}\tag{7.30}$$

При выводе выражений (7.30) не было сделано никаких приближений, поэтому они эквивалентны одному уравнению (7.26), которое, вдобавок, выглядит существенно проще. Однако они хорошо приспособлены для аналитического решения с использованием теории возмущений. Так как можно записать  $\omega_0^2 - (\omega/2)^2 = (\omega_0 - \omega/2)(\omega_0 + \omega/2) = \delta(\omega + \delta) \approx \delta\omega$ , то правые части формул (7.30) пропорциональны малым множителям  $\varepsilon$  и  $\delta/\omega_0$ . Следовательно производные  $\dot{a}(t)$  и  $\dot{b}(t)$  малы, что можно использовать для построения приближенного решения. Существует значительное число различных приближенных методов [35], но если ограничиться только первым приближением по малому параметру, то проще всего использовать так называемый метод Ван-дер-Поля, или метод усреднения.

Метод усреднения применительно к уравнениям (7.30) основан на следующих соображениях. Так как в их правых частях содержатся как медленно меняющиеся слагаемые, пропорциональные только амплитудам  $a(t)$  и  $b(t)$ , так и быстро осциллирующие функции вида  $a(t)\sin\omega t$ ,  $a(t)\cos\omega t$  и т.д., то функции  $a(t)$  и  $b(t)$  можно представить как сумму плавно меняющихся со временем “главных” частей и быстро осциллирующих добавок, имеющих малую амплитуду. Усредним уравнения (7.30) по отрезку времени  $T = 2\pi/\omega$ . В правой части при усреднении выражений подобных  $a(t)\sin\omega t$ , можно считать  $a(t)$  и  $b(t)$  постоянными, так как за такое время они практически не изменяются, в результате все такие слагаемые дадут при усреднении нуль. Ненулевой вклад останется от величин  $a(t)$  и  $b(t)$ , они дадут как раз плавно меняющиеся средние значения  $\bar{a}(t)$  и  $\bar{b}(t)$ . Слева по тем же соображениям можно записать  $\overline{\dot{a}(t)} = \dot{\bar{a}}(t)$  и  $\overline{\dot{b}(t)} = \dot{\bar{b}}(t)$ . В результате такой процедуры уравнения (7.30) переходят в уравнения

$$\begin{aligned}\omega\dot{\bar{a}}(t) &= \left\{ \left[ \omega_0^2 - \frac{\omega}{2} \right]^2 - \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2} \right\} \bar{b}(t), \\ \omega\dot{\bar{b}}(t) &= - \left\{ \left[ \omega_0^2 - \frac{\omega}{2} \right]^2 + \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2} \right\} \bar{a}(t).\end{aligned}\tag{7.31}$$

Поскольку рассматривается только первое приближение, то можно положить  $\omega_0^2 - (\omega/2)^2 \approx \delta\omega$  и  $\omega_0/\omega \approx 1/2$ , поэтому окончательные уравнения

для усредненных амплитуд таковы:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{a}}(t) &= \left(\delta - \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)\bar{b}(t), \\ \dot{\bar{b}}(t) &= -\left(\delta + \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)\bar{a}(t).\end{aligned}\quad (7.32)$$

Уравнения (7.32) имеют постоянные коэффициенты, их решение можно искать обычным образом, используя экспоненциальную подстановку  $\bar{a}(t) = a_0 \exp(\lambda t)$ ,  $\bar{b}(t) = b_0 \exp(\lambda t)$ . Тогда из (7.32) следует

$$\begin{aligned}\lambda a_0 & - (\delta - \varepsilon\omega_0/4) b_0 &= 0, \\ (\delta + \varepsilon\omega_0/4) a_0 & + \lambda b_0 &= 0.\end{aligned}\quad (7.33)$$

Ненулевые решения этой системы возможны, если

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2 - \delta^2}.\quad (7.34)$$

В системе будет существовать неустойчивость, если корни (7.34) — действительные, тогда одна из экспонент  $\exp(\lambda_{1,2}t)$  будет нарастающей. Это реализуется при

$$-\frac{\varepsilon\omega_0}{4} < \delta < \frac{\varepsilon\omega_0}{4}.\quad (7.35)$$

Максимальный инкремент неустойчивости достигается при  $\delta = 0$ , он равен

$$\lambda_{\max} = \frac{\varepsilon\omega_0}{4}.\quad (7.36)$$

Так как  $\varepsilon$  мало, то неустойчивость слабая, что согласуется со сделанным предположением о медленности изменения амплитуд  $a(t)$  и  $b(t)$ .

При  $|\delta| > \varepsilon\omega_0/4$  значения  $\lambda$  получаются чисто комплексные, решение при этом остается ограниченным. Граница неустойчивости определяется условием  $|\delta| = \varepsilon\omega_0/4$ , которое, учитывая определение параметра  $\delta$  и его малость, можно представить в виде

$$\varepsilon = 8 \left| \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{1}{2} \right|.\quad (7.37)$$

На плоскости параметров  $(\omega_0/\omega, \varepsilon)$  основная зона неустойчивости ограничена двумя отрезками прямых, выходящими из точки  $1/2$  на оси абсцисс (рис. 7.4, а).

Как на параметрическую неустойчивость влияют потери? Уравнение Матье с учетом потерь имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)x(t) = 0.\quad (7.38)$$

Воспользовавшись преобразованием (7.5), слагаемое с первой производной можно исключить. Коэффициент  $\gamma$  не зависит от времени, поэтому замена

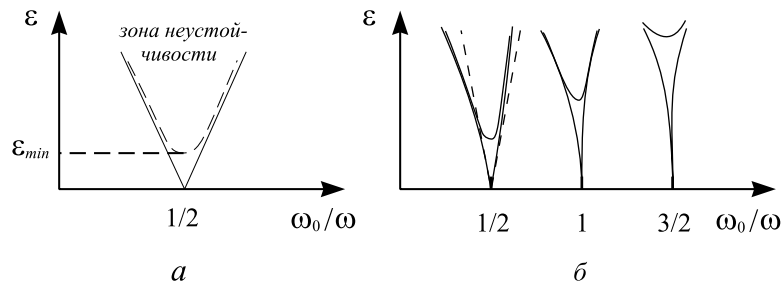


Рис. 7.4. а) Основная зона параметрической неустойчивости для уравнения Маттье в области малых  $\varepsilon$ . Пунктиром показана граница зоны при учете малого затухания. б) Зоны параметрической неустойчивости для трех первых резонансов. Границы зон искривляются при учете высших приближений теории возмущений. Пунктиром показана граница основной зоны в первом порядке теории возмущений.

переменных имеет вид  $x(t) = \exp(-\gamma t)y(t)$ , в результате для  $y(t)$  получается уравнение Маттье, в котором собственная частота  $\omega_0$  сдвинута на относительную величину порядка  $\gamma^2/\omega_0^2$ . В рассматриваемом приближении этот сдвиг можно не учитывать. Когда корни (7.34) действительные, величина  $y(t) \sim \exp(|\lambda_{1,2}|t)$ , следовательно неустойчивость для  $x(t)$  возникнет при условии  $\gamma < |\lambda_{1,2}|$ , или

$$\gamma < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2 - \delta^2}. \quad (7.39)$$

Граница зоны резонанса определяется уравнением

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2 - \delta^2}, \quad (7.40)$$

которое задает ветвь гиперболы, показанной на рис. 7.4,а пунктиром. Таким образом, учет затухания приводит к тому, что зона неустойчивости "отрывается" от оси абсцисс и появляется пороговое значение параметра модуляции  $\varepsilon$ , меньше которого неустойчивость не может возникнуть вообще. Это значение равно

$$\varepsilon_{\min} = \frac{4\gamma}{\omega_0} = \frac{2}{Q}, \quad (7.41)$$

где  $Q$  — добротность системы. С физической точки зрения этот результат означает, что глубина модуляции параметра должна быть достаточно большой, чтобы совершаемая работа компенсировала диссипацию энергии. Формула (7.41) согласуется с формулой (7.11), полученной для колебательного контура.

**Задача 7.3.** Найдите значение параметра  $\varepsilon$  для колебательного контура, емкость которого гармонически изменяется во времени и покажите, что формулы (7.11) и (7.41) эквивалентны.

Полученные результаты справедливы в первом порядке по малым параметрам  $\varepsilon$  и  $\delta/\omega_0$ . Если учитывать следующие приближения, то границы зон несколько искривляются, как это показано на рис. 7.4, б, еще больше приобретая форму “клюва”. Потери в системе делают форму зон неустойчивости похожей на “язык”.

Аналогично можно исследовать колебания вблизи высших резонансов ( $n > 1$ ), однако при этом следует использовать более точный метод, чем простой метод усреднения. Связано это с тем, что в следующих порядках необходимо учитывать также малые осцилляции коэффициентов  $a(t)$  и  $b(t)$  с частотами, кратными  $\omega$ , чем мы пренебрегали при выводе укороченных уравнений (7.32) [35].

Приведем основные результаты такого исследования [46]:

1. При больших номерах резонанса  $n$  область неустойчивости подходит к оси  $\omega_0/\omega$  узким языком, ширина которого резко уменьшается с ростом номера  $n$  (пропорционально  $\varepsilon^n$ ).
2. Сама неустойчивость слабо выражена, так как при больших  $n$  собственные числа матрицы отображения за период по модулю близки к единице.
3. Малое трение приводит к тому, что для возникновения параметрического резонанса  $n$ -го порядка имеется пороговое значение  $\varepsilon_{\min, n}$  которое быстро растет с номером  $n$ . При меньших значениях  $\varepsilon$  колебания затухают.

Эти обстоятельства приводят к тому, что на практике параметрический резонанс можно наблюдать только для нескольких первых зон (обычно двух — трех).

Все проведенное рассмотрение базировалось на линейном приближении, когда при резонансе величина  $x(t)$  растет неограниченно. В реальных системах, разумеется, начиная с некоторой величины амплитуды, такой рост будет сменяться насыщением из-за нелинейных эффектов, которые не учитывались в настоящем анализе.

## 7.6 Параметрическая неустойчивость в двухконтурной схеме. Соотношения Мэнли-Роу

Основное применение параметрическая неустойчивость находит в параметрических генераторах, усилителях и умножителях частоты [47–49]. Главное достоинство этих устройств заключается в очень низком уровне собственных шумов. Основной частью радиотехнических параметрических генераторов и усилителей является колебательный контур с меняющейся во времени емкостью — система, описываемая уравнением Матье, подробно рассмотренном в предыдущем параграфе.



На практике переменную емкость проще всего реализовать, воздействуя на полупроводниковый диод переменным напряжением [48]. Барьерная емкость  $p-n$ -перехода в диоде служит местом накопления заряда, а его величина нелинейным образом зависит от приложенного напряжения. Свойства емкости описываются вольт-фарадной характеристикой  $q(V)$ , связывающей заряд на переходе с напряжением. Помимо емкости, диод обладает также и нелинейной проводимостью, которая играет важную роль в механизмах ограничения параметрической неустойчивости, однако ее влияние на возникновение неустойчивости не столь велико, поэтому мы не будем ее здесь учитывать.

При малых переменных напряжениях, приложенных к диоду, его описание как нелинейной емкости оказывается эквивалентным описанию в виде емкости, зависящей от напряжения [47]. Действительно, пусть напряжение равно  $V(t) = V_0 + V_1 \cos \omega t$ , где  $V_1 \ll V_0$ . Представим функцию  $q(V)$  разложением в ряд Тейлора вблизи точки  $V_0$ :

$$q(V) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (V - V_0)^n.$$

Нас интересует емкость  $p-n$  перехода, определяющая изменение заряда на нем при малом изменении напряжения, т.е. величина  $C = dq/dV$ , которая представляется рядом

$$C(V) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (V - V_0)^{n-1}.$$

Подставляя в это соотношение выражение для  $V(t)$  и используя малость  $V_1$ , получаем приближенную формулу

$$C(t) = C_0 + \tilde{C}(t) \approx C_0 + \Delta C \cos \omega t, \quad (7.42)$$

в которой величины  $C_0$  и  $\Delta C$  выражаются через коэффициенты  $a_n$ . Эта формула доказывает эквивалентность нелинейной емкости и емкости, зависящей от напряжения в рассматриваемых системах.

Система с одним колебательным контуром и переменной емкостью во многих отношениях уступает по своим параметрам системе, в которой используются два резонансных контура. В *двухконтурных* генераторах возбуждаются колебания на двух частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , одна из которых является частотой полезного сигнала, а вторая — частотой дополнительного сигнала (его также называют холостым сигналом). Частота изменения емкости (частота накачки)  $\omega_3$  такова, что выполняется условие резонанса

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \quad (7.43)$$

Схема двухконтурного генератора с нерезонансной цепью накачки показана на рис. 7.5,а. В ней источником мощности на частоте накачки служит генератор тока  $i(t)$ , а нелинейный элемент (диод) представляется в

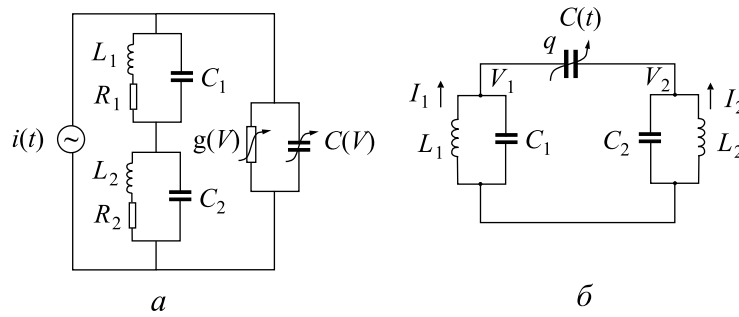


Рис. 7.5. Схема двухконтурного параметрического генератора с нерезонансной цепью накачки [48] (а), и эквивалентная линейная схема для исследования возникновения параметрической неустойчивости (б).

виде параллельно подключенных нелинейных емкости  $C(V)$  и проводимости  $g(V)$ . Резонансные частоты колебательных контуров равны  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ . Для исследования линейной стадии неустойчивости эта схема может быть существенно упрощена, если не учитывать сопротивления колебательных контуров и нелинейную проводимость, а вместо нелинейной емкости рассмотреть эквивалентную емкость, зависящую от времени в соответствии с формулой (7.42). Тогда вместо схемы на рис. 7.5,а, мы приходим к линейной схеме на рис. 7.5,б.

Колебания в системе описываются переменными токами и напряжениями, определения которых показаны на рис. Уравнения Кирхгофа для этой схемы имеют вид

$$\begin{aligned}
 V_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} &= 0, \\
 C_1 \frac{dI_1}{dt} - I_1 &= -\frac{dq}{dt}, \\
 V_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} &= 0, \\
 C_2 \frac{dI_2}{dt} - I_2 &= \frac{dq}{dt}, \\
 q = C(t) (V_1 - V_2) &= [C_0 + \tilde{C}(t)] (V_1 - V_2).
 \end{aligned} \tag{7.44}$$

Для получения укороченных уравнения для двухконтурной схемы, мы воспользуемся методом, основанным на теории связанных линейных колебаний [47]. Этот метод отличается от использованного в предыдущем параграфе метода усреднения Ван-дер-Поля, однако полученные укороченные уравнения в рассматриваемом приближении будут точно такими же, как и в методе Ван-дер-Поля.

Перейдем от напряжений и токов в колебательных контурах к нормальным колебаниям, введенным в гл. 1. В данном случае нормальные колебания определяются для каждого из контуров с помощью соотноше-

ний

$$a_{1,2}(t) = \sqrt{\frac{C_{01,2}}{2\omega_{01,2}}} (V_{1,2} + iZ_{1,2}I_{1,2}), \quad (7.45)$$

где  $C_{01,2} = C_0 + C_{1,2}$ ,  $Z_{1,2} = \sqrt{L_{1,2}/C_{01,2}}$ ,  $\omega_{01,2}^2 = 1/(L_{1,2}C_{01,2})$ . Отметим, что постоянная составляющая переменной емкости  $C_0$  присутствует в определении полной емкости и собственных частот каждого из контуров<sup>4</sup>. Напряжения на контурах выражаются через нормальные колебания формулами

$$V_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_{01,2}}{2C_{01,2}}} (a_{1,2} + a_{1,2}^+). \quad (7.46)$$

Напомним, что нормальные колебания  $a_{1,2}^+$  являются комплексно сопряженными величинами к нормальным колебаниям  $a_{1,2}$ , поэтому все уравнения для  $a_{1,2}^+$  получаются из уравнений для  $a_{1,2}$  комплексным сопряжением. Энергия в каждом контуре равна  $\mathcal{E}_{1,2} = \omega_{01,2}|a_{1,2}|^2$ . Для первого осциллятора нормальное колебание  $a_1^+$  ассоциируется с собственной частотой  $+\omega_{01}$ , а нормальное колебание  $a_1$  — с собственной частотой  $-\omega_{01}$ , они могут быть представлены на комплексной плоскости как два вектора, вращающихся с угловой скоростью  $\omega_{01}$  по и против часовой стрелки. То же самое можно сказать про нормальные колебания  $a_2^+$  и  $a_2$  второго осциллятора.

Умножим первое из уравнений (7.44) на величину  $\sqrt{\omega_{01}/2C_{01}}$ , а второе — на  $i\sqrt{L_1/2\omega_{01}}$  и сложим их. Аналогично поступим с третьим и четвертым уравнениями, с заменой всех индексов 1 на 2 и наоборот. Используя последнее уравнение в (7.44), после простых преобразований получаем уравнения для нормальных колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} + i\omega_{01}a_1 &= \sqrt{\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}} \frac{C_0}{2\sqrt{C_{01}C_{02}}} (\dot{a}_2 + \dot{a}_2^+) - \frac{1}{2C_{01}} \frac{d}{dt} [\tilde{C}(t)(a_1 + a_1^+)] + \\ &+ \sqrt{\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}} \frac{1}{2\sqrt{C_{01}C_{02}}} \frac{d}{dt} [\tilde{C}(t)(a_2 + a_2^+)], \end{aligned} \quad (7.47a)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dt} + i\omega_{02}a_2 &= \sqrt{\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}} \frac{C_0}{2\sqrt{C_{01}C_{02}}} (\dot{a}_1 + \dot{a}_1^+) - \frac{1}{2C_{02}} \frac{d}{dt} [\tilde{C}(t)(a_2 + a_2^+)] + \\ &+ \sqrt{\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}} \frac{1}{2\sqrt{C_{01}C_{02}}} \frac{d}{dt} [\tilde{C}(t)(a_1 + a_1^+)]. \end{aligned} \quad (7.47b)$$

Уравнения (7.47) имеют вид системы связанных осцилляторов: в правой части первого уравнения для нормального колебания  $a_1$  присутствуют слагаемые, зависящие от нормальных колебаний  $a_1^+$ ,  $a_2$  и  $a_2^+$ ; аналогично в уравнении для нормального колебания  $a_2$  присутствуют нормальные колебания  $a_1$ ,  $a_1^+$  и  $a_2^+$ .

<sup>4</sup>Это соответствует концепции парциальных систем и парциальных частот, вводимой для систем связанных осцилляторов, которая будет подробно рассматриваться в следующей лекции.

Предположим, что связь между контурами отсутствует, т.е.  $C(t) = 0$ . Тогда из (7.47) получаются уравнения для несвязанных нормальных колебаний, решения которых есть

$$a_1(t) = a_1(0) \exp(-i\omega_{01}t) \quad \text{и} \quad a_2(t) = a_2(0) \exp(-i\omega_{02}t).$$

При учете связи уравнения (7.47) можно приближенно трактовать как уравнения осцилляторов по действием вынуждающих сил, зависящих, в свою очередь, от нормальных колебаний. Для качественного анализа в первом приближении в правые части (7.47) можно подставить выражения для нормальных амплитуд, найденные при отсутствии связи. Если это сделать, то выясняется, что различные слагаемые справа оказывают разное по величине воздействие на колебания в контурах. Рассмотрим, например, слагаемое в первом уравнении, пропорциональное  $\dot{a}_2$ . Его временная зависимость определяется формулой

$$\frac{d}{dt} [a_2(0)e^{-\omega_{02}t}] = -i\omega_{02}a_2(0)e^{-\omega_{02}t},$$

что соответствует колебанию с частотой  $(-\omega_{02})$ . Мы будем рассматривать невырожденный случай, когда частоты  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  достаточно сильно различаются. Поэтому это слагаемое является нерезонансным и не может оказать существенного влияния на нормальное колебание  $a_1$ , частота которого равна  $-\omega_{01}$ . Аналогично можно сразу сказать, что слагаемое в первом уравнении, пропорциональное  $\dot{a}_2^+$ , имеет частоту  $\omega_{02}$ , и также является нерезонансным.

Рассмотрим теперь слагаемое в уравнении (7.47а), пропорциональное величине  $d[\tilde{C}(t)(a_2 + a_2^+)]/dt$ . Представим переменную часть емкости  $\tilde{C}(t)$  в виде

$$\tilde{C}(t) = \Delta C \cos \omega_3 t = \frac{\Delta C}{2} (e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_3 t}),$$

тогда это слагаемое можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta C}{2} \{ (e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_3 t}) [a_2(0)e^{-i\omega_{02}t} + a_2^+(0)e^{i\omega_{02}t}] \} = \\ & = \frac{\Delta C}{2} \left[ i(\omega_3 - \omega_{02}) a_2(0)e^{+i(\omega_3 - \omega_{02})t} + i(\omega_3 + \omega_{02}) a_2^+(0)e^{i(\omega_3 + \omega_{02})t} - \right. \\ & \quad \left. - i(\omega_3 + \omega_{02}) a_2(0)e^{-i(\omega_3 + \omega_{02})t} - i(\omega_3 - \omega_{02}) a_2^+(0)e^{-i(\omega_3 - \omega_{02})t} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая условие резонанса (7.43), можно прийти к выводу, что из четырех слагаемых в этой формуле, резонансным будет только последнее, зависящее от времени как  $\exp[-i(\omega_3 - \omega_{02})t]$ . Таким же образом анализируется слагаемое, пропорциональное  $d[\tilde{C}(t)(a_1 + a_1^+)]/dt$  в правой части (7.47а), в котором резонансные члены отсутствуют.

Аналогичное рассмотрение уравнения (7.47b) показывает, что единственный резонансный член в его правой части пропорционален величине

$$\frac{d}{dt} (e^{-i\omega_3 t} a_1^+) \approx -i (\omega_3 - \omega_{01}) e^{-i(\omega_3 - \omega_{01})t}.$$

Из всего этого анализа можно сделать важный вывод. Известно, что отклик осциллятора на внешнее воздействие резко возрастает, если частота этого воздействия близка или совпадает с частотой самого осциллятора. Поэтому всеми нерезонансные слагаемые в правых частях уравнений (7.47) можно пренебречь, так как результат их воздействия будет пренебрежимо мал по сравнению с результатом воздействия резонансных членов. Как следствие этой процедуры, приходим к укороченным уравнениям, описывающим параметрическую неустойчивость в схеме с двумя резонансными контурами:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} + i\omega_{01}a_1 &= \sqrt{\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}} \frac{\Delta C}{4\sqrt{C_{01}C_{02}}} \frac{d}{dt} (e^{-i\omega_3 t} a_2^+), \\ \frac{da_2}{dt} + i\omega_{02}a_2 &= \sqrt{\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}} \frac{\Delta C}{4\sqrt{C_{01}C_{02}}} \frac{d}{dt} (e^{-i\omega_3 t} a_1^+). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Нормальные амплитуды  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  связанных осцилляторов представим в виде

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \bar{a}_1(t) e^{-i\omega_{01}t}, \\ a_2(t) &= \bar{a}_2(t) e^{-i\omega_{02}t}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Функции  $\bar{a}_{1,2}(t)$  медленно меняются во времени по сравнению с нормальными колебаниями  $a_{1,2}(t)$ :  $|\dot{\bar{a}}_{1,2}(t)| \ll \omega_{01,2} |\bar{a}_{1,2}(t)|$  и это изменение обусловлено связью между контурами. Кроме этого, учтем, что величина *частотной расстройки* от резонанса  $\delta = \omega_3 - \omega_{01} - \omega_{02}$  мала, т.е.  $|\delta| \ll \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_3$ . Подставляя эти определения в (7.48) и оставляя только слагаемые, имеющие первый порядок малости, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}_1}{dt} &= -i\varepsilon e^{-i\delta t} \bar{a}_2^+, \\ \frac{d\bar{a}_2}{dt} &= -i\varepsilon e^{-i\delta t} \bar{a}_1^+, \end{aligned} \quad (7.50)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{\omega_{01}\omega_{02}}\Delta C / (4\sqrt{C_{01}C_{02}})$  — коэффициент связи. Уравнения (7.50) показывают, что гармоническое изменение во времени реактивного элемента (емкости) приводит к связи между нормальными колебаниями  $a_1$  и  $a_2^+$  (а также  $a_1^+$  и  $a_2$ ), частоты которых существенно отличаются друг от друга. Характер этой связи таков, что в системе может возникнуть неустойчивость.

Подстановка  $\bar{a}_{1,2} = \exp(-i\delta t/2)b_{1,2}(t)$  приводит (7.50) к уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\frac{db_1}{dt} - i\frac{\delta b_1}{2} &= -i\epsilon b_2^*, \\ \frac{db_2^*}{dt} + i\frac{\delta b_2^*}{2} &= +i\epsilon b_1.\end{aligned}\quad (7.51)$$

Для удобства здесь приведено уравнение для  $b_2^*$ , а не для  $b_2$ . Решение для (7.51) ищем в виде  $b_1(t), b_2(t) \sim \exp(\lambda t)$ . Тогда из (7.51) для величины  $\lambda$  получаем формулу

$$\lambda = \pm \sqrt{\epsilon^2 - \delta^2/4}.\quad (7.52)$$

Неустойчивость реализуется при  $-2\epsilon < \delta < 2\epsilon$ , при  $\delta = 0$  максимальный инкремент неустойчивости равен  $\lambda_{max} = \epsilon$ .

В области неустойчивости колебания в контурах происходят с частотами  $\omega_1 = \omega_{01} + \delta/2$  и  $\omega_2 = \omega_{02} + \delta/2$  и медленно нарастают по амплитуде с инкрементом  $\lambda$ , поскольку величина  $\epsilon$  мала. Можно считать, что колебания близки к гармоническим, причем, учитывая определение расстройки  $\delta$ , приходим к выводу, что условие резонанса (7.43) выполняется точно.

Уравнения (7.50) имеют важный закон сохранения. Чтобы его найти, умножим первое из них на  $a_1^+$ , а второе — на  $a_2^+$  и вычтем друг из друга. Тогда

$$\frac{d|a_1|^2}{dt} - \frac{d|a_2|^2}{dt} = 0,\quad (7.53)$$

или  $|a_1|^2 - |a_2|^2 = \text{const}$ . Отсюда следует, что колебания в обоих контурах либо одновременно нарастают, либо одновременно затухают. Полученные соотношения имеют важное энергетическое толкование. Вспомним, что энергия, запасенная в каждом из контуров, равна  $\mathcal{E}_{1,2} = \omega_{1,2}|a_{1,2}|^2$ , поэтому соотношения (7.53) переписываются в виде

$$\frac{P_1}{\omega_1} = \frac{P_2}{\omega_2},\quad (7.54)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  — скорости изменения энергии (т.е. мощности) каждого контура. Одновременно из закона сохранения энергии вытекает соотношение  $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ , где  $P_3$  — работа в единицу времени, совершаемая при изменении емкости  $C(t)$ , или, другими словами, мощность, поступающая в контур на частоте  $\omega_3$ . Мы считаем, что мощность положительна, если энергия колебаний на соответствующей частоте увеличивается, и отрицательна, если она уменьшается. Поделив последнее соотношение на  $\omega_3$  и воспользовавшись условием резонанса (7.43), можно записать

$$\frac{P_3}{\omega_3} + \frac{P_1 + P_2}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{P_3}{\omega_3} + \frac{P_1 + \omega_2 P_1 / \omega_1}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{P_1}{\omega_1} + \frac{P_3}{\omega_3} = 0.$$

Таким образом, дополнительно к формулам (7.54), получаем

$$\frac{P_1}{\omega_1} + \frac{P_3}{\omega_3} = 0, \quad \frac{P_2}{\omega_2} + \frac{P_3}{\omega_3} = 0. \quad (7.55)$$

Формулы (7.55) носят название *соотношений Мэнли-Роу* [47, 50] и они играют исключительно важную роль в теории параметрических и нелинейных колебаний и волн. Соотношения Мэнли-Роу показывают в какой пропорции распределяется мощность накачки между колебаниями с разной частотой.

Смысл соотношений Мэнли-Роу легко понять, если воспользоваться кванто-механической интерпретацией, согласно которой энергия колебания гармонического осциллятора с частотой  $\omega$  равна<sup>5</sup>  $\mathcal{E} = \hbar\omega N$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $N$  — число квантов. Тогда, например,

$$\frac{P_1}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1} \frac{d\mathcal{E}_1}{dt} = \hbar \frac{dN_1}{dt}.$$

Аналогичные формулы справедливы для частот  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . В результате соотношения (7.55) принимают вид

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0, \quad \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0, \quad (7.56)$$

и из них следует, что при параметрическом резонансе один квант на частоте накачки, распадаясь, рождает два кванта, по одному на частотах полезного и холостого сигналов.

Соотношения Мэнли-Роу допускают обобщения на случай многочастотных параметрических процессов. В частности, если предположить, что в системе возможно существование частот  $\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа, а  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — две несоизмеримые частоты, то соотношения Мэнли-Роу для этого случая имеют вид [47, 51]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0. \quad (7.57)$$

Здесь  $P_{mn}$  — мощность изменения энергии колебаний на частоте  $\omega_{mn}$ . Для таких  $m$  и  $n$ , для которых  $\omega_{mn} < 0$ , по определению полагается  $P_{mn} = P_{-m-n}$ . Суммирование формулах (7.57) производится по фактически существующим в системе частотам.

Подчеркнем еще одно важное обстоятельство. Под мощностью  $P_{mn}$  подразумевается систематический ход изменения энергии в системе на частоте  $\omega_{mn}$ ; другими словами, речь идет об энергии, усредненной на интервалах времени, больших по сравнению с временами  $1/\omega_1$  и  $1/\omega_2$  [51].

<sup>5</sup>Энергия нулевых колебаний  $\hbar\omega/2$  здесь не учитывается

Рассмотренный пример двухконтурного генератора относится к случаю, когда частоты полезного и холостого сигналов обе меньше, чем частота накачки. Соотношения Мэнли-Роу показывают, что в этом случае энергия, поступающая от источника на частоте накачки выделяется в обоих контурах, так что мощности  $P_1$  и  $P_2$  положительны, а мощность  $P_3$  отрицательна. Возможен другой случай, когда частота полезного сигнала  $\omega_1$  больше, чем частота накачки, т. е. условие резонанса имеет вид  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ . Соотношения Мэнли-Роу в этом случае дают:

$$\begin{aligned}\frac{P_1}{\omega_1} + \frac{P_3}{\omega_3} &= 0 \\ \frac{P_2}{\omega_2} - \frac{P_3}{\omega_3} &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что мощность холостого сигнала  $P_2$  должна быть отрицательной, также, как и мощность накачки  $P_3$ . Таким образом, для параметрической генерации или усиления сигнала с преобразованием частоты вверх, энергия должна поступать в систему из внешнего источника как на частоте накачки, так и на частоте холостого сигнала.

## 7.7 Медленное изменение параметров. Адиабатический инвариант

Пусть параметры осциллятора меняются настолько медленно, что в течении нескольких циклов колебаний можно считать, что они практически неизменны. В этом случае функцию  $\omega^2(t)$  в уравнении (7.7) удобно представить в виде

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 f(t/\tau), \quad (7.58)$$

где  $\omega_0$  — параметр с размерностью частоты,  $f$  — безразмерная функция величиной порядка единицы,  $\tau$  — характерное время ее изменения. Условие медленности изменения параметра можно выразить соотношением  $\omega_0\tau \gg 1$ , или, поскольку  $\tau \sim |f|/|\frac{df}{dt}|$ , это же условие можно записать непосредственно для  $\omega(t)$ :

$$\frac{1}{|\omega^2(t)|} \left| \frac{d\omega(t)}{dt} \right| \ll 1. \quad (7.59)$$

Видно, что это соотношение во всяком случае нарушается вблизи нулей функции  $\omega(t)$ , поэтому далее мы предполагаем, что в рассматриваемом интервале времени таких точек нет.

Для построения приближенного решения удобно перейти к безразмерной переменной  $\xi = t/\tau$  и ввести малый параметр  $\varepsilon = 1/(\omega_0\tau)$ , тогда уравнение (7.58) приобретает вид

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x(\xi)}{d\xi^2} + f(\xi) x = 0. \quad (7.60)$$



Уравнение (7.60) имеет малый параметр при старшей производной и его решение ищется следующим образом. Сначала сделаем замену переменных

$$x(\xi) = \exp\left[\int^{\xi} y(\xi') d\xi'\right] = \exp[\theta(\xi)]. \quad (7.61)$$

Первая и вторая производные от (7.61) равны:

$$x'(\xi) = y(\xi) \exp[\theta(\xi)], \quad x''(\xi) = [y'(\xi) + y^2(\xi)] \exp[\theta(\xi)].$$

Подставляя эти выражения в (7.60), получаем уравнение для функции  $y(\xi)$ :

$$\varepsilon^2 \frac{dy(\xi)}{d\xi} + \varepsilon^2 y^2(\xi) + f(\xi) = 0. \quad (7.62)$$

Это уравнение называется уравнением Рикатти, и оно, в отличие от (7.60), является нелинейным. Тем не менее, оно оказывается более удобным для построения ряда теории возмущений, чем исходное.

Решение уравнения Рикатти ищем в виде

$$y(\xi) = y_{-1}(\xi)/\varepsilon + y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \dots \quad (7.63)$$

Индекс при каждой функции  $y_i(\xi)$  равен степени малого параметра  $\varepsilon$ , на которую она умножается в ряде (7.63). Подставим (7.63) в (7.62) и приравняем нулю слагаемые, пропорциональные каждой степени  $\varepsilon$  по отдельности. Получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: & \quad y_{-1}^2(\xi) + f(\xi) = 0, \\ \varepsilon^1: & \quad y'_{-1}(\xi) + 2y_{-1}(\xi)y_0(\xi) = 0, \\ \varepsilon^2: & \quad \dots, \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим  $y_{-1}(\xi) = \pm i\sqrt{f(\xi)}$  (мы считаем, что  $f(\xi) > 0$ , что соответствует колебаниям осциллятора, а не аperiodическому затуханию<sup>6</sup>). Подставляя  $y_{-1}(\xi)$  во второе уравнение, находим

$$y_0(\xi) = -\frac{y'_{-1}(\xi)}{2y_{-1}(\xi)} = \frac{d}{d\xi} \ln |y_{-1}(\xi)|^{-1/2} = \frac{d}{d\xi} \ln |f(\xi)|^{-1/4}.$$

Ограничившись двумя найденными членами ряда, получаем для  $x(\xi)$  приближенное решение:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \exp\left[\pm i \frac{1}{\varepsilon} \int^{\xi} \sqrt{f(\xi')} d\xi' + \ln |f(\xi)|^{-1/4}\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{f(\xi)}} \exp\left[\pm i \frac{1}{\varepsilon} \int^{\xi} \sqrt{f(\xi')} d\xi'\right]. \quad (7.64) \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Сам метод решения справедлив и для случая  $f(\xi) < 0$ .

Использованная процедура приводит к асимптотическому ряду, который расходится при увеличении количества членов ряда: при фиксированном  $\varepsilon$ , начиная с некоторого номера  $n$ , следующие слагаемые оказываются не меньше, а больше предыдущих. Однако, если ограничиться конечным отрезком ряда, то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  он будет давать все более и более хорошие приближения к точному решению<sup>7</sup>. При малых  $\varepsilon$  уже во втором порядке, который был учтен при выводе (7.64), получается очень хорошее приближенное аналитическое решение.

Для применимости приближенного решения (7.64) необходимо, как уже отмечалось, выполнение условия (7.59). Однако само по себе оно может оказаться недостаточным, поскольку получено путем оценки по порядку величины различных членов в уравнении (7.7). Более правильно оценивать справедливость сделанного приближения, оценивая малость отброшенных членов разложения решения в асимптотический ряд (7.63). Более подробно этот вопрос обсуждается в [16, §46].

Возвращаясь к размерным переменным, два линейно независимых решения уравнения (7.7) с медленно меняющейся частотой  $\omega(t)$  можно представить в виде

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp \left[ \pm i \int^t \omega(t') dt' \right]. \quad (7.65)$$

Эти решения называются приближением Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна, или ВКБ-приближением [16, 53]. Это приближение сыграло огромную роль в квантовой механике, так как исходное уравнение (7.7) описывает не только осциллятор с переменными параметрами, но также и распространение волн в слабонеоднородных средах, в частности, распространение волны де-Бройля для микрочастицы в медленно меняющемся в пространстве потенциальном поле. Уравнение для волн в неоднородной вдоль одной из пространственных координат среде получается из (7.7) формальной заменой  $t \rightarrow x$ ,  $\omega^2(t) \rightarrow k^2(x)$ , где  $k(x)$  — локальное волновое число в точке  $x$ . Подробно этот вопрос будет рассмотрен в [2, лекции 9].

Отметим, что метод получения ВКБ-решения нигде не использовал положительность функции  $\omega^2(t)$ . Главное, чтобы во всей области изменения независимой переменной выполнялось условие (7.59). Если вместо  $\omega^2(t) > 0$  имеем  $\omega^2(t) < 0$ , то ВКБ-решение для такого случая есть

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{|\omega(t)|}} \exp \left[ \pm \int^t |\omega(t')| dt' \right]. \quad (7.66)$$

В теории колебаний решения вида (7.66) используются довольно редко, однако для задач распространения волн они оказываются столь же важ-

<sup>7</sup>Подробнее о свойствах асимптотических рядов см. [52].

ными, как и решения (7.65)<sup>8</sup>. Они описывают, в частности, туннельный эффект в квантовой механике.

Комбинируя выражения (7.65), можно представить решение в тригонометрической форме

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \cos \left[ \int^t \omega(t') dt' + \varphi_0 \right] = A(t) \cos [\Phi(t)], \quad (7.67)$$

где величины

$$A(t) = A_0/\sqrt{\omega(t)} \quad \text{и} \quad \Phi(t) = \int^t \omega(t') dt' + \varphi_0$$

— медленно меняющаяся амплитуда и фаза колебаний соответственно. Их значения определяются начальными условиями. Формула (7.67) показывает, что колебание осциллятора с медленно меняющимися параметрами представляет собой сигнал, промодулированный по амплитуде и частоте. Это обстоятельство широко используется в радиотехнике. Подчеркнем важное соотношение между фазой колебаний и мгновенной частотой, которое потребуется в дальнейшем:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega(t). \quad (7.68)$$

Рассмотрим вопрос, как меняется энергия осциллятора при медленном изменении его параметров. Чтобы записать выражение для энергии, конкретизируем тип осциллятора. Пусть это будет шарик массы  $m$  на пружинке с жесткостью  $k$ , которая медленно меняется во времени. Тогда  $k(t) = m\omega^2(t)$ , и энергия равна  $\mathcal{E} = m[\dot{x}^2(t) + \omega^2(t)x^2(t)]/2$ . Для  $\dot{x}(t)$  можно записать  $\dot{x}(t) \approx -\omega(t)A(t) \sin[\Phi(t)]$ . При вычислении производной мы отбросили слагаемое пропорциональное  $\dot{A}(t)$ , так как его учет означал бы превышение точности: оно имеет тот же порядок малости, что и члены асимптотического ряда, отброшенные при выводе (7.65). Учитывая это, для энергии колебаний получаем

$$\mathcal{E} = \frac{mA_0^2}{2} \left[ \frac{\omega^2(t) \sin^2 \Phi(t) + \omega^2(t) \cos^2 \Phi(t)}{\omega(t)} \right] = \frac{mA_0^2}{2} \omega(t).$$

Мы пришли к важному соотношению

$$I = \frac{\mathcal{E}(t)}{\omega(t)} = \text{const}, \quad (7.69)$$

из которого следует, что энергия осциллятора меняется со временем пропорционально изменению его частоты. Такие комбинации динамических

<sup>8</sup>Естественно, при этом следует сделать указанный выше переход от переменной  $t$  к переменной  $x$  в соответствии с пространственно-временной аналогией.

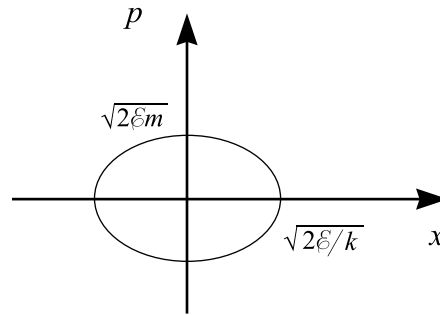


Рис. 7.6. Геометрическая интерпретация адиабатического инварианта. Площадь, ограниченная замкнутой траекторией, есть адиабатический инвариант.

переменных системы, которые остаются постоянными при медленном изменении ее параметров, называются *адиабатическими инвариантами* [24]. Для осциллятора с медленно меняющимися параметрами отношение энергии к частоте колебаний — адиабатический инвариант.

Формула (7.69) показывает, что в таком процессе энергия осциллятора может существенно меняться. Действительно, если весь процесс длится большое время, то абсолютное значение частоты изменится очень сильно, хотя условие (7.59) нарушено не будет, при этом осциллятор отдаст или наоборот приобретет значительную часть своей энергии.

Адиабатический инвариант имеет полезную геометрическую интерпретацию. Представим траекторию движения осциллятора на фазовой плоскости, в которой в качестве координат выбраны смещение осциллятора  $x$  и импульс  $p = \dot{x}/m$ . Если параметры не меняются, то траектория движения с энергией  $\mathcal{E}$  есть эллипс с полуосями, равными  $\sqrt{2\mathcal{E}/k}$  и  $\sqrt{2m\mathcal{E}}$  (см. рис. 7.6), а его площадь равна  $S = 2\pi\sqrt{m/k}\mathcal{E} = 2\pi\mathcal{E}/\omega = 2\pi I$ . Если параметр медленно меняется со временем, то в течение одного периода колебаний траектория будет близка к эллипсу, соответствующему текущим значениям энергии и частоты, площадь которого пропорциональна адиабатическому инварианту  $I$ . Следовательно, на больших интервалах времени траектория осциллятора будет трансформироваться так, что локально в каждый момент она будет близка к замкнутой траектории, площадь которой сохраняется.

Площадь, ограниченную замкнутой траекторией на фазовой плоскости можно представить в виде  $S = \oint p dx$ , где интегрирование ведется вдоль траектории по одному ее витку. Это позволяет записать

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dx. \quad (7.70)$$

В такой форме выражение для адиабатического инварианта справедливо не только для гармонического осциллятора, но и для произвольной динамической системы с одной степенью свободы, совершающей колебания [24].

Для системы с  $n$  степенями свободы, если она допускает полное разделение переменных, можно записать  $n$  различных адиабатических инвариантов, но в общем случае произвольной системы число адиабатических инвариантов меньше, чем  $n$ . Количество существующих адиабатических инвариантов тесно связано с понятием полной интегрируемости уравнений движения системы. Более подробно см. об этом [24, 54].

Понять, почему сохраняется именно величина  $\mathcal{E}/\omega$ , помогает квантово-механическая аналогия, в которой состояние осциллятора можно описать как существование конечного числа квантов возбуждения или *квазичастиц*. Энергия одного кванта есть  $\hbar\omega$  ( $\hbar$  — постоянная Планка), поэтому  $\mathcal{E}/\hbar\omega = N$  — число квантов. При медленном изменении параметров число квантов неизменно — они не рождаются и не исчезают. Полная энергия может измениться за счет энергии каждого кванта. Таким образом, смысл соотношения (7.69) довольно прозрачен. Эти соображения, вместе с уравнением (7.70), позволяют записать

$$\oint p dx = 2\pi\hbar N. \quad (7.71)$$

Соотношение (7.71) есть условие квантования для гармонического осциллятора: если принимать во внимание квантовые эффекты, то возможны только такие движения системы, для которых выполняется условие (7.71)<sup>9</sup>. Если учесть, что адиабатические инварианты можно записать не только для линейных систем, но и для некоторых систем более общего вида, включая системы со многими степенями свободы, то это приводит к методу получения квантовых уравнений для целого класса динамических систем. Этот метод был первым последовательным методом квантовой теории, предложенным П.Эренфестом еще до появления матричной механики Гейзенберга и волнового уравнения Шредингера. Хотя область его применимости ограничивалась системами с разделяющимися переменными, он во многом послужил основой для создания нерелятивистской квантовой механики в ее современном виде.

При параметрической неустойчивости картину можно также трактовать с точки зрения квантовой аналогии, только в этом случае энергия колебательной системы растет за счет увеличения числа квантов, энергия же каждого кванта остается неизменной. Для основного параметрического резонанса энергия одного кванта накачки (сигнала, изменяющего параметры системы) есть  $\hbar\omega \approx 2\hbar\omega_0$ , а один квант полезного сигнала имеет энергию  $\hbar\omega_0$ . Таким образом, один квант накачки распадается на два кванта полезного сигнала, за счет чего и растет полная энергии колебаний на частоте  $\omega_0$ .

<sup>9</sup>Точное квантово-механическое рассмотрение показывает, что в правой части (7.71) вместо  $N$  следует писать  $N + 1/2$ , чтобы учесть энергию нулевых колебаний осциллятора. При большом числе квантов этой разницей можно пренебречь.

Адиабатический инвариант для гармонического осциллятора можно также получить непосредственно из уравнения движения осциллятора, используя метод усреднения. Для этого умножим уравнение (7.7) на  $2\dot{x}(t)$  и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} 2\dot{x}\ddot{x} + \omega^2(t)2\dot{x}x &= \frac{d\dot{x}^2}{dt} + \omega^2(t)\frac{dx^2}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} [\dot{x}^2 + \omega^2(t)x^2] - \omega^2(t)x^2 \frac{1}{\omega^2(t)} \frac{d\omega^2(t)}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Так как потенциальная энергия системы равна  $\mathcal{E}_n = m\omega^2(t)x^2/2$ , а полная —  $\mathcal{E} = m[\dot{x}^2 + \omega^2(t)x^2]/2$ , то это соотношение можно записать в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2 \frac{1}{\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} \mathcal{E}_n.$$

Усредним его по одному периоду быстрых колебаний  $2\pi/\omega(t)$ . В течении этого времени полная энергия практически не меняется, так же, как и множитель перед  $\mathcal{E}_n$ , а средняя по периоду потенциальная энергия равна половине полной энергии. Следовательно

$$\frac{1}{\mathcal{E}(t)} \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \frac{1}{\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt}.$$

Проинтегрировав это уравнение, приходим к соотношению  $\mathcal{E}(t)/\omega(t) = \text{const}$ , то есть к выражению для адиабатического инварианта.

В качестве физического примера рассмотрим электрон, вращающийся в однородном магнитном поле (ротатор). Для постоянного во времени и однородного в пространстве поля движение ротатора уже было исследовано в гл. 1. При произвольных начальных условиях электрон будет двигаться по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля. Так как продольное движение не имеет отношения к интересующему нас эффекту, будем считать, что начальная продольная скорость электрона равна нулю, так что все движение происходит в поперечной к направлению магнитного поля плоскости, с координатами  $x$  и  $y$ . Если магнитное поле постоянно, то движение происходит по окружности с циклотронной частотой  $\omega_c = eB/mc$  (используем гауссову систему единиц). Пусть теперь магнитное поле медленно меняется за циклотронный период  $2\pi/\omega_c$ . В результате индуцируется электрическое поле, равное  $\mathbf{E} = -[\mathbf{z}^0, \mathbf{r}] \dot{B}(t)/(2c)$ , где  $\mathbf{z}^0$  — единичный вектор в направлении магнитного поля. Движение электрона под действием силы Лоренца описывается уравнением (релятивистскими эффектами здесь, для простоты, пренебрегаем)

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e\mathbf{E} - \frac{eB(t)}{c} [\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{z}^0].$$

Расписанное в координатах, оно дает два уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \omega(t)\dot{y}(t) + \frac{1}{2}\dot{\omega}(t)y(t) &= 0, \\ \ddot{y}(t) - \omega(t)\dot{x}(t) - \frac{1}{2}\dot{\omega}(t)x(t) &= 0, \end{aligned} \quad (7.72)$$

где  $\omega(t) = eB(t)/(mc)$ . Если ввести новую переменную  $\xi = x + iy$ , то можно представить эту систему уравнений в виде одного комплексного уравнения для величины  $\xi(t)$ :

$$\ddot{\xi}(t) - i\omega(t)\dot{\xi}(t) - \frac{i}{2}\dot{\omega}(t)\xi(t) = 0. \quad (7.73)$$

Слагаемое с первой производной можно исключить, используя замену переменных (7.5):  $\xi(t) = u(t) \exp[(i/2) \int^t \omega(t') dt']$ . Для функции  $u(t)$  получаем уравнение

$$\ddot{u}(t) + \frac{\omega^2(t)}{4} u(t) = 0, \quad (7.74)$$

соответствующее осциллятору с медленно меняющейся частотой  $\omega(t)/2$ . Отличие от уравнения (7.7) состоит в том, что в данном случае координата осциллятора является комплексной величиной. ВКБ-решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = \frac{A_1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp[i\theta(t)/2] + \frac{A_2}{\sqrt{\omega(t)}} \exp[-i\theta(t)/2],$$

где  $\theta(t) = \int^t \omega(t') dt'$ ,  $A_1$  и  $A_2$  — две комплексные постоянные, зависящие от начальных условий. Возвращаясь к переменной  $\xi(t)$ , получаем:

$$\xi(t) = \frac{A_1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp[i\theta(t)] + \frac{A_2}{\sqrt{\omega(t)}}. \quad (7.75)$$

Первое слагаемое описывает вращение по окружности с радиусом  $|A_1|/\sqrt{\omega(t)}$  и мгновенной частотой вращения  $\omega(t)$ , а второе слагаемое — медленное смещение центра окружности в плоскости  $x, y$ . Напомним, что при дифференцировании ВКБ-решений следует рассматривать предэкспоненциальные множители как постоянные, поэтому

$$\dot{\xi}(t) = A_1 \sqrt{\omega(t)} \exp[i\theta(t)]. \quad (7.76)$$

Так как  $|\dot{\xi}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_{\perp}^2$  — квадрат поперечной скорости вращения, то из (7.76) следует  $v_{\perp}^2/\omega(t) = |A_1|^2 = \text{const}$ , или

$$\frac{\mathcal{E}_{кин}}{B(t)} = \text{const}. \quad (7.77)$$

Это соотношение показывает, что кинетическая энергия поперечного вращения меняется пропорционально магнитному полю, а их отношение является адиабатическим инвариантом. Мы пришли к важному выводу: энергия электрона-осциллятора в переменном магнитном поле может сильно изменяться. Например, электрон-осциллятор может непрерывно отдавать высокочастотную энергию полю, такое произойдет, если квазистатическая составляющая поля будет плавно уменьшаться во времени.

## 7.8 Движение в быстро осциллирующем поле

Рассмотрим случай, когда в уравнении Матье частота изменения параметра гораздо больше, чем собственная частота осциллятора ( $\omega \gg \omega_0$ ). В этом случае его можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon \omega_0^2 x \cos \omega t. \quad (7.78)$$

и трактовать это уравнение так, что на осциллятор действует переменная внешняя сила  $\mathcal{F}(x, t) = F(x) \cos \omega t$ , амплитуда которой  $F(x) = -\varepsilon \omega_0^2 x$  зависит от мгновенного положения осциллятора. Метод, который будет здесь использован, пригоден для решения уравнения более общего вида, чем (7.78), поэтому проведем рассмотрение в общем случае. Рассмотрим механическое движение частицы под действием суммы медленно меняющейся в пространстве силы  $f(x)$  и гармонической во времени силы  $\mathcal{F}(x, t)$ , амплитуда которой также медленно изменяется в пространстве, а частота велика. Уравнение движения такой системы имеет вид (массу частицы  $m$  полагаем равной единице):

$$\ddot{x} + f(x) = F(x) \cos \omega t, \quad (7.79)$$

причем  $\omega \gg \omega_0 = 2\pi/T_0$ ,  $T_0$  — характерное время движения по траектории автономной системы, если внешняя переменная сила не действует.

Движение частицы представляет собой перемещение вдоль плавной траектории, на которое наложены быстрые осцилляции под действием переменной силы. Так как частота внешней силы велика, то амплитуда осцилляций должна быть малой из-за инерции частицы. Будем искать решение уравнения (7.79) в виде  $x(t) = X(t) + \mu \chi(t)$ ,  $\mu \sim \omega_0/\omega \ll 1$ . Функция  $X(t)$  представляет собой результат усреднения траектории  $\overline{x(t)} = X(t)$ . Подставляя такую форму решения в (7.79) и разлагая функции  $f(x)$  и  $F(x)$  в ряды Тейлора вплоть до слагаемых, пропорциональных первой степени



малого параметра  $\mu$ , получаем

$$\begin{aligned} \ddot{X}(t) + \mu\ddot{\chi}(t) + f[X(t)] + \mu \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{X(t)} \chi(t) = \\ = F[X(t)] \cos \omega t + \mu \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{X(t)} \chi(t) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Это уравнение содержит как медленно меняющиеся во времени слагаемые, так и быстро осциллирующие, они должны по отдельности компенсировать друг друга. Для быстро переменных величин получаем

$$\mu\ddot{\chi}(t) = F[X(t)] \cos \omega t. \quad (7.81)$$

Другие слагаемые пропорциональные  $\mu$  опущены, так как они малы. Что касается члена в (7.81), содержащего  $\ddot{\chi}$ , то он умножается на большую величину  $\omega^2$  и его следует сохранить. При решении этого уравнения силу  $F[X(t)]$  следует считать "замороженной" во времени. Тогда

$$\chi(t) = -\frac{F[X(t)]}{\mu\omega^2} \cos \omega t. \quad (7.82)$$

Подставим это решение в уравнение (7.80) и усредним его по быстрым осцилляциям, при этом получим следующее уравнение для медленного движения:

$$\ddot{X} + f(X) = -\frac{1}{\omega^2} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=X(t)} F[X(t)] \overline{\cos^2 \omega t} = -\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{F^2(x)}{2\omega^2} \right] \right\}_{x=X(t)}. \quad (7.83)$$

Мы получили очень важный результат, совершенно неожиданный с точки зрения интуитивных представлений: вместо того, чтобы "мелко вибрируя" под действием быстрых внешних пульсаций, сохранить среднее движение по траекториям, совпадающим с траекториями автономного аналога, наш новый эффективный осциллятор ведет себя совершенно иначе — в возвращающей силе появилось дополнительное не малое слагаемое, пропорциональное квадрату амплитуды внешних пульсаций.

Предположим, что медленно меняющаяся сила, действующая на частицу, является потенциальной, т.е. что ее можно представить в виде  $f(x) = -\partial U(x)/\partial x$ . Тогда усредненное движение происходит в поле эффективного потенциала, равного

$$U_{\text{эфф}}(x) = U(x) + \frac{F^2(x)}{2\omega^2}. \quad (7.84)$$

Из этого выражения следует, что дополнительная сила так действует на осциллятор, чтобы он смещался в область с меньшим значением амплитуды быстро осциллирующего воздействия. Дополнительная сила не является

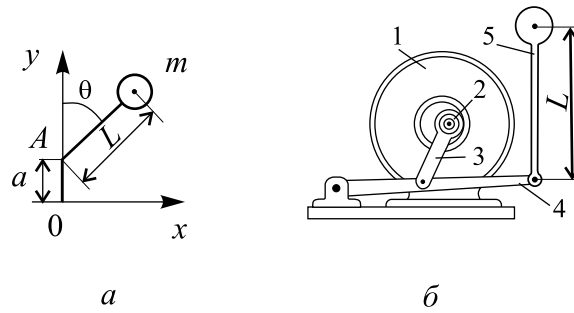


Рис. 7.7. Маятник Капицы [55]: а) теоретическая модель; математический маятник длиной  $L$  и массой  $m$  свободно вращается в точке подвеса  $A$ , которая колеблется вдоль оси  $y$  с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ . б) Схема прибора для опытов с маятником Капицы; на оси электромотора (1) от швейной машинки (число оборотов от 4000 до 6000  $\text{мин}^{-1}$ ) эксцентрично насажен шариковый подшипник (2), к обойме которого присоединена тяга (3); она приводит в колебание рычаг (4), один конец которого вращается в неподвижной опоре; на другой конец рычага подвешивается стержень маятника (5) ( $L \sim 15$  см) так, чтобы он свободно качался ( $a \sim 3 - 4$  мм).

малой, более того, она может качественно изменить характер движения системы.

Впервые этот результат был получен в 1951 г. П.Л. Капицей и применен к расчету маятника с быстро вибрирующим подвесом [55, 56]. Теоретическая модель маятника Капицы и схематическое изображение прибора для опытов с вибрирующим маятником представлены на рис. 7.7. Точка подвеса маятника, находящегося вблизи верхнего положения равновесия, совершает вибрации вдоль вертикальной оси с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ . Уравнение движения маятника Капицы имеет вид

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - ml\omega^2 \sin \omega t \sin \theta. \quad (7.85)$$

где  $l$  — длина маятника,  $m$  — его масса. Предположив, что угол отклонения маятника  $\theta(t) = \varphi(t) + \beta(t)$ , где  $\varphi(t)$  и  $\beta(t)$  отвечают медленному и быстрому движениям, и применив описанную выше процедуру усреднения, приходим к выводу, что в результате вибраций точки подвеса на маятник действует дополнительный момент. Он ведет себя как пара сил, стремящихся расположить маятник так, чтобы его стержень был ориентирован по направлению вибраций, т.е. вдоль оси  $y$ . Этот момент равен

$$M_{\text{вибр}} = -(ma^2\omega^2/4) \sin 2\varphi.$$

Он не зависит от длины маятника и пропорционален квадрату амплитуды колебаний подвеса. Полный момент в уравнении для усредненного движения равен

$$M_{\text{эфф}}(\varphi) = mgl \sin \varphi - (ma^2\omega^2/4) \sin 2\varphi. \quad (7.86)$$

Среди состояний равновесия маятника, определяемых из равенства  $M_{эфф} = 0$ , есть тривиальное  $\varphi = 0$ , соответствующее положению маятника "вверх ногами". Чтобы это состояние равновесия было устойчивым, необходимо  $dM_{эфф}/d\varphi < 0$ , откуда получаем условие устойчивости:  $a^2\omega^2 > 2gl$ . При выполнении этого условия вертикальное положение маятника Капицы устойчиво. На опыте это выглядит следующим образом: "Когда прибор приведен в действие, то стержень маятника ведет себя так, как будто для него существует особая сила, направленная по оси колебания подвеса. Поскольку частота колебаний подвеса велика, то изображение стержня маятника воспринимается глазом несколько размытым, и колебательное движение незаметно. Поэтому явление устойчивости производит неожиданное впечатление. Если маятнику сообщить толчок в сторону, то он начинает качаться как обычный маятник... Эти колебания затухают, и маятник приходит в вертикальное положение" [55].

"Если повернуть прибор так, что маятник колеблется в горизонтальной плоскости, то на движение исключается влияние момента силы тяжести. Если осторожно прикоснуться пальцем к стержню маятника и отводить его в сторону, то палец чувствует давление, производимое вибрационным моментом, и легко убедиться, что его наибольшая величина соответствует углу поворота в  $45^\circ$ " [56]. Когда маятник находится в обычном устойчивом положении, колебания подвеса приводят к уменьшению периода колебаний маятника. Это значит, что любые вертикальные колебания, влияющие на часы, с периодом, меньшим периода маятника часов, всегда будут ускорять их ход (это П.Л. Капица демонстрировал на двойном маятнике [56]).

Изложенная выше теория была в дальнейшем обобщена на случай трехмерного движения заряженной частицы в электромагнитном поле [57]. Было, в частности, предложено использовать движение электронов в слабо неоднородных переменных полях для создания СВЧ генераторов [58]. Подобный подход был успешно применен в теории определенного типа лазеров на свободных электронах, действие которых основано на излучении электронов в периодических статических полях (убитрон) и рассеянии волн потоками релятивистских электронов (скаттрон) [59, 60]. Схематическое изображение таких лазеров дано на рис.7.8. Элементарная теория скаттрона применительно к схеме 7.8,2 изложена в [61].

Для простоты рассмотрим случай, когда две плоские электромагнитные волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси  $z$  с частотами  $\omega_i$  и  $\omega_s$  и волновыми числами  $-k_i$  и  $k_s$  (это соответствует углам  $\varphi_i$  и  $\varphi_s$  на рис. 7.8,2, равным нулю). Волна с частотой  $\omega_i$  называется волной накачки и ее амплитуду можно считать заданной, а волна с частотой  $\omega_s$  — сигнальной волной (полезным сигналом). В инерциальной системе отсчета  $K'$ , которая движется поступательно в положительном направлении оси  $z$  (направление движения электронного потока) со скоростью, равной фазовой скорости комбинационной волны  $v_{\phi} = (\omega_s - \omega_i)/(k_s + k_i)$ , поле двух волн, воздействующих на пучок является одночастотным. Усреднен-

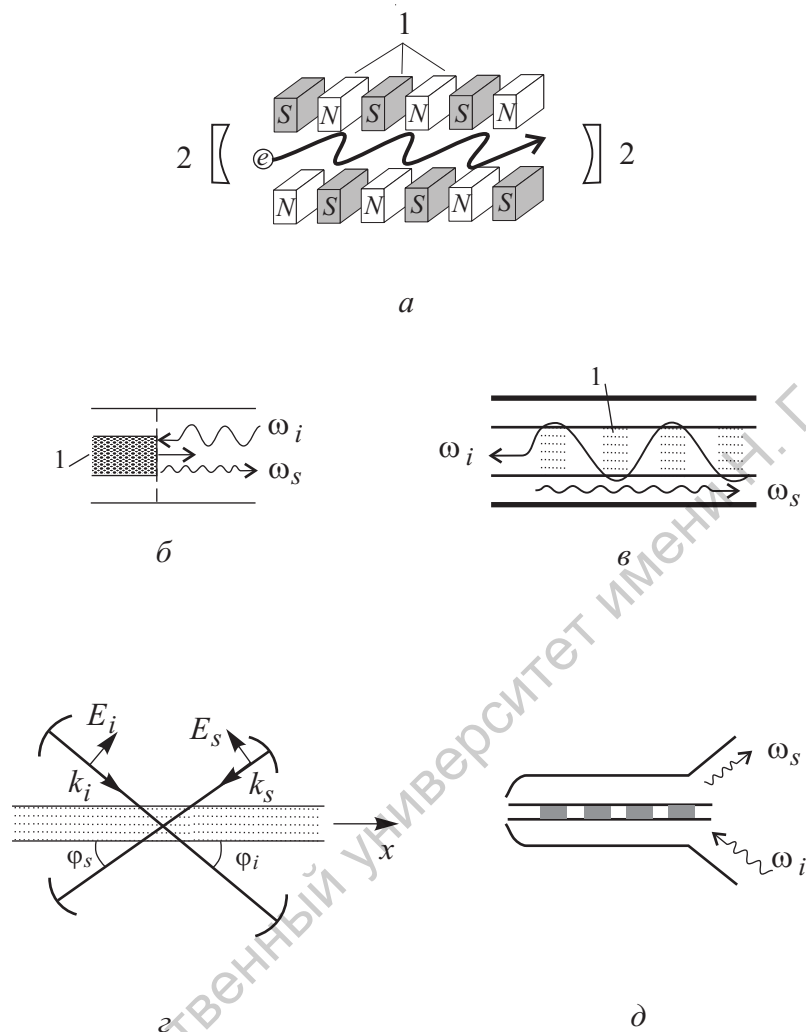


Рис. 7.8. Схематическое изображение лазеров на свободных электронах; а) убитрон – генератор, роль системы накачки в котором выполняет периодическая магнитная система (1); в спектре тока пучка возникают гармоники, скорость которых больше скорости света; они и взаимодействуют с полем резонатора сигнала (2); б) скаттрон – генератор с зеркальным отражением от быстро движущегося переднего фронта пучка электронов (1), в) скаттрон – генератор с рассеянием волны накачки на возмущениях плотности (1), вызванных комбинационной волной на частоте  $\omega_i - \omega_s$  приводящим к появлению сигнала; накачка (индекс  $i$ ) и сигнал (индекс  $s$ ) могут соответствовать различным типам колебаний электродинамической структуры; г), д) схематическое изображение модели скаттрона, используемой в теории.

ное движение электронов в поле комбинационной волны приводит к их группировке в сгустки, которые затем могут эффективно обмениваться энергией с полем.

Будем описывать электромагнитное поле с помощью векторного потенциала

$$\vec{A}(z, t) = \text{Re} \left[ \vec{A}_s(z) e^{i\theta_s} + \vec{A}_i(z) e^{i\theta_i} \right].$$

где  $\theta_s = \omega_s t - k_s z$  и  $\theta_i = \omega_i t + k_i z$  — фазы, а  $\vec{A}_s(z)$  и  $\vec{A}_i(z)$  — медленно меняющиеся в пространстве амплитуды полей сигнала и накачки. Так как мы полагаем, что амплитуды не зависят от поперечных координат, то из уравнений Максвелла следует, что  $z$ -компоненты обоих векторов равны нулю. Напряженности электрического и магнитного полей выражаются через векторный потенциал соотношениями

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (7.87)$$

Движения электрона определяется электрической силой и силой Лоренца

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}], \quad (7.88)$$

где  $\vec{p}$  — вектор импульса электрона. Используя предполагаемые свойства векторного потенциала и соотношения (7.87), для поперечных компонент уравнений движения можно записать

$$\frac{dp_{x,y}}{dt} = \frac{e}{c} \left[ \frac{\partial A_{x,y}}{\partial t} + v_z \frac{\partial A_{x,y}}{\partial z} \right].$$

Величина, стоящая в квадратных скобках в правой части этого уравнения, равна  $dA_{x,y}/dt$ , где при вычислении полной производной по времени подразумевается, что значение полей в бесконечно близкие моменты времени берутся в тех точках пространства, в которых в данные моменты находится электрон. Учитывая это обстоятельство, получаем

$$\frac{d}{dt} \left( p_{x,y} - \frac{e}{c} A_{x,y} \right) = 0. \quad (7.89)$$

Будем считать, что слева от области, где происходит взаимодействие, пучок движется только вдоль оси  $z$  и электромагнитное поле отсутствует. Тогда из (7.89) следует  $p_{x,y} = (e/c)A_{x,y}$ . Так как импульс и скорость связаны соотношением  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ , где  $\gamma = \mathcal{E}/(mc^2)$  — релятивистский фактор,  $\mathcal{E}$  — энергия электрона, то  $v_{x,y} = (ec^2/\mathcal{E})A_{x,y}$ . Используя эту формулу в продольной компоненте уравнения движения (7.88), приходим к уравнению

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{e^2 c}{\mathcal{E}} \left( A_x \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = -\frac{e^2 c}{2\mathcal{E}} \frac{\partial \vec{A}^2}{\partial z}. \quad (7.90)$$

Эта уравнение показывает, что, совершая поперечные колебания в поле электромагнитной волны, электрон испытывает дополнительную подемоторную силу, которая смещает его в продольном направлении. Подставляя векторный потенциал в виде суммы полей двух волн, находим

$$\vec{A}^2 = \frac{1}{2} \left\{ |\vec{A}_i|^2 + |\vec{A}_s|^2 + \operatorname{Re} \left[ \vec{A}_s \vec{A}_i^* e^{i(\theta_s - \theta_i)} \right] + \dots \right\}. \quad (7.91)$$

Здесь опущены слагаемые, носящие нерезонансный характер. Амплитуды волн  $\vec{A}_i$  и  $\vec{A}_s$  изменяются вдоль  $z$  за счет энергообмена с электронным пучком. В первом приближении можно считать, что они постоянны, поэтому основной вклад в продольную силу будет давать слагаемое, пропорциональное  $\exp[i(\theta_s - \theta_i)] = \exp[i(\omega_s - \omega_i)t - i(k_s + k_i)z]$ . В качестве координаты следует подставить продольную координату электрона, которая в том же приближении равна  $z = v_{0z}(t - t_0)$ , где  $v_{0z}$  — начальная продольная скорость электрона,  $t_0$  — время его влета в область взаимодействия. Отсюда видно, что фазовый множитель медленно меняется, если скорость электрона  $v_{0z} \approx (\omega_s - \omega_i)/(k_s + k_i)$ . При этом условии поле комбинационной волны с амплитудой, пропорциональной  $\vec{A}_s \vec{A}_i^*$ , синхронно электронному потоку, т.е. он во время своего движения видит примерно одну и ту же фазу поля, что приводит к группировке электронного потока в сгустки, совершенно также, как это происходит в лампе бегущей волны (ЛБВ) (см. лекцию 8 учебного пособия [2]). В свою очередь сгруппированный электронный поток усиливает поле комбинационной волны. Поэтому теория скаттрона полностью аналогична теории ЛБВ с заменой высокочастотного электрического поля в ЛБВ на эффективное поле комбинационной волны.

В одной из разновидностей скаттрона обе волны — сигнальная и накачки — незамедленные, для них выполняются соотношения  $\omega_{i,s} = ck_{i,s}$ . В этом случае условие синхронизма можно переписать в виде

$$\omega_s \approx \frac{1 + v_{0z}/c}{1 - v_{0z}/c} \omega_i \approx 4\gamma_0^2 \omega_i,$$

$\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_{0z}^2/c^2}$  — релятивистский гамма-фактор, соответствующий начальной энергии электронов. Отсюда следует, что если пучок имеет релятивистскую энергию ( $\gamma_0 \gg 1$ ), то частота полезного сигнала значительно превосходит частоту волны накачки. Фактически при этом происходит встречное рассеяние волны накачки на электронах как на движущемся зеркале, трансформацию в этом процессе частоты можно трактовать как Комpton-эффект.

На волновом языке механизм индуцированного излучения сигнальной волны выглядит следующим образом. При воздействии двух волн с частотами  $\omega_i$  и  $\omega_s$  и амплитудами  $\vec{A}_i$  и  $\vec{A}_s$ , на электронный поток на электроны начинает действовать периодическая сила с разностной частотой  $\omega_s - \omega_i$  и амплитудой  $\vec{A}_s \vec{A}_i^*$ . При условии  $v_{0z} \approx v_\phi$  комбинационная волна, воздействуя на пучок, приводит к его группированию; при этом плотность

электронов изменяется по амплитуде пропорционально  $\vec{A}_s \vec{A}_i^* / (\omega_s - \omega_i)^2$  с частотой  $\omega_s - \omega_i$ . Поскольку диэлектрическая проницаемость электронного потока и его показатель преломления определяются плотностью электронов, изменение плотности означает и изменение этих величин. При этом волна накачки  $(\vec{A}_i, \omega_i)$  рассеивается на возмущениях показателя преломления. Но тогда разностная частота  $\omega_s - \omega_i$  и частота накачки  $\omega_i$  складываются, что приводит к появлению волны сигнала с частотой  $\omega_s$ .

Аналогично можно рассмотреть принцип действия лазеров на свободных электронах других типов [59].

## Лекция 8

# Колебания в системе связанных осцилляторов

*Примеры связанных осцилляторов. Два связанных идентичных маятника. Симметричные и антисимметричные колебания. Биения. Парциальные системы и парциальные частоты. Общий случай связанных осцилляторов с силовым (емкостным) типом связи. Слабая и сильная связности осцилляторов. Влияние трения на процесс биений. Связанные осцилляторы под действием гармонической силы. Демпфирование колебаний. Теорема взаимности. Колебания в системе  $N$  связанных осцилляторов (общий случай). Цепочка идентичных осцилляторов. Спектр и собственные моды колебаний. Плотность распределения собственных частот. Колебания в цепочке чередующихся осцилляторов двух типов. Низкочастотная и высокочастотная ветви спектра. Акустическая и оптическая моды колебаний в модели одномерного кристалла.*

### 8.1 Примеры связанных осцилляторов

Общий подход к описанию сложных систем может быть таким. Сначала исследуется простая система, которая служит элементарной ячейкой для построения сложной системы. Затем рассматривается система двух связанных между собой элементарных ячеек и выясняются новые особенности, появившиеся в результате введения связи. Следующим шагом может быть рассмотрение большого или даже бесконечного числа связанных ячеек, моделирующих поведение сплошной среды. Если в качестве такой ячейки выбрать осциллятор, то можно подойти к построению теории колебаний и волн в распределенных системах.



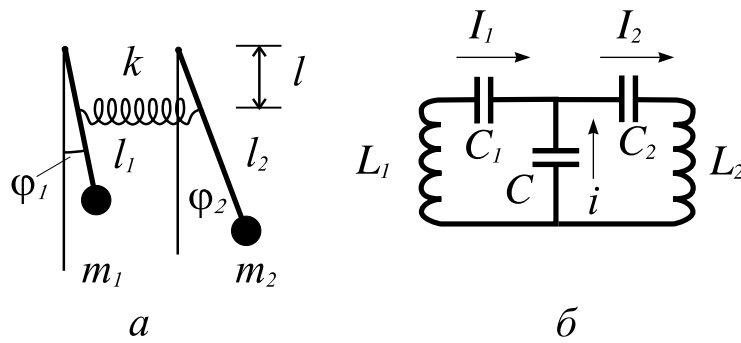


Рис. 8.1. Система связанных маятников с силовым типом связи (а) и соответствующая система связанных колебательных контуров (б).

В связи с этим, следующим логическим шагом в теории линейных колебаний является анализ системы двух связанных линейных осцилляторов. Оказывается, что в некотором смысле система двух связанных осцилляторов не более сложна, чем одиночный осциллятор. Простым преобразованием координат можно свести такую систему к двум не связанным между собой осцилляторам. За этой теоретической простотой скрываются многие красивые и важные физические явления, к изучению которых мы переходим в этой лекции.

Связь между осцилляторами можно ввести различными способами. Рассмотрим, например, механическую систему из двух математических маятников, соединенных пружиной (рис. 8.1,а). Уравнения колебаний маятников в предположении малых углов отклонения можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 g l_1 \varphi_1 + k l^2 (\varphi_2 - \varphi_1), \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 g l_2 \varphi_2 - k l^2 (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Обозначения переменных и параметров в этих уравнениях показаны на рис. 8.1,а. Если бы связи не было ( $k = 0$ ), то получились бы уравнения для двух несвязанных осцилляторов с собственными частотами  $\omega_{01} = \sqrt{g/l_1}$  и  $\omega_{02} = \sqrt{g/l_2}$ . Наличие связи приводит к тому, что в первом из уравнений (8.1) появляется слагаемое, пропорциональное координате второго осциллятора, а во втором — слагаемое, пропорциональное координате первого осциллятора: осцилляторы связываются.

Электрическая система, аналогичная связанным маятникам, имеет вид показанный на рис. 8.1,б. Действительно, по первому закону Кирхгофа можно записать  $i = I_1 - I_2$ , или  $dq/dt = dq_1/dt - dq_2/dt$ , где  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q$  — заряды на соответствующих конденсаторах. Тогда  $q = q_1 - q_2$  (постоянную интегрирования считаем равной нулю, полагая, что когда колебаний нет, все конденсаторы незаряжены). Второй закон Кирхгофа, записанный для

двух контуров на рис. 8.1,б, дает уравнения

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C} q &= 0, \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} q_2 - \frac{1}{C} q &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1 L_1} q_1 &= \frac{1}{C L_1} (q_2 - q_1), \\ \ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2 L_2} q_2 &= -\frac{1}{C L_2} (q_2 - q_1). \end{aligned} \quad (8.2)$$

С точностью до переобозначений, уравнения (8.2) совпадают с уравнениями (8.1). Такой способ связи осцилляторов, при котором в каждом из уравнений для несвязанных систем появляются слагаемые, пропорциональные координате второй системы, называется *силовой* связью, в приложении в механических системах, или *емкостной* связью, применительно к колебательным контурам [28].

Хотя для рассмотренной механической системы введение связи каким-либо другим способом кажется искусственным, для колебательных контуров это не так. Обратимся, например, к системе, изображенной на рисунке 8.2,а. Катушки индуктивностей двух колебательных контуров связаны между собой с коэффициентом взаимной индукции  $M$ . Для каждого из контуров можно записать (сразу учитываем, что  $I_1 = \dot{q}_1$ ,  $I_2 = \dot{q}_2$ )

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 + M \ddot{q}_2 &= 0, \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 + M \ddot{q}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Видно, что в этом случае связь уравнений обеспечивается присутствием слагаемых, пропорциональных второй производной по времени от координат осцилляторов. Такую связь естественно назвать *индуктивной*. Возникает вопрос, что является аналогом индуктивной связи в механическом случае? Чтобы разобраться с этим, рассмотрим колебания механической балки, подвешенной на двух пружинах, причем будем считать, что балка неоднородная, так что ее центр тяжести смещен в сторону одной из пружин (см. рис. 8.2,б). Уравнения колебаний такой системы проще всего получить, записав выражения для кинетической и потенциальной энергии системы через динамические переменные, выбранные в качестве координат осцилляторов. Например, в качестве таких переменных можно взять  $x_1$  и  $x_2$  — смещения концов балки от положения равновесия. Тогда потенциальная энергия системы равна<sup>1</sup>  $U = k_1 x_1^2 / 2 + k_2 x_2^2 / 2$ . Кине-

<sup>1</sup>Вклад в потенциальную энергию, связанный с силой тяжести, не учитываем, так как она не является в данном случае возвращающей, и не может привести к появлению колебательного движения.

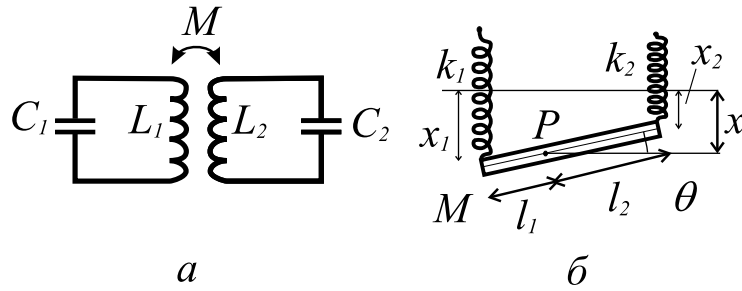


Рис. 8.2. Связанные колебательные контуры с индуктивным типом связи (а); соответствующая механическая система (б).

тическую энергию проще выразить через смещение центра тяжести балки  $\xi$  и угол ее поворота  $\theta$  вокруг оси, проходящей через центр тяжести:  $K = M\xi^2/2 + I\theta^2/2$ , где  $M$  и  $I$  — масса балки и момент ее инерции относительно точки  $P$ . Величины  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\xi$  и  $\theta$  связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi - l_1\theta, \\ x_2 &= \xi + l_2\theta, \end{aligned}$$

используя которые, выразим кинетическую энергию системы через  $x_1$  и  $x_2$ :

$$K = \frac{1}{2l^2} [(Ml_2^2 + I)\dot{x}_1^2 + 2(Ml_1l_2 - I)\dot{x}_1\dot{x}_2 + (Ml_1^2 + I)\dot{x}_2^2],$$

где  $l = l_1 + l_2$  — общая длина балки. Уравнения движения можно получить из лагранжиана системы  $L = K - U$ , используя уравнения Лагранжа [24]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Это приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{Ml_2^2 + I}{l^2} \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \frac{Ml_1l_2 - I}{l^2} \ddot{x}_2 &= 0, \\ \frac{Ml_1^2 + I}{l^2} \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + \frac{Ml_1l_2 - I}{l^2} \ddot{x}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

Уравнения (8.4) имеют тот же вид, что и уравнения (8.3), описывающие индуктивную связь между контурами. Для механических систем подобный способ связи принято называть *инерционным*.

Более внимательное рассмотрение последнего примера показывает, однако, что различие между силовой и инерционной (или емкостной и индуктивной) связью в значительной степени является условным. Действительно, если вместо того, чтобы выражать кинетическую энергию через переменные  $x_1$  и  $x_2$ , мы выразим потенциальную энергию через  $\xi$  и  $\theta$ , то

уравнения Лагранжа приведут к системе двух связанных осцилляторов, в которых связь будет описываться слагаемыми, пропорциональными  $x_1$  и  $x_2$ , то есть характер связи будет силовым. Таким образом, одна и та же система в одних переменных выглядит как связанные осцилляторы с силовой связью, а в других — с инерционной связью. Тип связи определяется выбором динамических переменных [28, Глава 22].

В общем случае кинетическая и потенциальная энергии системы двух связанных осцилляторов, выраженные через некоторые динамические переменные  $x_1$  и  $x_2$ , имеют вид

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} k_{ij} x_i x_j, \quad (8.5)$$

$m_{12} = m_{21}$ ,  $k_{12} = k_{21}$ . Условие положительности кинетической энергии приводит к ограничениям на коэффициенты  $m_{ij}$  следующего вида:

$$m_{11} > 0, \quad m_{22} > 0, \quad m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0. \quad (8.6)$$

Потенциальная энергия также должна быть положительной при любых отличных от нуля значениях  $x_1$  и  $x_2$ , в противном случае силы, возникающие в системе при некоторых отклонениях, будут уводить осцилляторы от положения равновесия, и гармонических колебаний в системе не возникнет. Поэтому таким же ограничениям, как (8.6), должны подчиняться и коэффициенты  $k_{ij}$ :

$$k_{11} > 0, \quad k_{22} > 0, \quad k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0. \quad (8.7)$$

Математически соотношения (8.6) и (8.7) определяют условия положительной определенности квадратичных форм в выражениях (8.5). Перейдем к новым переменным  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , линейно связанным с  $x_1$  и  $x_2$  соотношениями

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ \xi_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Выбирая определенным образом коэффициенты  $c_{ij}$ , можно исключить из выражения для кинетической энергии перекрестные слагаемые, пропорциональные произведению  $\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2$ . В этом случае уравнения движения системы в переменных  $\xi_i$  будут демонстрировать связь силового (или емкостного) типа. Можно, наоборот, исключить из потенциальной энергии перекрестные слагаемые, пропорциональные  $\xi_1 \xi_2$ , получив систему с инерционной (или индуктивной) связью. Самое замечательное состоит в том, что коэффициентов  $c_{ij}$  в соотношениях (8.8) достаточно, чтобы исключить слагаемые, определяющие связь, одновременно и в кинетической и в потенциальной энергии! Если выполнены условия (8.6) и (8.7), это приведет

к двум несвязанным между собой уравнениям гармонических осцилляторов. Соответствующие динамические переменные могут не нести прямого физического смысла, как координата какой-либо точки механической системы, или напряжение на каком-либо элементе электрической схемы, однако в этих переменных уравнения будут выглядеть наиболее просто. Такие координаты называются *нормальными*, а соответствующие им простые гармонические колебания системы — *нормальными колебаниями*, или *собственными модами* системы.

Расчет нормальных колебаний может быть проведен чисто математическими методами, с привлечением линейной алгебры и теории квадратичных форм [62], однако нам важно понять, как ведет себя система связанных осцилляторов с физической точки зрения. По этой причине мы подробно рассмотрим колебания в конкретной системе, причем для наглядности выберем в качестве таковой систему связанных маятников, показанную на рис. 8.1,а.

## 8.2 Два связанных идентичных осциллятора

Пусть осцилляторы, составляющие систему одинаковы. Тогда для маятников на рис. 8.1,а  $m_1 = m_2$ ,  $l_1 = l_2$ . Не ограничивая общности, можно положить также  $l_1 = l$ . Уравнения (8.1) принимают вид

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= \frac{k}{m_1}(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 &= -\frac{k}{m_2}(\varphi_2 - \varphi_1).\end{aligned}\tag{8.9}$$

Здесь введено обозначение  $\omega_0^2 = g/l$ . Поведение связанных идентичных осцилляторов легко понять из простых соображений, связанных с симметрией системы. Предположим, что в начальный момент времени оба маятника отклонены на один и тот же угол  $\varphi_{0s}$  и имеют одинаковую угловую скорость  $\dot{\varphi}_{0s}$ . Очевидно, что движение системы будет таким, что в любой момент времени пружина останется не растянутой, т. е. маятник будет совершать гармонические колебания с частотой  $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{g/l}$ , соответствующей одиночному маятнику без связи. Углы отклонения осцилляторов в зависимости от времени равны

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_{0s} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\varphi}_{0s}}{\omega_1} \sin \omega_1 t.\tag{8.10}$$

Предположим теперь, что при  $t = 0$  маятники отклонены на одинаковый угол  $\varphi_{0a}$ , но в разные стороны, и их начальные угловые скорости равны по абсолютной величине  $\varphi_{0a}$ , но имеют разные знаки. В этом случае очевидно, что средняя точка пружины в любой последующий момент времени останется неподвижной, поэтому можно заменить систему двух маятников на один, прикрепленный пружиной половинной длины к неподвижной

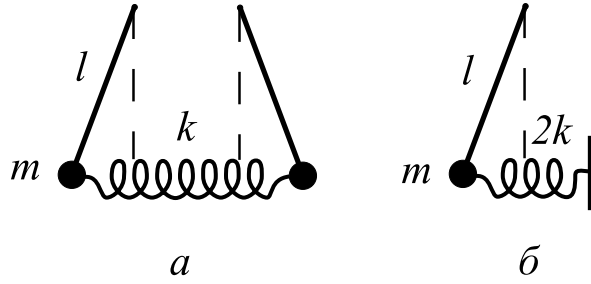


Рис. 8.3. Антисимметричные колебания в системе идентичных осцилляторов (а), эквивалентная система с одной степенью свободы (б).

стенке (см. рис. 8.3). Колебания будут иметь частоту  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k/m}$ , их временная зависимость будет иметь вид

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_{0a} \cos \omega_2 t + \frac{\dot{\varphi}_{0a}}{\omega_2} \sin \omega_2 t. \quad (8.11)$$

Таким образом, специальным подбором начальных условий в системе можно возбудить гармонические колебания с одной из двух частот  $\omega_1$  или  $\omega_2$ . В первом случае маятники двигаются идентично друг другу, такие колебания называются симметричными, а соответствующий им тип колебаний — симметричной модой. Во втором случае движение маятников происходит в противофазе, такой тип колебаний называется антисимметричной модой.

Для того, чтобы возбудить в чистом виде симметричную или антисимметричную моды, необходимо, как мы видим, специальный подбор начальных условий. При произвольных начальных условиях движение будет суперпозицией движений (8.10) и (8.11):

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_{0s} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\varphi}_{0s}}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \varphi_{0a} \cos \omega_2 t + \frac{\dot{\varphi}_{0a}}{\omega_2} \sin \omega_2 t, \\ \varphi_2(t) &= \varphi_{0s} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\varphi}_{0s}}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \varphi_{0a} \cos \omega_2 t - \frac{\dot{\varphi}_{0a}}{\omega_2} \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Из этих соотношений следует, что в общем случае в движение каждого осциллятора вносят вклад гармонические колебания с обеими частотами — симметричной и антисимметричной мод. Никаких других частот появиться не может, так как в решениях (8.12) содержится четыре произвольные постоянные, ровно столько, сколько необходимо задать для полного определения движения системы с двумя степенями свободы.

Представляет интерес вопрос, каким образом решения (8.12) можно получить непосредственно из уравнений (8.9)? Для его выяснения введем новые переменные  $\xi_s$  и  $\xi_a$  соотношениями

$$\xi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \xi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

и сложим и вычтем уравнения (8.9) друг из друга. Получаем

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_s + \omega_0^2 \xi_s &= 0, \\ \ddot{\xi}_a + \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right) \xi_a &= 0.\end{aligned}\quad (8.13)$$

Эти уравнения не связаны между собой и определяют колебания соответственно симметричной и антисимметричной моды. Каждое из них является уравнением линейного осциллятора, но соответствующая координата осциллятора  $\xi_s$  или  $\xi_a$  не имеет прямого физического толкования, как переменная, описывающая движение какой-либо части системы. Напротив, в них вносят равноправный вклад углы отклонения обоих осцилляторов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , так как и в симметричном, и в антисимметричном движениях участвуют оба осциллятора. Решения уравнений (8.13) для величин  $\xi_s$  и  $\xi_a$  записываются обычным образом, и возврат к переменным  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  приводит к выражениям (8.12).

Симметричная и антисимметричная моды выступают в данном примере в качестве нормальных типов колебаний, о которых шла речь в предыдущем параграфе. Полная энергия системы (с учетом малости углов отклонения) имеет вид

$$E = \frac{ml^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{ml^2 \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{mgl \varphi_1^2}{2} + \frac{mgl \varphi_2^2}{2} + \frac{kl^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2}.$$

Принимая во внимание, что  $\xi_s^2 + \xi_a^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$  и  $\dot{\xi}_s^2 + \dot{\xi}_a^2 = \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2$ , получаем

$$E = \frac{ml^2 \dot{\xi}_1^2}{2} + \frac{mgl \xi_1^2}{2} + \frac{ml^2 \dot{\xi}_2^2}{2} + \frac{(mgl + 2kl^2) \xi_2^2}{2}. \quad (8.14)$$

Вклад в энергию колебаний симметричной и антисимметричной мод независим друг от друга. Если, используя уравнения Лагранжа, записать уравнения системы, то, естественно, получатся уравнения (8.13).

Наиболее отчетливо свойства решений (8.12) проявляются при специальном выборе начальных условий. Пусть один из маятников отклонили на угол  $\varphi_0$ , второй удерживают в положении равновесия, и при  $t = 0$  маятники отпустили без начальной скорости. Такая ситуация соответствует следующему выбору постоянных в (8.12):

$$\varphi_{0s} = \varphi_{0a} = \frac{\varphi_0}{2}, \quad \dot{\varphi}_{0s} = \dot{\varphi}_{0a} = 0.$$

Колебания маятников будут происходить по закону

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \\ \varphi_2(t) &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.\end{aligned}\quad (8.15)$$

Предположим, что выполняется условие  $k/m \ll \omega_0^2$  (приближение слабой связи). Тогда

$$\begin{aligned}\omega_2 - \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} - \omega_0 \approx \frac{k}{m\omega_0}, \\ \omega_1 + \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} + \omega_0 \approx 2\omega_0 + \frac{k}{m\omega_0} \approx 2\omega_0,\end{aligned}$$

и решения (8.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &\approx \varphi_0 \cos \frac{k}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t, \\ \varphi_2(t) &\approx \varphi_0 \sin \frac{k}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.\end{aligned}\tag{8.16}$$

Зависимости  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  показаны на рис. 8.4. Колебания маятников имеют характерный вид *биений*. В соответствии с условием слабой связи, первые множители в обоих уравнениях в (8.16) меняются гораздо медленнее вторых, поэтому их, вместе с постоянной  $\varphi_0$  можно трактовать как медленное изменение амплитуды колебаний осцилляторов во времени. На начальном отрезке времени амплитуда колебаний первого маятника максимальна и меняется слабо, а амплитуда колебаний второго маятника растет почти по линейному закону, так как можно считать  $\sin[kt/(2m\omega_0)] \approx kt/(2m\omega_0)$ . На этой стадии весь процесс можно приближенно трактовать, как движение второго маятника под действием внешней силы, передаваемой через пружину от первого. Так как осцилляторы одинаковы, частоты колебаний каждого из них совпадают, и имеет место точный резонанс, при котором происходит сингулярный рост амплитуды, как это было показано в лекции 5. Так продолжается до тех пор, пока заметная часть энергии первого маятника не перейдет ко второму. Передача энергии сопровождается уменьшением амплитуды колебаний первого осциллятора и замедлением скорости роста амплитуды второго. Через время  $\tau = \pi m\omega_0/k$  вся энергия переходит ко второму маятнику, амплитуда его колебаний максимальна, а амплитуда колебаний второго становится равной нулю. Осцилляторы меняются местами и начинается обратный процесс — перекачка энергии из второго осциллятора в первый.

Необходимо подчеркнуть, что движение системы в целом не является, вообще говоря, периодическим, так как частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут быть несоизмеримыми. Это приводит, в частности, к тому, что через время  $2\tau$  полной перекачки энергии от первого осциллятора ко второму и обратно не будет, фазы колебаний обоих осцилляторов будут отличаться от их значений при  $t = 0$ . Поэтому имеет смысл говорить только о периодичности процесса перекачки энергии, а не всего колебания в целом.

В заключении этого параграфа выясним физический смысл приближения слабой связи. Для этого вычислим среднюю по времени энергию



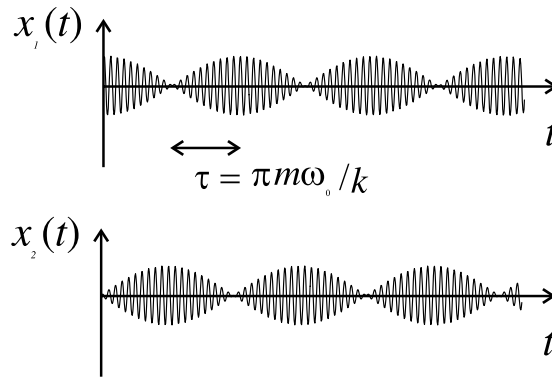


Рис. 8.4. Биения в системе связанных идентичных осцилляторов.

колебаний каждого из осцилляторов  $\bar{E}_{1,2}$  и среднюю по времени энергию в элементе связи (пружине). Так как маятники идентичны, то

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \frac{ml^2\overline{\dot{\varphi}_1^2}}{2} + \frac{mgl\overline{\varphi_1^2}}{2}$$

Используя выражения (8.15), легко получить

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1^2} &= \frac{\varphi_0^2}{4} \left( \overline{\cos^2 \omega_1 t} + \overline{\cos^2 \omega_2 t} + 2\overline{\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t} \right) = \frac{\varphi_0^2}{8}, \\ \overline{\dot{\varphi}_1^2} &= \frac{\varphi_0^2}{4} \left( \omega_1^2 \overline{\sin^2 \omega_1 t} + \omega_2^2 \overline{\sin^2 \omega_2 t} + 2\omega_1 \omega_2 \overline{\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t} \right) = \\ &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \frac{\varphi_0^2}{4} = \frac{\varphi_0^2}{4} \left( \omega_0^2 + \frac{k}{m} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\bar{E}_{1,2} = \frac{ml^2\varphi_0^2}{4} \left( \omega_0^2 + \frac{k}{2m} \right).$$

Для средней по времени энергии, запасенной в пружине имеем

$$\bar{E}_{\text{св}} = \frac{kl^2\overline{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}}{2} = \frac{\varphi_0^2}{4} kl^2.$$

Условие  $k/m \ll \omega_0^2$ , введенное как условие слабой связи, означает, таким образом, что

$$\bar{E}_{\text{св}} \ll \bar{E}_{1,2}, \quad (8.17)$$

то есть в приближении слабой связи средняя по времени энергия колебаний каждого из осцилляторов в отдельности значительно больше средней по времени энергии, запасенной в элементе связи.

### 8.3 Парциальные системы и парциальные частоты

Важную роль в теории связанных колебания играют понятия парциальных систем и парциальных частот. Для их введения рассмотрим систему двух связанных осцилляторов самого общего вида, для которой кинетическая и потенциальная энергии задаются формулами (8.5) и положим, например,  $x_2 \equiv 0$ . Это означает, что второй осциллятор принудительно удерживается в положении равновесия. Полученная система с одной степенью свободы имеет кинетическую энергию  $m_{11}\dot{x}_1^2/2$  и потенциальную энергию  $k_{11}x_1^2/2$ , что соответствует гармоническому осциллятору

$$\ddot{x}_1 + \frac{k_{11}}{m_{11}}x_1 = 0$$

с частотой  $n_1 = \sqrt{k_{11}/m_{11}}$ . Наоборот, если положить  $x_1 \equiv 0$ , та же процедура приводит к уравнению осциллятора

$$\ddot{x}_2 + \frac{k_{22}}{m_{22}}x_2 = 0$$

с частотой  $n_2 = \sqrt{k_{22}/m_{22}}$ . Системы с одной степенью свободы, полученные из исходной в результате того, что одна из переменных принудительно обращается в нуль, называются *парциальными системами*, а соответствующие им частоты колебаний — *парциальными частотами*.

Найдем парциальные системы для связанных маятников (рис. 8.1,а). Для этого закрепим правый маятник в положении равновесия ( $\varphi_2 \equiv 0$ ) и получим систему с одной степенью свободы, совершающую гармонические колебания с частотой  $n_1 = \sqrt{g/l_1 + kl^2/(m_1l_1^2)}$ . Если закрепить левый маятник, то частота колебаний будет равна  $n_2 = \sqrt{g/l_2 + kl^2/(m_2l_2^2)}$ . Это и есть парциальные частоты. Дадим более строгое определение парциальных систем и частот, применимое к колебательным системам с  $N$  степенями свободы.

Пусть имеется линейная динамическая система с  $N$  степенями свободы, описываемая динамическими переменными  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Положим  $x_j \equiv 0$  для  $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ . Новая система с одной степенью свободы называется  $i$ -й парциальной системой. Если она совершает гармонические колебания, то соответствующая частота называется  $i$ -й парциальной частотой.

Важно подчеркнуть два обстоятельства:

1. У колебательной системы с  $n$  степенями свободы существует ровно  $n$  парциальных частот, некоторые из которых могут совпадать между собой. Определение парциальных частот не вызывает трудностей, если известны уравнения системы или функции потенциальной и кинетической энергии.

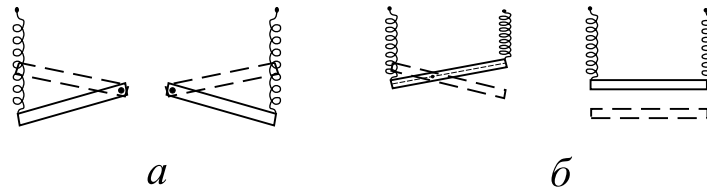


Рис. 8.5. Парциальные системы для балки, подвешенной на двух пружинах, когда в качестве динамических переменных выбраны вертикальные смещения концов балки (а), и смещение центра тяжести и поворот относительно оси, проходящей через центр (б). Пунктиром показаны положения балки через полпериода колебаний парциальной системы.

2. Понятие парциальных систем и парциальных частот не является однозначным, а зависит от выбора динамических переменных. Действительно, совершив линейное преобразование переменных  $x_i$  с помощью соотношений

$$x'_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j, \quad (8.18)$$

получим функцию Лагранжа, а значит и уравнения связанных колебаний с новыми коэффициентами  $m_{ij}$  и  $k_{ij}$ , и, таким образом, другие значения парциальных частот.

Рассмотрим, например, колебания балки, показанной на рис. 8.2,б. Если в качестве переменных выбрать смещения концов балки  $x_1$  и  $x_2$ , то первой парциальной системой будет система, в которой правый конец закреплен с помощью проходящей через него оси, позволяющей балке свободно вращаться, но запрещающей вертикальные смещения правого конца. Аналогично второй парциальной системой будет система с таким же образом закрепленным левым концом балки. Эти парциальные системы показаны на рис. 8.5,а. Парциальные частоты определяются из простых соображений. Если  $I$  — момент инерции балки относительно центра тяжести, то, в соответствии с теоремой Кенига, моменты инерции относительно концов балки равны  $I_1 = I + Ml_1^2$  (для левого конца) и  $I_2 = I + Ml_2^2$  (для правого конца). Поэтому

$$n_1^2 = \frac{k_1 l^2}{I + Ml_2^2}, \quad n_2^2 = \frac{k_2 l^2}{I + Ml_1^2}. \quad (8.19)$$

Предположим теперь, что в качестве динамических переменных выбраны  $\xi$  и  $\theta$  — вертикальное смещение центра тяжести и угол поворота балки вокруг оси, проходящий через этот центр. В этом случае парциальные системы показаны на рис. 8.5,б, а парциальные частоты равны

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{M}, \quad n_2^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{I}, \quad (8.20)$$

что отличается от выражений (8.19).

Возвращаясь к общему случаю системы с  $n$  степенями свободы, можно, в частности, провести такое преобразование переменных вида (8.18), что уравнения системы станут независимыми друг от друга: в каждом из  $n$  уравнений будет присутствовать только одна из динамических переменных. Ясно, что такое преобразование дает формальное решение задачи, поскольку означает переход к собственным типам колебаний. В таких переменных парциальные частоты совпадают с собственными частотами системы. Подобный выбор парциальных систем, однако, не имеет особого смысла, так как для его осуществления необходимо фактически предварительно получить полное решение задачи.

Использование понятий парциальных систем и парциальных частот упрощает многие уравнения теории колебания связанных осцилляторов, но основное их свойство состоит в том, что знание парциальных частот позволяет получить хорошие оценки для собственных частот без решения самой задачи. В частности, если упорядочить парциальные и собственные частоты в порядке возрастания:

$$\begin{aligned} n_1 &\leq n_2 \leq \dots \leq n_{N-1} \leq n_N; \\ \omega_1 &\leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_{N-1} \leq \omega_N, \end{aligned}$$

то

$$\omega_1 \leq n_1, \quad \text{и} \quad \omega_N \geq n_N, \quad (8.21)$$

то есть минимальная собственная частота меньше чем минимальная парциальная, а максимальная собственная частота больше, чем максимальная парциальная [28, 62]. Для частного случая системы двух связанных осцилляторов этот результат будет получен в следующем параграфе.

## 8.4 Два связанных осциллятора с силовой связью

Обратимся к общему случаю, когда осцилляторы неидентичны (рис. 8.1,а). В качестве динамических переменных выберем углы отклонения маятников, то есть положим  $x_1 = \varphi_1$ ,  $x_2 = \varphi_2$ . Уравнения (8.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \left(\omega_{01}^2 + \frac{k}{\bar{m}_1}\right)x_1 &= \frac{k}{\bar{m}_1}x_2, \\ \ddot{x}_2 + \left(\omega_{02}^2 + \frac{k}{\bar{m}_2}\right)x_2 &= \frac{k}{\bar{m}_2}x_1, \end{aligned} \quad (8.22)$$

где  $\omega_{01}^2 = g/l_1$ ,  $\omega_{02}^2 = g/l_2$ ,  $\bar{m}_1 = ml_1^2/l^2$ ,  $\bar{m}_2 = ml_2^2/l^2$ . Парциальные частоты равны

$$n_1^2 = \omega_{01}^2 + \frac{k}{\bar{m}_1}, \quad n_2^2 = \omega_{02}^2 + \frac{k}{\bar{m}_2}, \quad (8.23)$$

поэтому уравнения (8.22) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + n_1^2 x_1 &= \frac{k}{\bar{m}_1} x_2, \\ \ddot{x}_2 + n_2^2 x_2 &= \frac{k}{\bar{m}_2} x_1. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Для расчета собственных частот воспользуемся методом комплексных амплитуд, положив  $x_{1,2}(t) = \text{Re}[X_{1,2}e^{i\omega t}]$ ,  $X_{1,2}$  — комплексные амплитуды колебаний осцилляторов. Тогда из (8.24) получаем

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + n_1^2)X_1 &= \frac{k}{\bar{m}_1} X_2, \\ (-\omega^2 + n_2^2)X_2 &= \frac{k}{\bar{m}_2} X_1. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Условие совместности этих уравнений приводит к характеристическому уравнению системы

$$(\omega^2 - n_1^2)(\omega^2 - n_2^2) - \frac{k^2}{\bar{m}_1\bar{m}_2} = 0, \quad (8.26)$$

решения которого есть собственные частоты колебаний. Уравнение (8.26) — биквадратное относительно  $\omega$ :

$$\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2)\omega^2 + n_1^2 n_2^2 - \frac{k^2}{\bar{m}_1\bar{m}_2} = 0, \quad (8.27)$$

его решения равны

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ (n_1^2 + n_2^2) \mp \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4k^2/(\bar{m}_1\bar{m}_2)} \right]. \quad (8.28)$$

Условимся, что нумерация динамических переменных выбрана так, что  $n_1 \leq n_2$ , знак минус в формуле (8.28) соответствует частоте  $\omega_1$ , а знак плюс —  $\omega_2$ . Тогда непосредственно из (8.28) получаем

$$n_1^2 - \omega_1^2 = \omega_2^2 - n_2^2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4k^2/(\bar{m}_1\bar{m}_2)} - (n_2^2 - n_1^2) \right].$$

Таким образом, введение связи сдвигает первую собственную частоту вниз относительно меньшей парциальной частоты, а вторую собственную частоту — вверх на ту же величину относительно большей парциальной частоты.

Пусть в системе возбуждена только первая мода с частотой  $\omega_1$ . Тогда отношение комплексных амплитуд осцилляторов, найденное из первого уравнения (8.25), равно

$$r_1 = \frac{X_2}{X_1} = \frac{n_1^2 - \omega_1^2}{k/\bar{m}_1} > 0.$$

Аналогично, для второго типа колебаний, используя второе из уравнений (8.25), получаем

$$r_2 = \frac{X_1}{X_2} = -\frac{\omega_2^2 - n_2^2}{k/\bar{m}_2} < 0.$$

Таким образом, для первой моды отношение комплексных амплитуд есть положительное действительное число, что означает, что колебания осцилляторов совершаются в фазе. Для второй моды это отношение действительно и отрицательно — колебания совершаются в противофазе. Величины  $r_1$  и  $r_2$  называют коэффициентами распределения амплитуд [28], и они имеют следующий смысл. Коэффициент  $r_1$  определяет относительный вклад в первую собственную моду со стороны второго осциллятора, а коэффициент  $r_2$  определяет относительный вклад во вторую собственную моду со стороны первого осциллятора. Используя формулу (8.28),  $r_1$  и  $r_2$  можно представить в виде

$$r_1 = \sqrt{\frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2}} r, \quad r_2 = -\sqrt{\frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1}} r,$$

где

$$r = \frac{\sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4k^2/(\bar{m}_1\bar{m}_2)} - (n_2^2 - n_1^2)}{2k/\sqrt{\bar{m}_1\bar{m}_2}} > 0. \quad (8.29)$$

Решения, соответствующие собственным типам колебаний, удобно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \operatorname{Re} \{ A_1 e^{i\omega_1 t} \}, \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{Re} \{ A_2 e^{i\omega_2 t} \}, \quad (8.30)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — комплексные амплитуды собственных типов колебаний. В общем случае, когда возбуждены обе моды, решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \operatorname{Re} \{ A_1 e^{i\omega_1 t} \} + \begin{bmatrix} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{Re} \{ A_2 e^{i\omega_2 t} \}. \quad (8.31)$$

Две комплексных амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  дают четыре действительных постоянных, которых достаточно, чтобы удовлетворить произвольные начальные условия системы с двумя степенями свободы.

Матрицы-столбцы  $\begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} r_2 \\ 1 \end{bmatrix}$  называются собственными векторами колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , и они имеют следующий смысл: если в системе связанных осцилляторов возбуждено колебание с одной из собственных частот, то компоненты собственных векторов дают относительные амплитуды и фазы колебаний каждого из осцилляторов. Такое определение работает в общем случае системы  $N$  связанных осцилляторов, для которой существует  $N$  собственных частот и столько же собственных векторов. Собственные векторы определены с точностью до произвольного постоянного множителя, что является следствием линейности системы.

Рассмотрим такие же начальные условия, как и в случае идентичных осцилляторов. При  $t = 0$  потребуем, чтобы  $x_1(0) = x_0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$ ,  $\dot{x}_2(0) = 0$ : первый осциллятор отклонен на величину  $x_0$ , второй находится в равновесии, скорости обоих равны нулю. Легко показать, что при таких граничных условиях амплитуды собственных мод равны

$$A_1 = \frac{x_0}{1 - r_1 r_2}, \quad A_2 = -\frac{r_1 x_0}{1 - r_1 r_2}. \quad (8.32)$$

Подставляя (8.29) и (8.32) в (8.31), получаем

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{x_0}{1 - r_1 r_2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &= \frac{2x_0}{1 + r^2} \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - x_0 \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \cos \omega_2 t, \\ x_2(t) &= \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} \frac{r x_0}{1 + r^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \\ &= \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} \frac{2r x_0}{1 + r^2} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Из выражения для  $x_2(t)$  видно, что если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  близки в том смысле, что  $\omega_2 - \omega_1 \ll (\omega_1 + \omega_2)/2$ , то движение второго маятника опять, как и в случае идентичных осцилляторов, можно представить в виде колебаний со средней частотой  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  и медленно меняющейся амплитудой. Через время  $\tau = \pi/(\omega_2 - \omega_1)$  амплитуда колебаний второго осциллятора станет максимальной:

$$x_{2 \max} = \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} \frac{2r}{1 + r^2} x_0, \quad (8.34)$$

а амплитуда первого осциллятора будет равна величине

$$x_{1 \min} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2} x_0. \quad (8.35)$$

Из этих соотношений следует, что доля передаваемой в процессе колебаний энергии зависит от параметра  $r$ . Из формулы (8.29) вытекает, что  $0 < r \leq 1$ . Когда  $r \ll 1$ , второй маятник практически не возбуждается, если  $r = 1$ , происходит полная передача энергии между осцилляторами.

Для неидентичных осцилляторов практически важным остается приближение слабой связи, которое мы по-прежнему будем определять как ситуацию, при которой средние по времени энергии колебаний осцилляторов  $\bar{E}_{1,2}$  значительно больше средней по времени энергии, запасенной в элементе связи  $\bar{E}_{св}$ . Когда осцилляторы различаются, требуется обобщение условий (8.17), так как энергии колебаний осцилляторов могут сильно отличаться друг от друга. Чтобы учесть это, определим условие слабой связи следующим образом:

$$\bar{E}_{св} \ll \sqrt{\bar{E}_1 \bar{E}_2}, \quad (8.36)$$

Количественной характеристикой степени связи осцилляторов является коэффициент связи  $\rho$  [28]:

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{m_1 m_2} n_1 n_2}. \quad (8.37)$$

Можно показать непосредственным вычислением, что условия  $\rho \ll 1$  и (8.36) эквивалентны.

Приближение слабой связи означает, что осцилляторы не теряют своей индивидуальности при введении связи между ними. Оказывается, однако, что это приближение само по себе еще не определяет поведение системы в целом. Впервые на это обстоятельство указал Л.И. Мандельштам, введя понятие *связанности* осцилляторов. Запишем выражения (8.28) и (8.26), используя в них определение коэффициента связи (8.37):

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left[ (n_1^2 + n_2^2) \mp \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4\rho^2 n_1^2 n_2^2} \right], \\ r &= \frac{\sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4\rho^2 n_1^2 n_2^2} - (n_2^2 - n_1^2)}{2\rho n_1 n_2}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Анализ этих соотношений показывает, что существенным является не малость коэффициента связи  $\rho$  самого по себе, а соотношение между величинами  $n_2^2 - n_1^2$  и  $2\rho n_1 n_2$ , т. е. между относительной расстройкой парциальных частот и коэффициентом связи. Если

$$\frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \gg \rho, \quad (8.39)$$

то оба осциллятора ведут себя практически независимо друг от друга<sup>2</sup>. Мандельштам назвал такую ситуацию случаем *слабой связанности*. В противоположном пределе

$$\frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \ll \rho, \quad (8.40)$$

реализуется случай *сильной связанности*, при котором энергия практически полностью перекачивается от одного осциллятора к другому и обратно, т. е. система ведет себя подобно связанным идентичным осцилляторам. Из (8.40) видно, что если парциальные частоты равны, то при любых коэффициентах связи реализуется режим сильной связанности.

Доказательство этих утверждений начнем со случая слабой связанности (8.39). Тогда в выражениях (8.38) под квадратным корнем первое слагаемое значительно больше второго, и для приближенного представления корней можно воспользоваться формулой  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ ,  $|x| \ll 1$ . Это

<sup>2</sup>Напомним, что выбрана такая нумерация парциальных частот, что  $n_2 \geq n_1$ .



дает

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &\approx n_1^2 \left( 1 - \frac{n_2}{n_1} \rho \frac{\rho n_1 n_2}{n_2^2 - n_1^2} \right), \\ \omega_2^2 &\approx n_2^2 \left( 1 + \frac{n_1}{n_2} \rho \frac{\rho n_1 n_2}{n_2^2 - n_1^2} \right), \\ r &\approx \frac{\rho n_1 n_2}{n_2^2 - n_1^2}.\end{aligned}\quad (8.41)$$

В соответствии с условием (8.39),  $r \ll 1$ , а сдвиг собственных частот относительно парциальных имеет второй порядок малости. Поэтому формулы (8.33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}x_1(t) &\approx x_0 \cos n_1 t, \\ x_2(t) &\approx 0.\end{aligned}$$

Каждый осциллятор совершает колебания с частотой, близкой к его парциальной частоте, амплитуда колебаний первого осциллятора близка к величине его начального отклонения  $x_0$ , а амплитуда колебаний второго осциллятора близка к нулю.

Теперь обратимся к случаю сильной связанности (8.40). На этот раз под квадратным корнем первое слагаемое гораздо меньше второго. Раскладывая квадратный корень в ряд, и ограничиваясь первыми не исчезающими слагаемыми, получаем

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &\approx \frac{1}{2} (n_1^2 + n_2^2) - \rho n_1 n_2, \\ \omega_2^2 &\approx \frac{1}{2} (n_1^2 + n_2^2) + \rho n_1 n_2, \\ r &\approx 1 - \frac{n_2^2 - n_1^2}{2\rho n_1 n_2},\end{aligned}\quad (8.42)$$

Дальнейший анализ можно провести, если обратить внимание на следующее обстоятельство. Мы считаем, что выполняются одновременно и условие слабой связи  $\rho \ll 1$  и условие сильной связанности (8.40), поэтому можно записать следующую цепочку неравенств

$$1 \gg \rho \gg \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} = \frac{n_2 - n_1}{(n_1 + n_2)/2} \left[ \frac{n_1 + n_2}{2\sqrt{n_1 n_2}} \right]^2 \geq \frac{n_2 - n_1}{(n_1 + n_2)/2}.$$

Это означает, что относительная расстройка парциальных частот очень мала, и существует еще один малый параметр  $\Delta n/n$ , где  $\Delta n = n_2 - n_1$ ,  $n = (n_1 + n_2)/2$ . Выражая  $n_1$  и  $n_2$  через  $n$  и  $\Delta n$  и ограничиваясь главными членами разложения по малым параметрам  $\rho$  и  $\Delta n/n$ , получаем

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}^2 &\approx n^2 \left\{ 1 \mp \rho \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta n}{\rho n} \right)^2 \right] \right\}, \\ r &\approx 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta n}{n}.\end{aligned}\quad (8.43)$$

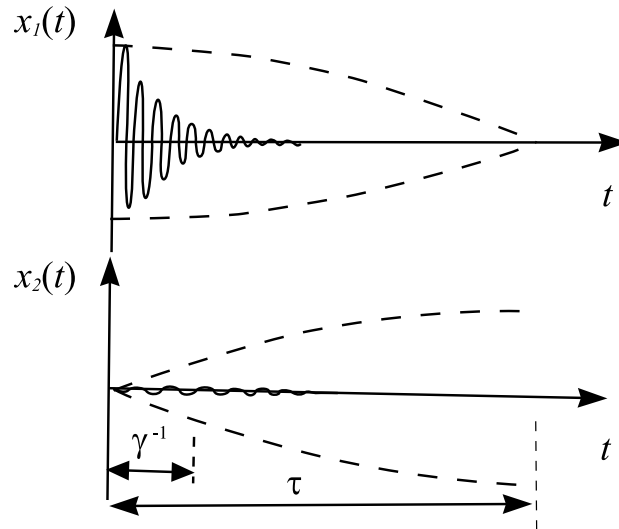


Рис. 8.6. Колебания в системе связанных осцилляторов в случае сильного затухания. Пунктиром показаны огибающие колебаний осцилляторов в случае, когда затухания нет.

Отсюда видно, что в рассматриваемом пределе для расчета собственных частот с высокой точностью можно пользоваться формулой  $\omega_{1,2}^2 = n^2(1 \pm \rho)$ , которая является точной для случая совпадающих парциальных частот. Поправки к этой формуле имеют второй порядок по малому параметру  $\Delta n/(\rho n) \ll 1$ . Параметр  $r$  близок к единице, поэтому, подставляя (8.22) в (8.33), будем иметь

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx x_0 \cos \frac{\rho n t}{2} \cos n t, \\ x_2(t) &\approx \sqrt{\frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2}} x_0 \sin \frac{\rho n t}{2} \sin n t, \end{aligned} \quad (8.44)$$

Поведение системы в этом случае практически не отличается от поведения двух связанных идентичных осцилляторов. В процессе биений энергия полностью перекачивается между осцилляторами, причем время перекачки равно  $\tau = \pi/(\rho n)$ . При малой связи время перекачки может быть очень большим.

До сих пор при рассмотрении связанных колебаний мы пренебрегли потерями в системе. Возникает вопрос, насколько соответствует картина биений поведению реальных систем, в которых присутствует небольшое затухание? Характерное время затухания колебаний составляет  $t_1 \sim 1/\gamma$ , ( $\gamma$  — коэффициент затухания), поэтому ясно, что для того, чтобы биения были наблюдаемы, должно выполняться условие  $t_1 \gg \tau$ , или

$$\gamma \ll \frac{\rho n}{\pi}.$$

Так как мы считаем, что парциальные частоты близки, а коэффициент связи мал, то можно положить  $l_1 \sim l_2$ ,  $n \sim \sqrt{g/l_1}$ , в результате получаем критерий экспериментальной наблюдаемости биений [45]:

$$\gamma \ll \frac{k}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} \left( \frac{l}{l_1} \right)^{3/2}. \quad (8.45)$$

При заданном уровне трения связь должна быть достаточно велика, чтобы наблюдаемый процесс был близок к теоретическому описанию, сделанному выше без учета сил трения. В противном случае будет наблюдаться картина, показанная на рис. 8.6. Подробное исследование системы связанных осцилляторов с учетом потерь можно найти в [45].

При рассмотрении системы двух идентичных осцилляторов в качестве собственных мод выступали симметричные и антисимметричные колебания. Каковы будут собственные моды в случае связи двух произвольных осцилляторов? Введем величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(\xi_1 + r_2\xi_2), \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(r_1\xi_1 + \xi_2), \end{aligned} \quad (8.46)$$

и покажем, что они являются координатами собственных мод. Для этого выразим  $\xi_1, \xi_2$  через  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(x_1 - r_2x_2), \\ \xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(-r_1x_1 + x_2). \end{aligned} \quad (8.47)$$

Умножим второе из уравнений (8.24) на  $r_2$  и вычтем из первого. Используя легко доказываемые соотношения  $n_1^2 + r_2k/\bar{m}_2 = n_2^2 + k/(r_2\bar{m}_1) = \omega_1^2$ , получаем уравнение гармонического осциллятора для  $\xi_1$  с частотой  $\omega_1$ :  $\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = 0$ . Аналогично, если умножить первое из уравнений (8.22) на  $r_1$  и вычтем из второго, то получим уравнение осциллятора для  $\xi_2$  с частотой  $\omega_2$ :  $\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 = 0$ . Таким образом, введенные переменные действительно представляют собственные моды колебаний системы. Можно также показать, что переход к переменным  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в выражениях для кинетической и потенциальной энергии системы исключает из них слагаемые вида  $\xi_1\xi_2$  и  $\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2$ , отвечающие за связь между осцилляторами.

**Задача 8.1.** Кинетическая энергия колебаний связанных маятников, показанных на рис. 8.1,а, равна

$$K = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{x}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{x}_2^2),$$

а потенциальная —

$$U = \frac{1}{2} [m_1 g l_1 x_1^2 + m_2 g l_2 x_2^2 + k l^2 (x_2 - x_1)^2].$$

Покажите, что переход к переменным  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , приводит к выражениям для кинетической и потенциальной энергий в виде суммы энергий двух несвязанных осцилляторов:

$$K = \frac{1}{2} (\bar{m}_1 \dot{\xi}_1^2 + \bar{m}_2 \dot{\xi}_2^2),$$

$$U = \frac{1}{2} (\bar{m}_1 \omega_1^2 \xi_1^2 + \bar{m}_2 \omega_2^2 \xi_2^2).$$

Из выражений (8.46) и (8.47) еще раз следует, что если коэффициент  $r$ , а, следовательно, и коэффициенты  $r_1$  и  $r_2$  гораздо меньше единицы, то координаты собственных мод близки к координатам каждого из осцилляторов в отдельности. Если же  $r \sim 1$ , то оба осциллятора дают соизмеримый вклад в обе собственные моды.

## 8.5 Связанные осцилляторы под действием гармонической силы

Так как система линейна, то зная решение задачи о действии гармонической силы на систему связанных осцилляторов, можно найти решение о действии на такую систему произвольной силы. Если внешняя сила периодическая, то ее можно разложить в ряд Фурье и просуммировать результаты действия каждой из гармоник ряда; если внешняя сила является произвольной функцией времени, то тоже самое можно проделать с помощью интеграла Фурье. Поэтому ключевой задачей является задача о действии на систему гармонической силы с заданной частотой.

Предположим, что на осцилляторы действуют силы с комплексными амплитудами  $F_1$  и  $F_2$  и частотой  $p$ , т. е. реальные действующие силы<sup>3</sup> можно записать в виде  $\mathcal{F}_{1,2} = \text{Re}[F_{1,2} e^{ipt}]$ . Уравнения связанных маятников, обобщенные на случай действия внешних сил, имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + n_1^2 x_1 - \frac{k}{\bar{m}_1} x_2 &= \frac{\mathcal{F}_1}{\bar{m}_1}, \\ \ddot{x}_2 + n_2^2 x_2 - \frac{k}{\bar{m}_2} x_1 &= \frac{\mathcal{F}_2}{\bar{m}_2}. \end{aligned} \tag{8.48}$$

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений, общее решение этой неоднородной системы представляется в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения системы с ненулевыми правыми частями. Что касается решения однородной системы, его подробное исследование было проведено в предыдущих разделах этой лекции, поэтому мы сосредоточимся на решении неоднородной системы. Если

<sup>3</sup>Напомним, что, как и в случае одиночного осциллятора, рассмотренном в лекции 5, под  $\mathcal{F}_1(t)$  и  $\mathcal{F}_2(t)$  имеются ввиду обобщенные силы, сопряженные соответствующим обобщенным координатам осцилляторов  $x_1$  и  $x_2$ . Например, если для маятников  $x_1$  и  $x_2$  — углы отклонения, то  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  имеют смысл моментов сил.

не интересоваться переходным процессом, то такое решение дает отклик системы на гармоническое воздействие. Можно представить, что исследуемая система имеет малое затухание и мы подождали достаточно долго, чтобы собственные колебания затухли. Мы хотим изучить поведение осцилляторов на еще больших интервалах времени. Если частота внешнего сигнала не слишком близка к одной из резонансных частот, то для исследования установившегося решения можно пренебречь затуханием. Такой подход не работает при точном резонансе, когда затухание в системе служит механизмом ограничения роста амплитуды колебаний.

В установившемся режиме осцилляторы совершают колебания с частотой внешней силы, поэтому можно записать  $x_{1,2} = \text{Re}[X_{1,2}e^{ipt}]$ ,  $X_{1,2}$  — комплексные амплитуды. Из уравнений (8.48) получаем уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} (-p^2 + n_1^2)X_1 - \frac{k}{\bar{m}_1}X_2 &= \frac{F_1}{\bar{m}_1}, \\ -\frac{k}{\bar{m}_2}X_1 + (-p^2 + n_2^2)X_2 &= \frac{F_2}{\bar{m}_2}, \end{aligned} \quad (8.49)$$

решения которых суть

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(-p^2 + n_2^2)F_1/\bar{m}_1 + kF_2/\bar{m}_1\bar{m}_2}{(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) - k^2/\bar{m}_1\bar{m}_2}, \\ X_2 &= \frac{kF_1/\bar{m}_1\bar{m}_2 + (-p^2 + n_1^2)F_2/\bar{m}_2}{(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) - k^2/\bar{m}_1\bar{m}_2}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Выражение в знаменателях обеих формул есть детерминант линейной системы уравнений (8.49). Если частота внешней силы совпадает с одной из собственных частот системы —  $\omega_1$  или  $\omega_2$  — то детерминант будет равен нулю, при этом решения (8.50) теряют смысл. В таком случае либо необходимо учитывать потери в системе, либо, если потери все-таки точно равны нулю, строить полное нестационарное решение. Последняя ситуация не является надуманной, например в квантовой механике воздействие на атомную систему периодической силы приводит к переходам между атомными уровнями, и процесс такого перехода описывается нестационарными решениями указанного типа. Мы, однако, для простоты ограничимся случаем, когда точного резонанса нет.

Предположим, что сила действует только на один из осцилляторов, например на первый. Тогда  $F_2 \equiv 0$ , и без ограничения общности можно считать, что  $F_1$  — действительная величина. Знаменатель дробей в формулах (8.50) можно представить как  $(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)$ . Это очевидно, так как оба этих полинома относительно  $p^2$  имеют одинаковые нули а коэф-

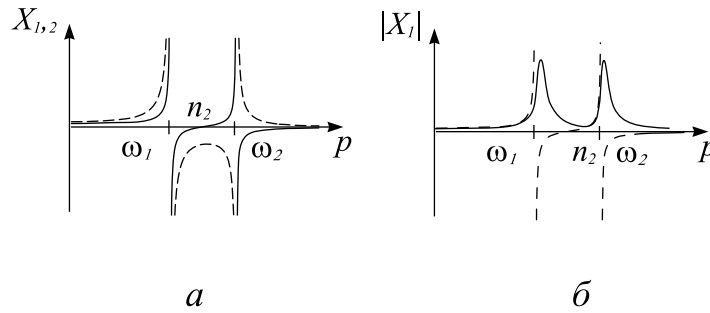


Рис. 8.7. (а) Комплексные амплитуды колебаний первого (сплошная кривая) и второго (пунктир) осцилляторов в зависимости от частоты силы, действующей на первый осциллятор; (б) Амплитуда колебаний первого осциллятора (сплошная линия) в зависимости от частоты, если в системе присутствует малое затухание. Для сравнения пунктиром показана зависимость для комплексной амплитуды, когда затухания нет.

коэффициенты при старшей степени равны. Поэтому

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-(p^2 - n_2^2)}{(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)} \frac{F_1}{\bar{m}_1}, \\ X_2 &= \frac{k/\bar{m}_1\bar{m}_2}{(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)} F_1. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Из этих выражений следует, что колебания осцилляторов происходят либо в фазе, либо в противофазе с внешней силой. На рис. 8.7,а показано, как меняются величины  $X_1$  и  $X_2$  при изменении частоты внешнего воздействия. Если  $p < \omega_1$ , то колебания обоих маятников происходят в фазе с силой  $F_1$ . После прохождения первого резонанса при  $p = \omega_1$ , вплоть до точки  $p = n_2$ , колебания происходят в противофазе с внешней силой. Затем амплитуда первого осциллятора проходит через ноль, а фаза вновь меняется на  $\pi$ . Наконец, при  $p > \omega_2$  первый осциллятор двигается в противофазе, а второй — в фазе с силой  $F_1$ . Учет малого затухания меняет картину только в непосредственной окрестности резонансов. Как пример, на рис. 8.7,б показана соответствующая резонансная кривая для первого осциллятора.

Возвращаясь к случаю системы без потерь, обратим внимание на то, что при  $p = n_2$  амплитуда колебаний первого осциллятора равна нулю, несмотря на то, что сила действует именно на него. Из формул (8.50) получаем, что если  $p = n_2$  и  $F_2 = 0$ , то  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = -F_1/k$ . Это соответствует случаю *динамического демпфирования* колебаний [28].

На основе эффекта динамического демпфирования работают многие устройства, служащие для подавления нежелательных механических и электрических вибраций. Наиболее эффективное из них — успокоитель качки корабля Фрама, суть действия которой можно понять из рис. 8.8,а [28].

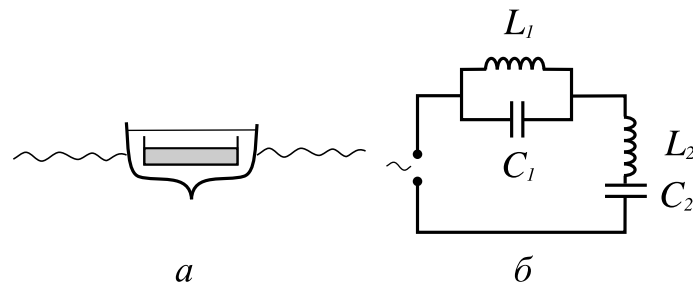


Рис. 8.8. Примеры динамического демпфирования колебаний: успокоитель качки корабля Фрама (а) и резонансный фильтр в радиотехнической схеме (б).

Внутри корпуса судна находится большой резервуар, наполняемый водой, период колебаний жидкости в резервуаре зависит от уровня воды. Сам корабль и резервуар с водой составляют связанные колебательные системы. На корабль действует сила с периодом морского волнения, если период колебаний жидкости примерно равен периоду качки, то колебания корабля заметно уменьшаются.

Во многих промышленных установках существует заметная вибрация, связанная, например, с вращением недостаточно сбалансированного ротора электродвигателя или турбины. Для уменьшения этой вибрации на один фундамент с установкой можно поместить демпфер в виде механической колебательной системы, подобрав парциальную частоту так, чтобы она совпадала с основным “тоном” вибрации. При этом колебания машины будут подавлены.

Совершенно аналогичные системы используются в электротехнике. В данном случае колебательный контур служит фильтром, не пропускающим в определенный участок цепи сигнал с частотой, совпадающей с его резонансной частотой. Рассмотрим, например, схему на рис. 8.8,б. Легко показать, что если частота внешней ЭДС равна  $p = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ , то ток в цепи  $L_2 C_2$  будет равным нулю. Это происходит потому, что контур  $L_1 C_1$  имеет на данной частоте бесконечное сопротивление.

При использовании эффекта динамического демпфирования следует соблюдать осторожность, особенно если спектр внешней силы содержит много частотных компонент, или, что тоже самое, амплитуда внешней силы еще не установилась. Если связь между колебательными системами мала, то разность парциальной частоты  $p_2$  и собственной частоты  $\omega_2$  также мала, поэтому легко может наступить переход от режима демпфирования к режиму резонанса.

Формулы (8.50) демонстрируют еще одно свойство связанных линейных систем, которое играет исключительно важную роль в физике вообще. Рассмотрим две ситуации: первую, когда сила  $F$  действует только на

первый осциллятор, в этом случае отклик второго равен

$$X_2 = \frac{F/(\bar{m}_1\bar{m}_2)}{(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) - k^2/\bar{m}_1\bar{m}_2},$$

и вторую, когда точно такая же сила  $F$  действует на второй осциллятор, отклик первого при этом равен

$$X_1 = \frac{F/(\bar{m}_1\bar{m}_2)}{(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) - k^2/\bar{m}_1\bar{m}_2}.$$

Мы видим, что эти отклики одинаковы. Это проявление *теоремы взаимности*, связывающей отклик с силами, действующими на разные части сложной системы. Теорема взаимности может быть сформулирована для систем со многими степенями свободы, и даже для распределенных систем. Главное условие ее применимости — линейность исследуемой системы. В электродинамике, например, теорема взаимности широко используется в теории антенн. В применении к идеализированным антеннам — диполям — ее можно сформулировать следующим образом [63].

Пусть диполь с электрическим моментом  $\mathbf{p}_1$ , расположенный в точке 1, возбуждает электромагнитное поле  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ , а диполь  $\mathbf{p}_2$ , находящийся в точке 2, — поле  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ , тогда теорема взаимности выражается равенством

$$\mathbf{p}_1\mathbf{E}_2(1) = \mathbf{p}_2\mathbf{E}_1(2), \quad (8.52)$$

где  $\mathbf{E}_2(1)$  — значение поля  $\mathbf{E}_2$  в точке нахождения диполя  $\mathbf{p}_1$ , а  $\mathbf{E}_1(2)$  — значение поля  $\mathbf{E}_1$  там, где находится диполь  $\mathbf{p}_2$ . При равенстве дипольных моментов диполь 1 действует на диполь 2 также, как диполь 2 действует на диполь 1.

Если, например,  $\mathbf{p}_1$  соответствует передающей антенне, расположенной вблизи земли, а нужно найти поле, создаваемое этим диполем высоко над землей, в точке 2, где находится летательный аппарат с приемной антенной на борту, то можно решить вспомогательную задачу, в которой передающая антенна — диполь  $\mathbf{p}_2$  — расположен в точке 2, а приемная антенна — в точке 1 и воспользоваться теоремой взаимности.

Задача о действии внешней гармонической силы на систему связанных осцилляторов одним обстоятельством отличается от задачи, в которой воздействию подвергается одиночный осциллятор. А именно, для возникновения резонанса в системе *необходимо, но недостаточно*, чтобы частота внешней силы совпадала с одной из собственных частот. Наличие нескольких сил, действующих на систему, позволяет так подобрать их относительную величину, что резонанс не возникнет.

Покажем это для системы двух связанных осцилляторов. Пусть частота внешних сил совпадает с частотой первой собственной моды, т. е.  $p = \omega_1$ , а силы  $F_1$  и  $F_2$  подобраны так, что

$$kF_1/\bar{m}_1\bar{m}_2 + (-\omega_1^2 + n_1^2)F_2/\bar{m}_2. \quad (8.53)$$



Используя характеристическое уравнение (8.28), легко показать, что при этом будет также выполняться соотношение

$$(-\omega_1^2 + n_2^2)F_1/\bar{m}_1 + kF_2/\bar{m}_1\bar{m}_2,$$

т. е. числители обеих дробей в (8.50) равны нулю. При этом равны нулю и знаменатели дробей, так как  $p = \omega_1$ . Соотношения (8.50) оказываются в данном случае неприменимыми. Это происходит потому, что определитель системы линейных уравнений (8.49), при  $p = \omega_1$  обращается в нуль и она становится вырожденной. В таком случае необходим более тщательный анализ, который основан на переходе к уравнениям для собственных мод.

Умножим второе из уравнений (8.48) на  $r_2$  и вычтем из первого; кроме того, умножим первое уравнение на  $r_1$  и вычтем из второго. Как мы уже видели, если внешние силы равны нулю, такая процедура приводит к уравнениям для собственных типов колебаний. В случае, когда силы отличны от нуля, получаем уравнения для собственных мод под внешним воздействием:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(F_1/\bar{m}_1 - r_2F_2/\bar{m}_2), \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(-r_1F_1/\bar{m}_1 + F_2/\bar{m}_2).\end{aligned}\tag{8.54}$$

В интересующем нас случае обе внешние силы имеют одинаковую частоту  $p = \omega_1$  и выполняется условие для комплексных амплитуд сил (8.53), что выражается так:  $F_1/\bar{m}_1 = r_2F_2/\bar{m}_2$ , поэтому правая часть первого уравнения в (8.54) равна нулю. Таким образом, отклик системы формируется только из колебаний второй моды. Решение уравнений (8.54) можно записать в виде:

$$\xi_1(t) \equiv 0, \quad \xi_2(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}} \frac{F_2/\bar{m}_2}{-\omega_1^2 + \omega_2^2} e^{i\omega_1 t} \right].$$

Производя обратный переход к координатам осцилляторов  $x_1$  и  $x_2$ , получаем

$$x_1(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\omega_1 t} F_1/\bar{m}_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right], \quad x_2(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\omega_1 t} F_2/\bar{m}_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right].$$

Мы видим, что резонанса в системе нет, несмотря на то, что частота внешней силы совпадает с одной из собственных частот. Объясняется это тем, что компоненты внешней силы “ортогональны” собственному вектору соответствующей моды (в данном случае первой). Другими словами можно сказать, что величины и соотношения фаз внешних сил таковы, что полная работа, совершаемая над системой, равна нулю.

Этот пример показывает, что условия наступления резонанса в системе связанных осцилляторов требуют обобщения по сравнению со случаем

одиноким осциллятором. В общем случае системы  $N$  связанных осцилляторов для возникновения резонанса необходимо выполнение следующих условий:

1. Частота внешней силы<sup>4</sup> должна совпадать с одной из собственных частот системы.
2. Вектор “приведенных” сил  $[\mathcal{F}_1/\bar{m}_1, \mathcal{F}_2/\bar{m}_2, \dots, \mathcal{F}_N/\bar{m}_N]^T$  ( $T$  — знак транспонирования) не должен быть ортогонален собственному вектору, соответствующему колебанию с этой частотой.

## 8.6 Колебания системы $N$ связанных осцилляторов<sup>5</sup>

Аналитическое исследование колебаний в системе  $N$  связанных осцилляторов, если  $N > 2$  и в системе нет симметрии высокого порядка, в общем случае невозможно, так как для нахождения собственных частот требуется решать алгебраическое уравнение  $N$ -ой степени относительно  $\omega^2$ . Тем не менее, на практике часто необходимо исследовать колебания в системах с очень большим числом степеней свободы. Это могут быть, например, колебания в сложных электрических схемах, или механические вибрации в конструкциях мостов или корпусов самолетов. Современные численные методы расчета колебаний в сплошных средах также часто основаны на представлении распределенной системы в виде связанных между собой элементарных осцилляторов. Например, уравнения колебаний тонких оболочек в строительной механике [64], или колебания электромагнитного поля в резонаторах современных сверхвысокочастотных приборов [65, 66] можно, с помощью различных методов дискретизации уравнений в частных производных, привести к системам связанных линейных осцилляторов, причем число осцилляторов в таком случае может достигать сотен тысяч и даже миллионов!

По этой причине необходимо иметь общий метод расчета собственных колебаний в системе связанных осцилляторов общего вида. Изложению такого метода посвящен этот параграф.

Рассмотрим систему  $N$  связанных осцилляторов, кинетическая и потенциальная энергии которой выражаются формулами

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N k_{ij} x_i x_j. \quad (8.55)$$

Удобно воспользоваться матричными обозначениями, вводя вектор-столбец  $[x] =$

<sup>4</sup>Под внешней силой в данном случае понимается вектор с компонентами, равными силам, действующим на каждый из осцилляторов.

<sup>5</sup>Для понимания этого параграфа желательно знакомство с курсом линейной алгебры в объеме программы физических и механико-математических специальностей технических вузов или университетов. Впрочем, дальнейшее изложение не зависит от содержания этого раздела, поэтому в случае необходимости он может быть пропущен.

$[x_1, x_2, \dots, x_N]^T$  и матрицы  $[K]$  и  $[M]$ :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix}. \quad (8.56)$$

По очевидным соображениям матрица  $[K]$  называется матрицей жесткости, а матрица  $[M]$  — матрицей масс. Матрицы  $[K]$  и  $[M]$  обладают двумя свойствами, чрезвычайно важными с точки зрения теоретического анализа и практических вычислений:

1. Непосредственно из их определения следует, что  $m_{ij} = m_{ji}$  и  $k_{ij} = k_{ji}$ , то есть  $[K] = [K]^T$ , и  $[M] = [M]^T$ . Такие матрицы называются *симметрическими* [62,67]. Их элементы, лежащие симметрично относительно главной диагонали равны друг другу.
2. Симметрические матрицы  $[K]$  и  $[M]$  обладают свойством *положительной определенности* [62,67], которое означает, что для произвольных ненулевых векторов  $[X]$  и  $[\dot{x}] = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N]^T$  выполняются неравенства

$$K = \frac{1}{2} [\dot{x}]^T [M] [\dot{x}] > 0, \quad U = \frac{1}{2} [x]^T [K] [x] > 0.$$

С физической точки зрения это просто условия положительности потенциальной и кинетической энергий; если они не выполняются, то движение не будет носить характер колебаний вблизи положения равновесия, для которого  $x_i = 0$ ,  $\dot{x}_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Существует несколько критериев положительной определенности произвольной симметрической матрицы, два из которых формулируются так:

- все собственные значения положительно определенной матрицы строго положительны;
- определители всех главных подматриц<sup>6</sup> матрицы строго положительны.

Используя введенные обозначения, можно записать функцию Лагранжа системы следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \left\{ [\dot{x}]^T [M] [\dot{x}] - [x]^T [K] [x] \right\}.$$

а уравнения динамики будут иметь вид

$$\frac{d^2}{dt^2} [M] [x] = [K] [x]. \quad (8.57)$$

<sup>6</sup>Главная подматрица порядка  $n$  симметрической матрицы  $[A]$  получается из нее вычеркиванием всех строк и столбцов с номерами  $i, j > n$ .

Наша цель — определение собственных мод системы, то есть вычисление собственных частот и соответствующее им распределение амплитуд и фаз колебаний каждого из осцилляторов. Это значит, что решение уравнения (8.57) нужно искать в виде  $[x] = \text{Re}\{e^{i\omega t} [X]\}$ , где  $[X] = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$  — вектор-столбец, составленный из комплексных амплитуд. Подставляя это соотношение в (8.57), получаем матричное уравнение

$$[K] [X] = \omega^2 [M] [X], \quad (8.58)$$

которое в линейной алгебре носит название обобщенной алгебраической проблемы собственных значений. Это уравнение является линейным однородным алгебраическим уравнением относительно компонент вектора  $[X]$ , поэтому оно имеет нетривиальное решение только в том случае, если его определитель равен нулю, то есть если выполняется условие

$$\det [[K] - \omega^2 [M]] = 0. \quad (8.59)$$

Формально левая часть уравнения (8.59) есть полином степени  $N$  относительно  $\omega^2$ , коэффициенты которого сложным образом выражаются через элементы матриц  $[M]$  и  $[K]$ . Полином имеет ровно  $N$  корней  $\{\omega_1^2, \omega_1^2, \dots, \omega_N^2\}$ , некоторые из них могут совпадать друг с другом, поэтому нетривиальное решение уравнения (8.58) существует только для одного из этих  $N$  значений частоты  $\omega^2$ . Такие значения называются *собственными значениями* или собственными числами алгебраической проблемы, а вектор  $[X]_i$ , являющийся решением (8.58) при  $\omega^2 = \omega_i^2$ , называется  $i$ -м собственным вектором.

Следствием положительной определенности матриц  $[X]$  и  $[K]$  являются общие свойства собственных чисел и собственных векторов задачи 8.59 [62, 67, 68], которые приводятся здесь без доказательства:

1. все собственные числа строго положительны:  $\omega_i^2 > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;
2. компоненты собственных векторов  $[X]$  могут быть выбраны чисто действительными;
3. два собственных вектора  $[X]_i$  и  $[X]_j$ , соответствующих разным собственным числам  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$  ортогональны с весом, задаваемом матрицей  $[M]$ , т. е. выполняется

$$[X]_i^T [M] [X]_j = 0, \quad \text{если } \omega_i^2 \neq \omega_j^2; \quad (8.60)$$

4. Если существует вырождение собственных чисел, т. е. если для целых  $i$  и  $j$ , принадлежащих множеству  $\{k+1, k+2, \dots, k+m\}$ ,  $k \geq 0$ ,  $k+m \leq N$ , выполняется  $\omega_i^2 = \omega_j^2$ , то собственные векторы  $[X]_{k+1}, \dots, [X]_{k+m}$  все равно можно выбрать ортогональными в указанном выше смысле;
5. собственные векторы  $[X]_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  линейно независимы, и образуют базис в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}^N$  комплексных векторов-столбцов порядка  $N$  со скалярным произведением  $([X], [Y]) = [X]^{*T} [M] [Y]$ .

Еще раз подчеркнем, что все эти свойства являются прямым следствием положительной определенности матриц  $[K]$  и  $[M]$ .

Если известно решение обобщенной алгебраической проблемы собственных значений (8.58), т. е. все собственные значения и собственные векторы, то общее решение задачи о колебаниях связанных осцилляторов представляется в виде

$$[x(t)] = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N C_i [X]_i e^{i\omega_i t} \right\}, \quad (8.61)$$

где комплексные константы  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  определяются из начальных условий. Если  $[x_0] = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0)]^T$  — вектор начальных координат осцилляторов, а  $[\dot{x}_0] = [\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dots, \dot{x}_N(0)]^T$  — вектор начальных скоростей, то  $C_i = C'_i + iC''_i$  находятся из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^N C'_i [X]_i = [x_0], \quad \sum_{i=1}^N C''_i \omega_i [X]_i = -[\dot{x}_0]. \quad (8.62)$$

Расписанных по компонентам, этих уравнений  $2N$  штук — столько, сколько необходимо для определения неизвестных  $C'_i$  и  $C''_i$ .

Зная собственные векторы системы можно также легко найти нормальные моды колебаний. Для этого введем квадратную матрицу  $[S]$  порядка  $N$  так, что ее  $i$ -й столбец является  $i$ -м собственным вектором, т. е.

$$[S] = \left[ [X]_1, [X]_2, \dots, [X]_N \right]. \quad (8.63)$$

Используя свойства собственных векторов 1–5, перечисленные выше, легко показать, что преобразование подобия

$$[K'] = [S]^T [K] [S], \quad [M'] = [S]^T [M] [S] \quad (8.64)$$

одновременно диагонализует матрицы  $[K]$  и  $[M]$ , т. е. приводит их к виду, когда ненулевые элементы обеих матриц  $[K']$  и  $[M']$  присутствуют только на главных диагоналях. Новые матрицы имеют вид

$$[M'] = \begin{bmatrix} \|X_1\|^2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \|X_2\|^2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \|X_N\|^2 \end{bmatrix}, \quad (8.65)$$

$$[K'] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \|X_1\|^2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \omega_2^2 \|X_2\|^2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \omega_n^2 \|X_N\|^2 \end{bmatrix}.$$

где  $\|X_i\|^2 = [X]_i^T [M] [X]_i$  — квадрат нормы  $i$ -го собственного вектора. Удобно нормировать собственные вектора так, чтобы  $\|X_i\|^2 = 1$ , тогда матрица масс приводится к единичной, а матрица жесткости содержит на главной диагонали

квадраты собственных частот системы. Вектор нормальных координат вводится соотношением

$$[\xi] = [S]^{-1} [x], \quad [\xi] = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]. \quad (8.66)$$

Действительно, учитывая правило транспонирования произведения матриц, получаем, например, для потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} 2U &= [x]^T [K] [x] = [x]^T ([S]^T)^{-1} [S]^T [K] [S] [S]^{-1} [x] = \\ &= ([x]^T ([S]^T)^{-1}) ([S]^T [K] [S]) ([S]^{-1} [x]) = \\ &= ([S]^{-1} [x])^T [K'] ([S]^{-1} [x]) = [\xi]^T [K'] [\xi]. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Для кинетической энергии можно таким же образом записать  $2K = [\dot{\xi}]^T [M'] [\dot{\xi}]$ . Если собственные векторы  $[X]_i$  нормированы в указанном выше смысле, то кинетическая и потенциальная энергии системы, выраженные через переменные  $\xi_i$  будут иметь вид

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\xi}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \xi_i^2. \quad (8.68)$$

Таким образом, произвольная система  $N$  связанных гармонических осцилляторов представима в виде совокупности  $N$  несвязанных между собой осцилляторов с частотами, совпадающими с собственными частотами системы.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний по поводу методов решения алгебраической проблемы собственных значений (8.58). Очевидно, если число осцилляторов больше четырех и в системе отсутствует симметрия, то единственным способом ее решения — численный. При этом прямой метод решения, связанный с разложением детерминанта в (8.59) для определения коэффициентов характеристического полинома и последующим отысканием его корней, является самым неудачным. Можно с уверенностью сказать, что для системы уже из 10 осцилляторов такая попытка потребовала бы невообразимо большого времени, затраченного на подсчет всех необходимых определителей, но даже если бы вычисления можно было бы довести до конца, результат не имел бы ничего общего с истинным решением из-за погрешностей округления [68].

Необходимо отметить, что задача на отыскание собственных значений матриц является самой трудной задачей вычислительной алгебры и на ее решение были потрачены огромные усилия в течении почти пятидесяти лет, с тех пор, как появились первые ЭВМ. Сегодня можно утверждать, что для матриц умеренного размера ( $N \leq 200$ ) такую задачу можно считать практически решенной. Разработаны чрезвычайно красивые с алгебраической точки зрения алгоритмы, и на их основе созданы эффективные программы, позволяющие находить решения алгебраической проблемы собственных значений, причем даже необязательно для симметричных и действительных матриц. Подробное изложение этих методов можно найти в [68, 69], а сами программы можно бесплатно получить через сеть Интернет в общедоступной библиотеке научного программного обеспечения *NETLIB*, главный сайт которой находится по адресу <http://www.netlib.org>, а его зеркала расположены по всему миру.

В случае матриц очень большого порядка проблему численного решения задачи собственных значений нельзя считать закрытой и в настоящее время. Обычно в задачах, где появляются подобные матрицы, они оказываются разреженными, т. е. только очень малая часть их элементов не равна нулю. Это позволяет хранить только ненулевые элементы матриц и значительно сокращает объем необходимой памяти и время решения задачи на ЭВМ. Однако при этом требуется разработка специальных алгоритмов, ориентированных на работу с разреженными матрицами, которые обычно являются существенно более сложными, чем алгоритмы для заполненных матриц.

## 8.7 Цепочка идентичных осцилляторов

Система связанных осцилляторов, в которой они упорядочены так, что каждый из осцилляторов связан только с двумя соседями (за исключением, может быть, двух крайних), называется цепочкой осцилляторов. Исследование процессов в цепочке связанных осцилляторов имеет большое значение как в чисто теоретическом плане, так и с точки зрения практических приложений. Наиболее широкое распространение получили радиотехнические цепочки, которые используют как *фильтры* для выделения или подавления сигналов с частотами, лежащими в определенной полосе частот. Радиотехнические цепочки удобно также использовать как модели сред, в которых могут существовать колебания и волны с заданными свойствами [50, 70]. Другим примером колебательных цепочек являются многие электронные приборы СВЧ диапазона, в которых электродинамическая система представляет собой последовательно связанные резонаторы, в каждом из которых могут возбуждаться колебания на дискретных частотах, а связь между резонаторами обеспечивает возможность передачи энергии колебаний вдоль системы. Одним из наиболее плодотворных способов теоретического анализа процессов в таких системах, как без электронного пучка, так и в его присутствии, является их описание как цепочки связанных осцилляторов [71, 72].

Наконец, для построения современной теории твердого тела огромную роль сыграла модель кристалла, в котором периодически расположенные атомы были представлены шариками, связанными между собой пружинками, заменяющими межатомные силы [73].

Важное значение имеет то, что в случае цепочек связанных идентичных осцилляторов анализ можно провести до конца. Рассмотрим для наглядности цепочку механических маятников, связанных пружинками. Такая система показана на рисунке 8.9. Все маятники и пружинки одинаковы и расположены на одинаковом расстоянии  $d$  друг от друга. Для анализа необходимо задать условия на концах цепочки, определив, каким образом устроены два крайних осциллятора. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда всего имеется  $N + 2$  маятника, и крайние закреплены в по-

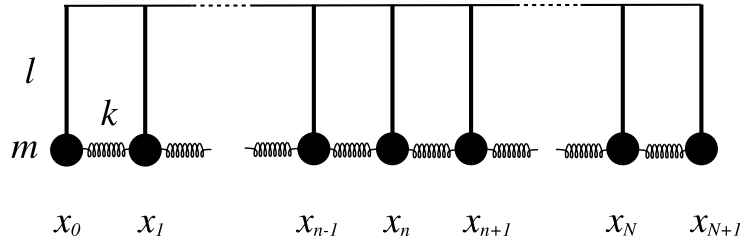


Рис. 8.9. Цепочка связанных идентичных маятников.

ложении равновесия. Таким образом мы имеем динамическую систему с  $N$  степенями свободы. пронумеруем все осцилляторы числами от 0 до  $N+1$  и обозначим через  $x_n$  угол отклонения  $n$ -го из них. Тогда можно записать следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_n + \omega_0^2 x_n &= \frac{k}{m}(x_{n+1} - x_n) - \frac{k}{m}(x_n - x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N \\ x_{N+1} &= 0, \end{aligned} \quad (8.69)$$

где  $\omega_0^2 = g/l$ . Введем комплексные амплитуды  $X_n$  с помощью формулы  $x_n(t) = \operatorname{Re}\{e^{i\omega t} X_n\}$ ; для  $X_n$  из (8.69) следуют разностные уравнения

$$X_0 = 0, \quad (8.70a)$$

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right) X_n = \frac{k}{m}(X_{n+1} + X_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (8.70b)$$

$$X_{N+1} = 0. \quad (8.70c)$$

Решение этих уравнения будем искать в виде  $X_n = A \sin \psi n$ , где  $A$  и  $\psi$  — некоторые постоянные. Тогда уравнение (8.70a) выполняется автоматически, а из уравнения (8.70b) после простых тригонометрических преобразований следует

$$\omega^2(\psi) = \omega_0^2 + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (8.71)$$

Остается использовать условие (8.70c), из которого находим, что должно выполняться  $\sin \psi(N+1) = 0$ , или

$$\psi_j = \frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (8.72)$$

Совместно уравнения (8.71) и (8.72) определяют собственные частоты колебаний цепочки осцилляторов:

$$\omega_j = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\pi j}{2(N+1)}}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (8.73)$$



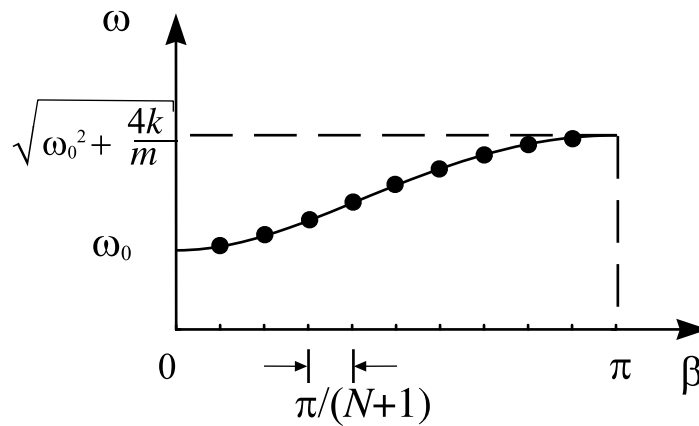


Рис. 8.10. Распределение собственных частот системы связанных идентичных маятников.

а формула

$$X_n^{(j)} = A_j \sin \psi_j n \quad (8.74)$$

задает распределение амплитуд колебаний осцилляторов вдоль цепочки для  $j$ -ой собственной моды. Отметим, что в системе существует  $N$  собственных мод, что совпадает с числом степеней свободы. Другие целые значения  $j$ , лежащие вне диапазона  $1, 2, \dots, N$ , не приводят к новым типам колебаний.

Распределение собственных частот удобно представить графически, как показано на рис. 8.10 на котором в координатах  $(\psi, \omega)$  построен график функции  $\omega(\psi)$ , задаваемой уравнением (8.71). Положение собственных частот на графике отмечено точками, координаты которых по оси абсцисс выражаются формулой (8.72). Все частоты лежат в интервале между значениями  $\bar{\omega}_1 = \omega_0$  и  $\bar{\omega}_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 4k/m}$ , причем сами эти крайние точки в данном случае не являются собственными частотами. Совокупность всех собственных частот системы называется ее *спектром*.

Расстояние между любыми двумя точками спектра вдоль оси  $\psi$  равно  $\pi/(N+1)$ , т. е. их расположение эквидистантно. При этом распределение собственных частот вдоль оси  $\omega$  существенно неоднородное. Особенно хорошо это становится видно, если увеличивать количество осцилляторов  $N$ , тогда плотность проекций точек, изображающих собственные частоты, на ось  $\omega$  будет возрастать около крайних точек спектра  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  быстрее, чем в его средней части.

Если в системе возбуждена одна собственная мода, то ее амплитуду  $A_j$  можно выбрать чисто действительной величиной, тогда из (8.74) следует, что все  $X_n^{(j)}$  действительны, т. е. колебания всех осцилляторов в цепочке происходят либо в фазе, либо в противофазе друг с другом. Наглядно вид собственных мод можно представить, если отложить на графике

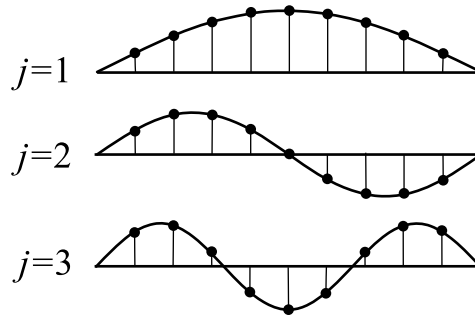


Рис. 8.11. Распределение амплитуд колебаний осцилляторов вдоль цепочки для первых трех собственных мод.

вдоль оси абсцисс номера осцилляторов, а вдоль оси ординат — амплитуду колебаний. На рис. 8.11 показаны такие распределения для трех первых собственных мод в случае, когда  $N = 9$ . Картина похожа на колебания струны, закрепленной в двух конечных точках, однако следует помнить, что в нашем примере речь идет о продольных колебаниях.

Для первой собственной моды, имеющей наименьшую собственную частоту, все осцилляторы колеблются в фазе, максимальную амплитуду имеет центральный осциллятор, если число  $N$  — нечетное, или два ближайших к центру осциллятора, если  $N$  — четное. Для следующей моды осцилляторы разбиваются на две группы, колебания в которых происходят в противофазе. Для третьей моды таких групп три, и так далее. Мы приходим к выводу, что картина колебаний имеет вид стоячих волн, причем по длине системы должно укладываться целое число полуволн (условие резонанса), если длиной волны называть расстояние вдоль системы между двумя осцилляторами, совершающими одинаковое движение. Используя (8.74), это определение можно записать в виде  $\psi_j \lambda_j/d = 2\pi$ , где  $d$  — расстояние между соседними осцилляторами,  $\lambda_j$  — длина волны  $j$ -го типа колебаний. Длина всей цепочки равна  $(N + 1)d$ , тогда условие резонанса представляется как  $(\lambda_j j)/2 = (N + 1)d$ . Совместно два этих уравнения дают  $\psi_j = \pi j/(N + 1)$ , то есть результат, совпадающий с (8.72).

Введем волновое число  $k$ , связанное с длиной волны обычным соотношением  $k = 2\pi/\lambda$ . Тогда получаем  $\psi_j = 2\pi d/\lambda_j = k_j d$ . Отсюда следует, что величина  $\psi_j$  определяет пространственный набег фазы стоячей волны между двумя соседними осцилляторами.

Таким образом, колебания дискретной цепочки осцилляторов можно описывать в терминах стоячих волн. Для непрерывной среды такой подход будет развит в учебном пособии “Линейные волны”, входящем в серию “Лекции по теории колебаний и волн” (см. [2]). Следует, однако, отметить, что существует важное отличие колебаний дискретной цепочки и колебаний отрезка непрерывной среды с заданными граничными условиями на концах, которое состоит в том, что собственных типов колебаний

в цепочке *конечное* число, совпадающее с числом степеней свободы, а количество собственных типов колебаний в непрерывной модели бесконечно. Это обстоятельство играет важную роль в объяснении термодинамических свойств твердых тел [17, 73].

Исследуем вопрос, насколько влияют на полученные результаты условия на концах цепочки, или, другими словами, *граничные условия*? Чтобы выяснить его, рассмотрим цепочку, в которой самый правый осциллятор не закреплен, а свободен. Тогда вместо уравнения (8.70с) для него следует записать уравнение

$$\left(-\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{k}{m}\right) X_{N+1} = \frac{k}{m} X_N. \quad (8.75)$$

Решение вновь ищем в виде  $X_n = A \sin \psi n$ , тогда, как и в предыдущем случае, уравнение (8.70а) выполняется автоматически, из (8.70б) следует соотношение (8.71), а из (8.75), после простых преобразований получаем, что должно выполняться  $\sin(\psi/2) \cos \psi(2N + 3/2) = 0$ . Так как первый множитель не может быть равен нулю (в противном случае все  $X_n \equiv 0$ ), то отсюда следует, что

$$\psi_j = \frac{(2j - 1) \pi}{2(N + 1) + 1}, \quad j = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (8.76)$$

Мы получили, что значения собственных частот лежат на плоскости с координатами  $(\psi, \omega)$  на той же самой кривой (8.71), что и в случае цепочки с закрепленными концами, однако они смещены относительно значений (8.73), так как их координаты вдоль оси  $\psi$  теперь задаются формулой (8.76). Расстояние между соседними точками спектра вдоль этой оси снова эквидистантно, но оно не равно расстояниям между двумя крайними точками спектра, для которых  $j = 1$  и  $j = N + 1$  и предельными точками, для которых  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi$ . Отметим, что и в данном случае количество собственных мод совпадает с числом степеней свободы системы.

**Задача 8.2.** Постройте распределения амплитуд колебаний осцилляторов нескольких первых мод для цепочки, закрепленной только на одном конце, и покажите, что они соответствуют условию, что по длине системы должно укладываться нечетное число четвертей длины волны.

Использованный метод решения разностных уравнений можно использовать и в случае других условий на концах цепочки. Например, можно рассмотреть ситуацию, когда один, или оба крайних осциллятора отличаются от всех остальных осцилляторов по массе. Подобное рассмотрение позволяет сделать некоторые выводы об общих свойствах полученных решений, которые не зависят от конкретного вида граничных условий:

1. Собственные частоты системы на плоскости  $(\psi, \omega)$  лежат на кривой, уравнения которой определяется устройством регулярной части цепочки. В рассмотренном случае маятников, связанных пружинками, это уравнение (8.71).

2. Количество собственных мод совпадает с числом степеней свободы системы.
3. Спектр системы вдоль оси  $\psi$  эквидистантный, однако само расстояние между точками спектра зависит как от общей длины системы, так и от граничных условий.
4. Вдоль оси  $\omega$  спектр в общем случае не является эквидистантным, например для рассмотренной системы точки спектра сгущаются к граничным частотам  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$ .
5. Крайние точки спектра могут совпадать, а могут и не совпадать с граничными частотами  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$ , это определяется условиями на концах цепочки.

Эти утверждения носят общий характер и не зависят от конкретного устройства регулярной цепочки.

При большом числе элементов цепочки спектр колебаний становится все гуще и гуще, все более плотно заполняя кривую  $\omega(\psi)$ . При этом теряет смысл вопрос о самих значениях собственных частот, и на первый план выдвигается вопрос о *плотности распределения* собственных частот. Например, если рассматривать цепочку связанных осцилляторов как одномерную модель кристалла, то количество элементов в такой цепочке  $N \sim 10^{23}$ . При этом в любом физически бесконечно малом интервале частот  $\Delta\omega$ , принадлежащем отрезку  $[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2]$ , все еще будет содержаться очень большое число собственных мод  $\Delta n(\omega)$ . Для описания многих макроскопических свойств кристалла необходимо знать, чему равно это число. Для этого вводится функция  $\rho(\omega)$ , называемая плотностью распределения собственных частот, или плотностью спектра, с помощью соотношения

$$\Delta n(\omega) = \rho(\omega)\Delta\omega. \quad (8.77)$$

Каждая собственная мода представляет собой гармонический осциллятор, и, как известно из статистической физики, если осциллятор с частотой  $\omega_i$  находится в тепловом равновесии с окружающей средой (термостатом), имеющей температуру  $T$ , то его средняя энергия выражается формулой

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega_i}{e^{\hbar\omega_i/k_bT} - 1},$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $k_b$  — постоянная Больцмана [17]. Тогда внутренняя энергия всей среды равна

$$E(T) = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega)\rho(\omega) d\omega. \quad (8.78)$$

Это соотношение можно использовать, в частности, для построения теории теплоемкости кристалла, если вычислить для него плотность распределения  $\rho(\omega)$ . Отсюда видно, что эта функция играет чрезвычайно важную роль в теоретической физике.

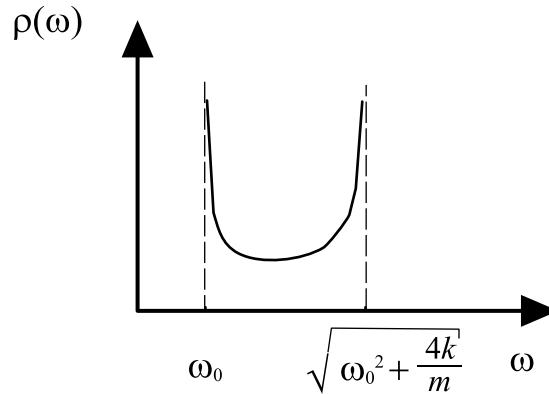


Рис. 8.12. Плотность распределения собственных частот цепочки связанных идентичных осцилляторов.

Вычислим плотность распределения для модели связанных идентичных маятников, предположив, что их число  $N$  очень велико. Тогда, обратив уравнения (8.71) и (8.72), получаем

$$j(\omega) = \frac{2(N+1)}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4k/m}},$$

откуда, используя формулу  $\rho(\omega) = dj/d\omega$ , будем иметь

$$\rho(\omega) = \frac{2(N+1)}{\pi} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}_1^2)(\bar{\omega}_2^2 - \omega^2)}}. \quad (8.79)$$

Функция  $\rho(\omega)$  для этого случая показана на рис. 8.12. Видно, что вблизи границ спектра  $\rho(\omega)$  обращается в бесконечность по закону

$$\begin{aligned} \rho &\sim \frac{1}{\sqrt{\omega - \bar{\omega}_1}}, & \omega - \bar{\omega}_1 \ll \bar{\omega}_1, \\ \rho &\sim \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}_2 - \omega}}, & \bar{\omega}_2 - \omega \ll \bar{\omega}_2. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Это обстоятельство является отражением свойства сгущения собственных частот вблизи краев спектра, о котором упоминалось выше.

Сгущение спектра происходит вблизи тех точек кривой  $\omega(\psi)$ , где она носит “пологий” характер, т. е. там, где  $d\omega/d\psi = 0$ . Действительно, так как спектр вдоль оси  $\psi$  эквидистантный, то для бесконечно малых  $\Delta\omega$  и  $\Delta\psi$  можно записать

$$\Delta\omega = \frac{d\omega}{d\psi} \Delta\psi \sim \left| \frac{d\omega}{d\psi} \right| \Delta n,$$

откуда получаем важное соотношение

$$\rho(\omega) \sim \left| \frac{d\omega}{d\psi} \right|^{-1}. \quad (8.81)$$

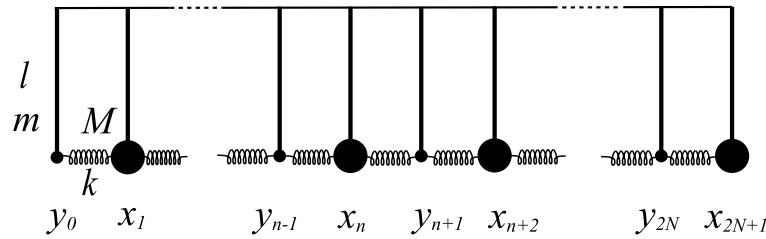


Рис. 8.13. Цепочка из чередующихся осцилляторов двух типов.

Фактически мы уже воспользовались им при выводе формулы (8.79). Отметим, что соотношение (8.81) справедливо для одномерных цепочек, его обобщение на случай систем большей размерности см. в [73, глава 2]. Коэффициент пропорциональности в (8.81) можно найти из условия нормировки, зная, что полное число собственных мод равняется числу степеней свободы.

Как будет видно при рассмотрении волн в непрерывных средах (см. [2, лекция 2]), точки, где  $d\omega/d\psi = 0$ , соответствуют равенству нулю так называемой групповой скорости, отвечающей за распространение энергии волнового движения вдоль среды. Столь сильная сингулярность функции  $\rho(\omega)$  в критических точках — обращение ее в бесконечность — является отличительной особенностью одномерных цепочек. Для колебаний в двумерных и трехмерных решетках осцилляторов можно показать, что  $\rho(\omega)$  остается конечной, а ее производная терпит разрыв [73]. По этой причине прямое обобщение полученных результатов на случай трехмерной кристаллической решетки требует осторожности, однако они оказываются полезны при исследованиях линейных полимеров [74].

Модель цепочки идентичных осцилляторов оказывается слишком простой и не улавливает некоторые важные особенности колебаний в дискретных цепочках. Чтобы продвинуться дальше, рассмотрим более сложную систему, предположив, что в цепочке последовательно чередуются осцилляторы двух типов, назовем их  $A$  и  $B$ , отличающиеся массами и собственными частотами колебаний  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ . Такая система показана на рис. 8.13. Примем, вслед за Л.И. Мандельштамом [28], следующий способ обозначений: все осцилляторы в цепочке пронумеруем подряд от 0 до  $2N + 1$ , независимо от их типа, но координаты осциллятора типа  $A$  будем обозначать через  $X_k$ , типа  $B$  — через  $Y_n$ . Тогда  $k$  принимает нечетные значения  $k = 1, 3, \dots, 2N + 1$ , а  $n$  — четные значения  $n = 0, 2, \dots, 2N$ . Для определенности будем считать, что крайние осцилляторы закреплены, тогда можно написать (сразу используем уравнения для комплексных амплитуд)

$$Y_0 = 0, \quad (8.82a)$$

$$X_{2N+1} = 0. \quad (8.82b)$$

Для остальных осцилляторов записываем уравнения динамики в виде

$$\left(-\omega^2 + \omega_{01}^2 + \frac{2k}{M}\right) X_k = \frac{k}{M} (Y_{k+1} + Y_{k-1}), \quad k = 1, 3, \dots, 2N - 1, \quad (8.83a)$$

$$\left(-\omega^2 + \omega_{02}^2 + \frac{2k}{m}\right) Y_n = \frac{k}{m} (X_{n+1} + X_{n-1}), \quad n = 2, 4, \dots, 2N. \quad (8.83b)$$

Решение уравнений (8.82)-(8.83) ищем в виде  $X_k = A \sin \psi k$ ,  $Y_n = B \sin \psi n$ , тогда уравнение (8.82a) выполняется автоматически, а подстановка этих выражений в уравнения (8.83) после простых преобразований дает

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + n_1^2) A - \frac{2k}{M} \cos \psi B &= 0, \\ -\frac{2k}{m} \cos \psi A + (-\omega^2 + n_2^2) B &= 0, \end{aligned} \quad (8.84)$$

где  $n_1^2 = \omega_{01}^2 + 2k/M$ ,  $n_2^2 = \omega_{02}^2 + 2k/m$ . Из (8.84) следует характеристическое уравнение

$$\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 - \frac{4k^2}{mM} \cos^2 \psi = 0,$$

Его решения есть

$$\omega_{1,2}^2(\psi) = \frac{1}{2} \left[ (n_1^2 + n_2^2) \mp \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + \frac{4k^2}{mM} \cos^2 \psi} \right]. \quad (8.85)$$

Возможные значения  $\psi$  задаются, как и в случае однородной цепочки, оставшимся уравнением (8.82b):  $\sin \psi(2N + 1) = 0$ , или

$$\psi_j = \frac{\pi j}{2N + 1}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (8.86)$$

Мы видим, что для каждого возможного значения  $\psi$  из (8.86) можно найти *две* собственные частоты, так что их общее число равно  $2N$ , по числу степеней свободы. Другие значения  $j$ , отличающиеся от  $1, 2, \dots, N$ , не приводят к новым решениям. Например, для  $j = N + 1$  можно записать

$$\psi_{N+1} = \frac{\pi}{2N + 1} (N + 1) = \pi - \psi_N.$$

Отсюда видно, что собственные частоты, получаемые для  $j = N$  и  $j = N + 1$  из уравнения (8.85), совпадают, а распределения амплитуд колебаний осцилляторов  $X_k$ ,  $Y_n$  отличаются только знаком. То же самое можно сказать о собственных колебаниях с  $j = N - 1$  и  $j = N + 2$ , и так далее.

Если графически представить распределение собственных чисел, подобно тому, как это было сделано на рис. 8.10, то получится картина, показанная на рис. 8.14. Собственные частоты, помеченные точками, лежат

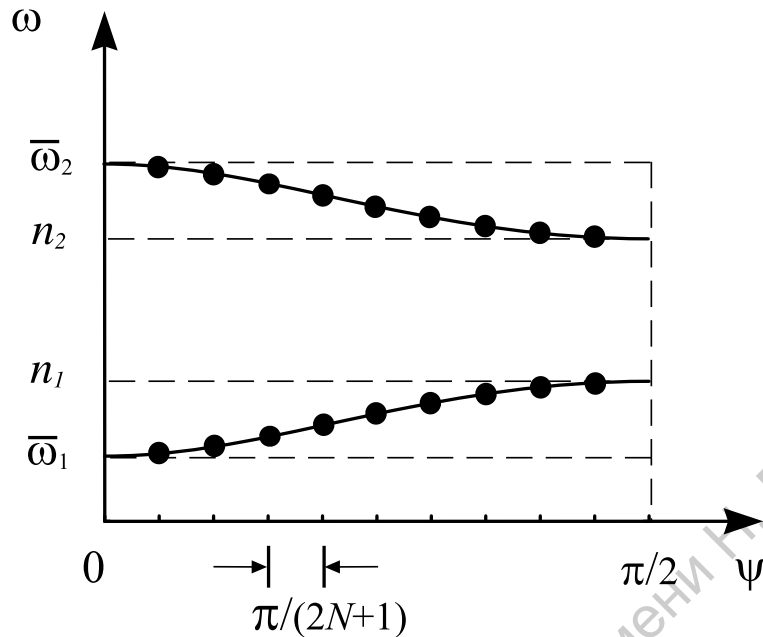


Рис. 8.14. Спектр колебаний цепочки из чередующихся осцилляторов двух типов.

на двух кривых, задаваемых уравнением (8.85). Координаты точек вдоль оси  $\psi$  определяются соотношением (8.86), из которого следует, что возможный интервал изменения  $\psi$  ограничен значениями 0 и  $\pi/2$ . Каждая ветвь спектра лежит в своей частотной полосе, нижняя ограничена значениями  $\bar{\omega}_1$  и  $n_1$ , а верхняя — значениями  $n_2$  и  $\bar{\omega}_2$ , где

$$\bar{\omega}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ (n_1^2 + n_2^2) \mp \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + \frac{4k^2}{mM}} \right]. \quad (8.87)$$

Таким образом собственные частоты разбиты на две группы, лежащие, соответственно, в первой и второй полосе. Собственные моды, принадлежащие первой группе называют низкочастотными, а второй группе — высокочастотными. Они отличаются также пространственным распределением амплитуд колебаний. Из первого уравнения в (8.84) можно получить

$$A = \frac{(4k/m) \cos \psi}{\pm \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + \frac{4k^2}{mM} \cos^2 \psi} - (n_2^2 - n_1^2)} B,$$

где знак плюс относится к низкочастотным, а минус — к высокочастотным колебаниям. В первом случае амплитуды  $A$  и  $B$  имеют одинаковые знаки, т. е. смещения соседних осцилляторов разного типа происходят в фазе, а во втором  $A$  и  $B$  имеют разные знаки, т. е. смещения соседних осцилляторов происходят в противофазе. Для основного типа колебаний картины распределения амплитуд схематически показаны на рис. 8.15. Случай



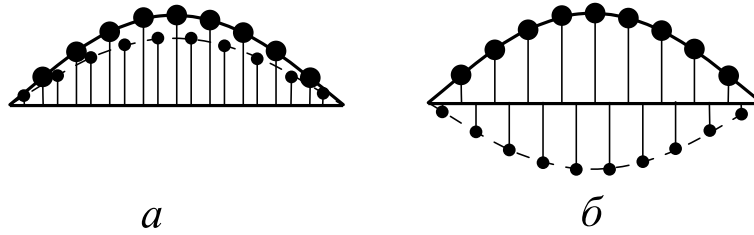


Рис. 8.15. Распределение амплитуд колебаний вдоль цепочки из чередующихся осцилляторов двух типов для первых мод низкочастотной (а) и высокочастотной (б) ветвей спектра.

(а) соответствует низкочастотной моде, при этом оба сорта осцилляторов смещаются в одном направлении и макроскопическая плотность заметно меняется в процессе колебаний. В случае (б), соответствующем высокочастотным колебаниям, смещения происходят в разные стороны, и заметного изменения плотности среды нет.

Если цепочку рассматривать как одномерную модель кристалла или полимерной молекулы, то осцилляторы представляют атомы двух сортов, расположенных в пределах одного периода кристаллической решетки. При этом следует также учесть, что один отдельный атом вне кристалла при смещении не испытывает возвращающей силы. Тогда  $\omega_{01}^2 = 0$  и  $\omega_{02}^2 = 0$ , и вместо (8.85) можно записать

$$\omega_{1,2}^2(\psi) = k \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4k^2}{mM} \sin^2 \psi} \right]. \quad (8.88)$$

Эти зависимости изображены на рис. 8.16. При больших  $N$  собственные частоты плотно заполняют обе ветви спектра. Характер спектра при этом несколько изменяется. При малых  $\psi$  второе слагаемое под корнем гораздо меньше первого, и корень можно разложить в ряд. В этой части спектра, с учетом того, что  $\sin \psi \approx \psi \ll 1$  получаем

$$\omega_1(\psi) \approx \sqrt{\frac{2k}{m+M}} \psi, \quad \omega_2(\psi) \approx \sqrt{\frac{2k(m+M)}{mM}}. \quad (8.89)$$

Низкочастотная ветвь  $\omega_1(\psi)$  при малых  $\psi$  ведет себя как отрезок прямой, выходящей из начала координат. Для самой низшей моды ( $j = 1$ ) отсюда следует, что

$$\omega_1(\psi_1) = \sqrt{\frac{2k}{(m+M)} \frac{\pi}{(2N+1)}}.$$

Если число “атомов” очень велико ( $N \sim 10^{23}$ ), то эта частота отличается на много порядков от  $\omega_2$ . Для низкочастотной ветви частота колебаний линейно увеличивается с номером моды, а для высокочастотной — остается

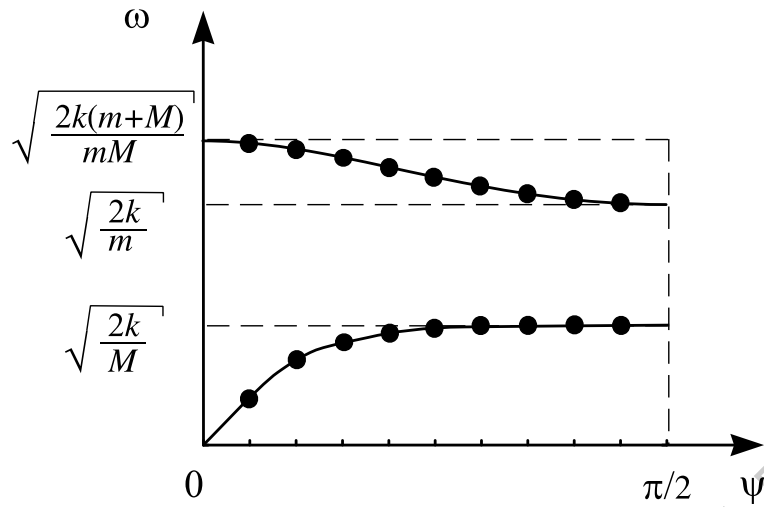


Рис. 8.16. Спектр колебаний цепочки "атомов" в одномерной модели кристалла.

постоянной. В первом случае часто говорят об акустических колебаниях, или *дебаевской* ветви спектра, а во втором — об оптической ветви, поскольку соответствующие частоты лежат обычно в инфракрасном диапазоне.

На другом краю спектра следует положить  $\sin \psi \approx 1$ , тогда

$$\omega_1(\psi) \approx \sqrt{\frac{2k}{M}}, \quad \omega_2(\psi) \approx \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (8.90)$$

Между этими значениями других собственных частот системы нет.

В случае, если массы "атомов" значительно отличаются ( $M \gg m$ ), то можно считать, что оптическая ветвь идет практически параллельно горизонтальной оси, так как ширина полосы, в которой она лежит, равна

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{2k(m+M)}{mM}} - \sqrt{\frac{2k}{m}} \approx \frac{m}{2M} \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (8.91)$$

Для расчета плотности спектра частот  $\rho(\omega)$  проще всего воспользоваться формулой (8.81). Дифференцируя соотношение (8.88), и опуская несущественный постоянный множитель, получаем

$$\rho(\omega) \sim \frac{\omega |\omega^2 - \Omega^2|}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 - [(M-m)/(M+m)]^2 \Omega^4} \sqrt{\Omega^4 - (\omega^2 - \Omega^2)^2}}, \quad (8.92)$$

где  $\Omega^2 = k(1/m + 1/M)$ . Эта функция изображена на рис. 8.17. Видно, что плотность собственных частот отлична от нуля на двух интервалах оси  $\omega$ , совпадающих с положением акустической и оптической ветвей спектра. Вблизи граничных точек функция  $\rho(\omega)$  имеет сингулярности, однако это

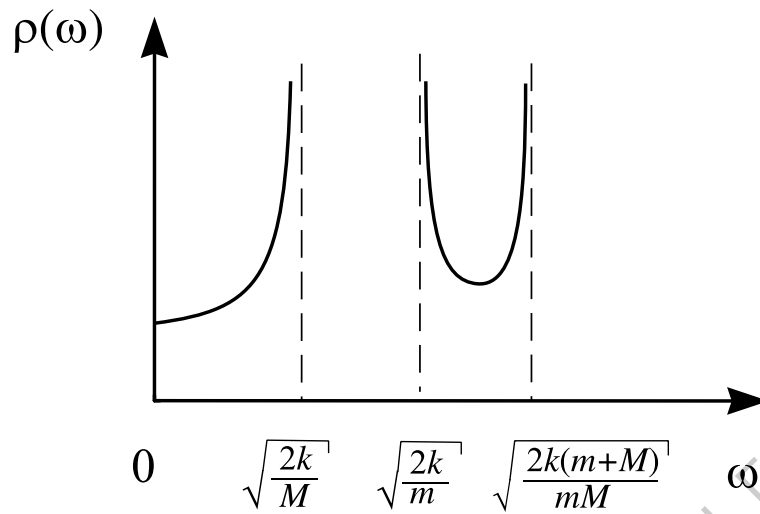


Рис. 8.17. Плотность распределения частот для одномерной модели кристалла в виде цепочки из “атомов” двух типов.

не относится к точке  $\omega = 0$ , т. е. к нижней границе акустической ветви, так как в этой точке  $d\omega/d\psi \neq 0$ .

Рассмотренные примеры показывают, что вид спектральной плотности  $\rho(\omega)$  в значительной степени определяется дискретной структурой среды, и зависит от количества “атомов” разных типов на одном периоде системы, а также их масс. То же самое можно сказать о реальном твердом теле. Функция  $\rho(\omega)$  допускает прямое измерение в эксперименте, например, с помощью дифракции медленных нейтронов на кристалле, и, таким образом, она служит источником информации о строении вещества.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трубецков Д. И., Рожнев А. Г. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
2. Трубецков Д. И., Рожнев А. Г. Линейные волны. Лекции по теории колебаний и волн. Саратов: СГУ, 2011.
3. Кузнецов А. П., Рожнев А. Г., Трубецков Д. И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. 2-е изд. М.: Физматлит, 2008. 128 с.
4. Петровский Г. И. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 1984. 296 с.
5. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: РХД, 2000. 448 с.
6. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 2-е изд. М.: Наука, 1985. 448 с.
7. Стрелков С. П., Сивухин Д. В., Угаров В. А., Яковлев И. А. Сборник задач по общему курсу физики. Механика / Под ред. И. А. Яковлева. 4-е изд. М.: Наука, 1977. 288 с.
8. Lotka A. Elements of physical biology. 1925: Williams and Wilkins, 1925. Baltimore pp.
9. Романовский Ю., Степанова Н., Чернавский Д. Что такое математическая биофизика: Кинетические модели в биофизике. М.: Просвещение, 1971. 136 с. Гл. 1, § 2, гл. 4, § 2.
10. Белоусов В. Колебательная реакция и ее механизмы // Сб. рефератов по радиац. медицине за 1958 г. М.: Медгиз, 1959. С. 145. См. также: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сб. научн. трудов. Горький: ИФП АН СССР, 1981, С.176–186; Изв. вузов. Нелинейная прикладная динамика. 1999, т. 7, № 4, С. 89–95.
11. Жаботинский А. Концентрационные колебания. М.: Наука, 1974. 179 с.
12. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.
13. Короновский А. А., Трубецков Д. И. Нелинейная динамика в действии. Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 1995. 129 с.
14. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. Наука: Наука, 1979. 528 с.

15. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. 429 с.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. 6-е изд. М.: Физматлит, 2004. 800 с. § 112.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. ч. 1. 5-е изд. М.: Физматлит, 2002. 616 с. § 59.
18. фон Клитцинг К. Квантовый эффект Холла: Нобелевская лекция // УФН. 1986. Т. 150, № 1. С. 107–126.
19. Бормонтов Е. Н. Квантовый эффект Холла // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 9. С. 81–88.
20. Петелин М. И., Юлпатов В. К. Мазеры на циклотронном резонансе // Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. IV / Под ред. В. Н. Шевчика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Лекция 1, § 4.
21. Вайнштейн Л. А., Исаев В. А., Трубецков Д. И. Электронный генератор с открытым резонатором (обзор теоретических и экспериментальных исследований) // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 7. С. 1233–1249.
22. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 8. Квантовая механика. М.: Мир, 1966. 271 с. Гл. 1, § 4.
23. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 224 с.
25. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. с.
26. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. 2-е изд. М.: Наука, 1987. с.
27. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. М.: Высшая школа, 2001. 395 с.
28. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. Полное собрание трудов, т. 4. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 511 с.
29. Афраймович В. С. Краткий очерк качественной теории динамических систем // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (6-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 2. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. С. 75–89.
30. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141. С. 343–374.
31. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 487 с.
32. Сивухин Д. В. Курс общей физики. Т. 1. Механика. 4-е изд. М.: Физматлит; Изд-во МФТИ, 2005. 560 с.

33. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 656 с. §14.
34. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
35. Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений. 2-е изд. М.: Мир, 1984. 504 с.
36. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 381 с.
37. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. 560 с. гл. 14.
38. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. 2-е изд. М.: УРСС, 2010. 429 с. Гл. 13.
39. Кайдановский Н. Л., Хайкин С. Э. Механические релаксационные колебания // ЖТФ. 1933. Т. 3, № 1. С. 91–109.
40. Мандельштам Л. И. Вступительная лекция к курсу физики в Одесском политехническом институте // Академик Л.И.Мандельштам. К 100-летию со дня рождения. М.: Наука, 1979. 312 pp.
41. Шевчик В. Н. Основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1959. 306 с. Гл. 5.
42. Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970. 584 с.
43. Таунс Ч., Шавлов О. Радиоспектроскопия. М.: ИЛ, 1959. 758 с.
44. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2. Пространство. Время. Движение. М.: Мир, 1965. 168 с.
45. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. 3-е изд. М.: Лань, 2005. 440 с.
46. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 432 с.
47. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963. 351 с.
48. Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М.: Сов. радио, 1966. 334 с.
49. Лопухин В. М., Магалинский В. Г., Мартынов В. П. Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот. М.: Наука, 1966. 371 с.
50. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. 368 с.
51. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. 4-е изд. М.: Физматлит, 2005. 656 с.
52. Эрдеи А. Асимптотические разложения. М.: Гос. изд-во физ. мат. лит., 1962. 127 с.

53. Фрёман Н., Фрёман П. У. ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967. 166 с.
54. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
55. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 588–601.
56. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т. 44. С. 7–20.
57. Миллер М. А. Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 1. С. 110–123.
58. Миллер М. А. Об одном принципе генерации высокочастотных колебаний // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 1. С. 166–167.
59. Релятивистская высокочастотная электроника / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1979. 298 с.
60. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. Нелинейная теория вынужденного рассеяния волн на релятивистских электронных пучках // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. С. 930–943.
61. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. Энергетические возможности релятивистского комптоновского лазера // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. С. 207–211.
62. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980. 454 с.
63. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1988. 440 с.
64. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
65. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986. 229 с.
66. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1981. 336 с.
67. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
68. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983. 384 с.
69. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 304 с.
70. Тода М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1986. 262 с.
71. Тараненко З. И., Трохименко Я. К. Замедляющие системы. Киев: Техніка, 1965. 307 с.
72. Булгакова Л. В., Трубецков Д. И., Фишер В. Л., Шевчик В. Н. Лекции по электронике СВЧ приборов типа О. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. 221 с.

73. Займан Д. Принципы теории твердого тела. 2-е изд. М.: Мир, 1974. 472 с.
74. Вундерлих Б., Баур Г. Теплоемкость линейных полимеров. М.: Мир, 1972. 240 с.