

И. А. МАЛЬЦЕВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание второе,
исправленное и дополненное



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
МОСКВА •
КРАСНОДАР •
2010

ББК 22.143я73

М 21

Мальцев И. А.

М 21 Линейная алгебра: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 384 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1011-8

Книга написана по материалам курса лекций по линейной алгебре и факультативных курсов, прочитанных автором на экономическом факультете Новосибирского госуниверситета, и ориентирована в первую очередь на студентов этого факультета. Ввиду доступного и очень подробного изложения материала она может быть рекомендована в качестве учебного пособия студентам других факультетов, а также для самостоятельного изучения предмета.

ББК 22.143я73

Обложка

А. Ю. ЛАПШИН

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2010
© И. А. Мальцев, 2010
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2010

ВВЕДЕНИЕ

Основой этой книги послужили лекции, прочитанные автором на экономическом факультете Новосибирского государственного университета. Объем изучаемого материала с годами менялся. В настоящее время курс читается в течение двух семестров и примерно соответствует первым десяти главам учебника. Содержание первой главы не соответствует названию книги, однако некоторые сведения о комплексных числах и многочленах необходимы для лучшего понимания материала, изложенного далее, а также требуются в курсе математического анализа. Потребностями курсов математического анализа и дифференциальных уравнений объясняется и включение параграфов, в которых рассматриваются кривые и поверхности второго порядка. В последних четырех главах рассматриваются системы линейных неравенств, многогранные множества и неотрицательные матрицы, появляющиеся в курсах линейного программирования и при построении экономических моделей. Этот материал читался автором факультативно.

Поскольку книга адресована первокурсникам, утверждения снабжены подробными доказательствами, и от читателя требуется лишь знание школьного курса математики. Это делает ее также полезной для лиц, желающих самостоятельно познакомиться с основными понятиями линейной алгебры. Для экономии времени при выборе доказательств теорем предпочтение отдавалось вариантам, содержащим алгоритмы, используемые при решении задач на практических занятиях.

Первое издание книги вышло в 2001 году. Второе издание в основном с ним совпадает, однако имеются и небольшие изменения. Многочисленные вопросы и замечания студентов, пользовавшихся учебником, позволили исправить опечатки, а в некоторых местах для лучшего усвоения пришлось изменить текст. В первую и десятую главы внесены некоторые добавления.

В книге использованы общепринятые символы, заменяющие некоторые слова и выражения. Напомним их значение. Символ $\iff$ означает «тогда и только тогда, когда»; формулы $A \Rightarrow B$ и $A \Leftarrow B$ — «из A следует B » и «из B следует A » соответственно. Знак $\&$ означает «и», знак $\vee$ — «или»; запись $\forall x \in V$ следует читать «для каждого x из V », $\exists x \in V$ — «в V существует элемент x », $\exists! x \in V$ — «в V существует единственный элемент x ». Формула вида $\{x \in V \mid P(x)\}$ означает «множество всех таких элементов x из V , которые обладают свойством P », а использованная в этой формуле вертикальная черта $|$ часто заменяет слова «где», «таких, что», «для которых». Множество $\{1, \dots, n\}$ всех натуральных чисел от 1 до n часто будет записываться в виде $\overline{1, n}$, и формула $i \in \overline{1, n}$ означает «для каждого i из $\{1, \dots, n\}$ ». Знак $\square$ показывает конец доказательства или конец примера, а если доказательство отсутствует, то знак указывает на его тривиальность.

Напомним также некоторые термины, связанные с отображениями. Отображение $f: X \rightarrow Y$ множества X в множество Y сопоставляет каждому элементу $x \in X$ единственный элемент $f(x) \in Y$, называемый образом элемента x . Множество X называется областью определения, а множество Y — областью значений отображения f . Если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$, то отображение f называется взаимно однозначным (или вложением, инъекцией). Совокупность $f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X (f(x) = y)\}$ образов всех элементов из X называется образом множества X при отображении f . Если $f(X) = Y$, то говорят, что f отображает X на Y . Функция f в этом случае называется наложением или сюръекцией. Взаимно однозначное наложение f называется биективным (биекцией).

Следует обратить внимание на то, что в книге определения набраны курсивом, утверждения наклонным, вводимые термины рубленым

шрифтом. Ссылки на определения и утверждения и на формулы содержат по три числа, разделенные точками (номер главы, номер параграфа и номер определения, утверждения или формулы). По техническим причинам нумерация определений и утверждений идет независимо, и поэтому тройка чисел, означающая формулу, может совпасть с тройкой чисел, означающей определение или утверждение. Чтобы не было путаницы, в ссылках на формулы соответствующая тройка ставится в скобки. Ссылка на утверждение либо дается без скобок, либо сопровождается словом «смотри», например (см. 2.4.3).

При изложении материала в формулах используются буквы латинского и греческого алфавитов. Последний большинству студентов первого курса не знаком, поэтому ниже приводится список букв этого алфавита и их названия.

A, α альфа	B, β бета	Γ, γ гамма
Δ, δ дельта	E, ε эпсилон	Z, ζ дзета
H, η эта	Θ, θ тета	I, ι йота
K, κ каппа	Λ, λ лямбда	M, μ мю
N, ν ню	Ξ, ξ кси	O, o омикрон
Π, π пи	P, ρ ро	Σ, σ сигма
T, τ тау	Υ, υ ипсилон	Φ, φ фи
X, χ хи	Ψ, ψ пси	Ω, ω омега

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

1.1. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1.1.1. Пусть F — множество, содержащее более одного элемента, на котором определены две бинарные операции, обозначаемые символами $\cdot$ и $+$. Если для любых элементов α, β и γ из F эти операции обладают указанными ниже свойствами F0–F7, то F называется **полем** (как обычно, символ умножения в формулах можно не писать).

F0: $\alpha + \beta \in F, \alpha \cdot \beta \in F$ (замкнутость относительно операций $+$ и $\cdot$);

F1: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (коммутативность);

F2: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (ассоциативность);

F3: $\alpha\beta = \beta\alpha$ (коммутативность);

F4: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ (ассоциативность);

F5: $\alpha(\beta + \gamma) = (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$ (дистрибутивность);

F6: $\forall \alpha, \beta \exists! x \in F (\alpha + x = \beta)$;

F7: $\forall \alpha, \beta (\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists! x \in F (\alpha x = \beta))$; здесь через 0 обозначено решение уравнения $\alpha + x = \alpha$.

Обычно фраза «на множестве определена операция» уже означает замкнутость этого множества относительно указанной операции, и в случае такого понимания слов «определена операция» аксиома F0 является лишней. Однако ее включение в число аксиом, определяющих поле, является полезным напоминанием о необходимости проверки замкнутости заданного множества относительно операций сложения и умножения, а номер этой аксиомы указывает на ее избыточность.

ПРИМЕРЫ. Из определения следует, что множество действительных чисел $\mathbb{R}$ в совокупности с обычными операциями сложения и умножения является полем. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с теми же операциями сложения и умножения — другой пример поля. Множество всех пар действительных чисел вида $(\alpha, 0)$ относительно операций, определяемых формулами

$$(\alpha, 0) + (\beta, 0) = (\alpha + \beta, 0), \quad (\alpha, 0) \cdot (\beta, 0) = (\alpha \cdot \beta, 0),$$

также образует поле. Очевидно, это поле отличается от поля $\mathbb{R}$ только видом записи его элементов. Ввиду этого пару $(\alpha, 0)$ следует считать особой формой записи действительного числа α .

В п. 7 определения 1.1.1 через 0 обозначено решение уравнения $\alpha + x = \alpha$. Можно ожидать, что это решение зависит от α и потому его следует обозначить через 0_α . Докажем, что это не так.

1.1.2. В поле F существует единственный элемент 0, сумма которого с любым $\alpha \in F$ равна α . Этот элемент 0 называется нулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через 0_α , 0_β и γ решения уравнений

$$\alpha + x = \alpha, \quad \beta + x = \beta, \quad x + \alpha = \beta.$$

Прибавляя 0_α к обеим частям равенства $\beta = \gamma + \alpha$, убеждаемся в том, что

$$\beta + 0_\alpha = \gamma + \alpha + 0_\alpha = \gamma + (\alpha + 0_\alpha) = \gamma + \alpha = \beta = \beta + 0_\beta.$$

Таким образом, 0_α совпадает с 0_β для любых элементов α и β из поля F . $\square$

1.1.3. В поле F существует единственный элемент 1, называемый единицей, произведение которого с любым элементом $\alpha \in F$ равно α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно п. 7 определения 1.1.1 уравнение $\alpha x = \alpha$ при $\alpha \neq 0$ имеет единственное решение. Обозначим его через 1_α . Рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве утверждения 1.1.2, показывают, что для любого $\beta \in F$ если $\beta \neq 0$, то $1_\alpha = 1_\beta$. Это означает, что в поле существует только одна единица, которую мы и обозначим символом 1. $\square$

1.1.4. Множество F_1 , элементы которого принадлежат полю F , называется *подполем* поля F , если оно само является полем относительно операций, определенных в F .

ПРИМЕР. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является подполем поля $\mathbb{R}$ действительных чисел. □

1.1.5. Рассмотрим два поля F_1 и F_2 . Операции умножения и сложения первого из них обозначим символами $\cdot$ и $+$, второго — символами $\odot$ и $\oplus$. Поля F_1 и F_2 называются *изоморфными*, если существует такая функция φ , отображающая взаимно однозначно множество F_1 на множество F_2 , что для любых $x, y \in F_1$ справедливы равенства $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$, $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$.

В дальнейшем будут рассматриваться только бесконечные поля, т. е. поля, содержащие бесконечное число элементов.

1.1.6. Определим сложение и умножение упорядоченных пар (α, β) и (γ, δ) действительных чисел следующими формулами:

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta), \quad (\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma).$$

1.1.7. Элементы системы, состоящей из всех упорядоченных пар (α, β) действительных чисел вместе с операциями, определенными в 1.1.6, называются *комплексными числами*.

1.1.8. Два комплексных числа (α, β) и (γ, δ) будем считать *равными* тогда и только тогда, когда $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$.

Для любого числа (α, β) справедливы равенства

$$(\alpha, \beta) + (0, 0) = (\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) + (-\alpha, -\beta) = (0, 0).$$

Это означает, что среди комплексных чисел есть нейтральное относительно сложения число $(0, 0)$, называемое нулем, и что для каждого числа (α, β) есть ему противоположное, образованное парой чисел, противоположных числам α , β , и потому единственное.

Число $(1, 0)$ называется **единицей**, так как $(1, 0) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$ для любого числа (α, β) .

Числом, обратным к (α, β) , называется такое комплексное число x , для которого $(\alpha, \beta)x = (1, 0)$. Пусть $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ и $x = (\gamma, \delta)$, тогда

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 1, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = 0. \quad (1.1.1)$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \delta = \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Поскольку найденное решение является единственным решением системы (1.1.1), то для каждого отличного от нуля комплексного числа имеется только одно к нему обратное.

Определим теперь операции вычитания и деления комплексных чисел.

1.1.9. Чтобы найти **разность** комплексных чисел z_1 и z_2 , над z_1 прибавить число, противоположное z_2 . Чтобы **разделить** z_1 на $z_2 \neq (0, 0)$, следует умножить z_1 на число, обратное z_2 . Операции **вычитания** и **деления** обозначаются обычными символами $-$ и $:$. Частное от деления комплексного числа y на z можно записывать также в виде дроби $\frac{y}{z}$.

1.1.10. Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел относительно введенных операций сложения и умножения образует поле.

Доказательство. Прямой проверкой легко убедиться в том, что введенные операции являются коммутативными, ассоциативными и связанным законом дистрибутивности. Для любых двух комплексных чисел $z_1 = (\alpha, \beta)$ и $z_2 = (\gamma, \delta)$ число $(\gamma - \alpha, \delta - \beta)$ является единственным решением уравнения $z_1 + x = z_2$. Если $z_1 \neq (0, 0)$, то уравнение $z_1 x = z_2$ также имеет единственное решение $z_2 : z_1$. $\square$

1.1.11. Множество всех комплексных чисел вида $(\alpha, 0)$ образует подполе поля $\mathbb{C}$, изоморфное полю $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Доказательство. Утверждение следует из 1.1.4–1.1.6. $\square$

Алгебраические свойства изоморфных полей совершенно одинаковы, такие поля можно считать копиями одного и того же объекта. С учетом сказанного и ввиду 1.1.11 каждую пару $(\alpha, 0)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, будем рассматривать как особую форму записи действительного числа α .

1.2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Комплексное число $(0, 1)$ обычно обозначается буквой i (от фр. *imaginaire* — воображаемый). Оно иногда называется **мнимой единицей**, так как удовлетворяет следующему тождеству:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Из 1.1.6 также легко следует, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\beta \cdot i = (\beta, 0) \cdot (0, 1) = (0, \beta), \quad (\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha + \beta i.$$

1.2.1. Каждое комплексное число (α, β) может быть записано в виде $\alpha + \beta i$. Такая форма записи называется **алгебраической**.

Число $z = \alpha + \beta i$ называется комплексным потому, что оно состоит из двух частей: слагаемого α , называемого **действительной частью**, и (чисто) **мнимой части** βi . Введем две функции, позволяющие у каждого комплексного числа выделять указанные части.

1.2.2. Если $z = \alpha + \beta i$, то $\operatorname{Re} z = \alpha$ и $\operatorname{Im} z = \beta$.

1.2.3. Комплексные числа $z = \alpha + \beta i$ и $\bar{z} = \alpha - \beta i$ называются **(комплексно) сопряженными**. Модулем комплексного числа $z = \alpha + \beta i$ называется неотрицательное число $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Легко проверить, что для любого $z \in \mathbb{C}$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z\bar{z} = |z|^2,$$

следовательно, сумма и произведение сопряженных комплексных чисел всегда являются действительными числами.

1.2.4. а) Комплексное число, записанное в алгебраической форме и заключенное в скобки, и переменная, изображающая комплексное число, называются **арифметическими выражениями**. Если некоторая переменная, например z , изображает комплексное число, то $\bar{z}$, изображающее число, сопряженное к z , является арифметическим выражением. Назовем z и $\bar{z}$ **сопряженными переменными**.

б) Пусть A и B — арифметические выражения, $*$ — один из символов $+$, $-$, $\cdot$, $:$ арифметических операций, тогда $(A * B)$ также называется **арифметическим выражением**.

В соответствии с этим определением арифметическими выражениями являются, например,

$$z, \quad (2 + 3i), \quad (((1 + i) - ((5 - 7i) \cdot x)) \cdot (y + 2)).$$

Если воспользоваться обычными соглашениями о силе операций, то в арифметическом выражении можно не писать многие скобки.

1.2.5. Пусть комплексное число z записано в виде некоторого арифметического выражения. Если все переменные и числа в этом выражении заменить сопряженными, то значением полученного выражения будет $\bar{z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по числу m символов операций в арифметическом выражении.

Пусть $m = 0$. Арифметическим выражением является либо некоторая переменная z , либо $\bar{z}$, либо комплексное число $(\alpha + \beta i)$. Заменяя их комплексно сопряженными, получим $\bar{z}$, $\bar{\bar{z}} = z$ и $(\alpha - \beta i)$ соответственно.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо для любого арифметического выражения, содержащего не более m символов арифметических операций. Докажем, что тогда оно справедливо для любого арифметического выражения W , содержащего $m + 1$ символ операций. Согласно определению 1.2.4 W имеет вид $(A * B)$, где A и B — арифметические выражения, а $*$ — символ некоторой арифметической операции. Очевидно, каждое из выражений A и B содержит не более m символов арифметических операций. Пусть A изображает комплексное число z_1 , а B — число z_2 . Заменяя в A и B все переменные

и числа комплексно сопряженными, получим арифметические выражения $\bar{A}$ и $\bar{B}$, изображающие согласно индуктивному предположению соответственно числа $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$.

Осталось проверить, что $\bar{z}_1 * \bar{z}_2 = \bar{z}$. Поскольку $*$ $\in \{+, -, \cdot, : \}$, то достаточно рассмотреть следующие случаи.

а) Если $*$ $\in \{+, -\}$, то

$$z = z_1 \pm z_2 = (\alpha + \beta i) \pm (\gamma + \delta i) = (\alpha \pm \gamma) + (\beta \pm \delta)i.$$

После замены получим

$$\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = (\alpha - \beta i) \pm (\gamma - \delta i) = (\alpha \pm \gamma) - (\beta \pm \delta)i = \bar{z}.$$

б) Если $*$ — символ умножения, то

$$z = z_1 \cdot z_2 = (\alpha + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i.$$

Заменяя числа сопряженными, получим

$$(\alpha - \beta i) \cdot (\gamma - \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) - (\alpha\delta + \beta\gamma)i = \bar{z}.$$

в) Пусть $*$ есть символ деления, тогда

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i,$$

$$\frac{\alpha - \beta i}{\gamma - \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} - \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i = \bar{z}.$$

□

1.2.6. Из каждого комплексного числа $z = \alpha + \beta i$ можно извлечь квадратный корень.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sqrt{\alpha + \beta i} = x + yi$, тогда

$$\alpha + \beta i = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Приравнявая действительные и мнимые части чисел, находящихся в левой и в правой частях, получим систему уравнений

$$x^2 - y^2 = \alpha, \quad 2xy = \beta.$$

Если $x = 0$ и $y = 0$, то исходное число z равно нулю. Пусть $x \neq 0$, тогда

$$y = \frac{\beta}{2x}, \quad x^2 - \frac{\beta^2}{4x^2} = \alpha, \quad 4x^4 - 4\alpha x^2 - \beta^2 = 0,$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}).$$

По смыслу задачи число x действительное, следовательно, правая часть в последнем равенстве должна быть неотрицательной. Однако

$$x^2 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \leq 0,$$

так как $|2\alpha| \leq \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}$. Учитывая, что $x \neq 0$ по предположению, оставляем только знак плюс:

$$x^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) > 0.$$

Поскольку $y^2 = x^2 - \alpha$, то

$$y^2 = \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \geq 0.$$

Если $\beta = 0$, то z — действительное число и $y = 0$, так как $2xy = \beta = 0$. В этом случае $\sqrt{z} = \pm\sqrt{\alpha}$.

При $\beta \neq 0$ из равенства $2xy = \beta$ следует, что знаки чисел x и y совпадают, если $\beta > 0$, и противоположны, если $\beta < 0$. Получаем два комплексных корня:

$$\sqrt{z} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\beta}{|\beta|} i \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right).$$

Если же $x = 0$ и $y \neq 0$, то равенство $2xy = \beta$ показывает, что $\beta = 0$, следовательно, $yi = \sqrt{\alpha}$ и потому

$$-y^2 = \alpha, \quad \alpha < 0, \quad y = \pm\sqrt{-\alpha}, \quad \sqrt{z} = \pm i\sqrt{-\alpha}. \quad \square$$

1.3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Карл Гаусс предложил следующий способ изображения комплексных чисел точками плоскости. Зафиксируем на плоскости декартову

прямоугольную систему координат. Каждому числу $z \in \mathbb{C}$ сопоставим точку плоскости с абсциссой $\operatorname{Re} z$ и ординатой $\operatorname{Im} z$. Очевидно, такое сопоставление является взаимно однозначным.

1.3.1. *Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами указанным выше способом, называется **комплексной**. Ось абсцисс выбранной системы координат называется **действительной**, так как ее точки отождествляются с действительными числами. На оси ординат располагаются точки, сопоставленные числам вида βi , поэтому ось ординат называется **мнимой**.*

1.3.2. *Система координат, в которой положение точки на плоскости задается расстоянием ρ от нее до начала координат (**полярным радиусом**) и величиной угла φ , на который надо повернуть луч, исходящий из начала координат в некотором фиксированном начальном направлении, для того чтобы точка оказалась на луче (**полярным углом**), называется **полярной**. Угол φ считается **положительным**, если поворот происходит против часовой стрелки, **отрицательным** — в ином случае.*

Очевидно, для любой точки плоскости ее полярный угол φ определен однозначно, так как $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ также является полярным углом этой точки. Если хотят избежать такой неопределенности, то обычно полагают $-\pi < \varphi \leq \pi$ или $0 \leq \varphi < 2\pi$.

1.3.3. Пусть на плоскости заданы одновременно декартова прямоугольная и полярная системы координат, имеющие начало в одной и той же точке, причем начальное положение луча в полярной системе координат совпадает с направлением оси абсцисс декартовой системы координат и единицы масштаба обеих систем одинаковы (рис. 1.1 слева).

а) Пользуясь формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (1.3.1)$$

можно от прямоугольных координат перейти к полярным.

б) Если известны полярные координаты точки, то найти ее прямоугольные координаты можно по формулам

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Доказательство очевидно. $\square$

1.3.4 (Следствие). Каждое комплексное число $x + yi$ может быть записано в виде $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Такая форма записи называется **тригонометрической**. $\square$

Формулы (1.3.1) позволяют переходить от тригонометрической формы записи комплексного числа к алгебраической. Воспользовавшись формулами (1.3.2), можно совершить обратный переход.

1.3.5. Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме: $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Угол φ называется **аргументом** числа z , а множитель ρ согласно 1.2.3 — **модулем** числа z .

ПРИМЕР. Запишем в тригонометрической форме число $z = 4i$. Так как $z = 0 + 4i$, то $|z| = 4$, $\cos \varphi = 0$ и $\sin \varphi = 1$. Видим, что

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right). \quad \square$$

Пусть

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta i, & y &= \gamma + \delta i, \\ z = x + y &= (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i. \end{aligned}$$

Из курса элементарной математики известно, что при сложении векторов с координатами (α, β) и (γ, δ) получается вектор $(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$.

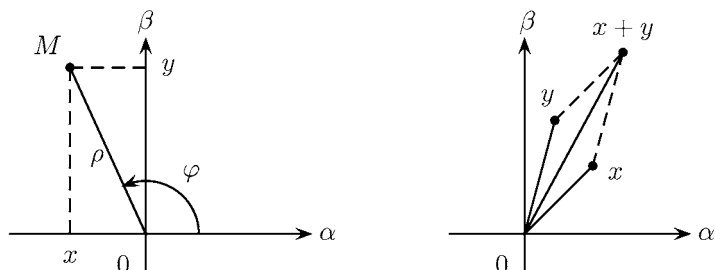


Рис. 1.1

Видим, что на комплексной плоскости для отыскания точки, соответствующей сумме двух комплексных чисел, можно воспользоваться известным правилом параллелограмма (рис. 1.1 справа).

Точка комплексной плоскости, соответствующая числу $-y$, симметрична относительно начала координат точке y . Это позволяет использовать правило параллелограмма при вычитании комплексных чисел (рис. 1.2 слева).

Истолковать геометрический смысл умножения и деления чисел также нетрудно, если перейти к тригонометрической форме записи и воспользоваться следующим утверждением.

1.3.6. При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (рис. 1.2 справа).

Доказательство. Пусть

$$z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &\quad + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad \square \end{aligned}$$

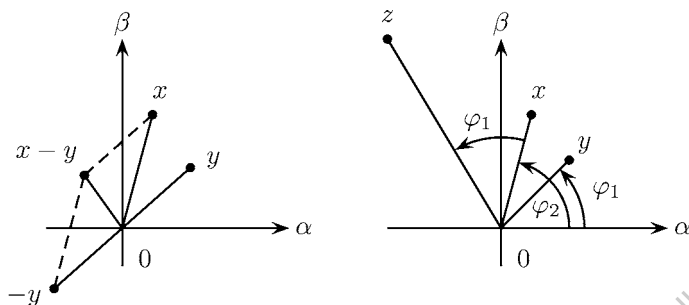


Рис. 1.2

1.3.7. При делении комплексных чисел следует разделить модуль делимого на модуль делителя и вычесть аргумент делителя из аргумента делимого.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если

$$z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

то

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{\rho_2(\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad \square \end{aligned}$$

1.3.8 (Следствие). Если $z \neq 0$ и $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то

$$z^{-1} = \rho^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos 0 + i \sin 0}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \\ &= \rho^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)). \quad \square \end{aligned}$$

1.3.9. Если $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и $n \in \mathbb{R}$ — целое число, то

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если $n = 0$, то $z^n = 1$ по определению, следовательно, утверждение в этом случае верно.

2. Пусть $n > 0$. Воспользуемся индукцией по n . При $n = 1$ утверждение верно, при $n = 2$ его справедливость следует из 1.3.6. Если формула (1.3.3) верна для некоторого $n > 1$, то согласно 1.3.6 она верна и для степени $n + 1$:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z \cdot z^n (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))(\rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)) = \\ &= \rho^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi). \end{aligned}$$

3. При $n < 0$ используем доказанный случай 2 и следствие 1.3.8:

$$\begin{aligned} z^n &= (z^{-n})^{-1} = (\rho^{-n}(\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)))^{-1} = \\ &= \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad \square \end{aligned}$$

1.3.10. Если $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и $n \in \mathbb{N}$, то

$$z^{1/n} = \rho^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (1.3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z^{1/n} = x(\cos y + i \sin y)$, тогда

$$x^n(\cos ny + i \sin ny) = z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и потому

$$x^n = \rho, \quad x = \rho^{1/n}, \quad ny = \varphi + 2\pi k, \quad y = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как при $k = n$ для $z^{1/n}$ получается то же значение, что и при $k = 0$, то справедлива формула (1.3.4). $\square$

Рассмотрим на комплексной плоскости точки, соответствующие корням $u_0, \dots, u_{n-1}$ из комплексного числа z , задаваемым формулами (1.3.4).

Поскольку все эти корни имеют один и тот же модуль $\rho^{1/n}$, а аргумент числа u_i получается из аргумента числа u_{i-1} прибавлением $\frac{2\pi}{n}$, то корни $u_0, \dots, u_{n-1}$ расположены на окружности радиуса $\rho^{1/n}$ с центром в начале координат, и делят ее на n равных частей.

1.3.11 (Следствие). Если $m, n \in \mathbb{N}$, то для любого комплексного числа z , равного $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

$$z^{m/n} = \rho^{m/n} \left(\cos \frac{(\varphi + 2\pi k)m}{n} + i \sin \frac{(\varphi + 2\pi k)m}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad \square$$

1.3.12. Модуль суммы двух комплексных чисел не превосходит суммы модулей этих чисел и не меньше модуля разности модулей тех же чисел:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Доказательство. Пусть $z_k = \rho_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$, $k = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2) + (\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)i, \\ |z_1 + z_2|^2 &= (\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + (\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)^2 = \\ &= \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \rho_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \\ &+ \rho_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2\rho_1 \rho_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \rho_2^2 \sin^2 \varphi_2 = \\ &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Однако

$$-1 \leq \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \leq 1,$$

$$(\rho_1 + \rho_2)^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2, \quad (\rho_1 - \rho_2)^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2,$$

поэтому $(\rho_1 - \rho_2)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (\rho_1 + \rho_2)^2$. Отсюда получаем нужные соотношения

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad \square$$

1.4. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1.4.1. Многочленом над полем F от переменной t называется определенная на F функция вида

$$\alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n, \quad (1.4.1)$$

у которой $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, символы $+$ и $\cdot$ являются символами соответствующих операций поля F , все коэффициенты α_i , $i = \overline{0, n}$ принадлежат F , и если $n > 0$, то $\alpha_0 \neq 0$.

1.4.2. Степенью многочлена (1.4.1) называется число n , слагаемое $\alpha_0 t^n$ — его **старшим членом**, коэффициент α_0 — **старшим коэффициентом**, слагаемое α_n — **свободным (от t) членом**. Степень многочлена P будем обозначать через $\deg P$.

Далее мы будем рассматривать многочлены над полем $\mathbb{C}$ и в отдельных случаях над полем $\mathbb{R}$. Поскольку любое комплексное число α можно записать в виде αt^0 , то отличные от нуля комплексные числа являются многочленами нулевой степени. Число нуль также считается многочленом, однако степень этого особого многочлена, называемого **нулевым**, не определена.

Кроме задания многочлена в форме (1.4.1), называемой **нормальной**, приходится использовать и другие формы записи. Например, из школьного курса математики известно, что многочлен $t^2 + 5t + 6$ может быть записан в виде $(t+2)(t+3)$. Это является другой формой записи многочлена $t^2 + 5t + 6$, поскольку, выполнив умножение и приведя подобные члены, мы приходим к нормальной форме.

1.4.3. Два многочлена считаются равными тогда и только тогда, когда при записи каждого из них в нормальной форме равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной.

Каждый многочлен $P(t) = \alpha_0 t^n + \dots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n$ является функцией, зависящей от одной переменной t , определенной при любом значении этой переменной. Из равенства двух многочленов следует равенство функций, задаваемых этими многочленами. Позже будет доказано, что если функция может быть задана в виде некоторого многочлена, то такой многочлен единственный, т. е. разные многочлены задают разные функции.

1.4.4. Пусть

$$P(t) = \alpha_0 t^m + \dots + \alpha_{m-1} t + \alpha_m,$$

$$Q(t) = \beta_0 t^n + \dots + \beta_{n-1} t + \beta_n$$

— два многочлена. Многочлен

$$R(t) = \gamma_0 t^k + \dots + \gamma_{k-1} t + \gamma_k$$

называется:

а) *суммой* многочленов $P(t)$ и $Q(t)$, если $k \leq \max(m, n)$ и выполнены следующие условия:

1) если $m = n$, то $\gamma_{k-i} = \alpha_{m-i} + \beta_{n-i}$ для $i = \overline{0, k}$ и $\alpha_{m-i} + \beta_{n-i} = 0$ для $m \geq i > k$;

2) если $m > n$, то $k = m$, $\gamma_{k-i} = \alpha_{m-i} + \beta_{n-i}$ для $i = \overline{0, n}$ и $\gamma_{k-i} = \alpha_{m-i}$ при $m \geq i > n$;

3) если $m < n$, то $k = n$, $\gamma_{k-i} = \alpha_{m-i} + \beta_{n-i}$ для $i = \overline{0, m}$ и $\gamma_{k-i} = \beta_{n-i}$ при $n \geq i > m$;

б) *произведением* многочленов $P(t)$ и $Q(t)$, если $k = m + n$ и

$$\gamma_{k-i} = \sum_{j+l=i} \alpha_{m-j} \beta_{n-l};$$

в) *разностью* многочленов $P(t)$ и $Q(t)$, если

$$R(t) = P(t) + (-1)Q(t).$$

Формулы для коэффициентов суммы и произведения многочленов в приведенном определении дают точные значения этих коэффициентов, но являются весьма громоздкими и неудобными в применении. На практике применяются более простые правила, использующие свойства операций с элементами поля. Складывая два многочлена, соединяем их знаком плюс, а затем приводим подобные члены. Умножая многочлен $P(t)$ на многочлен $Q(t)$, умножаем каждый член первого многочлена на каждый член второго и приводим подобные члены.

1.4.5. Степень суммы многочленов не превосходит наибольшей из степеней слагаемых. Если перемножаются ненулевые многочлены, то степень произведения равна сумме степеней сомножителей. Операции сложения и умножения многочленов являются ассоциативными, коммутативными и связаны между собой дистрибутивным законом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанные свойства непосредственно следуют из определения 1.4.4 и свойств комплексных чисел, поскольку операции с многочленами определяются через операции с их коэффициентами, которые являются комплексными числами. $\square$

1.4.6. Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены и $Q \neq 0$. Разделить $P(t)$ на $Q(t)$ с остатком означает представить многочлен $P(t)$ в виде $P(t) = S(t)Q(t) + R(t)$, где S и R — многочлены и либо $R = 0$, либо $\deg R < \deg Q$. Как обычно, будем называть P делимым, Q — делителем, S — частным, R — остатком.

1.4.7. Для любых многочленов P и Q , где $Q \neq 0$, существует такая пара многочленов S и R , что $P(t) = S(t)Q(t) + R(t)$ и либо $R = 0$, либо $\deg R < \deg Q$, причем только одна пара многочленов S и R удовлетворяет указанным условиям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\deg Q = 0$, то Q — число, и потому $S = \frac{1}{Q}P$ и $R = 0$, причем S и R определены однозначно. Будем поэтому считать, что $\deg Q \neq 0$.

1. Предположим, что существуют две такие пары S, R и $\tilde{S}, \tilde{R}$ многочленов, что

$$P(t) = S(t)Q(t) + R(t), \quad P(t) = \tilde{S}(t)Q(t) + \tilde{R}(t).$$

Вычитая второе равенство из первого, получим новое равенство

$$0 = \underbrace{(S(t) - \tilde{S}(t))}_{F(t)} Q(t) + \underbrace{(R(t) - \tilde{R}(t))}_{G(t)},$$

которое кратко записывается в виде

$$FQ + G = 0. \quad (1.4.2)$$

Если $F \neq 0$, то $\deg(FQ) = \deg F + \deg Q \geq m = \deg Q$. Поскольку $\deg R < m$ и $\deg \tilde{R} < m$, то $\deg G < m$. Отсюда следует, что $\deg(FQ + G) \geq m$. Так как $m > 0$, то многочлен $FQ + G$ ненулевой, что противоречит равенству (1.4.2). Это означает, что $F = 0$ и потому $S = \tilde{S}$ и $R = \tilde{R}$.

2. Докажем теперь, что упоминаемые в формулировке теоремы многочлены R и S существуют. Пусть

$$P(t) = \alpha_0 t^n + \dots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n, \quad Q(t) = \beta_0 t^m + \dots + \beta_{m-1} t + \beta_m.$$

Если $n < m$, то $S = 0$, $R = P$, поэтому далее будем рассматривать случай, когда $n \geq m \geq 1$. Деление выполняем по шагам. На первом шаге полагаем

$$P_1(t) = P(t) - \frac{\alpha_0}{\beta_0} t^{n-m} Q(t) = \alpha_0^{(1)} t^{n_1} + \dots + \alpha_{n_1}^{(1)}. \quad (1.4.3)$$

Очевидно, $n_1 = \deg P_1(t) \leq n - 1$. Если $n_1 \geq m = \deg Q$, то пусть

$$P_2(t) = P_1(t) - \frac{\alpha_0^{(1)}}{\beta_0} t^{n_1-m} Q(t) = \alpha_0^{(2)} t^{n_2} + \dots + \alpha_{n_2}^{(2)} \quad (1.4.4)$$

и т. д. Возникает последовательность $P(t), P_1(t), P_2(t), \dots$ многочленов, степени которых убывают: $n > n_1 > n_2 > \dots$. Через конечное число шагов получим многочлен

$$P_k(t) = P_{k-1}(t) - \frac{\alpha_0^{(k-1)}}{\beta_0} t^{n_{k-1}-m} Q(t) = \alpha_0^{(k)} t^{n_k} + \dots + \alpha_{n_k}^{(k)}, \quad (1.4.5)$$

степень которого меньше степени многочлена Q . Складываем равенства (1.4.3), (1.4.4), $\dots$, (1.4.5):

$$\underbrace{P_k(t)}_{R(t)} = P(t) - \underbrace{\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} t^{n-m} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{\beta_0} t^{n_1-m} + \dots + \frac{\alpha_0^{(k-1)}}{\beta_0} t^{n_{k-1}-m} \right)}_{S(t)} Q(t).$$

Очевидно, многочлены S и R удовлетворяют условиям теоремы. $\square$

В доказательстве теоремы 1.4.7 изложен алгоритм деления.

ПРИМЕР. Разделим с остатком многочлен $t^5 + 2t^4 - 3t^3 + t^2 + 2t - 1$ на многочлен $t^2 - 2t - 2$. Деление удобно выполнять по той же схеме, по которой делятся с остатком целые числа:

$$\begin{array}{r|l}
 t^5 + 2t^4 - 3t^3 + t^2 + 2t - 1 & t^2 - 2t - 2 \\
 \hline
 t^5 - 2t^4 - 2t^3 & \underbrace{t^3 + 4t^2 + 7t + 23}_{\text{частное}} \\
 \hline
 4t^4 - t^3 + t^2 + 2t - 1 & \\
 4t^4 - 8t^3 - 8t^2 & \\
 \hline
 7t^3 + 9t^2 + 2t - 1 & \\
 7t^3 - 14t^2 - 14t & \\
 \hline
 23t^2 + 16t - 1 & \\
 23t^2 - 46t - 46 & \\
 \hline
 \underbrace{62t + 45}_{\text{остаток}} &
 \end{array}$$

1.4.8. Если остаток от деления многочлена $P(t)$ на многочлен $Q(t)$ равен нулю, то говорят, что многочлен $P(t)$ **делится** на $Q(t)$, и называют $Q(t)$ **делителем** многочлена $P(t)$.

1.4.9. Если каждый из многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ делится на многочлен $R(t)$, то $R(t)$ называется их **общим делителем**.

1.4.10. **Наибольшим общим делителем** многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ называется такой их общий делитель, который делится на любой другой общий делитель этих многочленов.

1.4.11 (Алгоритм Евклида). Чтобы найти наибольший общий делитель многочленов $P(t)$ и $Q(t)$, следует разделить $P(t)$ на $Q(t)$ и найти остаток $R_1(t)$. Если остаток не равен нулю, то следует разделить $Q(t)$ на $R_1(t)$ и найти остаток $R_2(t)$. Если остаток не равен нулю, то следует разделить $R_1(t)$ на $R_2(t)$ и найти остаток $R_3(t)$ и т. д. Поскольку степени делителей понижаются, на каком-то шаге очередной остаток $R_k(t)$ окажется равным нулю. Наибольшим общим делителем многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ является остаток $R_{k-1}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим частное от деления на i -м шаге через $S_i(t)$. Следуя предписаниям алгоритма, получим следующие равенства:

[illegible]

2. Замечание 1 показывает, что в процессе вычислений по алгоритму Евклида получаемые остатки можно умножать на не равные нулю константы.

ПРИМЕР. Найдём наибольший общий делитель многочленов

$$P(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6, \quad Q(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8.$$

Воспользовавшись алгоритмом Евклида, получаем следующие равенства:

$$P(t) = (t^3 - 6t^2 + 12t - 8) \cdot 1 + (-t + 2),$$

$$Q(t) = (-t + 2)(-t^2 + 4t - 4) + 0.$$

Многочлен $(t - 2)$ является наибольшим общим делителем. $\square$

Теперь будем рассматривать многочлен $P(t)$ и как функцию от переменной t . Если

$$P(t) = \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n,$$

то, как обычно, его значением при $t = \gamma$ назовём число

$$P(\gamma) = \alpha_0 \gamma^n + \alpha_1 \gamma^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \gamma + \alpha_n.$$

1.4.12. Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется **корнем** многочлена $P(t)$, если $P(\alpha) = 0$.

1.4.13 (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P(t)$ на двучлен $t - \alpha$ равен $P(\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$P(t) = S(t)(t - \alpha) + R(t). \quad (1.4.7)$$

Так как $\deg(t - \alpha) = 1$, то либо $\deg R = 0$, либо $R = 0$. Это означает, что R — число. Подставляя α в (1.4.7), получим $P(\alpha) = R$. $\square$

1.4.14 (Следствие). Число α является корнем многочлена $P(t)$ тогда и только тогда, когда $P(t)$ делится на $t - \alpha$ нацело. $\square$

1.4.15 (Теорема о существовании корня многочлена). Каждый многочлен с комплексными коэффициентами, степень которого больше нуля, имеет комплексный корень.

Доказательство. Ввиду большого объема мы его опустим. $\square$

Утверждение 1.4.15 часто называют основной теоремой высшей алгебры.

Деление некоторого многочлена на многочлен первой степени можно производить намного быстрее, если воспользоваться следующими соображениями.

Разделим с остатком многочлен $P(t)$ на $t - \gamma$:

$$P(t) = (t - \gamma)Q(t) + P(\gamma).$$

Пусть

$$P(t) = \alpha_0 t^m + \dots + \alpha_{m-1} t + \alpha_m,$$

$$Q(t) = \beta_0 t^{m-1} + \dots + \beta_{m-2} t + \beta_{m-1},$$

тогда

$$\begin{aligned} \alpha_0 t^m + \dots + \alpha_{m-1} t + \alpha_m &= \\ &= (t - \gamma)(\beta_0 t^{m-1} + \dots + \beta_{m-2} t + \beta_{m-1}) = \\ &= \beta_0 t^m + (\beta_1 - \gamma\beta_0)t^{m-1} + (\beta_2 - \gamma\beta_1)t^{m-2} + \dots \\ &\quad \dots + (\beta_{m-1} - \gamma\beta_{m-2})t + (P(\gamma) - \gamma\beta_{m-1}). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной t первого и последнего многочленов и преобразуем полученные равенства:

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = \beta_0, & \beta_0 = \alpha_0, \\ \alpha_1 = \beta_1 - \gamma\beta_0, & \beta_1 = \gamma\beta_0 + \alpha_1, \\ \alpha_2 = \beta_2 - \gamma\beta_1, & \beta_2 = \gamma\beta_1 + \alpha_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_{m-1} = \beta_{m-1} - \gamma\beta_{m-2}, & \beta_{m-1} = \gamma\beta_{m-2} + \alpha_{m-1}, \\ \alpha_m = P(\gamma) - \gamma\beta_{m-1}, & P(\gamma) = \gamma\beta_{m-1} + \alpha_m. \end{array}$$

Таблица 1.1

	α_0	α_1	α_2	$\dots$	α_{m-1}	α_m
γ	$\alpha_0 =$ $= \beta_0$	$\gamma\beta_0 + \alpha_1 =$ $= \beta_1$	$\gamma\beta_1 + \alpha_2 =$ $= \beta_2$	$\dots$	$\gamma\beta_{m-2} + \alpha_{m-1} =$ $= \beta_{m-1}$	$\gamma\beta_{m-1} + \alpha_m =$ $= P(\gamma)$

Результаты промежуточных вычислений удобно располагать в виде таблицы 1.1.

Приведенный способ деления многочлена $P(t)$ на двучлен $t - \gamma$ называется **методом Горнера**. $\square$

ПРИМЕР. Следующая таблица 1.2 показывает, что значение многочлена $3t^5 + 7t^4 + 4t^3 + 5t^2 + 4t + 8$ при $t = -2$ равно 4.

Таблица 1.2

	3	7	4	5	4	8
-2	3	1	2	1	2	4

1.4.16. Каждый многочлен P ненулевой степени с комплексными коэффициентами может быть представлен в виде произведения своего старшего коэффициента и многочленов первой степени, т. е. может быть разложен на линейные множители.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$P(t) = \alpha_0 t^n + \dots + \alpha_n, \quad \alpha_0 \neq 0, \quad n > 0.$$

Согласно 1.4.15 найдется такое $\gamma_1 \in \mathbb{C}$, что $P(\gamma_1) = 0$. По теореме 1.4.14 отсюда следует, что $P(t) = S_1(t)(t - \gamma_1)$. Очевидно, $\deg S_1 = n - 1$, а его старший член равен $\alpha_0 t^{n-1}$. Если $n - 1 > 0$, то ввиду утверждения 1.4.15 найдется такое $\gamma_2 \in \mathbb{C}$, что

$$S_1(\gamma_2) = 0, \quad S_1(t) = S_2(t)(t - \gamma_2), \\ \deg S_2 = n - 2, \quad P(t) = S_2(t)(t - \gamma_1)(t - \gamma_2).$$

Если $n - 2 > 0$, то найдется корень γ_3 многочлена S_2 и т. д. Через n шагов получим многочлен нулевой степени $S_n = \alpha_0$, и процесс

оборвется. Многочлен $P(t)$ представлен в виде

$$P(t) = \alpha_0(t - \gamma_1)(t - \gamma_2) \cdots (t - \gamma_n). \quad \square$$

Запишем последнее равенство компактнее, собирая сомножители с совпадающими корнями:

$$P(t) = \alpha_0(t - \beta_1)^{k_1}(t - \beta_2)^{k_2} \cdots (t - \beta_s)^{k_s}, \quad (1.4.8)$$

здесь $i \neq j \Rightarrow \beta_i \neq \beta_j$ и $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n = \deg P$. В следующем утверждении предполагается, что отдельными сомножителями в (1.4.8) являются число α_0 и многочлены $(t - \beta_i)^{k_i}$, $i = \overline{1, s}$.

1.4.17. Разложение (1.4.8) определено однозначно с точностью до порядка сомножителей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется еще одно разложение

$$P(t) = \alpha_0(t - \delta_1)^{m_1}(t - \delta_2)^{m_2} \cdots (t - \delta_r)^{m_r}. \quad (1.4.9)$$

Докажем, что

$$\text{а) } \{\delta_1, \dots, \delta_r\} = \{\beta_1, \dots, \beta_s\};$$

$$\text{б) } \delta_i = \beta_j \Rightarrow m_i = k_j.$$

а) Из (1.4.9) следует, что $P(\delta_i) = 0$ для любого $i \in \{1, \dots, r\}$. Если $\delta_j \notin \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ для какого-то $j \in \{1, \dots, r\}$, то, полагая $t = \delta_j$ в (1.4.8), увидим, что

$$P(\delta_j) = \alpha_0(\delta_j - \beta_1)^{k_1}(\delta_j - \beta_2)^{k_2} \cdots (\delta_j - \beta_s)^{k_s} \neq 0,$$

что невозможно. Это означает, что $\{\delta_1, \dots, \delta_r\} \subseteq \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. Аналогично доказывается, что $\{\delta_1, \dots, \delta_r\} \supseteq \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$, следовательно, $\{\delta_1, \dots, \delta_r\} = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ и $s = r$.

б) Поскольку $\{\delta_1, \dots, \delta_r\} = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$, то, перемещая сомножители в (1.4.9), получим разложение

$$P(t) = \alpha_0(t - \beta_1)^{l_1}(t - \beta_2)^{l_2} \cdots (t - \beta_s)^{l_s}. \quad (1.4.10)$$

Сравним его с (1.4.8) и докажем, что $l_i = k_i$ для любого i .

Предположим, что $l_i > k_i$. Разделим правые части в (1.4.10) и в (1.4.8) на $(t - \beta_i)^{k_i}$. Пусть S_1 и S_2 — частные:

$$P(t) = S_1(t)(t - \beta_i)^{k_i}, \quad P(t) = S_2(t)(t - \beta_i)^{k_i}.$$

По теореме 1.4.7 $S_1 = S_2$. Однако $S_1(\beta_i) = 0$, а $S_2(\beta_i) \neq 0$, так как $t - \beta_i$ в разложение многочлена $S_2(t)$ на линейные множители не входит. Возникшее противоречие доказывает, что $l_i \leq k_i$. Аналогично доказывается, что $l_i \geq k_i$. Это означает, что $k_i = l_i$. $\square$

Из единственности разложения (1.4.8) следует, что показатель степени, с которым бином $t - \beta_i$ входит в разложение (1.4.8) многочлена P , однозначно определен многочленом и является некоторой характеристикой корня.

1.4.18. Число α называется *корнем кратности k* многочлена $P(t)$, если $P(t)$ делится на $(t - \alpha)^k$ и не делится на $(t - \alpha)^{k+1}$. Корень многочлена, имеющий кратность $k > 1$, называется *k -кратным*. Корень кратности 1 называется *простым*.

ПРИМЕР. Пользуясь методом Горнера, найдем кратность корня 1 многочлена $t^5 - 7t^4 + 17t^3 - 19t^2 + 10t - 2$. Разделим многочлен на двучлен

Таблица 1.3

	1	-7	17	-19	10	2
1	1	-6	11	-8	2	0
1	1	-5	6	-2	0	—
1	1	-4	2	0	—	—
1	1	-3	-1	—	—	—

$t - 1$, частное снова разделим на двучлен и т. д. Деления закончим, как только получим отличный от нуля остаток. Получим таблицу 1.3. Три первых деления дали в остатке нуль, поэтому кратность корня равна трем. $\square$

1.4.19. Каждый многочлен над полем комплексных чисел, степень которого равна $n > 0$, имеет n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует непосредственно из 1.4.18 и 1.4.17. $\square$

1.4.20. Пусть степени многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ не превосходят некоторого числа $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Если значения этих многочленов совпадают более чем при n различных значениях переменной, то и сами многочлены совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P \neq Q$. Пусть $P(t) - Q(t) = R(t)$, $\deg R = s$. Очевидно, $s \leq n$. Если $s = 0$, то R — отличная от нуля константа, и значения многочленов ни при каких значениях переменной не совпадают, что противоречит условию. Если же $s \neq 0$, то многочлен $R(t)$ имеет более n корней, хотя его степень меньше либо равна n . Это противоречит утверждению 1.4.19. $\square$

1.4.21. Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ — два многочлена над одним и тем же полем F . Равенство $P(t) = Q(t)$ справедливо для любого $t \in F$ тогда и только тогда, когда многочлены P и Q равны в смысле определения 1.4.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, если многочлены $P(t)$ и $Q(t)$ равны в смысле определения 1.4.3, то они равны и как функции. Докажем, что если хотя бы при одной степени переменной t коэффициенты у этих многочленов различны, то различны и определяемые этими многочленами функции. Предположим, что это не так, т. е. что канонические записи многочленов не совпадают, однако $P(t) = Q(t)$ для каждого t . Положим $P(t) - Q(t) = R(t)$.

Пусть $\deg R = s \geq 1$, $R(t) = \alpha_0 t^s + \dots + \alpha_s$. Согласно сделанному предположению значение многочлена $R(t)$ равно нулю для каждого t . Это означает, что число корней многочлена R превышает s , что противоречит утверждению 1.4.19.

Остаются две возможности: либо $s = 0$ и многочлен R является отличной от нуля константой, либо степень многочлена R не определена и R является нулевым многочленом. Первый случай невозможен, так как $R(t) = 0$ для любого t . Видим, что R является нулевым многочленом, и потому P равен многочлену Q в смысле определения 1.4.3. $\square$

1.4.22. Если $\beta \in \mathbb{C}$ является корнем многочлена $P(t) = \alpha_0 t^n + \dots + \alpha_n$ над $\mathbb{R}$, то $\bar{\beta}$ также является корнем многочлена $P(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $P(\beta) = 0$, то

$$\alpha_0 \beta^n + \alpha_1 \beta^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0.$$

Левая часть этого равенства является арифметическим выражением. Переходя к комплексно сопряженным числам и учитывая, что $\overline{\alpha_i} = \alpha_i$, $i = \overline{0, n}$, и $\bar{0} = 0$, получим равенство

$$\alpha_0 \bar{\beta}^n + \alpha_1 \bar{\beta}^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0,$$

означающее, что $\bar{\beta}$ также является корнем многочлена $P(t)$. $\square$

1.4.23. Корни α и $\bar{\alpha}$ многочлена $P(t)$ с действительными коэффициентами всегда имеют одну и ту же кратность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть эти корни имеют кратности k и l соответственно, $k > l$ и $Q(t) = (t - \alpha)(t - \bar{\alpha})$. Тогда P делится на Q^l :

$$P(t) = (Q(t))^l S(t).$$

Если $\alpha = \beta + \gamma i$, то

$$\begin{aligned} Q(t) &= (t - (\beta + \gamma i))(t - (\beta - \gamma i)) = \\ &= ((t - \beta) - \gamma i)((t - \beta) + \gamma i) = t^2 - 2\beta t + \beta^2 + \gamma^2. \end{aligned}$$

Многочлены P и Q^l имеют действительные коэффициенты. Приведенный в доказательстве утверждения 1.4.7 алгоритм деления показывает, что S также имеет действительные коэффициенты. При $k > l$ многочлен S делится на $t - \alpha$ и не делится на $t - \bar{\alpha}$, т. е. для него α является корнем, а $\bar{\alpha}$ нет. Противоречие с 1.4.22. $\square$

1.4.24 (Следствие). Комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены. $\square$

1.4.25. Каждый многочлен $P(t)$ с действительными коэффициентами представим единственным способом (с точностью до порядка сомножителей) в виде произведения своего старшего коэффициента и нескольких многочленов над $\mathbb{R}$: линейных — вида $t - \alpha$, соответствующих его действительным корням; и квадратных — вида $t^2 - (\alpha + \bar{\alpha})t + \alpha\bar{\alpha}$, соответствующих парам сопряженных комплексных корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о линейных множителях легко следует из 1.4.14 и 1.4.16. Пусть $\alpha \notin \mathbb{R}$, $\alpha = \beta + \gamma i$. Если $P(\alpha) = 0$, то и $P(\bar{\alpha}) = 0$. Как показано в 1.4.23, в этом случае $P(t)$ делится на $t^2 - 2\beta t + \beta^2 + \gamma^2$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, соответствующий паре корней α и $\bar{\alpha}$ многочлена P , и потому утверждение следует из 1.4.16 и 1.4.24. $\square$

1.4.26. Многочлен над полем P называется **неприводимым**, если его нельзя представить в виде произведения многочленов меньшей степени с коэффициентами из этого поля.

Утверждение 1.4.25 и это определение позволяют сделать следующее заключение.

1.4.27. Каждый многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов, неприводимых над $\mathbb{R}$ и имеющих степень, не превосходящую двух. $\square$

1.5. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1.5.1. Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены над полем F и M — такое множество элементов из поля F , что многочлен $Q(t)$ не равен нулю ни для какого $t \in M$. Определенная на M функция $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ называется **дробно-рациональной**. Дробь $\frac{P(t)}{Q(t)}$ называется **рациональной**.

1.5.2. Если все коэффициенты многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ действительные, то рациональная дробь $\frac{P(t)}{Q(t)}$ называется **действительной**.

1.5.3. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень ее числителя меньше степени знаменателя. Нулевой многочлен также удобно считать правильной дробью.

1.5.4 (Лемма). Если α — корень кратности k многочлена $Q(t)$ и $\alpha \notin \mathbb{R}$, то действительную правильную дробь $\frac{P(t)}{Q(t)}$ можно разложить в сумму двух действительных правильных дробей следующим образом:

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{\beta t + \gamma}{(t^2 - (\alpha + \bar{\alpha})t - \alpha\bar{\alpha})^k} + \frac{R(t)}{(t - \alpha)^{k-1}(t - \bar{\alpha})^{k-1}S(t)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если многочлен $P(t)$ нулевой, то можно взять нулевой многочлен $R(t)$ и положить $\beta = \gamma = 0$. Рассмотрим иной случай. Поскольку α — корень кратности k , многочлен $Q(t)$ делится на произведение $(t - \alpha)^k(t - \bar{\alpha})^k$, представляющее собой многочлен с действительными коэффициентами. Обозначим через $S(t)$ частное от деления, также имеющее действительные коэффициенты и рассмотрим многочлен

$$F(t) = \frac{P(\bar{\alpha})}{S(\bar{\alpha})(\bar{\alpha} - \alpha)}(t - \alpha) - \frac{P(\alpha)}{S(\alpha)(\bar{\alpha} - \alpha)}(t - \bar{\alpha}).$$

Отметим, что α и $\bar{\alpha}$ не являются корнями многочлена $S(t)$. Докажем, что многочлен $F(t)$ имеет действительные коэффициенты. Преобразуем разность:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{P(\bar{\alpha})S(\alpha)(t - \alpha) - P(\alpha)S(\bar{\alpha})(t - \bar{\alpha})}{S(\alpha)S(\bar{\alpha})(\bar{\alpha} - \alpha)} = \\ &= \frac{(P(\bar{\alpha})S(\alpha) - P(\alpha)S(\bar{\alpha}))t + (P(\alpha)S(\bar{\alpha})\bar{\alpha} - P(\bar{\alpha})S(\alpha)\alpha)}{S(\alpha)S(\bar{\alpha})(\bar{\alpha} - \alpha)}. \end{aligned}$$

Выражения

$$P(\bar{\alpha})S(\alpha), \quad P(\alpha)S(\bar{\alpha})\bar{\alpha}, \quad S(\alpha), \quad \bar{\alpha}$$

являются арифметическими. Если

$$P(\bar{\alpha})S(\alpha) = \varphi, \quad P(\alpha)S(\bar{\alpha})\bar{\alpha} = \psi, \quad S(\alpha) = \delta,$$

то, переходя к комплексно сопряженным числам и учитывая, что коэффициенты многочленов P и S действительные, убеждаемся в справедливости равенств

$$P(\alpha)S(\bar{\alpha}) = \bar{\varphi}, \quad P(\bar{\alpha})S(\alpha)\alpha = \bar{\psi}, \quad S(\bar{\alpha}) = \bar{\delta},$$

$$F(t) = \frac{(\varphi - \bar{\varphi})t + (\psi - \bar{\psi})}{\delta\bar{\delta}(\bar{\alpha} - \alpha)}. \quad (1.5.1)$$

Разности

$$\varphi - \bar{\varphi}, \quad \psi - \bar{\psi}, \quad \bar{\alpha} - \alpha$$

комплексно сопряженных чисел являются числами чисто мнимыми, а произведение $\delta\bar{\delta}$ — действительное число. Введем обозначения

$$\varphi - \bar{\varphi} = \tau i, \quad \psi - \bar{\psi} = \zeta i, \quad \bar{\alpha} - \alpha = \sigma i, \quad \delta\bar{\delta} = \omega$$

и вынесем в правой части равенства 1.5.1 число i за скобки, получим

$$F(t) = \frac{(\tau i)t + \zeta i}{\omega \sigma i} = \frac{(\tau t + \zeta)i}{(\omega \sigma)i} = \frac{\tau t + \zeta}{\omega \sigma}; \quad (1.5.2)$$

в последней дроби в числителе и знаменателе все числа действительные.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \frac{P(t)}{Q(t)} - \frac{P(t) - F(t)S(t)}{Q(t)} &= \frac{F(t)S(t)}{Q(t)} = \\ &= \frac{F(t)S(t)}{(t - \alpha)^k(t - \bar{\alpha})^k S(t)} = \frac{F(t)}{(t - \alpha)^k(t - \bar{\alpha})^k}. \end{aligned}$$

Полагая в (1.5.2)

$$\frac{\tau}{\omega \sigma} = \beta, \quad \frac{\zeta}{\omega \sigma} = \gamma,$$

получаем одну из требующихся дробей:

$$\frac{P(t)}{Q(t)} - \frac{P(t) - F(t)S(t)}{Q(t)} = \frac{\beta t + \gamma}{(t^2 - (\alpha + \bar{\alpha})t + \alpha\bar{\alpha})^k}.$$

Легко заметить, что

$$F(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{S(\alpha)}, \quad F(\bar{\alpha}) = \frac{P(\bar{\alpha})}{S(\bar{\alpha})},$$

и, следовательно,

$$F(\alpha)S(\alpha) = P(\alpha), \quad F(\bar{\alpha})S(\bar{\alpha}) = P(\bar{\alpha}).$$

Это означает, что и α , и $\bar{\alpha}$ являются корнями многочлена $P(t) - F(t)S(t)$ и этот многочлен делится на произведение

$$(t - \alpha)(t - \bar{\alpha}) = t^2 - (\alpha + \bar{\alpha})t + \alpha\bar{\alpha},$$

причем частное $R(t)$ является многочленом с действительными коэффициентами. Поскольку

$$Q(t) = (t - \alpha)^k(t - \bar{\alpha})^k S(t),$$

получаем вторую нужную дробь:

$$\begin{aligned} \frac{P(t) - F(t)S(t)}{Q(t)} &= \frac{P(t) - F(t)S(t)}{(t - \alpha)^k(t - \bar{\alpha})^k S(t)} = \\ &= \frac{R(t)}{(t - \alpha)^{k-1}(t - \bar{\alpha})^{k-1} S(t)} = \frac{R(t)}{(t^2 - (\alpha + \bar{\alpha})t + \alpha\bar{\alpha})^{k-1} S(t)}. \quad \square \end{aligned}$$

1.5.5 (Лемма). Если α — действительный корень кратности k многочлена $Q(t)$, то действительную правильную дробь $\frac{P(t)}{Q(t)}$ можно разложить в сумму двух действительных правильных дробей следующим образом:

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{\gamma}{(t - \alpha)^k} + \frac{R(t)}{(t - \alpha)^{k-1} S(t)}.$$

Доказательство. Поскольку α — корень кратности k , многочлен $Q(t)$ делится на $(t - \alpha)^k$. Обозначая через $S(t)$ частное, имеющее действительные коэффициенты, видим, что

$$\frac{P(t)}{Q(t)} - \frac{\gamma}{(t - \alpha)^k} = \frac{P(t)}{(t - \alpha)^k S(t)} - \frac{\gamma}{(t - \alpha)^k} = \frac{P(t) - \gamma S(t)}{(t - \alpha)^k S(t)}.$$

Дробь справа правильная, так как степени многочленов P и S меньше степени многочлена Q .

Осталось подобрать такое число γ , чтобы эта дробь приняла вид

$$\frac{R(t)}{(t - \alpha)^{k-1} S(t)}.$$

Необходимо понизить степень многочлена $(t - \alpha)^k$. Это означает, что α должна быть корнем многочлена $P(t) - \gamma S(t)$, то есть должно выполняться равенство $P(\alpha) - \gamma S(\alpha) = 0$. Отсюда получаем $\gamma = \frac{P(\alpha)}{S(\alpha)}$.

Поскольку α — корень многочлена

$$P(t) - \frac{P(\alpha)}{S(\alpha)}S(t),$$

этот многочлен делится на $t - \alpha$. Обозначая частное через $R(t)$, получим требуемую дробь:

$$\frac{P(t) - \frac{P(\alpha)}{S(\alpha)}S(t)}{(t - \alpha)^k S(t)} = \frac{(t - \alpha)R(t)}{(t - \alpha)^k S(t)} = \frac{R(t)}{(t - \alpha)^{k-1} S(t)}. \quad \square$$

1.5.6 (Лемма). Если знаменатель действительной правильной дроби $\frac{P(t)}{Q(t)}$ имеет действительный корень α кратности k , то дробь можно представить в виде суммы

$$\frac{\gamma_1}{(t - \alpha)^k} + \frac{\gamma_2}{(t - \alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{\gamma_k}{t - \alpha} + \frac{R(t)}{S(t)},$$

в которой все дроби правильные и действительные.

Доказательство. Согласно 1.5.5 справедливо равенство

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{\gamma_1}{(t - \alpha)^k} + \frac{R_1(t)}{(t - \alpha)^{k-1} S(t)}, \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}.$$

Дробь

$$\frac{R_1(t)}{(t - \alpha)^{k-1} S(t)}$$

также удовлетворяет условиям утверждения 1.5.5, поэтому

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{\gamma_1}{(t - \alpha)^k} + \frac{\gamma_2}{(t - \alpha)^{k-1}} + \frac{R_2(t)}{(t - \alpha)^{k-2} S(t)}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Продолжая этот процесс, на шаге k получим нужное разложение. $\square$

1.5.7 (Лемма). Если знаменатель действительной правильной дроби $\frac{P(t)}{Q(t)}$ имеет корень $\alpha \notin \mathbb{R}$ кратности k , то дробь можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_1 t + \gamma_1}{(t^2 - (\alpha + \bar{\alpha})t + \alpha\bar{\alpha})^k} + \frac{\beta_2 t + \gamma_2}{(t^2 - (\alpha + \bar{\alpha})t + \alpha\bar{\alpha})^{k-1}} + \dots \\ & \dots + \frac{\beta_k t + \gamma_k}{t^2 - (\alpha + \bar{\alpha})t + \alpha\bar{\alpha}} + \frac{R(t)}{S(t)}, \end{aligned}$$

в которой все дроби правильные и действительные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 1.5.6.

1.5.8. Дробь $\frac{P(t)}{(Q(t))^k}$ называется простейшей, если многочлен Q имеет старший коэффициент, равный единице, и неприводим над полем F , а степень многочлена P меньше степени многочлена Q .

Напомним, что с точностью до постоянного множителя неприводимыми над полем комплексных чисел являются многочлены вида $t - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, а над полем действительных чисел многочлены вида $t - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и многочлены вида $t^2 + \beta t + \gamma$, у которых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и $\beta^2 + 4\gamma < 0$.

1.5.9. Каждая действительная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена с действительными коэффициентами и действительных простейших дробей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разделив числитель рациональной дроби $\frac{P(t)}{Q(t)}$ на знаменатель, получим частное $U(t)$ и остаток $P_1(t)$, имеющие действительные коэффициенты. Очевидно,

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = U(t) + \frac{P_1(t)}{Q(t)},$$

причем дробь $\frac{P_1(t)}{Q(t)}$ правильная. Если у многочлена $Q(t)$ есть действительные корни, то согласно 1.5.5 эту дробь можно разложить в сумму

$$\frac{\gamma_{11}}{(t - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{\gamma_{12}}{(t - \alpha_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{\gamma_{1k_1}}{t - \alpha_1} + \frac{R_1(t)}{Q_1(t)}, \quad \gamma_1, \dots, \gamma_{k_1} \in \mathbb{R},$$

в которой α_1 — действительный корень многочлена $Q(t)$, имеющий кратность k_1 . Рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 1.5.5, показывают, что $Q_1(t)$ — частное от деления многочлена $Q(t)$ на $(t - \alpha_1)^{k_1}$, поэтому отличные от α_1 корни многочленов $Q(t)$ и $Q_1(t)$ и их кратности совпадают.

Дробь $\frac{R_1(t)}{Q_1(t)}$ правильная. Она разлагается в сумму

$$\frac{\gamma_{21}}{(t - \alpha_2)^{k_2}} + \frac{\gamma_{22}}{(t - \alpha_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{\gamma_{2k_2}}{t - \alpha_2} + \frac{R_2(t)}{Q_2(t)}, \quad \gamma_2, \dots, \gamma_{k_2} \in F,$$

в которой α_2 — действительный корень многочлена $Q_1(t)$, имеющий кратность k_2 . Продолжая этот процесс, придем к равенству

$$\frac{P_1(t)}{Q(t)} = U(t) + \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_{ij}}{(t - \alpha_i)^{k_j}} + \frac{R_m(t)}{Q_m(t)}.$$

Если степень многочлена $Q_m(t)$ больше нуля, то он имеет комплексные корни

$$\alpha_{m+1}, \bar{\alpha}_{m+1}, \dots, \alpha_{m+s}, \bar{\alpha}_{m+s},$$

имеющие кратности $k_{m+1}, \dots, k_{m+s}$. Рассуждая, как и выше, но используя лемму 1.5.5, приходим к равенству

$$\frac{R_m(t)}{Q_m(t)} = \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{i=m+1}^{m+s} \frac{\beta_{ij}t + \gamma_{ij}}{(t^2 - (\alpha_i + \bar{\alpha}_i)t - \alpha_i\bar{\alpha}_i)^k}.$$

Получаем требуемое разложение

$$\begin{aligned} \frac{R(t)}{Q(t)} &= U(t) + \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_{ij}}{(t - \alpha_i)^{k_j}} + \\ &+ \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{i=m+1}^{m+s} \frac{\beta_{ij}t + \gamma_{ij}}{(t^2 - (\alpha_i + \bar{\alpha}_i)t - \alpha_i\bar{\alpha}_i)^k}. \end{aligned} \quad \square$$

Для многочленов над полем $\mathbb{C}$ аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

1.5.10. Каждая рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и простейших дробей:

$$\frac{R(t)}{Q(t)} = U(t) + \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_{ij}}{(t - \alpha_i)^{k_j}}. \quad \square$$

ПРИМЕР. Разложим дробь

$$\frac{15x^3 + 35x^2 - 4x + 2}{2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3} \quad (1.5.3)$$

в сумму простейших дробей. Так как

$$2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3 = (2x^2 + 1)(x - 1)(x + 3),$$

разложение должно выглядеть следующим образом:

$$\frac{15x^3 + 35x^2 - 4x + 2}{2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3} = \frac{\alpha x + \beta}{2x^2 + 1} + \frac{\gamma}{x - 1} + \frac{\delta}{x + 3}.$$

Просуммируем дроби в правой части:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha x + \beta}{2x^2 + 1} + \frac{\gamma}{x - 1} + \frac{\delta}{x + 3} = \\ & = \frac{(\alpha + 2\gamma + 2\delta)x^3 + (2\alpha + \beta + 6\gamma - 2\delta)x^2 + (-3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta)x + (-3\beta + 3\gamma - \delta)}{2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3} \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Знаменатель дроби в правой части равенства 1.5.4 совпадает со знаменателем равной ей дроби 1.5.3, поэтому и числители совпадают:

$$\begin{aligned} 15x^3 + 35x^2 - 4x + 2 &= \\ &= (\alpha + 2\gamma + 2\delta)x^3 + (2\alpha + \beta + 6\gamma - 2\delta)x^2 + \\ &+ (-3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta)x + (-3\beta + 3\gamma - \delta). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma + 2\delta = 15, \\ 2\alpha + \beta + 6\gamma - 2\delta = 35, \\ -3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = -4, \\ -3\beta + 3\gamma - \delta = 2. \end{cases}$$

Решаем эту систему.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 2 & 15 \\ 2 & 1 & 6 & -2 & 35 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 15 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 7 & 41 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 19 & 31 \\ 0 & 0 & 9 & -19 & 17 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -32 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & -56 & -47 \\ 0 & 0 & 3 & 19 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-76} & -76 \end{array} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Видим, что $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\delta = 1$, и потому

$$\frac{15x^3 + 35x^2 - 4x + 2}{2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3} = \frac{5x + 3}{2x^2 + 1} + \frac{4}{x - 1} + \frac{1}{x + 3}. \quad \square$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

В связи с тем, что решение многих задач с векторами сводится к построению и решению системы линейных уравнений, полезно сначала изложить способ решения систем линейных уравнений, обычно называемый **методом исключения неизвестных** или **методом Гаусса–Жордана**.

[illegible]

Будем предполагать, что все коэффициенты и значения неизвестных принадлежат некоторому фиксированному полю F . Если $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$, то система называется **однородной**, в противном случае — **неоднородной**. Если число неизвестных равно числу уравнений, то система называется **квадратной**. **Несовместной** называется система линейных уравнений, не имеющая решений. Если же система имеет одно или несколько решений, то она называется **совместной**.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{sj} x_j = \beta_s, \quad (2.1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{rj} x_j = \beta_r. \quad (2.1.3)$$

Прибавим к уравнению (2.1.2) уравнение (2.1.3), умноженное на γ :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{sj} x_j + \gamma \sum_{j=1}^n \alpha_{rj} x_j = \beta_s + \gamma \beta_r. \quad (2.1.4)$$

Заменяем в (2.1.1) s -е уравнение на полученное и новую систему обозначим через (N) . Если система (2.1.1) совместна, то каждое ее решение является решением системы (N) . Действительно, за исключением s -го все уравнения систем (2.1.1) и (N) совпадают. Однако если $u = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ — решение уравнений (2.1.2) и (2.1.3), то оно является решением уравнения (2.1.4). Верно и обратное: так как s -е уравнение системы (2.1.1) получается из s -го уравнения системы (N) прибавлением r -го уравнения, умноженного на $-\gamma$, то каждое решение системы (N) является решением системы (2.1.1). Мы убедились в том, что множества решений систем (2.1.1) и (N) совпадают. Такие (совместные) системы называются **эквивалентными**.

Пусть в системе (2.1.1) $\alpha_{11} \neq 0$. Назовем первое уравнение **ведущим**, а коэффициент α_{11} — **ведущим элементом**. Прибавим к s -му уравнению ($s = \overline{2, m}$) этой системы первое, умноженное на $-\frac{\alpha_{s1}}{\alpha_{11}}$. Получим систе-

[illegible]

Теперь предположим, что $\alpha_{22}^{(1)} \neq 0$, и назовем ведущим на данном шаге второе уравнение, ведущим элементом — коэффициент $\alpha_{22}^{(1)}$. Прибавим к s -му уравнению, где $s = 1, 3, 4, \dots, m$, второе, умноженное на

$$-\frac{\alpha_{s2}^{(1)}}{\alpha_{22}^{(1)}};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}^{(2)} x_1 + \alpha_{13}^{(2)} x_3 + \dots + \alpha_{1n}^{(2)} x_n = \beta_1^{(2)}, \\ \alpha_{22}^{(2)} x_2 + \alpha_{23}^{(2)} x_3 + \dots + \alpha_{2n}^{(2)} x_n = \beta_2^{(2)}, \\ \alpha_{33}^{(2)} x_3 + \dots + \alpha_{3n}^{(2)} x_n = \beta_3^{(2)}, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{m3}^{(2)} x_3 + \dots + \alpha_{mn}^{(2)} x_n = \beta_m^{(2)}, \end{array} \right.$$

и т.д.

В процессе преобразований может оказаться, что в левой части некоторого уравнения все коэффициенты равны нулю. Если **справа стоит тоже нуль**, то это уравнение выбрасываем, а в последующих меняем нумерацию уравнений. Если же в данном уравнении правая часть отлична от нуля, то система несовместна и дальнейшие преобразования излишни. Процесс преобразований оборвется, если окажется, что на очередном l -м шаге мы должны умножать уравнение на $-\frac{\alpha_{sl}^{(l-1)}}{\alpha_{ll}^{(l-1)}}$, однако $\alpha_{ll}^{(l-1)} = 0$. Возможны два случая.

а) Среди коэффициентов $\alpha_{ij}^{(l-1)}$, где $i \geq l, j \geq l$, есть отличные от нуля. Изменив нумерацию уравнений и неизвестных, получим $\alpha_{ll}^{(l-1)} \neq 0$ и продолжим преобразования. Такое действие необходимо только для того, чтобы не усложнять изложение. На практике при решении системы линейных уравнений на очередном шаге выбирают любое неизвестное, коэффициент при котором не равен нулю, в уравнении, которое не было ведущим ранее.

б) Все указанные выше коэффициенты равны нулю. Это означает, что преобразования закончены. Если исходная система (2.1.1) была совместна, то полученная система имеет вид трапеции:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}^{(k)} x_1 + \alpha_{1k+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots + \alpha_{1n}^{(k)} x_n = \beta_1^{(k)}, \\ \alpha_{22}^{(k)} x_2 + \alpha_{2k+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots + \alpha_{2n}^{(k)} x_n = \beta_2^{(k)}, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{kk}^{(k)} x_k + \alpha_{kk+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots + \alpha_{kn}^{(k)} x_n = \beta_k^{(k)}. \end{array} \right.$$

Отметим, что коэффициенты $\alpha_{11}^{(k)}, \alpha_{22}^{(k)}, \dots, \alpha_{kk}^{(k)}$ в этой системе по построению отличны от нуля. Переносим неизвестные $x_{k+1}, \dots, x_n$ в правую часть, получим общее решение системы (2.1.1), также имеющее вид системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\alpha_{11}^{(k)}} (\beta_1^{(k)} - \alpha_{1k+1}^{(k)} x_{k+1} - \cdots - \alpha_{1n}^{(k)} x_n), \\ x_2 = \frac{1}{\alpha_{22}^{(k)}} (\beta_2^{(k)} - \alpha_{2k+1}^{(k)} x_{k+1} - \cdots - \alpha_{2n}^{(k)} x_n), \\ \dots\dots\dots \\ x_k = \frac{1}{\alpha_{kk}^{(k)}} (\beta_k^{(k)} - \alpha_{kk+1}^{(k)} x_{k+1} - \cdots - \alpha_{kn}^{(k)} x_n). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Придавая неизвестным $x_{k+1}, \dots, x_n$ произвольные значения и используя полученные равенства, найдем значения неизвестных $x_1, \dots, x_k$. Отсюда следует, что если в системе (2.1.5) число неизвестных больше числа уравнений, то эта система имеет бесконечно много решений. Если же число неизвестных системы (2.1.5) совпадает с числом уравнений, то она имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\beta_1^{(n)}}{\alpha_{11}^{(n)}}, \\ x_2 = \frac{\beta_2^{(n)}}{\alpha_{22}^{(n)}}, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \frac{\beta_n^{(n)}}{\alpha_{nn}^{(n)}}. \end{cases}$$

Легко заметить, что в этом случае система имеет только одно решение. Отметим, что в системе вида (2.1.5) неизвестные $x_{k+1}, \dots, x_n$ называются **свободными**, а $x_1, \dots, x_k$ — **базисными**.

При решении системы линейных уравнений полезно составить таблицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных и свободных членов. Такая таблица называется **расширенной матрицей системы**. Каждая строка матрицы соответствует одному уравнению системы и содержит всю информацию о нем, поэтому указанные выше преобразования

можно выполнять со строками этой матрицы. Поскольку дроби неудобны при вычислениях, при возникновении дробей в строке следует умножить каждый элемент строки на общий знаменатель этих дробей. Если у всех элементов строки есть общий множитель, то можно всю строку разделить на этот множитель.

ПРИМЕР. Решить систему

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 4, \\ 2\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 + \xi_5 = 3, \\ \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4 = -1, \\ \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 2. \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу системы, отделив чертой свободные члены, и преобразовываем ее, выделяя ведущие элементы рамкой:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{1} & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -3 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -3 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Восстанавливаем по последней матрице систему уравнений:

$$\begin{cases} -3\xi_3 + 3\xi_4 + \xi_5 = 5, \\ \xi_1 + 2\xi_3 - 2\xi_4 = -2, \\ \xi_2 = 1. \end{cases}$$

Разделяем свободные и базисные неизвестные и получаем общее решение в виде системы:

$$\begin{cases} \xi_1 = -2 - 2\xi_3 + 2\xi_4, \\ \xi_2 = 1, \\ \xi_5 = 5 + 3\xi_3 - 3\xi_4. \end{cases}$$

□

2.2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

2.2.1. Пусть V — некоторое множество и F — поле. Множество V называется **векторным (линейным) пространством над полем F** , если выполняются следующие условия.

1. В V определена бинарная **операция сложения** (это означает, что каждой паре элементов $x_1, x_2 \in V$ сопоставлен единственный элемент $y \in V$).

2. Определена **операция умножения** элементов поля F на элементы из V , причем результат умножения всегда принадлежит V . Сказанное можно записать формулой

$$\forall \alpha \in F \forall x \in V \exists! y \in V (\alpha x = y).$$

3. Операции сложения и умножения обладают указанными ниже свойствами A1–A4 и M1–M4 (в формулах греческими буквами обозначены элементы из F , латинскими — из V , 1 — единица из F).

A1. $\forall a, b (a + b = b + a)$ (коммутативность).

A2. $\forall a, b, c (a + (b + c) = (a + b) + c)$ (ассоциативность).

A3. $\exists! \mathbf{0} \in V (\forall a (a + \mathbf{0} = a))$ (существование нуля).

A4. $\forall a \exists! (-a) (a + (-a) = \mathbf{0})$ (существование противоположного элемента).

M1. $\forall \alpha, \beta \forall a (\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a)$ (ассоциативность).

M2. $\forall \alpha \forall a, b (\alpha(a + b) = (\alpha a) + (\alpha b))$ (дистрибутивность).

M3. $\forall \alpha, \beta \forall a ((\alpha + \beta)a = (\alpha a) + (\beta a))$ (дистрибутивность).

M4. $\forall a (1a = a)$.

Элементы векторного пространства V называются **векторами**, а элементы поля F — **скалярами**. Как правило, скаляры будут обозначаться строчными греческими буквами, а векторы — строчными латинскими буквами. Векторное пространство над $\mathbb{R}$ называется **действительным**, а над $\mathbb{C}$ — **комплексным**. В дальнейшем будут рассматриваться только действительные и комплексные пространства, хотя большинство утверждений справедливо и для векторных пространств над произвольным бесконечным полем. Для упрощения записей будем считать, что операция умножения связывает переменные сильнее сложения, что позволит употреблять меньше скобок.

В качестве примеров векторных пространств опишем пространства R^n , C^n , F^n и G^i , $i = 1, 2, 3$.

Пространство R^n определено над полем $\mathbb{R}$. Векторами в нем являются столбцы чисел из $\mathbb{R}$, каждый столбец имеет высоту n . Операции сложения столбцов и умножения числа на столбец определяются следующими формулами:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}, \quad \gamma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\alpha_1 \\ \vdots \\ \gamma\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться в том, что система, состоящая из множества R^n и указанных операций, удовлетворяет всем требованиям определения 2.2.1. Она называется (**действительным n -мерным**) **арифметическим пространством**. Заменяя в определении пространства R^n всюду $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$, получим определение **комплексного арифметического пространства C^n** . Аналогичным способом определяется векторное пространство F^n столбцов высоты n с компонентами из поля F над полем F .

Векторами пространства G^3 над полем $\mathbb{R}$ служат направленные отрезки, имеющие начало в некоторой фиксированной точке O геометрического трехмерного пространства. Операции сложения отрезков и умножения числа на отрезок определены так же, как в школьном курсе геометрии: сложение векторов производится по правилу параллелограмма; умножая число $\alpha \neq 0$ на вектор $a \neq \mathbf{0}$, получаем вектор, длина которого равна произведению α на длину вектора a , а направление совпадает с направлением вектора a , если $\alpha > 0$, и противоположно направлению вектора a , если $\alpha < 0$. Если же $\alpha = 0$ или $a = \mathbf{0}$, то $\alpha a = \mathbf{0}$.

Если в приведенном определении рассматривать лишь отрезки, расположенные на фиксированной прямой или фиксированной плоскости, то получим определения векторных пространств G^1 и G^2 над полем $\mathbb{R}$.

Отметим ряд простых свойств векторных пространств.

2.2.2. $\forall a \in V(0a = \mathbf{0})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} 0a &\stackrel{A3}{=} 0a + \mathbf{0} \stackrel{A4}{=} 0a + (a + (-a)) \stackrel{A2}{=} (0a + a) + (-a) \stackrel{M4}{=} \\ &\stackrel{M4}{=} (0a + 1a) + (-a) \stackrel{M3}{=} (0 + 1)a + (-a) = 1a + (-a) \stackrel{M4}{=} a + (-a) \stackrel{A4}{=} \mathbf{0}. \quad \square \end{aligned}$$

2.2.3. $-a = (-1)a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие A4 утверждение можно заменить на $a + (-1)a = \mathbf{0}$. Но $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a = \mathbf{0}$. $\square$

2.2.4. $\forall \alpha \in F(\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду A3 докажем, что $\forall a \in V(a + \alpha \mathbf{0} = a)$. Если $\alpha = 0$, то 2.2.4 следует из 2.2.2. Пусть $\alpha \neq 0$, тогда

$$a + \alpha \mathbf{0} = (\alpha \alpha^{-1})a + \alpha \mathbf{0} = \alpha(\alpha^{-1}a + \mathbf{0}) = \alpha(\alpha^{-1}a) = (\alpha \alpha^{-1})a = a. \quad \square$$

2.2.5. Если $\alpha a = \mathbf{0}$, то либо $\alpha = 0$, либо $a = \mathbf{0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha \neq 0$, то $\mathbf{0} \stackrel{2.2.4}{=} \frac{1}{\alpha} \mathbf{0} = \frac{1}{\alpha}(\alpha a) = a$. $\square$

2.2.6. Определение операции вычитания векторов

$$a - b := a + (-b).$$

Пусть в векторном пространстве V над полем F выбрано конечное число векторов $a_1, \dots, a_n$, не обязательно различных. Будем говорить, что векторы $a_1, \dots, a_n$ образуют **систему** $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ (не следует путать систему векторов с множеством векторов, так как в множестве элементы попарно различны).

2.2.7. Вектор $b \in V$ линейно выражается через векторы $a_1, \dots, a_n$, если в поле F найдутся такие скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что

$$b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n. \quad (2.2.1)$$

Правая часть равенства (2.2.1) называется **линейной комбинацией векторов** $a_1, \dots, a_n$.

Если вектор b линейно выражается через векторы $a_1, \dots, a_n$, то также говорят, что он **представим в виде линейной комбинации** этих векторов.

2.2.8. Если каждый вектор из системы S_2 линейно выражается через векторы системы S_1 и каждый вектор из системы S_3 линейно выражается через векторы системы S_2 , то любой вектор из S_3 можно линейно выразить через векторы системы S_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$S_1 = \langle a_1, \dots, a_k \rangle, \quad S_2 = \langle b_1, \dots, b_m \rangle, \quad S_3 = \langle c_1, \dots, c_n \rangle,$$

$$b_i = \alpha_{i1} a_1 + \dots + \alpha_{ik} a_k, \quad i = \overline{1, m},$$

$$c_i = \beta_{i1} b_1 + \dots + \beta_{im} b_m, \quad i = \overline{1, n}.$$

Заменяем в равенствах последней группы векторы b_i их разложениями и приводим подобные члены:

$$\begin{aligned} c_i &= \beta_{i1} (\alpha_{11} a_1 + \dots + \alpha_{1k} a_k) + \dots + \beta_{im} (\alpha_{m1} a_1 + \dots + \alpha_{mk} a_k) = \\ &= (\beta_{i1} \alpha_{11} + \dots + \beta_{im} \alpha_{m1}) a_1 + \dots + (\beta_{i1} \alpha_{1m} + \dots + \beta_{im} \alpha_{mm}) a_k, \\ &\quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Полагая $\beta_{i1}\alpha_{1m} + \dots + \beta_{im}\alpha_{mm} = \gamma_{i1}$, получаем разложения

$$c_i = \gamma_{i1}a_1 + \dots + \gamma_{ik}a_k, \quad i = \overline{1, n}. \quad \square$$

2.2.9. Система векторов $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $n > 1$, называется *линейно зависимой*, если один из векторов $a_1, \dots, a_n$ линейно выражается через оставшиеся.

Система векторов $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $n > 1$, называется *линейно независимой*, если никакой из ее векторов нельзя линейно выразить через остальные векторы.

Система $\langle a \rangle$, содержащая один вектор, называется *линейно зависимой*, если $a = 0$, и *линейно независимой*, если $a \neq 0$.

2.2.10. Система $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ векторов линейно независима тогда и только тогда, когда равенство

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0 \quad (2.2.2)$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Дано, что система линейно независима.

а) Если $n = 1$, то $a_1 \neq 0$ по 2.2.9. Согласно 2.2.5 из $\alpha_1 a_1 = 0$ и $a_1 \neq 0$ следует, что $\alpha_1 = 0$.

б) Пусть $n > 1$, $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s + \dots + \alpha_n a_n = 0$ и $\alpha_s \neq 0$, тогда

$$a_s = -\frac{1}{\alpha_s}(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{s-1} a_{s-1} + \alpha_{s+1} a_{s+1} + \dots + \alpha_n a_n),$$

что противоречит условию.

($\Leftarrow$) Дано: (2.2.2) возможно, только если $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

а) $n = 1$. При $a_1 = 0$ равенство $\alpha_1 a_1 = 0$ справедливо, например, при $\alpha_1 = 1$, что противоречит предположению, следовательно, $a_1 \neq 0$, система линейно независима согласно 2.2.9.

б) $n > 1$. Если система линейно зависима, то

$$a_s = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{s-1} a_{s-1} + \alpha_{s+1} a_{s+1} + \dots + \alpha_n a_n$$

для подходящего $s \in \{1, \dots, n\}$. Но тогда

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{s-1} a_{s-1} - 1 a_s + \dots + \alpha_{s+1} a_{s+1} + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Опять противоречие с предположением. $\square$

Полезна также формулировка признака линейной зависимости.

2.2.11. Система векторов $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно зависима тогда и только тогда, когда существует линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \mathbf{0}$, в которой не все коэффициенты равны нулю.

Доказательство. Нужное утверждение непосредственно получается из 2.2.10, если воспользоваться следующим логическим законом: если из утверждения A следует утверждение B , то из утверждения, обратного B , следует утверждение, обратное A .

ПРИМЕР. В пространстве R^5 выбраны векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Выясним, является ли система векторов $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ линейно зависимой.

Воспользуемся признаком линейной зависимости. Проверим, существуют ли такие коэффициенты $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, не все равные нулю, что

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 + \gamma_4 a_4 = \mathbf{0}.$$

Поскольку в пространстве R^5 все операции производятся покомпонентно, то это векторное равенство равносильно однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 3\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 + 2\gamma_4 = 0, \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 10\gamma_3 + \gamma_4 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + 5\gamma_3 = 0, \\ \gamma_2 + 6\gamma_3 + \gamma_4 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + 5\gamma_3 + 2\gamma_4 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему, для чего выпишем матрицу системы и преобразуем ее (столбец свободных членов не выписываем, так как он постоянно состоит из нулей):

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Преобразования закончены. Видим, что система уравнений имеет бесконечно много решений. Каждое решение дает четверку коэффициентов в нулевой линейной комбинации векторов $a_1, \dots, a_4$, следовательно, система этих векторов линейно зависима. Например, поскольку преобразованная система уравнений может быть записана в виде

$$\gamma_1 = \gamma_3, \quad \gamma_2 = -6\gamma_3, \quad \gamma_4 = 0,$$

то четверка чисел $(1, -6, 1, 0)$ является решением системы уравнений и потому $6a_2 = a_1 + a_3$, что легко проверить. $\square$

2.2.12. Пусть V — векторное пространство, $a_1, \dots, a_n, y \in V$ и

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = y. \quad (2.2.3)$$

Вектор y можно линейно выразить через векторы $a_1, \dots, a_n$ только одним способом тогда и только тогда, когда образуемая этими векторами система $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

($\Leftarrow$) Дано: система $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно независима. Предположим, что вектор y линейно выражен через $a_1, \dots, a_n$ другим способом:

$$\beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n = y.$$

Вычтем это равенство из (2.2.3):

$$(\alpha_1 - \beta_1)a_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)a_n = \mathbf{0}.$$

Если указанные разложения вектора y различны, то $\alpha_j \neq \beta_j$ для некоторого j и потому $\alpha_j - \beta_j \neq 0$. Согласно 2.2.11 система $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно зависима, что противоречит условию.

($\Rightarrow$) Докажем теперь, что если система $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно зависима, то вектор y можно линейно выразить через векторы $a_1, \dots, a_n$ по крайней мере двумя способами. Ввиду 2.2.11 существует нулевая линейная комбинация векторов системы $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$:

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_n a_n = \mathbf{0}, \quad (2.2.4)$$

в которой не все коэффициенты равны нулю. Сложим (2.2.3) и (2.2.4):

$$(\alpha_1 + \gamma_1)a_1 + \cdots + (\alpha_n + \gamma_n)a_n = y.$$

Полученное разложение отличается от разложения (2.2.3), так как $\gamma_i \neq 0$ для некоторого i . □

2.2.13. (Лемма о расширении линейно независимой системы векторов). Предположим, что к линейно независимой системе векторов $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ из пространства V добавляется еще один вектор a_{n+1} из V . Расширенная система $\langle a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \rangle$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда вектор a_{n+1} нельзя представить в виде линейной комбинации векторов $a_1, \dots, a_n$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Утверждение следует из 2.2.9.

($\Leftarrow$) Воспользуемся признаком линейной независимости и рассмотрим равенство

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} a_{n+1} = \mathbf{0}. \quad (2.2.5)$$

Если $\alpha_{n+1} \neq 0$, то

$$a_{n+1} = -\frac{1}{\alpha_{n+1}}(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n),$$

что противоречит условию.

Если же $\alpha_{n+1} = 0$, то $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \mathbf{0}$. Система $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно независима, поэтому $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ (см. 2.2.10). Все коэффициенты в (2.2.5) нулевые, что и требовалось. $\square$

Система векторов S_1 называется **подсистемой** системы векторов S_2 , если либо $S_1 = S_2$, либо S_1 получена из S_2 удалением некоторых векторов.

2.2.14. а) Если некоторая подсистема системы векторов $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

б) Если система векторов линейно независима, то и всякая ее подсистема линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, (б) следует из (а), что мы и докажем. Для простоты рассуждения предположим, что линейно зависима подсистема, состоящая из первых s векторов. Тогда существует линейная комбинация

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s = \mathbf{0},$$

в которой не все коэффициенты равны нулю. В этом случае

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s + 0a_{s+1} + \dots + 0a_n = \mathbf{0},$$

и здесь также не все коэффициенты равны нулю, поэтому система $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно зависима. $\square$

2.2.15 (Следствие). Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанная система содержит линейно зависимую подсистему $\langle \mathbf{0} \rangle$ (см. 2.2.9). $\square$

2.2.16 (Теорема о двух системах векторов). Пусть даны две системы векторов. Если каждый вектор второй системы линейно выражается через векторы первой системы и число векторов во второй системе больше, чем в первой, то вторая система линейно зависима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны системы

$$S_1 = \langle a_1, \dots, a_m \rangle, \quad S_2 = \langle b_1, \dots, b_n \rangle, \quad n > m.$$

Воспользуемся индукцией по числу векторов в системе S_1 .

1. $m = 1$, $S_1 = \langle a_1 \rangle$, $S_2 = \langle b_1, b_2, \dots \rangle$, $b_1 = \gamma a_1$, $b_2 = \delta a_1$.

а) Если $\delta = 0$, то $b_2 = \mathbf{0}$ и S_2 линейно зависима (см. 2.2.15).

б) Если $\delta \neq 0$, то $b_1 = \frac{\gamma}{\delta} b_2$, следовательно, $\langle b_1, b_2 \rangle$ линейно зависима (см. 2.2.9), а потому и S_2 линейно зависима (см. 2.2.14).

2. Предположим, что утверждение справедливо, если в первой системе содержится не более $m - 1$ векторов. Рассмотрим случай, когда S_1 состоит из m векторов. По условию,

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1m-1}a_{m-1} + \alpha_{1m}a_m, \\ \dots \quad (2.2.6)$$

$$b_n = \alpha_{n1}a_1 + \alpha_{n2}a_2 + \dots + \alpha_{nm-1}a_{m-1} + \alpha_{nm}a_m.$$

а) Если $\alpha_{1m} = \alpha_{2m} = \dots = \alpha_{nm} = 0$, то векторы $b_1, \dots, b_n$ линейно выражаются через векторы $a_1, \dots, a_{m-1}$, и S_2 линейно зависима по индуктивному предположению.

б) Пусть не все коэффициенты $\alpha_{1m}, \dots, \alpha_{nm}$ равны нулю. Для простоты предположим, что $\alpha_{nm} \neq 0$. Рассмотрим вспомогательную систему векторов $S_3 = \langle c_1, \dots, c_{n-1} \rangle$, где

$$c_j = b_j - \frac{\alpha_{jm}}{\alpha_{nm}} b_n, \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (2.2.7)$$

Заменяя в равенствах (2.2.7) векторы b_j указанными в (2.2.6) линейными комбинациями векторов $a_1, \dots, a_m$, легко убедиться в том, что каждый вектор системы S_3 линейно выражается через векторы системы $\langle a_1, \dots, a_{m-1} \rangle$. По индуктивному предположению система S_3 линейно зависима, и потому найдутся скаляры $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$, не все равные нулю и такие, что $\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{n-1} c_{n-1} = \mathbf{0}$. Заменяя в этом выражении каждый вектор c_i правой частью соответствующего равенства из (2.2.7), получим новое равенство

$$\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-1} b_{n-1} + \left(-\frac{1}{\alpha_{nm}} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{jm} \gamma_j \right) b_n = \mathbf{0}.$$

Согласно сказанному ранее среди коэффициентов $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ есть ненулевые, поэтому система S_2 линейно зависима. $\square$

2.2.17. Две системы векторов называются *эквивалентными*, если любой вектор каждой из этих систем линейно выражается через векторы другой системы.

ПРИМЕР. Системы $S_1 = \langle a, b \rangle$ и $S_2 = \langle 2a + b, a + b \rangle$ эквивалентны. Действительно, каждый вектор системы S_2 линейно выражается через векторы системы S_1 . Векторы системы S_1 также линейно выражаются через векторы системы S_2 , так как

$$a = (2a + b) - (a + b), \quad b = 2(a + b) - (2a + b). \quad \square$$

2.2.18. Эквивалентные линейно независимые системы состоят из одного и того же числа векторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S_1 и S_2 — две эквивалентные линейно независимые системы. Предположим, что число векторов в S_2 больше, чем в S_1 . Каждый вектор системы S_2 линейно выражается через векторы системы S_1 . Применяя утверждение 2.2.16, заключаем, что система S_2 линейно зависима. Так как это противоречит условию, делаем вывод, что число векторов в S_2 не превосходит числа векторов в S_1 . Аналогично доказывается, что в S_1 не больше векторов, чем в S_2 . Делаем заключение, что эти два числа совпадают. $\square$

2.2.19. Из любой системы векторов S , содержащей ненулевой вектор, можно выделить линейно независимую подсистему S_1 , эквивалентную S . Система S_1 называется *максимальной линейно независимой подсистемой* системы S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбрасывая последовательно из S векторы, линейно выражающиеся через остальные, придем к S_1 . $\square$

2.2.20. Базой системы векторов S называется линейно независимая подсистема системы S , эквивалентная S . Число векторов в базе системы S называется *рангом системы S* и обозначается $\text{rank } S$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Система S может иметь несколько баз. Однако любые две базы эквивалентны между собой и содержат одинаковое число векторов ввиду 2.2.18, поэтому определение ранга системы корректно.

2. Из утверждения 2.2.19 и определения 2.2.20 непосредственно следует, что каждая максимальная линейно независимая подсистема системы S является ее базой.

ПРИМЕР. Рассмотрим систему векторов $S = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$, где

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Система $\langle a_1, a_2 \rangle$ линейно независима,

$$a_3 = a_1 + a_2, \quad a_4 = 2a_1 + 3a_2, \quad a_5 = 3a_1,$$

поэтому векторы a_1 и a_2 образуют базу системы S и ранг системы S равен двум. Базой является также любая другая линейно независимая подсистема системы векторов S , содержащая два вектора. Легко заметить, что линейно независимой является каждая пара векторов из S , за исключением пары $\langle a_1, a_5 \rangle$. $\square$

2.2.21. Следующие преобразования системы векторов называются **элементарными**: а) прибавление к некоторому вектору системы любого другого вектора этой системы, умноженного на скаляр; б) умножение ненулевого скаляра на вектор из системы; в) перемена местами двух векторов.

2.2.22. Если система векторов S_2 получена из системы векторов S_1 конечным числом элементарных преобразований, то S_1 и S_2 эквивалентны. Это, в частности, означает, что при элементарных преобразованиях сохраняется ранг системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система S_2 получена из S_1 цепочкой элементарных преобразований, описанных в 2.2.21:

$$S_1 \Rightarrow R_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow R_k \Rightarrow S_2.$$

Из утверждения 2.2.8 следует, что если система векторов B эквивалентна системе C , а C эквивалентна системе D , то системы B и D

также эквивалентны. Это означает, что из эквивалентности каждой пары соседних систем в указанной цепочке следует эквивалентность систем S_1 и S_2 . Ввиду этого достаточно показать, что, совершив одно элементарное преобразование, из любой системы векторов P мы всегда получим некоторую систему Q , эквивалентную P .

В случае, когда Q получена из P перестановкой двух векторов, эти системы отличаются только порядком векторов, и утверждение очевидно.

Рассмотрим два других преобразования. Система Q отличается от системы P всего одним вектором. Для простоты выкладок будем предполагать, что этот вектор первый. Пусть

$$P = \langle a_1, \dots, a_n \rangle, \quad Q = \langle b, a_2, \dots, a_n \rangle.$$

Согласно 2.2.21 вектор b равен либо $a_1 + \alpha a_j$, либо γa_1 , причем $\gamma \neq 0$. Видим, что каждый вектор из системы Q линейно выражается через векторы системы P .

Осталось доказать, что каждый вектор из системы P в свою очередь линейно выражается через векторы системы Q . Для векторов $a_2, \dots, a_n$ это очевидно. Если $b = a_1 + \alpha a_j$, то $j \neq 1$ и $a_1 = b - \alpha a_j$. Если же $b = \gamma a_1$, то $\gamma \neq 0$ и $a_1 = \frac{1}{\gamma} b$. □

2.3. БАЗИС ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим векторное пространство V , содержащее ненулевой вектор. Возможны только два случая.

а) Для любого натурального числа n в V существует конечная линейно независимая система векторов, содержащая более n векторов. Такое векторное пространство называется **бесконечномерным**.

б) Существует такое натуральное число n , что любая линейно независимая система векторов из V содержит не более n векторов. В этом случае пространство V называется **конечномерным**.

В дальнейшем будут рассматриваться только конечномерные векторные пространства, которые и будут подразумеваться под названием «векторные пространства».

2.3.1. *Базисом векторного пространства называется упорядоченная система векторов из этого пространства, обладающая двумя свойствами:*

- 1) *эта система линейно независима;*
- 2) *через векторы системы линейно выражается любой вектор пространства.*

В этом определении выражение «упорядоченная система» указывает на то, что в базисе всегда есть первый вектор, второй и т.д. Меняя в базисе порядок векторов, получим новый базис, отличный от исходного. Впрочем, говоря о системе векторов, обычно предполагают, что эта система упорядоченная.

Некоторые из линейно независимых систем векторов обладают свойством терять линейную независимость при добавлении в систему любого вектора. Подобные системы называются **максимальными линейно независимыми**.

2.3.2. *Упорядоченная система векторов является базисом векторного пространства тогда и только тогда, когда эта система является максимальной линейно независимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$)

Если $B_1 = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ — базис векторного пространства V , то система B_1 является упорядоченной и линейно независимой. Каждый вектор x из V линейно выражается через векторы из B_1 , поэтому система $\langle y_1, \dots, y_n, x \rangle$ для любого $x \in V$ является линейно зависимой, вследствие чего B_1 — максимальная линейно независимая система.

($\Leftarrow$) Пусть теперь $B_2 = \langle z_1, \dots, z_m \rangle$ — упорядоченная максимальная линейно независимая система векторов. Для каждого $x \in V$ система $\langle z_1, \dots, z_m, x \rangle$ линейно зависима и согласно 2.2.13 x линейно выражается через векторы из B_2 , следовательно, B_2 является базисом. $\square$

2.3.3. *Любые два базиса векторного пространства содержат одинаковое число векторов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из 2.2.18. $\square$

2.3.4. Число векторов в базисе векторного пространства V обозначается $\dim V$ и называется **размерностью** этого пространства.

Указанное обозначение происходит от английского слова dimension (размерность, величина).

2.3.5. Пространство, состоящее из одного нулевого вектора, не имеет базиса. Его размерность равна нулю.

2.3.6. Каждая система S векторов из пространства V , число векторов в которой больше размерности пространства V , является линейно зависимой.

Доказательство. Пусть B — базис пространства V . Поскольку каждый вектор системы S линейно выражается через векторы базиса B и число векторов системы S больше числа векторов базиса B , система S линейно зависима (см. 2.2.16). $\square$

2.3.7. Каждую линейно независимую систему векторов S из векторного пространства V можно дополнить до базиса пространства V .

Доказательство. Пусть $S = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$. Если каждый вектор из пространства V линейно выражается через векторы из S , то S — базис согласно 2.3.1. Допустим, что некоторый вектор, не принадлежащий системе S , нельзя выразить через векторы этой системы. Присоединим его к векторам $x_1, \dots, x_m$ и полученную расширенную систему обозначим через S_1 . Система S_1 является линейно независимой согласно 2.2.13. Теперь снова имеются только две возможности: или S_1 является базисом в пространстве V , или же из S_1 можно получить линейно независимую систему S_2 , содержащую на один вектор больше.

Предположим, что указанным способом мы получаем последовательность $S, S_1, S_2, \dots$ линейно независимых систем векторов, принадлежащих пространству V . Каждый член этой последовательности, за исключением первого, содержит на один вектор больше, чем предыдущий. Мы рассматриваем только конечномерные векторные пространства, поэтому для некоторого $k \in \mathbb{N}$ любая система, состоящая более

чем из k векторов, является линейно зависимой. Ввиду этого через конечное число шагов процесс построения систем S_i оборвется, и последнюю из построенных линейно независимых систем, которую мы обозначим через S_n , уже нельзя будет расширить без потери линейной независимости. На основании утверждения 2.3.2 заключаем, что S_n — базис в пространстве V . $\square$

Если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — базис векторного пространства V , то любой вектор $x \in V$ можно представить в виде

$$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n. \quad (2.3.1)$$

2.3.8. *Линейная комбинация в правой части равенства (2.3.1) называется разложением вектора x по базису $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, а коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора x в этом базисе.*

Термин «координаты» происходит от латинских слов со(n) (вместе) и ordinatus (упорядоченный). В дальнейшем, как правило, координаты вектора x из (2.3.1) будут записываться в виде столбца

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Обозначение $\bar{x}$ также будет использоваться для напоминания о том, что x является столбцом. Запись $\bar{x}_B$ означает, что принадлежащие столбцу $\bar{x}$ координаты вектора x взяты в базисе B .

Имея дело с пространством F^n , в котором векторами являются столбцы скаляров, следует различать компоненты вектора, т. е. скаляры, образующие столбец, и координаты вектор-столбца в некотором базисе. Возьмем, например, в пространстве R^3 векторы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Используя лемму 2.2.13, легко проверить, что система векторов $B = \langle a, b, c \rangle$ является линейно независимой и образует базис пространства R^3 . В этом базисе координаты векторов a, b, c, d равны соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что компоненты векторов a, b, c, d не совпадают с их координатами в указанном базисе.

С другой стороны, в пространстве F^n существует такой базис, в котором координаты каждого вектор-столбца совпадают с его компонентами. Этот базис, часто называемый **естественным**, состоит из столбцов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, система, образованная этими векторами, является линейно независимой, так как очевидно, что никакой из векторов системы нельзя выразить через оставшиеся. В то же время каждый столбец из F^n линейно выражается через векторы указанной системы следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.9. Каждый вектор $x \in V$ можно разложить по базису векторного пространства V только одним способом.

Доказательство. Утверждение следует из 2.2.12. $\square$

2.3.10. При сложении двух векторов из векторного пространства их соответствующие координаты складываются, а при умножении скаляра на вектор скаляр умножается на каждую координату этого вектора. Если вектор u представлен в виде линейной комбинации $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m$, то столбец $\bar{u}$ координат вектора u равен линейной комбинации $\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_m \bar{b}_m$ столбцов координат векторов $b_1, \dots, b_m$.

Доказательство. Пусть векторы $b_1, \dots, b_m$ заданы своими координатами в одном и том же базисе $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$:

$$b_i = \alpha_{i1} a_1 + \dots + \alpha_{in} a_n, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда, очевидно,

$$b_i + b_j = (\alpha_{i1} + \alpha_{j1}) a_1 + \dots + (\alpha_{in} + \alpha_{jn}) a_n.$$

Далее, для любого $\lambda \in F$

$$\lambda b_i = (\lambda \alpha_{i1}) a_1 + \dots + (\lambda \alpha_{in}) a_n.$$

Первое утверждение доказано. Второе утверждение просто обобщает его на случай произвольного числа слагаемых и доказывается аналогично. $\square$

2.4. ПОДПРОСТРАНСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

2.4.1. Пусть V — векторное пространство над полем F и $L \subseteq V$. Множество векторов L называется *подпространством* пространства V , если выполняются три условия:

- 1) $0 \in L$;
- 2) $z_1, z_2 \in L \Rightarrow z_1 + z_2 \in L$;
- 3) $z \in L \ \& \ \alpha \in F \Rightarrow \alpha z \in L$.

Замечания. Условие $0 \in L$ можно заменить условием $L \neq \emptyset$, поскольку если подпространству L принадлежит какой-нибудь вектор a , то ему принадлежит и $0 = 0a$.

При выполнении условий (2) и (3) говорят, что L замкнуто относительно операций сложения и умножения, определенных в V . Это позволяет переформулировать определение 2.4.1 следующим образом: *подпространством пространства V называется непустое множество векторов из V , замкнутое относительно операций сложения и умножения.*

2.4.2. Подпространство L векторного пространства V над полем F является векторным пространством над F (относительно операций, определенных в V). Это, в частности, означает, что если векторы $a_1, \dots, a_n$ принадлежат L , то каждая линейная комбинация этих векторов также принадлежит L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу п. 2 и 3 определения 2.4.1 L замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения скаляра на вектор. Это означает, что какова бы ни была линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$, слагаемые $\alpha_i a_i$ принадлежат L , а вместе с ними и суммы

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + \alpha_3 a_3, \dots, \\ (\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1}) + \alpha_n a_n.$$

Чтобы убедиться в том, что L является векторным пространством, необходимо также проверить выполнение аксиом, указанных в определении 2.2.1. Однако они выполняются в L уже потому, что каждый вектор из L принадлежит V , операции в L и в V определены одинаково и все векторы из V удовлетворяют этим аксиомам. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, верно и обратное: если V — векторное пространство над полем F , $L \subseteq V$ и L является векторным пространством относительно операций, определенных в V , то L — подпространство пространства V .

ПРИМЕР. Обозначим через L множество всех тех столбцов из пространства R^n , $n > 1$, у которых последняя компонента равна нулю. Очевидно, $\mathbf{0} \in L$, сумма любых двух столбцов из L принадлежит L , и произведение любого действительного числа на столбец из L находится в L , поэтому L является подпространством пространства R^n . $\square$

2.4.3. Если L — подпространство конечномерного векторного пространства V , то L также конечномерно, $\dim L \leq \dim V$ и $L = V \iff \iff \dim L = \dim V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $L = \{0\}$, то $\dim L = 0 \leq \dim V$ и $L = V$ тогда и только тогда, когда $\dim V = 0$.

б) Пусть $L \neq \{0\}$. Операции в L и V определены одинаково, значит, система векторов S из L является линейно независимой в L тогда и только тогда, когда S является линейно независимой в V . Отсюда следует, что число векторов в любой линейно независимой системе векторов из L не превосходит размерности пространства V , т. е. что $\dim L \leq \dim V$. Пусть $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ — базис в L . Если $V \neq L$, то в V есть вектор x , не принадлежащий L . Вектор x нельзя представить в виде линейной комбинации векторов $a_1, \dots, a_m$, следовательно, система $\langle a_1, \dots, a_m, x \rangle$ линейно независима, и потому $\dim V \geq m + 1 > \dim L$. $\square$

2.4.4. Пусть $S = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ — система векторов, принадлежащих векторному пространству V над полем F . *Линейной оболочкой* системы векторов S называется совокупность всех векторов из V , представимых в виде линейных комбинаций векторов из S :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S) &= \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) = \\ &= \{u \in V \mid u = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F\}. \end{aligned}$$

2.4.5. Линейная оболочка системы векторов $S = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ из V над F содержит все векторы из S и является подпространством векторного пространства V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Докажем, что $S \subseteq \mathcal{L}(S)$. Действительно,

$$a_i = 0a_1 + \dots + 0a_{i-1} + a_i + 0a_{i+1} + \dots + 0a_m,$$

поэтому $a_i \in \mathcal{L}(S)$ для каждого $i = \overline{1, m}$.

Теперь докажем, что $\mathcal{L}(S)$ является подпространством пространства V .

1) Поскольку $0a_1 + \dots + 0a_m = 0$, то $0 \in \mathcal{L}(S)$.

2) Пусть $y, z \in \mathcal{L}(S)$, $\gamma \in F$,

$$y = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m, \quad z = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_m a_m,$$

тогда

$$y + z = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_m a_m \in \mathcal{L}(S),$$

$$\gamma y = (\gamma \alpha_1) a_1 + \cdots + (\gamma \alpha_m) a_m \in \mathcal{L}(S). \quad \square$$

2.4.6. *Линейные оболочки систем векторов S_1 и S_2 совпадают тогда и только тогда, когда эти системы эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\implies$) Каждый вектор из $\mathcal{L}(S_1)$, в том числе и векторы, принадлежащие S_2 , линейно выражаются через векторы из S_1 . Аналогично, каждый вектор из S_1 представим в виде линейной комбинации векторов из S_2 . Это означает, что системы S_1 и S_2 эквивалентны (см. 2.2.17).

($\impliedby$) Если системы векторов S_1 и S_2 эквивалентны, то любой вектор из $\mathcal{L}(S_1)$ представим в виде линейной комбинации векторов из S_2 , следовательно, $\mathcal{L}(S_1) \subseteq \mathcal{L}(S_2)$. Аналогичное рассуждение показывает, что $\mathcal{L}(S_2) \subseteq \mathcal{L}(S_1)$, и потому $\mathcal{L}(S_1) = \mathcal{L}(S_2)$. $\square$

2.4.7 (Следствие). *Размерность линейной оболочки системы векторов S равна рангу этой системы, а любая база системы S является базисом в $\mathcal{L}(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если S_1 — база системы S , то поскольку S и S_1 эквивалентны, $\mathcal{L}(S_1) = \mathcal{L}(S)$. Очевидно, S_1 является базисом в $\mathcal{L}(S_1)$, а потому и в $\mathcal{L}(S)$. $\square$

2.4.8 (Следствие). *Если две системы векторов эквивалентны, то их ранги совпадают.* $\square$

Для поиска базиса линейной оболочки системы векторов и определения ее размерности можно использовать элементарные преобразования этой системы.

ПРИМЕР. Определить размерность линейной оболочки системы S , состоящей из векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и выделить из S подсистему, являющуюся базисом в $\mathcal{L}(S)$.

Запишем векторы в виде столбцов матрицы и будем совершать элементарные преобразования столбцов этой матрицы, комментируя в первой строке, что происходит. Этот комментарий используется в данном примере для обоснования выводов и может быть опущен. Отметим, что столбцы, которые были ведущими, далее не преобразуются:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & \boxed{1} \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1=a_1-a_5 & b_2=a_2 & b_3=a_3-a_5 & b_4=a_4-a_5 & b_5=a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1=b_1+2b_3 & c_2=b_2+2b_3 & c_3=b_3 & c_4=b_4+b_3 & c_5=b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ \boxed{3} & 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} d_1=c_1 & d_2=c_2-c_1 & d_3=b_3 & d_4=3c_4-4c_3 & d_5=c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Преобразования закончены. В последней матрице отличны от нуля столбцы d_1 , d_3 и d_5 . Докажем, что системы $C = \langle d_1, d_3, d_5 \rangle$ и $B = \langle a_1, a_3, a_5 \rangle$ являются базисами рассматриваемой линейной оболочки.

а) Каждый вектор системы C является линейной комбинацией векторов из системы B и потому принадлежит линейной оболочке $\mathcal{L}(B)$. Размерность этой линейной оболочки не может превышать числа векторов в системе B , т. е. трех. Однако очевидно, что система векторов C линейно независима, и потому $\dim \mathcal{L}(B) = 3$. Это означает, что C — базис в $\mathcal{L}(B)$, система B эквивалентна C и также является базисом в $\mathcal{L}(B)$.

б) Вектор d_2 является линейной комбинацией векторов a_1 , a_2 , a_3 и a_5 :

$$0 = d_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_5 a_5,$$

причем $\alpha_2 \neq 0$. Конкретные значения остальных коэффициентов не играют роли. Отсюда следует, что

$$a_2 = -\frac{1}{\alpha_2}(\alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3 + \alpha_5 a_5),$$

и потому $a_2 \in \mathcal{L}(B)$. Аналогичное рассуждение показывает, что $a_3 \in \mathcal{L}(B)$. Таким образом, каждый вектор исходной системы S принадлежит $\mathcal{L}(B)$, и $B = \langle a_1, a_3, a_5 \rangle$ является искомым базисом. $\square$

2.4.9. Если $L = \mathcal{L}(S)$, то S называется *системой порождающих подпространства L* , а об L говорят, что оно *порождается* векторами системы S .

2.4.10. Пересечением $\bigcap_{i \in I} L_i$ подпространств L_i , $i \in I$, векторного пространства V называется множество всех тех векторов из V , которые принадлежат каждому подпространству L_i .

2.4.11. Суммой $L_1 + \dots + L_m$ подпространств $L_1, \dots, L_m$ векторного пространства V называется множество всех тех векторов z из V , которые можно представить в виде $z = x_1 + \dots + x_m$, где $x_i \in L_i$, $i = \overline{1, m}$.

ПРИМЕР. В пространстве R^4 выделим два подпространства. Подпространство L_1 состоит из всех тех столбцов, у которых первая компонента равна нулю, а подпространство L_2 образовано всеми столбцами, у которых равна нулю последняя компонента. Очевидно, в $L_1 \cap L_2$ попадут те и только те векторы из R^4 , у которых равны нулю как первая, так и последняя компоненты.

Сумма подпространств L_1 и L_2 совпадает с R^4 , так как если $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T \in R^4$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства принадлежит L_1 , а второе — L_2 . $\square$

2.4.12. Пересечение непустого множества подпространств векторного пространства V также является подпространством пространства V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что пересекаются подпространства L_i , $i \in I$.

а) $0 \in L_i$ для каждого $i \in I$, поэтому $0 \in \bigcap_{i \in I} L_i$.

б) Если $x, y \in \bigcap_{i \in I} L_i$, то $x, y \in L_i$ для каждого $i \in I$, следовательно, $x + y \in L_i$, и потому $x + y \in \bigcap_{i \in I} L_i$.

в) Пусть $x \in \bigcap_{i \in I} L_i$ и $\gamma \in F$, тогда из того, что $x \in L_i$, $i \in I$, следует, что $\gamma x \in L_i$. Это означает, что $\gamma x \in \bigcap_{i \in I} L_i$. $\square$

2.4.13. Сумма подпространств $L_1, \dots, L_m$ векторного пространства V содержит все векторы, принадлежащие каждому из слагаемых L_i . Если подпространство L_i является линейной оболочкой системы векторов $\langle a_1^i, \dots, a_{k_i}^i \rangle$, $i = \overline{1, m}$, и

$$S = \langle a_1^1, \dots, a_{k_1}^1, a_1^2, \dots, a_{k_2}^2, \dots, a_1^m, \dots, a_{k_m}^m \rangle,$$

то $L_1 + \dots + L_m = \mathcal{L}(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Любой вектор $u \in L_i$ представим в виде

$$\underbrace{\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}}_{i-1 \text{ слагаемых}} + u + \underbrace{\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}}_{m-i \text{ слагаемых}}.$$

Так как $\mathbf{0}$ принадлежит каждому из подпространств L_j , вектор u принадлежит сумме $L_1 + \cdots + L_m$.

2. Каждый принадлежащий сумме $L_1 + \cdots + L_m$ вектор u представим в виде $u = v_1 + \cdots + v_m$, где $v_i \in L_i$. Согласно условию для каждого $i = \overline{1, m}$ существуют такие скаляры $\gamma_1^i, \dots, \gamma_{k_i}^i$, что $v_i = \gamma_1^i a_1^i + \cdots + \gamma_{k_i}^i a_{k_i}^i$. Но тогда

$$u = \gamma_1^1 a_1^1 + \cdots + \gamma_{k_1}^1 a_{k_1}^1 + \cdots + \gamma_1^m a_1^m + \cdots + \gamma_{k_m}^m a_{k_m}^m. \quad \square$$

2.4.14 (Следствие). Сумма подпространств $L_1, \dots, L_m$ векторного пространства V является подпространством пространства V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle a_1^i, \dots, a_{k_i}^i \rangle$ — базис подпространства L_i , $i = \overline{1, m}$. Сумма $L_1 + \cdots + L_m$ является линейной оболочкой системы

$$\langle a_1^1, \dots, a_{k_1}^1, a_1^2, \dots, a_{k_2}^2, \dots, a_1^m, \dots, a_{k_m}^m \rangle$$

(см. 2.4.13), а любая оболочка системы векторов из V является подпространством пространства V (см. 2.4.5). $\square$

2.4.15. Размерность суммы двух подпространств равна сумме размерностей слагаемых минус размерность их пересечения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму подпространств L_1 и L_2 . Пусть $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ и $\langle b_1, \dots, b_q \rangle$ — базисы этих подпространств. Докажем, что если пересечение $L_1 \cap L_2$ содержит только нулевой вектор, то система

$$B = \langle a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q \rangle$$

линейно независима. Для этого рассмотрим равенство

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_p a_p}_a + \underbrace{\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_q b_q}_b = \mathbf{0}.$$

Очевидно, $a \in L_1$, $b \in L_2$ и $a \in L_1 \cap L_2$, так как $a = -b$. Множество $L_1 \cap L_2$ содержит лишь нулевой вектор, следовательно, $a = \mathbf{0}$ и $b = \mathbf{0}$. Поскольку a и b являются линейными комбинациями линейно независимых систем векторов, все коэффициенты

$$\alpha_i, i = \overline{1, p}, \quad \beta_j, j = \overline{1, q},$$

равны нулю.

Мы убедились в том, что система B линейно независима. Так как согласно 2.4.13 $L_1 + L_2 = \mathcal{L}(B)$, она является базисом в $L_1 + L_2$. Видим, что в рассмотренном случае

$$\dim(L_1 + L_2) = p + q = \dim L_1 + \dim L_2.$$

Теперь предположим, что пересечение $L_1 \cap L_2$ содержит более одного вектора, и пусть $S_0 = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ — его базис. Так как $S_0 \subseteq L_1$, то S_0 можно дополнить до базиса

$$S_1 = \langle a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_m \rangle$$

пространства L_1 . Рассуждая аналогично, получим базис

$$S_2 = \langle a_1, \dots, a_s, c_1, \dots, c_k \rangle$$

пространства L_2 . Согласно 2.4.13 $L_1 + L_2$ является линейной оболочкой системы

$$R = \langle a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_s, c_1, \dots, c_k \rangle.$$

Очевидно, система векторов

$$T = \langle a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k \rangle$$

эквивалентна R и потому $L_1 + L_2 = \mathcal{L}(T)$.

Докажем, что система T линейно независима. Пусть

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s}_a + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m}_b + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k}_c = \mathbf{0}. \quad (2.4.1)$$

Нужно доказать, что все коэффициенты в (2.4.1) равны нулю. Из (2.4.1) получаем равенство $a + b = -c$. Так как $a, b \in L_1$, то и $a + b \in L_1$, т. е. $-c \in L_1$. Однако поскольку $c_1, \dots, c_k \in L_2$, то $c \in L_2$, и потому $-c \in L_2$. Отсюда следует, что $-c \in (L_1 \cap L_2)$ и $a + b \in (L_1 \cap L_2)$.

Так как S_0 — базис в $L_1 \cap L_2$, то найдутся такие коэффициенты $\tau_1, \dots, \tau_s$, что $a + b = \tau_1 a_1 + \dots + \tau_s a_s$. Получаем два разложения вектора $a + b$ по базису S_1 :

$$a + b = \tau_1 a_1 + \dots + \tau_s a_s + 0b_1 + \dots + 0b_m,$$

$$a + b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m.$$

Однако разложить вектор по базису можно только одним способом, поэтому $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$ и $b = 0$.

Равенство (2.4.1) ранее было кратко записано в виде $a + b + c = 0$; теперь оно сократилось до $a + c = 0$ или, в развернутом виде, до

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k = 0.$$

Слева записана линейная комбинация векторов, принадлежащих системе S_2 . Эта система линейно независима, следовательно,

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_s = \gamma_1 = \dots = \gamma_k = 0,$$

и потому система T также линейно независима.

Так как системы S_0, S_1, S_2, T являются базисами своих линейных оболочек, то

$$\dim L_1 = s + m, \quad \dim L_2 = s + k,$$

$$\dim(L_1 \cap L_2) = s, \quad \dim(L_1 + L_2) = s + m + k.$$

Убеждаемся, что утверждение теоремы справедливо:

$$\underbrace{\dim(L_1 + L_2)}_{s+m+k} = \underbrace{\dim L_1}_{s+m} + \underbrace{\dim L_2}_{s+k} - \underbrace{\dim(L_1 \cap L_2)}_s. \quad \square$$

Следующий пример показывает, что утверждение 2.4.15 нельзя непосредственно обобщить на случай суммы более двух подпространств.

ПРИМЕР. Пусть L_1 и L_2 — подпространства пространства V , $\dim L_i \geq 2$, $i = 1, 2$, L_3 — подпространство пространства L_2 , размерность которого не меньше единицы. Согласно 2.4.15

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Очевидно, $L_1 + L_2 + L_3 = L_1 + L_2$, и потому

$$\dim(L_1 + L_2 + L_3) = \dim(L_1 + L_2).$$

Также очевидно, что $(L_1 \cap L_2) \supseteq (L_1 \cap L_2 \cap L_3)$, вследствие чего

$$\dim(L_1 \cap L_2) \geq \dim(L_1 \cap L_2 \cap L_3).$$

Видим, что

$$\begin{aligned} \dim L_1 + \dim L_2 + \dim L_3 - \dim(L_1 \cap L_2 \cap L_3) &> \\ &> \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\dim(L_1 + L_2 + L_3) \neq \dim L_1 + \dim L_2 + \dim L_3 - \dim(L_1 \cap L_2 \cap L_3). \quad \square$$

2.4.16. Линейная оболочка системы векторов S из векторного пространства V совпадает с пересечением P всех подпространств пространства V , содержащих S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно 2.4.5 $S \subseteq \mathcal{L}(S)$. Поскольку $\mathcal{L}(S)$ является подпространством пространства V , содержащим S , то P может содержать только те векторы, которые принадлежат $\mathcal{L}(S)$, и потому P является подпространством пространства $\mathcal{L}(S)$. С другой стороны, P содержит все векторы из $\mathcal{L}(S)$, так как согласно 2.4.2 каждое подпространство векторного пространства V , содержащее S , содержит также и все линейные комбинации векторов из S . Доказаны включения $P \subseteq \mathcal{L}(S)$ и $P \supseteq \mathcal{L}(S)$, означающие, что $P = \mathcal{L}(S)$. $\square$

2.4.17. Сумма подпространств $L_1, \dots, L_m$ векторного пространства V называется *прямой*, если каждый вектор u из $L_1 + \dots + L_m$ представим в виде $u = u_1 + \dots + u_m$, где $u_i \in L_i$, $i = \overline{1, m}$, только одним способом. Прямая сумма обозначается знаком $\oplus$ (или $\dot{+}$).

ПРИМЕРЫ. Возьмем в векторном пространстве V какой-нибудь базис $B = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$. Каждый вектор a из V единственным способом разложим по базису B :

$$a = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n.$$

В сумме справа каждое однозначно определенное слагаемое $\gamma_i b_i$ принадлежит линейной оболочке $\mathcal{L}(b_i)$ вектора b_i . Это означает, что

$$V = \mathcal{L}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{L}(b_n).$$

Вследствие показанного выше, высказывания «зафиксируем в V какой-нибудь базис» и «разложим V в прямую сумму одномерных подпространств» являются в определенном смысле равносильными. Однако можно представить V и в виде прямой суммы подпространств, размерность которых не обязательно равна единице. Например,

$$V = \mathcal{L}(b_1) \oplus \mathcal{L}(b_2, \dots, b_n).$$

□

2.4.18. Если L_1 и L_2 — два подпространства векторного пространства V и $V = L_1 \oplus L_2$, то L_1 называется **алгебраическим дополнением** подпространства L_2 , а L_2 — **алгебраическим дополнением** подпространства L_1 (до V).

2.4.19 (Признаки прямой суммы). Сумма двух подпространств векторного пространства является прямой тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

- 1) пересечение слагаемых содержит только вектор 0 ;
- 2) размерность суммы равна сумме размерностей слагаемых;
- 3) если выделить в каждом слагаемом по базису и соединить их в одну систему, то получится базис суммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что складываются подпространства L_1 и L_2 векторного пространства V . Рассмотрим следующее утверждение:

А) сумма подпространств L_1 и L_2 прямая.

А) $\Rightarrow$ 1). Пусть $z \in (L_1 \cap L_2)$. Так как $z \in L_2$, то и $-z \in L_2$. Получаем два разложения:

$$0 = z + (-z), \quad 0 = 0 + 0,$$

в которых первое слагаемое принадлежит L_1 , а второе L_2 . Поскольку сумма прямая, то разложение может быть только одно, следовательно, $z = 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, то $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim\{0\} = 0$, поэтому

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $S_1 = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ и $S_2 = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$ — базисы подпространств L_1 и L_2 , $S = \langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k \rangle$. Согласно 2.4.13 $L_1 + L_2 = \mathcal{L}(S)$, следовательно, $\dim(L_1 + L_2) = \text{rank } S$. Из условия (2) следует, что

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 = m + k.$$

Получаем, что ранг системы S равен $m + k$, т. е. числу элементов в S . Это означает, что система S линейно независима и является базисом в $L_1 + L_2$.

3) $\Rightarrow$ А). Если $u \in L_1 + L_2$, то u можно разложить по базису S подпространства $L_1 + L_2$:

$$u = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k.$$

Полагая

$$u_1 = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m, \quad u_2 = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k,$$

получаем представление $u = u_1 + u_2$, в котором $u_1 \in L_1$ и $u_2 \in L_2$.

Предположим, что существует второе представление $u = u'_1 + u'_2$, где $u'_i \in L_i$, $i = 1, 2$, и пусть

$$u'_1 = \alpha'_1 a_1 + \dots + \alpha'_m a_m, \quad u'_2 = \beta'_1 b_1 + \dots + \beta'_k b_k,$$

тогда

$$u = \alpha'_1 a_1 + \dots + \alpha'_m a_m + \beta'_1 b_1 + \dots + \beta'_k b_k$$

— второе разложение вектора u по базису S , что невозможно. Это доказывает, что сумма $L_1 + L_2$ прямая. $\square$

ПРИМЕР. В пространстве R^4 рассмотрим два подпространства. Подпространство L_1 состоит из всех тех столбцов, у которых первые две компоненты равны нулю, а подпространство L_2 образовано всеми столбцами, у которых равны нулю две последние компоненты. Сумма подпространств L_1 и L_2 прямая, так как пересечение L_1 с L_2 содержит единственный вектор 0 .

Эта сумма совпадает с R^4 , так как если $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T \in R^4$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства принадлежит L_1 , а второе L_2 . Согласно 2.4.18 L_1 является алгебраическим дополнением подпространства L_2 до R^4 , а L_2 — алгебраическим дополнением подпространства L_1 . $\square$

2.4.20. Для любого подпространства L_1 векторного пространства V в V найдется такое подпространство L_2 , что $V = L_1 \oplus L_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем в L_1 базис $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ и дополним его до базиса $\langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k \rangle$ пространства V . Пусть $L_2 = \mathcal{L}(b_1, \dots, b_k)$.

а) $V = L_1 + L_2$. Действительно, если $u \in V$, то

$$u = \underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m}_{u_1 \in L_1} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k}_{u_2 \in L_2}.$$

б) Сумма $L_1 + L_2$ прямая, так как $\dim V = m + k$, $\dim L_1 = m$, $\dim L_2 = k$, $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$ (см. 2.4.19). $\square$

2.4.21. Если $V = L_1 \oplus L_2$, $u \in V$ и $u = u_1 + u_2$, где $u_i \in L_i$, $i = 1, 2$, то вектор u_1 называется **проекцией** вектора u на подпространство L_1 параллельно L_2 , а u_2 — проекцией на L_2 параллельно L_1 .

ПРИМЕР. Пусть подпространства L_1 и L_2 такие же, как в примере к 2.4.19. Возьмем в R^4 вектор $a = (1, 2, 3, 4)^T$. Так как $R^4 = L_1 \oplus L_2$ и

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то проекция вектора a на L_1 параллельно L_2 равна $(0, 0, 3, 4)^T$, а проекция того же вектора на L_2 параллельно L_1 равна $(1, 2, 0, 0)^T$. $\square$

МАТРИЦЫ, ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

3.1. ОПЕРАЦИИ С МАТРИЦАМИ

Как только в векторном пространстве зафиксирован базис, каждый вектор пространства однозначно задается столбцом координат в этом базисе. Операциям с векторами соответствуют операции со столбцами координат этих векторов. Если одна и та же операция производится с несколькими векторами, удобно столбцы координат этих векторов записывать рядом. Эта запись имеет вид прямоугольной таблицы.

3.1.1. *Матрицей называется прямоугольная таблица, в которой различаются элементы, строки и столбцы.*

Обычно такая таблица заключается в скобки, чтобы подчеркнуть, что данный объект — матрица, и указать ее границы. Элементами матриц могут быть числа, функции, матрицы и т. д. Как правило, мы будем рассматривать матрицы с элементами из поля F , такие матрицы называются **скалярными**, или **матрицами над F** . Матрица с m строками и n столбцами называется **(m, n) -матрицей**, или **$m \times n$ -матрицей**, или **матрицей размера m на n** . Если α_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, — элементы (m, n) -матрицы A , то эту матрицу удобно записывать в виде $A = (\alpha_{ij})_m^n$. Любая (n, n) -матрица называется **квадратной порядка n** . Часто столбцы или строки матрицы удобно рассматривать в качестве векторов из некоторого векторного пространства. Например, столбцы действительной матрицы с m строками являются векторами из R^m . Матрицу со столбцами $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ будем записывать в виде $[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$. Через $F^{m, n}$ обозначим множество всех (m, n) -матриц с элементами из поля F .

Предположим, что заданы две системы векторов

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle, \quad \langle b_1, \dots, b_m \rangle,$$

со своими столбцами координат:

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \dots, a_m = \begin{pmatrix} \alpha_{1m} \\ \vdots \\ \alpha_{nm} \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{n1} \end{pmatrix}, \dots, b_m = \begin{pmatrix} \beta_{1m} \\ \vdots \\ \beta_{nm} \end{pmatrix}.$$

Надо столбец координат каждого вектора первой системы сложить со столбцом координат соответствующего вектора второй системы. Запись будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nm} \end{pmatrix}.$$

3.1.2. Суммой двух (m, n) -матриц A и B называется (m, n) -матрица C , каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A + B = C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \dots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.1.3. Произведением скаляра $\gamma \in F$ на матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрица

$$\gamma A = \begin{pmatrix} \gamma\alpha_{11} & \dots & \gamma\alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma\alpha_{m1} & \dots & \gamma\alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.1.4. Разностью (m, n) -матриц A и B называется сумма $A + (-1)B$.

3.1.5. Сложение скалярных матриц ассоциативно и коммутативно, так как при этом складываются соответствующие элементы этих матриц, т. е. скаляры из поля F , а операция сложения в поле F обладает указанными свойствами. По тем же причинам выполняется также дистрибутивный закон, связывающий умножение на скаляр со сложением матриц: $\gamma(A + B) = \gamma A + \gamma B$.

3.1.6. (Определение операции транспонирования матриц). Транспонируя матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

получим матрицу

$$A^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Строки становятся столбцами, сохраняя порядок. □

3.1.7. Пусть

$$A = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n], \quad \bar{b} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, \quad \bar{c} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n.$$

Последнее равенство запишем в виде $A\bar{b} = \bar{c}$ и назовем столбец $\bar{c}$ произведением матрицы A на столбец $\bar{b}$.

Из этого определения следует, что матрицу можно умножить на столбец только тогда, когда высота этого столбца совпадает с числом строк матрицы.

ПРИМЕР.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 43 \end{pmatrix}.$$

3.1.8 (Следствие). Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Если $A\bar{b} = \bar{c}$, то

$$\gamma_i = \alpha_{i1}\beta_1 + \dots + \alpha_{in}\beta_n, \quad i = \overline{1, n}.$$

□

3.1.9. Произведением матриц A и B называется матрица, у которой каждый столбец равен произведению матрицы A на соответствующий столбец матрицы B .

ПРИМЕР 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right) = \\ = \begin{pmatrix} \alpha + 2\gamma & \beta + 2\delta \\ 3\alpha + 4\gamma & 3\beta + 4\delta \end{pmatrix}.$$

□

ПРИМЕР 2. Вычислить произведение AB , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая матрицу A на первый столбец матрицы B , получим первый столбец матрицы A . Умножение матрицы A на второй столбец матрицы B означает сложение первых двух столбцов матрицы A . При

умножении на последний столбец матрицы B у матрицы A сложатся все столбцы. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

3.1.10. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nl} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{m1} & \dots & \gamma_{ml} \end{pmatrix}$$

Если $C = AB$, то элемент γ_{ij} матрицы C является суммой произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B :

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nj}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Доказательство. Утверждение следует из 3.1.9 и 3.1.8. □

3.1.11. 1) Произведение AB определено тогда и только тогда, когда число столбцов у A равно числу строк у B ;

2) Если $C = AB$, то C наследует число строк от A и число столбцов от B .

Доказательство. Утверждения следуют из 3.1.7–3.1.9. □

3.1.12. Если произведение матриц B и A определено, то справедлив равенство $(BA)^T = A^T B^T$.

Доказательство. Пусть $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$. Элемент γ из j -й строки и k -го столбца матрицы $(BA)^T$ совпадает с элементом k -й строки j -го столбца матрицы BA , который равен $\beta_{k1}\alpha_{1j} + \dots + \beta_{km}\alpha_{mj}$. В матрице $A^T B^T$ элемент j -й строки k -го столбца равен $\alpha_{1j}\beta_{k1} + \dots + \alpha_{mj}\beta_{km}$, т. е. совпадает с γ . □

3.1.13. Правило 3.1.12 можно обобщить на любое число сомножителей по образцу:

$$(CBA)^T = ((CB)A)^T = A^T(CB)^T = A^T B^T C^T. \quad \square$$

3.1.14. Умножение строки c на матрицу B означает вычисление линейной комбинации строк матрицы B с коэффициентами, принадлежащими строке c . При умножении матрицы A на матрицу B можно каждую строку матрицы A умножать поочередно на матрицу B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая матрицу B^T справа на столбец c^T , мы получаем линейную комбинацию столбцов матрицы B^T (см. 3.1.7). Из $cB = (B^T c^T)^T$ следует первое утверждение. Второе следует из доказанного и утверждения 3.1.9. $\square$

ПРИМЕР.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\alpha + 3\beta & 2\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad \square$$

3.1.15. Существуют такие матрицы A и B , что $AB \neq BA$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, то произведение AB определено, а BA не определено.

Приведем другой пример, также показывающий, что произведение матриц зависит от порядка сомножителей:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

3.1.16. Произведение матриц ассоциативно: $C(BA) = (CB)A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ — столбцы матрицы A , то

$$\begin{aligned} BA &= [B\bar{a}_1, \dots, B\bar{a}_n], \quad C(BA) = [C(B\bar{a}_1), \dots, C(B\bar{a}_n)], \\ (CB)A &= [(CB)\bar{a}_1, \dots, (CB)\bar{a}_n]. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что для каждого столбца $\bar{a}$ подходящей высоты выполняется равенство $C(B\bar{a}) = (CB)\bar{a}$.

Пусть $C = (\gamma_{ij})_t^s$, $B = (\beta_{ij})_s^m$,

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad (CB)\bar{a} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_t \end{pmatrix}, \quad C(B\bar{a}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_t \end{pmatrix}.$$

Докажем, что для любого p элементы μ_p и λ_p двух последних столбцов совпадают, а потому совпадают и сами столбцы. Вычислим эти элементы:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^s \gamma_{pi} \beta_{ij} \right) \alpha_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^s \gamma_{pi} \beta_{ij} \alpha_j; \\ \lambda_p &= \sum_{i=1}^s \left(\gamma_{pi} \left(\sum_{j=1}^m \beta_{ij} \alpha_j \right) \right) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^m \gamma_{pi} \beta_{ij} \alpha_j. \end{aligned}$$

Правые части различаются только порядком слагаемых, поэтому $\mu_p = \lambda_p$, $p = \overline{1, t}$. $\square$

3.1.17. $\gamma(AB) = (\gamma A)B = A(\gamma B)$ для любых матриц A , B над полем F и любого $\gamma \in F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{jk})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$. Элемент i -й строки p -го столбца равен:

- а) $\gamma(\alpha_{i1}\beta_{1p} + \dots + \alpha_{in}\beta_{np})$ в $\gamma(AB)$;
- б) $(\gamma\alpha_{i1})\beta_{1p} + \dots + (\gamma\alpha_{in})\beta_{np}$ в $(\gamma A)B$;
- в) $\alpha_{i1}(\gamma\beta_{1p}) + \dots + \alpha_{in}(\gamma\beta_{np})$ в $A(\gamma B)$.

Все эти элементы совпадают. $\square$

3.1.18. Сложение и умножение матриц связаны дистрибутивным законом: $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)D = BD + CD$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 3.1.16. $\square$

3.1.19. Если $A = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$ и

$$\bar{e}_i = (\underbrace{0 \dots 0}_{i-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n-i})^T,$$

где $1 \leq i \leq n$, то $A\bar{e}_i = \bar{a}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно 3.1.7

$$A\bar{e}_i = 0\bar{a}_1 + \dots + 0\bar{a}_{i-1} + 1\bar{a}_i + 0\bar{a}_{i+1} + \dots + 0\bar{a}_n = \bar{a}_i. \quad \square$$

3.1.20. Имеется только одна такая (n, n) -матрица E , что равенство $AE = A$ справедливо для любой (m, n) -матрицы A . Матрица E называется единичной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = [\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n],$$

то $AE = [A\bar{e}_1, \dots, A\bar{e}_n] = A$ ввиду 3.1.19.

Предположим, что существует еще одна такая (n, n) -матрица E_1 , что $AE_1 = A$ для любой (m, n) -матрицы A . Возьмем $A = E$, тогда $EE_1 = E$. С другой стороны, $E_1^T E = E_1^T$ ввиду указанного выше свойства матрицы E . Транспонируя обе части последнего равенства и учитывая, что $E^T = E$, получаем соотношение $EE_1 = E_1$. Видим, что $E = E_1$. $\square$

3.1.21. Пусть A, B — (m, n) -матрицы с элементами из поля F . Если $A\bar{x} = B\bar{x}$ для любого столбца $\bar{x}$ высоты n с компонентами из F , то $A = B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n], \quad B = [\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n], \quad x = \bar{e}_i.$$

Из 3.1.19 следует, что

$$\bar{a}_i = A\bar{e}_i, \quad \bar{b}_i = B\bar{e}_i.$$

По условию $A\bar{e}_i = B\bar{e}_i$. Видим, что i -е столбцы матриц A и B совпадают для каждого i . Это означает, что и сами матрицы совпадают.

3.1.22. Рангом матрицы A (обозначим его $\text{rank } A$) называется ранг системы ее столбцов.

Число $\text{rank}_T A = \text{rank } A^T$ является рангом системы строк матрицы A . Позже будет доказано, что $\text{rank}_T A = \text{rank } A$ для любой матрицы A .

3.1.23. Квадратная матрица A называется **неособенной** (невырожденной), если система ее столбцов линейно независима, в противном случае A называется **особенной** (вырожденной).

3.1.24. Элементы $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $\alpha_{n1}, \alpha_{n-1,2}, \dots, \alpha_{1n}$ — **дополнительную диагональ** квадратной матрицы $(\alpha_{ij})_n$.

3.1.25. Матрица B называется **обратной** к квадратной матрице A и обозначается A^{-1} , если $BA = AB = E$.

ПРИМЕР. Матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

является обратной к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

В конце четвертой главы будут изучены различные свойства обратных матриц, а пока отметим лишь три из них.

3.1.26. Матрица A является обратной к A^{-1} .

3.1.27. Обратная к квадратной матрице A матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда A является матрицей неособенной.

Доказательство. Предположим, что элементы матрицы $A = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$ принадлежат полю F . Пусть

$$B = [\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n], \quad \bar{b}_i = (\beta_{1i}, \dots, \beta_{ni})^T, \quad i = \overline{1, n},$$

$$AB = E = [\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n].$$

Вследствие 3.1.9 равенство $AB = E$ равносильно системе равенств $A\bar{a}_i = \bar{e}^i$, $i = \overline{1, n}$, а каждое из этих равенств можно записать в виде уравнения

$$\beta_{1i}\bar{a}_1 + \dots + \beta_{ni}\bar{a}_n = \bar{e}^i \quad (3.1.1)$$

с неизвестными $\beta_1, \dots, \beta_n$. Если матрица A является неособенной, то столбцы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ образуют базис в пространстве F^n . Так как $\bar{e}^i \in F^n$, то уравнение (3.1.1) имеет решение. Это, в свою очередь, означает, что матрица B существует и является обратной к A .

Теперь допустим, что $\text{rank } A < n$. Пусть

$$L_1 = \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n), \quad L_2 = \mathcal{L}(\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n).$$

Очевидно, $\dim L_1 < n$, а $\dim L_2 = n$. Это означает, что один из векторов $\bar{e}^i$ не принадлежит подпространству L_1 и уравнение (3.1.1) не имеет решения, а потому не существует такой матрицы B , для которой $AB = E$. $\square$

3.1.28. Для любых квадратных неособенных матриц A и B одного порядка справедливо равенство $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E. \quad \square$$

3.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

3.2.1. Пусть V, W — векторные пространства над одним и тем же полем F , ψ — такое отображение пространства V в пространство W , что для каждого $\alpha \in F$ и для любых $x_1, x_2 \in V$

$$\psi(\alpha x_1) = \alpha \psi(x_1), \quad \psi(x_1 + x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2).$$

Отображение ψ называется **линейным оператором (гомоморфизмом)**, вектор $\psi(x_1)$ — **образом** вектора x_1 , а вектор x_1 — **прообразом** вектора $\psi(x_1)$.

Слово «гомоморфизм» образовано при помощи греческих слов *homos* (равный, одинаковый, общий) и *morphe* (форма).

ПРИМЕР 1. Зададим отображение $\psi : R^3 \rightarrow R^2$, сопоставив каждому вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in R^3$ вектор $(\alpha_1, \alpha_2)^T \in R^2$. Нетрудно убедиться в том, что ψ — линейный оператор. $\square$

ПРИМЕР 2. Векторное пространство V над полем F разложено в прямую сумму подпространств L_1 и L_2 . Оператор ψ , проектирующий V на L_1 параллельно L_2 , и оператор τ , проектирующий V на L_2 параллельно L_1 (см. 2.4.21), являются линейными. Действительно, пусть $a, b \in V$, $\alpha \in F$, тогда $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, где $a_i, b_i \in L_i$, $i = 1, 2$, и

$$\psi(a + b) = \psi(a_1 + b_1 + a_2 + b_2) = a_1 + b_1 = \psi(a) + \psi(b),$$

$$\psi(\alpha a) = \psi(\alpha a_1 + \alpha a_2) = \alpha a_1 = \alpha \psi(a).$$

Аналогично устанавливается линейность оператора τ . $\square$

3.2.2. Пусть $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ — нулевые векторы из векторных пространств V и W соответственно, $\psi : V \rightarrow W$ — линейный оператор, $x_1, \dots, x_n \in V$. Тогда:

$$1) \psi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W,$$

$$2) \psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 \psi(x_1) + \dots + \alpha_n \psi(x_n),$$

3) из линейной независимости системы $\langle \psi(x_1), \dots, \psi(x_n) \rangle$ следует линейная независимость системы $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\psi(\mathbf{0}_V) = \psi(0\mathbf{0}_V) = 0\psi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

$$2) \psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}) + \psi(\alpha_n x_n) = \\ = \psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}) + \alpha_n \psi(x_n) = \dots = \alpha_1 \psi(x_1) + \dots + \alpha_n \psi(x_n).$$

3) Если $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \mathbf{0}_V$, то $\psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \psi(\mathbf{0}_V)$, откуда ввиду (1) и (2) $\alpha_1 \psi(x_1) + \dots + \alpha_n \psi(x_n) = \mathbf{0}_W$, и потому $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, поскольку система $\langle \psi(x_1), \dots, \psi(x_n) \rangle$ линейно независима. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, из последнего утверждения в 3.2.2 вытекает такое следствие: если система $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ линейно зависима, то система $\langle \psi(x_1), \dots, \psi(x_n) \rangle$ образов векторов $x_1, \dots, x_n$ также является линейно зависимой.

3.2.3. Для любого линейного оператора $\psi : V \rightarrow W$ образ

$$\psi(V) = \{y \in W \mid \exists x \in V (\psi(x) = y)\}$$

пространства V является подпространством пространства W , размерность которого не превосходит размерности пространства V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Согласно 3.2.2 $\psi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \mathbf{0}_W \in \psi(V)$.

б) Если $y_1, y_2 \in \psi(V)$, то в V существуют такие x_1, x_2 , что $\psi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Но тогда для любых $\alpha, \beta \in F$

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha \psi(x_1) + \beta \psi(x_2) = \psi(\alpha x_1 + \beta x_2) \in \psi(V),$$

и потому $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \psi(V)$.

в) Пусть $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ — базис в $\psi(V)$. В V существуют такие векторы $a_1, \dots, a_n$, что $\psi(a_i) = b_i$, $i = \overline{1, n}$. Система $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно независима согласно 3.2.2, следовательно, $\dim V \geq n = \dim(\psi(V))$. $\square$

3.2.4. Пусть V и W — два векторных пространства над одним и тем же полем скаляров F , $B = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ — базис пространства V , $C = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ — какая-нибудь упорядоченная система векторов из W . Существует один и только один такой линейный оператор $\psi: V \rightarrow W$, что $\psi(b_i) = c_i$, $i = \overline{1, n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доопределим отображение $\psi: B \rightarrow C$ до отображения $\psi: V \rightarrow W$ следующим образом: если $x \in V$ и $x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, то $\psi(x) = \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n$. Построенный оператор ψ линейный. Действительно, пусть

$$\gamma \in F, \quad y \in V, \quad y = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n,$$

тогда $\psi(y) = \beta_1 c_1 + \dots + \beta_n c_n$,

$$\begin{aligned} \psi(\gamma x) &= \psi\left(\gamma \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^n (\gamma \alpha_i) b_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma \alpha_i c_i = \gamma \psi(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x + y) &= \psi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i + \sum_{i=1}^n \beta_i b_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) b_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) c_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i + \sum_{i=1}^n \beta_i c_i = \psi(x) + \psi(y). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\psi(b_i) &= \psi(0b_1 + \dots + 0b_{i-1} + 1b_i + 0b_{i+1} + \dots + 0b_n) = \\ &= 0c_1 + \dots + 0c_{i-1} + 1c_i + 0c_{i+1} + \dots + 0c_n = c_i.\end{aligned}$$

Если $\varphi: V \rightarrow W$ — другой линейный оператор, для которого $\varphi(b_i) = c_i$, $i = \overline{1, n}$, то для любого $x \in V$ найдутся такие коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что $x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, и потому

$$\varphi(x) = \alpha_1 \varphi(b_1) + \dots + \alpha_n \varphi(b_n) = \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n = \psi(x),$$

следовательно, φ совпадает с ψ . □

3.2.5. *Линейный оператор ψ , отображающий векторное пространство V в себя, называется **линейным преобразованием** пространства V .*

ПРИМЕР. Сопоставив каждому вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in R^3$ вектор $(\alpha_1, 0, \alpha_3)^T$, мы зададим линейное преобразование пространства R^3 .

3.2.6. *Пусть V, W — векторные пространства над одним и тем же полем. Линейный оператор ψ , взаимно однозначно отображающий V в W , называется **изоморфизмом**. Пространства V и W называются **изоморфными** (обозначение: $V \simeq W$), если существует изоморфизм ψ , отображающий V на W .*

Слово «изоморфизм» образовано при помощи греческих слов *isos* (равный, одинаковый, подобный) и *morphe* (форма).

ПРИМЕР. Можно изоморфно отобразить пространство R^3 на себя, если сопоставить каждому вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in R^3$ вектор $(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)^T$. □

3.2.7. *Отношение изоморфизма векторных пространств является*

- а) *рефлексивным*: $V \simeq V$;
- б) *симметричным*: $V \simeq W \iff W \simeq V$;
- в) *транзитивным*: $V_1 \simeq V_2 \& V_2 \simeq V_3 \Rightarrow V_1 \simeq V_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все три утверждения непосредственно следуют из определения 3.2.6.

3.2.8. Пусть V и W — векторные пространства, $\psi: V \rightarrow W$ — изоморфизм, $x_1, \dots, x_n \in V$. Тогда:

а) $\psi(x) = 0_W \iff x = 0_V$;

б) система $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ линейно независима тогда и только тогда, когда система $\langle \psi(x_1), \dots, \psi(x_n) \rangle$ линейно независима;

в) ранги систем $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и $\langle \psi(x_1), \dots, \psi(x_n) \rangle$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) В 3.2.2 уже доказано, что $\psi(0_V) = 0_W$. Отображение ψ взаимно однозначное, поэтому $\psi(x) = 0_W \Rightarrow x = 0_V$.

б) ($\implies$) Если $\alpha_1 \psi(x_1) + \dots + \alpha_n \psi(x_n) = 0_W$, то $\psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = 0_W$. Из утверждения (а) следует, что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_V$. Система $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ линейно независима, поэтому $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

($\impliedby$) Доказано в 3.2.2.

в) Пусть $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$ — база системы $S_1 = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Согласно (б) подсистема $\langle \psi(x_{i_1}), \dots, \psi(x_{i_k}) \rangle$ системы $S_2 = \langle \psi(x_1), \dots, \psi(x_n) \rangle$ линейно независима, следовательно, $\text{rank } S_1 \leq \text{rank } S_2$.

Если $\langle \psi(x_{j_1}), \dots, \psi(x_{j_s}) \rangle$ — база системы S_2 , то ввиду 3.2.2 линейно независимой является система $\langle x_{j_1}, \dots, x_{j_s} \rangle$, и потому $\text{rank } S_1 \geq \text{rank } S_2$. Это означает, что $\text{rank } S_1 = \text{rank } S_2$. $\square$

3.2.9. Векторные пространства V и W над одним и тем же полем скаляров F изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем в V и W соответственно базисы $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ и $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$.

($\implies$) Пусть ψ изоморфно отображает V на W . Принадлежащая V система векторов $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ линейно независима, следовательно, система $\langle \psi(a_1), \dots, \psi(a_n) \rangle$ векторов из W также линейно независима (см. 3.2.8), поэтому $\dim W \geq n$ и $\dim V \leq \dim W$. Согласно 3.2.3 $\dim W \leq \dim V$. Полученные соотношения доказывают, что $\dim V = \dim W$.

($\impliedby$) Предположим, что $\dim V = \dim W = n$. Определим отображение ψ пространства V на W следующим образом: $\forall a \in V \ \psi(a) = b \in W$ тогда и только тогда, когда столбцы координат векторов a и b в указанных фиксированных базисах совпадают. Очевидно, отображение ψ взаимно однозначное. Из 2.3.10 следует его линейность. $\square$

3.2.10 (Следствие). Каждое n -мерное действительное векторное пространство изоморфно пространству R^n . $\square$

3.3. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть F^n — векторное пространство над полем F , в котором векторами являются столбцы высотой n с компонентами из F . Сложение столбцов и умножение скаляра на столбец производятся покомпонентно (примеры: R^n , C^n). Возьмем какое-нибудь n -мерное векторное пространство V над F и зафиксируем в нем базис B_1 . Сопоставив каждому вектору из V столбец его координат, получим отображение $\varphi: V \rightarrow F^n$, которое, очевидно, является изоморфизмом. Если W — другое векторное пространство над F и $\dim W = m$, то, фиксируя в нем базис B_2 , аналогично получим изоморфизм $\psi: W \rightarrow F^m$. Пусть задан линейный оператор $\tau: V \rightarrow W$. Ему однозначно соответствует оператор $\tilde{\tau}: F^n \rightarrow F^m$, определяемый следующим образом: если $x \in V$ и $y = \tau(x)$, то $\tilde{\tau}(\varphi(x)) = \psi(y)$. Легко проверить, что оператор $\tilde{\tau}$ линейный. Диаграмма на рис. 3.1 позволяет сделать более наглядной связь между всеми введенными отображениями. Она показывает, что

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & W \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \psi \\ F^n & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & F^m \end{array}$$

Рис. 3.1

если при движении от какого-то вектора $x \in V$ по стрелке τ мы попадем в $u \in W$, то, двигаясь от x по стрелкам φ , $\tilde{\tau}$ и ψ , также попадем в u . Иначе говоря, для любого вектора $x \in V$ если $u = \tau(x)$, то и $\psi(\tilde{\tau}(\varphi(x))) = u$.

Ранее мы уже видели, что во многих случаях удобнее оперировать со столбцами координат векторов, чем с самими векторами. Пространства F^n и F^m как раз и состоят из столбцов координат векторов, принадлежащих пространствам V и W . Диаграмма 3.1 показывает, что оператор $\tau: V \rightarrow W$ можно подменить оператором $\tilde{\tau}: F^n \rightarrow F^m$.

Теперь мы докажем, что оператор $\tilde{\tau}$ всегда можно однозначно задать некоторой матрицей так, что образ каждого вектора $\bar{x} \in F^n$ можно найти простым умножением этой матрицы на $\bar{x}$.

3.3.1. Пусть B и C — базисы векторных пространств V , W над одним и тем же полем F , $\tau: V \rightarrow W$ — линейный оператор. Матрица A называется **матрицей оператора τ в базисах B , C** (или **относительно базисов B , C**), если при умножении матрицы A на столбец координат в базисе B любого вектора x из V получается столбец координат в базисе C образа вектора x .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\tau: V \rightarrow W$ — линейный оператор и $W = V$, т. е. τ является линейным преобразованием пространства V (см. 3.2.5), то обычно считают, что базисы B и C , о которых идет речь в 3.3.1, совпадают, и говорят о матрице A_τ линейного преобразования τ в базисе B .

3.3.2. Пусть $B = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ и $C = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$ — базисы векторных пространств V , W над одним и тем же полем F , $\tau: V \rightarrow W$ — линейный оператор, $\tau(b_i) = \alpha_{i1}c_1 + \dots + \alpha_{mi}c_m$, $\overline{\tau(b_i)} = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{mi})^T$ — столбец координат вектора $\tau(b_i)$ в базисе C , $i = \overline{1, n}$, A_τ — матрица, столбцами которой являются столбцы $\overline{\tau(b_i)}$ координат образов векторов базиса B :

$$A_\tau = [\overline{\tau(b_1)}, \dots, \overline{\tau(b_n)}] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

причем координаты берутся в базисе C . Матрица A_τ является матрицей оператора τ в базисах B , C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что при умножении матрицы A_τ на столбец координат в базисе B любого вектора x из V получается столбец координат образа этого вектора в базисе C :

$$\forall x \in V (A_\tau \bar{x}_B = \overline{\tau(x)}_C). \quad (3.3.1)$$

Пусть $x = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$, $\bar{x} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$. Ввиду линейности оператора τ

$$\tau(x) = \tau(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n) = \beta_1 \tau(b_1) + \dots + \beta_n \tau(b_n).$$

Переходим к столбцам координат в базисе C , учитывая 2.3.10:

$$\overline{\tau(x)} = \beta_1 \overline{\tau(b_1)} + \cdots + \beta_n \overline{\tau(b_n)}.$$

Тот же результат можно получить, умножая матрицу A_τ на столбец $\bar{x}$, поскольку это умножение можно рассматривать как взятие линейной комбинации столбцов матрицы A_τ с коэффициентами, принадлежащими столбцу $\bar{x}$ (см. 3.1.7):

$$A_\tau \bar{x} = [\overline{\tau(b_1)}, \dots, \overline{\tau(b_n)}] \bar{x} = \beta_1 \overline{\tau(b_1)} + \cdots + \beta_n \overline{\tau(b_n)} = \overline{\tau(x)}. \quad \square$$

3.3.3. Пусть V и W — векторные пространства над одним и тем же полем F ; B и C — их базисы, $\dim V = n$, $\dim W = m$. В базисах B , C каждая (m, n) -матрица над F является матрицей одного и только одного линейного оператора, отображающего V в W . Вследствие этого при любой фиксации базисов в пространствах V , W возникает взаимно однозначное соответствие между множеством всех (m, n) -матриц над F и множеством всех линейных операторов, отображающих V в W .

Доказательство. Возьмем некоторую (m, n) -матрицу A над F и сопоставим ей линейный оператор $\psi: V \rightarrow W$ следующим образом. При умножении матрицы A на столбец координат в базисе B вектора x получаем какой-то столбец $\bar{y}$ высоты m . Образом вектора x при отображении ψ будем считать тот вектор из пространства W , столбец координат которого в базисе C совпадает с $\bar{y}$. Построенный оператор ψ является линейным, так как ввиду свойств умножения матриц

$$A(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2) = \alpha_1 A \bar{x}_1 + \alpha_2 A \bar{x}_2.$$

Отметим, что при этом каждому линейному оператору $\tau: V \rightarrow W$ оказывается сопоставленной (m, n) -матрица A_τ над F , указанная в 3.3.2.

Если же какая-нибудь (m, n) -матрица D обладает тем свойством, что $D\bar{z}_B = \overline{\psi(z)}_C$ для каждого вектора $z \in V$, то D совпадает с A согласно 3.1.21, так как ввиду 3.3.1 для того же z справедливо равенство $A\bar{z}_B = \overline{\psi(z)}_C$. Вследствие этого рассматриваемое соответствие

между (m, n) -матрицами и линейными операторами является взаимно однозначным. $\square$

ПРИМЕР 1. В трехмерном действительном векторном пространстве V зафиксирован базис $B = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ и V разложено в прямую сумму подпространств $L_1 = \mathcal{L}(a_1, a_2)$ и $L_2 = \mathcal{L}(a_3)$. Линейный оператор ψ проектирует пространство V на L_1 параллельно L_2 , а линейный оператор τ проектирует V на L_2 параллельно L_1 . Построить матрицы этих операторов в базисе B .

Поскольку в суммах $a_1 + \mathbf{0}$, $a_2 + \mathbf{0}$, $\mathbf{0} + a_3$ первые слагаемые принадлежат подпространству L_1 , а вторые L_2 , то

$$\begin{aligned}\psi(a_1) &= a_1, & \psi(a_2) &= a_2, & \psi(a_3) &= \mathbf{0}, \\ \tau(a_1) &= \mathbf{0}, & \tau(a_2) &= \mathbf{0}, & \tau(a_3) &= a_3.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$a_1 = 1a_1 + 0a_2 + 0a_3, \quad a_2 = 0a_1 + 1a_2 + 0a_3, \quad a_3 = 0a_1 + 0a_2 + 1a_3.$$

Собираем матрицы операторов из столбцов координат образов векторов базиса:

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

ПРИМЕР 2. В примере 1 при построении матриц A_ψ и A_τ предполагалось, что ψ и τ являются линейными преобразованиями пространства V . Если же считать их линейными операторами, отображающими V на векторные пространства L_1 и L_2 соответственно, то число столбцов в матрицах этих операторов останется прежним, а число строк будет равно числу векторов в базисах пространств L_1 и L_2 . Нетрудно убедиться в том, что в базисах $B, \langle a_1, a_2 \rangle$ и $B, \langle a_3 \rangle$ матрицы указанных операторов имеют следующий вид:

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

ПРИМЕР 3. Векторы a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 заданы своими координатами в некотором базисе трехмерного действительного векторного

пространства V :

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Построим в том же базисе матрицу A_τ линейного преобразования τ пространства V , удовлетворяющего условию $\tau(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, 3$.

Пусть

$$A_\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Вводим матрицы $S_1 = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]$, $S_2 = [\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3]$. Ввиду 3.3.1 из условия задачи следует, что $A_\tau \bar{a}_i = \bar{b}_i$, $i = 1, 2, 3$. Это означает, что $A_\tau S_1 = S_2$ (см. 3.1.9). Умножая первую строку матрицы A_τ на матрицу S_1 , получим первую строку матрицы S_2 (см. 3.1.14). Возникает система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 5, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 3, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2. \end{cases}$$

Ее решение $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, -1, 1)$ является первой строкой матрицы A_τ .

Составляем еще две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 4, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 7, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = -1, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = -1. \end{cases}$$

Решая их, находим остальные элементы искомой матрицы:

$$A_\tau = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Более рациональный способ решения матричного уравнения вида $A_\tau S_1 = S_2$ будет указан в конце четвертой главы.

Предположим теперь, что мы находимся в условиях теоремы 3.3.2, и пусть

$$x \in V, \quad \bar{x}_B = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T, \quad \overline{\tau(x)}_C = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T.$$

Воспользуемся равенством (3.3.1):

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Получаем формулы, выражающие координаты вектора $\tau(x)$ через координаты вектора x :

$$\gamma_1 = \alpha_{11}\beta_1 + \dots + \alpha_{1n}\beta_n, \dots, \gamma_m = \alpha_{m1}\beta_1 + \dots + \alpha_{mn}\beta_n. \quad (3.3.2)$$

Сравнивая коэффициенты в правых частях формул (3.3.2) с элементами матрицы A_τ , получаем следующее утверждение.

3.3.4. Строки матрицы линейного оператора составлены из коэффициентов в формулах, выражающих координаты образа произвольного вектора через координаты его прообра. $\square$

3.3.5. Пусть B, C и D — базисы векторных пространств V, W и U над одним и тем же полем F , $\varphi: V \rightarrow W$ и $\psi: W \rightarrow U$ — линейные операторы, A_φ и A_ψ — матрицы этих операторов в базисах B и C , C и D соответственно. Тогда $\psi \cdot \varphi = \psi(\varphi)$ — линейный оператор, отображающий V в U , и матрица этого оператора в базисах B и D равна $A_\psi A_\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\psi\varphi(a) \in U$ для любого $a \in V$, то $\psi\varphi$ отображает V в U . Оператор $\psi\varphi$ линейный, так как для любых $a, b \in V$ и любого $\gamma \in F$

$$\begin{aligned} \psi\varphi(\gamma a) &= \psi(\gamma\varphi(a)) = \gamma\psi(\varphi(a)) = \gamma\psi\varphi(a), \\ \psi\varphi(a + b) &= \psi(\varphi(a) + \varphi(b)) = \psi\varphi(a) + \psi\varphi(b). \end{aligned}$$

Кроме того, если $a \in V$, то

$$(A_\psi A_\varphi) \bar{a}_B = A_\psi (A_\varphi \bar{a}_B) = A_\psi (\overline{\varphi(a)})_C = \overline{\psi(\varphi(a))}_D. \quad \square$$

3.3.6. Пусть V и W — два векторных пространства над одним полем F , $\dim V = n$, B_1 и B_2 — базисы пространств V и W , τ — линейный оператор, отображающий V на W , A_τ — матрица этого оператора, записанная в указанных базисах.

а) Оператор τ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица A_τ является квадратной неособенной;

б) если оператор τ является изоморфизмом, то существует обратное к τ отображение τ^{-1} , изоморфно отображающее W на V ;

в) если оператор τ является изоморфизмом, то матрица A_τ^{-1} является матрицей изоморфизма τ^{-1} в базисах B_2, B_1 ;

г) при $\dim W = \dim V$ каждая квадратная неособенная матрица A порядка n над F является матрицей в базисах B_1, B_2 некоторого оператора ψ , изоморфно отображающего V на W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) ($\Rightarrow$) Если τ изоморфно отображает V на W , то $\dim V = \dim W$ (см. 3.2.9), и потому любая матрица A_τ оператора τ является квадратной. Столбцы матрицы A_τ являются столбцами координат образов векторов базиса B_1 пространства V . Поскольку τ — изоморфизм, то эти образы также образуют линейно независимую систему (см. 3.2.8), следовательно, матрица A_τ является неособенной.

($\Leftarrow$) Пусть $a, b \in V$, $\tau(a) = \tau(b)$, $\bar{a}, \bar{b}$ — столбцы их координат в базисе B_1 , тогда $A_\tau \bar{a}$ и $A_\tau \bar{b}$ — столбцы координат образов векторов a и b в базисе B_2 , и потому

$$A_\tau \bar{a} = A_\tau \bar{b}. \quad (3.3.3)$$

Поскольку матрица A_τ квадратная неособенная, к ней существует обратная матрица A_τ^{-1} . Умножая на нее обе части в (3.3.3), получим равенство $A_\tau^{-1} A_\tau \bar{a} = A_\tau^{-1} A_\tau \bar{b}$, равносильное равенству $E \bar{a} = E \bar{b}$, из которого следует, что $a = b$. Это означает, что линейный (согласно условию) оператор τ взаимно однозначный, т. е. изоморфизм.

б) Поскольку отображение τ взаимно однозначное, то к нему существует обратное отображение τ^{-1} . Операторы τ и τ^{-1} связаны соотношениями

$$\forall a \in V \forall b \in W (\tau(\tau^{-1}(b)) = b, \tau^{-1}(\tau(a)) = a).$$

Докажем, что для любых $x, y \in W$ и любых $\alpha, \beta \in F$

$$\underbrace{\alpha\tau^{-1}(x) + \beta\tau^{-1}(y)}_{z_1} = \underbrace{\tau^{-1}(\alpha x + \beta y)}_{z_2}, \quad (3.3.4)$$

т. е. что оператор τ^{-1} является линейным. Применим τ к обеим частям равенства (3.3.4):

$$\begin{aligned} \tau(z_1) &= \alpha x + \beta y; \\ \tau(z_1) &= \tau(\alpha\tau^{-1}(x) + \beta\tau^{-1}(y)) = \\ &= \alpha\tau\tau^{-1}(x) + \beta\tau\tau^{-1}(y) = \alpha x + \beta y. \end{aligned}$$

Оператор τ взаимно однозначный, поэтому из $\tau(z_1) = \tau(z_2)$ следует, что $z_1 = z_2$.

в) Матрица $A_{\tau^{-1}}A_\tau$ является матрицей (в базисе B_1) оператора $\tau^{-1}\tau$ (см. 3.3.5), тождественно отображающего V на V : $\forall a \in V (\tau^{-1}\tau(a) = a)$. Однако матрицей тождественного преобразования пространства V в любом базисе является матрица E . Так как матрица преобразования определена однозначно (см. 3.3.2), то $A_{\tau^{-1}}A_\tau = E$, и потому $A_{\tau^{-1}} = A_\tau^{-1}$.

г) Чтобы доказать последнее утверждение, определим ψ следующим образом:

$$\forall a \in V (\psi(a) = b \in W \iff A\bar{a}_{B_1} = \bar{b}_{B_2}).$$

1) Оператор ψ отображает V на W : для любого $b \in W$ если $\bar{a}_{B_1} = A^{-1}\bar{b}_{B_2}$, то $\psi(a) = b$, так как $A\bar{a}_{B_1} = A(A^{-1}\bar{b}) = \bar{b}$.

2) Отображение ψ взаимно однозначное: если векторы a и b из пространства V отображаются в один и тот же элемент $d \in W$, то $A\bar{a} = A\bar{b} = \bar{d}$, и потому

$$A^{-1}\bar{d}_{B_2} = A^{-1}A\bar{a}_{B_1} = A^{-1}A\bar{b}_{B_1},$$

т. е. $\bar{a} = \bar{b}$, следовательно, $a = b$.

3) Оператор ψ линейный: так как $A(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) = \alpha A\bar{a} + \beta A\bar{b}$, тс $\psi(\alpha a + \beta b) = \alpha\psi(a) + \beta\psi(b)$. $\square$

3.4. ПЕРЕХОД К НОВОМУ БАЗИСУ

Пусть B и C — два базиса векторного пространства V . Как найти столбец координат $\bar{a}_C$ вектора $a \in V$ в базисе C , если известен столбец $\bar{a}_B$ его координат в базисе B ? Назовем базис B старым, базис C — новым. Из столбцов координат в базисе C векторов системы B составим матрицу.

3.4.1. Матрица, столбцы которой составлены из координат старых базисных векторов в новом базисе, называется *матрицей перехода от нового базиса к старому*.

3.4.2. Матрица перехода от нового базиса к старому всегда является неособенной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируя базис C в пространстве V , мы взаимно однозначно сопоставляем каждому вектору из V столбец его координат, т. е. вектор из F^n , где $n = \dim V$. Указанное отображение является изоморфизмом, при котором столбцы матрицы перехода являются образами векторов из системы B . Поскольку система B является линейно независимой, то и столбцы матрицы перехода образуют независимую систему (см. 3.2.8), следовательно, эта матрица неособенная. $\square$

3.4.3. Пусть $B = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ — базис векторного пространства V , $(b_1, \dots, b_n)$ — строка, составленная из базисных векторов. Столбец $\bar{x} \in F^n$ является столбцом координат вектора x в базисе B тогда и только тогда, когда $x = (b_1, \dots, b_n)\bar{x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$, тогда по правилу умножения строки на столбец получаем

$$(b_1, \dots, b_n)\bar{x} = (b_1, \dots, b_n)(\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n = x. \quad \square$$

3.4.4. Чтобы найти столбец координат вектора в новом базисе, надо матрицу перехода от нового базиса к старому умножить на столбец координат этого же вектора в старом базисе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, $C = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ — старый и новый базисы в пространстве V , $A = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$ — матрица перехода от C к B . Поскольку $\bar{a}_i$ — столбец координат вектора $b_i \in B$ в базисе C (см. 3.4.3), то согласно сказанному выше $b_i = (c_1, \dots, c_n)\bar{a}_i$ при $i = \overline{1, n}$. Полученную систему из n равенств можно записать в виде одного матричного равенства $(b_1, \dots, b_n) = (c_1, \dots, c_n)A$. Видим, что каждый вектор $x \in V$ удовлетворяет цепочке равенств

$$\begin{aligned} (c_1, \dots, c_n)\bar{x}_C = x &= (b_1, \dots, b_n)\bar{x}_B = \\ &= ((c_1, \dots, c_n)A)\bar{x}_B = (c_1, \dots, c_n)(A\bar{x}_B). \end{aligned}$$

Столбец $\bar{x}_C$ является столбцом координат вектора x в базисе C . Полученные равенства показывают, что и $A\bar{x}_B$ является столбцом координат вектора x в том же базисе, следовательно, $A\bar{x}_B = \bar{x}_C$, что и требовалось доказать. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Матрицу перехода от одного базиса к другому можно получить, пользуясь иными соображениями. Одним из линейных преобразований любого векторного пространства является тождественное преобразование ι , при котором образом каждого вектора служит тот же самый вектор. Как уже говорилось ранее, матрицей такого преобразования в любом базисе пространства V служит единичная матрица E . Результат окажется другим, если записать матрицу преобразования в двух базисах, пользуясь утверждением 3.3.2. Пусть в V зафиксированы два базиса B, C . Назовем один из них, например B , старым, а другой — новым. Столбцы матрицы A_ι преобразования ι , записанной в базисах B, C , составлены из координат образов векторов базиса B , т. е. тех же самых векторов, поскольку отображение ι тождественное, но координаты берутся уже в базисе B . Согласно 3.3.1 если $\bar{u}$ — столбец координат вектора u в базисе B , то $A_\iota \bar{u} = \iota(\bar{u})$ и $\overline{\iota(u)}$ — столбец координат вектора $\iota(u)$ в базисе C . Это означает, что A_ι является матрицей перехода от нового базиса к старому. Аналогичные рассуждения пока-

зывают, что матрица преобразования ι , записанная в базисах C , B , является матрицей перехода от старого базиса к новому. Поскольку ι — изоморфизм, обе матрицы являются неособенными.

ПРИМЕР. В пространстве R^2 даны два базиса $B_1 = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle$ и $B_2 = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle$, где

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора $\bar{c}$ в базисе B_2 , если его координаты в базисе B_1 равны $(2, 1)^T$.

Считаем базис B_1 старым, а B_2 — новым. Легко заметить, что $\bar{a}_1 = \bar{b}_1 + \bar{b}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{b}_1 - 2\bar{b}_2$. Составляем матрицу перехода от нового базиса к старому и находим координаты вектора $\bar{c}$ в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность решения:

$$\bar{c} = 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\bar{b}_1 + 0\bar{b}_2. \quad \square$$

3.4.5. Матрица, столбцы которой составлены из координат новых базисных векторов в старом базисе, называется **матрицей перехода от старого базиса к новому**.

3.4.6. Матрица перехода от старого базиса к новому всегда является неособенной и совпадает с матрицей, обратной к матрице перехода от нового базиса к старому. Чтобы найти столбец координат вектора в старом базисе, надо матрицу перехода от старого базиса к новому умножить на столбец координат этого же вектора в новом базисе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B и $C = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ — старый и новый базисы в векторном пространстве V , A — матрица перехода от нового базиса к старому. Согласно 3.4.2 матрица A является неособенной и потому к ней есть обратная A^{-1} (см. 3.1.27). Для любого вектора

$x \in V$ справедливо равенство $A\bar{x}_B = \bar{x}_C$. Умножая обе его части слева на A^{-1} , получим новое равенство

$$A^{-1}\bar{x}_C = \bar{x}_B. \quad (3.4.1)$$

Осталось доказать, что столбцы матрицы A^{-1} составлены из координат в базисе B векторов системы C . Пусть $A^{-1} = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$. Столбец координат в базисе C каждого вектора $c_i \in C$ совпадает с $\bar{e}_i$. Отсюда и из (3.4.1) следует, что $A^{-1}(\bar{c}_i)_C = A^{-1}\bar{e}_i = (\bar{c}_i)_B$. Однако согласно 3.1.7 $A^{-1}\bar{e}_i = \bar{a}_i$. Это означает, что $\bar{a}_i$ — столбец координат вектора c_i в базисе B . $\square$

Содержащиеся в 3.4.1–3.4.6 определения и правила легко путаются. Для лучшего их запоминания можно воспользоваться следующими указаниями.

а) Матрица перехода составляется из координат векторов определенного базиса — старого или нового. К этому базису и совершается переход.

б) Условно обозначим матрицы перехода от нового базиса к старому и от старого к новому соответственно дробями

$$\frac{\text{новый}}{\text{старый}}, \quad \frac{\text{старый}}{\text{новый}},$$

а словами «новый» и «старый» — столбцы координат вектора в новом и старом базисах. Теперь правилам нахождения столбца координат вектора при смене базиса можно придать вид формул

$$\frac{\text{новый}}{\text{старый}} \cdot \text{старый} = \text{новый}, \quad \frac{\text{старый}}{\text{новый}} \cdot \text{новый} = \text{старый},$$

которые легко запоминаются. Разумеется, эти формулы служат только mnemonic целям (*от греч.* mnemonikon — «искусство запоминания»).

Пусть $\psi: V \rightarrow W$ — линейный оператор, заданный матрицей A_ψ в базисах B и C пространств V и W соответственно. Как изменится матрица оператора, если перейти к новым базисам B' и C' ? Обозначим новую матрицу через $\tilde{A}_\psi$. Ее столбцы являются столбцами координат

образов векторов базиса B' , причем координаты должны быть в базисе C' .

Воспользуемся матрицей $G = \langle \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \rangle$ перехода от B к B' . Столбцы этой матрицы образованы координатами в базисе B векторов базиса B' . Столбцы матрицы

$$A_\psi G = [A\bar{c}_1 \dots A\bar{c}_n] = [\overline{\psi(c_1)} \dots \overline{\psi(c_n)}]$$

составлены из координат образов векторов базиса B' в старом базисе B пространства W (см. 3.3.2). Чтобы найти координаты этих векторов в новом базисе C' , надо умножить $A_\psi G$ слева на матрицу перехода H^{-1} от нового базиса C' пространства W к старому C (см. 3.4.4, 3.4.6).

Мы доказали следующую теорему.

3.4.7. Пусть A_ψ — матрица линейного оператора $\psi: V \rightarrow W$ в базисах B и C . Матрица $\tilde{A}_\psi$ того же оператора ψ в базисах B' , C' равна $H^{-1}A_\psi G$, где G и H^{-1} — матрицы перехода от B к B' и от C' к C соответственно. $\square$

Если пространства W и V совпадают, то ψ — линейное преобразование пространства V (см. 3.2.5). Полагая $B' = B$, $C' = C$ и $G = H$, получаем следующее утверждение.

3.4.8. Матрица A_ψ преобразования ψ в старом базисе связана с матрицей $\hat{A}_\psi$ того же преобразования в новом базисе соотношением $\hat{A}_\psi = H^{-1}A_\psi H$, где H — матрица перехода от старого базиса к новому. $\square$

ПРИМЕР. В базисе $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ матрица A_ψ линейного преобразования ψ пространства V имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Надо найти матрицу того же самого линейного преобразования в базисе $C = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, зная, что $c_1 = b_1$, $c_2 = b_1 - b_2$, $c_3 = -b_1 + b_3$.

Составим из координат векторов системы C в базисе B матрицу H перехода от B к C :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Способ построения матрицы H^{-1} будет изложен позже. В данной задаче ее нетрудно найти, учитывая, что

$$b_1 = c_1, \quad b_2 = c_1 - c_2, \quad b_3 = c_1 + c_3$$

и что H^{-1} — матрица перехода от C к B :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу преобразования ψ в новом базисе:

$$\begin{aligned} \hat{A}_\psi &= H^{-1} A_\psi H = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

3.4.9. Квадратные матрицы A и B называются *подобными*, если существует такая неособенная матрица H , что выполняется равенство $B = H^{-1}AH$. Если матрицы A и B подобны, то пишут $A \simeq B$ и говорят, что матрица B получена из A **преобразованием подобия**.

Итак, если матрицы A и B являются матрицами одного и того же линейного преобразования, но записаны в разных базисах, то A и B всегда подобны. Обратное также верно: если A — матрица линейного преобразования, записанная в каком-то базисе B пространства V и $\hat{A} = H^{-1}AH$, то неособенную матрицу H всегда можно рассматривать как матрицу перехода от базиса B к некоторому новому базису C пространства V , считая столбцы матрицы H столбцами координат векторов нового базиса в старом базисе. Это означает, что $\hat{A}$ является

матрицей того же самого линейного преобразования пространства V , но записана уже в базисе C .

3.4.10. Отношение $\simeq$ является

- а) рефлексивным: $A \simeq A$;
- б) симметричным: $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$;
- в) транзитивным: $A \simeq B \& B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $A = E^{-1}AE$.

б) $A = H^{-1}BH \iff B = HAH^{-1}$.

в) $A = H^{-1}BH \& B = G^{-1}CG \Rightarrow A = H^{-1}G^{-1}CGH = S^{-1}CS$, где $S = GH$ и $S^{-1} = H^{-1}G^{-1}$ (см. 3.1.28).

Теорема 3.4.10 показывает, что множество всех квадратных матриц одного порядка над F распадается на непересекающиеся классы, каждый из которых состоит из подобных матриц. Вследствие этого квадратные матрицы, не являющиеся подобными, всегда задают различные линейные преобразования.

3.5. РАНГ МАТРИЦЫ

Элементарные преобразования строк (m, n) -матрицы B можно производить, умножая B слева на квадратную матрицу H_p порядка m (кроме отмеченных, все не находящиеся на главной диагонали элементы указанных ниже матриц H_p равны нулю).

- а) К i -й строке прибавить j -ю, умноженную на α :

$$H_p = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & \alpha & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Скаляр α находится на пересечении i -й строки и j -го столбца.

б) i -ю строку умножить на $\alpha \neq 0$:

$$H_p = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Скаляр α находится на пересечении i -й строки и i -го столбца.

в) Переставить i -ю и j -ю строки:

$$H_p = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Единицы стоят на пересечении i -й строки и j -го столбца и на пересечении j -й строки и i -го столбца, нули — на пересечении i -й строки с i -м столбцом и j -й строки с j -м столбцом.

Элементарные преобразования столбцов (m, n) -матрицы A можно производить, умножая A справа на матрицу преобразования H_p^T порядка n . Матрицы H_p указанного выше вида и матрицы H_p^T часто называются **элементарными**. Элементарная матрица, при умножении на которую происходит лишь перестановка строк или столбцов матрицы, иногда называется **перестановочной**. Легко заметить, что каждая пере-

у которой $\alpha_{22}^{(2)'} \neq 0$ и т. д. Через конечное число шагов получим (m, n) -матрицу

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

у которой $\gamma_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, k}$. Очевидно, ранг системы строк этой матрицы совпадает с рангом системы столбцов и равен k . Матрица $\bar{A}$ получена из A элементарными преобразованиями строк и столбцов, поэтому $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} = k$ и $\text{rank}_T A = \text{rank}_T \bar{A} = k$ (см. 3.5.1), т. е. $\text{rank } A = \text{rank}_T A$. $\square$

Алгоритмом, приведенным в доказательстве теоремы 3.5.2, можно пользоваться для нахождения ранга матрицы. Однако поскольку этот алгоритм ориентирован на то, чтобы сделать очевидным совпадение рангов матрицы по строкам и столбцам, он предписывает ряд действий, излишних, если надо только найти ранг матрицы. Опишем более простой способ отыскания ранга матрицы.

Вычисляя ранг матрицы, достаточно совершать элементарные преобразования либо системы ее строк, либо системы ее столбцов. Предположим для определенности, что преобразуются строки матрицы. Преобразования производятся по этапам. На каждом этапе выделяется ведущий элемент. Строку и столбец, в которых находится ведущий элемент, называем ведущими. Как обычно, ведущим может быть любой элемент матрицы при условии, что он не равен нулю и не находится в строке или столбце, которые были ведущими на предыдущих этапах. Те строки матрицы, которые однажды были ведущими, больше не меняются. Домножая ведущую строку на подходящие множители и прибавляя поочередно к тем строкам, которые не были ведущими, добиваемся, чтобы все элементы ведущего столбца, принадлежащие тем строкам, которые не были ведущими, обратились в нуль. На этом этап заканчивается. Переходим, если необходимо, к следующему этапу.

Преобразования матрицы заканчиваются, если после выбора очередного ведущего элемента оказывается, что все ненулевые строки матрицы уже были ведущими. Ранг полученной матрицы равен числу ненулевых строк. Поскольку совершались элементарные преобразования системы строк, он равен рангу исходной матрицы.

ПРИМЕР. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 6 & 3 & 6 \\ -4 & -3 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-5} & -2 & 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.5.1)$$

Преобразования закончены, ранг матрицы равен трем. Действительно, выпишем последовательно те столбцы последней матрицы, номера которых совпадают с номерами столбцов, являвшихся ведущими ранее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ни один из столбцов полученной матрицы не может быть представлен как линейная комбинация столбцов, находящихся левее. По лемме 2.2.13 эта система столбцов линейно независима, значит, ранг матрицы (3.5.1) не меньше трех. Однако ранг матрицы (3.5.1) не может быть больше числа ее ненулевых строк, равного трем. Заключаем, что ранг матрицы (3.5.1) равен трем. $\square$

3.5.3. Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $AB = C$. Столбец с номером i матрицы C получается умножением строк матрицы A на i -й столбец матрицы B , т. е. является линейной комбинацией столбцов матрицы A (см. 3.1.7), поэтому $\text{rank } C \leq \text{rank } A$. Аналогичным способом из $B^T A^T = C^T$ получаем соотношения

$$\text{rank } C = \text{rank } C^T \leq \text{rank } B^T = \text{rank } B. \quad \square$$

3.5.4. При умножении матрицы A на неособенную матрицу ранг произведения равен рангу матрицы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим неособенную матрицу, на которую умножается A , через Q , и пусть $AQ = B$. Ввиду 3.5.3 из $B = AQ$ и $A = BQ^{-1}$ следует, что $\text{rank } B \leq \text{rank } A$ и $\text{rank } A \leq \text{rank } B$, и потому $\text{rank } B = \text{rank } A$. Аналогично доказывается, что если $C = QA$, то $\text{rank } C = \text{rank } A$. $\square$

Следующее утверждение является обобщением предыдущего.

3.5.5. Пусть $C = AB$. Ранг матрицы C равен рангу матрицы B , если ранг матрицы A равен числу ее столбцов, и совпадает с рангом матрицы A , если ранг матрицы B равен числу ее строк.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ранг матрицы A равен числу ее столбцов. Выделим в системе всех строк матрицы A какую-нибудь базу и обозначим через A_1 матрицу, полученную из A удалением всех строк, не вошедших в эту базу. Число строк матрицы B равно числу столбцов матрицы A (см. 3.1.11). Число столбцов матрицы A_1 совпадает

с числом столбцов матрицы A , поэтому A_1 можно умножить на B . Матрица A_1 неособенная, так как она квадратная и ее строки образуют линейно независимую систему. Согласно 3.5.4 ранг матрицы $A_1 B$ совпадает с рангом сомножителя B . Матрица AB получается из $A_1 B$ добавлением некоторых строк, ее ранг от этого уменьшиться не может. Возрасти он также не может, потому что $\text{rank } AB \leq \text{rank } B$ (см. 3.5.3). Из сказанного следует, что $\text{rank } AB = \text{rank } B$.

Предположим, что ранг матрицы B равен числу ее строк. Так как $C = AB$, то $B^T A^T = C^T$. У матрицы B^T линейно независимы столбцы, поэтому $\text{rank } C^T = \text{rank } A^T$. Из соотношений $\text{rank } A^T = \text{rank } A$ и $\text{rank } C^T = \text{rank } C$ получаем требуемое равенство $\text{rank } C = \text{rank } A$. $\square$

3.5.6. Матрица называется матрицей *полного ранга*, если линейно независимой является либо система ее строк, либо система ее столбцов.

3.5.7. Каждую ненулевую матрицу A можно представить в виде произведения двух матриц полного ранга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = (m, n)$ -матрица, $\text{rank } A = s$ и ее столбцы $\bar{a}_{j_1}, \dots, \bar{a}_{j_s}$ образуют максимальную линейно независимую систему. В качестве B возьмем (m, s) -матрицу $[\bar{a}_{j_1}, \dots, \bar{a}_{j_s}]$. Очевидно, $\text{rank } B = s$. Если $\bar{a}_i$ — столбец матрицы A , то

$$\bar{a}_i = \alpha_{1i} \bar{a}_{j_1} + \dots + \alpha_{si} \bar{a}_{j_s}$$

для подходящих $\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{si}$. Пусть $\bar{c}_i = [\alpha_{1i} \dots \alpha_{si}]^T$ и $C = [\bar{c}_1 \dots \bar{c}_n]$ — (s, n) -матрица, тогда $A = BC$. Согласно 3.5.3 $s = \text{rank } A \leq \text{rank } C$. Ввиду 3.5.2 ранг матрицы не может быть больше числа ее строк. Поскольку у C имеется ровно s строк, то $\text{rank } C = s$. $\square$

ПРИМЕР. Представить матрицу

$$A = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

в виде произведения двух матриц полного ранга.

Ищем базу системы столбцов матрицы:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 & 0 & -4 \\ -1 & \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4, \bar{b}_5].
 \end{aligned}$$

Ранг последней матрицы равен трем, и столбцы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_4$ образуют базу системы ее столбцов. Поскольку она получена из A элементарными преобразованиями строк, ранг матрицы A также равен трем. Так как столбцы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_4$ линейно независимы и получены из столбцов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4$ элементарными преобразованиями строк, столбцы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4$ также линейно независимы и образуют базу в системе столбцов матрицы A .

Теперь надо найти коэффициенты в разложениях последних двух столбцов по векторам базы:

$$\bar{a}_3 = \alpha_1 \bar{a}_1 + \beta_1 \bar{a}_2 + \gamma_1 \bar{a}_4, \quad \bar{a}_5 = \alpha_2 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{a}_2 + \gamma_2 \bar{a}_4.$$

Возникают две системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3\alpha_1 & + 2\gamma_1 = 3 \\ 4\alpha_1 + 3\beta_1 + 1\gamma_1 = 1 \\ 2\alpha_1 + 2\beta_1 & = 0 \\ 5\alpha_1 + 2\beta_1 + 1\gamma_1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 3\alpha_2 & + 2\gamma_2 = 2 \\ 4\alpha_2 + 3\beta_2 + 1\gamma_2 = 4 \\ 2\alpha_2 + 2\beta_2 & = 2 \\ 5\alpha_2 + 2\beta_2 + 1\gamma_2 = 3, \end{cases}$$

которые мы решаем одновременно, совершая элементарные преобразования строк матрицы

$$[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4, \bar{a}_3, \bar{a}_5] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 3 & 2 & \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 4 & \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & \\ 5 & 2 & \boxed{1} & 3 & 3 & \end{array} \right).$$

Однако такие преобразования уже сделаны ранее с матрицей A , отличающейся от данной лишь порядком столбцов, поэтому мы получим матрицу

$$[\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_4, \bar{b}_3, \bar{b}_5] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \end{array} \right).$$

Видим, что

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = -1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_2 = 1,$$

и потому искомое произведение выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что ранг первой из двух матриц в правой части равен числу ее столбцов, а ранг второй — числу строк. $\square$

Как уже отмечалось ранее, системой линейных уравнений с неизвестными $\xi_1, \dots, \xi_n$ называется система вида

[illegible]

Далее будем предполагать, что коэффициенты α_{ij} и свободные члены β_i рассматриваемых систем линейных уравнений принадлежат полю F . Если каждое из уравнений системы (4.1.1) после замены неизвестных ξ_i элементами $\gamma_i \in F$ обращается в тождество, то столбец $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T \in F^n$ называется **решением** этой системы. При $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$ система (4.1.1) называется **однородной**, в остальных случаях — **неоднородной**. Если система состоит из одного уравнения, то согласно последнему определению это уравнение является либо однородным, либо неоднородным. В связи с этим иногда говорят о системах однородных линейных уравнений и о системах неоднородных линейных уравнений.

Система называется **несовместной**, если она не имеет решений, **совместной** — в ином случае.

Совместная система (4.1.1) называется **определенной**, если она имеет единственное решение, **неопределенной**, если она имеет более одного решения. Две системы линейных уравнений с коэффициентами из поля F называются **эквивалентными**, если либо они обе несовместны, либо обе совместны и множества их решений совпадают.

Из коэффициентов системы 4.1.1 можно составить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n],$$

называемую (основной) матрицей системы. Полагая

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad (4.1.2)$$

получаем краткую запись системы (4.1.1):

$$A\bar{u} = \bar{b}. \quad (4.1.3)$$

Этой системе соответствует однородная система

$$A\bar{u} = \mathbf{0}, \quad (4.1.4)$$

часто называемая **присоединенной** к системе (4.1.1) (или **ассоциированной, приведенной**). Очевидно, такая система всегда является совместной, так как имеет решение $\bar{u} = \mathbf{0}$.

4.1.1. Совокупность всех решений однородной системы линейных уравнений (4.1.4) с n неизвестными является подпространством векторного пространства F^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{0}$ является решением системы (4.1.4). Если $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ — какие-то решения системы (4.1.4) и $\alpha \in F$, то

$$A(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = A\bar{u}_1 + A\bar{u}_2 = \mathbf{0}, \quad A(\alpha\bar{u}_1) = \alpha A\bar{u}_1 = \mathbf{0}.$$

Это означает, что $\alpha\bar{u}_1$ и $\bar{u}_1 + \bar{u}_2$ также являются решениями системы (4.1.4). $\square$

4.1.2. Базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений называется **фундаментальной системой решений**.

4.1.3. а) Разность любых двух решений неоднородной системы (4.1.3) является решением присоединенной однородной системы (4.1.4).

б) Сумма любого решения неоднородной системы (4.1.3) с любым решением присоединенной однородной системы (4.1.4) служит решением системы (4.1.3).

в) Если найти одно решение неоднородной системы (4.1.3) и сложить его с каждым решением присоединенной однородной системы (4.1.4), то получится множество всех решений системы (4.1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через M множество всех решений неоднородной системы (4.1.3), а через L — множество всех решений присоединенной к ней системы (4.1.4).

а) Если $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in M$, то

$$A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) = A\bar{u}_1 - A\bar{u}_2 = \bar{b} - \bar{b} = \mathbf{0},$$

т. е. $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in L$.

б) Если $\bar{y} \in M$, $\bar{z} \in L$, то

$$A(\bar{y} + \bar{z}) = A\bar{y} + A\bar{z} = \bar{b} + \mathbf{0} = \bar{b},$$

следовательно, $\bar{y} + \bar{z} \in M$.

в) Ввиду свойства (а), вычитая из каждого решения неоднородной системы (4.1.3) одно фиксированное решение $\bar{z}$ той же системы, каждый раз будем получать решение однородной системы (4.1.4). Это означает, что, прибавляя $\bar{z}$ к каждому решению системы (4.1.4), мы получим множество векторов $K \supseteq M$. Осталось доказать, что каждый вектор из K принадлежит множеству M , т. е. является решением системы (4.1.3). Однако это следует из утверждения (б). Таким образом, $K = M$. $\square$

В разделе 2.1 общее решение системы записывалось также в виде системы. Утверждения 4.1.1 и 4.1.3 позволяют записать общее решение $\bar{u}$ неоднородной системы в виде суммы одного частного решения $\bar{u}_0$ этой системы и линейной комбинации векторов $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$, образующих фундаментальную систему решений присоединенной однородной системы:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \gamma_1 \bar{u}_1 + \dots + \gamma_m \bar{u}_m.$$

Такую форму записи назовем **общим решением в параметрическом (или векторном) виде**. Термин «параметр» происходит от др.-греч. *παράμετρος* «соразмеряю» и означает величину, значение которой можно задавать.

В записи общего решения однородной системы участвуют только векторы из фундаментальной системы решений, и потому оно имеет вид

$$\bar{u} = \gamma_1 \bar{u}_1 + \dots + \gamma_m \bar{u}_m.$$

ПРИМЕР. Записать в параметрическом виде решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_3 - 3\xi_4 = 1, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 = 1. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению первое:

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_3 - 3\xi_4 = 1, \\ \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 2. \end{cases}$$

Разделим свободные и связанные переменные:

$$\begin{cases} \xi_1 = 1 - 2\xi_3 + 3\xi_4, \\ \xi_2 = 2 - \xi_3 + \xi_4. \end{cases}$$

Полагая ξ_3 и ξ_4 равными нулю, получим частное решение $u_0 = (1, 2, 0, 0)^T$. Записываем присоединенную однородную систему:

$$\begin{cases} \xi_1 = -2\xi_3 + 3\xi_4, \\ \xi_2 = -\xi_3 + \xi_4. \end{cases}$$

Полагая сначала $\xi_3 = 1, \xi_4 = 0$, а затем $\xi_3 = 0, \xi_4 = 1$, получаем ее фундаментальную систему решений, состоящую из векторов

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждое решение однородной системы является линейной комбинацией векторов u_1 и u_2 :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное выражение является общим решением присоединенной однородной системы. Чтобы записать общее решение неоднородной системы, прибавляем вектор u_0 :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ и $\bar{b} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, то ввиду 3.1.7 система (4.1.3) примет вид

$$\xi_1 \bar{a}_1 + \dots + \xi_n \bar{a}_n = \bar{b}.$$

Видим, что система (4.1.3) имеет решение тогда и только тогда, когда вектор $\bar{b}$ принадлежит подпространству $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$. $\square$

4.1.4. Пусть $A\bar{x} = \bar{b}$ — система линейных уравнений и $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$. Матрица $\bar{A} = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n \bar{b}]$ называется *расширенной матрицей* этой системы.

4.1.5 (Теорема Кронекера–Капелли). Система линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ совместна тогда и только тогда, когда $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$. Система $A\bar{x} = \bar{b}$ совместна тогда и только тогда, когда $\bar{b} \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$.

а) Если $\bar{b} \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$, то $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \bar{b})$, поэтому

$$\dim \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \dim \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \bar{b}).$$

Согласно 2.4.7 $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A}$.

б) Из $\bar{b} \notin \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ следует неравенство $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \neq \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \bar{b})$. Так как пространство $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ является подпространством пространства $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \bar{b})$, но не совпадает с ним, то его размерность строго меньше размерности пространства $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \bar{b})$ (см. 2.4.3), следовательно, $\text{rank } A < \text{rank } \bar{A}$ (см. 2.4.7). $\square$

4.1.6. Пусть $A \in F^{m,n}$. Система линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ имеет решение при любой правой части $\bar{b} \in F^m$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен числу уравнений в системе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$, $\bar{a}_i \in F^m$, $i = \overline{1, n}$.

а) Если $\text{rank } A = m$, то $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = F^m$, поэтому $\bar{b} \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ для любого $\bar{b}$ из F^m , следовательно, для каждого $\bar{b} \in F^m$ найдется такой столбец $\bar{u}$, что $\bar{b} = A\bar{u}$.

б) Если при любом $\bar{b} \in F^m$ система $A\bar{x} = \bar{b}$ совместна, то каждый вектор $\bar{b} \in F^m$ принадлежит $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$, следовательно, $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = F^m$, и потому

$$\text{rank } A = \dim \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \dim F^m = m. \quad \square$$

4.1.7. Совместная система $A\bar{x} = \bar{b}$ имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда система столбцов матрицы A линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совместная система $A\bar{x} = \bar{b}$ имеет только одно решение тогда и только тогда, когда вектор $\bar{b}$ можно представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы A только одним способом, что равносильно линейной независимости системы столбцов матрицы A согласно 2.2.12. $\square$

4.1.8. Система линейных уравнений с квадратной неособенной матрицей всегда совместна и обладает единственным решением. Однородная система линейных уравнений с квадратной матрицей имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрица системы особенная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из 4.1.6 и 4.1.7. $\square$

4.1.9. Размерность подпространства решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными равна $n - k$, где k — ранг матрицы системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем рассматриваемую систему в виде $A\bar{x} = \mathbf{0}$ и обозначим ее неизвестные через $\xi_1, \dots, \xi_n$. Поскольку размерность пространства равна числу векторов в базисе этого пространства, утверждение будет доказано, если удастся построить фундаментальную систему решений системы $A\bar{x} = \mathbf{0}$, содержащую $n - k$ векторов. Решая данную систему методом исключения неизвестных (параграф 2.1), по-

лучим равносильную ей систему

$$\begin{cases} \xi_1 = \alpha_{1k+1}\xi_{k+1} + \dots + \alpha_{1n}\xi_n, \\ \xi_2 = \alpha_{2k+1}\xi_{k+1} + \dots + \alpha_{2n}\xi_n, \\ \dots\dots\dots \\ \xi_k = \alpha_{kk+1}\xi_{k+1} + \dots + \alpha_{kn}\xi_n. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

(Для упрощения рассуждений считаем, что свободными являются именно неизвестные $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$; этого всегда можно добиться, изменив нумерацию неизвестных.) При решении системы указанным способом производятся элементарные преобразования строк матрицы системы, не меняющие ранга, поэтому число уравнений в системе (4.1.5) равно рангу матрицы A . Чтобы получить частные решения системы (4.1.5), будем придавать одному из свободных неизвестных в правой части системы (4.1.5) значение 1, а остальным 0. Получим векторы

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1k+1} \\ \alpha_{2k+1} \\ \vdots \\ \alpha_{kk+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1k+2} \\ \alpha_{2k+2} \\ \vdots \\ \alpha_{kk+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{a}_{n-k} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{kn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые являются решениями системы (4.1.5) и образуют линейно независимую систему. Эта система является базисом в пространстве всех решений системы уравнений (4.1.5), если каждое решение системы (4.1.5) представимо в виде линейной комбинации найденных решений. Докажем, что это справедливо.

Воспользуемся следующим наблюдением: для любых двух решений $\bar{z}_i = (\delta_1^i, \dots, \delta_n^i)^T$, $i = 1, 2$, системы (4.1.5) из $\delta_{k+1}^1 = \delta_{k+1}^2, \dots, \delta_n^1 = \delta_n^2$ следует, что $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$. Действительно, придавая свободным неизвестным $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ в уравнениях системы (4.1.5) любые фиксированные значения, мы всегда получим однозначно определенные значения неизвестных $\xi_1, \dots, \xi_k$.

Докажем теперь, что произвольное решение $\bar{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$ системы (4.1.5) можно представить в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-k}$. В самом деле, вектор $\bar{c} = \beta_{k+1}\bar{a}_1 + \dots + \beta_n\bar{a}_{n-k}$ также является решением этой системы, причем последние $n - k$ компонент векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ совпадают. Согласно сказанному ранее $\bar{b} = \bar{c}$. Мы доказали, что система $\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-k} \rangle$ является базисом в пространстве решений рассматриваемых систем линейных уравнений. Размерность этого пространства равна числу векторов в этой системе, т. е. $n - k$. $\square$

4.1.10. Уравнение

$$\bar{a}^T \bar{x} = \beta \quad (4.1.6)$$

называется *следствием* системы линейных уравнений

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (4.1.7)$$

если каждое решение этой системы является решением указанного уравнения.

4.1.11. Уравнение (4.1.6) является следствием совместной системы линейных уравнений (4.1.7) тогда и только тогда, когда строка, составленная из коэффициентов при неизвестных и свободного члена в уравнении (4.1.6), линейно выражается через строки расширенной матрицы системы (4.1.7).

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если строка, составленная из коэффициентов при неизвестных и свободного члена в уравнении (4.1.7), линейно выражается через строки расширенной матрицы системы (4.1.7), то для подходящей строки $\bar{s}^T$ выполняются равенства $\bar{s}^T A = \bar{a}$ и $\bar{s}^T \bar{b} = \beta$ (см. 3.1.14). Пусть $\bar{u}$ — решение системы (4.1.7), тогда $A\bar{u} = \bar{b}$. Умножая обе части слева на строку $\bar{s}^T$, получим новые равенства

$$\bar{s}^T A\bar{u} = \bar{s}^T \bar{b}, \quad \bar{a}\bar{u} = \beta.$$

Справедливость последнего из них означает, что $\bar{u}$ — решение уравнения (4.1.6).

($\Rightarrow$) Предположим, что каждое решение системы (4.1.7) является решением уравнения (4.1.6). Добавим уравнение (4.1.6) к системе (4.1.7). Запишем новую систему в виде

$$B\bar{x} = \bar{d}. \quad (4.1.8)$$

Очевидно, множества решений систем (4.1.7) и (4.1.8) совпадают. Будем предполагать, что добавленное уравнение в системе (4.1.8) является последним. Рассмотрим однородные системы

$$A\bar{x} = 0, \quad (4.1.9)$$

$$B\bar{x} = 0. \quad (4.1.10)$$

Согласно предположению множества решений систем (4.1.7) и (4.1.8) совпадают. Вычитая одно из них из остальных, получим множество решений систем (4.1.9) и (4.1.10) согласно 4.1.3. Из этого следует, что совпадают размерности пространств решений систем (4.1.9) и (4.1.10). Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений равна разности между числом неизвестных и рангом матрицы системы (см. 4.1.9). Поскольку число неизвестных в системах (4.1.9) и (4.1.10) одинаково, справедливо равенство $\text{rank } A = \text{rank } B$. Матрица B получена из A добавлением одной строки. Совпадение рангов матриц означает, что добавленная строка является линейной комбинацией строк матрицы A . Ввиду этого существует такая строка $\bar{s}^T$, что $\bar{a}^T = \bar{s}^T A$.

Обозначим через $\bar{A}$ и $\bar{B}$ расширенные матрицы систем (4.1.7) и (4.1.8), а через $\bar{z}^T$ последнюю строку матрицы $\bar{B}$. Докажем, что если равенство

$$\bar{s}^T \bar{A} = \bar{z}^T \quad (4.1.11)$$

не выполняется, то система (4.1.8) не имеет решения. В самом деле, строка $-\bar{s}^T \bar{A}$ является линейной комбинацией строк матрицы $\bar{A}$, а значит, и строк матрицы $\bar{B}$. Прибавляя ее к последней строке матрицы $\bar{B}$, получим матрицу $\bar{B}_1$, ранг которой совпадает с рангом матрицы $\bar{B}$ согласно 3.5.1. Последняя строка матрицы $\bar{B}_1$ имеет вид $(0, \dots, 0, \delta)$, $\delta \neq 0$, поэтому последний столбец этой матрицы не может быть линейно выражен через остальные столбцы. Это означает, что ранги матриц $\bar{B}_1$ и $\bar{B}$ на единицу больше ранга матрицы B . По теореме 4.1.5 система (4.1.8) оказывается несовместной, что противоречит нашему предположению.

Итак, равенство (4.1.11) справедливо и оно означает, что строка, составленная из коэффициентов при неизвестных и свободного члена в уравнении (4.1.6), линейно выражается через строки расширенной матрицы системы (4.1.7). $\square$

В утверждении 4.1.11 не сказано, является ли система (4.1.7) однородной или неоднородной, оно справедливо в каждом из этих случаев. Однако если речь идет об однородной системе, то формулировку утверждения можно несколько упростить.

4.1.12. Уравнение $\bar{a}^T \bar{x} = 0$ является следствием однородной системы линейных уравнений $A\bar{x} = 0$ тогда и только тогда, когда строка $\bar{a}^T$ линейно выражается через строки матрицы A . $\square$

Утверждение 4.1.11 можно сформулировать также следующим образом: уравнение (4.1.6) является следствием совместной системы линейных уравнений (4.1.7) тогда и только тогда, когда оно может быть представлено в виде линейной комбинации уравнений системы (4.1.7).

4.1.13 (Теорема Фредгольма). Система линейных уравнений (4.1.7) совместна тогда и только тогда, когда уравнение

$$\bar{b}^T \bar{y} = 0 \quad (4.1.12)$$

является следствием системы линейных уравнений

$$A^T \bar{y} = 0. \quad (4.1.13)$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\bar{b} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$. Предположим, что уравнение (4.1.12) является следствием системы (4.1.13). Согласно 4.1.12 существует такая строка $\bar{s}^T$, что $\bar{b}^T = \bar{s}^T A^T$. Транспонируя обе части, получим равенство

$$\bar{b} = A\bar{s}.$$

Оно означает, что столбец $\bar{s}$ является решением системы (4.1.7) и потому эта система (4.1.7) совместна.

($\Rightarrow$) Предположим, что система (4.1.7) совместна, т. е. что существует столбец $\bar{u}$, для которого $A\bar{u} = \bar{b}$. Транспонируя обе части, получаем равенство $\bar{u}^T A^T = \bar{b}^T$, означающее, что строка $\bar{b}^T$ является линейной комбинацией строк матрицы A^T . Из 4.1.12 следует, что уравнение (4.1.12) является следствием системы (4.1.13). $\square$

4.1.14. Система линейных уравнений называется *независимой*, если ни одно из содержащихся в ней уравнений не является следствием системы, составленной из остальных уравнений.

Воспользуемся теперь сведениями о свойствах решений системы линейных уравнений для решения задачи о построении базиса пересечения двух подпространств.

4.1.15. Пусть системы $S_1 = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \rangle$ и $S_2 = \langle \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m \rangle$ образованы столбцами координат векторов $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m$ в каком-то фиксированном базисе пространства V . Найти базис пересечения линейной оболочки $L_1 = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ с линейной оболочкой $L_2 = \mathcal{L}(b_1, \dots, b_m)$ можно, отыскав фундаментальную систему решений $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_p$ однородной системы линейных уравнений $B\bar{x} = \mathbf{0}$ с матрицей

$$B = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, -\bar{b}_1, \dots, -\bar{b}_m]. \quad (4.1.14)$$

Если

$$\bar{c}_i = (\delta_{1,i}, \dots, \delta_{k+m,i})^T, \quad i = \overline{1, p},$$

то линейная оболочка векторов

$$\bar{f}_i = \delta_{1,i} \bar{a}_1 + \dots + \delta_{k,i} \bar{a}_k, \quad i = \overline{1, p}, \quad (4.1.15)$$

совпадает с подпространством $L_1 \cap L_2$. Вычислив базу системы векторов $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p$, получим базис пересечения $L_1 \cap L_2$.

Если же системы S_1 и S_2 являются базисами своих линейных оболочек, то система $\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p \rangle$ является базисом пересечения $L_1 \cap L_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой вектор $\bar{u}$ из $L_1 \cap L_2$ представим как в виде линейной комбинации векторов из S_1 , так и в виде линейной комбинации векторов из S_2 :

$$\bar{u} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k, \quad (4.1.16)$$

$$\bar{u} = \beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta_m \bar{b}_m. \quad (4.1.17)$$

Отсюда получаем равенство

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k = \beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta_m \bar{b}_m. \quad (4.1.18)$$

Очевидно, если для каких-то коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m$ равенство (4.1.18) выполняется, то вектор u , определяемый любым из соотношений (4.1.16), (4.1.17), принадлежит $L_1 \cap L_2$.

Однородная система $B\bar{x} = \mathbf{0}$, о которой говорится в утверждении 4.1.15, получается из равенства (4.1.18), если перенести все слагаемые

из правой части в левую, записать для каждой координаты отдельное уравнение и считать $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m$ неизвестными. По условию ее фундаментальная система решений состоит из векторов

$$\bar{c}_1 = (\delta_{1,1}, \dots, \delta_{k+m,1})^T, \dots, \bar{c}_p = (\delta_{1,p}, \dots, \delta_{k+m,p})^T.$$

Из столбцов этой системы составим матрицу

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+m1} & \dots & \delta_{k+m,p} \end{pmatrix}.$$

Отбросив последние m строк, получим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \dots & \delta_{kp} \end{pmatrix} = [\bar{c}_1^1 \dots \bar{c}_p^1].$$

Каждый вектор f_i из (4.1.15) является линейной комбинацией столбцов системы S_1 , а столбцы матрицы D составлены из коэффициентов в этих комбинациях, поэтому

$$[\bar{f}_1 \dots \bar{f}_p] = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k] \begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \dots & \delta_{kp} \end{pmatrix} = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k] [\bar{c}_1^1 \dots \bar{c}_p^1].$$

Если вектор $\bar{z}$ принадлежит пересечению $L_1 \cap L_2$, то для каких-то $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+m}$ справедливо равенство

$$\bar{z} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = \lambda_{k+1} \bar{b}_1 + \dots + \lambda_{k+m} \bar{b}_m.$$

Это означает, что столбец

$$\bar{d} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, -\lambda_{k+1}, \dots, -\lambda_{k+m})^T$$

является решением системы $B\bar{x} = \mathbf{0}$, и потому линейно выражается через векторы $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_p$:

$$\bar{d} = \gamma_1 \bar{c}_1 + \dots, \gamma_p \bar{c}_p.$$

Но тогда если $\bar{d}^1 = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T$, то

$$\begin{aligned}\bar{d}^1 &= \gamma_1 \bar{c}_1^1 + \dots + \gamma_p \bar{c}_p^1 = [\bar{c}_1^1, \dots, \bar{c}_p^1](\gamma_1, \dots, \gamma_p)^T, \\ \bar{z} &= \lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k](\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T = \\ &= [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k] \bar{d}^1 = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k][\bar{c}_1^1 \dots \bar{c}_p^1](\gamma_1, \dots, \gamma_p)^T = \\ &= [\bar{f}_1 \dots \bar{f}_p](\gamma_1, \dots, \gamma_p)^T = \gamma_1 \bar{f}_1 + \dots + \gamma_p \bar{f}_p.\end{aligned}$$

Видим, что подпространство $L_1 \cap L_2$ совпадает с линейной оболочкой векторов $\bar{f}_1 \dots \bar{f}_p$. База этой линейной оболочки является базисом пересечения.

Число неизвестных в системе $B\bar{x} = \mathbf{0}$ равно $k + m$ — числу столбцов в матрице (4.1.14). По условию, фундаментальная система решений системы $B\bar{x} = \mathbf{0}$ содержит p векторов. Поскольку размерность подпространства решений этой системы совпадает с разностью между числом неизвестных и рангом матрицы B (см. 4.1.9), получаем равенства

$$k + m - \text{rank } B = p, \quad \text{rank } B = k + m - p.$$

Согласно 2.4.15, чтобы найти размерность пересечения подпространств L_1 и L_2 , следует из суммы размерностей этих подпространств вычесть размерность их суммы. Если системы S_1 и S_2 являются базисами своих линейных оболочек, то $\dim L_1 = k$ и $\dim L_2 = m$. Размерность подпространства $L_1 + L_2$ равна рангу матрицы B (см. 2.4.13, 2.4.7). Видим, что

$$\dim(L_1 \cap L_2) = (k + m) - (k + m - p) = p.$$

Система $\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p \rangle$ линейно независима, так как порождает подпространство $L_1 \cap L_2$, размерность которого равна p , то есть числу векторов в системе. Это означает, что она является базисом пересечения. $\square$

ПРИМЕР. Подпространства L_1 и L_2 векторного пространства R^4 являются соответственно линейными оболочками систем векторов $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \rangle$ и $\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \rangle$, где

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ \bar{b}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Требуется найти базис пересечения подпространств L_1 и L_2 .

Составим матрицу $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, -\bar{b}_1, -\bar{b}_2, -\bar{b}_3]$ и преобразуем ее:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 5 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & -11 & 29 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -11 & 29 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & -15 \end{pmatrix}.$$

Видим, что множество решений системы имеет размерность три и фундаментальная система решений состоит из трех векторов. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \xi_1 = -2\xi_3 - \frac{5}{2}\xi_5 + \frac{15}{2}\xi_6, \\ \xi_2 = -\xi_3 - 5\xi_5 + 15\xi_6, \\ \xi_4 = \frac{11}{2}\xi_5 + 29\xi_6. \end{cases}$$

Базис в пространстве всех решений образуют, например, векторы

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \\ -11 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 0 \\ 29 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пересечение подпространств L_1 и L_2 порождается векторами

$$\bar{c}_1 = -2\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = (0, 0, 0)^T,$$

$$\bar{c}_2 = -5\bar{a}_1 - 10\bar{a}_2 = (-5, -20, -20)^T,$$

$$\bar{c}_3 = 15\bar{a}_1 + 30\bar{a}_2 = (15, 60, 60)^T.$$

Базис пересечения подпространств L_1 и L_2 совпадает с базой системы $\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3 \rangle$ и содержит один вектор, например вектор $\bar{c}_1$.

В матрице, полученной при решении системы линейных уравнений, первый, второй и четвертый столбцы образуют линейно независимую систему. Они возникли в результате элементарных преобразований строк матрицы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1$. При таких преобразованиях ранг не меняется, поэтому система $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1 \rangle$ линейно независима. Ранг матрицы $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, -\bar{b}_1, -\bar{b}_2, -\bar{b}_3]$ равен трем, значит, эта система является базисом суммы $L_1 + L_2$.

Ранги матриц

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -15 \\ -2 & -11 & 29 \\ 0 & 5 & -15 \end{pmatrix}$$

равны двум, базы в системах их столбцов образуют первые два столбца. Это означает, что базисами подпространств L_1 и L_2 соответственно являются системы $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle$ и $\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle$. $\square$

4.2. АФФИННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

4.2.1. Пусть L — подпространство пространства V , u_0 — фиксированный вектор, принадлежащий V . Множество M векторов из V называется **аффинным многообразием**, если оно может быть получено прибавлением вектора u_0 к каждому вектору из L :

$$M = u_0 + L = \{u_0 + z \mid z \in L\}.$$

Латинское слово *affinis* означает «соседний», *affinitas* — родство. Аффинные многообразия называют также **линейными многообразиями** и **аффинными подпространствами**. Заметим, что определение 4.2.1 не исключает случай $u_0 = 0$, поэтому каждое подпространство пространства V является аффинным многообразием. Из 4.1.1 и 4.1.3(б) следует, что аффинным многообразием является также множество решений каждой совместной системы линейных уравнений, как однородной, так и неоднородной.

4.2.2. а) Если L — подпространство пространства V , $u_0 \in V$ и $M = u_0 + L$, то $u_0 \in M$.

б) Аффинное многообразие $M = u_0 + L$ совпадает с L , если $u_0 \in L$, и не имеет общих векторов с L , если $u_0 \notin L$.

в) Если векторы x и y принадлежат аффинному многообразию $u_0 + L$, то их разность $x - y$ принадлежит подпространству L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как $0 \in L$ и $u_0 = u_0 + 0$, то $u_0 \in M$.

б) Если $u_0 \in L$, то $u_0 + x \in L$ для каждого $x \in L$, поэтому $u_0 + L \subseteq L$. Для любого $y \in L$ вектор $y - u_0$ также принадлежит L . Поскольку $y = u_0 + (y - u_0)$, то $y \in u_0 + L$, и потому $L \subseteq u_0 + L$. Из двух доказанных включений следует, что $u_0 + L = L$.

Пусть $u_0 \notin L$ и $x \in L$. Если $x \in M$, то $x = u_0 + a$ для подходящего $a \in L$. Вектор $-a$ также принадлежит L , следовательно, $u_0 = x - a \in L$, а это противоречит предположению.

в) Если $x, y \in M$, то $x = u_0 + a$ и $y = u_0 + b$ для каких-то $a, b \in L$, и потому $x - y = a - b \in L$. $\square$

4.2.3. а) Для любого аффинного многообразия $M = u_0 + L$ и любого $v \in M$ многообразие $v + L$ совпадает с M .

б) Пусть L_1 и L_2 — подпространства пространства V , $a, b \in V$. Если аффинное многообразие M можно представить как в виде $a + L_1$, так и в виде $b + L_2$, то $L_1 = L_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $x \in v + L$, тогда $x = v + y$ для какого-то $y \in L$. Поскольку $v \in u_0 + L$, то в L найдется такой вектор z , что $v = u_0 + z$. Это означает, что $x = v + y = u_0 + (z + y)$. Так как $(z + y) \in L$, вектор x принадлежит M .

Мы убедились в том, что $v + L \subseteq M$. Аналогично доказывается включение $M \subseteq v + L$. Из этих двух соотношений следует, что $v + L = M$.

б) Пусть $x \in L_1$. Вектор b принадлежит M (см. 4.2.2), поэтому многообразие $b + L_1$ совпадает с M согласно 4.2.3(а). Отсюда следует, что если $y = b + x$, то $y \in M$. Согласно 4.2.3(в) вектор $y - b$, равный x , принадлежит L_2 . Тем самым доказано включение $L_1 \subseteq L_2$. Обратное соотношение $L_2 \subseteq L_1$ доказывается аналогично. $\square$

Если $M = u_0 + L$, то часто говорят, что аффинное многообразие M получено сдвигом подпространства L на вектор u_0 , а вектор u_0 называют вектором сдвига. Утверждение 4.2.3(а) показывает, что в качестве вектора сдвига можно брать любой вектор из M , а из 4.2.3(б) следует, что каждое аффинное многообразие получается сдвигом только одного подпространства.

4.2.4. Размерностью аффинного многообразия $M = u_0 + L$ называется размерность подпространства L . Обозначение: $\dim M$.

Так как $a = a + \mathbf{0}$ для любого вектора $a \in V$ и $\{\mathbf{0}\}$ является нульмерным подпространством пространства V , то каждый вектор является аффинным многообразием, размерность которого равна нулю.

4.2.5. Аффинное многообразие M , векторы которого принадлежат векторному пространству V , называется *точкой*, если его размерность равна нулю, *прямой*, если его размерность равна единице, *гиперплоскостью*, если его размерность на единицу меньше размерности пространства V . В остальных случаях M называется *плоскостью*.

Впрочем, плоскостью часто называют любое аффинное многообразие, размерность которого больше нуля.

4.2.6. Если $\dim V = 2$, то каждая гиперплоскость в пространстве V является прямой, так как ее размерность равна единице, а при $\dim V = 3$ гиперплоскости в V являются плоскостями, поскольку имеют размерность два. $\square$

4.2.7. Пусть все векторы системы $S = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ принадлежат аффинному многообразию M , $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Система

$$S_1 = \langle a_1 - a_i, \dots, a_{i-1} - a_i, a_{i+1} - a_i, \dots, a_m - a_i \rangle$$

является линейно независимой тогда и только тогда, когда линейно независима система

$$S_2 = \langle a_1 - a_j, \dots, a_{j-1} - a_j, a_{j+1} - a_j, \dots, a_m - a_j \rangle.$$

Доказательство. При $i = j$ утверждение справедливо. Если же $i \neq j$, то

$$a_k - a_j = (a_k - a_i) - (a_j - a_i)$$

для каждого $k \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, m\}$, следовательно, система S_2 получена из S_1 элементарными преобразованиями. Это означает, что ранги этих систем совпадают согласно 2.2.22. Поскольку число векторов в системах S_1 и S_2 одинаково, из линейной независимости одной из них следует линейная независимость второй. $\square$

4.2.8. Содержащая более одного вектора система $\langle u_0, u_1, \dots, u_k \rangle$ называется **аффинно независимой**, если линейно независимой является система $\langle u_1 - u_0, \dots, u_k - u_0 \rangle$. Система векторов, не являющаяся аффинно независимой, называется **аффинно зависимой**.

ПРИМЕР 1. Из определения 4.2.8 следует, что аффинно зависимыми являются системы, содержащие два равных вектора, и системы, число векторов в которых более чем на единицу превышает размерность пространства. Если $a \neq b$, то система $\langle a, b \rangle$ является аффинно независимой. $\square$

Если $u_0 \in V$ и подпространство L векторного пространства V является линейной оболочкой системы векторов $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, то система векторов $S = \langle u_0, u_1, \dots, u_k \rangle$, где $u_i = a_i + u_0$, $i = \overline{1, k}$, порождает аффинное многообразие как множество векторов

$$M = \left\{ u \in V \mid u = u_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, \alpha_i \in F \right\}.$$

Базис подпространства L является наименьшей системой векторов, порождающей L как совокупность всевозможных линейных комбинаций векторов, принадлежащих этому базису. Точно так же, если система векторов S содержит более одного вектора и является аффинно независимой, то она является наименьшей системой векторов, порождающей аффинное многообразие M в указанном выше смысле.

ПРИМЕР 2. В векторном пространстве G^3 каждое аффинное многообразие M размерности два состоит из всех векторов, концы которых принадлежат некоторой фиксированной плоскости $\widetilde{M}$. Как известно, чтобы однозначно зафиксировать плоскость в пространстве, достаточно указать три точки, принадлежащие этой плоскости и не лежащие на одной прямой. Система $\langle u_0, u_1, u_2 \rangle$ векторов из пространства G^3 , концами которых являются упомянутые точки, порождает M и является аффинно независимой, так как система векторов $\langle u_1 - u_0, u_2 - u_0 \rangle$ является базисом подпространства, состоящего из векторов, параллельных плоскости $\widetilde{M}$. $\square$

4.2.9. Пусть T — некоторое множество векторов, принадлежащих векторному пространству V размерности n . Система уравнений S (не обязательно линейных) с n неизвестными задает множество T в базисе B пространства V , если x принадлежит T тогда и только тогда, когда $\bar{x}_B$ является решением системы S .

4.2.10. Каждое аффинное многообразие в векторном пространстве над полем F можно задать системой линейных уравнений с коэффициентами из F , состоящей из $n - t$ уравнений, где n — размерность пространства, а t — размерность аффинного многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторое аффинное многообразие $M = u_0 + L$, векторы которого принадлежат пространству V размерности n над полем F . Предположим, что M порождается системой векторов $\langle u_0, u_1, \dots, u_k \rangle$. Согласно сказанному ранее подпространство L является линейной оболочкой системы векторов $\langle u_1 - u_0, \dots, u_k - u_0 \rangle$. Фиксируя в V какой-нибудь базис B , сопоставим каждому вектору из V его столбец координат и тем самым зададим изоморфизм, отображающий V на F^n . Множество $\bar{M}$ образов векторов из M является аффинным многообразием в пространстве F^n , порождаемым системой векторов $\langle \bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k \rangle$. Подпространство $\bar{L}$, состоящее из образов векторов, принадлежащих L , изоморфно L и порождается системой векторов $\langle \bar{u}_1 - \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_k - \bar{u}_0 \rangle$. Очевидно, $\bar{M} = \bar{u}_0 + \bar{L} = \bar{u}_0 + \mathcal{L}(\bar{u}_1 - \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_k - \bar{u}_0)$. Поскольку векторы из $\bar{M}$ принадлежат пространству размерности n , то искомая система должна содержать n неизвестных. Будем предполагать, что если аффинное многообразие $\bar{M}$ является подпространством пространства F^n , то $\bar{u}_0 = 0$.

Пусть

$$\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_i = \bar{u}_i - \bar{u}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, k}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$\bar{v} \in \bar{M} \iff \exists \gamma_1 \dots \exists \gamma_k (\gamma_1 \bar{a}_1 + \dots + \gamma_k \bar{a}_k + \bar{u}_0 = \bar{v}). \quad (4.2.1)$$

Возникает вспомогательная неоднородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \dots + \alpha_{1k}\gamma_k = \xi_1 - \beta_1, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \dots + \alpha_{nk}\gamma_k = \xi_n - \beta_n \end{cases} \quad (4.2.2)$$

с неизвестными $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Изучим необходимые и достаточные условия, при которых эта система является совместной. С этой целью выпишем ее расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \xi_1 - \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \xi_2 - \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} & \xi_n - \beta_n \end{array} \right). \quad (4.2.3)$$

гом матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mk} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.6)$$

Поскольку матрица (4.2.6) получена из матрицы $[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k]$ ранга m элементарными преобразованиями строк, то ее ранг также равен m и совпадает с числом ненулевых строк. Очевидно для того, чтобы ранг матрицы (4.2.4) тоже равнялся m , необходимо и достаточно, чтобы в тех строках матрицы (4.2.4), где слева от черты все элементы равны нулю, справа также стоял нуль:

$$f_1 = 0, \dots, f_{n-m} = 0.$$

Учитывая соотношения (4.2.5), получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}\xi_1 + \dots + \delta_{1n}\xi_n - (\delta_{11}\beta_1 + \dots + \delta_{1n}\beta_n) = 0, \\ \dots \\ \delta_{n-m1}\xi_1 + \dots + \delta_{n-mn}\xi_n - (\delta_{n-m1}\beta_1 + \dots + \delta_{n-mn}\beta_n) = 0. \end{cases}$$

Положим $\delta_{i1}\beta_1 + \dots + \delta_{in}\beta_n = \psi_i$, $i = \overline{1, n-m}$ и, учитывая, что ψ_i являются постоянными величинами, запишем эту систему в ином виде:

$$\begin{cases} \delta_{11}\xi_1 + \dots + \delta_{1n}\xi_n = \psi_1, \\ \dots \\ \delta_{n-m1}\xi_1 + \dots + \delta_{n-mn}\xi_n = \psi_{n-m}. \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Вектор $\bar{v} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ является решением системы (4.2.7) тогда и только тогда, когда система, определяемая матрицей (4.2.4), имеет решение. Это возможно только тогда, когда совместна система (4.2.2), что выполняется в том и только том случае, когда справедливо утверждение в правой части формулы (4.2.1), равносильное утверждению $\bar{v} \in \bar{M}$. Это означает, что $\bar{M}$ совпадает с множеством решений системы (4.2.7).

Система (4.2.7) содержит $n - m$ уравнений. Буквой m был обозначен ранг системы векторов $\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \rangle$. Подпространство $\bar{L}$ является линейной оболочкой этой системы векторов, поэтому $\dim \bar{L} = m$ и $\dim \bar{M} = m$. Видим, что число уравнений в системе (4.2.7) совпадает с указанным в утверждении 4.2.10. $\square$

ПРИМЕР. Даны векторы, принадлежащие пространству R^5 :

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти систему линейных уравнений, задающую плоскость наименьшей размерности, проходящую через точки u_0, u_1, u_2, u_3 .

Будем действовать в соответствии с алгоритмом, указанным в 4.2.10. Сначала находим векторы

$$a_1 = u_1 - u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = u_2 - u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$a_3 = u_3 - u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

и записываем вспомогательную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_3 = \xi_1 - 1, \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 = \xi_2, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = \xi_3 - 1, \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 = \xi_4, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 = \xi_5 - 1. \end{cases}$$

Разумеется, опытный читатель может и не выписывать эту систему, а сразу составить ее расширенную матрицу. Преобразуем эту матрицу:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 0 & 2 & \xi_1 - 1 \\ 1 & 2 & 1 & \xi_2 \\ 1 & -2 & 2 & \xi_3 - 1 \\ 1 & 2 & 1 & \xi_4 \\ 1 & 1 & 2 & \xi_5 - 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & \xi_1 - 1 \\ 0 & 2 & 3 & \xi_1 + \xi_2 - 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & \xi_1 + \xi_3 - 2 \\ 0 & 2 & 3 & \xi_1 + \xi_4 - 1 \\ 0 & 1 & 4 & \xi_1 + \xi_5 - 2 \end{array} \right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & \xi_1 - 1 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 3 \\ 0 & -2 & 4 & \xi_1 + \xi_3 - 2 \\ 0 & 0 & 7 & 2\xi_1 + \xi_3 + \xi_4 - 3 \\ 0 & 0 & 12 & 3\xi_1 + \xi_3 + 2\xi_5 - 6 \end{array} \right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 0 & 0 & 3\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 - 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 3 \\ 0 & -14 & 0 & -\xi_1 - 4\xi_2 + 3\xi_3 - 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_2 + \xi_4 \\ 0 & 0 & 0 & -3\xi_1 - 12\xi_2 + 5\xi_3 + 14\xi_5 - 6 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Видим, что ранг основной матрицы рассматриваемой системы линейных уравнений равен трем. Для того, чтобы система имела решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы также был равен трем. Приравняем нулю последние элементы третьей и четвертой строк:

$$\begin{cases} -\xi_2 + \xi_4 = 0, \\ -3\xi_1 - 12\xi_2 + 5\xi_3 + 14\xi_5 - 6 = 0. \end{cases}$$

Полученная система линейных уравнений задает в пространстве R^5 некоторую плоскость P размерности три. Легко проверить, что столбцы $u_0 \dots u_3$ являются решениями этой системы. Поскольку система

$\langle u_0, u_1, u_2, u_3 \rangle$ порождает аффинное многообразие M , размерность которого также равна трем, то P совпадает с M . $\square$

4.2.11. В векторном пространстве размерности два любую прямую можно задать одним уравнением первой степени с двумя неизвестными. В трехмерном векторном пространстве плоскость можно задать одним линейным уравнением с тремя неизвестными, а прямую — системой из двух линейных уравнений с тремя неизвестными.

Доказательство. Утверждение следует из 4.2.5, 4.2.6, 4.2.9 и 4.2.10. $\square$

4.2.12. Система линейных уравнений, задающая аффинное многообразие M размерности k в векторном пространстве V размерности n , не может содержать менее $n - k$ уравнений.

Доказательство. Согласно 4.2.9 число неизвестных в любой системе, задающей M , равно размерности пространства V , т. е. n . Из того же определения следует, что множество всех решений системы уравнений S , задающей M , совпадает с множеством столбцов координат векторов из M . Если $M = u_0 + L$, где L — подпространство пространства V , то множество всех решений системы уравнений S_1 , присоединенной к S , состоит из столбцов координат векторов, принадлежащих L . По условию $\dim L = k$. Если ранг матрицы системы S_1 меньше $n - k$, то размерность множества ее решений больше k (см. 4.1.9), следовательно, это множество не может совпадать с множеством столбцов координат векторов, принадлежащих L . Осталось заметить, что ранг матрицы системы линейных уравнений не может быть меньше числа уравнений в системе. $\square$

Теорему 4.2.10 можно применить также для построения базиса пересечения подпространств L_1 и L_2 , являющихся линейными оболочками двух систем векторов. Сначала методом, указанным в доказательстве теоремы, строим однородные системы линейных уравнений, задающие L_1 и L_2 . Очевидно, если объединить эти две системы в одну, то множество решений полученной системы совпадет с $L_1 \cap L_2$, а фундаментальная система решений является базисом в $L_1 \cap L_2$.

ПРИМЕР. В пространстве R^5 подпространства L_1 и L^2 заданы как линейные оболочки: $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = L_1$, $\mathcal{L}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) = L_2$. Требуется

найти базис пересечения этих подпространств, если

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ищем однородную систему линейных уравнений, множество решений которой совпадает с L_1 . Сначала составляем расширенную матрицу промежуточной системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & \xi_1 \\ 2 & 2 & 10 & \xi_2 \\ 1 & 1 & 5 & \xi_3 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & \xi_4 \\ 1 & 1 & 5 & \xi_5 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & \xi_1 - \xi_4 \\ 2 & 0 & -2 & \xi_2 - 2\xi_4 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & \xi_3 - \xi_4 \\ 0 & 1 & 6 & \xi_4 \\ 1 & 0 & -1 & -\xi_4 + \xi_5 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \xi_1 - 3\xi_3 + 2\xi_4 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2 - 2\xi_3 \\ 1 & 0 & -1 & \xi_3 - \xi_4 \\ 0 & 1 & 6 & \xi_4 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_3 + \xi_5 \end{array} \right).$$

Получили искомую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \xi_1 - 3\xi_3 + 2\xi_4 = 0, \\ \xi_2 - 2\xi_3 = 0, \\ -\xi_3 + \xi_5 = 0. \end{cases}$$

Размерность пространства решений этой системы равна двум. Это указывает на линейную зависимость системы векторов $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \rangle$. Действительно, легко проверить, что $\bar{a}_3 = 6\bar{a}_2 - \bar{a}_1$.

Теперь построим однородную систему линейных уравнений, множество решений которой совпадает с L_2 . Составляем расширенную матрицу промежуточной системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & & \xi_1 \\ 1 & 4 & 2 & & \xi_2 \\ 0 & 1 & 3 & & \xi_3 \\ \boxed{1} & 3 & 1 & & \xi_4 \\ 2 & 5 & 4 & & \xi_5 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & & \xi_1 - 2\xi_4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & & \xi_2 - \xi_4 \\ 0 & 1 & 3 & & \xi_3 \\ 1 & 3 & 1 & & \xi_4 \\ 0 & -1 & 2 & & -2\xi_4 + \xi_5 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{3} & \xi_1 + \xi_2 - 3\xi_4 \\ 0 & 1 & 1 & \xi_2 - \xi_4 \\ 0 & 0 & 2 & -\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \\ 1 & 0 & -2 & -3\xi_2 + 4\xi_4 \\ 0 & 0 & 3 & \xi_2 - 3\xi_4 + \xi_5 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & \xi_1 + \xi_2 - 3\xi_4 \\ 0 & 3 & 0 & -\xi_1 + 2\xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_1 - 5\xi_2 + 3\xi_3 + 9\xi_4 \\ 3 & 0 & 0 & 2\xi_1 - 7\xi_2 + 6\xi_4 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_1 + \xi_5 \end{array} \right).$$

Видим, что линейная оболочка векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ совпадает с пространством решений системы уравнений

$$\begin{cases} -2\xi_1 - 5\xi_2 + 3\xi_3 + 9\xi_4 = 0, \\ -\xi_1 + \xi_5 = 0. \end{cases}$$

Объединяем две системы уравнений, задающие линейные оболочки, в одну, выписываем матрицу этой системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \boxed{1} & \\ -2 & -5 & 3 & 9 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \\ -2 & -5 & 3 & 9 & 0 & \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & \boxed{13} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Мы установили, что пересечению заданных подпространств принадлежат те и только те векторы, которые являются решениями системы, состоящей из уравнений

$$\xi_1 = \xi_3, \quad \xi_2 = 2\xi_3, \quad \xi_4 = \xi_3, \quad \xi_5 = 3\xi_3.$$

Полагая $\xi_3 = 1$, получаем частное решение $\bar{c} = (1, 2, 1, 1, 1)^T$. Так как пространство решений полученной системы уравнений одномерное, то каждый вектор из этого пространства пропорционален вектору $\bar{c}$, и потому система $\langle \bar{c} \rangle$ является базисом пересечения подпространств L_1 и L_2 . $\square$

4.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

4.3.1. Матрица B называется *правой (левой) обратной* к A , если $AB = E$ ($BA = E$).

4.3.2. Матрица A над F имеет правую обратную матрицу R тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен числу строк.

Доказательство. Пусть число строк матрицы A равно m . Если $AR = E$ и $R = [\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m]$, то $A\bar{r}_k = \bar{e}_k$, $k = \overline{1, m}$, поэтому искать матрицу R можно, решая системы линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{e}_k$, $k = \overline{1, m}$.

а) Если $\text{rank } A = m$, то все эти системы имеют решения (см. 4.1.6), поэтому R существует.

б) Пусть R существует. Если $\bar{b} \in F^m$, то $\bar{b} = E\bar{b} = (AR)\bar{b} = A(R\bar{b})$. Видим, что для любого $\bar{b} \in F^m$ система $A\bar{x} = \bar{b}$ совместна, ее решением является столбец $R\bar{b}$. Согласно 4.1.6 $\text{rank } A = m$. $\square$

4.3.3. Левая обратная матрица L к матрице $A \in F^{m,n}$ существует тогда и только тогда, когда число столбцов у матрицы A равно ее рангу.

Доказательство. а) Если L существует, то

$$LA = E \Rightarrow (LA)^T = E^T \Rightarrow A^T L^T = E \Rightarrow \text{rank } A^T = n = \text{rank } A.$$

б) Если $\text{rank } A = n$, то к A^T существует правая обратная матрица R . Получаем равенство $A^T R = E$, откуда $(A^T R)^T = E^T$ и потому $R^T A = E$. Полагаем $L = R^T$. $\square$

4.3.4. Если у матрицы A есть одновременно правая обратная матрица R и левая обратная матрица L , то $R = L$.

Доказательство. $L = LE = L(AR) = (LA)R = ER = R$.

Если $AB = BA = E$, то A и B — квадратные матрицы и $B = A^{-1}$ согласно 3.1.25. Напомним, что обратная к матрице A матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда A является матрицей неособенной (см. 3.1.27). Это утверждение также легко получить из 4.3.2–4.3.4. $\square$

4.3.5. Любая матрица A может иметь не более одной обратной.

Доказательство. Пусть B и C — две матрицы, являющиеся обратными к A . Тогда B является левой обратной, а C — правой обратной к A . Согласно 4.3.4 матрицы B и C совпадают. $\square$

4.3.6. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ для любой квадратной неособенной матрицы A .

Доказательство. $A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = E^T = E$. $\square$

Опишем один из способов, позволяющих найти матрицу, обратную к квадратной неособенной матрице A .

4.3.7. Чтобы найти матрицу, обратную к квадратной неособенной матрице A , надо к A приписать справа матрицу E того же порядка, отделив их вертикальной чертой. Если элементарными преобразованиями строк полученной объединенной матрицы превратить A в E , то справа от черты будет стоять матрица A^{-1} .

Доказательство. Будем совершать элементарные преобразования строк матрицы A . У этой матрицы строки и столбцы образуют линейно

независимые системы векторов. Поскольку элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, после каждого шага преобразований в каждой строке и каждом столбце преобразованной матрицы есть ненулевые элементы. Пусть в первой строке отличен от нуля элемент, расположенный в s -м столбце. Разделим все компоненты первой строки на этот элемент. Затем, умножая первую строку на подходящие коэффициенты и прибавляя полученную строку к остальным, добиваемся, чтобы все элементы s -го столбца, кроме первого, обратились в нуль. Во второй строке полученной матрицы есть ненулевой элемент. Пусть он находится в столбце с номером k . Очевидно $k \neq s$. Разделим на него все элементы второй строки. Умножая вторую строку на подходящие коэффициенты и прибавляя полученную к остальным строкам, обращаем в нуль все компоненты k -го столбца, за исключением второй, и т. д. Через конечное число шагов получим матрицу, у которой в каждой строке и каждом столбце имеется ровно одна единица, а остальные элементы равны нулю. Переставляя строки, из нее всегда можно получить единичную матрицу E . $\square$

Каждое произведенное преобразование равносильно умножению матрицы A слева на матрицу преобразования (3.4), называемую элементарной. Обозначим матрицы проведенных преобразований строк через $H_1, \dots, H_q$, тогда $H_q \cdots H_1 A = E$, и потому $A^{-1} = H_q \cdots H_1$. Умножая обе части справа на матрицу E и учитывая, что $A^{-1}E = A^{-1}$, получим равенство $A^{-1} = H_q \cdots H_1 E$. Оно означает, что матрица A^{-1} может быть получена из матрицы E , если со строками матрицы E производить те же преобразования, что и со строками матрицы A .

ПРИМЕР. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу $A|E$ и преобразуем ее так, как указано выше:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Последняя матрица получена из предпоследней умножением второй строки на -1 и перестановкой строк. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

4.3.8. Каждую квадратную неособенную матрицу A можно представить в виде произведения подходящих элементарных матриц.

Доказательство. При доказательстве утверждения 4.3.7 было показано, что обратная к A матрица A^{-1} разлагается в произведение элементарных матриц. Однако сама матрица A является обратной к неосо-

бенной матрице A^{-1} (см. 3.1.26) и потому также разлагается в произведение элементарных матриц. $\square$

Рассмотрим уравнение $AX = B$, где A — квадратная неособенная матрица. Очевидно, его можно решить, вычислив матрицу A^{-1} и умножив на нее слева обе его части: $A^{-1}AX = A^{-1}B$, откуда $X = A^{-1}B$. Однако можно несколько сократить объем вычислений, если воспользоваться следующим правилом.

4.3.9. *Чтобы решить уравнение $AX = B$ с квадратной неособенной матрицей A , следует приписать к A справа матрицу B , отделив ее вертикальной чертой. Если элементарными преобразованиями строк полученной объединенной матрицы превратить A в E , то справа от черты будет стоять матрица X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H_1, \dots, H_q$ — матрицы элементарных преобразований строк, превращающих A в E , тогда $A^{-1} = H_q \cdots H_1$. Равенства $X = A^{-1}B = H_q \cdots H_1 B$ можно истолковать следующим образом: если со строками матрицы B производить такие же элементарные преобразования, то получим матрицу X . $\square$

4.3.10. *Чтобы решить уравнение $XA = B$ с квадратной неособенной матрицей A , следует решить уравнение $A^T X^T = B^T$ способом, указанным в 4.3.9, и затем выписать ответ, транспонировав матрицу X^T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду 3.1.12 $XA = B \iff A^T X^T = B^T$. $\square$

Указанный в 4.3.9 алгоритм позволяет, в частности, решить квадратную систему линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$. Легко заметить, что в этом случае он почти полностью совпадает с методом исключения неизвестных, изложенным в разделе 2.1. В случае, когда необходимо решить уравнение $AX = B$, в котором матрица A либо не квадратная, либо является квадратной особенной, можно рассматривать это уравнение как совокупность систем линейных уравнений $A\bar{x}_i = \bar{b}_i$, в которых $\bar{x}_i$ и $\bar{b}_i$ — i -е столбцы матриц X и B . Поскольку основные матрицы этих систем совпадают, можно производить исключения неизвестных одновременно во всех системах. Для этого надо также выписать матрицу A , приписать к ней справа матрицу B , отделив одну от другой вертикальной чертой, и производить преобразования строк объединенной матрицы.

ПРИМЕР 1. Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим объединенную расширенную матрицу и преобразуем ее:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & | & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 2 & | & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & | & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & | & 5 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & | & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перед нами две системы:

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_3 = 0, \\ \xi_2 - 2\xi_3 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_1 + \tau_3 = 2, \\ \tau_2 - 2\tau_3 = -2. \end{cases}$$

Записываем их общие решения

$$\begin{cases} \xi_1 = -\xi_3, \\ \xi_2 = 2\xi_3 + 5, \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_1 = -\tau_3 + 2, \\ \tau_2 = 2\tau_3 - 2 \end{cases}$$

и получаем общее решение исходного уравнения

$$X = \begin{pmatrix} -\xi_3 & -\tau_3 + 2 \\ 2\xi_3 + 5 & 2\tau_3 - 2 \\ \xi_3 & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

□

ПРИМЕР 2. Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Снова сформируем объединенную расширенную матрицу и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 12 & 18 & 6 \\ 6 & 12 & 16 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 12 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Получили две системы линейных уравнений, первая из которых имеет расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Система с такой матрицей несовместна, поэтому и исходное матричное уравнение решений не имеет. $\square$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

5.1. ПЕРЕСТАНОВКИ

5.1.1. Последовательность $(j_1, \dots, j_n)$, каждый член которой принадлежит множеству чисел $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ и любые два члена которой различны, называется *перестановкой* чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Из этого определения следует, что никакое число не встречается в перестановке дважды.

ПРИМЕР. Последовательности $(2, 1, 4, 3)$, $(3, 2, 4, 8)$ являются перестановками чисел $1, 2, 3, 4$ и $2, 3, 4, 8$ соответственно.

5.1.2. Существует ровно $n!$ разных перестановок попарно различных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ имеем всего одно число α_1 и, следовательно, только одну перестановку. При $n = 2$ имеем два числа α_1, α_2 и две перестановки: (α_1, α_2) , (α_2, α_1) . Видим, что при $n = 1$ и $n = 2$ теорема верна. Воспользуемся индукцией по n . Пусть утверждение верно для $n - 1$ чисел, докажем, что оно верно и для n чисел. Первый член перестановки можно выбрать n способами. Как только он фиксирован, то согласно индуктивному предположению оставшиеся $n - 1$ членов образуют $(n - 1)!$ различных перестановок. Всего же имеем $((n - 1)!) \cdot n = n!$ различных возможностей. $\square$

В русском языке письмо и чтение производятся слева направо. Будем считать, что два числа в перестановке расположены правильно, если меньшее число находится левее большего. Поменяв эти числа местами, то есть как бы перевернув пару чисел, мы этот правильный порядок нарушим. Переворачивание в латинском языке обозначается словом *inversio*.

5.1.3. Если в перестановке большее число находится левее меньшего, то эти числа образуют *инверсию*.

ПРИМЕР. В перестановке (1, 3, 4, 2, 5) числа 3 и 2 образуют инверсию, а 3 и 5 не образуют. $\square$

5.1.4. Перестановка называется *четной*, если ее элементы образуют четное число инверсий, иначе — *нечетной*.

Введем функцию σ , значения которой определяются четностью перестановки $(j_1, \dots, j_n)$.

5.1.5. Определение функции σ :

$$\sigma(j_1, \dots, j_n) = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка } (j_1, \dots, j_n) \text{ четная,} \\ -1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

5.1.6. Меняя местами элементы j_s и j_t в некоторой перестановке, мы совершаем *транспозицию* этих элементов.

5.1.7. Все $n!$ разных перестановок попарно различных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ можно расположить в таком порядке, что каждая следующая перестановка получается из предыдущей одной транспозицией, причем начинать можно с любой перестановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n . При $n = 2$ есть только два варианта расположения: (α_1, α_2) , (α_2, α_1) и (α_2, α_1) , (α_1, α_2) . В каждом случае утверждение справедливо. Пусть утверждение верно для перестановок длины $n - 1$. Предположим, что начальной является перестановка $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n})$. Фиксируем α_{i_1} на первом месте. Таких перестановок $(n - 1)!$. Их можно упорядочить так, как требуется, поскольку для этого упорядочиваем перестановки чисел $\alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}$ длины $n - 1$. В последней из полученных перестановок совершаем транспозицию чисел α_{i_1} и α_{i_2} и упорядочиваем перестановки, у которых α_{i_2} — первый элемент, затем меняем местами α_{i_2} и α_{i_3} и т. д. $\square$

5.1.8 (Следствие). От любой перестановки попарно различных чисел можно перейти к любой другой перестановке тех же чисел при помощи нескольких транспозиций. $\square$

5.1.9. Любая транспозиция меняет четность перестановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть меняются местами числа i и j . Обозначим числа, принадлежащие перестановке P и отличные от i и j , символом $\circ$. Эти числа не меняют взаимного расположения при всех указанных ниже операциях с перестановками.

а) Рассмотрим сначала случай, когда i, j расположены рядом. Если перестановка имела вид $P = (\circ, \dots, \circ, i, j, \circ, \dots, \circ)$, то после транспозиции получим перестановку $Q = (\circ, \dots, \circ, j, i, \circ, \dots, \circ)$. Выбросив из P число i , получим $P_1 = (\circ, \dots, \circ, j, \circ, \dots, \circ)$ с n_1 инверсиями. Выбросив из P число j , получим перестановку $P_2 = (\circ, \dots, \circ, i, \circ, \dots, \circ)$ с n_2 инверсиями. Наконец, пусть n_3 — число инверсий в перестановке P_3 , полученной из P удалением чисел i и j . Если пара чисел образовывала инверсию в перестановке P_3 , то эта пара образует инверсию и в перестановках P, P_1, P_2 и Q . Пара чисел, образующая инверсию в перестановках P_1, P_2 или P_3 , образует инверсию в перестановках P и Q . Ввиду этого если сложить вместе число инверсий в P_1 и P_2 , то окажутся дважды посчитаны инверсии тех пар чисел, которые содержатся в P_3 , и потому как в P , так и в Q имеется не менее $n_1 + n_2 - n_3$ инверсий. Если $i < j$, то в P есть ровно $n_1 + n_2 - n_3$ инверсий и $n_1 + n_2 - n_3 + 1$ инверсий в Q ; если $i > j$, то соответственно $n_1 + n_2 - n_3 + 1$ и $n_1 + n_2 - n_3$ инверсий. В обоих случаях четность меняется.

б) Пусть перестановка имеет вид

$$(\circ, \dots, \circ, i, \alpha_1, \dots, \alpha_s, j, \circ, \dots, \circ).$$

Совершим транспозицию элементов i, α_1 , затем i, α_2 и т. д. Через s шагов получим перестановку

$$(\circ, \dots, \circ, \alpha_1, \dots, \alpha_s, i, j, \circ, \dots, \circ).$$

Делаем еще $s + 1$ шагов, меняя местами i и j , j и α_s , j и α_{s-1} и так далее, и получим

$$(\circ, \dots, \circ, j, \alpha_1, \dots, \alpha_s, i, \circ, \dots, \circ).$$

Всего совершено $2s + 1$ транспозиций соседних элементов, каждая из которых меняет четность перестановки, поэтому четности начальной и конечной перестановок противоположны. $\square$

5.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ИХ СВОЙСТВА

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \beta_1, \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \beta_2. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Решая ее методом исключения неизвестных, легко получить следующие выражения:

$$x = \frac{\beta_1\alpha_{22} - \alpha_{12}\beta_2}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad y = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \beta_1\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}.$$

Знаменатели дробей совпадают и представляют собой алгебраические суммы некоторых произведений элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

системы 5.2.1. (Суммы названы алгебраическими потому, что некоторые слагаемые могут входить в них со знаком минус.) Первое слагаемое $\alpha_{11}\alpha_{22}$ содержит в качестве сомножителей по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы A . Второе слагаемое $\alpha_{12}\alpha_{21}$ также содержит в качестве сомножителей по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы A . Первые индексы сомножителей упорядочены по возрастанию, вторые в первом случае образуют перестановку $(1, 2)$, содержащую 0 инверсий, во втором — перестановку $(2, 1)$, содержащую одну инверсию.

Аналогичные результаты мы получим, решая квадратные системы уравнений с неособенной матрицей системы, содержащие большее число неизвестных. Дополнительно заметим следующее свойство. Каждое слагаемое в знаменателе дроби, выражающей неизвестное через элементы матрицы системы и свободные члены, берется со знаком плюс, если перестановка, образованная номерами столбцов, из которых взяты сомножители, является четной, при условии, что номера соответствующих строк упорядочены по возрастанию. В противном случае слагаемое берется со знаком минус.

Указанные наблюдения дают основание ввести следующие определения. Пусть $A = (\alpha_{ij})$ — квадратная матрица порядка n . Выберем

в ней в каждом столбце и в каждой строке по одному элементу, причем сначала выберем элемент из первой строки, затем из второй и т. д. Получим последовательность $\alpha_{1j_1}, \alpha_{2j_2}, \dots, \alpha_{nj_n}$. Отметим, что согласно 5.1.2 имеется ровно $n!$ различных вариантов выбора.

5.2.1. Членом определителя квадратной матрицы A порядка n называется произведение n элементов матрицы A , выбранных в каждой строке и каждом столбце этой матрицы, взятое со знаком плюс (минус), если номера столбцов этих элементов образуют четную (нечетную) перестановку при условии, что номера строк образуют возрастающую последовательность.

Итак, любой член определителя матрицы $A = (\alpha_{ij})_n^n$ перестановкой сомножителей можно привести к виду

$$\sigma(j_1, \dots, j_n) \alpha_{1j_1} \alpha_{2j_2} \cdots \alpha_{nj_n}.$$

ПРИМЕР. $\sigma(5, 3, 4, 2, 1) \alpha_{15} \alpha_{23} \alpha_{34} \alpha_{42} \alpha_{51}$ — член определителя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{15} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{51} & \cdots & \alpha_{55} \end{pmatrix}. \quad \square$$

5.2.2. Если $\sigma(j_1, \dots, j_n) \alpha_{1j_1} \alpha_{2j_2} \cdots \alpha_{nj_n}$ — член определителя матрицы $(\alpha_{ij})_n^n$ и произведение

$$\alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \cdots \alpha_{i_n n} \quad (5.2.2)$$

получено из $\alpha_{1j_1} \alpha_{2j_2} \cdots \alpha_{nj_n}$ перестановкой сомножителей, то

$$\sigma(j_1, \dots, j_n) = \sigma(i_1, \dots, i_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим перестановки, образуемые первыми и вторыми индексами в (5.2.2):

$$(i_1, \dots, i_n),$$

$$(1, \dots, n).$$

Совершая одинаковые транспозиции в этих перестановках, т. е. переставляя столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

упорядочим номера $i_1, \dots, i_n$ по возрастанию и перейдем к перестановкам

$$(1, \dots, n), \\ (j_1, \dots, j_n).$$

Это всегда можно сделать вследствие утверждения 5.1.8. Каждая транспозиция меняет одновременно четности верхней и нижней перестановок согласно 5.1.9, следовательно, четность суммы числа инверсий этих перестановок не меняется, и потому

$$\sigma(j_1, \dots, j_n) = \sigma(i_1, \dots, i_n). \quad \square$$

Два члена определителя матрицы A , представленные согласно 5.2.1 в виде произведений элементов этой матрицы, считаем различными, если первый из них содержит множителем некоторый элемент α_{ij} матрицы A , не содержащийся во втором (хотя после перемножения значения произведений могут совпасть).

5.2.3. Определителем квадратной матрицы $A = (\alpha_{ij})$ порядка n называется сумма всех $n!$ различных членов определителя этой матрицы:

$$\det A = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_n) \alpha_{1j_1} \alpha_{2j_2} \cdots \alpha_{nj_n}.$$

В приведенной формуле сложение ведется по всевозможным перестановкам $(i_1, \dots, i_n)$ чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Определитель матрицы A обозначается $\det A$, так как латинское слово *determinare* означает «определять». Используется и другое обозначение, а именно у матрицы скобки заменяются вертикальными черточками.

5.2.4. Непосредственно из определений 5.2.1 и 5.2.3 получаем следующие формулы для вычисления определителей малых порядков:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12},$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \\ - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}. \quad \square$$

Указанные формулы легче запомнить, воспользовавшись рисунками 5.1–5.3.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Рис. 5.1. Произведение элементов слева имеет знак плюс, справа — минус.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Рис. 5.2. Произведения этих элементов берутся со знаком плюс.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Рис. 5.3. Эти произведения берутся со знаком минус.

5.2.5. Если все элементы строки (столбца) матрицы определителя равны нулю, то и определитель этой матрицы равен нулю.

Доказательство. Каждый член определителя содержит сомножителем элемент данной строки, следовательно все члены равны нулю. $\square$

В дальнейшем будем говорить о строках и столбцах определителя, подразумевая строки и столбцы матрицы этого определителя.

5.2.6. Если все элементы строки (столбца) определителя умножить на скаляр, то и определитель умножится на этот скаляр. Общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Доказательство первого утверждения подобно доказательству утверждения 5.2.5. Второе утверждение является следствием первого. $\square$

5.2.7. Если по одну сторону от главной диагонали матрицы A (выше или ниже) все элементы равны нулю, то матрица A называется *треугольной*.

5.2.8. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Каждый член определителя матрицы A содержит элемент из первого столбца. Если этот элемент отличен от α_{11} , то член равен нулю. Пусть член содержит α_{11} . Элемент α_{12} в него не входит, поэтому из второго столбца войдут либо 0, либо α_{22} и т. д. Видим, что все члены определителя, отличные от $\alpha_{11} \dots \alpha_{nn}$ (произведение берем со знаком «+», так как $\sigma(1, \dots, n) = 1$), равны нулю. $\square$

5.2.9 (Следствие). $\det E = 1$. $\square$

5.2.10. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим член определителя матрицы A :

$$\sigma(j_1, \dots, j_n) \alpha_{1j_1} \dots \alpha_{nj_n}.$$

Произведение

$$\beta_{j_1 1} \dots \beta_{j_n n}$$

совпадает с $\alpha_{1j_1} \dots \alpha_{nj_n}$ и войдет в сумму членов определителя матрицы A^T с тем же знаком, с каким произведение $\alpha_{1j_1} \dots \alpha_{nj_n}$ входит в сумму членов определителя матрицы A (см. 5.2.2). Поскольку это верно для каждого члена определителя матрицы A , то $\det A = \det A^T$. $\square$

5.2.11 (Следствие). Утверждение о свойствах строк (столбцов) определителя останется верным и в том случае, если его сформулировать для столбцов (строк). $\square$

5.3. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ КАК ФУНКЦИЯ, ЗАВИСЯЩАЯ ОТ СТОЛБЦОВ ЭТОЙ МАТРИЦЫ

Значение определителя матрицы порядка n зависит, вообще говоря, от каждого элемента этой матрицы, т. е. является функцией от n^2 аргументов. Однако определитель можно рассматривать и как функцию n переменных, аргументами которой являются столбцы (строки) матрицы. Ввиду 5.2.11 во всех утверждениях о свойствах определителей, связанных с расположением или строением его столбцов, слово «столбцы» можно заменить на «строки».

5.3.1. При перестановке любых двух столбцов определитель меняет знак.

Доказательство. 1. Предположим, что в матрице $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ мы поменяли местами соседние столбцы $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_{i+1}$. Возникла матрица

$$\tilde{A} = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{i-1} \bar{a}_{i+1} \bar{a}_i \bar{a}_{i+2} \dots \bar{a}_n].$$

Пусть $\sigma(j_1, \dots, j_n) \alpha_{1j_1} \dots \alpha_{nj_n}$ — один из членов определителя матрицы A . Входящие в него сомножителями элементы матрицы A упорядочены по номерам столбцов. Произведение

$$\alpha_{j_1 1} \dots \alpha_{j_{i-1} i-1} \alpha_{j_i i} \alpha_{j_{i+1} i+1} \alpha_{j_{i+2} i+2} \dots \alpha_{j_n n} \quad (5.3.1)$$

входит в $\det \tilde{A}$, так как элементы матрицы $\tilde{A}$ стоят в тех же строках, что и в A , и сомножители произведения (5.3.1) находятся в разных столбцах матрицы $\tilde{A}$.

Положим $\gamma = \alpha_{j_i i}$ и $\delta = \alpha_{j_{i+1} i+1}$, тогда произведение (5.3.1) примет вид

$$\alpha_{j_1 1} \dots \alpha_{j_{i-1} i-1} \gamma \delta \alpha_{j_{i+2} i+2} \dots \alpha_{j_n n}. \quad (5.3.2)$$

Оно входит в определитель матрицы $\tilde{A}$. Упорядочив сомножители по номерам столбцов, получим

$$\alpha_{j_1 1} \dots \alpha_{j_{i-1} i-1} \delta \gamma \alpha_{j_{i+2} i+2} \dots \alpha_{j_n n}. \quad (5.3.3)$$

Элементы γ и δ выбраны в матрице A соответственно в строках с номерами j_i и j_{i+1} . В тех же строках они находятся в матрице $\tilde{A}$. В сумму членов определителя матрицы A произведение (5.3.2) войдет со знаком

$$\sigma(j_1, \dots, j_{i-1}, j_i, j_{i+1}, j_{i+2}, \dots, j_n).$$

Произведение (5.3.3) войдет в $\det \tilde{A}$ со знаком

$$\sigma(j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, j_i, j_{i+2}, \dots, j_n).$$

Новая перестановка получена из старой одной транспозиции, поэтому знак изменится на противоположный. Поскольку знаки всех членов определителя поменялись, $\det \tilde{A} = -\det A$.

2. Пусть в матрице $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ меняются местами столбцы $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_{i-k}$, где $k > 1$, и возникает матрица $\tilde{A}$. Такую замену можно произвести путем нескольких перестановок соседних столбцов. Поменяем местами столбец $\bar{a}_i$ с соседним справа и новую матрицу обозначим через A_1 . В этой матрице опять поменяем местами столбец $\bar{a}_i$ с соседним справа и полученную матрицу обозначим через A_2 и т. д. В матрице A_k столбец $\bar{a}_i$ окажется на месте столбца $\bar{a}_{i+k}$. Теперь поменяем местами столбец $\bar{a}_{i+k}$ с соседним слева и новую матрицу обозначим через A_{k+1} и т. д. Очевидно, матрица A_{2k+1} совпадет с $\tilde{A}$. Всего произведено $2k + 1$ перестановок соседних столбцов. Каждая перестановка меняет знак определителя, следовательно, $\det \tilde{A} = -\det A$. $\square$

ПРИМЕР. Для приведения указанного ниже определителя к треугольному виду в его матрице последовательно меняются местами столбцы и строки. Номера переставляемых столбцов указаны над знаком равенства, а номера строк под ним.

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 & \beta \\ 8 & 0 & \gamma & 0 \\ 7 & \alpha & 5 & 4 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{1,4}{=} -\det \begin{pmatrix} \beta & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 \\ 4 & \alpha & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \\
& \stackrel{2,3}{=} \det \begin{pmatrix} \beta & 0 & 6 & 9 \\ 4 & \alpha & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \stackrel{1,2}{=} -\det \begin{pmatrix} 0 & \beta & 6 & 9 \\ \alpha & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\stackrel{1,2}{=} \det \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 5 & 7 \\ 0 & \beta & 6 & 9 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta.$$

□

5.3.2. Пусть $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}, \bar{c}$ — столбцы высоты n , $\beta, \gamma \in F$ и $\bar{a}_i = \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$ для некоторого i . Тогда

$$\begin{aligned}
& \det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_n] = \\
& = \beta \det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{i-1} \bar{b} \bar{a}_{i+1} \dots \bar{a}_n] + \gamma \det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{i-1} \bar{c} \bar{a}_{i+1} \dots \bar{a}_n].
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\bar{a}_p = \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}, \quad p = \overline{1, n}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} \psi_{1i} \\ \vdots \\ \psi_{ni} \end{pmatrix}.$$

Строим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_n] &= \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_s, \dots, j_n) \alpha_{1j_1} \dots \alpha_{si} \dots \alpha_{nj_n} = \end{aligned}$$

(здесь $j_s = i$)

$$\begin{aligned} &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_s, \dots, j_n) \alpha_{1j_1} \dots (\beta \varphi_{si} + \gamma \psi_{si}) \dots \alpha_{nj_n} = \\ &= \beta \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_s, \dots, j_n) \alpha_{1j_1} \dots \varphi_{si} \dots \alpha_{nj_n} + \\ &+ \gamma \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \sigma(j_1, \dots, j_s, \dots, j_n) \alpha_{1j_1} \dots \psi_{si} \dots \alpha_{nj_n} = \end{aligned}$$

(поскольку нумерация строк и столбцов не меняется)

$$= \beta \det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{i-1} \bar{b} \bar{a}_{i+1} \dots \bar{a}_n] + \gamma \det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{i-1} \bar{c} \bar{a}_{i+1} \dots \bar{a}_n]. \quad \square$$

Чтобы упростить запись доказательства остальных утверждений этого параграфа, рассмотрим лишь случай, когда утверждение относится к первым столбцам определителя. Доказательства для произвольного случая проводятся аналогично.

5.3.3. *Определитель, содержащий два одинаковых столбца, равен нулю.*

Доказательство. Пусть в матрице $[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ равны столбцы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, тогда

$$\det[\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n] = \det[\bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n].$$

Однако ввиду 5.3.1

$$\det[\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n] = -\det[\bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n].$$

Оба равенства могут выполняться одновременно только тогда, когда

$$\det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] = 0. \quad \square$$

5.3.4. *Определитель, содержащий два пропорциональных столбца, равен нулю.*

Доказательство. Утверждение следует из 5.2.6 и 5.3.3. $\square$

5.3.5. *Определитель особой матрицы равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ — особая квадратная матрица. Поскольку система ее столбцов линейно зависима, то некоторый столбец, например $\bar{a}_1$, линейно выражается через остальные:

$$\bar{a}_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i \bar{a}_i.$$

Вследствие 5.3.2

$$\det A = \det \left[\left(\sum_{i=2}^n \alpha_i \bar{a}_i \right) \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n \right] = \sum_{i=2}^n \alpha_i \det [\bar{a}_i \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n].$$

Все сомножители $\det [\bar{a}_i \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n]$ равны нулю, так как в их матрицах первый и i -й столбцы совпадают (см. 5.3.3). $\square$

5.3.6. *Определитель не изменится, если к некоторому его столбцу прибавить линейную комбинацию остальных столбцов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$, $\bar{b} = \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n$, тогда

$$\det [\bar{a}_1 + \bar{b} \ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n] = \det [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] + \det [\bar{b} \ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n] = \det A + 0$$

ввиду 5.3.5. $\square$

Приведенные выше свойства определителей позволяют вычислять их путем приведения к треугольному виду.

ПРИМЕР.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{36} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 4 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{9} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{54} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & 4 \\ 0 & 0 & -18 & 6 \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{1}{54} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 10}{3 \cdot 18} = -10. \quad \square
\end{aligned}$$

5.4. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

5.4.1. Если $(i_1, \dots, i_n)$ — перестановка чисел $1, \dots, n$, то

$$\sigma(i_1, \dots, i_n) \det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] = \det[\bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_n}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы перейти от нечетной перестановки к четной, надо сделать нечетное число транспозиций, от четной к нечетной — четное. Совершив несколько, допустим m , транспозиций, всегда можно от перестановки $(i_1, \dots, i_n)$ перейти к четной перестановке $(1, 2, \dots, n)$ согласно 5.1.8, поэтому четность числа m совпадает с четностью перестановки $(i_1, \dots, i_n)$. Совершая такие же транспозиции столбцов определителя $\det[\bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_n}]$, перейдем к $\det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$. Если перестановка $(i_1, \dots, i_n)$ была нечетной, то и число m транспозиций столбцов нечетное, и потому

$$\sigma(i_1, \dots, i_n) \det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] = \det[\bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_n}].$$

В случае четной перестановки $(i_1, \dots, i_n)$ четным является и число m , и поэтому последнее равенство также справедливо. $\square$

5.4.2. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(BA) = (\det B)(\det A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} = [\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n],$$

$BA = [\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n]$, где

$$\bar{z}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \bar{b}_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

Для удобства присвоим временно каждому $\bar{z}_j$ свой индекс суммирования:

$$\bar{z}_j = \sum_{i_j=1}^n \alpha_{i_j j} \bar{b}_{i_j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Воспользуемся линейностью определителя:

$$\begin{aligned} \det(BA) &= \det[\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n] = \det \left[\sum_{i_1=1}^n \alpha_{i_1 1} \bar{b}_{i_1} \dots \sum_{i_n=1}^n \alpha_{i_n n} \bar{b}_{i_n} \right] = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \alpha_{i_1 1} \det \left[\bar{b}_{i_1} \sum_{i_2=1}^n \alpha_{i_2 2} \bar{b}_{i_2} \dots \sum_{i_n=1}^n \alpha_{i_n n} \bar{b}_{i_n} \right] = \dots \\ &\dots = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_n n} \det[\bar{b}_{i_1} \dots \bar{b}_{i_n}]. \end{aligned}$$

Те слагаемые в последней сумме, где есть равные столбцы в определителе, равны нулю (см. 5.3.3). Выбрасывая их, получим сумму

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n)} \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_n n} \det[\bar{b}_{i_1} \dots \bar{b}_{i_n}],$$

в которой сложение ведется по всевозможным перестановкам $(i_1, \dots, i_n)$ чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Ввиду 5.4.1 она равна

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_n n} \sigma(i_1, \dots, i_n) \det[\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n] &= \\ = \det[\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n] \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \sigma(i_1, \dots, i_n) \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_n n} &= \\ &\stackrel{5.2.2}{=} (\det B)(\det A). \end{aligned}$$

□

5.4.3. Если для квадратной матрицы A существует обратная, то

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 5.4.2:

$$AA^{-1} = E \Rightarrow \det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \quad \square$$

5.4.4. Матрица A является особенной тогда и только тогда, когда $\det A = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A особенная, то $\det A = 0$ согласно 5.3.5. Если же A неособенная, то к ней есть обратная A^{-1} (см. 3.1.24). Из $AA^{-1} = E$ следует, что $1 = \det A \det A^{-1}$, поэтому $\det A \neq 0$. $\square$

5.4.5. Выделим в квадратной матрице A порядка n произвольные $k \leq n$ строк и k столбцов. Элементы матрицы A , расположенные на пересечении выбранных строк и столбцов, также образуют квадратную матрицу. Определитель этой матрицы называется **минором k -го порядка** матрицы A (итал. *minore* — меньший).

5.4.6. Ранг матрицы равен наибольшему из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ранг матрицы $A = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$ равен k . Это означает, что какие-то k столбцов этой матрицы образуют максимальную линейно независимую подсистему системы всех ее столбцов. Предположим, что номера этих столбцов равны $j_1, \dots, j_k$, причем $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. Очевидно, ранг матрицы $B = [\bar{a}_{j_1}, \dots, \bar{a}_{j_k}]$ также равен k . Поскольку ранг системы строк матрицы B совпадает с рангом системы ее столбцов (3.5.2), то какие-то k строк образуют базу всей системы строк указанной матрицы. Обозначим через $i_1, \dots, i_k$ номера этих строк, предполагая, что $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Пусть C — матрица, полученная из B удалением всех строк, не входящих в упомянутую базу. Очевидно, эта матрица квадратная и ее ранг тоже равен k , следовательно, она неособенная и ее определитель не равен нулю (5.4.4). Легко заметить, что $\det C$ является минором k -го порядка матрицы A , расположенным на пересечении строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_k$.

Докажем теперь, что у матрицы A любой минор M порядка m , где $k < m \leq n$, равен нулю. Предположим, что минор $M = \det[\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m]$ находится в столбцах с номерами $t_1, \dots, t_m$ и строках с номерами

$s_1, \dots, s_m$. Поскольку ранг матрицы A меньше m , то система столбцов $\langle \bar{a}_{t_1}, \dots, \bar{a}_{t_m} \rangle$ линейно зависима.

Рассмотрим оператор $\psi: F^n \rightarrow F^m$, определяемый следующим образом: для любого столбца $\bar{c} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ из F^n образ $\psi(\bar{c})$ равен $(\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \dots, \alpha_{s_m})^T$. Нетрудно убедиться в линейности оператора ψ . Очевидно, $\psi(\bar{a}_{t_i}) = \bar{b}_i$, $i = \overline{1, m}$. Если бы система столбцов $\langle \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m \rangle$ определителя M была линейно независимой, то линейно независимой являлась бы и система столбцов $\langle \bar{a}_{t_1}, \dots, \bar{a}_{t_m} \rangle$ (3.2.2). Поскольку это не так, то матрица минора M особенная, а сам минор равен нулю. $\square$

Применение утверждения 5.4.6 для определения ранга матрицы обычно требует вычисления большого количества миноров. Ввиду этого чаще применяется ранее описанный метод, использующий элементарные преобразования строк и столбцов матрицы.

5.4.7 (Следствие). Пусть M — минор матрицы A и $M \neq 0$. Строки и столбцы матрицы A , в которых расположен минор M , образуют линейно независимые системы.

Доказательство. Докажем например, что система столбцов матрицы $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$, в которых находится минор M , является линейно независимой. Предположим, что порядок минора M равен k и он находится в столбцах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$, тогда M является также минором k -го порядка матрицы $B = [\bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_k}]$. Ранг матрицы B равен k согласно 5.4.6, т. е. числу ее столбцов, и потому ее столбцы образуют линейно независимую систему. $\square$

5.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

5.5.1. Удалив в матрице

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

i -ю строку и j -й столбец, получим матрицу A_{ij} порядка $n - 1$. Алгебраическим дополнением элемента α_{ij} называется $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

5.5.2. Для любой квадратной матрицы $A = (\alpha_{ij})_n$ и любого j , $0 \leq j \leq n$, справедливо равенство

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij},$$

называемое **формулой разложения определителя матрицы A по j -му столбцу**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Докажем, что формула верна, если A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A_{nn} & & 0 \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

и определитель раскладывается по последнему столбцу. Действительно,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \sigma(i_1, \dots, i_n) \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_n n} = \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_{n-1})} \sigma(i_1, \dots, i_{n-1}, n) \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_{n-1} n-1}, \end{aligned}$$

так как $\alpha_{nn} = 1$ и $\alpha_{in} = 0$, если $i_n < n$. Поскольку $n > j$, $j = \overline{1, n-1}$, то $\sigma(i_1, \dots, i_{n-1}, n) = \sigma(i_1, \dots, i_{n-1})$, и потому, учитывая 5.2.2 и 5.2.3,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{(i_1, \dots, i_{n-1})} \sigma(i_1, \dots, i_{n-1}) \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_{n-1} n-1} = \\ &= \det A_{nn} = (-1)^{n+n} \cdot 1 \cdot \det A_{nn}. \end{aligned}$$

б) Пусть $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \ \bar{e}_i \ \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_n]$. Переставим j -й столбец с $(j+1)$ -м, затем с $(j+2)$ -м и т. д. Через $n-j$ шагов он окажется последним. Аналогично поступим со строками: переставим i -ю с $(i+1)$ -й и т. д. Через $n-i$ шагов бывшая i -я строка станет последней. Получим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A_{ij} & & 0 \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}$ получена из A за $2n - (i + j)$ шагов, каждый шаг меняет знак определителя (см. 5.3.1), поэтому

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{2n-(i+j)} \det \tilde{A} = (-1)^{2n-(i+j)} \det A_{ij} = \\ &= (-1)^{i+j} \cdot 1 \cdot \det A_{ij},\end{aligned}$$

поскольку четности у $2n - (i + j)$ и $i + j$ совпадают.

в) Пусть теперь

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n],$$

$$B^{ij} = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \bar{e}_i \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_n].$$

Отметим, что B^{ij} совпадает с A из (б). Так как $\bar{a}_j = \alpha_{1j}\bar{e}_1 + \dots + \alpha_{nj}\bar{e}_n$, то

$$\begin{aligned}\det A &= \det \left[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \bar{e}_i \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_n \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \det B^{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}. \quad \square\end{aligned}$$

5.5.3. Любую квадратную матрицу $A = (\alpha_{ij})_n^n$ можно разложить по i -й строке, воспользовавшись следующей формулой:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}.$$

Доказательство. Возьмем A^T с элементами $\alpha'_{ji} = \alpha_{ij}$ и применим 5.5.1:

$$\det A^T = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} \alpha'_{ji} \det A^T_{ji}.$$

Так как $(-1)^{j+i} = (-1)^{i+j}$, $\alpha'_{ji} = \alpha_{ij}$, $(A^T)_{ji} = (A_{ij})^T$, то

$$\det(A^T)_{ji} = \det A_{ij} \quad \text{и} \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}. \quad \square$$

Объединим 5.5.2 и 5.5.3.

5.5.4. Определитель матрицы равен сумме произведений всех элементов выбранной строки (столбца) на их алгебраические дополнения. $\square$

ПРИМЕР.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} &= \alpha(-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \\ &+ \beta(-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \gamma(-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Утверждение 5.5.4 удобно применять в тех случаях, когда определитель подготовлен к разложению и в столбце или строке, по которым происходит разложение, имеется много нулей. В следующем примере если разложение происходит по столбцу, то его номер указывается над знаком равенства, а если по строке, то под знаком равенства.

ПРИМЕР.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & \beta \\ 7 & 0 & \gamma & 0 \\ 3 & \alpha & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\stackrel{2}{=} \alpha(-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & \beta \\ 7 & \gamma & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &\stackrel{3}{=} -\alpha 4(-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = 4\alpha\beta\gamma. \quad \square \end{aligned}$$

5.6. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ БЛОЧНО-ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Разделим строки квадратной матрицы A на k групп. В первую группу включим первые m_1 строк, во вторую — следующие m_2 строк и т. д. Аналогичным способом разделим столбцы матрицы A также на k групп, при этом число строк i -й группы должно совпадать с числом столбцов i -й группы, $i = \overline{1, k}$. Элементы матрицы A , стоящие на пересечении строк i -й группы и столбцов j -й группы, образуют матрицу. Обозначим эту матрицу через $\hat{A}_{ij}$ и назовем **блоком** (или **клеткой**)

матрицы A . В результате матрица A разобьется на блоки:

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \dots & \hat{A}_{1k} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \dots & \hat{A}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{A}_{k1} & \hat{A}_{k2} & \dots & \hat{A}_{kk} \end{pmatrix}.$$

Блоки, стоящие на главной диагонали матрицы A , являются квадратными.

5.6.1. Матрицу, разбитую на блоки (клетки), назовем **блочной** (клеточной). Квадратная блочная матрица, у которой все элементы блоков, находящихся по одну сторону от главной диагонали (выше или ниже), равны нулю, называется **блочно-треугольной**.

5.6.2. Определитель блочно-треугольной матрицы равен произведению определителей блоков, стоящих на главной диагонали.

Доказательство. Предположим сначала, что матрица A разбита на четыре клетки и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ H & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \dots & \alpha_{s\ s-1} & \alpha_{ss} & \dots & \alpha_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n\ s-1} & \alpha_{ns} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель матрицы A по первой строке, затем получившийся определитель опять по первой строке и так далее:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \dots & \alpha_{s\ s-1} & \alpha_{ss} & \dots & \alpha_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n\ s-1} & \alpha_{ns} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{s2} & \alpha_{s3} & \cdots & \alpha_{s \ s-1} & \alpha_{ss} & \cdots & \alpha_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{n \ s-1} & \alpha_{ns} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \dots \\
&\dots = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha_{ss} & \cdots & \alpha_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{ns} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \det Q.
\end{aligned}$$

Аналогично доказывается равенство

$$\det \begin{pmatrix} G & \mathbf{0} \\ H & E \end{pmatrix} = \det G.$$

Предположим теперь, что строки матрицы A разбиты на k групп. Используем индукцию по k .

а) Пусть $k = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Поскольку рассматриваются блочно-треугольные матрицы, будем считать, что блок $\hat{A}_{12}$ состоит из нулей: $\hat{A}_{12} = \mathbf{0}$. Переобозначим остальные блоки: $\hat{A}_{11} = G$, $\hat{A}_{22} = Q$, $\hat{A}_{21} = H$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} G & \mathbf{0} \\ H & Q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} G & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E \end{pmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ H & Q \end{pmatrix}}_C.$$

Согласно сказанному выше

$$\det B = \det G, \quad \det C = \det Q,$$

и потому по теореме 5.4.2

$$\det A = \det B \cdot \det C = \det G \cdot \det Q.$$

б) Предположим, что утверждение верно, если на диагонали матрицы A находятся $k - 1$ блоков, и пусть

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{A}_{k1} & \hat{A}_{k2} & \hat{A}_{k3} & \dots & \hat{A}_{kk} \end{pmatrix}.$$

Мы можем разбивать матрицу на блоки по-разному, поэтому временно будем считать, что A состоит из четырех блоков:

$$A = \begin{pmatrix} G & \mathbf{0} \\ H & Q \end{pmatrix},$$

где $Q = \hat{A}_{kk}$,

$$G = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{A}_{k-11} & \hat{A}_{k-12} & \dots & \hat{A}_{k-1k-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица G имеет на диагонали $k - 1$ блок и к ее определителю применимо индуктивное предположение, поэтому

$$\det G = \det \hat{A}_{11} \cdot \dots \cdot \det \hat{A}_{k-1k-1}.$$

Отсюда и из (а) получаем требуемое соотношение:

$$\begin{aligned} \det A &= \det G \cdot \det Q = \det G \cdot \det \hat{A}_{kk} = \\ &= \det \hat{A}_{11} \cdot \dots \cdot \det \hat{A}_{k-1k-1} \cdot \det \hat{A}_{kk}. \quad \square \end{aligned}$$

Пусть $A\bar{x} = \bar{b}$ — система линейных уравнений с квадратной неособенной матрицей $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ и $(\xi_1 \dots \xi_n)^T$ — ее единственное решение (см. 4.1.8), тогда $\bar{b} = \xi_1 \bar{a}_1 + \dots + \xi_n \bar{a}_n$. Заменяя в A столбец $\bar{a}_k$ на $\bar{b}$, получим матрицу

$$A(k) = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{k-1} \quad \bar{b} \quad \bar{a}_{k+1} \dots \bar{a}_n].$$

Вычислим ее определитель:

$$\begin{aligned} \det A(k) &= \det \left[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{k-1} \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{a}_i \quad \bar{a}_{k+1} \dots \bar{a}_n \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i \det [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{k-1} \quad \bar{a}_i \quad \bar{a}_{k+1} \dots \bar{a}_n]. \end{aligned}$$

Если $i \neq k$, то поскольку среди столбцов есть два равных,

$$\det [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{k-1} \quad \bar{a}_i \quad \bar{a}_{k+1} \dots \bar{a}_n] = 0,$$

поэтому $\det A(k) = \xi_k \det A$. Получаем следующие формулы.

5.6.3. Формулы Крамера для решения квадратной системы линейных уравнений $A[\xi_1 \dots \xi_n]^T = \bar{b}$ с неособенной матрицей A :

$$\xi_k = \frac{\det A(k)}{\det A}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.6.1)$$

□

ПРИМЕР. Используя формулы Крамера, решить систему

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3 = 3, \\ 2\xi_1 - \xi_2 = 4, \\ \xi_2 - 2\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Проводим промежуточные вычисления:

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2; \\ \det A(1) &= \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 6;$$

$$\det A(2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4;$$

$$\det A(3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Получаем ответ:

$$\xi_1 = \frac{\det A(1)}{\det A} = 3, \quad \xi_2 = \frac{\det A(2)}{\det A} = 2, \quad \xi_3 = \frac{\det A(3)}{\det A} = 1. \quad \square$$

Формулы Крамера можно использовать и для решения таких систем линейных уравнений, в которых число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

ПРИМЕР. Решить систему

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 3, \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0. \end{cases}$$

Прежде всего следует каким-нибудь способом удалить те уравнения, которые являются следствиями остальных. Однако в рассматриваемом примере уравнения образуют независимую систему, и указанные преобразования делать не надо. В матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

системы первые два столбца образуют базу в системе всех столбцов. Оставляем ξ_1 и ξ_2 слева, а ξ_3 и ξ_4 переносим вправо:

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 3 - \xi_3 + \xi_4, \\ \xi_1 - \xi_2 = -\xi_3 + \xi_4. \end{cases}$$

Множество решений этой системы образует аффинное многообразие размерности два. Чтобы записать общее решение в параметрическом

виде, мы должны найти одно решение данной системы и два частных решения присоединенной однородной системы. Полагая $\xi_3 = \xi_4 = 0$, получаем систему

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 3, \\ \xi_1 - \xi_2 = 0. \end{cases}$$

Решаем ее:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \det A(1) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\det A(2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad \xi_1 = \xi_2 = 1,5.$$

Теперь в присоединенной однородной системе полагаем $\xi_3 = 1$, $\xi_4 = 0$ и решаем систему

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = -1, \\ \xi_1 - \xi_2 = -1. \end{cases}$$

$$\det A = -2, \quad \det A(1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \det A(2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = 0.$$

Наконец, берем $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 1$ и решаем систему

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 1, \\ \xi_1 - \xi_2 = 1, \end{cases}$$

$$\det A = -2, \quad \det A(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \det A(2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0.$$

Записываем общее решение:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Опишем теперь способ построения обратной матрицы для квадратной неособенной матрицы $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$, в котором используются определители. Решая систему $A\bar{x} = \bar{e}_j$, ищем j -й столбец $[\xi_{1j} \dots \xi_{nj}]^T$ матрицы A^{-1} . Из 5.6.3 получаем равенства (5.6.1), где

$$A(k) = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{k-1} \quad \bar{e}_j \quad \bar{a}_{k+1} \dots \bar{a}_n].$$

Разложим числитель по k -му столбцу:

$$\det A(k) = (-1)^{k+j} \det A_{jk},$$

получим следующий результат.

5.6.4. Формулы Крамера для вычисления элементов обратной матрицы A^{-1} :

$$\xi_{kj} = (-1)^{k+j} \frac{\det A_{jk}}{\det A}, \quad k, j = \overline{1, n}. \quad \square$$

ПРИМЕР. Используя формулы Крамера, найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала проведем промежуточные вычисления:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det A_{11} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det A_{12} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\det A_{13} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det A_{21} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det A_{22} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1, \quad \det A_{23} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det A_{31} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det A_{32} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\det A_{33} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Теперь собираем матрицу A^{-1} , учитывая знаки, указанные в формулах 5.6.4:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

6.1. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Пусть $\psi : V \rightarrow V$ — линейное преобразование векторного пространства V , т. е. линейный оператор, отображающий V в V , V_1 — подпространство пространства V . Возможны два случая.

1. В V_1 есть какой-то вектор a , для которого $\psi(a) \notin V_1$. Образ пространства V_1 не является его подпространством.

2. Для каждого вектора x из V_1 его образ принадлежит V_1 . Это означает, что, ограничив область определения отображения ψ множеством векторов, принадлежащих V_1 , мы получим линейное преобразование ψ_1 пространства V_1 .

6.1.1. Подпространство L векторного пространства V называется **инвариантным** относительно линейного преобразования ψ пространства V , если $\psi(u) \in L$ для любого вектора u из L .

Очевидно, подпространствами, инвариантными относительно любого линейного преобразования векторного пространства V , являются само пространство V и его нулевое подпространство, содержащее единственный вектор 0 .

ПРИМЕР. Пусть L_1 и L_2 — подпространства векторного пространства V , $V = L_1 \oplus L_2$, ψ — линейный оператор, проектирующий V на L_1 параллельно L_2 (см. 2.4.21), и $a \in V$. Вектор a представим единственным образом в виде $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in L_1$ и $a_2 \in L_2$. Из единственности такого представления следует, что

$$a \in L_1 \iff a_2 = 0, \quad a \in L_2 \iff a_1 = 0.$$

Поскольку $\psi(a) = a_1$, то $\psi(a) = a$, если $a \in L_1$. Это означает, что подпространство L_1 инвариантно относительно ψ . Подпространство L_2 также инвариантно относительно ψ , так как из $a \in L_2$ следует, что $\psi(a) = 0 \in L_2$.

Пусть теперь L_3 — подпространство пространства V , содержащее более одного вектора и такое, что

$$L_3 \cap L_i = \{0\}, \quad i = 1, 2.$$

Если $a \in L_3$ и $a \neq 0$, то $a_1 \neq 0$, так как иначе $a = a_2 \in L_2$, и потому $\psi(a) = a_1 \notin L_3$. Это означает, что подпространство L_3 не инвариантно относительно ψ . $\square$

6.1.2. Сумма и пересечение подпространств, инвариантных относительно линейного преобразования $\psi: V \rightarrow V$, также являются подпространствами, инвариантными относительно преобразования ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если подпространства L_1 и L_2 инвариантны относительно ψ , $a_1 \in L_1$ и $a_2 \in L_2$, то

$$\psi(a_1 + a_2) = \psi(a_1) + \psi(a_2) \in L_1 + L_2,$$

так как $\psi(a_1) \in L_1$ и $\psi(a_2) \in L_2$. Если же $b \in L_1 \cap L_2$, то $b \in L_1$ и $b \in L_2$, следовательно, $\psi(b) \in L_1$ и $\psi(b) \in L_2$, и потому $\psi(b) \in L_1 \cap L_2$. $\square$

Вновь рассмотрим линейное преобразование ψ векторного пространства V . Может оказаться, что для некоторого ненулевого вектора x из V его образ получается умножением вектора x на какой-то скаляр. Геометрически это означает, что образ $\psi(x)$ вектора x лежит на той же прямой, что и сам вектор.

6.1.3. Пусть ψ — линейное преобразование векторного пространства V над F . Скаляр $\lambda \in F$ называется **собственным значением** линейного преобразования ψ , если в V найдется такой вектор $u \neq 0$, что

$$\psi(u) = \lambda u. \quad (6.1.1)$$

Каждый не равный нулю вектор $u \in V$, удовлетворяющий соотношению (6.1.1), называется **собственным вектором** преобразования ψ , принадлежащим собственному значению λ .

ПРИМЕР. Пусть L_1 и L_2 — подпространства векторного пространства V , $V = L_1 \oplus L_2$, ψ — линейный оператор, проектирующий V на L_1 параллельно L_2 (см. 2.4.21). Если $a \in L_1$, то $\psi(a) = a$, следовательно, каждый не равный нулю вектор из L_1 является собственным вектором преобразования ψ , принадлежащим собственному значению 1. Образом каждого вектора из L_2 является $\mathbf{0}$, поэтому все ненулевые векторы из L_2 собственные и принадлежат собственному значению 0. Если вектор c не принадлежит подпространствам L_1 и L_2 , то он не равен нулю. Очевидно, $\mathcal{L}(a) \cap L_i = \{\mathbf{0}\}$, $i = 1, 2$. Так как $\psi(c) \in L_1$ и $\psi(c) \neq \mathbf{0}$, то вектор c не может быть собственным. $\square$

6.1.4. Если векторы $u_1, \dots, u_n$ являются собственными векторами линейного преобразования $\psi : V \rightarrow V$ и принадлежат одному и тому же собственному значению λ , то любой вектор $u \neq \mathbf{0}$ из подпространства $\mathcal{L}(u_1, \dots, u_n)$ также является собственным вектором этого преобразования, принадлежащим собственному значению λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, тогда

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \psi(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \\ &= \alpha_1 \psi(u_1) + \dots + \alpha_n \psi(u_n) = \alpha_1 \lambda u_1 + \dots + \alpha_n \lambda u_n = \lambda u. \end{aligned} \quad \square$$

Можно сказать и так: любая не равная нулю линейная комбинация собственных векторов, принадлежащих одному и тому же собственному значению, также является собственным вектором и принадлежит тому же собственному значению.

6.1.5. Из 6.1.4 следует, что совокупность всех собственных векторов пространства V , принадлежащих собственному значению λ , пополненная вектором $\mathbf{0}$, образует инвариантное относительно ψ подпространство пространства V . Размерность этого подпространства называется *геометрической кратностью* собственного значения λ .

6.2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН

Пусть λ — собственное значение линейного преобразования $\psi : V \rightarrow V$, $x \in V$ — собственный вектор этого преобразования, принадлежащий λ , A_ψ — матрица преобразования ψ в каком-то фиксированном базисе пространства V , $\bar{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ — столбец координат

вектора x в том же базисе. Тогда $A_\psi \bar{x} = \lambda \bar{x}$. Отсюда легко получаем равенства $A_\psi \bar{x} - \lambda E \bar{x} = \mathbf{0}$ и

$$(A_\psi - \lambda E) \bar{x} = \mathbf{0}.$$

Последнее равенство можно рассматривать и как однородную систему линейных уравнений с неизвестными $\xi_1, \dots, \xi_n$. Она имеет ненулевое решение (координаты собственного вектора $x \neq \mathbf{0}$), следовательно, ее матрица $A_\psi - \lambda E$ особенная (см. 4.1.8), и потому $\det(A_\psi - \lambda E) = 0$ согласно 5.3.5. Если $A_\psi = (\alpha_{ij})$, то

$$\det(A_\psi - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (6.2.1)$$

Это многочлен от переменной λ , его степень равна n , т. е. порядку матрицы A_ψ .

6.2.1. Многочлен (6.2.1) называется *характеристическим многочленом матрицы A_ψ* . Его корни называются *характеристическими числами* (или *собственными значениями*) этой матрицы.

6.2.2. Если матрицы подобны, то их характеристические многочлены равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = H^{-1}AH$, тогда

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det(H^{-1}AH - \lambda E) = \\ &= \det(H^{-1}AH - \lambda H^{-1}EH) = \det(H^{-1}(A - \lambda E)H) = \\ &= (\det H^{-1})(\det(A - \lambda E))(\det H) = \\ &= (\det H^{-1})(\det H)(\det(A - \lambda E)) = \det(A - \lambda E). \quad \square \end{aligned}$$

Поскольку матрицы линейного преобразования, записанные в различных базисах, подобны друг другу, то их характеристические многочлены совпадают, и потому можно говорить про характеристический многочлен линейного преобразования. Также можно говорить о собственных векторах и о геометрических кратностях характеристических чисел матрицы, имея в виду собственные векторы и геометрические кратности собственных значений линейного преобразования, задаваемого такой матрицей.

6.2.3. Пусть ψ — линейное преобразование векторного пространства V над полем F . Принадлежащие полю F корни характеристического многочлена преобразования ψ , и только они, являются собственными значениями этого преобразования.

Доказательство. ($\Leftarrow$). Приведенные выше рассуждения и равенство (6.2.1) показывают, что каждое собственное значение линейного преобразования является корнем его характеристического многочлена.

($\Rightarrow$) Пусть A_ψ — матрица преобразования ψ в каком-то базисе B , $\lambda_0 \in F$ — корень характеристического многочлена (6.2.1), тогда однородная система линейных уравнений $(A_\psi - \lambda_0 E)\bar{x} = \mathbf{0}$ имеет ненулевое решение $\bar{x}_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, вследствие чего справедливо равенство $A_\psi \bar{x}_0 = \lambda_0 \bar{x}_0$. Рассматривая скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ как координаты некоторого вектора x_0 в базисе B , заключаем, что x_0 — собственный вектор преобразования ψ . $\square$

6.2.4. Кратность корня λ характеристического многочлена линейного преобразования ψ называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ этого преобразования.

Приведенные выше рассуждения и утверждения показывают, каким образом можно найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования, если известна матрица этого преобразования.

ПРИМЕР. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования ψ трехмерного векторного пространства над полем $\mathbb{R}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 9 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем характеристический многочлен и находим его корни:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -3 & -2 \\ 2 & 9 - \lambda & 4 \\ -1 & -3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} &= \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54 = -(\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda - 6). \end{aligned}$$

Видим, что собственными значениями являются числа 3 и 6, причем алгебраическая кратность первого числа равна двум, а второго — единице. Подставляя число 3 вместо λ в матрицу $A - \lambda E$, получим матрицу однородной системы линейных уравнений $(A - 3E)\bar{x} = \mathbf{0}$. Ненулевые решения этой системы и являются собственными векторами преобразования ψ , принадлежащими этому собственному значению. Преобразуем эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возникла система, состоящая из одного уравнения $\xi_1 + 3\xi_2 + 2\xi_3 = 0$. Отсюда $\xi_1 = -3\xi_2 - 2\xi_3$. Записав общее решение системы в параметрическом виде и исключив нулевой вектор, получаем общий вид собственного вектора линейного преобразования ψ , принадлежащего собственному значению 3 и заданного координатами в том же базисе, в котором дана матрица A :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0.$$

Теперь подставляем вместо λ в матрицу $A - \lambda E$ число 6 и преобразуем полученную матрицу:

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 2 & \boxed{3} & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В этой системе, состоящей из двух уравнений, разделяем свободные и связанные переменные:

$$\begin{cases} 6\xi_1 + 3\xi_2 = 0, \\ \xi_1 - \xi_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_2 = -2\xi_1, \\ \xi_3 = \xi_1. \end{cases}$$

Как и выше, получаем общий вид собственного вектора линейного преобразования ψ , принадлежащего собственному значению 6 и заданного

координатами в том же базисе, в котором дана матрица A :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \neq 0. \quad \square$$

6.2.5. Геометрическая кратность собственного значения линейного преобразования ψ пространства V не превосходит его алгебраической кратности.

Доказательство. Пусть λ_0 — собственное значение преобразования ψ , m — его геометрическая кратность. Поскольку геометрическая кратность собственного значения совпадает с размерностью пространства, образованного всеми собственными векторами преобразования ψ , принадлежащими λ_0 , и вектором $\mathbf{0}$ (см. 6.1.5), то в V найдется линейно независимая система $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ собственных векторов, принадлежащих λ_0 . Дополним эту систему до базиса

$$B = \langle b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n \rangle$$

пространства V . Обозначим через $A_\psi = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ матрицу преобразования ψ в этом базисе. Столбцом координат в базисе B вектора b_i является $\bar{e}_i$. Очевидно, $A_\psi \bar{e}_i = \bar{a}_i$. Однако если $i \in \{1, \dots, m\}$, то вектор b_i является собственным, и потому $A_\psi \bar{e}_i = \lambda_0 \bar{e}_i$. Это означает, что $\bar{a}_i = \lambda_0 \bar{e}_i$ для $i = \overline{1, m}$, следовательно,

$$A_\psi = [\lambda_0 \bar{e}_1 \dots \lambda_0 \bar{e}_m \quad \bar{a}_{m+1} \dots \bar{a}_n] = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & G \\ \mathbf{0} & & \lambda_0 & \\ \hline & \mathbf{0} & & H \end{array} \right),$$

$$A_\psi - \lambda E = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - \lambda & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & G \\ \mathbf{0} & & \lambda_0 - \lambda & \\ \hline & \mathbf{0} & & H - \lambda E \end{array} \right).$$

Последняя матрица является блочно-треугольной. Поскольку

$$\det(A_\psi - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^m \det(H - \lambda E),$$

то кратность корня λ_0 характеристического многочлена матрицы A_ψ не меньше m . $\square$

Утверждение 6.2.5 легче запомнить, если заучить фразу «Алгебра больше геометрии».

6.2.6. Если $\alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, — комплексный корень характеристического многочлена линейного преобразования ψ действительного векторного пространства V , то в V найдутся векторы x , y , порождающие двумерное подпространство L , инвариантное относительно ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim V = n$, A_ψ — матрица линейного преобразования ψ , записанная в каком-нибудь фиксированном базисе B . По условию число $\alpha + \beta i$ является корнем многочлена $\det(A_\psi - \lambda E) = 0$. Это означает, что $\det(A_\psi - (\alpha + \beta i)E) = 0$, т. е. что матрица $A_\psi - (\alpha + \beta i)E$ особенная. Система линейных уравнений

$$(A_\psi - (\alpha + \beta i)E)\bar{u} = 0$$

с такой матрицей имеет решение $\bar{z} \neq 0$ (см. 4.1.8). Пусть $\bar{z} = \bar{x} + i\bar{y}$, $\bar{x}, \bar{y} \in R^n$. Полагая в упомянутой системе уравнений $\bar{u} = \bar{z}$ и преобразуя полученное тождество, получим равенство

$$A_\psi(\bar{x} + i\bar{y}) = (\alpha + \beta i)(\bar{x} + i\bar{y}).$$

Приравняем действительные и мнимые части:

$$A_\psi \bar{x} = \alpha \bar{x} - \beta \bar{y}, \quad (6.2.2)$$

$$A_\psi \bar{y} = \beta \bar{x} + \alpha \bar{y}. \quad (6.2.3)$$

Поскольку $\bar{z} \neq 0$, то либо $\bar{x} \neq 0$, либо $\bar{y} \neq 0$. Докажем, что не равны нулю оба столбца. Действительно, при $\bar{x} = 0$ из (6.2.2) следует, что $0 = -\beta \bar{y}$. Так как $\bar{y} \neq 0$, то $\beta = 0$, что противоречит условию теоремы. Если же $\bar{y} = 0$, то, беря за основу (6.2.3) и рассуждая аналогично, также придем к противоречию.

Итак, $\bar{x} \neq \mathbf{0}$ и $\bar{y} \neq \mathbf{0}$. Докажем, что система $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ линейно независима. Если это не так и $\bar{x} = \gamma \bar{y}$, то из (6.2.2) и (6.2.3) получаем равенства

$$\begin{cases} A_{\psi} \bar{y} = \left(\alpha - \frac{\beta}{\gamma} \right) \bar{y}, \\ A_{\psi} \bar{y} = (\beta \gamma + \alpha) \bar{y}. \end{cases}$$

Вычитая верхнее равенство из нижнего, получим соотношение

$$\mathbf{0} = \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \beta \bar{y},$$

означающее, что $\beta = 0$. Это снова противоречит условию.

Пусть x, y — векторы из V , для которых $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются столбцами координат в базисе B . Подпространство $\mathcal{L}(x, y)$ инвариантно относительно преобразования ψ . Действительно, если λ и μ принадлежат R , то

$$\psi(\lambda x + \mu y) = \lambda \psi(x) + \mu \psi(y).$$

Из (6.2.2) и (6.2.3) следует, что

$$\overline{\psi(x)} = A_{\psi} \bar{x} = \alpha \bar{x} - \beta \bar{y}, \quad \overline{\psi(y)} = A_{\psi} \bar{y} = \beta \bar{x} + \alpha \bar{y}.$$

Любой вектор из $\mathcal{L}(x, y)$ можно представить в виде $\lambda x + \mu y$, где λ и μ принадлежат R . Ввиду линейности оператора ψ

$$\psi(\lambda x + \mu y) = \lambda \psi(x) + \mu \psi(y),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \psi(\lambda x + \mu y) &= \lambda(\alpha x - \beta y) + \mu(\beta x + \alpha y) = \\ &= (\lambda \alpha + \mu \beta)x + (\mu \alpha - \lambda \beta)y \in \mathcal{L}(x, y). \end{aligned} \quad \square$$

6.2.7 (Следствие). Каждое линейное преобразование ψ действительного векторного пространства V имеет инвариантное подпространство, размерность которого не меньше единицы.

Доказательство. Комплексным корням характеристического многочлена преобразования ψ соответствуют инвариантные подпространства, размерность которых не меньше двух (6.2.6). Если α является действительным корнем того же многочлена, то принадлежащий α

ненулевой собственный вектор порождает инвариантное подпространство размерности один (см. 6.1.4). $\square$

Пусть ψ — линейное преобразование векторного пространства V , $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — некоторые его попарно различные собственные значения, $r_1, \dots, r_m$ — их геометрические кратности. Зафиксируем в подпространстве L_i , $i = \overline{1, m}$, образованном вектором $\mathbf{0}$ и собственными векторами, принадлежащими собственному значению λ_i , базис $\langle a_1^i, \dots, a_{r_i}^i \rangle$. Объединим все такие базисы в одну систему

$$S = \langle a_1^1, \dots, a_{r_1}^1, a_1^2, \dots, a_{r_2}^2, \dots, a_1^m, \dots, a_{r_m}^m \rangle.$$

6.2.8. Система векторов S линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по числу k объединенных базисов.

а) $k = 1$. Система $\langle a_1^1, \dots, a_{r_1}^1 \rangle$ линейно независима, так как является базисом.

б) Пусть система S , полученная объединением k базисов, линейно независима. Расширим ее, добавив векторы из $(k+1)$ -го базиса, и воспользуемся признаком линейной независимости. Составим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i a_j^i = \mathbf{0}. \quad (6.2.4)$$

Положим $\sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i a_j^i = z_i$. Если для некоторого i вектор z_i равен нулю, то равна нулю линейная комбинация $\sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i a_j^i$ векторов i -го базиса и, следовательно, равны нулю все коэффициенты α_j^i , $j = \overline{1, r_i}$. Это означает, что комбинация (6.2.4) состоит из векторов системы, содержащей k базисов, линейно независимой по индуктивному предположению. Приходим к заключению, что в (6.2.4) равны нулю все коэффициенты, и система S линейно независима.

Пусть ни один из векторов z_i нулю не равен. Каждый вектор z_i представлен в виде линейной комбинации собственных векторов, принадлежащих собственному числу λ_i , и потому также является собственным, принадлежащим тому же числу (см. 6.1.4).

Перепишем равенство (6.2.4) в виде

$$\sum_{i=1}^{k+1} z_i = \mathbf{0}. \quad (6.2.5)$$

Действуя преобразованием ψ на обе части, получаем равенства

$$\psi \left(\sum_{i=1}^{k+1} z_i \right) = \psi(\mathbf{0}), \quad \sum_{i=1}^{k+1} \psi(z_i) = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i z_i = \mathbf{0}. \quad (6.2.6)$$

При умножении (6.2.5) на $-\lambda_{k+1}$ возникает равенство

$$-\lambda_{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} z_i = \mathbf{0}.$$

Складывая его с последним из равенств (6.2.6), получим

$$\sum_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - \lambda_{k+1}) z_i = \mathbf{0},$$

откуда $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_{k+1}) z_i = \mathbf{0}$. Заменим z_i его разложением:

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_{k+1}) \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i a_j^i = \mathbf{0}.$$

Полагая $(\lambda_i - \lambda_{k+1}) \alpha_j^i = \beta_j^i$, получим равенство

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \beta_j^i a_j^i = \mathbf{0}.$$

Левая часть является линейной комбинацией векторов системы, возникающей при объединении первых k базисов. По индуктивному предположению эта система линейно независимая, следовательно,

$$\beta_j^i = 0, \quad j = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, k},$$

и потому $(\lambda_i - \lambda_{k+1}) \alpha_j^i = 0$. Так как из $i \neq k+1$ следует, что $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$, то

$$\alpha_j^i = 0, \quad j = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Равенство (6.2.4) превращается в

$$\sum_{j=1}^{r_{k+1}} \alpha_j^{k+1} a_j^{k+1} = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\langle a_1^{k+1}, \dots, a_{r_{k+1}}^{k+1} \rangle$ — базис в L_{k+1} , то $\alpha_j^{k+1} = 0$, $j = \overline{1, r_{k+1}}$. Это означает, что все коэффициенты в левой части равенства (6.2.4) равны нулю, и потому система S линейно независима. $\square$

6.2.9. Матрица линейного преобразования $\psi: V \rightarrow V$ является диагональной тогда и только тогда, когда базис, в котором она записана, составлен из собственных векторов этого преобразования.

Доказательство.

а) Пусть все векторы базиса $B = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ собственные и принадлежат собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и матрица $A_\psi = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ преобразования ψ записана в этом же базисе. Столбцом координат в базисе B вектора u_i является $\bar{e}_i$, поэтому $A_\psi \bar{e}_i = \lambda_i \bar{e}_i$. Однако $A_\psi \bar{e}_i = \bar{a}_i$ согласно правилу умножения матриц. Это означает, что для каждого i столбец $\bar{a}_i$ равен $\lambda_i \bar{e}_i$ и потому

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (6.2.7)$$

б) Пусть матрица A_ψ , записанная в каком-то базисе $D = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, является диагональной: $A_\psi = [\alpha_1 \bar{e}_1 \dots \alpha_n \bar{e}_n]$. Из определения умножения матриц следует, что $A_\psi \bar{e}_i = \alpha_i \bar{e}_i$. Так как $\bar{e}_i$ — столбец координат вектора a_i в базисе D , то вектор a_i собственный и принадлежит собственному значению α_i . $\square$

Первая часть проведенного рассуждения содержит также доказательство следующего утверждения.

6.2.10. Если записанная в базисе $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ матрица A_ψ линейного преобразования ψ пространства V имеет вид (6.2.7), то для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ элемент λ_i является собственным значением преобразования ψ , принадлежащим собственному вектору u_i . $\square$

6.2.11. Если сумма геометрических кратностей всех попарно различных собственных значений линейного преобразования ψ векторного пространства V равна размерности этого пространства, то матрицу A этого преобразования, записанную в базисе B пространства V , можно привести к диагональному виду преобразованием подобия с неособенной матрицей H , столбцы которой составлены из координат в базисе B некоторых собственных векторов преобразования ψ .

Доказательство. Пусть $\dim V = n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — все попарно различные собственные значения преобразования ψ . Если их геометрические кратности равны соответственно $r_1, \dots, r_k$, то для каждого $i = \overline{1, k}$ найдется линейно независимая система, состоящая из r_i собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ_i . Объединяя все такие системы, получим новую систему $S = \langle a_1^1, \dots, a_{r_1}^1, \dots, a_1^k, \dots, a_{r_k}^k \rangle$, линейно независимую ввиду 6.2.8. По условию число векторов в системе S равно размерности пространства V , и потому S является базисом в V .

Пусть H — матрица перехода от B к S , тогда матрицей преобразования ψ в базисе S является матрица $U = H^{-1}AH$ (см. 3.4.8). Столбцы матрицы H состоят из координат в базисе B векторов системы S ввиду 3.4.5. Согласно 6.2.9 матрица $H^{-1}AH$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

□

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

7.1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

7.1.1. Пусть V — действительное векторное пространство. Бинарная функция, сопоставляющая каждой паре x, y векторов из V действительное число, обозначаемое (x, y) , называется **скалярным произведением**, если выполнены три условия:

- а) $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность);
- б) $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y)$;
- в) $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$ (положительная определенность).

7.1.2. Действительное векторное пространство, в котором задано скалярное произведение, называется **евклидовым пространством**. Евклидовы пространства будут обозначаться буквой E . В некоторых случаях будут использоваться и другие обозначения с указанием, что рассматриваемое пространство евклидово.

7.1.3. Скалярное произведение является билинейной функцией (т. е. функцией, линейной по каждому из двух аргументов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из условий (а) и (б) определения 7.1.1. □

7.1.4. Для любого $a \in E$ справедливо равенство $(0, a) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $(0, a) = (0a, a) = 0(a, a) = 0$. □

В школьном курсе геометрии изучаются три пространства: прямая, плоскость и трехмерное пространство. Эти пространства были ранее обозначены соответственно через G^1 , G^2 и G^3 . В том же курсе было определено скалярное произведение векторов как произведение длин

векторов на косинус угла между ними. Таким образом, мы уже имеем три примера евклидовых пространств.

7.1.5. *Длиной $|x|$ вектора $x \in E$ называется число $\sqrt{(x, x)}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение 7.1.5 корректно лишь в том случае, если число под корнем неотрицательно. Это гарантируется третьим пунктом определения 7.1.1.

7.1.6 (Неравенство Коши–Буняковского). *Неравенство*

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$$

выполняется для любых $x, y \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{7.1.1b}{\leq} (x + \lambda y, x + \lambda y) \stackrel{7.1.3}{=} (x, x + \lambda y) + \lambda(y, x + \lambda y) = \\ &\stackrel{7.1.3}{=} (x, x) + \lambda(x, y) + \lambda(y, x) + \lambda^2(y, y) \stackrel{7.1.1a}{=} |x|^2 + 2\lambda(x, y) + \lambda^2|y|^2. \end{aligned}$$

Поскольку при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|y|^2 \lambda^2 + 2(x, y)\lambda + |x|^2 \geq 0,$$

то дискриминант $4((x, y)^2 - |x|^2|y|^2)$ квадратного трехчлена не может быть положительным. Отсюда $(x, y)^2 \leq |x|^2|y|^2$, и потому $|(x, y)| \leq |x||y|$. $\square$

7.1.7. *Пусть $x, y \in E$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Углом между векторами x и y называется угол $\varphi \in [0, \pi]$, для которого $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}$.*

Определение 7.1.7 корректно: $-1 \leq \frac{(x, y)}{|x||y|} \leq 1$ ввиду 7.1.6.

7.1.8. *Векторы $x, y \in E$ ортогональны, если $(x, y) = 0$. Система векторов называется ортогональной, если в ней ортогональны любые два различных вектора.*

7.1.9 (Неравенство треугольника). *Для любых $x, y \in E$ выполняется неравенство $|x + y| \leq |x| + |y|$.*

— ее столбцы. Существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_m \bar{v}_m = \mathbf{0}$, в которой $\alpha_i \neq 0$ для некоторого i . Расписывая покомпонентно, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_m(a_1, a_m) = 0, \\ \dots \\ \alpha_1(a_m, a_1) + \dots + \alpha_m(a_m, a_m) = 0, \end{cases}$$

которая легко преобразуется в систему

$$\begin{cases} (a_1, \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m) = 0, \\ \dots \\ (a_m, \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m) = 0. \end{cases}$$

Если умножить принадлежащие системе уравнения на $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ соответственно и сложить их, то возникнет новое равенство

$$(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m, \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m) = 0,$$

из которого следует, что $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = \mathbf{0}$. Это доказывает следующее утверждение: если система векторов $\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \rangle$ линейно зависима, то и система $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ линейно зависима.

Предположим, что система S линейно зависима, тогда найдутся такие $i, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, что

$$a_i = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \dots + \alpha_m a_m.$$

Докажем, что i -й столбец матрицы Грама линейно выражается через остальные столбцы. Умножая обе части на $a_1, \dots, a_m$, получаем систему равенств

$$\begin{cases} (a_1, a_i) = \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_{i-1}(a_1, a_{i-1}) + \\ \quad \quad \quad + \alpha_{i+1}(a_1, a_{i+1}) + \dots + \alpha_m(a_1, a_m), \\ \dots \\ (a_m, a_i) = \alpha_1(a_m, a_1) + \dots + \alpha_{i-1}(a_m, a_{i-1}) + \\ \quad \quad \quad + \alpha_{i+1}(a_m, a_{i+1}) + \dots + \alpha_m(a_m, a_m). \end{cases}$$

Отсюда получаем равенство

$$\bar{v}_i = \alpha_1 \bar{v}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \cdots + \alpha_m \bar{v}_m,$$

означающее, что система векторов $\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \rangle$ линейно зависима, а потому и матрица Грама особенная. $\square$

7.1.14. Ортогональная система ненулевых векторов всегда линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система $S = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ такова, что $a_i \neq 0$ для любого $i = \overline{1, m}$ и $(a_i, a_j) = 0$, если $i \neq j$. Матрица Γ_S неособенная, так как

$$\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_m) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (a_m, a_1) & \cdots & (a_m, a_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2, a_2) & \cdots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_m, a_m) \end{pmatrix}$$

и $(a_i, a_i) > 0$ при всех $i = \overline{1, m}$. $\square$

7.1.15. Пусть $B = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — базис пространства E . Скалярное произведение векторов a и b из E выражается формулой

$$(a, b) = \bar{a}^T \Gamma_B \bar{b},$$

где $\bar{a}, \bar{b}$ — столбцы координат векторов a и b в базисе B , Γ_B — матрица Грама базиса B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, $\bar{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, тогда

$$\begin{aligned}
 \bar{a}^T \Gamma_B \bar{b} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, a_1) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \\
 &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \left(\beta_1 \begin{pmatrix} (a_1, a_1) \\ \vdots \\ (a_n, a_1) \end{pmatrix} + \dots + \beta_n \begin{pmatrix} (a_1, a_n) \\ \vdots \\ (a_n, a_n) \end{pmatrix} \right) = \\
 &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \beta_j (a_1, a_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \beta_j (a_n, a_j) \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (a_1, \beta_j a_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (a_n, \beta_j a_j) \end{pmatrix} = \\
 &= \alpha_1 \left(\sum_{j=1}^n (a_1, \beta_j a_j) \right) + \dots + \alpha_n \left(\sum_{j=1}^n (a_n, \beta_j a_j) \right) = \\
 &= \sum_{j=1}^n (\alpha_1 a_1, \beta_j a_j) + \dots + \sum_{j=1}^n (\alpha_n a_n, \beta_j a_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (a_i, a_j) = \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i, \sum_{j=1}^n \beta_j a_j \right) = (a, b). \quad \square
 \end{aligned}$$

7.2. ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

7.2.1. Пусть $i, j \in N$. Введем символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

7.2.2. Система векторов $\langle d_1, \dots, d_m \rangle$ называется ортонормированной, если $(d_i, d_j) = \delta_{ij}$ для $i, j = \overline{1, m}$.

Процесс ортогонализации позволяет построить ортогональный базис $\langle c_1, \dots, c_s \rangle$ линейной оболочки произвольной системы векторов $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$

из E . Нормируя векторы, его можно превратить в ортонормированный базис $\langle c'_1, \dots, c'_s \rangle$.

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА. Сначала строим промежуточную систему $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$.

1. $b_1 = a_1$.

2. $b_2 = a_2 + \alpha_{21}b_1$. Коэффициент α_{21} подбираем так, чтобы b_2 оказался ортогональным к b_1 :

$$0 = (b_1, b_2) = (b_1, a_2 + \alpha_{21}b_1) = \alpha_{21}(b_1, b_1) + (a_2, b_1),$$

откуда $\alpha_{21} = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$. Если $(b_1, b_1) = 0$, то полагаем $\alpha_{21} = 0$.

3. Пусть уже построены векторы $b_1, \dots, b_{k-1}$; полагаем

$$b_k = a_k + \alpha_{k1}b_1 + \dots + \alpha_{kk-1}b_{k-1}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} 0 = (b_i, b_k) &= (b_i, a_k + \alpha_{k1}b_1 + \dots + \alpha_{kk-1}b_{k-1}) = \\ &= (a_k, b_i) + \alpha_{k1}(b_i, b_1) + \dots + \alpha_{kk-1}(b_i, b_{k-1}). \end{aligned}$$

Однако если $i \neq j$, то $(b_i, b_j) = 0$, поэтому

$$\alpha_{ki}(b_i, b_i) + (a_k, b_i) = 0,$$

откуда

$$\alpha_{ki} = -\frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)}.$$

Как и выше, если $(b_i, b_i) = 0$, то $\alpha_{ki} = 0$.

Итак, для $k = \overline{1, m}$

$$b_k = a_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki}b_i, \quad \text{где } \alpha_{ki} = \begin{cases} -\frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)}, & \text{если } (b_i, b_i) \neq 0, \\ 0, & \text{если } (b_i, b_i) = 0. \end{cases} \quad (7.2.1)$$

Построена ортогональная система векторов $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$.

а) Из (7.2.1) видно, что каждый вектор a_k , $k = \overline{1, m}$, линейно выражается через векторы $b_1, \dots, b_m$, поэтому $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$ является подпространством пространства $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_m)$.

б) Подставляя в равенство (7.2.1) последовательно разложения векторов $b_{k-1}, \dots, b_1$, для каждого $k = \overline{1, m}$ вектор b_k можно выразить через векторы $a_1, \dots, a_m$, следовательно, $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_m)$ содержится в $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$. Учитывая (а), получаем равенство $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_m) = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$.

в) Система $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ может содержать нулевые векторы. Удалив их, получим ортогональную систему $\langle c_1, \dots, c_s \rangle$ ненулевых векторов, линейно независимую согласно 7.1.14 и эквивалентную системе $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$.

г) Теперь можно каждый вектор полученной системы нормировать, т. е. перейти к системе $\langle c'_1, \dots, c'_s \rangle$, где $c'_i = \frac{1}{|c_i|} c_i$, $i = \overline{1, s}$. По построению

$$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) = \mathcal{L}(c'_1, \dots, c'_s)$$

и $\langle c'_1, \dots, c'_s \rangle$ — ортонормированный базис своей линейной оболочки. $\square$

7.2.3. Каждая ортонормированная система $S = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ векторов из E может быть дополнена до ортонормированного базиса пространства E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейно независимую систему S можно дополнить до базиса $T = \langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k \rangle$ пространства E . Применим к T процесс ортогонализации. Так как система S ортогональная, то первые m шагов дадут снова систему S , а последующие — какие-то векторы $c_1, \dots, c_k$. Нормируя их, получим искомый ортонормированный базис $\langle a_1, \dots, a_m, c'_1, \dots, c'_k \rangle$. $\square$

В утверждении 7.2.3 о возможности дополнения ортонормированной системы векторов S до ортонормированного базиса пространства E и его доказательстве не говорится о том, как дополнить систему S до базиса T пространства E . Кроме того, применение процесса ортогонализации может оказаться очень трудоемким, если система T сильно отличается от S . Часто удобнее воспользоваться следующим методом построения векторов $a_{m+1}, \dots, a_n$, дополняющих систему S до ортогонального базиса пространства E . Если требуется построить ортонормированный базис, то затем надо нормировать каждый из найденных векторов.

Зафиксируем в пространстве E некоторый ортонормированный базис B . Пусть $(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})^T$ — столбец координат вектора a_i , $i = \overline{1, m}$, в этом базисе. Из утверждения 7.2.3 следует, что если $m \neq n$, то

в E имеется вектор a_{m+1} , ортогональный каждому вектору a_i , $i = \overline{1, m}$. Чтобы найти этот вектор, обозначим столбец его координат через $(\xi_1, \dots, \xi_n)^T$. Ввиду сказанного справедливы равенства $(a_i, a_{m+1}) = 0$, $i = \overline{1, m}$. Поскольку в ортонормированном базисе скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов, получаем однородную систему линейных уравнений с неизвестными $\xi_1, \dots, \xi_n$:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \dots + \alpha_{ni}\xi_n = 0. \end{cases}$$

Решая каким-либо способом эту систему, найдем отличное от нуля частное решение, т. е. вектор a_{m+1} . Если $m \neq n$, то таким же способом находим вектор a_{m+2} , ортогональный каждому вектору a_i , $i = \overline{1, m+1}$, и т. д.

ПРИМЕР. Дополнить до ортогонального базиса систему векторов $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle$, в которой $\bar{a}_1 = (1, 2, -1, -2)^T$, $\bar{a}_2 = (2, 1, 2, 1)^T$.

Ищем вектор $\bar{a}_3$, ортогональный векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. В соответствии со сказанным ранее составляем матрицу однородной системы линейных уравнений и преобразуем ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{-1} & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & -8 \\ \boxed{4} & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Записываем полученную систему, разнося свободные и базисные неизвестные в разные части:

$$\begin{cases} 4\xi_1 = -5\xi_2 + 3\xi_4, \\ 4\xi_3 = 3\xi_2 - 5\xi_4. \end{cases}$$

Значения свободных неизвестных выбираем сами. Пусть, например, $\xi_2 = 0$, $\xi_4 = 4$, тогда $\xi_1 = 3$, $\xi_3 = -5$. Нетрудно убедиться в том, что система векторов $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \rangle$, в которой $\bar{a}_3 = (3, 0, -5, 4)^T$, является ортогональной.

Теперь ищем вектор $\bar{a}_4$, ортогональный векторам $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$. Опять составляем матрицу однородной системы уравнений и преобразуем ее. При этом используем ранее проведенные вычисления.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{-1} & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \\ -2 & -10 & 0 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & -8 \\ \boxed{4} & 5 & 0 & -3 \\ -4 & -20 & 0 & 28 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -15 & 0 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & -5 \\ 20 & 25 & 0 & -15 \\ 0 & -3 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 20 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Разделяем свободные и базисные неизвестные и находим частное решение $\bar{a}_4$:

$$\begin{cases} 5\xi_1 = -4\xi_2, \\ \xi_3 = 0, \\ 5\xi_4 = 3\xi_2, \end{cases} \quad \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\bar{a}_1$ – $\bar{a}_4$ образуют искомый ортогональный базис. $\square$

7.2.4. Базис евклидова пространства является ортонормированным тогда и только тогда, когда скалярное произведение любых двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Согласно 7.1.15 $(a, b) = \bar{a}^T \Gamma_B \bar{b}$, где B — базис пространства евклидова пространства, Γ_B — матрица Грама этого базиса и $\bar{a}$, $\bar{b}$ — столбцы координат векторов a и b базиса B . Так как система векторов B является ортонормированной, ее матрица Грама совпадает с единичной матрицей E , и потому $(a, b) = \bar{a}^T \bar{b}$, что и требовалось доказать.

($\Leftarrow$) Если векторы a_i и a_j входят в базис $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то столбцы их координат равны соответственно $\bar{e}^i$ и $\bar{e}^j$. По условию $(a, b) = \bar{e}_i^T \bar{e}_j$. Нетрудно заметить, что $\bar{e}_i^T \bar{e}_j = \delta_{ij}$, следовательно, базис ортонормированный. $\square$

7.2.5 (Следствие). Если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — ортонормированный базис пространства E и $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$, то справедлива формула

$$|x| = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}. \quad \square$$

7.2.6. Пусть $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — базис действительного векторного пространства V . Пространство V можно превратить в евклидово, задав скалярное произведение следующим образом: $\forall a, b \in V$ если

$$a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n, \quad b = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n,$$

то $(a, b) = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$. Задаваемое таким способом скалярное произведение назовем стандартным.

Доказательство. Легко проверить, что все требования определения 7.1.1 выполняются. $\square$

7.2.7. Если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — ортонормированный базис в E и

$$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n,$$

то $\alpha_i = (x, a_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство.

$$(x, a_i) = (\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n, a_i) =$$

$$= \alpha_1 (a_1, a_i) + \dots + \alpha_n (a_n, a_i) = \alpha_i (a_i, a_i) = \alpha_i. \quad \square$$

7.3. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

7.3.1. (Лемма о векторе, ортогональном системе, порождающей подпространство). Если некоторый вектор ортогонален каждому вектору системы, порождающей подпространство, то он ортогонален также каждому вектору из этого подпространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, a_1, \dots, a_m$ — векторы из E и $(x, a_i) = 0$, $i = \overline{1, m}$. Если $y \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$, то $y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$ и

$$(x, y) = \alpha_1(x, a_1) + \dots + \alpha_m(x, a_m) = 0. \quad \square$$

7.3.2. Два множества X_1 и X_2 векторов из пространства E называются **взаимно ортогональными** (обозначение: $X_1 \perp X_2$), если $(x, y) = 0$ для любых $x \in X_1$ и $y \in X_2$.

Нетрудно заметить, что из этого определения следует единственность ортогонального дополнения для любого множества векторов.

7.3.3. Сумма ортогональных подпространств всегда прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если L_1 и L_2 — подпространства пространства E , $L_1 \perp L_2$ и $z \in (L_1 \cap L_2)$, то $(z, z) = 0$, так как $z \in L_1$ и $z \in L_2$. Отсюда следует, что $z = \mathbf{0}$, и потому $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$. Ввиду 2.4.19 получаем требуемое утверждение. $\square$

7.3.4. Множество $X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X((x, y) = 0)\}$ называется **ортогональным дополнением** множества X векторов из пространства E .

7.3.5. Для любого непустого множества X векторов из евклидова пространства E его ортогональное дополнение $X^\perp$ является подпространством пространства E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $x \in X$:

а) $(x, \mathbf{0}) = 0 \Rightarrow \mathbf{0} \in X^\perp$;

б) $y_1, y_2 \in X^\perp \Rightarrow (x, y_1) = 0 \& (x, y_2) = 0 \Rightarrow (x, y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 \in X^\perp$;

в) $\forall y \in X^\perp \forall \alpha \in \mathbb{R}((x, \alpha y) = \alpha(x, y) = 0) \Rightarrow \alpha y \in X^\perp. \quad \square$

7.3.6. Если L — подпространство пространства E , то $E = L \oplus L^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ — ортонормированный базис подпространства L . Дополним его до ортонормированного базиса

$$\langle a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_n \rangle$$

пространства E и обозначим через M линейную оболочку векторов $a_{s+1}, \dots, a_n$. Докажем, что $L \perp M$.

Пусть x и y — произвольные векторы, принадлежащие подпространствам L и M . Разложим их по базисам этих подпространств:

$$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s, \quad y = \alpha_{s+1} a_{s+1} + \dots + \alpha_n a_n.$$

Вычислим скалярное произведение этих векторов, учитывая, что $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s, \alpha_{s+1} a_{s+1} + \dots + \alpha_n a_n) = \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^n \alpha_i \alpha_j (a_i, a_j) = 0. \end{aligned}$$

Сумма взаимно ортогональных подпространств L и M прямая, значит, размерность суммы равна сумме размерностей слагаемых. Так как сумма этих размерностей слагаемых совпадает с размерностью пространства,

$$M \oplus L = E, \quad M = L^\perp. \quad \square$$

ПРИМЕР. Задавая на плоскости декартову прямоугольную систему координат, мы представляем двумерное пространство в виде прямой суммы двух взаимно ортогональных подпространств.

Следующий пример показывает, как можно найти базис ортогонального дополнения подпространства L , если известны векторы, порождающие L .

ПРИМЕР. Подпространство L евклидова пространства E является линейной оболочкой векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

заданных своими координатами в ортонормированном базисе пространства E . Требуется найти какой-нибудь базис подпространства $L^\perp$.

Если вектор $b = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$ принадлежит подпространству $L^\perp$, то $(a_i, b) = 0$ для $i = 1, 2, 3$. Записывая скалярные произведения через

координаты векторов, получаем однородную систему линейных уравнений, множество решений которой совпадает с $L^\perp$:

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + \xi_4 = 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ 5\xi_1 + 4\xi_2 + 7\xi_3 + \xi_4 = 0. \end{cases}$$

Строки основной матрицы этой системы составлены из координат векторов a_1, a_2, a_3 . Преобразуем ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исчезновение в процессе преобразований одного уравнения указывает на линейную зависимость системы векторов $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Полученную систему уравнений можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} \xi_2 = -2\xi_1 - 2\xi_3, \\ \xi_4 = -3\xi_1 + \xi_3. \end{cases}$$

Векторы $b_1 = (1, -2, 0, 3)^T$ и $b_2 = (0, -2, 1, 1)$ образуют ее фундаментальную систему решений и, следовательно, базис подпространства $L^\perp$. $\square$

Любую действительную матрицу A можно считать матрицей однородной системы линейных уравнений, поэтому можно сказать, что она задает некоторое подпространство — пространство L решений этой системы. Рассматривая линейную оболочку столбцов матрицы A^T , получаем другое подпространство L_1 . По сути это линейная оболочка строк матрицы A , однако приходится превратить их в столбцы, чтобы L и L_1 оказались подпространствами одного пространства R^n , где n — число столбцов матрицы A . Следующая теорема показывает, что $L_1 = L^\perp$, и потому каждая действительная матрица с n столбцами задает разложение подпространства R^n в прямую сумму двух взаимно ортогональных подпространств.

7.3.7. Если L — подпространство всех решений системы $A\bar{x} = 0$ с n неизвестными, в которой все коэффициенты являются действительными числами, то линейная оболочка столбцов матрицы A^T совпадает с $L^\perp$ и потому размерность пространства решений этой системы равна $n - \text{rank } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{a}_1^T, \dots, \bar{a}_m^T$ — строки матрицы A . Очевидно, векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m, \bar{x}$ принадлежат пространству R^n . Компоненты этих векторов можно рассматривать как координаты в некотором базисе пространства R^n . Превратим это пространство в евклидово, задав в нем стандартное скалярное произведение (см. 7.2.6). Теперь рассматриваемую систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{cases} (\bar{a}_1, \bar{x}) = 0, \\ \dots \\ (\bar{a}_m, \bar{x}) = 0. \end{cases} \quad (7.3.1)$$

Любое решение $\bar{x}_0$ системы (7.3.1) ортогонально векторам $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$, следовательно, оно ортогонально и любому вектору из пространства $U = \mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ согласно 7.3.1. Иначе говоря, $\bar{x}_0 \in U^\perp$. Верно и обратное: если L — множество всех решений системы $A\bar{x} = \mathbf{0}$ и $(\bar{u}, \bar{a}_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$, то $\bar{u} \in L$. Сказанное означает, что $U = L^\perp$, и потому

$$\dim L = n - \dim U = n - \text{rank } A. \quad \square$$

7.3.8 (Следствие). Размерность аффинного многообразия, состоящего из всех решений неоднородной системы линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ с действительными коэффициентами и n неизвестными, равна $n - \text{rank } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество всех решений системы $A\bar{x} = \bar{b}$ является аффинным многообразием и имеет вид $x_0 + L$, где L — пространство решений системы $A\bar{x} = \mathbf{0}$. Его размерность совпадает с размерностью подпространства L , равного $n - \text{rank } A$ согласно 7.3.9. $\square$

7.3.9 (Следствие). Пусть $A\bar{x} = \mathbf{0}$ и $B\bar{x} = \mathbf{0}$ — две однородные системы линейных уравнений, L_A и L_B — пространства решений этих систем. Согласно 7.3.7 $L_A^\perp$ и $L_B^\perp$ — линейные оболочки столбцов матриц A^T и B^T . Если пространство $L_B^\perp$ совпадает с L_A , то пространство $L_A^\perp$ совпадает с L_B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий следует, что

$$L_A^\perp \oplus L_A = R^n = L_B \oplus L_B^\perp.$$

Поскольку для любого подпространства существует только одно ортогональное дополнение, из $L_B^\perp = L_A$ следует, что $L_A^\perp$ совпадает с L_B . $\square$

Пусть подпространство L евклидова пространства E задано системой линейных уравнений S . Как найти систему линейных уравнений, у которой множество решений совпадает с $L^\perp$? Возможное решение указывает утверждение 7.3.9. Решая систему S , находим фундаментальную систему решений $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$. Из строк $a_1^T, \dots, a_k^T$ составляем матрицу B . Множество решений системы $B\bar{x} = 0$ совпадает с $L^\perp$.

Поскольку $L^\perp$ совпадает с линейной оболочкой строк матрицы системы S , можно получить более короткое решение, если воспользоваться указанным в 4.2.10 способом перехода от задания аффинного многообразия системой порождающих к заданию системой линейных уравнений.

Пример. Подпространство L евклидова пространства E задано системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + \xi_4 = 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ 5\xi_1 + 4\xi_2 + 7\xi_3 + \xi_4 = 0. \end{cases} \quad (7.3.2)$$

Найти систему линейных уравнений, задающую $L^\perp$.

Согласно 7.3.7 подпространство $L^\perp$ является линейной оболочкой векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся методом, изложенным в 4.2.10. Записываем матрицу вспомогательной системы линейных уравнений и преобразуем ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & \left| \right. & \xi_1 \\ 2 & 1 & 4 & \left| \right. & \xi_2 \\ 3 & 2 & 7 & \left| \right. & \xi_3 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \left| \right. & \xi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & \left| \right. & \xi_1 - \xi_4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & \left| \right. & \xi_2 - 2\xi_4 \\ 0 & 2 & 4 & \left| \right. & \xi_3 - 3\xi_4 \\ 1 & 0 & 1 & \left| \right. & \xi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \left| \right. & \xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_4 \\ 0 & 1 & 2 & \left| \right. & \xi_2 - 2\xi_4 \\ 0 & 0 & 0 & \left| \right. & -2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \\ 1 & 0 & 1 & \left| \right. & \xi_4 \end{pmatrix}.$$

Получаем требуемую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_4 = 0, \\ -2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0. \end{cases} \quad (7.3.3)$$

Векторы $b_1 = (1, -2, 0, 3)^T$ и $b_2 = (0, -2, 1, 1)^T$, составленные из коэффициентов при неизвестных, являются решениями системы (7.3.2), значит, система (7.3.3) действительно задает требуемое подпространство. $\square$

7.3.10. Пусть L — подпространство евклидова пространства E ,

$$E = L \oplus L^\perp, \quad u \in E, \quad u = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^\perp.$$

Вектор y называется **ортогональной проекцией** вектора u на подпространство L , а z — **ортогональной составляющей** вектора u относительно L .

Нетрудно заметить, что ортогональная проекция вектора u на подпространство L является ортогональной составляющей того же вектора относительно $L^\perp$, а ортогональная составляющая вектора u относительно L совпадает с ортогональной проекцией вектора u на $L^\perp$. Как же найти проекции вектора u ? Рассмотрим два случая.

1. Пусть векторы $a_1, \dots, a_m$ заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе пространства E , и L является линейной оболочкой этих векторов: $L = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$. Поскольку проекция y принадлежит L , то она линейно выражается через векторы $a_1, \dots, a_m$:

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = y. \quad (7.3.4)$$

Векторы a_i нам известны, и если мы найдем коэффициенты α_i , то определим и y . Заменяем в равенстве (7.3.4) y на $u - z$ и у полученного равенства умножим обе части на a_i :

$$(a_i, \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m) = (a_i, u - z).$$

Поскольку $a_i \in L$ и $z \in L^\perp$, то $(a_i, z) = 0$. Пользуясь этим и линейностью скалярного произведения, получаем для $i = \overline{1, m}$ уравнения

$$\alpha_1 (a_i, a_1) + \dots + \alpha_m (a_i, a_m) = (a_i, u) - (a_i, z) = (a_i, u)$$

с неизвестными $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Элементы расширенной матрицы системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_m) & (a_1, u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_m, a_1) & \dots & (a_m, a_m) & (a_m, u) \end{array} \right), \quad (7.3.5)$$

стоящие левее черты, образуют матрицу Грама. Если система векторов $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ является базисом в L , то эта матрица неособенная ввиду 7.1.13, система уравнений является совместной и имеет одно решение (см. 4.1.8). В ином случае по смыслу задачи система уравнений также является совместной, однако имеет более одного решения, так как вектор u линейно выражается через векторы линейно зависимой системы $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ многими способами согласно 2.2.12. Найдя y , получаем z как разность между u и y .

ПРИМЕР. Векторы

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства. Подпространство L является линейной оболочкой векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. Найти ортогональную проекцию на L вектора $\bar{u}$ и его ортогональную составляющую относительно L .

Представляем вектор $\bar{u}$ в виде $\bar{u} = \bar{y} + \bar{z}$, где $\bar{y} \in L$, $\bar{z} \in L^\perp$. Будем искать такие коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, при которых

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 = \bar{y}.$$

Для этого вычисляем попарные произведения векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{u}$. Из них составляем расширенную матрицу (7.3.5) системы линейных уравнений и преобразуем ее:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & -2 & 6 \\ 4 & 14 & 10 & 38 \\ -2 & 10 & 12 & 32 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 34 & 34 & 102 \\ 0 & 34 & 34 & 102 \\ -1 & 5 & 6 & 16 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Мы пришли к системе, состоящей из двух уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 3 - \alpha_3, \\ \alpha_1 = -1 + \alpha_3. \end{cases}$$

Полагая $\alpha_3 = 0$, получаем $\alpha_2 = 3$, $\alpha_1 = -1$. Задача решена:

$$\bar{y} = -\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 = (5, 1, -1, 0)^T, \quad \bar{z} = \bar{u} - \bar{y} = (1, -2, 3, 0)^T. \quad \square$$

2. Предположим, что L совпадает с множеством решений однородной системы линейных уравнений $A\bar{x} = \mathbf{0}$ с n неизвестными. Эту систему можно записать в виде

$$\begin{cases} (\bar{a}_1, \bar{x}) = 0, \\ \dots \\ (\bar{a}_m, \bar{x}) = 0. \end{cases}$$

где векторы $\bar{a}_i$ и столбец неизвестных $\bar{x}$ принадлежат пространству R^n (см. (7.3.1) из 7.3.7). Согласно 7.3.7 $L^\perp = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$. Описанным выше способом найдем проекцию z вектора u на $L^\perp$, а затем и проекцию y вектора u на L как разность векторов u и z . $\square$

7.3.11. Расстоянием от точки x до аффинного многообразия M называется минимум расстояний от x до точек многообразия, т. е. минимум длин векторов $x - u$, где $u \in M$.

7.3.12. Пусть L — подпространство пространства E . Расстояние от точки x до аффинного многообразия $M = x_0 + L$ равно длине ортогональной относительно L составляющей вектора $x - u$ для любого вектора $u \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x - x_0 = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^\perp$, тогда

$$z = x - x_0 - y. \quad (7.3.6)$$

Докажем, что ортогональная составляющая вектора $x - u$ также равна z . Поскольку $z \in L^\perp$, то для этого достаточно доказать, что $(x - u) - z \in L$. Очевидно,

$$(x - u) - z = (x - u) - (x - x_0 - y) = x_0 - u + y.$$

Так как подпространства L и $L^\perp$ взаимно ортогональны (см. 7.3.2), то $(x-u)-z \in L$ тогда и только тогда, когда вектор $(x-u)-z$ ортогонален каждому вектору из $L^\perp$. Пусть $v \in L^\perp$, тогда

$$(x-u-z, v) = (x_0-u+y, v) = (x_0-u, v) + (y, v).$$

Из $y \in L$ следует, что $(y, v) = 0$. Поскольку $u \in M$, то $u = x_0 + a$ для некоторого $a \in L$ (4.2.1), следовательно, $x_0 - u = -a \in L$, и потому $(x_0 - u, v) = 0$. Это означает, что $(x-u)-z \in L$, и потому z является ортогональной составляющей вектора $(x-u)-z$ относительно L .

Теперь найдем минимум длин векторов $x-u$, где $u \in M$. Так как $(x-u-z, v) = 0$ для каждого $v \in L^\perp$, то и $(x-u-z, z) = 0$. По теореме Пифагора (см. 7.1.11)

$$|x-u-z+z|^2 = |x-u|^2 = |x-u-z|^2 + |z|^2.$$

Однако длина вектора z одна и та же для любого u , и потому длина вектора $x-u$ зависит только от длины вектора $x-u-z$. Из равенства (7.3.6) следует, что

$$|x-u-z| = |x-u-x+x_0+y| = |x_0-u+y|.$$

Очевидно, длина вектора x_0-u+y неотрицательна и равна нулю только тогда, когда сам вектор равен нулю, т. е. тогда, когда $u = x_0 + y$. Итак, вектор $x-u$ имеет наименьшую длину при $u = y + x_0$ и тогда

$$|x-u| = |x-x_0-y| = |z|. \quad \square$$

ПРИМЕР. Найти расстояние от точки $x = (2, 4, -4, 2)^T$ до аффинного многообразия M , заданного системой линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\xi_1 + 5\xi_2 + 2\xi_3 - 4\xi_4 = 3, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0. \end{cases} \quad (7.3.7)$$

Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Получаем общее решение:

$$\begin{cases} \xi_1 = -1 - \xi_3 + 3\xi_4, \\ \xi_2 = 1 + 2\xi_4. \end{cases}$$

Полагаем $\xi_3 = \xi_4 = 0$ и находим частное решение $x_0 = (-1, 1, 0, 0)^T$, принадлежащее многообразию M .

Обозначим через a_1^T и a_2^T строки основной матрицы системы (7.3.7), тогда $a_1 = (2, 5, 2, -4)^T$, $a_2 = (1, 1, 1, 1)^T$. Если представить многообразие M в виде $M = x_0 + L$, где L — подпространство решений присоединенной к (7.3.7) однородной системы линейных уравнений, то, как упоминалось выше, $L^\perp = \mathcal{L}(a_1, a_2)$. Нам нужно найти проекцию вектора $x - x_0$ на подпространство $L^\perp$. С этой целью положим $u = x - x_0 = (3, 3, -4, 2)^T$, составим матрицу (7.3.5) системы линейных уравнений с неизвестными α_1 и α_2 и преобразуем ее:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 49 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 44 & \boxed{1} & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 44 & 1 & 1 \\ 171 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 44 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Получили единственное решение $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Это означает, что $z = 0a_1 + 1a_2 = a_2 = (1, 1, 1, 1)^T$. Расстояние от точки x до аффинного многообразия M равно длине вектора z , т. е. двум. $\square$

7.4. ИЗОМОРФИЗМЫ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

7.4.1. Говорят, что отображение $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ сохраняет скалярное произведение, если $(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ для любых x и y из E_1 .

7.4.2. Отображение φ пространства E_1 на пространство E_2 называется **изоморфизмом евклидовых пространств** E_1 и E_2 (евклидовым изоморфизмом), если оно является изоморфизмом векторных пространств E_1 и E_2 (3.2.6) и сохраняет скалярное произведение.

ПРИМЕР 1. Зафиксируем в евклидовом пространстве E размерности два ортонормированный базис $\langle a_1, a_2 \rangle$. Чтобы однозначно задать линейное преобразование ψ пространства E , достаточно указать образы векторов a_1 и a_2 (см. 3.2.4). Пусть $\psi(a_1) = 2a_1$, $\psi(a_2) = a_2$.

Очевидно,

$$(a_1, a_1) = 1, \quad (\psi(a_1), \psi(a_1)) = (2a_1, 2a_1) = 4(a_1, a_1) = 4,$$

поэтому преобразование ψ не является евклидовым изоморфизмом. $\square$

Пример 2. Зафиксируем в евклидовом пространстве E размерности три ортонормированный базис $B = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ и зададим преобразование τ пространства E указанием образов базисных векторов:

$$\tau(a_1) = a_3, \quad \tau(a_2) = a_1, \quad \tau(a_3) = a_2.$$

Очевидно, отображение τ является взаимно однозначным и линейным. Если координаты каких-то векторов $x, y \in E$ в базисе B образуют столбцы $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$, то $(\zeta_3, \zeta_1, \zeta_2)^T$, $(\xi_3, \xi_1, \xi_2)^T$ — столбцы координат их образов, записанные в том же базисе. Базис B ортонормированный, поэтому

$$(x, y) = \zeta_1 \xi_1 + \zeta_2 \xi_2 + \zeta_3 \xi_3, \quad (\tau(x), \tau(y)) = \zeta_3 \xi_3 + \zeta_1 \xi_1 + \zeta_2 \xi_2.$$

Равенство $(x, y) = (\tau(x), \tau(y))$ означает, что τ — изоморфизм евклидовых пространств. $\square$

7.4.3. Отображение $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ является изоморфизмом евклидовых пространств тогда и только тогда, когда φ сохраняет скалярное произведение.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Очевидно.

($\Leftarrow$) а) Докажем, что отображение φ линейное, т. е. что для любых векторов x и y из E

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y).$$

Обозначим разность между левой и правой частями этого равенства через z и докажем справедливость равенства $(z, z) = 0$, равносильного утверждению $z = 0$. Очевидно,

$$\begin{aligned} (z, z) &= (\varphi(\alpha x + \beta y) - \alpha \varphi(x) - \beta \varphi(y), \varphi(\alpha x + \beta y) - \alpha \varphi(x) - \beta \varphi(y)) = \\ &= (\varphi(\alpha x + \beta y), \varphi(\alpha x + \beta y)) + \alpha^2 (\varphi(x), \varphi(x)) + \beta^2 (\varphi(y), \varphi(y)) - \\ &\quad - 2\alpha (\varphi(\alpha x + \beta y), \varphi(x)) - 2\beta (\varphi(\alpha x + \beta y), \varphi(y)) + 2\alpha\beta (\varphi(x), \varphi(y)). \end{aligned}$$

Поскольку отображение φ сохраняет скалярное произведение, то из правой части последнего равенства знак φ можно убрать:

$$(z, z) = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) + \alpha^2(x, x) + \beta^2(y, y) - \\ - 2\alpha(\alpha x + \beta y, x) - 2\beta(\alpha x + \beta y, y) + 2\alpha\beta(x, y) = 0,$$

в чем легко убедиться, воспользовавшись линейностью скалярного произведения. Как уже отмечалось ранее, отсюда следует, что $z = 0$, и потому $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

б) Взаимная однозначность отображения φ равносильна утверждению $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$, которое мы и докажем. Пусть

$$\varphi(x) = \varphi(y), \quad (7.4.1)$$

тогда

$$(x - y, x - y) = (x, x) - 2(x, y) + (y, y) = \\ = (\varphi(x), \varphi(x)) - 2(\varphi(x), \varphi(y)) + (\varphi(y), \varphi(y)) = \\ = (\varphi(x), \varphi(x)) - 2(\varphi(x), \varphi(x)) + (\varphi(x), \varphi(x)) = 0.$$

Это означает, что $x - y = 0$, и ввиду этого $x = y$. $\square$

Пусть ψ изоморфно отображает векторное пространство E_1 на E_2 и $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — ортонормированный базис в E_1 , тогда $\langle \psi(a_1), \dots, \psi(a_n) \rangle$ — базис в E_2 (см. 3.2.8) не обязательно ортонормированный. Из 7.4.3 вытекает, что если изоморфизм ψ евклидов, то базис $\langle \psi(a_1), \dots, \psi(a_n) \rangle$ непременно является ортонормированным.

7.4.4. Евклидовы пространства E_1 и E_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim E_1 = \dim E_2$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $E_1 \simeq E_2$ как евклидовы пространства, то они изоморфны и как векторные пространства, вследствие чего $\dim E_1 = \dim E_2$ согласно 3.2.9.

($\Leftarrow$) Пусть $B_i = \langle a_1^i, \dots, a_n^i \rangle$ — ортонормированный базис в E_i , $i = 1, 2$, и $\dim E_1 = \dim E_2 = n$. Существует, и притом только один, линейный оператор φ , отображающий E_1 в E_2 , для которого $\varphi(a_j^1) = a_j^2$, $j = \overline{1, n}$ (см. 3.2.4). Так как размерности пространств E_1 и E_2 совпадают, то матрица A_φ этого оператора является квадратной. Система B_2 линейно независима, следовательно, $\dim \varphi(E_1) = n$, и потому

$\varphi(E_1) = E_2$, т. е. φ отображает E_1 на E_2 . Столбцами матрицы A_φ являются столбцы координат векторов базиса B_2 , поэтому она неособенная. Это означает, что φ — изоморфизм векторных пространств E_1 и E_2 ввиду 3.3.6. Оператор φ сохраняет скалярное произведение: если

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^1, \quad y = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i^1,$$

то поскольку базис пространства E_1 выбран ортонормированным, скалярное произведение векторов x и y равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов (см. 7.2.4):

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

Однако вследствие линейности оператора φ

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(a_i^1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^2, \quad \varphi(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi(a_i^1) = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i^2$$

и так как базис пространства E_2 также ортонормированный, то

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = (x, y).$$

Согласно 7.4.2 отображение φ является изоморфизмом евклидовых пространств. $\square$

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

8.1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

В этой главе предполагается, что элементы всех рассматриваемых матриц являются действительными числами.

8.1.1. Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если $A^T = A^{-1}$.

8.1.2. Произведение ортогональных матриц также является ортогональной матрицей. Определитель ортогональной матрицы равен либо $+1$, либо -1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A и B — две ортогональные матрицы одинакового порядка, то

$$\text{а) } (BA)^T(BA) = A^T B^T BA = A^{-1} B^{-1} BA = A^{-1} A = E;$$

б) $1 = \det E = \det(A^{-1}A) = \det(A^T A) = \det A^T \det A = (\det A)^2$, следовательно, $\det A$ равен либо $+1$, либо -1 . □

8.1.3. Квадратная матрица $A = (\alpha_{ij})_n^n$ над $\mathbb{R}$ ортогональна тогда и только тогда, когда A удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) $A^T = A^{-1}$;
- 2) для любых i и j сумма произведений соответствующих элементов i -й и j -й строк равна δ_{ij} ;
- 3) для любых i и j сумма произведений соответствующих элементов i -го и j -го столбцов равна δ_{ij} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (1) повторяет определение 8.1.1.

$$(1) \iff (3): A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \& A^T A = E \iff (\bar{a}_i)^T \bar{a}_j = \delta_{ij}, i, j = \overline{1, n}.$$

(1) $\iff$ (2): $A^T = [\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n]$ & $AA^T = E \iff (\bar{b}_i)^T \bar{b}_j = \delta_{ij}, i, j = \overline{1, n}$; при этом столбцы матрицы A^T являются строками матрицы A . $\square$

Простейшими примерами ортогональных матриц являются единичная матрица и те матрицы, которые могут быть получены из нее перестановкой строк. Чуть более сложным примером может служить матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Ортогональность всех указанных матриц легко проверить, используя утверждение 8.1.3. Следующее простое утверждение показывает, что число примеров ортогональных матриц легко увеличить.

8.1.4. Пусть B — какой-нибудь ортонормированный базис евклидова пространства размерности n . Система векторов $S = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ является ортонормированной тогда и только тогда, когда матрица A_S , составленная из столбцов координат этих векторов в базисе B , является ортогональной.

Доказательство. Так как базис B ортонормированный, то согласно 7.2.4 скалярное произведение любых двух векторов из системы S равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$(a_i, a_j) = \bar{a}_i^T \bar{a}_j. \quad (8.1.1)$$

($\implies$) Если система S ортонормированная, то $(a_i, a_j) = \delta_{ij}$ для любых i и j . Ввиду (8.1.1) это означает, что $\bar{a}_i^T \bar{a}_j = \delta_{ij}$ и матрица A_S ортогональна согласно 8.1.3.

($\impliedby$) Из ортогональности матрицы A_S следует справедливость равенств $\bar{a}_i^T \bar{a}_j = \delta_{ij}$. Равенства (8.1.1) показывают, что система S является ортонормированной. $\square$

8.1.5 (Следствие). Матрица перехода от ортонормированного базиса B к базису B_1 является ортогональной тогда и только тогда, когда базис B_1 также является ортонормированным.

Доказательство. Пусть M — матрица перехода от базиса B к базису B_1 . Ее столбцы являются столбцами координат векторов, принадлежащих базису B_1 , а координаты берутся в ортонормированном базисе B (см. 3.4.5). Согласно 8.1.4 матрица M является ортогональной

тогда и только тогда, когда система векторов B_1 является ортонормированной. $\square$

8.1.6 (Следствие). Матрица линейного преобразования евклидова пространства E , записанная в ортонормированном базисе, является ортогональной тогда и только тогда, когда образом этого базиса является также ортонормированный базис.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — какой-нибудь ортонормированный базис в пространстве E , ψ — линейное преобразование этого пространства, A_ψ — матрица этого преобразования в указанном базисе, $S = \langle \psi(a_1), \dots, \psi(a_n) \rangle$ — образ базиса B . Напомним, что матрица линейного преобразования всегда является квадратной, и ее порядок совпадает с размерностью n пространства E . Столбцы матрицы A_ψ составлены из координат в базисе B векторов, принадлежащих системе S . Ввиду 8.1.4 отсюда следует нужное утверждение. $\square$

8.1.7. Преобразование ψ евклидова пространства E называется **ортогональным**, если оно сохраняет скалярное произведение:

$$\forall x, y \in E ((\psi(x), \psi(y)) = (x, y)). \quad (8.1.2)$$

Следует обратить внимание на то, что в этом определении не предполагается, что преобразование ψ является линейным. Однако в 8.1.9 будет доказано, что ортогональность преобразования евклидова пространства всегда влечет его линейность. Линейный оператор, отображающий пространство E_1 на пространство E_2 и сохраняющий скалярное произведение, является изоморфизмом (см. 7.4.2). Таким образом, каждое ортогональное преобразование пространства E представляет собой изоморфное отображение пространства E на себя. Такие отображения часто называют **автоморфизмами** (от *греч.* autos — сам).

8.1.8. Линейное преобразование ψ пространства E является ортогональным тогда и только тогда, когда $\forall u \in E (|\psi(u)| = |u|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Утверждение прямо следует из определения 8.1.7.

($\Leftarrow$) Так как $|u|^2 = (u, u)$, то

$$|\psi(u)| = |u| \iff (\psi(u), \psi(u)) = (u, u).$$

Надо доказать, что $\forall x, y \in E ((\psi(x), \psi(y)) = (x, y))$. Сумма $x + y$ содержит как x , так и y . Из равенства

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y)$$

следует, что

$$2(x, y) = (x + y, x + y) - (x, x) - (y, y). \quad (8.1.3)$$

Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} 2(\psi(x), \psi(y)) &= (\psi(x) + \psi(y), \psi(x) + \psi(y)) - \\ &\quad - (\psi(x), \psi(x)) - (\psi(y), \psi(y)). \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

По условию, $(\psi(u), \psi(u)) = (u, u)$ для любого u из E , поэтому

$$(\psi(x), \psi(x)) = (x, x), \quad (\psi(y), \psi(y)) = (y, y).$$

По той же причине

$$(\psi(x) + \psi(y), \psi(x) + \psi(y)) = (\psi(x + y), \psi(x + y)) = (x + y, x + y).$$

Вследствие этого равенство (8.1.4) превращается в следующее:

$$2(\psi(x), \psi(y)) = (x + y, x + y) - (x, x) - (y, y) \stackrel{(8.1.3)}{=} 2(x, y). \quad \square$$

8.1.9. а) Каждое ортогональное преобразование ψ пространства E является линейным;

б) матрица A_ψ ортогонального преобразования ψ пространства E , записанная в ортонормированном базисе этого пространства, является ортогональной;

в) любое линейное преобразование φ пространства E , матрица которого в каком-нибудь ортонормированном базисе этого пространства ортогональна, является ортогональным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_1 = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — какой-нибудь ортонормированный базис в пространстве E , $u \in E$, $b_i = \psi(a_i)$, $i = \overline{1, n}$, $S_2 = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$. Если преобразование ψ ортогонально, то для $i, j = \overline{1, n}$ справедливы равенства

$$(b_i, b_j) = (\psi(a_i), \psi(a_j)) = (a_i, a_j) = \delta_{i,j}.$$

Это означает, что система S_2 является ортонормированной, следовательно, линейно независимой (см. 7.1.14) и потому базисом пространства E .

а) Если $u = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$, то $\alpha_i = (u, a_i)$, $i = \overline{1, n}$ (см. 7.2.7). Из ортогональности преобразования ψ следует, что

$$(\psi(u), b_i) = (\psi(u), \psi(a_i)) = (u, a_i) = \alpha_i.$$

Это означает, что для каждого вектора $u \in E$ его координаты в базисе S_1 совпадают с координатами вектора $\psi(u)$ в базисе S_2 . Ввиду соответствия между действиями с векторами и действиями со столбцами их координат (см. 2.3.10) следует линейность преобразования ψ . Действительно, для любых x и y из E и любого λ из R справедливы равенства

$$\begin{aligned} \overline{(\psi(x+y))}_{S_2} &= \overline{(x+y)}_{S_1} = \bar{x}_{S_1} + \bar{y}_{S_1} = \overline{\psi(x)}_{S_2} + \overline{\psi(y)}_{S_2}, \\ \overline{\psi(\lambda x)}_{S_2} &= \overline{\lambda x}_{S_1} = \lambda \bar{x}_{S_1} = \lambda \overline{\psi(x)}_{S_2}. \end{aligned}$$

б) Согласно (а) преобразование ψ является линейным. Так как ψ отображает ортонормированный базис S_1 в ортонормированный базис S_2 , то его матрица A_ψ в базисе S_1 ортогональна (см. 8.1.6).

в) Пусть матрица A_φ линейного преобразования φ , записанная в некотором ортонормированном базисе, является ортогональной, x, y — два произвольных вектора из E , $\bar{x}, \bar{y}$ — столбцы их координат в том же базисе. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат в ортонормированном базисе (см. 7.2.4), поэтому

$$\begin{aligned} (\varphi(x), \varphi(y)) &= (\overline{\varphi(x)})^T \overline{\varphi(y)} = (A_\varphi \bar{x})^T (A_\varphi \bar{y}) = \\ &= \bar{x}^T A_\varphi^T A_\varphi \bar{y} = \bar{x}^T A_\varphi^{-1} A_\varphi \bar{y} = \bar{x}^T \bar{y} = (x, y). \end{aligned}$$

Это означает, что преобразование φ ортогонально. $\square$

8.1.10. Если λ_0 — характеристическое число (действительное или комплексное) ортогональной матрицы A , то $|\lambda_0| = 1$.

Доказательство. Пусть λ_0 — корень уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, тогда система линейных уравнений $(A - \lambda_0 E)\bar{x} = 0$ имеет ненулевое решение $\bar{u}$. Применяя теорему о переходе к комплексно

сопряженным числам в арифметическом выражении (см. 1.2.5) к каждому уравнению из этой системы, легко убедиться в том, что столбец $\bar{v}$, компоненты которого сопряжены с соответствующими компонентами столбца $\bar{u}$, является решением системы линейных уравнений $(A - \bar{\lambda}_0 E)\bar{x} = 0$, где $\bar{\lambda}_0$ — число, сопряженное с λ_0 . Таким образом, $(A - \bar{\lambda}_0 E)\bar{v} = 0$. Отсюда получаем соотношения

$$A\bar{v} = \bar{\lambda}_0 \bar{v}, \quad \bar{v}^T A^T = \bar{\lambda}_0 \bar{v}^T.$$

Перемножая правую и левую части последнего равенства с соответствующими частями равенства $A\bar{u} = \lambda_0 \bar{u}$, получим новое равенство

$$\bar{v}^T A^T A \bar{u} = \bar{\lambda}_0 \lambda_0 \bar{v}^T \bar{u}.$$

Поскольку $A^T A = A^{-1} A = E$, то $\bar{v}^T \bar{u} = \bar{\lambda}_0 \lambda_0 \bar{v}^T \bar{u}$. Если $\bar{u} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, то $\bar{v} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)^T$, поэтому

$$\bar{v}^T \bar{u} = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 \geq 0.$$

Так как $\bar{u} \neq 0$ по предположению, то одна из компонент этого вектора, например i -я, отлична от нуля. Очевидно, тогда не равна нулю также i -я компонента вектора $\bar{v}$ и $\bar{v} \neq 0$. Отсюда и из указанного выше неравенства следует, что $\bar{v}^T \bar{u} \neq 0$. Ввиду этого из $\bar{v}^T \bar{u} = \bar{\lambda}_0 \lambda_0 \bar{v}^T \bar{u}$ получаем $\bar{\lambda}_0 \lambda_0 = 1$. Если $\lambda_0 = \gamma + \delta i$, то

$$\bar{\lambda}_0 = \gamma - \delta i, \quad 1 = \bar{\lambda}_0 \lambda_0 = \gamma^2 + \delta^2 = |\bar{\lambda}_0|^2.$$

Так как модуль числа не может быть отрицательным, то отсюда следует, что $|\bar{\lambda}_0| = 1$. $\square$

8.2. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим некоторое линейное преобразование ψ евклидова пространства E размерности n . Если $A_\psi = (\alpha_{ij})$ — матрица этого преобразования, записанная в базисе $B = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то, поскольку j -й столбец матрицы A_ψ состоит из координат вектора $\psi(a_j)$,

$$\overline{\psi(a_j)} = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj})^T, \quad \psi(a_j) = \sum_{s=1}^n \alpha_{sj} a_s, \quad j = \overline{1, n}.$$

Предположим, что базис B является ортонормированным. Согласно 7.2.7, для любого вектора y произведение (y, a_i) равно i -й координате вектора y в этом базисе, поэтому

$$(\psi(a_j), a_i) = \alpha_{ij} \quad (8.2.1)$$

для каждого $j = \overline{1, n}$.

Пусть теперь ψ^* — такое линейное преобразование пространства E , матрицей которого в том же ортонормированном базисе B является матрица

$$A_{\psi^*} = A_{\psi}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$\overline{\psi^*(a_j)} = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn})^T, \quad \psi^*(a_i) = \sum_{s=1}^n \alpha_{is} a_s, \quad i = \overline{1, n},$$

и потому

$$(a_j, \psi^*(a_i)) = (\psi^*(a_i), a_j) = \alpha_{ij}. \quad (8.2.2)$$

Из (8.2.1) и (8.2.2) следует, что

$$(\psi(a_j), a_i) = (a_j, \psi^*(a_i)), \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (8.2.3)$$

Если для двух линейных преобразований ψ и ψ^* пространства E и любых векторов a_i, a_j некоторого ортонормированного базиса B выполняются соотношения (8.2.3), то матрицы A_{ψ} и A_{ψ^*} этих преобразований, записанные в базисе B , являются взаимно транспонированными. Действительно, предполагая, что разложения векторов $\psi(a_j)$ и $\psi^*(a_i)$ задаются приведенными ранее формулами, получаем равенство (8.2.1), а также равенство

$$(\psi^*(a_j), a_i) = \alpha_{ji}.$$

Пусть $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Элемент α_{ij} в матрице A_{ψ} находится в i -й строке и j -м столбце. Последнее равенство показывает, что в матрице A_{ψ^*} на том же месте находится элемент α_{ji} . Это и означает, что $A_{\psi^*} = A_{\psi}^T$.

В равенствах (8.2.3) векторы a_i и a_j принадлежат базису B . Покажем, что их можно заменить любыми векторами. Сначала покажем, что один из сомножителей в (8.2.3) может не входить в базис. Пусть u — произвольный вектор из пространства E . Если $u = \sum_{s=1}^n \beta_s a_s$, то для любого $i = \overline{1, n}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} (\psi(u), a_i) &= \left(\psi \left(\sum_{s=1}^n \beta_s a_s \right), a_i \right) = \\ &= \left(\sum_{s=1}^n \beta_s \psi(a_s), a_i \right) = \sum_{s=1}^n \beta_s (\psi(a_s), a_i) \stackrel{(8.2.3)}{=} \sum_{s=1}^n \beta_s (a_s, \psi^*(a_i)) = \\ &= \left(\sum_{s=1}^n \beta_s a_s, \psi^*(a_i) \right) = (u, \psi^*(a_i)). \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

Теперь рассмотрим общий случай. Возьмем в E еще один вектор $v = \sum_{s=1}^n \gamma_s a_s$, тогда

$$\begin{aligned} (\psi(u), v) &= \left(\psi(u), \sum_{s=1}^n \gamma_s a_s \right) = \\ &= \sum_{s=1}^n \gamma_s (\psi(u), a_s) \stackrel{(8.2.4)}{=} \sum_{s=1}^n \gamma_s (u, \psi^*(a_s)) = \left(u, \sum_{s=1}^n \gamma_s \psi^*(a_s) \right) = \\ &= \left(u, \psi^* \left(\sum_{s=1}^n \gamma_s a_s \right) \right) = (u, \psi^*(v)). \end{aligned}$$

Итак, если в каком-нибудь ортонормированном базисе матрицы линейных преобразований ψ и ψ^* пространства E взаимно транспонированы, то

$$(\psi(u), v) = (u, \psi^*(v)) \quad (8.2.5)$$

для любых векторов u и v из пространства E .

Для каждого преобразования ψ имеется только одно преобразование ψ^* , удовлетворяющее (8.2.5), так как, полагая в (8.2.5) $u = a_j$ и $v = a_i$ для $i, j = \overline{1, n}$, получим равенства (8.2.3), означающие, что матрица преобразования ψ^* возникает при транспонировании матрицы преобразования ψ .

8.2.1. Пусть ψ — линейное преобразование евклидова пространства E . Линейное преобразование ψ^* того же пространства, связанное с ψ соотношением (8.2.5), называется **преобразованием, сопряженным с ψ** .

8.2.2. Преобразованием, сопряженным с ψ^* , является ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$(\psi^*(u), v) = (v, \psi^*(u)) \stackrel{(8.2.5)}{=} (\psi(v), u) = (u, \psi(v)). \quad \square$$

Ввиду 8.2.2 будем называть преобразования ψ и ψ^* взаимно сопряженными, а также говорить, что они сопряжены между собой.

ПРИМЕР. Пусть пространство E представлено в виде прямой суммы подпространств V и W . Если преобразование ψ проектирует E на V параллельно W , то сопряженное преобразование ψ^* проектирует E на $W^\perp$ параллельно $V^\perp$.

Действительно, объединяя базис $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ подпространства V с базисом $\langle a_{m+1}, \dots, a_n \rangle$ подпространства W , получим базис $B = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ пространства E . Вектор a , принадлежащий $V^\perp \cap W^\perp$, ортогонален каждому вектору из B , так как он принадлежит каждому из подпространств $V^\perp$, $W^\perp$. Из леммы 7.3.1 следует, что a ортогонален каждому вектору из E . Это означает, что $a = \mathbf{0}$ и потому $V^\perp \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Так как

$$\dim V + \dim W = \dim E,$$

$$\dim V^\perp = \dim E - \dim V, \quad \dim W^\perp = \dim E - \dim W,$$

то $\dim V^\perp + \dim W^\perp = \dim E$. Видим, что сумма подпространств $V^\perp$, $W^\perp$ — прямая и совпадает с E .

Возьмем в E два вектора x , y . Разложим каждый из них в сумму двумя способами:

$$x = x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \quad \text{где } x_1 \in V, x_2 \in W, x_3 \in V^\perp, x_4 \in W^\perp,$$

$$y = y_1 + y_2 = y_3 + y_4, \quad \text{где } y_1 \in V, y_2 \in W, y_3 \in V^\perp, y_4 \in W^\perp.$$

Обозначим через ψ^1 преобразование, проектирующее E на $W^\perp$ параллельно $V^\perp$. Вычислим скалярные произведения, учитывая, что

$$\psi(y) = y_1, \psi^1(x) = x_4, (x_3, y_1) = 0, (x_4, y_2) = 0:$$

$$(x, \psi(y)) = (x_3 + x_4, y_1) = (x_3, y_1) + (x_4, y_1) = (x_4, y_1),$$

$$(\psi^*(x), y) = (x_4, y_1 + y_2) = (x_4, y_1) + (x_4, y_2) = (x_4, y_1).$$

Поскольку $(x, \psi(y)) = (\psi^1(x), y)$, то преобразования ψ и ψ^1 взаимно сопряжены и потому $\psi^1 = \psi^*$. $\square$

8.2.3. Если матрицы A_φ и A_ψ линейных преобразований φ и ψ пространства E , записанные в каком-нибудь ортонормированном базисе B_1 , взаимно транспонированы, то преобразования φ и ψ сопряжены между собой и их матрицы взаимно транспонированы в любом ортонормированном базисе пространства E .

Доказательство. Первое утверждение доказано в процессе вывода формулы (8.2.5). Рассмотрим второе. По условию, $A_\varphi^T = A_\psi$. Пусть H — матрица перехода от базиса B_1 к другому ортонормированному базису B_2 . В новом базисе B_2 матрицами преобразований φ и ψ являются соответственно матрицы $H^{-1}A_\varphi H$ и $H^{-1}A_\psi H$ (см. 3.4.8). Матрица H ортогональная, так как является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису (см. 8.1.4), следовательно, $H^{-1} = H^T$, и потому $H^T A_\varphi H$ и $H^T A_\psi H = H^T A_\varphi^T H$ — матрицы преобразований φ и ψ в базисе B_2 . Равенства $(H^T A_\varphi H)^T = H^T A_\varphi^T H^{TT} = H^T A_\varphi^T H$ показывают, что эти матрицы взаимно транспонированы. $\square$

Итак, если известна матрица линейного преобразования φ в ортонормированном базисе, то, транспонируя ее, получим в том же базисе матрицу сопряженного преобразования. Если же базис, в котором задана матрица преобразования φ , не является ортонормированным и требуется найти матрицу преобразования φ^* в этом же базисе, то можно сначала вычислить матрицу преобразования φ в каком-нибудь ортонормированном базисе, транспонировать ее и вернуться к исходному базису.

ПРИМЕР. Векторы $a_1 = (1, 2)^T$ и $a_2 = (1, 0)^T$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе B пространства E и сами образуют базис C этого пространства. Матрица

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

в базисе C задает линейное преобразование ψ пространства E . Надо построить в том же базисе матрицу A_{ψ^*} преобразования ψ^* , сопряженного с ψ .

Столбцы матрицы

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

являются столбцами координат в базисе B векторов базиса C , поэтому H — матрица перехода от B к C (см. 3.4.5). Обратная к ней матрица

$$H^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

совпадает с матрицей перехода от C к B (см. 3.4.6). Вычисляем матрицу $\tilde{A}_{\psi}$ преобразования ψ , записанную в базисе B , используя 3.4.8:

$$\tilde{A}_{\psi} = H A_{\psi} H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Так как базис B ортонормированный, то матрица

$$\tilde{A}_{\psi^*} = \tilde{A}_{\psi}^T = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

является в этом базисе матрицей преобразования ψ^* . Возвращаемся к базису C :

$$\begin{aligned} A_{\psi^*} &= H^{-1} \tilde{A}_{\psi^*} H = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 27 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Убедимся в правильности найденного решения. Найдем матрицу Грама базиса C :

$$\Gamma_C = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ и $\bar{y} = (\beta_1, \beta_2)^T$ — два произвольных вектора, заданных своими координатами в базисе C , тогда согласно 3.3.1

$$\overline{\psi(x)} = A_{\psi} \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ 2\alpha_1 - 6\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\psi^*(y)} = A_{\psi^*} \bar{y} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 27 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\beta_1 + \beta_2 \\ 27\beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Используя 7.1.15, вычисляем скалярные произведения:

$$\begin{aligned} (\psi(x), y) &= \overline{\psi(x)}^T \Gamma_C \bar{y} = \\ &= (2\alpha_1 + 6\alpha_2, 2\alpha_1 - 6\alpha_2) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \\ &= 12\alpha_1\beta_1 + 24\alpha_2\beta_1 + 4\alpha_1\beta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, \psi^*(y)) &= \bar{x}^T \Gamma_C \overline{\psi^*(y)} = \\ &= (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\beta_1 + \beta_2 \\ 27\beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix} = \\ &= 12\alpha_1\beta_1 + 24\alpha_2\beta_1 + 4\alpha_1\beta_2. \end{aligned}$$

Совпадение скалярных произведений означает, что матрица найдена правильно. $\square$

8.2.4. Если известны матрица Грама Γ какого-нибудь базиса евклидова пространства и матрица A_{ψ} преобразования этого пространства, записанная в этом базисе, то матрицу сопряженного с ψ преобразования можно найти по формуле

$$A_{\psi^*} = \Gamma^{-1} A_{\psi}^T \Gamma.$$

Доказательство. Обозначим базис, в котором записана матрица A_{ψ} , через B_1 , через B_2 некоторый ортонормированный базис того же пространства, и через H матрицу перехода от B_1 к B_2 . Согласно 3.4.8 $H^{-1}A_{\psi}H$ — матрица преобразования ψ в базисе B_2 и потому $(H^{-1}A_{\psi}H)^T$ — матрица преобразования ψ^* в том же базисе, а

$$H(H^{-1}A_{\psi}H)^T H^{-1} = HH^T A_{\psi}(H^{-1})^T H^{-1}$$

— матрица преобразования ψ^* в базисе B_1 , то есть A_{ψ^*} .

Столбцы матрицы H^{-1} составлены из координат векторов базиса B_1 в базисе B_2 (см. 3.4.8, 3.4.6, 3.4.1). Базис B_2 ортонормированный, поэтому скалярное произведение любых двух векторов равно сумме

произведений соответствующих координат этих векторов в базисе B_2 (см. 7.2.4). Сказанное означает, что, умножая строку матрицы $(H^{-1})^T$ с номером i на столбец матрицы H^{-1} с номером j , мы находим скалярное произведение i -го и j -го векторов из базиса B_1 , и потому $(H^{-1})^T H^{-1}$ — матрица Грама базиса B_1 :

$$(H^{-1})^T H^{-1} = \Gamma.$$

Ввиду 3.1.28 и 4.3.6 справедливы равенства

$$(HH^T)^{-1} = (H^T)^{-1} H^{-1} = (H^{-1})^T H^{-1},$$

показывающие, что $HH^T = \Gamma^{-1}$. Видим, что

$$A_{\psi^*} = HH^T A_{\psi} (H^{-1})^T H^{-1} = \Gamma^{-1} A_{\psi}^T \Gamma. \quad \square$$

ПРИМЕР. Дана матрица

$$A_{\psi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

линейного преобразования ψ в базисе $\langle b_1, b_2 \rangle$. Известно, что $\langle a_1, a_2 \rangle$ — ортонормированный базис и $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$. Надо найти матрицу преобразования ψ^* в базисе $\langle b_1, b_2 \rangle$.

Сначала вычислим матрицу Грама базиса $\langle b_1, b_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} (b_1, b_1) &= (a_1, a_1) = 1, & (b_2, b_2) &= (a_1 + a_2, a_1 + a_2) = \\ &= (a_1, a_1) + (a_2, a_2) = 2, \\ (b_1, b_2) &= (b_2, b_1) = (a_1, a_1 + a_2) = (a_1, a_1) + (a_1, a_2) = \\ &= (a_1, a_1) = 1, \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Находим к ней обратную:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу преобразования ψ^* :

$$A_{\psi^*} = \Gamma^{-1} A_{\psi}^T \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

8.2.5. Линейное преобразование ψ пространства E называется **самосопряженным**, если оно совпадает со своим сопряженным преобразованием, т. е. если для любых $u, v \in E$ выполняется равенство $(\psi(u), v) = (u, \psi(v))$.

8.2.6. Линейное преобразование ψ пространства E является самосопряженным тогда и только тогда, когда в каком-нибудь ортонормированном базисе пространства E матрица преобразования ψ является симметричной.

Доказательство. Утверждение следует из 8.2.3 и 8.2.5.

8.2.7. Для ортогонального преобразования ψ пространства E всегда существует обратное преобразование ψ^{-1} , совпадающее с преобразованием ψ^* , сопряженным с ψ .

Доказательство. Из определений ортогонального преобразования (см. 8.1.7) и сопряженного преобразования (см. 8.2.1) следует, что равенства

$$(a, b) \stackrel{8.1.7}{=} (\psi(a), \psi(b)) \stackrel{8.2.1}{=} (a, \psi^*(\psi(b)))$$

справедливы для любых двух векторов $a, b \in E$, следовательно,

$$(a, \psi^*(\psi(b))) - (a, b) = 0, \quad (a, \psi^*(\psi(b)) - b) = 0.$$

Это означает, что вектор $z = \psi^*(\psi(b)) - b$ ортогонален каждому вектору $a \in E$, что возможно только при $z = 0$. Мы доказали, что $\psi^*(\psi(b)) = b$ для каждого $b \in E$, т. е. что $\psi^* = \psi^{-1}$. $\square$

8.2.8. Все характеристические числа действительной симметричной матрицы действительны.

Доказательство. Пусть $A = (\alpha_{ij})_n^n$ — действительная симметричная матрица. Если λ' — корень характеристического многочлена $\det(A -$

$-\lambda E)$, то система линейных уравнений $(A - \lambda' E)\bar{x} = \mathbf{0}$ имеет ненулевое решение $\bar{u}_1 = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$. Это означает, что справедливы равенства

$$\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \dots + \alpha_{1n}\gamma_n = \lambda'\gamma_1, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \dots + \alpha_{nn}\gamma_n = \lambda'\gamma_n. \end{cases} \quad (8.2.6)$$

По лемме 1.2.5 о переходе к комплексно сопряженным числам в арифметическом выражении при замене всех чисел в полученных выше равенствах на комплексно сопряженные возникнут новые равенства

$$\begin{cases} \alpha_{11}\bar{\gamma}_1 + \dots + \alpha_{1n}\bar{\gamma}_n = \bar{\lambda}'\bar{\gamma}_1, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\bar{\gamma}_1 + \dots + \alpha_{nn}\bar{\gamma}_n = \bar{\lambda}'\bar{\gamma}_n, \end{cases} \quad (8.2.7)$$

показывающие, что $\bar{u}_2 = (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n)^T$ является решением системы $(A - \bar{\lambda}' E)\bar{x} = \mathbf{0}$.

Для каждого $i = \overline{1, n}$ умножим i -е равенство из (8.2.6) на $\bar{\gamma}_i$ и сложим все полученные равенства:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\gamma}_i \gamma_j = \sum_{i=1}^n \lambda' \bar{\gamma}_i \gamma_i = \lambda' \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2. \quad (8.2.8)$$

В (8.2.7) умножим i -е равенство, $i = \overline{1, n}$, на γ_i и все полученные равенства также сложим:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\gamma}_j \gamma_i = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}' \bar{\gamma}_i \gamma_i = \bar{\lambda}' \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2.$$

Так как матрица A симметричная, то $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для всех $i, j = \overline{1, n}$, и левую часть этой цепочки равенств можно записать иначе:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\gamma}_j \gamma_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \bar{\gamma}_j \gamma_i.$$

Полученная двойная сумма отличается от левой части в (8.2.8) лишь обозначениями индексов, следовательно, они совпадают, и потому

$$\lambda' \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 = \bar{\lambda}' \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2.$$

Поскольку $\bar{u}_1 \neq 0$, то $\sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 \neq 0$, следовательно, справедливо равенство $\lambda' = \bar{\lambda}'$, означающее, что число λ' действительное. $\square$

8.2.9. Если L — подпространство пространства E , инвариантное относительно самосопряженного преобразования ψ этого пространства, то подпространство $L^\perp$ также инвариантно относительно ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in L$, $y \in L^\perp$. Поскольку $\psi(x) \in L$, то $(\psi(x), y) = 0$. Ввиду самосопряженности преобразования ψ отсюда следует, что $(x, \psi(y)) = 0$. Так как последнее равенство справедливо для любого $x \in L$, то $\psi(y) \in L^\perp$. Последнее соотношение верно для каждого $y \in L^\perp$, следовательно, $L^\perp$ инвариантно относительно преобразования ψ . $\square$

8.2.10. Если $a \neq 0$ — собственный вектор самосопряженного преобразования ψ пространства E и $L = \mathcal{L}(a)$, то подпространство $L^\perp$ инвариантно относительно ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подпространство L инвариантно относительно ψ (см. 6.1.4), поэтому 8.2.10 следует из 8.2.9. $\square$

8.2.11. Из собственных векторов любого самосопряженного преобразования ψ евклидова пространства E можно построить ортонормированный базис пространства E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по размерности пространства E . Если $\dim E = 1$, то любой ненулевой вектор $y \in E$ является собственным, так как в этом случае $\langle y \rangle$ — базис в E и $\psi(y) = \alpha y$ для подходящего α . Полагая $w = |y|^{-1}y$, получим ортонормированный базис $\langle w \rangle$ пространства E .

Зафиксируем теперь некоторое натуральное число $n > 1$ и предположим, что теорема справедлива для любого самосопряженного преобразования пространства E при $\dim E < n$. Пусть ψ — некоторое самосопряженное преобразование евклидова пространства размерности n . Согласно 8.2.8 собственные значения преобразования ψ являются действительными числами, поэтому ψ имеет собственный вектор $\hat{a} \neq 0$. Длина вектора $a = |\hat{a}|^{-1}\hat{a}$, который также является собственным вектором преобразования ψ , равна единице. Если $L = \mathcal{L}(a)$, то $\psi(L^\perp) \subseteq L^\perp$

(см. 8.2.10). Ввиду этого можно рассматривать такое линейное преобразование ψ' подпространства $L^\perp$, для которого

$$\psi'(x) = \psi(x) \quad \text{для каждого} \quad x \in L^\perp. \quad (8.2.9)$$

Это преобразование называется ограничением преобразования ψ на подпространстве $L^\perp$. Преобразование ψ' самосопряженное, так как

$$(\psi'(u), v) = (\psi(u), v) = (u, \psi(v)) = (u, \psi'(v))$$

для любых $u, v \in L^\perp$. Размерность пространства $L^\perp$ равна $n-1$, и потому в $L^\perp$ найдется ортонормированный базис $\langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$ из собственных векторов преобразования ψ' . Из (8.2.9) следует, что векторы этого базиса являются также собственными векторами преобразования ψ . Поскольку $E = L \oplus L^\perp$, то $\langle a, b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$ — базис пространства E (см. 2.4.19), состоящий из собственных векторов преобразования ψ . Длина каждого вектора из этого базиса равна единице, $(b_i, b_j) = 0$, если $i \neq j$, и $(a, b_i) = 0$ для $i = \overline{1, n-1}$, так как $a \in L$ и $b_i \in L^\perp$, следовательно, этот базис является ортонормированным. $\square$

8.2.12. Для любой действительной симметричной матрицы A всегда найдется такая ортогональная матрица H , что $H^{-1}AH$ — диагональная матрица.

Доказательство. Пусть B_1 — ортонормированный базис пространства E . В этом базисе матрица A задает некоторое самосопряженное преобразование ψ этого пространства (см. 8.2.6). Из собственных векторов преобразования ψ можно составить другой ортонормированный базис B_2 (см. 8.2.11), в котором матрица A_1 преобразования ψ является диагональной (см. 6.2.9). Матрица H перехода от B_1 к B_2 ортогональная (см. 8.1.4), и $A_1 = H^{-1}AH$ (см. 3.4.8). $\square$

8.2.13. Пусть u_1 и u_2 — собственные векторы самосопряженного преобразования ψ пространства E , принадлежащие собственным значениям μ_1 и μ_2 соответственно. Если $\mu_1 \neq \mu_2$, то векторы u_1 и u_2 взаимно ортогональны.

Доказательство. Из $\psi(u_1) = \mu_1 u_1$, $\psi(u_2) = \mu_2 u_2$ получаем равенства

$$(\psi(u_1), u_2) = \mu_1(u_1, u_2), \quad (\psi(u_2), u_1) = \mu_2(u_2, u_1).$$

Вычтем второе из первого:

$$(\psi(u_1), u_2) - (\psi(u_2), u_1) = (\mu_1 - \mu_2)(u_1, u_2).$$

Преобразование ψ самосопряженное, поэтому

$$(\psi(u_1), u_2) - (\psi(u_2), u_1) = (\psi(u_1), u_2) - (u_2, \psi(u_1)) = 0.$$

Поскольку $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$, то $(u_1, u_2) = 0$. □

8.3. ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

8.3.1. Для любых линейных преобразований φ и ψ пространства E справедливо равенство $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A_φ , A_ψ — матрицы преобразований φ , ψ в некотором ортонормированном базисе пространства E , то $A_\psi A_\varphi$ — матрица преобразования $\psi\varphi$ (3.3.5), а $(A_\psi A_\varphi)^T = A_\varphi^T A_\psi^T$ — матрица преобразования $(\psi\varphi)^*$ в том же базисе. Так как $A_\varphi^T = A_{\varphi^*}$ и $A_\psi^T = A_{\psi^*}$, то $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$. □

8.3.2 (Следствие). Произведение $\psi\varphi$ самосопряженных преобразований φ и ψ снова является самосопряженным преобразованием тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\psi\varphi = \varphi\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi^* = \varphi$ и $\psi^* = \psi$.

а) Если преобразование $\psi\varphi$ самосопряженное, то

$$\psi\varphi = (\psi\varphi)^* \stackrel{8.3.1}{=} \varphi^*\psi^* = \varphi\psi.$$

б) Предположим, что $\psi\varphi = \varphi\psi$, тогда

$$(\psi\varphi)^* \stackrel{8.3.1}{=} \varphi^*\psi^* = \varphi\psi = \psi\varphi. \quad \square$$

8.3.3. Пусть ψ — линейное преобразование евклидова пространства E . Линейное преобразование $\varphi = \psi^*\psi$ того же пространства является самосопряженным, и все его собственные значения являются неотрицательными. Если же отображение ψ взаимно однозначное, то все его собственные значения положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательно все три утверждения теоремы.

а) Так как

$$\varphi^* = (\psi^* \psi)^* \stackrel{8.3.1}{=} \psi^* (\psi^*)^* = \psi^* \psi = \varphi,$$

то преобразование φ самосопряженное.

Если u — собственный вектор преобразования φ , принадлежащий собственному значению λ , то $\varphi(u) = \lambda u$. По условию, $\varphi = \psi^* \psi$, поэтому

$$\psi^*(\psi(u)) = \lambda u.$$

Умножим обе части скалярно на u :

$$(\psi^*(\psi(u)), u) = (\lambda u, u) = \lambda(u, u).$$

Поскольку преобразования ψ и ψ^* взаимно сопряжены, то

$$(\psi(u), \psi(u)) = \lambda(u, u). \quad (8.3.1)$$

б) Для любых векторов u и $\psi(u)$ справедливы неравенства

$$(u, u) \geq 0, \quad (\psi(u), \psi(u)) \geq 0,$$

поэтому и $\lambda \geq 0$.

в) Вектор u собственный и потому не равен нулю. Если отображение ψ взаимно-однозначное, то и $\psi(u) \neq \mathbf{0}$, так как $\mathbf{0} = \psi(\mathbf{0})$. Это означает, что

$$(u, u) > 0, \quad (\psi(u), \psi(u)) > 0.$$

Отсюда и из равенства (8.3.1) следует, что $\lambda > 0$. □

8.3.4. Каждое линейное преобразование τ , отображающее пространство E на себя, можно представить в виде произведения ортогонального преобразования ψ и самосопряженного преобразования φ , все собственные значения которого положительны:

$$\tau = \psi \varphi.$$

Это представление называется **полярным разложением** преобразования τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim E = n$. Преобразование $\pi = \tau^* \tau$ самосопряженное (см. 8.3.3), поэтому из его собственных векторов можно составить ортонормированный базис B (см. 8.2.11). В этом базисе матрица A_π преобразования π является диагональной, а на ее главной диагонали расположены собственные значения преобразования π (см. 6.2.9, 6.2.10):

$$A_\pi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Преобразование π взаимно однозначное (см. 7.4.4, 3.2.6), поэтому все собственные значения λ_i , $i = \overline{1, n}$, положительны (см. 8.3.3).

Обозначим через φ преобразование, имеющее в базисе B матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} +\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & +\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица симметричная, следовательно, преобразование φ является самосопряженным. Поскольку матрица A_φ диагональная, то положительные числа $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ — собственные значения преобразования φ (см. 6.2.10).

Теперь займемся построением преобразования ψ . Нетрудно проверить, что $A_\varphi A_\varphi = A_\pi$ и потому $\pi = \varphi \varphi$.

Также простым умножением можно убедиться в том, что

$$A_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}.$$

Из симметричности этой матрицы следует, что

$$(\varphi^{-1})^* = \varphi^{-1}. \quad (8.3.2)$$

Положим

$$\psi = \tau \varphi^{-1}. \quad (8.3.3)$$

Пусть A_ψ — матрица преобразования ψ , записанная в базисе B . Преобразование ψ является ортогональным, если $A_\psi^T = A_\psi^{-1}$ (см. 8.1.9). Последнее равенство равносильно соотношению $A_\psi^T A_\psi = E$, означающему, что преобразование $\psi^* \psi$ совпадает с тождественным преобразованием ε , отображающим каждый вектор из E на себя. Проверим это.

$$\psi^* \psi \stackrel{(8.3.3)}{=} (\tau \varphi^{-1})^* \tau \varphi^{-1} \stackrel{8.3.1}{=} (\varphi^{-1})^* \tau^* \tau \varphi^{-1}. \quad (8.3.4)$$

Из (8.3.2) следует, что преобразование φ^{-1} является самосопряженным. Ранее произведение $\tau^* \tau$ было обозначено через π . Ввиду этого и с учетом соотношений (8.3.4)

$$\psi^* \psi = \varphi^{-1} \pi \varphi^{-1} \stackrel{(8.3.2)}{=} \varphi^{-1} \varphi \varphi^{-1} = \varepsilon.$$

Итак, преобразование ψ ортогональное, преобразование φ самосопряженное, все собственные значения у φ положительны и $\tau = \psi \varphi$. $\square$

Если вместо линейных преобразований пространства E рассматривать записанные в каком-нибудь ортонормированном базисе матрицы этих преобразований, то из теоремы 8.3.4 непосредственно получаем следующее утверждение.

8.3.5. Каждую неособенную действительную матрицу T можно представить в виде произведения ортогональной матрицы P и симметричной матрицы F , у которой все характеристические числа положительны. $\square$

ПРИМЕР. Представить матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

в виде произведения ортогональной матрицы и симметричной матрицы с положительными характеристическими числами.

Будем следовать алгоритму, изложенному в процессе доказательства утверждения 8.3.4. Считаем матрицу M матрицей преобразования τ в некотором ортонормированном базисе. Вычисляем матрицу

преобразования π в базисе, состоящем из собственных векторов этого преобразования:

$$A_{\pi} = M^T M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Извлекая корни из собственных значений, получаем матрицу преобразования φ :

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Выписываем обратную к ней матрицу:

$$A_{\varphi}^{-1} A_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Находим ортогональную матрицу преобразования ψ :

$$A_{\psi} = M A_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Получили нужное разложение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

□

8.4. ПОЛОЖИТЕЛЬНО ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫЕ МАТРИЦЫ

8.4.1. Действительная симметричная матрица называется *положительно полуопределенной*, если все ее характеристические числа неотрицательны, и *положительно определенной*, если все ее характеристические числа положительны. Аналогично определяются *отрицательно определенные* и *отрицательно полуопределенные* матрицы.

8.4.2. Симметричная действительная матрица A порядка n является:

а) положительно полуопределенной тогда и только тогда, когда $\bar{x}^T A \bar{x} \geq 0$ для любого столбца $\bar{x} \in R^n$;

б) положительно определенной тогда и только тогда, когда существует такое положительное число γ , что для любого $\bar{x} \in R^n$ если $\bar{x} \neq 0$, то $\bar{x}^T A \bar{x} \geq \gamma \bar{x}^T \bar{x}$.

Доказательство. Пусть B — какой-нибудь ортонормированный базис пространства E размерности n . Для каждого вектора $u \in E$ через $\bar{u}$ будем обозначать столбец его координат в этом базисе.

В базисе B матрица A является матрицей некоторого самосопряженного линейного преобразования ψ пространства E . Из собственных векторов этого преобразования можно составить другой ортонормированный базис $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ того же пространства (см. 8.2.11). Пусть векторы этого базиса принадлежат собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Пусть $x \in E$. Разложим его по базису $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$:

$$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Переходя к столбцам координат в базисе B , получим равенства

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n, \quad \bar{x}^T = \alpha_1 \bar{a}_1^T + \dots + \alpha_n \bar{a}_n^T.$$

Поскольку каждый вектор a_i , $i = \overline{1, n}$, является собственным, то

$$A \bar{x} = A \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i A \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \bar{a}_i.$$

Ввиду этого получаем равенства

$$\bar{x}^T A \bar{x} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{a}_i^T \right) \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \bar{a}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_j \bar{a}_i^T \bar{a}_j.$$

Произведение $\bar{a}_i^T \bar{a}_j$ равно сумме произведений соответствующих координат векторов a_i и a_j . Поскольку координаты взяты в ортонормированном базисе B , то произведение совпадает со скалярным произведением этих векторов. Так как векторы принадлежат ортонормированной системе, $\bar{a}_i^T \bar{a}_j = \delta_{ij}$, и потому

$$\bar{x}^T A \bar{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_j \bar{a}_i^T \bar{a}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \bar{a}_i^T \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$

а) ($\implies$) По условию $\lambda_i \geq 0$ для каждого $i = \overline{1, n}$, следовательно,

$$\bar{x}^T A \bar{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \geq 0. \quad (8.4.1)$$

($\impliedby$) Если (8.4.1) справедливо, то, полагая поочередно $\bar{x} = \bar{e}_i$ для каждого $i = \overline{1, n}$, каждый раз заключаем, что $\lambda_i \geq 0$.

Пусть $\mu = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

б) ($\implies$) Заметим, что

$$\bar{x}^T \bar{x} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{a}_i^T \right) \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{a}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \bar{a}_i^T \bar{a}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

Если матрица A положительно определена, то $\mu > 0$, и потому при $x \neq 0$ справедливы соотношения

$$\mu \bar{x}^T \bar{x} = \mu \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^n \mu \alpha_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \stackrel{(8.4.1)}{=} \bar{x}^T A \bar{x}.$$

($\impliedby$) Пусть существует такое число $\gamma > 0$, что $\bar{x}^T A \bar{x} \geq \gamma \bar{x}^T \bar{x}$ для любого ненулевого вектора $x \in E$. Возьмем собственный вектор $c \neq 0$ преобразования ψ , принадлежащий указанному выше собственному числу μ , и пусть координаты вектора c в базисе B равны $\beta_1, \dots, \beta_n$. Поскольку согласно сделанному предположению $\bar{c}^T A \bar{c} \geq \gamma \bar{c}^T \bar{c}$ и

$$\gamma \bar{c}^T \bar{c} = \gamma \sum_{i=1}^n \beta_i^2 > 0,$$

то и $\bar{c}^T A \bar{c} > 0$. Однако $A \bar{c} = \mu \bar{c}$, так как c — собственный вектор, следовательно,

$$\bar{c}^T A \bar{c} = \bar{c}^T \mu \bar{c} = \mu \sum_{i=1}^n \beta_i^2 > 0.$$

Из $\sum_{i=1}^n \beta_i^2 > 0$ заключаем, что $\mu > 0$. Остальные характеристические числа больше μ , поэтому $\lambda_i > 0$ для любого $i = \overline{1, n}$. $\square$

8.4.3. Каждая положительно определенная матрица является положительно полуопределенной. Положительно полуопределенная матрица является положительно определенной тогда и только тогда, когда эта матрица неособенная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Ввиду 8.4.1 второе справедливо, если истинно следующее утверждение: действительная матрица A является особенной тогда и только тогда, когда одно из ее характеристических чисел равно нулю. Согласно 3.1.23 матрица A порядка n является особенной в том и только в том случае, когда система ее столбцов образует линейно зависимую систему. Последнее означает, что в R^n существует такой столбец $\bar{x} \neq \mathbf{0}$, для которого $A\bar{x} = \mathbf{0} = 0\bar{x}$, а это равносильно тому, что 0 — характеристическое число матрицы A . $\square$

8.4.4. Для любой действительной (m, n) -матрицы H матрица $H^T H$ является симметричной положительно полуопределенной. Если $\text{rank } H = n$, то матрица $H^T H$ положительно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(H^T H)^T = H^T H^{TT} = H^T H$, то матрица $H^T H$ симметричная. Согласно 8.4.2 матрица $H^T H$ является положительно полуопределенной, если $\bar{x}^T H^T H \bar{x} \geq 0$ для любого $\bar{x} \in R^n$. Докажем, что это так. Пусть $H\bar{x} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$, тогда

$$\bar{x}^T (H^T H) \bar{x} = (\bar{x}^T H^T) (H \bar{x}) = (H \bar{x})^T (H \bar{x}) = \gamma_1^2 + \dots + \gamma_n^2 \geq 0.$$

Зафиксируем в n -мерном евклидовом пространстве E какой-нибудь ортонормированный базис. Компоненты столбцов $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ матрицы H можно считать координатами принадлежащих пространству E векторов $u_1, \dots, u_n$ в этом базисе. Легко заметить, что в этом случае $H^T H$ — матрица Грама (см. 7.1.12) системы векторов $S = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$. Поскольку $\text{rank } H = n$, то система S линейно независимая, и потому ее матрица Грама неособенная (см. 7.1.13). Выше уже доказано, что матрица $H^T H$ положительно полуопределенная. Из 8.4.3 следует, что неособенная матрица $H^T H$ является положительно определенной. $\square$

АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

9.1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

9.1.1. Аффинным (точечно-аффинным, точечно-векторным) пространством A называется система, состоящая из всех векторов некоторого векторного пространства V_A , элементов некоторого множества P_A , называемых точками, и отображения ν , сопоставляющего каждой паре точек некоторый вектор и удовлетворяющего следующим двум аксиомам:

$$a1) \forall M \in P_A \forall x \in V_A \exists! N \in P_A (\nu(M, N) = x);$$

$$a2) \forall M_1, M_2, M_3 \in P_A (\nu(M_1, M_2) + \nu(M_2, M_3) = \nu(M_1, M_3)).$$

В дальнейшем вектор $\nu(M_1, M_2)$, сопоставляемый паре точек $M_1, M_2 \in P_A$, будет обозначаться через $\overrightarrow{M_1 M_2}$, точку M_1 будем называть началом, а точку M_2 — концом этого вектора.

ПРИМЕР 1. Обозначим через P_A множество точек некоторой плоскости, а через V_A векторное пространство G^2 , в котором векторами являются расположенные на этой плоскости направленные отрезки, имеющие общее начало в какой-то точке O . Каждой паре точек M, N сопоставим вектор $v \in V_A$, обладающий следующими свойствами:

а) длина вектора $v \in V_A$ равна длине отрезка $[MN]$ с концами в точках M и N ;

б) вектор v параллелен отрезку $[MN]$ и его направление совпадает с направлением от точки M к точке N .

Нетрудно убедиться в том, что построенная система является аффинным пространством. □

ПРИМЕР 2. В качестве пространства V_A возьмем арифметическое n -мерное векторное пространство R^n , в котором векторами являются

столбцы высоты n , состоящие из действительных чисел. Арифметической точкой назовем также столбец из n действительных чисел. Через P_A обозначим множество всех арифметических точек. Парю арифметических точек

$$M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, \quad N = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$$

сопоставим вектор

$$v = (\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)^T.$$

Построенная система называется n -мерным арифметическим точечно-векторным пространством. $\square$

9.1.2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ} \Rightarrow N = Q$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из аксиомы (a1) из 9.1.1. $\square$

9.1.3. $\overrightarrow{MN} = \mathbf{0} \iff M = N$.

Доказательство. а) ($\Leftarrow$) Согласно аксиоме (a2) из 9.1.1

$$\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}.$$

Перенося одно из слагаемых в правую часть, убеждаемся в том, что

$$\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM} - \overrightarrow{MM} = \mathbf{0}.$$

б) ($\Rightarrow$) Ввиду (a) этого доказательства $\overrightarrow{MM} = \mathbf{0}$. Если $\overrightarrow{MN} = \mathbf{0}$, то $M = N$ (см. 9.1.2). $\square$

9.1.4. $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

Доказательство. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} \stackrel{a2}{=} \overrightarrow{MM} \stackrel{9.1.3}{=} \mathbf{0}$. $\square$

9.1.5. $\forall u \in V_A \forall N \in P_A \exists! M \in P_A (\overrightarrow{MN} = u)$.

Доказательство. Зафиксируем в P_A произвольную точку N , а в V_A вектор u . Согласно аксиоме (a1) в P_A имеется единственная точка M , для которой $\overrightarrow{NM} = -u$. Ввиду 9.1.4 $\overrightarrow{MN} = -(-u) = u$. Если $\overrightarrow{M_1N} = u$, то $-u = \overrightarrow{NM_1}$ и $M_1 = M$ согласно аксиоме (a1) из 9.1.1. $\square$

9.1.6. Любое векторное пространство V можно превратить в аффинное пространство A над векторным пространством V .

Доказательство. Векторами пространства A назовем векторы из пространства V , точками — также векторы из пространства V . Определим функцию $\nu: \nu(x, y) = y - x$ для любых $x, y \in V$. Справедливость аксиом легко проверить. $\square$

9.1.7. Аффинные пространства A_1 и A_2 над одним и тем же векторным пространством V называются **изоморфными**, если существует взаимно однозначное отображение ψ множества точек P_{A_1} пространства A_1 на множество точек P_{A_2} пространства A_2 , при котором для любых $M, N \in P_{A_1}$ справедливо равенство $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\psi(M)\psi(N)}$.

9.1.8. Любые два аффинных пространства A_1 и A_2 над одним и тем же векторным пространством V изоморфны. Для любых точек $M \in A_1$ и $N \in A_2$ существует одно и только одно отображение $\psi: P_{A_1} \rightarrow P_{A_2}$, являющееся изоморфизмом и удовлетворяющее равенству $\psi(M) = N$.

Доказательство. а) Фиксируем в пространствах A_1 и A_2 точки M и N соответственно. Для каждой точки X из A_1 положим $\psi(X) = Y \in A_2$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MX} = \overrightarrow{NY}$. Вследствие аксиомы (a1) из 9.1.1 отображение ψ взаимно однозначное. Так как $\mathbf{0} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{NN}$, то $\psi(M) = N$. Осталось доказать, что $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{\psi(K)\psi(L)}$ для любых точек K и L из пространства A_1 . Действительно, из определения отображения ψ следует, что

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{N\psi(L)}, \quad \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{N\psi(K)},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{ML} - \overrightarrow{MK} = \\ &= \overrightarrow{N\psi(L)} - \overrightarrow{N\psi(K)} = \overrightarrow{\psi(K)N} + \overrightarrow{N\psi(L)} = \overrightarrow{\psi(K)\psi(L)}. \end{aligned}$$

б) Пусть $M \in A_1$ и $N \in A_2$. Выше показано, что имеется изоморфизм $\psi: P_{A_1} \rightarrow P_{A_2}$, удовлетворяющий условию $\psi(M) = N$. Докажем его единственность.

Предположим, что φ изоморфно отображает A_1 на A_2 и $\varphi(M) = N$. Возьмем произвольную точку $U \in A_1$ и обозначим через V точку $\psi(U)$.

По построению отображения ψ это означает, что $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{NV}$. Отсюда, пользуясь тем, что φ — изоморфизм, получаем цепочку равенств

$$\overrightarrow{NV} = \overrightarrow{MU} = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(U)} = \overrightarrow{N\varphi(U)}.$$

Из аксиомы (a1) определения 9.1.1 следует, что $\psi(U) = V = \varphi(U)$. Так как U — произвольная точка пространства $U \in A_1$, это означает, что отображения ψ и φ совпадают. $\square$

Итак, если аффинные пространства A_1 и A_2 построены над одним и тем же векторным пространством, то для того, чтобы однозначно определить изоморфное отображение пространства A_1 на A_2 , достаточно указать образ одной точки из A_1 .

9.1.9. Аффинное пространство над евклидовым векторным пространством называется *точечно-евклидовым* (или *евклидовым*) пространством. Расстоянием между точками M и N точечно-евклидова пространства называется длина вектора $\overrightarrow{MN}$.

9.2. КООРДИНАТЫ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

9.2.1. Система координат в аффинном пространстве A над векторным пространством V состоит из некоторой фиксированной точки O (начала координат) и базиса $B = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ пространства V . Точка O и базис B образуют репер $Oa_1 \dots a_n$, определяющий систему координат (координатный репер). Координатами вектора x в указанной системе координат называются координаты вектора x в базисе B . Координатами точки M называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, называемого радиус-вектором точки M .

9.2.2. Пусть M и N — точки из аффинного пространства A . Чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$, надо из координат его конца вычесть соответствующие координаты начала.

Доказательство. Если систему координат в A определяет репер $Oa_1 \dots a_n$ и

$$\overrightarrow{OM} = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n, \quad \overrightarrow{ON} = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n,$$

то

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \\ &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (\beta_1 - \alpha_1)a_1 + \dots + (\beta_n - \alpha_n)a_n. \end{aligned} \quad \square$$

Посмотрим теперь, как изменятся координаты некоторой точки аффинного пространства A над векторным пространством V при смене системы координат. Пусть старая система координат определялась репером $Oa_1 \dots a_n$, M — произвольная точка пространства A , $\overrightarrow{OM} = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_n$ — новые координаты точки M .

а) Предположим, что начало координат перенесено в точку O_1 , столбец координат которой в прежней системе координат равен $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$, а базис векторного пространства V_A не изменился. Так как $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$, то

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n,$$

откуда получаем равенства

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР. На плоскости заданы две системы координат, причем одноименные оси координат этих систем параллельны. Столбец координат точки M в первой системе равен $(3, 1)^T$, а во второй — $(2, -1)^T$. Найти координаты начала O_1 второй системы относительно первой.

Пусть координаты точки O_1 равны $(\gamma_1, \gamma_2)^T$, тогда согласно сказанному выше

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$.

б) Теперь предположим, что начало координат осталось в точке O , $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ — новый базис пространства V и H — матрица перехода от нового базиса к старому. Новые координаты точки M — это координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в новом базисе, поэтому

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

в) При замене старого координатного репера $Oa_1 \dots a_n$ новым $O_1b_1 \dots b_n$ последовательно выполняем два преобразования. Сначала

переходим к промежуточной системе координат с репером $Ob_1 \dots b_n$:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Затем переносим начало координат в точку O_1 , координаты которой в промежуточной системе координат равны $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, и находим столбец координат точки M в системе $O_1b_1 \dots b_n$:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, можно действовать и в ином порядке: сначала перенести начало координат, а затем перейти к новому базису векторного пространства. Получаем следующее правило.

9.2.3. Чтобы найти столбец координат точки M в новой системе координат, заданной репером $O_1b_1 \dots b_n$, надо умножить столбец координат этой точки в старой системе координат, определяемой репером $Oa_1 \dots a_n$, слева на матрицу перехода от базиса $\langle b_1 \dots b_n \rangle$ к старому базису $\langle a_1 \dots a_n \rangle$ и вычесть столбец координат точки O_1 в промежуточном базисе. $\square$

9.2.4. Система координат $Oa_1 \dots a_n$ в точечно-евклидовом пространстве называется **прямоугольной**, если базис $\langle a_1 \dots a_n \rangle$ является ортонормированным.

9.3. ПЛОСКОСТИ

9.3.1. Пусть A — аффинное пространство над векторным пространством V , L — подпространство пространства V , M — фиксированная точка из A . Множество точек

$$\pi(M, L) = \{N \in P_A \mid \overrightarrow{MN} \in L\}$$

называется **плоскостью в пространстве A , проведенной через точку M в направлении L (параллельно L)**. Размерностью этой плоскости называется размерность подпространства L . Одномерная

плоскость называется **прямой**. Плоскость, размерность которой на единицу меньше размерности пространства A , называется **гиперплоскостью**. Подпространство L , в направлении которого проведена плоскость, называется **направляющим** для этой плоскости.

9.3.2. Пусть L — подпространство векторного пространства V , $x_0 \in \in V$. Если рассматривать пространство V как аффинное (см. 9.1.6), то плоскость $\pi(x_0, L)$ совпадает с аффинным многообразием $M = x_0 + L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно 9.1.6 точками в возникающем аффинном пространстве служат векторы из V . Плоскость $\pi(x_0, L)$ образована теми и только теми точками y из V , для которых вектор $\nu(x_0, y) = y - x_0$ принадлежит L (см. 9.3.1). Однако

$$y - x_0 = z \in L \iff y = x_0 + z \in M. \quad \square$$

Предположим, что через точку M_1 мы провели плоскость в направлении некоторого подпространства, выбрали на этой плоскости точку M_2 и через нее также провели плоскость в том же направлении. Совпадут ли эти плоскости?

9.3.3. Если $\pi_1(M_1, L)$ — плоскость в пространстве A , проходящая через точку M_1 в направлении подпространства L , точка M_2 принадлежит плоскости π_1 и $\pi_2(M_2, L)$ — плоскость в пространстве A , проходящая через точку M_2 в направлении подпространства L , то $\pi_1(M_1, L) = \pi_2(M_2, L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N \in \pi_1$. Так как $\overrightarrow{M_1 N} \in L$ и $\overrightarrow{M_1 M_2} \in L$, то

$$\overrightarrow{M_1 N} - \overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_2 M_1} + \overrightarrow{M_1 N} = \overrightarrow{M_2 N} \in L,$$

и потому $N \in \pi_2$.

Если $U \in \pi_2$, то $\overrightarrow{M_2 U} \in L$. Точки M_1 и M_2 принадлежат π_1 , поэтому $\overrightarrow{M_1 M_2} \in L$, следовательно, $\overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_2 U} = \overrightarrow{M_1 U} \in L$ и $U \in \pi_1$. $\square$

9.3.4. Каждая k -мерная плоскость в аффинном пространстве A является аффинным пространством размерности k . Любая k -мерная плоскость в точечно-евклидовом пространстве E является точечно-евклидовым пространством размерности k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi(M, L)$ — плоскость в пространстве A , проходящая через точку M в направлении подпространства L . Обозначим через $P_{\hat{A}}$ множество всех точек, принадлежащих этой плоскости, и через $\hat{\nu}$ — бинарную функцию, определенную на $P_{\hat{A}}$ и совпадающую на этом множестве с функцией ν . Каждой паре точек N_1, N_2 плоскости π сопоставлен единственный вектор $\nu(N_1, N_2) = \overrightarrow{N_1 N_2}$. По определению 9.3.1 векторы $\overrightarrow{MN_1}$ и $\overrightarrow{MN_2}$ принадлежат подпространству L , поэтому вектор $\overrightarrow{N_1 N_2} = \overrightarrow{MN_2} - \overrightarrow{MN_1}$ также принадлежит L . Иначе говоря, если точки N_1 и N_2 принадлежат множеству $P_{\hat{A}}$, то вектор $\nu(N_1, N_2)$ принадлежит L .

Докажем, что система, состоящая из множеств $P_{\hat{A}}, L$ и отображения $\hat{\nu}$, является аффинным пространством, которое мы обозначим через $\hat{A}$. Нам нужно лишь проверить выполнение аксиом (a1) и (a2). В случае, когда рассматривается все пространство A , аксиома (a1) утверждает, что для каждой принадлежащей плоскости π точки F_1 и для каждого вектора $u \in L$ в пространстве A имеется только одна такая точка F_2 , для которой $\overrightarrow{F_1 F_2} = u$. Очевидно, $F_2 \in \pi(F_1, L)$. Плоскость, проходящая через M в направлении L , совпадает с плоскостью, проходящей через F_1 в направлении L (см. 9.3.3), поэтому $F_2 \in \pi(M, L)$. Это означает выполнение аксиомы (a1) в $\hat{A}$.

Легко заметить, что из справедливости аксиомы (a2) для пространства A следует и ее выполнение для пространства $\hat{A}$.

Рассмотрим теперь плоскость $\pi(M, L)$ в точечно-евклидовом пространстве E , проходящую через точку M в направлении подпространства L . Пространство E является аффинным. Выше доказано, что плоскость π сама является аффинным пространством размерности k над пространством L . Пространство L евклидово, так как является подпространством евклидова пространства, следовательно, построенное над ним пространство π является точечно-евклидовым. $\square$

При изучении аффинных пространств определение 4.2.7 множества точек, описываемых системой уравнений, приобретает следующий вид.

9.3.5. Пусть T — какое-нибудь множество точек, принадлежащих аффинному пространству A размерности n . Система уравнений S (не обязательно линейных) с n неизвестными **задает множество T в некоторой системе координат пространства A , если точка принадлежит T тогда и только тогда, когда столбец координат этой точки является решением системы S .**

Используя их, преобразуем (9.3.3) в равенства

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i a_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^k \gamma_i u_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^k \gamma_i \sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j.$$

Приравнявая соответствующие координаты векторов в левой и правой частях, получаем систему

$$\begin{cases} \zeta_1 = \alpha_1 + \beta_{11}\gamma_1 + \dots + \beta_{k1}\gamma_k, \\ \dots \\ \zeta_n = \alpha_n + \beta_{1n}\gamma_1 + \dots + \beta_{kn}\gamma_k. \end{cases} \quad (9.3.4)$$

Принадлежащие этой системе уравнения выражают координаты ζ_i точек плоскости π через переменные $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, играющие роль параметров.

9.3.7. Уравнения (9.3.4) называются *параметрическими уравнениями* плоскости π (в координатах). Эта плоскость проходит через точку $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ в направлении подпространства $\mathcal{L}(u_1, \dots, u_k)$, где $\bar{u}_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{in})^T$, $i = 1, k$.

ПРИМЕР. Найти параметрические уравнения прямой π , проходящей в трехмерном аффинном пространстве через точку M с координатами $(1, 2, 1)^T$ в направлении вектора $\bar{u} = (1, -1, 2)^T$.

Поскольку пространство трехмерное, параметрическая система уравнений, задающая прямую π , состоит из трех уравнений. Из 9.3.7 также следует, что эта система содержит единственный параметр. Коэффициентами при нем служат координаты вектора $\bar{u}$, а свободным членом в каждом уравнении является соответствующая координата точки M . Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \zeta_1 = 1 + \gamma, \\ \zeta_2 = 2 - \gamma, \\ \zeta_3 = 1 + 2\gamma. \end{cases}$$

При $\gamma = 0$ координаты точки N совпадают с координатами точки M , следовательно, $M \in \pi$. Если же $\gamma = 1$, то точка N имеет координаты $(2, 1, 3)^T$ и вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(1, -1, 2)^T$, т. е. совпадает с u . □

9.3.8. Каждую m -мерную плоскость π в аффинном пространстве размерности n можно задать системой из $n - m$ линейных уравнений с n неизвестными и нельзя задать системой, содержащей меньшее число уравнений.

Доказательство. Предположим, что плоскость π задана векторным параметрическим уравнением (9.3.3). Обозначая в нем вектор $\overrightarrow{ON}$ через $\bar{v}$, а вектор $\overrightarrow{OM}$ через $\bar{u}_0$, получим равенство

$$\bar{v} = \bar{u}_0 + \gamma_1 \bar{u}_1 + \cdots + \gamma_k \bar{u}_k.$$

Очевидно,

$$\bar{v} \in \pi \iff \exists \gamma_1 \dots \exists \gamma_k (\gamma_1 \bar{u}_1 + \cdots + \gamma_k \bar{u}_k + \bar{u}_0 = \bar{v}). \quad (9.3.5)$$

Сравним (9.3.5) с (9.3.1) в доказательстве утверждения 4.2.8. Нетрудно заметить, что различие заключается только в обозначениях векторов, порождающих направляющее подпространство. Совпадение утверждений (9.3.5) и (9.3.1) не является случайным, оно следует из 9.3.2. Если переписать (9.3.4) в виде

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \cdots + \beta_{k1}\gamma_k = \zeta_1 - \alpha_1, \\ \dots \\ \beta_{1n}\gamma_1 + \cdots + \beta_{kn}\gamma_k = \zeta_n - \alpha_n, \end{cases} \quad (9.3.6)$$

то полученная (вспомогательная) система с точностью до обозначений совпадет с (4.2.1) из доказательства утверждения 4.2.10. Повторяя все этапы этого доказательства, построим систему из $n - m$ линейных уравнений с n неизвестными, задающую π . $\square$

9.3.9. Любая совместная система линейных уравнений с n неизвестными, коэффициенты которой принадлежат полю F , задает в n -мерном аффинном пространстве A над F некоторую плоскость.

Доказательство. Запишем общее решение рассматриваемой системы в параметрическом виде:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \gamma_1 \bar{u}_1 + \cdots + \gamma_k \bar{u}_k. \quad (9.3.7)$$

Мы предполагаем, что в A зафиксирована некоторая система координат, начало которой находится в точке O . Обозначим через M и N

такие точки из A , для которых $\overrightarrow{OM} = u_0$ и $\overrightarrow{ON} = u$. Переходя от столбцов координат к векторам, из (9.3.7) получим равенство

$$u = u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_k u_k.$$

Заменяя в нем u на $\overrightarrow{ON}$ и u_0 на $\overrightarrow{OM}$, получим равенство (9.3.3), которое задает плоскость, проходящую через точку M в направлении подпространства $L = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_k)$. $\square$

Для построения системы линейных уравнений, задающей плоскость наименьшей размерности, проходящую через заданные точки, можно пользоваться методом, изложенным в разделе 4.2.

ПРИМЕР. Написать уравнения прямой π , проходящей через точки $A = (2, 2, 1, 1)^T$ и $B = (3, 4, 2, 3)^T$, заданные своими координатами в некотором фиксированном базисе.

Действуем в соответствии с алгоритмом, указанным в доказательстве утверждения 4.2.8. Если $C = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$ — произвольная точка прямой π , то вектор $\overrightarrow{AC}$ пропорционален вектору $\overrightarrow{AB}$. Получаем векторное уравнение $\lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Расписывая его по координатам, составим вспомогательную систему из четырех линейных уравнений. Преобразуем матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{c|c} \boxed{1} & \begin{matrix} \xi_1 - 2 \\ \xi_2 - 2 \\ \xi_3 - 1 \\ \xi_4 - 1 \end{matrix} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & \begin{matrix} \xi_1 - 2 \\ -2\xi_1 + \xi_2 + 2 \\ -\xi_1 + \xi_3 + 1 \\ -2\xi_1 + \xi_4 + 3 \end{matrix} \end{array} \right).$$

Записываем искомую систему:

$$\begin{cases} -2\xi_1 + \xi_2 + 2 = 0, \\ -\xi_1 + \xi_3 + 1 = 0, \\ -2\xi_1 + \xi_4 + 3 = 0. \end{cases}$$

Множество ее решений одномерно (см. 4.1.9) и содержит точки A и B , в чем легко убедиться непосредственно. $\square$

9.3.10. Вектор a и плоскость π называются *параллельными*, если a принадлежит направляющему подпространству этой плоскости.

9.3.11. Две плоскости в аффинном пространстве $\pi_1(M_1, L_1)$ и $\pi_2(M_2, L_2)$ называются **параллельными**, если одно из пространств L_1, L_2 является подпространством другого. Обозначение: $\pi_1 \parallel \pi_2$.

9.3.12. Принадлежащие точечно-евклидову пространству вектор a и плоскость π называются **взаимно ортогональными**, если a ортогонален направляющему подпространству этой плоскости. Обозначение: $a \perp \pi$.

Плоскости π_1 и π_2 в том же пространстве называются **взаимно ортогональными**, если ортогональны их направляющие подпространства. Обозначение: $\pi_1 \perp \pi_2$.

9.3.13. Если в прямоугольной системе координат точечно-евклидова пространства гиперплоскость π задана уравнением

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n = \beta, \quad (9.3.8)$$

то вектор $\bar{u} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ ортогонален этой гиперплоскости.

Доказательство. Присоединенная к (9.3.8) однородная система, состоящая из одного уравнения, имеет следующий вид:

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n = 0. \quad (9.3.9)$$

Так как система координат прямоугольная, базисные векторы образуют ортонормированную систему (см. 9.2.4), и потому скалярное произведение векторов равняется сумме произведений соответствующих координат этих векторов (см. 7.2.4). Ввиду этого уравнение (9.3.9) означает, что вектор, столбец координат которого равен $(\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, ортогонален вектору $\bar{u}$ с координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$. Другими словами, решениями уравнения (9.3.9) служат те и только те векторы, которые ортогональны вектору $\bar{u}$. Так как подпространство решений системы (9.3.9) является направляющим для гиперплоскости π , то отсюда следует, что $\bar{u} \perp \pi$ (см. 9.3.12). $\square$

ПРИМЕР 1. В точечно-евклидовом пространстве задана прямоугольная система координат. Найти уравнение плоскости π , проходящей через точку $\bar{P} = (1, 2, 3)^T$ и ортогональной вектору $\bar{a} = (1, 0, 1)^T$.

Плоскость с уравнением $\xi_1 + \xi_3 = \gamma$ ортогональна вектору $\bar{a}$. Подставляя в это уравнение координаты точки $\bar{P}$, получаем $\gamma = 4$. Итак, плоскость π можно задать уравнением $\xi_1 + \xi_3 = 4$. $\square$

ПРИМЕР 2. В точно-евклидовом пространстве задана прямоугольная система координат. Задать системой уравнений прямую π , параллельную вектору $\bar{a} = (2, 0, 3)^T$ и проходящую через точку $\bar{P} = (1, 1, 1)^T$.

Векторы $\bar{b} = (-3, 0, 2)^T$ и $\bar{c} = (0, 1, 0)^T$ ортогональны вектору $\bar{a}$. Первое из уравнений системы

$$\begin{cases} -3\xi_1 & + 2\xi_3 = \gamma_1, \\ & \xi_2 = \gamma_2 \end{cases}$$

задает плоскость, ортогональную вектору $\bar{b}$, а второе — плоскость, ортогональную вектору $\bar{c}$. Каждая из этих плоскостей параллельна вектору $\bar{a}$. Подставляя в уравнения координаты точки $\bar{P}$, находим $\gamma_1 = -1$ и $\gamma_2 = 1$. Прямая π задается системой

$$\begin{cases} -3\xi_1 & + 2\xi_3 = -1, \\ & \xi_2 = 1. \end{cases}$$

□

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

10.1. БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

10.1.1. *Отображение произвольного множества X в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ принято называть **функционалом**. **Формой** называется многочлен от нескольких переменных, все члены которого имеют одну и ту же степень. **Линейной** называется форма, все члены которой имеют степень один. Если все члены формы имеют степень два, то она называется **квадратичной**.*

Отметим, что степень члена многочлена от нескольких переменных называется суммой степеней всех входящих в этот член переменных.

10.1.2. *Функционал $\Phi(x, y)$, областью определения которого является некоторое множество векторов из векторного пространства W над полем F , а все значения принадлежат F , называется **билинейным**, если он линеен по каждому из двух аргументов:*

$$\Phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \Phi(x_1, y) + \alpha_2 \Phi(x_2, y),$$

$$\Phi(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 \Phi(x, y_1) + \beta_2 \Phi(x, y_2)$$

для любых x, y из W и любых $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ из F .

Мы будем рассматривать билинейные функционалы, определенные на множестве всех векторов действительного векторного пространства V . Пусть $\Phi(x, y)$ — такой функционал и $B = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — базис в V . Если

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i a_i, \quad y = \sum_{i=1}^n \zeta_i a_i,$$

то

$$\Phi(x, y) = \Phi\left(\sum_{i=1}^n \xi_i a_i, \sum_{i=1}^n \zeta_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \zeta_j \Phi(a_i, a_j). \quad (10.1.1)$$

Полагая $\Phi(a_i, a_j) = \gamma_{ij}$ и учитывая, что скаляры в произведении можно переставлять, перепишем равенство (10.1.1) в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \xi_i \zeta_j. \quad (10.1.2)$$

Поскольку правая часть в (10.1.2) является многочленом от переменных ξ_i и ζ_j , $i, j = \overline{1, n}$, каждый член которого имеет степень два, то функционал $\Phi(x, y)$ можно назвать также **билинейной формой**. Следует только помнить о том, что вид этого многочлена зависит от выбора базиса пространства, а значение всегда совпадает со значением функционала $\Phi(x, y)$.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T, \quad \bar{y} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T, \quad A = (\gamma_{ij})_n^n.$$

Так как

$$\begin{aligned} Ay &= \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{11}\zeta_1 + \dots + \gamma_{1n}\zeta_n \\ \dots \\ \gamma_{n1}\zeta_1 + \dots + \gamma_{nn}\zeta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \gamma_{1j}\zeta_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \gamma_{nj}\zeta_j \end{pmatrix}, \\ x^T Ay &= (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \gamma_{1j}\zeta_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \gamma_{nj}\zeta_j \end{pmatrix} = \\ &= \xi_1 \sum_{j=1}^n \gamma_{1j}\zeta_j + \dots + \xi_n \sum_{j=1}^n \gamma_{nj}\zeta_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \xi_i \zeta_j, \end{aligned}$$

то запись равенства (10.1.2) можно сделать компактной:

$$\Phi(x, y) = \bar{x}^T A \bar{y}. \quad (10.1.3)$$

10.1.3. Пусть функционал $\Phi(x, y)$ записан в виде (10.1.3), где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — столбцы координат векторов x и y в базисе B . Матрица A называется **матрицей функционала** Φ в этом базисе.

10.1.4. Матрица $\tilde{A}$ функционала $\Phi(x, y)$ в новом базисе связана с матрицей A этого же функционала в старом базисе равенством $\tilde{A} = C^T A C$, в котором C — матрица перехода от старого базиса к новому.

Доказательство. Обозначим через $\bar{x}$, $\bar{y}$ столбцы координат векторов x и y в старом базисе, а через $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — столбцы координат этих же векторов в новом базисе, тогда

$$\begin{aligned} \bar{x} &= C\tilde{x}, \quad \bar{y} = C\tilde{y}, \\ \Phi(x, y) &= \bar{x}^T A \bar{y} = (C\tilde{x})^T A (C\tilde{y}) = \tilde{x}^T (C^T A C) \tilde{y}, \end{aligned}$$

следовательно, $\tilde{A} = C^T A C$. □

10.1.5. Билинейный функционал $\Phi(x, y)$ называется **положительно определенным**, если $\Phi(x, x) > 0$ для любого вектора $x \neq 0$.

10.1.6. Билинейный функционал $\Phi(x, y)$ называется **симметрическим** (**симметричным**), если $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ для любых $x, y \in V$.

Пример. Скалярное произведение является симметрическим положительно определенным билинейным функционалом.

10.1.7. Билинейный функционал $\Phi(x, y)$ является симметрическим тогда и только тогда, когда его матрица в любом базисе является симметричной.

Доказательство. Если B — базис пространства V и функционал Φ является симметрическим, то $\Phi(a_i, a_j) = \Phi(a_j, a_i)$ для любой пары базисных векторов a_i , a_j . Из определения 10.1.3 следует, что $\Phi(a_i, a_j)$ и $\Phi(a_j, a_i)$ — элементы матрицы функционала Φ в базисе B , симметричные относительно главной диагонали этой матрицы, поэтому матрица симметрического функционала всегда является симметричной.

Докажем обратное утверждение: если матрица функционала симметричная, то сам функционал симметрический. Действительно, в этом случае

$$\Phi(y, x) = \bar{y}^T A \bar{x} = \bar{y}^T A^T \bar{x} = (\bar{x}^T A \bar{y})^T = (\Phi(x, y))^T.$$

Однако $\Phi(x, y)$ — матрица, содержащая всего один элемент, следовательно, $(\Phi(x, y))^T = \Phi(x, y)$, и потому $\Phi(y, x) = \Phi(x, y)$. $\square$

10.2. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

10.2.1. При отождествлении в симметрической билинейной форме $\Phi(x, y)$ переменных x и y получается квадратичная форма $\Phi(x, x)$, зависящая от n переменных.

Для любой квадратичной формы можно однозначно указать тот симметрический билинейный функционал, из которого она получается отождествлением переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взяв в качестве переменных координаты ξ_i вектора x в каком-нибудь базисе пространства V , вследствие (10.1.2) функционал Φ можно записать в виде многочлена от ξ_i , $i = \overline{1, n}$, каждый член которого имеет степень два, а матрица из коэффициентов симметричная:

$$\Phi(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (10.2.1)$$

Если $\Phi(x, x)$ — квадратичная форма, то

$$\Phi(x + y, x + y) = \Phi(x, x) + 2\Phi(x, y) + \Phi(y, y),$$

следовательно,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi(x + y, x + y) - \Phi(x, x) - \Phi(y, y)).$$

Это означает, что квадратичной форме $\Phi(x, x)$ однозначно соответствует ее симметрический билинейный функционал $\Phi(x, y)$. $\square$

Согласно сказанному ранее, термин «квадратичная форма» употребляется в двух значениях. С одной стороны, это функция, сопоставляющая каждому вектору действительного векторного пространства число, с другой — запись этой функции в виде многочлена, причем вид этой записи зависит от выбора базиса пространства.

10.2.2. Матрицей квадратичной формы $\Phi(x, x)$ в базисе B пространства V называется матрица симметрического билинейного функционала $\Phi(x, y)$, соответствующего этой форме, записанная в том же базисе, т. е. матрица, составленная из коэффициентов многочлена, находящегося в правой части равенства (10.2.1).

Для любых $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$ члены $\gamma_{ij}\xi_i\xi_j$ и $\gamma_{ji}\xi_j\xi_i$ многочлена в правой части равенства (10.2.1) совпадают. После приведения подобных членов равенство (10.2.1) примет вид

$$\Phi(x, x) = \sum_{i=1}^n \gamma_{ii}\xi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \gamma_{ij}\xi_i\xi_j.$$

Вид правых частей в этом равенстве и в равенстве (10.2.1) зависит от выбора базиса в пространстве V . Наиболее простой вид квадратичной формы называется **каноническим**.

10.2.3. Квадратичная форма $\Phi(x, x)$ находится в **каноническом виде**, если она представлена как сумма квадратов переменных: $\Phi(x, x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \xi_i^2$.

Пусть квадратичная форма в некотором базисе имела вид (10.2.1), $H = (\alpha_{ij})_n^n$ — матрица перехода от этого базиса к новому, тогда старые координаты $\xi_1, \dots, \xi_n$ произвольного вектора связаны с новыми координатами $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ соотношением

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix},$$

которое можно записать в виде системы равенств

$$\begin{cases} \xi_1 = \alpha_{11}\xi'_1 + \dots + \alpha_{1n}\xi'_n, \\ \dots \\ \xi_n = \alpha_{n1}\xi'_1 + \dots + \alpha_{nn}\xi'_n. \end{cases}$$

Заменяя переменные $\xi_1, \dots, \xi_n$ в правой части равенства (10.2.1), мы получим запись квадратичной формы $\Phi(x, x)$ в новом базисе. Часто

говорят, что в форме Φ произведено невырожденное линейное преобразование (или замена) переменных с матрицей H . (Слово «невырожденное» указывает на то, что матрица H является неособенной, иначе она не может быть матрицей перехода от одного базиса пространства к другому.)

Легко убедиться в том, что последовательное выполнение нескольких линейных преобразований переменных может быть заменено одним преобразованием с матрицей, равной произведению матриц произведенных преобразований.

10.2.4. Каждую квадратичную форму $\Phi(x, x)$ можно привести к каноническому виду невырожденным преобразованием переменных.

Доказательство. Опишем метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Пусть

$$\Phi(x, x) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \xi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Рассмотрим два варианта.

1. Один из коэффициентов $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$, например α_{11} , не равен нулю. Содержащие ξ_1 члены форм Φ и

$$\widehat{\Phi}(x, x) = \alpha_{11}^{-1} (\alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \dots + \alpha_{1n} \xi_n)^2$$

совпадают, поэтому квадратичная форма $\Psi = \Phi - \widehat{\Phi}$ не содержит переменной ξ_1 . Производя в форме $\Phi = \widehat{\Phi} + \Psi$ замену переменных

$$\zeta_1 = \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \dots + \alpha_{1n} \xi_n, \quad \zeta_2 = \xi_2, \dots, \zeta_n = \xi_n,$$

запишем форму в виде $\alpha_{11}^{-1} \zeta_1^2 + \Omega$, где Ω — квадратичная форма, содержащая переменные $\zeta_2, \dots, \zeta_n$. Переходим к следующему шагу — преобразованию квадратичной формы Ω .

2. Если в форме $\Phi(x, x)$ коэффициенты $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ равны нулю, то не равен нулю один из коэффициентов α_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Предположим, что $\alpha_{12} \neq 0$. Сделаем замену

$$\xi_1 = \zeta_1 - \zeta_2, \quad \xi_2 = \zeta_1 + \zeta_2, \quad \xi_i = \zeta_i, \quad i = \overline{3, n}.$$

Член $2\alpha_{12}\xi_1\xi_2$ формы Φ превратится в

$$2\alpha_{12}(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 + \zeta_2) = 2\alpha_{12}\zeta_1^2 - 2\alpha_{12}\zeta_2^2,$$

поэтому после замены в форме появятся квадраты переменных с ненулевыми коэффициентами, и далее можно действовать по первому варианту, если форма еще не находится в каноническом виде.

Поскольку после каждого преобразования, выполненного по первому варианту, число переменных, содержащихся в форме Φ только в виде квадратов, возрастает, то через конечное число шагов форма будет приведена к каноническому виду. Легко убедиться в том, что матрицы описанных преобразований неособенные. $\square$

ПРИМЕР. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\Psi(x, x) = \xi_1 \xi_2 + 2\xi_1 \xi_3 + \xi_3 \xi_4.$$

Поскольку в форме отсутствуют квадраты, делаем замену:

$$\xi_1 = \zeta_1 + \zeta_2, \quad \xi_2 = \zeta_1 - \zeta_2, \quad \xi_3 = \zeta_3, \quad \xi_4 = \zeta_4,$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, x) &= \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + 2\zeta_1 \zeta_3 + 2\zeta_2 \zeta_3 + \zeta_3 \zeta_4 = \\ &= (\zeta_1 + \zeta_3)^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 + 2\zeta_2 \zeta_3 + \zeta_3 \zeta_4. \end{aligned}$$

Затем делаем вторую замену:

$$\begin{aligned} \zeta_1 + \zeta_3 &= \tau_1, \quad \zeta_2 = \tau_2, \quad \zeta_3 = \tau_3, \quad \zeta_4 = \tau_4, \\ \Psi(x, x) &= \tau_1^2 - \tau_2^2 - \tau_3^2 - 2\tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_4 = \tau_1^2 - (-\tau_2 - \tau_3)^2 + \tau_3 \tau_4. \end{aligned}$$

Далее производим еще одну замену:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \omega_1, \quad \tau_2 + \tau_3 = \omega_2, \quad \tau_3 = \omega_3, \quad \tau_4 = \omega_4, \\ \Psi(x, x) &= \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3 \omega_4. \end{aligned}$$

Теперь делаем последнюю замену:

$$\omega_1 = \lambda_1, \quad \omega_2 = \lambda_2, \quad \omega_3 = \lambda_3 + \lambda_4, \quad \omega_4 = \lambda_3 - \lambda_4$$

и получаем ответ:

$$\Psi(x, x) = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_4^2.$$

$\square$

10.2.5 (Закон инерции квадратичных форм). Число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом виде, к которому приводится квадратичная форма Φ невырожденным линейным преобразованием переменных, являются величинами, не зависящими от конкретного преобразования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть областью определения квадратичной формы Φ является множество векторов векторного пространства V размерности n . Предположим, что в базисе $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ форма Φ имеет вид

$$\Phi(x, x) = \gamma_{11}\xi_1^2 + \dots + \gamma_{kk}\xi_k^2 - \gamma_{k+1k+1}\xi_{k+1}^2 - \dots - \gamma_{k+qk+q}\xi_{k+q}^2, \quad (10.2.2)$$

а в базисе $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ — вид

$$\Phi(x, x) = \delta_{11}\zeta_1^2 + \dots + \delta_{mm}\zeta_m^2 - \delta_{m+1m+1}\zeta_{m+1}^2 - \dots - \delta_{m+pm+p}\zeta_{m+p}^2. \quad (10.2.3)$$

В этих многочленах все скаляры γ_{ii} и δ_{ii} положительны, поэтому знак каждого члена совпадает со знаком соответствующей операции в записи многочлена. Предположим, что $k > m$, и рассмотрим подпространства

$$V_1 = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k), \quad V_2 = \mathcal{L}(b_{m+1}, \dots, b_n).$$

Сумма $V_1 + V_2$ является подпространством пространства V . Очевидно, при $k > m$

$$\dim V_1 + \dim V_2 = k + (n - m) > n.$$

Так как

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

(см. 2.4.15), то $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$ и потому в $V_1 \cap V_2$ есть отличный от нуля вектор u . Из $u \in V_1$ следует, что

$$u = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k. \quad (10.2.4)$$

Поскольку $u \in V_2$, то

$$u = \beta_{m+1} b_{m+1} + \dots + \beta_n b_n. \quad (10.2.5)$$

Так как $u \neq 0$, то в правых частях разложений (10.2.4) и (10.2.5) есть ненулевые коэффициенты. Положим в (10.2.2) $x = u$. Поскольку ξ_i , $i = \overline{1, n}$, — координаты вектора x в базисе $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, а ввиду равенства (10.2.4)

$$\bar{u} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)^T,$$

то

$$\Phi(u, u) = \gamma_{11}\alpha_1^2 + \dots + \gamma_{kk}\alpha_k^2 > 0.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что из (10.2.3) и (10.2.5) следует равенство

$$\Phi(u, u) = -\delta_{m+1m+1}\beta_{m+1}^2 - \dots - \delta_{m+pm+p}\beta_{m+p}^2 \leq 0.$$

(Это неравенство нестрогое, так как при $m + p < n$ может оказаться, что

$$\beta_{m+1} = \dots = \beta_{m+p} = 0,$$

а не равна нулю одна из координат $\beta_{m+p+1}, \dots, \beta_n$.) Полученное противоречие доказывает, что $k \leq m$.

Аналогично доказывается, что $m \leq k$ и потому $m = k$. Затем так же доказывается, что $q = p$. $\square$

Ранее было доказано, что любую квадратичную форму $\Phi(x, x) = \bar{x}^T A \bar{x}$ можно подходящей заменой переменных $\bar{x} = B \bar{y}$ привести к каноническому виду $\Phi(x, x) = \bar{y}^T B^T A B \bar{y}$. Напомним, что в приведенных формулах $\bar{x}$ — столбец координат вектора x в старом базисе пространства, B — матрица перехода от нового базиса к старому, $\bar{y}$ — столбец координат вектора x в новом базисе, матрица $B^T A B$ диагональная. Про матрицу B известно только то, что она неособенная. Однако во многих задачах необходимо, чтобы эта матрица была ортогональной.

10.2.6. Каждую квадратичную форму $\Phi(x, x) = \bar{x}^T A \bar{x}$ можно привести к каноническому виду линейным преобразованием переменных $\bar{x} = B \bar{y}$ с ортогональной матрицей B .

Доказательство. Матрица A квадратичной формы Φ действительная симметричная, поэтому существует такая ортогональная матрица B , что произведение $B^{-1} A B = D$ является диагональной матрицей (см. 8.2.12). Замена переменных $\bar{x} = B \bar{y}$ приводит квадратичную форму $\Phi(x, x) = \bar{x}^T A \bar{x}$ к каноническому виду:

$$\Phi(x, x) = \bar{x}^T A \bar{x} = \bar{y}^T B^T A B \bar{y} = \bar{y}^T B^{-1} A B \bar{y} = \bar{y}^T D \bar{y}. \quad \square$$

ПРИМЕР. Привести квадратичную форму $\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Находим характеристический многочлен матрицы A квадратичной формы и его корни λ_1 и λ_2 :

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

После перехода к новому ортонормированному базису, состоящему из собственных векторов, принадлежащих собственным числам λ_1 и λ_2 , квадратичная форма примет вид

$$\frac{1}{2}\zeta_1^2 + \frac{3}{2}\zeta_2^2. \quad (10.2.6)$$

Однако часто требуется не только найти канонический вид квадратичной формы, но и базис, в котором форма приобретает этот вид, и преобразование, приводящее ее к такому виду. В этом случае вычисления следует продолжить. Полагая $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$ в матрице $A - \lambda E$, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

однородной системы линейных уравнений, множество ненулевых решений которой совпадает с множеством собственных векторов матрицы A , принадлежащих собственному значению λ_1 . Эта система равносильна системе, состоящей из единственного уравнения $x_1 = -x_2$. Вектор

$$a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$$

является его частным решением.

Считая a_1 первым вектором нового базиса, ищем второй вектор a_2 . Найти его можно было бы тем же способом, каким получен a_1 , однако в данной задаче пространство имеет размерность два, и в качестве a_2

можно взять любой ненулевой вектор, ортогональный вектору a_1 . Действительно, если b — собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ_2 , то $(a_1, b) = 0$ (см. 8.2.13), и потому подпространства $L_1 = \mathcal{L}(a_1)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b)$ ортогональны (см. 7.3.1, 7.3.2). Поскольку $\dim E = 2$, то $E = L_1 \oplus L_2$, следовательно, каждый не равный нулю вектор, лежащий на прямой $L_2 \perp L_1$, является собственным и принадлежит собственному значению λ_2 .

Ввиду сказанного положим

$$a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T.$$

Заметим, что длины векторов a_1 и a_2 равны единице, вследствие чего система $\langle a_1, a_2 \rangle$ образует ортонормированный базис пространства E . Матрица

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

столбцы которой составлены из координат векторов a_1, a_2 , является матрицей перехода от старого базиса к новому (см. 3.4.5). Умножая ее на столбец $(\xi_1, \xi_2)^T$ координат в новом базисе произвольного вектора из пространства E , получим столбец $(\zeta_1, \zeta_2)^T$ координат этого же вектора в старом базисе:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Получаем формулы замены переменных

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_2, \\ \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_2, \end{cases}$$

приводящей квадратичную форму к виду (10.2.6). □

10.2.7. Квадратичная форма $\Phi(x, x)$ называется *положительно (отрицательно) определенной* на подпространстве L векторного пространства V , если для любого $a \in L$ из $a \neq 0$ следует, что $\Phi(a, a) > 0$

($\Phi(a, a) < 0$), и положительно (отрицательно) полуопределенной на L , если $\Phi(a, a) \geq 0$ ($\Phi(a, a) \leq 0$) для каждого a из L . Если $L = V$, то слова «на V » в определении обычно опускают. Положительно (отрицательно) полуопределенные квадратичные формы часто называют неотрицательными (неположительными).

Судить о том, является ли данная квадратичная форма от n переменных положительно или отрицательно определенной, можно по ее каноническому виду.

10.2.8. Пусть квадратичная форма $\Phi(x, x)$, определенная на пространстве V , приведена к каноническому виду

$$\Phi(x, x) = \gamma_1 \xi_1^2 + \cdots + \gamma_k \xi_k^2 - \gamma_{k+1} \xi_{k+1}^2 - \cdots - \gamma_{k+m} \xi_{k+m}^2, \quad (10.2.7)$$

где $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, k+m}$. Если $m = 0$, то форма Φ неотрицательная, если же $k = 0$, то она неположительная. При $m = 0$ и $k = \dim V$ форма положительно определенная, а при $k = 0$ и $m = \dim V$ она является отрицательно определенной. В случаях, когда $k \neq 0$ и $m \neq 0$, форма Φ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в записи (10.2.7) $m = 0$, т. е. все члены положительны. Если их количество k равно размерности пространства, то $\Phi(x, x) > 0$ для любого столбца координат $(\xi_1, \dots, \xi_k)^T$ вектора $x \neq 0$. Если же $k < \dim V$, то $\Phi(x, x) = 0$, например при $\bar{x} = (0, \dots, 0, 1)^T$, однако значение формы $\Phi(x, x)$ не может быть отрицательным. Аналогично доказываются остальные утверждения. $\square$

10.2.9. Квадратичная форма является положительно определенной (неотрицательной) тогда и только тогда, когда все характеристические числа ее матрицы положительны (неотрицательны).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как указывалось в 10.2.6, квадратичную форму $\Phi(x, x) = \bar{x}^T A \bar{x}$ всегда можно привести к каноническому виду линейным преобразованием переменных $\bar{x} = B\bar{y}$ с ортогональной матрицей B . Указанное преобразование переменных означает переход к базису, составленному из собственных векторов линейного преобразования пространства, матрицей которого является матрица A (см. 8.2.10, 6.2.9). После преобразования матрицей квадратичной формы Φ становится матрица $D = B^{-1}AB$. Она является диагональной, а на главной диагонали у нее стоят характеристические числа матрицы A (см. 6.2.10). $\square$

Из последнего утверждения следует, что квадратичная форма является положительно определенной (неотрицательной) тогда и только тогда, когда положительно определенной (неотрицательной) является ее матрица. Вследствие этого можно воспользоваться теми признаками положительной определенности (неотрицательности) матриц, которые были указаны в 8.4.1–8.4.4. Рассмотрим еще один признак.

10.2.10 (Признак Якоби). Квадратичная форма Φ с матрицей A является неотрицательной тогда и только тогда, когда характеристический многочлен матрицы A удовлетворяет двум условиям:

- 1) если один из коэффициентов многочлена равен нулю, то равны нулю коэффициенты всех членов меньшей степени;
- 2) знаки членов с ненулевыми коэффициентами чередуются.

Доказательство. « $\implies$ » Согласно 10.2.6 квадратичную форму Φ можно привести к каноническому виду преобразованием переменных с ортогональной матрицей B . После преобразования матрица квадратичной формы имеет вид $B^T A B$ и равна матрице $B^{-1} A B$ вследствие ортогональности матрицы B . Матрицы A и $B^{-1} A B$ подобны и их характеристические многочлены совпадают. Матрица $B^{-1} A B$ диагональная и на ее главной диагонали стоят характеристические числа. Если обозначить эти числа через $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, то характеристический многочлен матриц A и $B^{-1} A B$ примет вид

$$(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_1) \dots (\lambda - \alpha_k).$$

Коэффициент при λ^s у характеристического многочлена равен

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_{k-s})} (-\alpha_{i_1})(-\alpha_{i_2}) \dots (-\alpha_{i_{k-s}}), \quad (10.2.8)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_{k-s}$ — попарно различные числа из множества $1, \dots, k$. Очевидно, знаки сумм (10.2.8) при $s = p$ и при $s = p + 1$ противоположны.

« $\impliedby$ » Воспользуемся индукцией по степени n характеристического многочлена.

При $n = 1$ этим многочленом является $\gamma - \lambda$. Он удовлетворяет условиям теоремы только тогда, когда число γ положительное. В таком случае квадратичная форма имеет вид $\gamma \xi^2$ и потому неотрицательна.

Пусть утверждение справедливо, если степень характеристического многочлена меньше некоторого натурального числа $k > 1$. Рассмотрим

случай, когда степень характеристического многочлена $P(\lambda)$ совпадает с k . Если многочлен $P(\lambda)$ удовлетворяет двум условиям, указанным в формулировке теоремы, то этим условиям удовлетворяет также многочлен $P'(\lambda)$, полученный из $P(\lambda)$ дифференцированием, и многочлен $Q(\lambda) = \frac{1}{k}P'(\lambda)$, у которого старший коэффициент равен единице. Многочлен Q имеет вид

$$(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_1) \dots (\lambda - \alpha_k)$$

и является характеристическим для матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

По индуктивному предположению квадратичная форма с такой матрицей неотрицательная, и потому все корни $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ многочлена Q положительны. Эти же числа являются корнями многочлена P' , следовательно, все корни многочлена P' также положительны.

Теперь воспользуемся известной из курса математического анализа теоремой Ролля в следующей формулировке.

Если функция $\psi(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, имеет в нем непрерывную производную и обращается в нуль на его концах, то внутри этого интервала имеется точка γ , в которой производная равна нулю:

$$\psi(\gamma) = 0, \quad \alpha < \gamma < \beta.$$

Предположим, что два корня многочлена P отрицательны. По теореме Ролля между ними находится корень многочлена P' , и этот корень должен быть отрицательным вопреки доказанному выше. Видим, что у многочлена P может быть не более одного отрицательного корня.

Многочлен P можно представить в виде

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\delta_1 - \lambda) \dots (\delta_k - \lambda) = \\ &= (-\lambda)^s (\delta_{i_1} - \lambda) \dots (\delta_{i_{k-s}} - \lambda) = (-\lambda)^s R(\lambda), \end{aligned}$$

где $s \geq 0$ и корни $\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_{k-s}}$ отличны от нуля. Очевидно, у многочлена R знаки также чередуются. Если его степень четна, то он имеет нечетное число членов и его старший и младший члены положительны.

При нечетной степени число членов многочлена R нечетно, старший член имеет знак минус, и потому член нулевой степени положителен. В обоих случаях свободный член положителен. Этот член представляет собой произведение всех не равных нулю корней многочлена R , совпадающих с ненулевыми корнями многочлена P . Сказанное означает, что многочлен P не может иметь один отрицательный корень, и потому все его корни неотрицательны. $\square$

Существуют также иные способы узнать, является ли данная квадратичная форма положительно определенной, однако мы их рассматривать не будем.

10.3. ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим некоторое точечно-евклидово пространство A (см. 9.1.9) размерности n . Зафиксируем в нем какой-нибудь репер $Oa_1 \dots a_n$.

10.3.1. *Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j + 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \xi_i + \gamma = 0, \quad (10.3.1)$$

в котором коэффициенты α_{ij} , β_i и свободный член γ принадлежат полю $\mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$ — квадратичная форма, а $\sum_{i=1}^n \beta_i \xi_i$ — линейная форма (см. 10.2.1), называется *гиперповерхностью второго порядка*. Если размерность пространства равна двум или трем, то гиперповерхность называется соответственно *кривой* или *поверхностью*.

Уравнение (10.3.1) часто называют общим уравнением гиперповерхности второго порядка. Для фиксированной гиперповерхности его вид зависит от выбора системы координат. Попробуем найти такую систему координат, в которой уравнение гиперповерхности является наиболее простым.

При смене системы координат могут меняться расстояния между точками, и гиперповерхность может деформироваться. Рассмотрим, например, окружность с уравнением

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 \quad (10.3.2)$$

в прямоугольной системе координат Oa_1a_2 . Перейдем к системе координат с репером Ob_1b_2 , где $b_1 = a_1$ и $b_2 = 2a_2$. Матрица перехода от старого базиса к новому (см. 3.4.5) является диагональной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Старые координаты выражаются через новые формулами $\xi_1 = \zeta_1$, $\xi_2 = 2\zeta_2$, т. е. масштаб на оси ординат изменяется в два раза. Геометрически это означает сжатие пространства вдоль оси ординат по направлению к точке O в два раза. Очевидно, исходная окружность превратится в эллипс. Действительно, производя замену переменных в (10.3.2), получаем в новой системе координат уравнение эллипса

$$\zeta_1^2 + 4\zeta_2^2 = 1.$$

Во избежание подобных явлений будем рассматривать только такие преобразования координат, при которых не меняются расстояния между точками. Расстояние между точками M и N пространства равно длине вектора $\overrightarrow{MN}$ (см. 9.1.9), а длины векторов не меняются только при ортогональных преобразованиях пространства (см. 8.1.8), признаком которых является ортогональность матрицы преобразования (см. 8.1.9). Ортогональные преобразования всегда отображают ортонормированный базис пространства снова в ортонормированный базис (см. 8.1.6). По указанным причинам в дальнейшем всегда будем предполагать, что все упоминаемые системы координат являются прямоугольными, а линейные преобразования переменных будем выбирать таким образом, чтобы матрица перехода к новому базису была ортогональной.

Итак, будем искать прямоугольную систему координат, в которой уравнение рассматриваемой гиперповерхности имеет наиболее простой вид. Напомним, что переход к новой системе координат аффинного пространства всегда можно разбить на два последовательных действия: смену базиса пространства и перенос начала системы координат в новую точку. Отметим также, что изменение нумерации переменных равносильно перемени местами векторов в базисе и потому является невырожденным преобразованием переменных.

10.3.2. При выборе подходящей прямоугольной системы координат уравнение любой гиперповерхности второго порядка приобретает один и только один из указанных ниже видов:

- 1) $\sum_{i=1}^k \mu_i \xi_i^2 + \gamma = 0, \gamma \neq 0;$
- 2) $\sum_{i=1}^k \mu_i \xi_i^2 = 0;$
- 3) $\sum_{i=1}^k \mu_i \xi_i^2 + 2\lambda \xi_{k+1} = 0, \lambda \neq 0.$

Доказательство. Левая часть уравнения (10.3.1) содержит квадратичную форму. Если она не находится в каноническом виде, то согласно 10.2.6 ее можно привести к такому виду линейным преобразованием переменных

$$(\xi_1, \dots, \xi_n)^T = B(\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T$$

с ортогональной матрицей B . Применив это преобразование к левой части уравнения (10.3.1), получим новое уравнение

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \zeta_i^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_i + \gamma = 0 \quad (10.3.3)$$

той же гиперповерхности, не содержащее попарных произведений переменных. Напомним, что для получения нужного результата мы должны перейти к базису, составленному из собственных векторов линейного преобразования, матрица которого в исходном базисе совпадает с матрицей упомянутой квадратичной формы (см. 6.2.9).

Может случиться, что все коэффициенты λ_i у линейных членов равны нулю и на самом деле уравнение (10.3.3) имеет вид

$$\mu_1 \zeta_1^2 + \dots + \mu_m \zeta_m^2 + \gamma = 0. \quad (10.3.4)$$

Это и есть искомое наиболее простое уравнение данной гиперповерхности. Его можно преобразовать к некоторому стандартному виду, называемому каноническим, не меняя базиса. Если в уравнении (10.3.4) $\gamma \neq 0$, то оно имеет вид выражения (1) из 10.3.2, а при $\gamma = 0$ — выражения (2) из 10.3.2.

Предположим теперь, что в уравнении (10.3.3) один из коэффициентов λ_i не равен нулю. Содержащиеся в этом уравнении переменные можно разбить на три группы:

- а) встречающиеся только в виде квадратов;
- б) встречающиеся и в первой, и во второй степени;
- в) содержащиеся в уравнении (10.3.3) только в первой степени.

Для удобства изложения будем считать, что индексы переменных первой группы меняются от 1 до k , второй — от $k+1$ до m , третьей — от $m+1$ до p . Этого всегда можно добиться путем изменения нумерации переменных.

Переносим начало координат в новую точку, переменные из группы (б) можно перевести в группу (а). Действительно, предположим, что в уравнении (10.3.3) $\mu_i \neq 0$ и $\lambda_i \neq 0$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Сделаем в сумме $\mu_i \zeta_i^2 + \lambda_i \zeta_i$ замену переменной $\zeta_i = \eta_i + \delta_i$. В этом равенстве η_i — новая переменная, а $\delta_i \in \mathbb{R}$. В полученном выражении

$$\mu_i(\eta_i + \delta_i)^2 + \lambda_i(\eta_i + \delta_i) = \mu_i \eta_i^2 + 2\mu_i \delta_i \eta_i + \lambda_i \eta_i + \lambda_i \delta_i + \mu_i \delta_i^2$$

приравняем к нулю коэффициент у линейного члена:

$$2\mu_i \delta_i + \lambda_i = 0.$$

Отсюда $\delta_i = -\frac{\lambda_i}{2\mu_i}$. Таким образом, при замене в уравнении (10.3.3) переменной ζ_i на $\eta_i - \frac{\lambda_i}{2\mu_i}$ новое уравнение уже не содержит переменную η_i в первой степени.

В соответствии со сказанным перенесем начало координат в точку

$$\left(0, \dots, 0, \frac{\lambda_{k+1}}{2\mu_{k+1}}, \dots, \frac{\lambda_m}{2\mu_m}, 0, \dots, 0\right)^T.$$

После замены переменных по формулам

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \eta_i - \frac{\lambda_i}{2\mu_i}, & \text{если } i \in \{k+1, \dots, m\}, \\ \zeta_i &= \eta_i, & \text{если } i \in \{1, \dots, k, m+1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

уравнение (10.3.3) превратится в

$$\theta_1 \eta_1^2 + \dots + \theta_m \eta_m^2 + \lambda_{m+1} \eta_{m+1} + \dots + \lambda_p \eta_p + \sigma = 0. \quad (10.3.5)$$

Преобразуем теперь переменные из группы (в). Совершим в уравнении (10.3.5) следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}\eta_i &= \tau_i, \quad \text{если} \quad i \in \{1, \dots, m, m+3, \dots, n\}, \\ \eta_{m+1} &= \frac{\lambda_{m+1}}{\sqrt{\lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2}} \tau_{m+1} - \frac{\lambda_{m+2}}{\sqrt{\lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2}} \tau_{m+2}, \\ \eta_{m+2} &= \frac{\lambda_{m+2}}{\sqrt{\lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2}} \tau_{m+1} + \frac{\lambda_{m+1}}{\sqrt{\lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2}} \tau_{m+2}.\end{aligned}$$

Матрица этой замены

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \frac{\lambda_{m+1}}{\sqrt{\lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2}} & -\frac{\lambda_{m+2}}{\sqrt{\lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2}} & & & \\ & & & \frac{\lambda_{m+2}}{\sqrt{\lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2}} & \frac{\lambda_{m+1}}{\sqrt{\lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2}} & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

у которой все не отмеченные элементы равны нулю, является ортогональной согласно признаку 8.1.3. Это означает, что от прямоугольной системы координат мы переходим снова к прямоугольной системе координат.

После замены уравнение (10.3.5) превратится в уравнение

$$\begin{aligned}\theta_1 \tau_1^2 + \dots + \theta_m \tau_m^2 + \sqrt{\lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2} \tau_{m+1} + \\ + \lambda_{m+3} \tau_{m+3} + \lambda_{m+4} \tau_{m+4} + \dots + \lambda_p \tau_p + \sigma = 0,\end{aligned}$$

в котором число линейных членов уменьшилось на единицу. Проведя нужное число раз подобные преобразования, придем к уравнению

$$\theta_1 \tau_1^2 + \dots + \theta_m \tau_m^2 + \kappa \tau_{m+1} + \sigma = 0.$$

Совершая еще одну замену переменных по формулам

$$\tau_i = \psi_i, \text{ если } i \in \{1, \dots, m\}, \quad \tau_{m+1} = 2\psi_{m+1} - \frac{\sigma}{\varkappa},$$

получим уравнение

$$\theta_1 \psi_1^2 + \dots + \theta_m \psi_m^2 + 2\varkappa \psi_{m+1} = 0, \quad \square$$

имеющее вид (3).

ПРИМЕР 1. Преобразовать к простейшему виду уравнение

$$3\xi_1^2 + 10\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 - 2\xi_1 - 14\xi_2 - 13 = 0. \quad (10.3.6)$$

Левая часть содержит квадратичную форму $3\xi_1^2 + 10\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2$. Выписываем ее матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем характеристический многочлен этой матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 5 \\ 5 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16.$$

Числа 8 и -2 являются его корнями.

Теперь ищем собственные векторы матрицы A . Для этого подставляем первый из корней вместо λ в матрицу A и получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

однородной системы линейных уравнений, ненулевые решения которой являются собственными векторами, принадлежащими собственному значению 8. Каждое из уравнений этой системы равносильно уравнению $\delta_1 = \delta_2$, частным решением которого является столбец $(1, 1)^T$.

Нормируя его, находим столбец координат $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ первого вектора нового базиса. Поскольку пространство имеет размерность два, вектор $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, ортогональный найденному, можно взять в качестве второго базисного. При большей размерности пространства следует использовать остальные характеристические числа матрицы A .

Матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

столбцы которой состоят из координат новых базисных векторов, служит матрицей перехода от старого базиса к новому. Ее строки составлены из коэффициентов в формулах, выражающих старые переменные через новые:

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_2, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_2.$$

Производя замену переменных в уравнении (10.3.7), получаем уравнение той же кривой в новой системе координат:

$$8\zeta_1^2 - 2\zeta_2^2 - 8\sqrt{2}\zeta_1 - 6\sqrt{2}\zeta_2 - 13 = 0. \quad (10.3.7)$$

Теперь найдем координаты точки, при переносе в которую начала системы координат из уравнения исчезают линейные члены. Произведем в уравнении (10.3.7) замену переменных

$$\zeta_1 = \tau_1 + \pi_1, \quad \zeta_2 = \tau_2 + \pi_2, \quad \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R},$$

выпишем линейные члены и приравняем их к нулю:

$$16\pi_1\tau_1 - 8\sqrt{2}\tau_1 = 0, \quad -4\pi_2\tau_2 - 6\sqrt{2}\tau_2 = 0.$$

Получаем искомые координаты точки:

$$\pi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \pi_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Делаем в (10.3.7) замену

$$\zeta_1 = \tau_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \zeta_2 = \tau_2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

и получаем уравнение

$$\tau_1^2 - \frac{\tau_2^2}{4} = 1.$$

Оно имеет простейший вид, поскольку не содержит ни произведений переменных, ни линейных членов. Кривая, задаваемая начальным урав-

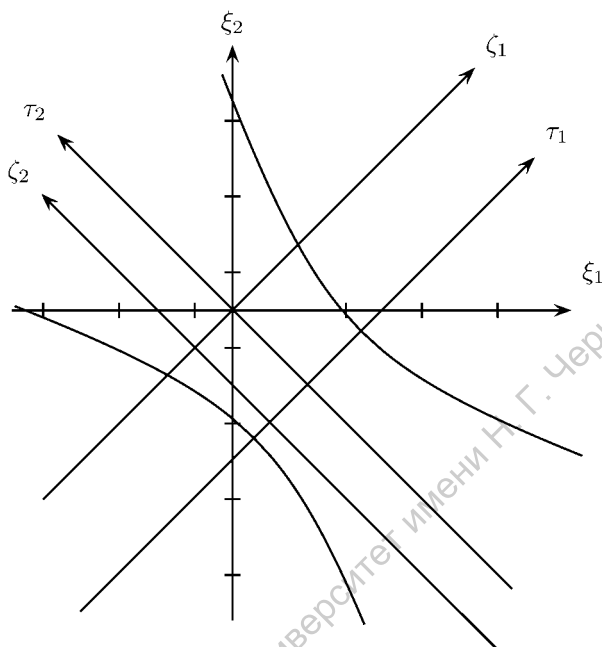


Рис. 10.1. Гипербола $3\xi_1^2 + 10\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 - 2\xi_1 - 14\xi_2 - 13 = 0$

нением, и все рассматривавшиеся системы координат изображены на рис. 10.1. □

ПРИМЕР 2. Преобразовать к простейшему виду уравнение

$$\xi_2^2 + 2\xi_1 + 4\xi_2 - 2 = 0.$$

Переменную ξ_1 содержит только член первой степени и избавиться от него переносом начала координат невозможно. Однако такой перенос позволяет ликвидировать член нулевой степени. Делаем замену

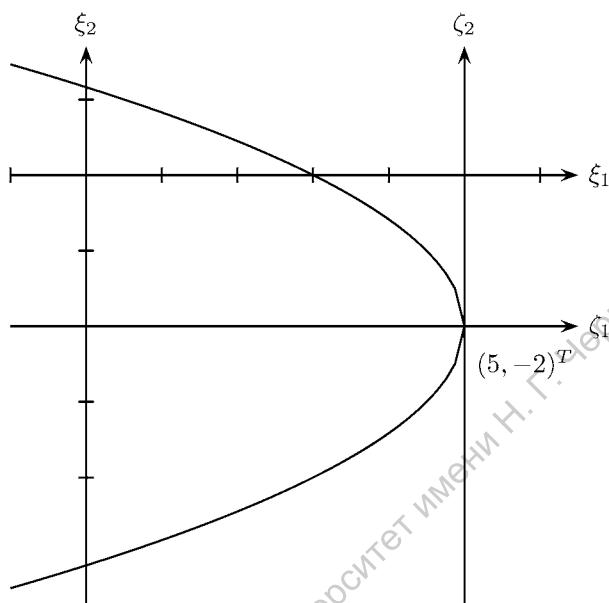
$$\xi_1 = \zeta_1 + \gamma_1 \quad \xi_2 = \zeta_2 + \gamma_2,$$

где γ_1 и γ_2 — константы. Вычисляем член первой степени, содержащий ζ_2 , и свободный член и приравниваем их к нулю:

$$2\gamma_2\zeta_2 + 4\zeta_2 = 0, \quad 2\gamma_1 + 4\gamma_2 - 2 = 0.$$

Видим, что $\gamma_2 = -2$, $\gamma_1 = 5$. Произведя замену

$$\xi_1 = \zeta_1 + 5 \quad \xi_2 = \zeta_2 - 2,$$

Рис. 10.2. Парабола $\xi_2^2 + 2\xi_1 + 4\xi_2 - 2 = 0$

получим уравнение параболы $\xi_2^2 = -2\xi_1$.

Кривая, задаваемая начальным уравнением, и обе системы координат изображены на рис. 10.2. □

10.4. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Утверждение 10.3.2 позволяет перечислить все гиперповерхности, которые можно задать при помощи уравнения второго порядка на плоскости и в трехмерном пространстве. В определении 10.3.1 сказано, что если размерность аффинного пространства равна двум или трем, то гиперповерхность называется соответственно кривой или поверхностью. Некоторые из перечисленных в 10.3.1 и 10.3.2 кривых и поверхностей называются мнимыми. Это означает, что их уравнения имеют единственное решение или вовсе не имеют решений и задают в действительном пространстве либо одну точку, либо пустое множество точек. В формулировках упомянутых утверждений буква ξ с индексом означает переменную, а остальными буквами обозначены отличные от нуля действительные числа.

10.4.1. Уравнение любой кривой второго порядка можно привести к одному и только к одному из указанных ниже канонических видов путем выбора подходящей прямоугольной системы координат:

1) эллипсу

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1;$$

2) мнимому эллипсу

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = -1;$$

3) гиперболе

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1;$$

4) паре пересекающихся прямых

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0;$$

5) паре мнимых пересекающихся прямых

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0;$$

6) параболе

$$\xi_2^2 = 2\lambda\xi_1;$$

7) паре параллельных прямых

$$\xi_2^2 = \gamma^2;$$

8) паре мнимых параллельных прямых

$$\xi_2^2 = -\gamma^2;$$

9) паре совпадающих прямых

$$\xi_2^2 = 0.$$

Доказательство. Основой доказательства служит классификация уравнений кривых, указанная в 10.3.2. Пусть уравнение имеет вид

$$\mu_1\xi_1^2 + \mu_2\xi_2^2 + \gamma = 0, \quad (10.4.1)$$

причем $\gamma \neq 0$ и $\mu_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Перенесем свободный член в правую часть и разделим обе части на $-\gamma$. Полученное уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{\xi_1^2}{-\frac{\gamma}{\mu_1}} + \frac{\xi_2^2}{-\frac{\gamma}{\mu_2}} = 1.$$

Если числа $-\frac{\gamma}{\mu_1}$ и $-\frac{\gamma}{\mu_2}$ положительны, то это каноническое уравнение эллипса, если они имеют разные знаки, то перед нами уравнение гиперболы. При $-\frac{\gamma}{\mu_1} < 0$, $-\frac{\gamma}{\mu_2} < 0$ получим уравнение мнимого эллипса, умножив обе части равенства на -1 .

Если в уравнении (10.4.1) один из коэффициентов μ_i , например μ_1 , равен нулю, однако по-прежнему $\gamma \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0$, то равносильное ему уравнение

$$\xi_2^2 = -\frac{\gamma}{\mu_2}$$

имеет тип 7 и задает пару параллельных прямых, если правая часть положительна, а при отрицательной правой части имеет тип 8 и задает пару мнимых параллельных прямых.

Предположим, что уравнение имеет вид

$$\mu_1 \xi_1^2 + \mu_2 \xi_2^2 = 0 \quad (10.4.2)$$

и $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$. Равносильное ему уравнение

$$\frac{\xi_1^2}{\frac{1}{\mu_1}} + \frac{\xi_2^2}{\frac{1}{\mu_2}} = 0$$

задает пару мнимых пересекающихся прямых при совпадении знаков чисел $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$ и пару пересекающихся прямых, если знаки этих чисел разные. Если в уравнении (10.4.2) один из коэффициентов, например μ_2 , равен нулю, то это уравнение типа 9, задающее пару совпадающих прямых.

Уравнение третьего типа $\mu_1 \xi_1^2 + 2\lambda \xi_2 = 0$, в котором $\mu_1 \neq 0$, легко превратить в каноническое уравнение

$$\xi_1^2 = -2\frac{\lambda}{\mu_1}\xi_2,$$

имеющее вид (6) и задающее параболу. □

10.4.2. Путем выбора подходящей прямоугольной системы координат уравнение любой поверхности второго порядка можно привести к одному из указанных ниже канонических видов:

1) эллипсоиду

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} + \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 1;$$

2) мнимому эллипсоиду

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} + \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = -1;$$

3) однополостному гиперболоиду

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} - \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 1;$$

4) двуполостному гиперболоиду

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} - \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 1;$$

5) мнимому конусу

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} + \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 0;$$

6) конусу

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} - \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 0;$$

7) эллиптическому параболоиду

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 2\xi_3;$$

8) гиперболическому параболоиду

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 2\xi_3;$$

9) эллиптическому цилиндру

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1;$$

10) мнимому эллиптическому цилиндру

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = -1;$$

11) гиперболическому цилиндру

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1;$$

12) паре пересекающихся плоскостей

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0;$$

13) паре мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0;$$

14) параболическому цилиндру

$$\xi_2^2 = 2\alpha\xi_1;$$

15) паре параллельных плоскостей

$$\xi_1^2 = \delta^2;$$

16) паре мнимых параллельных плоскостей

$$\xi_1^2 = -\delta^2;$$

17) паре совпадающих плоскостей

$$\xi_1^2 = 0.$$

Доказательство этого утверждения проводится так же, как и предыдущего, и мы его опустим. $\square$

10.5. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Зададим в точечно-евклидовом пространстве размерности два декартову систему координат. Точки плоскости $(\xi_1^0, \xi_2^0)^T$ и $(\xi_1^0, -\xi_2^0)^T$ расположены на плоскости симметрично относительно оси абсцисс $O\xi_1$.

Точки $(\xi_1^0, \xi_2^0)^T$ и $(-\xi_1^0, \xi_2^0)^T$ симметричны относительно оси ординат $O\xi_2$. Точки $(\xi_1^0, \xi_2^0)^T$ и $(-\xi_1^0, -\xi_2^0)^T$ симметричны относительно точки O , начала координат.

Рассмотрим некоторую кривую, заданную уравнением $P(\xi_1, \xi_2) = 0$. Если для каждого решения $(\xi_1^0, \xi_2^0)^T$ этого уравнения $(\xi_1^0, -\xi_2^0)^T$ также является решением, то кривая симметрична относительно оси абсцисс $O\xi_1$. Аналогично определяется симметричность кривой относительно оси ординат $O\xi_2$ и относительно начала координат. Для этого необходимо, чтобы вместе с решением $(\xi_1^0, \xi_2^0)^T$ решениями уравнения являлись соответственно столбцы $(-\xi_1^0, \xi_2^0)^T$ и $(-\xi_1^0, -\xi_2^0)^T$.

ПРИМЕРЫ. Фигура на рис. 10.3 слева симметрична относительно оси ординат, но не симметрична относительно оси абсцисс и относительно начала координат. Фигура на том же рисунке справа симметрична относительно каждой из осей координат и относительно начала координат.

Нетрудно заметить, что задаваемая уравнением второй степени $P(\xi_1, \xi_2) = 0$ кривая симметрична относительно оси абсцисс, если переменная ξ_2 входит в это уравнение лишь во второй степени. Аналогичные критерии справедливы для симметрий относительно оси ординат и относительно начала координат.

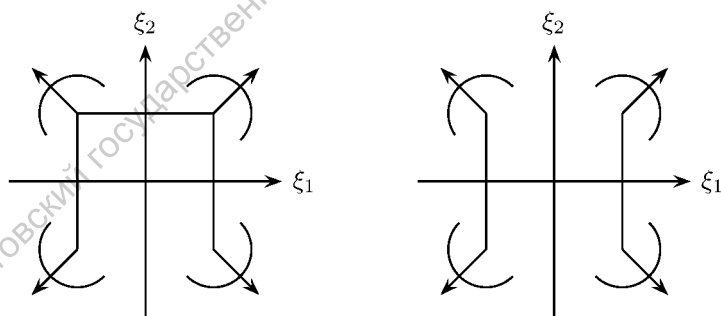


Рис. 10.3. Примеры симметричных фигур

Пользуясь списком, приведенным в предыдущем параграфе, рассмотрим все кривые второго порядка и докажем некоторые их свойства.

1. Эллипс

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1. \quad (10.5.1)$$

Отметим, что при $\alpha = \beta$ уравнение (10.5.1) превращается в уравнение окружности:

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\alpha^2} = 1, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 = \alpha^2.$$

По этой причине и ради простоты выкладок будем считать, что $\alpha > \beta > 0$.

Полагая в уравнении (10.5.1) $\xi_2 = 0$, получаем $\xi_1 = \pm\alpha$. Если же взять $\xi_1 = 0$, то $\xi_2 = \pm\beta$. Видим, что кривая пересекает оси координат в четырех точках

$$(\alpha, 0), \quad (-\alpha, 0), \quad (0, \beta), \quad (0, -\beta),$$

из которых первые две лежат на оси абсцисс, а следующие две — на оси ординат. Слагаемые в левой части уравнения (10.5.1) неотрицательны, поэтому оно не имеет решений, если $|\xi_1| > \alpha$ или $|\xi_2| > \beta$. Это означает, что все точки кривой находятся внутри прямоугольника, образованного пересечениями прямых с уравнениями

$$\xi_1 = \alpha, \quad \xi_1 = -\alpha, \quad \xi_2 = \beta, \quad \xi_2 = -\beta.$$

Приведенные ранее рассуждения доказывают, что эта кривая симметрична относительно координатных осей и имеет центр симметрии — точку $(0, 0)$.

10.5.1. Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его *вершинами*. Лежащие на осях симметрии отрезки с концами в вершинах называются *осями* эллипса. В соответствии с размерами одна из них называется *большой*, а другая *малой*. Точка пересечения осей эллипса называется его *центром*.

Поскольку в рассматриваемом случае оси координат являются осями симметрии, для изучения формы эллипса достаточно рассмотреть лишь точки кривой, принадлежащие первой четверти. Ранее было установлено, что уравнение (10.5.1) имеет решения только тогда, когда $|\xi_1| \leq \alpha$ и $|\xi_2| \leq \beta$. Из уравнения (10.5.1) найдем ξ_2 :

$$\xi_2 = \beta \sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{\alpha^2}}. \quad (10.5.2)$$

Корень берется со знаком плюс, так как мы изучаем кусок кривой, лежащий в первой четверти. По той же причине получаем неравенства

$0 \leq \xi_1 \leq \alpha$. Равенство (10.5.2) показывает, что с ростом переменной ξ_1 на отрезке $[0, \alpha]$ переменная ξ_2 монотонно убывает. Дальнейшее исследование требует привлечения средств математического анализа. Вычислив первую и вторую производные, можно убедиться в том, что функция (10.5.2) гладкая и ее график на отрезке $[0, \alpha]$ является выпуклым вверх. Также нетрудно проверить, что касательная в точке $(\beta, 0)$ параллельна оси абсцисс, а касательная в точке $(0, \alpha)$ параллельна оси ординат. Поскольку части кривой, расположенные в остальных четвертях, симметричны рассмотренной, форму эллипса можно считать исследованной (рис. 10.4).

Рассмотрим окружность с уравнением $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \alpha^2$. Произведя замену переменных

$$\zeta_1 = \xi_1, \quad \zeta_2 = \frac{\alpha}{\beta} \xi_2$$

и разделив обе части на α^2 , получим знакомое уравнение эллипса:

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1.$$

Произведенное преобразование является линейным и представляет собой равномерное сжатие плоскости к оси абсцисс. Видим, что эллипс может быть получен из окружности равномерным сжатием.

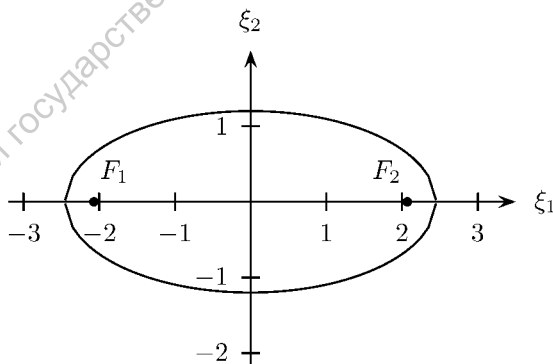


Рис. 10.4. Эллипс $\frac{\xi_1^2}{5,76} + \frac{\xi_2^2}{1,44} = 1$

10.5.2. Пусть эллипс задан уравнением (10.5.1). Точки $F_1 = (-\gamma, 0)^T$ и $F_2 = (\gamma, 0)^T$, где $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, называются **фокусами** эллипса.

10.5.3. Сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов равна длине большой оси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка M принадлежит эллипсу и имеет координаты $(\xi_1, \xi_2)^T$. Так как $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, справедливы равенства

$$\begin{aligned}\xi_2^2 &= \beta^2 \left(1 - \frac{\xi_1^2}{\alpha^2}\right) = (\alpha^2 - \gamma^2) \left(1 - \frac{\xi_1^2}{\alpha^2}\right) = \\ &= \alpha^2 - \gamma^2 - (\alpha^2 - \gamma^2) \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} = \alpha^2 - \gamma^2 - \xi_1^2 + \frac{\gamma^2 \xi_1^2}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

Координаты вектора $\overrightarrow{F_1 M}$ равны $(\xi_1 - (-\gamma), \xi_2)^T$, поэтому

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{F_1 M}| &= \sqrt{(\xi_1 + \gamma)^2 + \xi_2^2} = \sqrt{(\xi_1 + \gamma)^2 + \alpha^2 - \gamma^2 - \xi_1^2 + \frac{\gamma^2 \xi_1^2}{\alpha^2}} = \\ &= \sqrt{\xi_1^2 + 2\gamma\xi_1 + \gamma^2 + \alpha^2 - \gamma^2 - \xi_1^2 + \frac{\gamma^2 \xi_1^2}{\alpha^2}} = \sqrt{\alpha^2 + 2\gamma\xi_1 + \frac{\gamma^2 \xi_1^2}{\alpha^2}} = \\ &= \sqrt{\left(\alpha + \frac{\gamma\xi_1}{\alpha}\right)^2} = \alpha + \frac{\gamma\xi_1}{\alpha}.\end{aligned}$$

Из $|\overrightarrow{F_2 M}| = \sqrt{(\xi_1 - \gamma)^2 + \xi_2^2}$ аналогичным образом выводим равенство

$$|\overrightarrow{F_2 M}| = \alpha - \frac{\gamma\xi_1}{\alpha}.$$

Сложив найденные расстояния от точки M до фокусов эллипса, получим нужное равенство:

$$|\overrightarrow{F_1 M}| + |\overrightarrow{F_2 M}| = \alpha + \frac{\gamma\xi_1}{\alpha} + \alpha - \frac{\gamma\xi_1}{\alpha} = 2\alpha. \quad \square$$

2. Мнимый эллипс $\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = -1$. Поскольку левая часть неотрицательна, среди действительных чисел решений этого уравнения не имеется, и на действительной плоскости оно не задает ни одной точки.

3. Гипербола, заданная уравнением

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1. \quad (10.5.3)$$

Нетрудно заметить, что эта кривая, как и эллипс, имеет две оси симметрии. В рассматриваемом случае ими служат координатные оси. Выразим ξ_2 через ξ_1 :

$$\xi_2^2 = \beta^2 \left(\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - 1 \right), \quad \xi_2 = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\xi_1^2 - \alpha^2}.$$

Если $|\xi_1| < \alpha$, то под корнем находится отрицательное число, и потому каноническое уравнение решений не имеет. Это означает, что на части плоскости, заключенной между прямыми $\xi_1 = \alpha$ и $\xi_1 = -\alpha$, точек кривой нет, и она состоит из двух не связанных между собой частей, называемых ее **ветвями**. В частности, гипербола не имеет общих точек с осью ординат. Ось абсцисс она пересекает в точках $(-\alpha, 0)$ и $(\alpha, 0)$, называемых **вершинами** гиперболы.

Ввиду симметричности кривой можно ограничиться изучением формы ее части, расположенной в первой четверти. При $\xi_1 > \alpha$ с ростом этой переменной функция монотонно возрастает. Взяв первую и вторую производные, легко убедиться в том, что ее график является выпуклым вверх и касательная в вершине ортогональна оси абсцисс.

Проведем еще две прямые с уравнениями $\xi_1 = \beta$ и $\xi_1 = -\beta$. Пересекаясь, четыре прямые выделяют на плоскости прямоугольник $abcd$ (рис. 10.5; он выполнен для случая $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{0,9}$).

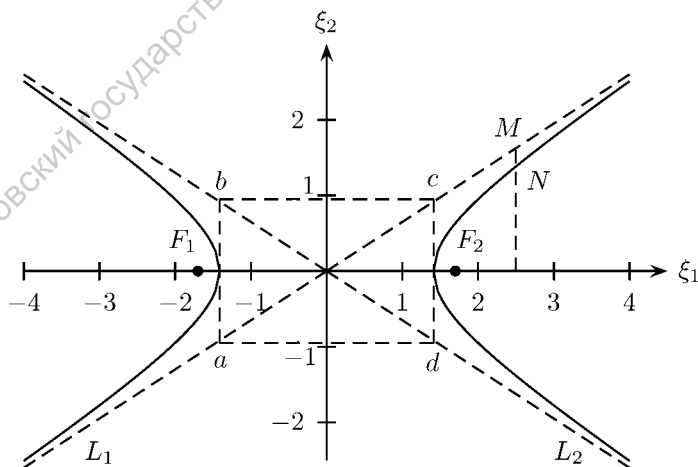


Рис. 10.5. Гипербола $\frac{\xi_1^2}{2} - \frac{\xi_2^2}{0,9} = 1$

Его вершины имеют следующие координаты:

$$a = (-\alpha, -\beta)^T, \quad b = (-\alpha, \beta)^T, \quad c = (\alpha, \beta)^T, \quad d = (\alpha, -\beta)^T.$$

Прямые L_1 и L_2 , проходящие через противоположные вершины, называются **асимптотами**. Они имеют следующие уравнения:

$$\frac{\xi_1}{\alpha} - \frac{\xi_2}{\beta} = 0, \quad \frac{\xi_1}{\alpha} + \frac{\xi_2}{\beta} = 0. \quad (10.5.4)$$

10.5.4. Гипербола не имеет общих точек с асимптотами. При стремлении переменной ξ_1 к бесконечности расстояние между точками ветви гиперболы и соответствующей асимптотой стремится к нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно изучить часть кривой, лежащую в первой четверти. Возьмем на прямой L_1 какую-нибудь точку $M = (\gamma, \delta_1)^T$, принадлежащую этой четверти, и опустим из нее перпендикуляр на ось абсцисс. Точку пересечения перпендикуляра с гиперболой, имеющую координаты $M = (\gamma, \delta_2)^T$, обозначим через N . Поскольку система координат прямоугольная, длина отрезка $[MN]$ равна $\delta_2 - \delta_1$. Переписав уравнения прямой L_1 и гиперболы в виде

$$\xi_2 = \frac{\beta}{\alpha} \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\xi_1^2 - \alpha^2},$$

нетрудно оценить разность $\delta_2 - \delta_1$:

$$\begin{aligned} \delta_2 - \delta_1 &= \frac{\beta}{\alpha} \gamma - \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}) = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2})(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2})}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}} = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma^2 - \gamma^2 + \alpha^2}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}} = \frac{\beta \alpha}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

Числа α, β, γ положительны и $\gamma > \alpha$ ввиду положения отрезка $[MN]$. Видим, что последняя дробь положительна для любого $\gamma > \alpha$. Это означает, что соответствующая ветвь гиперболы и прямая L_1 общих точек не имеют. Так как ростом γ дробь стремится к нулю, расстояние от точек гиперболы до прямой также стремится к нулю. $\square$

10.5.5. Пусть гипербола задана уравнением (10.5.1). Точки $F_1 = (-\gamma, 0)^T$ и $F_2 = (\gamma, 0)^T$, где $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 0$, называются **фокусами** гиперболы, а расстояние между ними называется **фокусным**. Середина отрезка $[F_1 F_2]$ называется **центром** гиперболы. Расстояния от точки гиперболы до фокусов называются **фокальными радиусами**.

10.5.6. Модуль разности расстояний от любой точки гиперболы до фокусов не зависит от положения точки и является постоянной величиной. Если гипербола задана уравнением (10.5.1), то он равен 2α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка M с координатами $(\xi_1, \xi_2)^T$ принадлежит гиперболе. Вычислим фокальные радиусы ϱ_1 и ϱ_2 :

$$\varrho_1 = |\overrightarrow{F_1 M}| = \sqrt{(\xi_1 + \gamma)^2 + \xi_2^2}, \quad \varrho_2 = |\overrightarrow{F_2 M}| = \sqrt{(\xi_1 - \gamma)^2 + \xi_2^2}.$$

Так как $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ и координаты точки M удовлетворяют уравнению (10.5.3), получаем равенства

$$\begin{aligned} \xi_2^2 &= \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\xi_1^2 - \alpha^2) = \frac{(\gamma^2 - \alpha^2)(\xi_1^2 - \alpha^2)}{\alpha^2} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\xi_1^2 - \xi_1^2 - \gamma^2 + \alpha^2, \\ \varrho_1 &= \sqrt{\xi_1^2 + 2\gamma\xi_1 + \gamma^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\xi_1^2 - \xi_1^2 - \gamma^2 + \alpha^2} = \\ &= \frac{\sqrt{\gamma^2\xi_1^2 + 2\gamma\alpha^2\xi_1 + \alpha^4}}{\alpha} = \frac{\sqrt{(\gamma\xi_1 + \alpha^2)^2}}{\alpha} = \pm \frac{(\gamma\xi_1 + \alpha^2)}{\alpha}. \end{aligned} \quad (10.5.5)$$

Подобным же образом находим второй фокальный радиус:

$$\varrho_2 = \pm \frac{(\gamma\xi_1 - \alpha^2)}{\alpha}. \quad (10.5.6)$$

Длины ϱ_1 и ϱ_2 положительны, поэтому перед дробями (10.5.5) и (10.5.6) следует оставить только один знак, поставив его в зависимость от положения точки M . Ранее уже установлено, что точки кривой имеются только тогда, когда либо $\xi_1 \geq \alpha$, либо $\xi_1 \leq -\alpha$. Рассмотрим каждый из этих случаев, учитывая, что $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > \alpha > 0$.

1) Если $\xi_1 \geq \alpha$, то $\xi_1\alpha > \alpha^2$, поэтому перед дробями (10.5.5) и (10.5.6) должен стоять знак плюс.

2) При $\xi_1 \leq -\alpha$ произведение $\gamma\xi_1$ отрицательно и по модулю больше α^2 , следовательно обе дроби следует брать со знаком минус.

В каждом из этих случаев величина $|\varrho_1 - \varrho_2|$ равна 2α и не зависит от переменной ξ_1 . $\square$

4. Уравнение $\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0$ задает пару пересекающихся прямых. Действительно, преобразуем его к виду

$$\left(\frac{\xi_1}{\alpha} + \frac{\xi_2}{\beta}\right)\left(\frac{\xi_1}{\alpha} - \frac{\xi_2}{\beta}\right) = 0.$$

Приравняв к нулю каждый сомножитель, получим уравнения (10.5.4) двух прямых, проходящих через начало системы координат. Для $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 1$ такие прямые изображены на рис. 10.6.

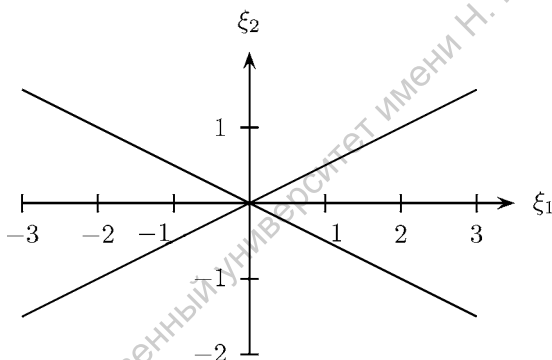


Рис. 10.6 Пара прямых $\frac{x^2}{2} - y^2 = 0$

5. Пара мнимых пересекающихся прямых $\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0$. В этом уравнении левая часть неотрицательна и потому на действительной плоскости ему удовлетворяют только координаты $(0, 0)^T$ точки O .

6. Если точка (γ, δ) принадлежит параболы

$$\xi_2^2 = 2\lambda\xi_1, \quad (10.5.7)$$

то ей принадлежит и точка $(\gamma, -\delta)$, поэтому ось абсцисс является ее осью симметрии. При $\lambda > 0$ все точки кривой лежат в правой полуплоскости, при $\lambda < 0$ — в левой.

10.5.7. Пусть парабола задана уравнением (10.5.7). Точка F с координатами $(\frac{\lambda}{2}, 0)$ называется ее **фокусом**, а прямая с уравнением $\xi_1 = -\frac{\lambda}{2}$ — **директрисой**. Расстояние λ от фокуса до директрисы

называется **фокальным параметром**, а ось симметрии — **фокальной осью**.

10.5.8. Каждая точка параболы равноудалена от фокуса и директрисы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим параболу, заданную каноническим уравнением (10.5.7). Пусть точка M находится на параболе и имеет координаты (ξ_1, ξ_2) (рис. 10.7).

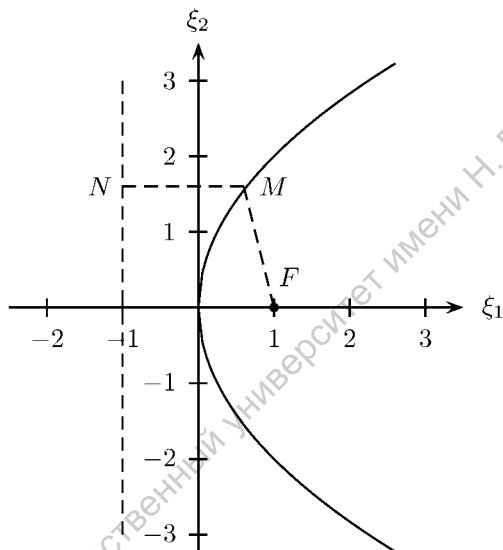


Рис. 10.7 Парабола $\xi_2^2 = 4\xi_1$

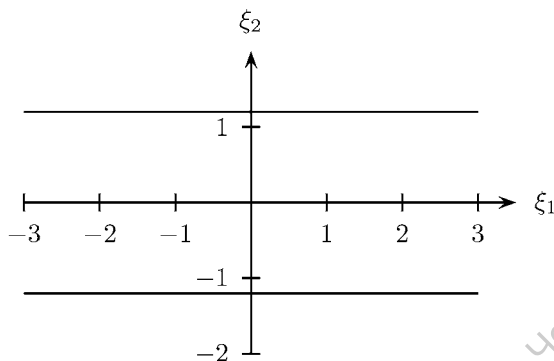
Длина r_1 перпендикуляра MN к директрисе равна очевидно $\xi_1 + \frac{\lambda}{2}$. Вычислим расстояние r_2 до фокуса F , учитывая равенство (10.5.7):

$$\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{\left(\xi_1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \xi_2^2} = \sqrt{\xi_1^2 - \lambda\xi_1 + \frac{\lambda^2\xi_1^2}{4} + \xi_2^2} = \\ &= \sqrt{\xi_1^2 - \lambda\xi_1 + \frac{\lambda^2\xi_1^2}{4} + 2\lambda\xi_1^2} = \sqrt{\left(\xi_1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2} = \xi_1 + \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Видим, что $r_1 = r_2$. □

7–9. Уравнение $\xi_2^2 = \gamma^2$ задает две параллельные прямые с уравнениями (рис. 10.8)

$$\xi_2 = \gamma, \quad \xi_2 = -\gamma$$

Рис. 10.8. Пара прямых $\xi_2^2 = 1,44$

Поскольку уравнение $\xi_2^2 = -\gamma^2$ действительных корней не имеет, на действительной плоскости оно не задает ни одной точки. По причинам, которые мы не рассматриваем, математики говорят, что оно определяет пару мнимых параллельных прямых.

Любая прямая в пространстве размерности два задается одним уравнением первой степени. Уравнение $\xi_2^2 = 0$ распадается на два одинаковых уравнения первой степени $\xi_2 = 0$ и определяет две совпадающих прямых (ось абсцисс).

10.6. ВИДЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Зададим в точечно-евклидовом пространстве размерности три прямоугольную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Оси $O\xi_1$, $O\xi_2$ и $O\xi_3$ принято называть соответственно **осью абсцисс**, **ординат** и **аппликат**. Уравнение второго порядка $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ задает в рассматриваемом пространстве некоторую поверхность. Если для каждой точки P этой поверхности ей принадлежит также точка, симметричная P относительно какой-то плоскости, то поверхность симметрична относительно той же плоскости, называемой **плоскостью симметрии**. Аналогичным образом определяется симметричность поверхности относительно прямой или точки, именуемых соответственно **осью** и **центром симметрии**.

Пусть поверхность задана одним из канонических уравнений, упомянутых в 10.4.2. В любом из них каждая переменная встречается не более одного раза. Предположим, что уравнение содержит квад-

рат некоторой переменной, например переменной ξ_1 . Если точка $M = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$ принадлежит поверхности, то ей принадлежит также точка $(-\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$, симметричная точке M относительно плоскости $\xi_1 = 0$. Это означает, что поверхность симметрична относительно указанной плоскости. Очевидно, она симметрична относительно этой плоскости и в том случае, когда переменная ξ_1 в уравнение поверхности не входит.

Рассмотрим случай, когда в уравнение входят два квадрата, например ξ_2^2 и ξ_3^2 . Приведенные выше рассуждения показывают, что определяемая уравнением поверхность симметрична относительно плоскостей $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 0$. Отсюда следует, что она симметрична относительно линии их пересечения, которой служит ось абсцисс. Действительно, рассмотрим точку $M = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$, лежащую на поверхности. Очевидно, точка $M_1 = (\delta_1, -\delta_2, -\delta_3)^T$ также удовлетворяет уравнению и принадлежит поверхности. Докажем, что она симметрична точке M относительно оси абсцисс. Плоскость $\delta_2 z = \delta_3 y$ содержит точки

$$M, \quad M_1, \quad (0, 0, 0)^T, \quad (1, 0, 0)^T.$$

Это означает, что в ней лежат ось абсцисс и вектор $\overline{M_1 M}$. Так как $\overline{M_1 M} = (0, 2\delta_2, 2\delta_3)^T$, вектор $\overline{M_1 M}$ ортогонален направляющему вектору оси абсцисс, имеющему координаты $(1, 0, 0)^T$, и, следовательно, ортогонален оси абсцисс. Лежащая на ней точка $M_2 = (\delta_1, 0, 0)^T$ делит вектор пополам. Мы доказали, что точки M и M_1 симметричны относительно оси абсцисс. Поскольку M — произвольная точка поверхности, вся поверхность симметрична относительно этой оси.

Если каноническое уравнение содержит квадраты трех переменных, аналогичное рассуждение показывает, что поверхность имеет центр симметрии.

Найденные простые признаки позволяют в каждом случае из 10.4.2 выяснить, имеет ли поверхность плоскости, оси или центр симметрии. Так, каноническое уравнение

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} - \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 1$$

однополостного гиперболоида содержит три квадрата, следовательно у этой поверхности координатные плоскости служат плоскостями симметрии, координатные оси — осями симметрии, начало координат — центром симметрии. У эллиптического параболоида

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 2\xi_3$$

плоскости симметрии задаются уравнениями $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, а единственная ось симметрии совпадает с их пересечением. Симметрии прочих поверхностей, задаваемых каноническими уравнениями, читатель без труда определит самостоятельно.

10.6.1. *Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат имеет уравнение*

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} + \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 1. \quad (10.6.1)$$

Будем для простоты полагать, что числа α , β и γ положительны. Поскольку в левой части уравнения (10.6.1) все слагаемые неотрицательны, любое его решение удовлетворяет неравенствам

$$-\alpha \leq \xi_1 \leq \alpha, \quad -\beta \leq \xi_2 \leq \beta, \quad -\gamma \leq \xi_3 \leq \gamma.$$

Это означает, что вся рассматриваемая поверхность ограничена и находится внутри параллелепипеда, точки которого удовлетворяют этим неравенствам. С координатными осями эллипсоид (10.6.1) пересекается в точках

$$(\pm\alpha, 0, 0)^T, \quad (0, \pm\beta, 0)^T, \quad (0, 0, \pm\gamma)^T.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} \xi_3 = \delta, \\ \frac{\xi_2^2}{\beta^2} + \frac{\xi_1^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{\delta^2}{\alpha^2} \end{cases}$$

задает множество точек, принадлежащих пересечению эллипсоида с плоскостью $\xi_3 = \delta$. При $|\delta| < \alpha$ это множество точек образует эллипс, а при $|\delta| > \alpha$ оно является пустым, так как правая часть второго уравнения системы отрицательна. В сечении эллипсоида координатной плоскостью $\xi_2 = 0$ получаем эллипс

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 1.$$

Полученной информации уже достаточно, чтобы представить себе вид поверхности (рис. 10.9 слева).

Пусть $P(\xi_1, \xi_2)$ — некоторый многочлен степени 2. Уравнение

$$P(\xi_1, \xi_2) = 0 \quad (10.6.2)$$

задает на плоскости $O\xi_1\xi_2$ кривую второго порядка. Зафиксируем на этой кривой точку $(\delta_1, \delta_2)^T$ и рассмотрим поверхность, задаваемую уравнением (10.6.2) в пространстве размерности 3. Нетрудно заметить, что прямая

$$\begin{cases} \xi_1 = \delta_1, \\ \xi_2 = \delta_2 \end{cases}$$

параллельна оси аппликат и все ее точки принадлежат этой поверхности. Это означает, что поверхность образована прямыми, параллельными оси аппликат, имеющими общие точки с кривой, лежащей в плоскости $O\xi_1\xi_2$. Можно сказать и иначе: поверхность получена таким движением прямой, при котором она остается параллельной оси аппликат и имеет общие точки с этой кривой.

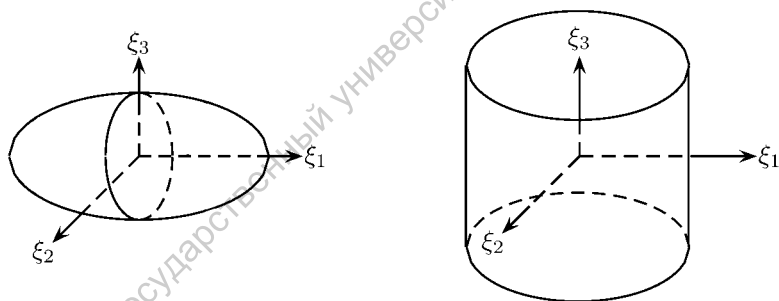


Рис. 10.9. Эллипсоид (слева), эллиптический цилиндр (справа)

10.6.2. Поверхность, образованная таким движением прямой (называемой **образующей** поверхности), при котором она в каждый момент параллельна некоторой фиксированной прямой, называется **цилиндрической**.

Кривая, возникающая при пересечении цилиндрической поверхности плоскостью, ортогональной образующей, называется **направляющей**.

10.6.3. Поверхность второго порядка называется *эллиптическим, гиперболическим* или *параболическим цилиндром*, если ее направляющей служит соответственно эллипс, гипербола или парабола.

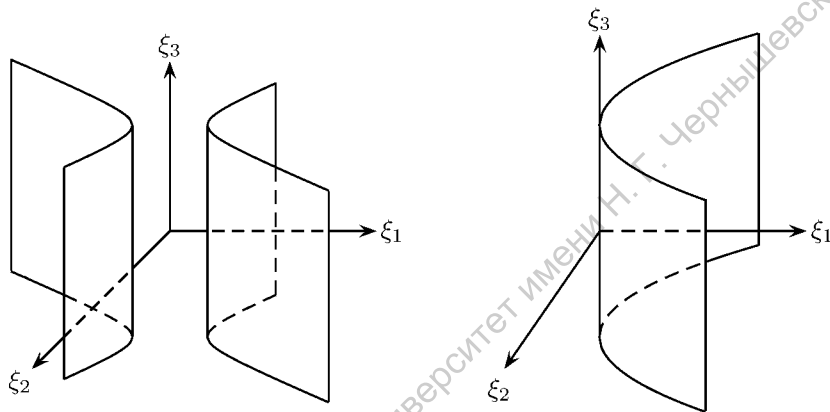


Рис. 10.10. Цилиндры: гиперболический (слева) и параболический (справа)

Из сказанного следует, что при надлежащем выборе системы координат эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры можно задать каноническими уравнениями, имеющими соответственно вид

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1, \quad \xi_2^2 = 2\lambda\xi_1.$$

На рис. 10.9 и 10.10 изображены части этих поверхностей, отсекаемые плоскостями, ортогональными координатным осям.

10.6.4. Поверхность второго порядка, имеющая в некоторой прямоугольной системе координат каноническое уравнение

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} - \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 0, \quad (10.6.3)$$

называется *конусом второго порядка* или просто *конусом*.

Пересекая конус плоскостью $\xi_3 = \delta$, ортогональной оси аппликат, получим кривую K , множество точек которой задается системой

$$\begin{cases} \xi_3 = \delta, \\ \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = \frac{\delta^2}{\gamma^2}. \end{cases}$$

При $\delta \neq 0$ эта кривая является эллипсом с центром на оси аппликат. Если же $\delta = 0$, то секущая плоскость совпадает с координатной $O\xi_1\xi_2$, а сечение содержит одну точку.

При любом λ ось ординат лежит в плоскости $\xi_2 = \lambda\xi_1$. Пересекая этой плоскостью конус (10.6.3), получим множество точек

$$\begin{cases} \xi_2 = \lambda\xi_1, \\ \frac{(\beta^2 + \lambda^2)\xi_1^2}{\alpha^2\beta^2} - \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 0, \end{cases}$$

принадлежащих двум прямым, пересекающимся в начале системы координат. Отсюда следует, что поверхность состоит из множества всех прямых (образующих конуса), проходящих через начало системы координат (вершину конуса) и пересекающих кривую K (направляющую) (рис. 10.11).

В сечении конуса (10.6.3) плоскостью $\xi_1 = \varepsilon$ получается гипербола

$$-\frac{\xi_2^2}{\beta^2} + \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}.$$

Также гипербола получится при пересечении конуса любой плоскостью, параллельной двум образующим, не лежащим в этой плоскости. Если же секущая плоскость параллельна лишь одной образующей конуса и не имеет с ней общих точек, то сечение является параболой (рис. 10.11).

10.6.5. Поверхности, имеющие в некоторой прямоугольной системе координат уравнения

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} - \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 1, \quad \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} - \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 1 \quad (10.6.4)$$

называются соответственно *однополостным гиперboloидом* и *двуполостным гиперboloидом*.

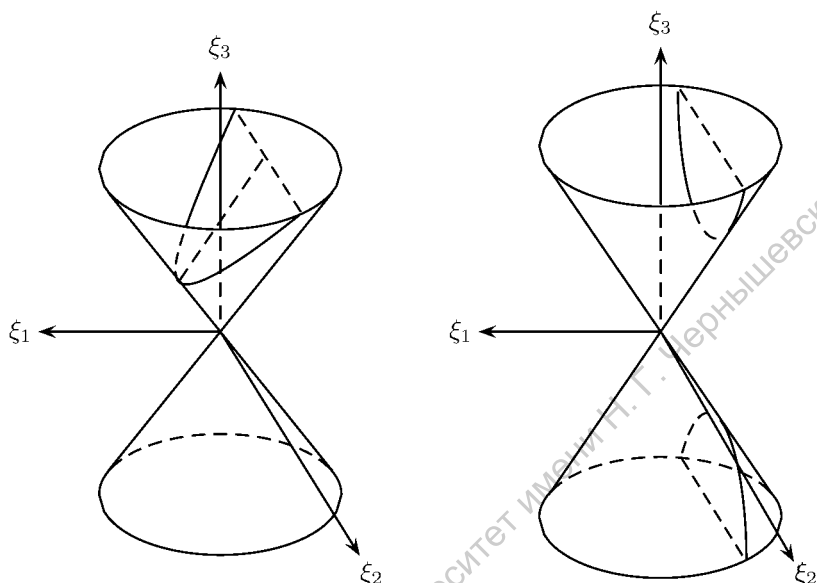


Рис. 10.11. Конус, конические сечения

Как и раньше, будем считать, что α , β и γ положительны. Пересекая однополостный гиперболоид плоскостью, ортогональной к оси аппликат, а двуполостный плоскостью, ортогональной к оси абсцисс, получим множества точек

$$\begin{cases} \xi_3 = \delta, \\ \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{\gamma^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 = \delta, \\ \frac{\xi_2^2}{\beta^2} + \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = \frac{\delta^2}{\alpha^2} - 1. \end{cases}$$

Первая система совместна при любом δ и задает эллипс с центром на оси аппликат. Вторая система при $|\delta| > \alpha$ также задает эллипс, но с центром на оси абсцисс, при $\delta = \pm\alpha$ она имеет единственное решение и задает одну точку. Если же $|\delta| < \alpha$, то система несовместна, так как правая часть отрицательна.

При пересечении поверхностей плоскостью $O\xi_1\xi_3$ получаем равные множества точек, описываемые системой

$$\begin{cases} \xi_2 = 0, \\ \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 1. \end{cases}$$

Эти точки принадлежат гиперболе, симметричной относительно оси аппликат.

Части изучаемых гиперboloидов, отсекаемые плоскостями, ортогональными координатным осям, изображены на рис. 10.12.

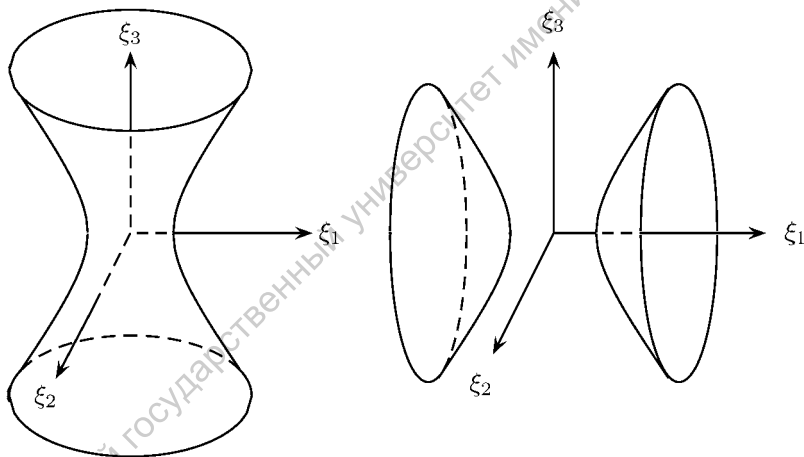


Рис. 10.12. Гиперboloиды: однополостный (слева) и двуполостный (справа)

10.6.6. Поверхности, имеющие в некоторой прямоугольной системе координат канонические уравнения

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 2\xi_3, \quad \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 2\xi_3, \quad (10.6.5)$$

называются соответственно *эллиптическим параболоидом* и *гиперболическим параболоидом*.

Как всегда, полагаем в этих уравнениях $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Поскольку левая часть канонического уравнения эллиптического параболоида неотрицательна, у каждой его точки третья координата также неотрицательна и потому он находится в полупространстве $\xi_3 \geq 0$. Пересекая поверхность плоскостью $\xi_3 = \delta$, получим множество точек

$$\begin{cases} \xi_3 = \delta, \\ \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 2\delta, \end{cases}$$

образующих при $\delta > 0$ эллипс, а при $\delta = 0$ содержащее одну точку $(0, 0, 0)^T$. В сечении эллиптического параболоида плоскостью $\xi_2 = 0$ получаем параболу $\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} = 2\xi_3$. На рис. 10.13 слева изображена часть такого параболоида, отсекаемая плоскостью, параллельной плоскости $O\xi_1\xi_2$.

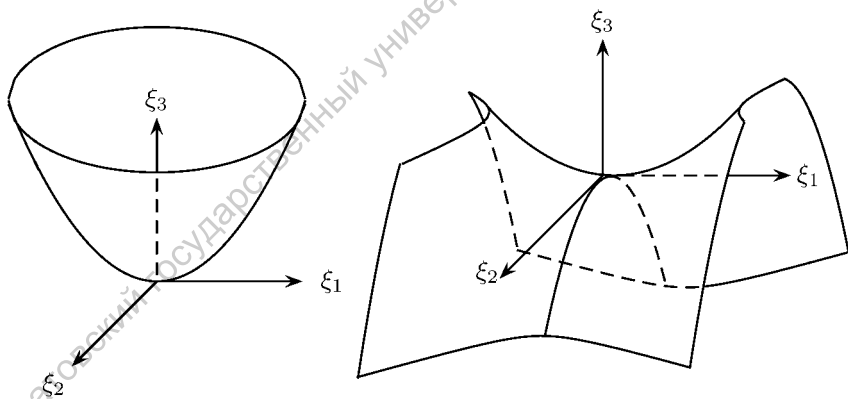


Рис. 10.13. Параболоиды: эллиптический (слева) и гиперболический (справа)

Множество точек в сечении гиперболического параболоида (10.6.5) плоскостью $\xi_1 = \psi$, ортогональной оси абсцисс, образует параболу

$$-\frac{\xi_2^2}{\beta^2} - 2\xi_3 + \frac{\psi^2}{\alpha^2} = 0, \quad (10.6.6)$$

ветви которой направлены вниз. Сечение плоскостью $\xi_2 = 0$ дает параболу

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - 2\xi_3 = 0, \quad (10.6.7)$$

у которой ветви направлены вверх. Если же мы пересечем поверхность плоскостью $\xi_3 = \delta$, ортогональной оси аппликат, то в сечении получим гиперболу

$$\begin{cases} \xi_3 = \delta, \\ \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 2\delta. \end{cases}$$

При $\delta < 0$ она не имеет общих точек с плоскостью $\xi_2 = 0$, а при $\delta > 0$ — с плоскостью $\xi_1 = 0$. Положив $\delta = 0$, получим уравнения

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0$$

двух пересекающихся прямых. Вид этой поверхности и рассматривавшиеся сечения приведены на рис. 10.13 справа.

10.6.7. Движение фигуры, при котором каждая ее точка описывает окружность, лежащую в плоскости, ортогональной некоторой прямой, называется **вращением** этой фигуры вокруг прямой, а прямая называется **осью вращения**.

Поверхность вращения описывается кривой, лежащей в плоскости, при вращении этой плоскости вокруг прямой, в ней лежащей.

Вращая эллипс или параболу вокруг оси симметрии, мы получим поверхности, называемые соответственно **эллипсоидом вращения** и **эллиптическим параболоидом вращения**. Поскольку у эллипса две оси симметрии, различают **сжатый эллипсоид вращения**, получающийся при вращении вокруг малой оси, и **вытянутый эллипсоид вращения**, возникающий при вращении вокруг большой оси. Если через ось вращения эллипса провести плоскость и равномерно сжать пространство по направлению к этой плоскости, в сечениях, ортогональных оси вращения, будут вместо окружностей получаться эллипсы. Полученная поверхность является эллипсоидом, но уже не может быть получена вращением.

Вращая гиперболу, не имеющую общих точек с кривой, вокруг оси симметрии, получим **однополостный гиперболоид вращения**, а при вращении вокруг другой оси симметрии — **двуполостный гиперболоид вращения**. При вращении параболы вокруг ее единственной оси симметрии получится **эллиптический параболоид вращения**. Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что однополостный и двуполостный гиперболоиды, а также эллиптический параболоид, не являющиеся поверхностями вращения, могут быть получены из последних равномерным сжатием.

Гиперболический параболоид можно получить движением параболы (10.6.6). Действительно, при пересечении поверхности (10.6.5) плоскостями, ортогональными оси абсцисс, получаются параболы, у которых уравнения вида (10.6.6) отличаются лишь свободным членом. Пересечем плоскость π_1 с уравнением $\xi_2 = 0$ ортогональной ей плоскостью π_2 , заданную уравнением $\xi_1 = \varphi$. Принадлежащие этим плоскостям точки поверхности (10.6.5) образуют параболы P_1 и P_2 с уравнениями (10.6.7) и (10.6.6). Вершина параболы P_2 находится на кривой P_1 . Если двигать плоскость π_2 так, чтобы она оставалась ортогональной плоскости π_1 и вершина параболы P_2 принадлежала P_1 , то все точки возникающей поверхности будут принадлежать гиперболическому параболоиду (10.6.5).

10.6.8. Уравнения

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0, \quad \xi_1^2 = \delta^2, \quad \xi_1^2 = 0$$

задают соответственно *пару пересекающихся плоскостей, пару параллельных плоскостей, пару совпадающих плоскостей*.

Доказательство. Каждое из уравнений первой степени

$$\frac{\xi_1}{\alpha} - \frac{\xi_2}{\beta} = 0, \quad \frac{\xi_1}{\alpha} + \frac{\xi_2}{\beta} = 0$$

задает плоскость. Перемножая соответствующие части, получим уравнение второй степени

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0,$$

задающее обе плоскости, пересекающиеся по оси аппликат. Множество решений уравнения $\xi_1^2 = \delta^2$ является объединением множеств решений

уравнений первой степени

$$\xi_1 = \delta, \quad \xi_1 = -\delta,$$

и потому задает две параллельные плоскости. Уравнению $\xi_1^2 = 0$ удовлетворяют лишь точки плоскости $\xi_1 = 0$, однако, поскольку уравнение имеет порядок два, оно задает две совпадающие плоскости. $\square$

Множество решений каждого уравнения, упомянутого в 10.6.8, является объединением двух уравнений первой степени, задающих две плоскости, поэтому такие поверхности называют **распадающимися**.

Уравнения второго порядка могут задавать в действительном пространстве одну точку или вовсе не иметь действительных решений. По причинам, которые мы не приводим, считается, что эти уравнения задают мнимые поверхности. При надлежащем выборе системы координат эти поверхности могут быть заданы каноническими уравнениями. Эти уравнения и названия соответствующих поверхностей приводятся ниже (все они также содержатся в списке 10.4.2).

10.6.9. Уравнения

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} + \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = -1, \quad \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = -1, \quad \xi_1^2 = -\delta^2$$

не имеют действительных решений и называются соответственно уравнением **мнимого эллипсоида**, **мнимого эллиптического цилиндра**, **пары мнимых параллельных плоскостей**.

10.6.10. Уравнения

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} + \frac{\xi_3^2}{\gamma^2} = 0, \quad \frac{\xi_1^2}{\alpha^2} + \frac{\xi_2^2}{\beta^2} = 0$$

имеют единственное действительное решение и называются соответственно уравнением **мнимого конуса**, **пары мнимых пересекающихся плоскостей**.

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

11.1. ОТРЕЗКИ

В этой главе все построения производятся в аффинном пространстве над действительным векторным пространством. Мы будем также предполагать, что в этом аффинном пространстве задана некоторая фиксированная система координат (см. 9.2.1), начало которой находится в точке O . Разумеется, возникает опасение, что определяемые множества и понятия зависят от выбора системы координат, однако в каждом конкретном случае нетрудно убедиться в обратном. Столбец координат точки M в указанном базисе будет обозначаться через $\overline{M}$. Под **линейной комбинацией** $\alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_n M_n$ **точек** $M_1, \dots, M_n$ всюду подразумевается линейная комбинация векторов

$$\alpha_1 \overrightarrow{OM_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OM_n} = \overrightarrow{OM}.$$

Будем считать, что результатом взятия выпуклой комбинации точек $M_1, \dots, M_k$ является точка M .

Пусть L — одномерное подпространство векторного пространства V_A , M — точка в аффинном пространстве A . Обозначим через π прямую в пространстве A , проходящую через точку M в направлении подпространства L (см. 9.3.1). Если точка N принадлежит прямой π и не совпадает с M , то вектор $\overrightarrow{MN}$ отличен от нуля (см. 9.1.3), принадлежит подпространству L и, поскольку пространство L одномерное, образует в нем базис. Возьмем на прямой π еще одну точку X , тогда $\overrightarrow{MX} \in L$, и потому для некоторого τ

$$\overrightarrow{MX} = \tau \overrightarrow{MN}. \quad (11.1.1)$$

11.1.1. В аффинном пространстве точка X лежит между точками M и N , если

$$\overrightarrow{MX} = \tau \overrightarrow{MN}, \quad \text{где } 0 \leq \tau \leq 1. \quad (11.1.2)$$

11.1.2. Если точка X лежит между точками M и N , то существует прямая, которой принадлежат все три точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через L линейную оболочку вектора $\overrightarrow{MN}$, а через π — прямую, проведенную через точку M в направлении L . Очевидно, $N \in \pi$. Так как $\overrightarrow{MM} = \mathbf{0}$ (см. 9.1.3) и $\mathbf{0} \in L$, то $M \in \pi$. Из (11.1.2) следует, что и $\overrightarrow{MX} \in L$, вследствие чего $X \in \pi$. $\square$

11.1.3. Если точка X лежит между точками M и N , то X лежит также между точками N и M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно аксиоме (a2) из 9.1.1 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MX} + \overrightarrow{XN}$. Подставляя вместо $\overrightarrow{MX}$ правую часть из (11.1.2), получаем равенство $\overrightarrow{MN} = \tau \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{XN}$. Умножая обе части на -1 и используя свойство 9.1.4, получим соотношение $\overrightarrow{NM} = \tau \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NX}$. Переносим $\tau \overrightarrow{NM}$ в левую часть, убеждаемся в том, что

$$\overrightarrow{NX} = (1 - \tau) \overrightarrow{NM}, \quad 0 \leq 1 - \tau \leq 1. \quad \square$$

11.1.4. Из любых трех лежащих на одной прямой попарно различных точек одна и только одна лежит между двумя другими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M , N и P — точки, лежащие на прямой π , проходящей через точку M в направлении одномерного подпространства L . Поскольку $M \neq N$ и $\overrightarrow{MN} \in L$, то $\overrightarrow{MN} \neq \mathbf{0}$ и $L = \mathcal{L}(\overrightarrow{MN})$. Вследствие этого из $\overrightarrow{MP} \in \pi$ следует, что $\overrightarrow{MP} = \alpha \overrightarrow{MN}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

а) Если $\alpha < 0$, то

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} = \alpha \overrightarrow{MN},$$

откуда

$$\overrightarrow{NP} = \alpha \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MN} = (\alpha - 1) \overrightarrow{MN} = (1 - \alpha) \overrightarrow{NM},$$

следовательно, $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{1 - \alpha} \overrightarrow{NP}$. Так как $\alpha < 0$, то $1 - \alpha > 1$, поэтому

$0 < \frac{1}{1 - \alpha} < 1$ и точка M лежит между N и P .

б) При $0 \leq \alpha \leq 1$ точка P лежит между M и N .

в) Если $\alpha > 1$, то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{MP}$, и точка N лежит между M и P ,

поскольку $0 \leq \frac{1}{\alpha} \leq 1$. $\square$

11.1.5. Если точка X лежит между точками M и N , а точка Y лежит между точками M и X , то Y лежит между M и N .

Доказательство. По условию,

$$\overrightarrow{MX} = \alpha \overrightarrow{MN}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \overrightarrow{MY} = \beta \overrightarrow{MX}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Но тогда $\overrightarrow{MY} = \beta \alpha \overrightarrow{MN}$, $0 \leq \beta \alpha \leq 1$. $\square$

11.1.6. Пусть M и N — точки, принадлежащие пространству A . Отрезком $[MN]$ называется множество точек из A , лежащих между M и N . Сами точки M и N называются концами отрезка $[MN]$.

Делая в равенстве (11.1.2) замены

$$\overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OX}, \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON},$$

приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OX} &= \tau(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}), \\ \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OM} + \tau(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \end{aligned} \quad (11.1.3)$$

$$\overrightarrow{OX} = (1 - \tau)\overrightarrow{OM} + \tau\overrightarrow{ON}, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (11.1.4)$$

С учетом сказанного в начале параграфа равенство (11.1.3) можно записать в виде

$$X = M + \tau(N - M), \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (11.1.5)$$

Теперь определение 11.1.6 можно переписать следующим образом.

11.1.7. Отрезком с концами в точках M и N называется множество точек X , удовлетворяющих условию (11.1.5).

Как обычно, про отрезок с концами в точках M и N можно сказать, что он соединяет точки M и N .

Полагая $\varphi = 1 - \tau$ и $\psi = \tau$, из (11.1.4) получим для точек, лежащих между M и N , соотношения

$$\overrightarrow{OX} = \varphi \overrightarrow{OM} + \psi \overrightarrow{ON}, \quad \varphi \geq 0, \quad \psi \geq 0, \quad \varphi + \psi = 1.$$

Перепишем их в упрощенном виде:

$$X = \varphi M + \psi N, \quad \varphi \geq 0, \quad \psi \geq 0, \quad \varphi + \psi = 1. \quad (11.1.6)$$

11.1.8. Пусть O , M и N — точки, принадлежащие аффинному пространству A . Точка X принадлежит отрезку $[MN]$ тогда и только тогда, когда X удовлетворяет соотношениям (11.1.6).

Очевидно, это утверждение можно принять за определение отрезка с концами в точках M и N , а 11.1.7 доказать как теорему.

11.1.9. Точка X называется *внутренней точкой* отрезка $[MN]$, если $X \in [MN]$, $X \neq M$ и $X \neq N$.

11.2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

11.2.1. Множество точек из аффинного пространства называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками X и Y оно содержит все точки отрезка $[XY]$. Множество, состоящее из одной точки, и пустое множество также считаются выпуклыми.

ПРИМЕР. На плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Множество точек

$$\pi = \{(\xi_1, \xi_2)^T \mid \delta_1 \leq \xi_1 \leq \delta_2, \quad \delta_3 \leq \xi_2 \leq \delta_4\}$$

образует прямоугольник. Доказать, что множество π выпуклое.

Докажем, что если точки $(\gamma_1, \gamma_2)^T$ и $(\zeta_1, \zeta_2)^T$ принадлежат π , то этому же прямоугольнику принадлежит точка

$$M = (\alpha\gamma_1 + (1 - \alpha)\zeta_1, \alpha\gamma_2 + (1 - \alpha)\zeta_2)^T,$$

если только α удовлетворяет условиям $0 \leq \alpha \leq 1$. По условию,

$$\delta_1 \leq \gamma_1 \leq \delta_2, \quad \delta_1 \leq \zeta_1 \leq \delta_2.$$

Каждое из чисел α и $1 - \alpha$ неотрицательно. Умножим первые соотношения на α , а вторые на $1 - \alpha$ и сложим соответствующие части:

$$\alpha\delta_1 + (1 - \alpha)\delta_1 \leq \alpha\gamma_1 + (1 - \alpha)\zeta_1 \leq \alpha\delta_2 + (1 - \alpha)\delta_2.$$

Поскольку

$$(\alpha + (1 - \alpha))\delta_1 = \delta_1, \quad (\alpha + (1 - \alpha))\delta_2 = \delta_2,$$

то

$$\delta_1 \leq \alpha \gamma_1 + (1 - \alpha) \zeta_1 \leq \delta_2.$$

Точно так же доказывается справедливость соотношений

$$\delta_3 \leq \alpha \gamma_2 + (1 - \alpha) \zeta_2 \leq \delta_4.$$

Согласно условию это означает, что точка M принадлежит π . $\square$

Примерами выпуклых множеств служат также точки, отрезки и плоскости в аффинном пространстве и само аффинное пространство.

11.2.2. Пересечение любой совокупности выпуклых множеств является выпуклым множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если пересечение является пустым множеством или содержит только одну точку, то оно является выпуклым согласно 11.2.1. Пусть точки X и Y принадлежат пересечению, тогда они принадлежат каждому из пересекающихся множеств. Поскольку каждое из этих множеств выпуклое, то оно содержит все точки отрезка $[XY]$, и потому отрезок $[XY]$ принадлежит пересечению. $\square$

11.2.3. Выпуклой оболочкой множества точек M аффинного пространства A называется пересечение всех выпуклых множеств точек из A , содержащих M . Обозначения: $\widehat{L}(M)$ или $\text{Conv } M$ (от англ. convex — выпуклый).

11.2.4. Выпуклая оболочка любого множества точек является выпуклым множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение непосредственно следует из 11.2.1 и 11.2.2. $\square$

11.2.5. а) $\widehat{L}(M) = M$ тогда и только тогда, когда M выпукло;

б) $M_1 \subseteq M_2$ тогда и только тогда, когда $\widehat{L}(M_1) \subseteq \widehat{L}(M_2)$;

в) $\widehat{L}(M_1 \cup M_2) = \widehat{L}(\widehat{L}(M_1) \cup \widehat{L}(M_2))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (а) и (б) следуют непосредственно из определений. Докажем (в). Так как

$$M_1 \cup M_2 \subseteq \widehat{L}(M_1) \cup M_2,$$

то согласно (б)

$$\widehat{L}(M_1 \cup M_2) \subseteq \widehat{L}(\widehat{L}(M_1) \cup M_2).$$

Поскольку $M_1 \cup M_2 \supseteq M_1$, то $\widehat{\mathcal{L}}(M_1 \cup M_2) \supseteq \widehat{\mathcal{L}}(M_1)$. Отсюда и из

$$\widehat{\mathcal{L}}(M_1 \cup M_2) \supseteq M_2$$

следует, что

$$\widehat{\mathcal{L}}(M_1 \cup M_2) \supseteq \widehat{\mathcal{L}}(M_1) \cup M_2.$$

Учитывая, что множество $\widehat{\mathcal{L}}(M_1 \cup M_2)$ является выпуклым, ввиду (6) получаем соотношение

$$\widehat{\mathcal{L}}(\widehat{\mathcal{L}}(M_1) \cup M_2) \subseteq \widehat{\mathcal{L}}(M_1 \cup M_2).$$

Это означает, что

$$\widehat{\mathcal{L}}(M_1 \cup M_2) = \widehat{\mathcal{L}}(\widehat{\mathcal{L}}(M_1) \cup M_2).$$

Однако тогда

$$\widehat{\mathcal{L}}(M_1 \cup M_2) = \widehat{\mathcal{L}}(M_2 \cup \widehat{\mathcal{L}}(M_1)) = \widehat{\mathcal{L}}(\widehat{\mathcal{L}}(M_1) \cup \widehat{\mathcal{L}}(M_2)). \quad \square$$

11.2.6. Выпуклой (или аффинной) комбинацией $\alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_k M_k$ принадлежащих пространству A точек $M_1, \dots, M_k$ называется сумма

$$\alpha_1 \overrightarrow{OM_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{OM_k} = \overrightarrow{OM}$$

векторов из пространства V_A , в которой $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, k}$.

По соглашению, принятому в начале этой главы, результатом взятия выпуклой комбинации точек $M_1, \dots, M_k$, о которой говорится в определении 11.2.6, является точка M . Мы будем рассматривать исключительно выпуклые комбинации конечного числа точек. Такие выпуклые комбинации называются конечными.

11.2.7. Выпуклая оболочка $\widehat{\mathcal{L}}(P)$ множества P точек из аффинного пространства A совпадает с совокупностью $\mathcal{K}(P)$ всевозможных конечных выпуклых комбинаций точек из P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что множество $\mathcal{K}(P)$ выпуклое. Пусть $Z_1, Z_2 \in \mathcal{K}(P)$, тогда в P найдутся такие точки $X_1, \dots, X_s, Y_1, \dots, Y_t$, что

$$Z_1 = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_s X_s, \quad Z_2 = \beta_1 Y_1 + \dots + \beta_t Y_t,$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad \beta_j \geq 0, \quad j = \overline{1, t},$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_s = 1, \quad \beta_1 + \dots + \beta_t = 1.$$

Если $F \in [Z_1 Z_2]$, то существуют такие $\varphi \geq 0$ и $\psi \geq 0$, что $\varphi + \psi = 1$ и

$$F = \varphi Z_1 + \psi Z_2 = \varphi \sum_{i=1}^s \alpha_i X_i + \psi \sum_{j=1}^t \beta_j Y_j = \sum_{i=1}^s \varphi \alpha_i X_i + \sum_{j=1}^t \psi \beta_j Y_j.$$

Так как здесь все коэффициенты неотрицательны и

$$\sum_{i=1}^s \varphi \alpha_i + \sum_{j=1}^t \psi \beta_j = \varphi \sum_{i=1}^s \alpha_i + \psi \sum_{j=1}^t \beta_j = \varphi + \psi = 1,$$

то $F \in \mathcal{K}(P)$. Это означает, что множество $\mathcal{K}(P)$ выпуклое. Каждое выпуклое множество, содержащее все точки из P , содержит и все точки из $\widehat{\mathcal{L}}(P)$, следовательно, $\mathcal{K}(P) \supseteq \widehat{\mathcal{L}}(P)$.

Теперь докажем, что каждое выпуклое множество W , содержащее все точки из P , содержит и все точки из $\mathcal{K}(P)$. Каждая точка $Z \in \mathcal{K}(P)$ может быть представлена в виде некоторой выпуклой комбинации точек из P :

$$Z = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_s X_s.$$

Индукцией по s докажем, что $Z \in W$. Если $s = 1$, то Z равно $X_1 \in P$ и принадлежит W , так как W содержит все точки из P . При $s = 2$ точка Z принадлежит отрезку $[X_1 X_2]$, а потому и W . Предположим, что при $s \leq k$ утверждение справедливо, и пусть

$$Z = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_{k+1} X_{k+1},$$

причем линейная комбинация справа выпуклая. Если $\alpha_{k+1} = 1$, то $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$, так как $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1} = 1$. Такой случай уже рассматривался. Пусть

$$0 \leq \alpha_{k+1} < 1, \quad \beta_j = \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_{k+1}},$$

$$j = \overline{1, k}, \quad Y = \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k.$$

Поскольку $\beta_j \geq 0$ для каждого j и

$$\sum_{j=1}^k \beta_j = \frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} \sum_{j=1}^k \alpha_j = \frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} (1 - \alpha_{k+1}) = 1,$$

то $Y \in W$. Так как множество W выпуклое, то точка $(1 - \alpha_{k+1})Y + \alpha_{k+1}X_{k+1}$ отрезка $[YX_{k+1}]$ принадлежит W . Однако

$$\begin{aligned}(1 - \alpha_{k+1})Y + \alpha_{k+1}X_{k+1} &= \\ &= (1 - \alpha_{k+1})\beta_1X_1 + \cdots + (1 - \alpha_{k+1})\beta_kX_k + \alpha_{k+1}X_{k+1} \\ &= \alpha_1X_1 + \cdots + \alpha_{k+1}X_{k+1} = Z,\end{aligned}$$

следовательно, $Z \in W$ и $\mathcal{K}(P) \subseteq \widehat{\mathcal{L}}(P)$. $\square$

11.2.8. Пусть M — выпуклое множество точек из пространства A , X — точка из A , $B = \widehat{\mathcal{L}}(M \cup \{X\})$. Множество B совпадает с множеством C всех точек, принадлежащих отрезкам $[XY]$, где $Y \in M$.

Доказательство. Пусть $X \in M$, тогда $B = M$. Поскольку множество M выпуклое, то для любой точки $Z \in M$ все точки отрезка $[XZ]$ принадлежат M , поэтому $C = M$ и $C = B$.

Предположим, что $X \notin M$. Поскольку множество B выпуклое, содержит точку X и все точки из M , то ему принадлежат и все точки отрезков, соединяющих X с точками из M . Это означает, что $B \supseteq C$. Чтобы обосновать справедливость обратного включения, докажем, что множество C выпуклое, т. е. что если какие-нибудь точки G и H принадлежат C , то C содержит все точки отрезка $[GH]$. Ввиду определения множества C в M найдутся такие точки F и E , что $G \in [XF]$ и $H \in [XE]$. Если $K \in [GH]$, то ввиду 11.1.1

$$\overrightarrow{XG} = \tau_1 \overrightarrow{XF}, \quad 0 \leq \tau_1 \leq 1, \quad \overrightarrow{XH} = \tau_2 \overrightarrow{XE}, \quad 0 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Из 11.1.7 следует, что

$$\overrightarrow{XK} = \varphi \overrightarrow{XG} + \psi \overrightarrow{XH}, \quad \varphi \geq 0, \quad \psi \geq 0, \quad \varphi + \psi = 1.$$

Пусть $\zeta = \varphi\tau_1 + \psi\tau_2$. Из неравенств, которым удовлетворяют φ , ψ , τ_1 и τ_2 следует, что

$$0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta \neq 0 \Rightarrow \frac{\varphi\tau_1}{\zeta} + \frac{\psi\tau_2}{\zeta} = \frac{\zeta}{\zeta} = 1,$$

и потому если

$$\overrightarrow{XL} = \frac{\varphi\tau_1}{\zeta} \overrightarrow{XF} + \frac{\psi\tau_2}{\zeta} \overrightarrow{XE},$$

то $L \in [FE]$ и $L \in M$. Однако при $\zeta \neq 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XK} &= \varphi \overrightarrow{XG} + \psi \overrightarrow{XH} = \varphi \tau_1 \overrightarrow{XF} + \psi \tau_2 \overrightarrow{XE} = \\ &= \zeta \left(\frac{\varphi \tau_1}{\zeta} \overrightarrow{XF} + \frac{\psi \tau_2}{\zeta} \overrightarrow{XE} \right) = \zeta \overrightarrow{XL},\end{aligned}$$

следовательно, $K \in [XL]$ и потому $K \in \mathbb{C}$. Если же $\zeta = 0$, то либо $\varphi = 0$, $\psi = 1$, $\tau_2 = 0$, либо $\varphi = 1$, $\psi = 0$, $\tau_1 = 0$. В первом случае $K \in [XE]$ и $K = H$, во втором — $K \in [XF]$ и $K = G$. $\square$

Из утверждения 11.2.8 следует такое описание процесса построения выпуклой оболочки конечной системы точек $M_1, \dots, M_k$. Соединяем точки M_1 и M_2 отрезком. Каждую точку полученного отрезка соединяем отрезком с точкой M_3 и т. д. Через конечное число шагов получим выпуклую оболочку $\hat{\mathcal{L}}(M_1, \dots, M_k)$.

11.2.9. Точка X называется *внутренней точкой* выпуклого множества W , если на любой прямой, проходящей через X , найдется отрезок, все точки которого принадлежат W и для которого точка X является внутренней.

11.2.10. Точка X *касается* выпуклого множества W , если существует такая проходящая через X прямая, что любой ее отрезок, для которого точка X является внутренней, содержит какую-нибудь точку из W .

Очевидно, каждая точка выпуклого множества касается этого множества.

11.2.11. Выпуклое множество W называется *замкнутым*, если все точки, касающиеся W , принадлежат W , и *открытым*, если все его точки внутренние. Пустое множество точек, являющееся выпуклым согласно 11.2.1, считается открытым.

11.2.12. Если все точки выпуклого множества W принадлежат некоторой плоскости π размерности m и не содержатся ни в какой плоскости меньшей размерности, то число m называется *размерностью* множества W .

11.2.13. Если некоторая максимальная аффинно независимая система точек из множества P содержит k точек, то размерность множества $\hat{\mathcal{L}}(P)$ равна $k - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S — максимальная аффинно независимая система точек из P . Система S порождает плоскость π размерности $k-1$. Так как эта плоскость является выпуклым множеством, то $\widehat{\mathcal{L}}(P) \subseteq \pi$ и $\dim \widehat{\mathcal{L}}(P) \leq k-1$. Никакая плоскость, размерность которой меньше $k-1$, не может содержать все точки системы S , следовательно, $\dim \widehat{\mathcal{L}}(P) = k-1$. $\square$

11.2.14. Множество точек P из аффинного пространства называется **ограниченным**, если модуль каждой координаты любой точки из P не превосходит некоторого фиксированного действительного числа.

11.2.15. Если множество точек P ограничено, то и множество точек $\widehat{\mathcal{L}}(P)$ ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Y \in \widehat{\mathcal{L}}(P)$, то в P найдутся такие точки $X_1, \dots, X_s$, что

$$Y = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_s X_s,$$

причем линейная комбинация справа выпуклая. Переходя к столбцам координат рассматриваемых точек, получаем равенство

$$\bar{Y} = \alpha_1 \bar{X}_1 + \dots + \alpha_s \bar{X}_s.$$

Полагая

$$\bar{Y} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T, \quad \bar{X}_i = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T, \quad i = \overline{1, s},$$

получаем систему равенств

$$\beta_i = \alpha_1 \gamma_{i1} + \dots + \alpha_s \gamma_{is}, \quad i = \overline{1, n},$$

в которой

$$\alpha_j \geq 0, \quad j = \overline{1, s}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_s = 1.$$

Пусть наибольшая и наименьшая из координат точек $X_1, \dots, X_s$ равны γ и δ , тогда

$$\alpha_1 \delta + \dots + \alpha_s \delta \leq \beta_i \leq \alpha_1 \gamma + \dots + \alpha_s \gamma \quad i = \overline{1, n}.$$

Так как

$$\gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) = \gamma, \quad \delta(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) = \delta,$$

то $\delta \leq \beta_i \leq \gamma$, $i = \overline{1, n}$. Если β и λ — наибольшая и наименьшая из координат точки Y , то и для них справедливы неравенства

$$\delta \leq \beta \leq \gamma, \quad \delta \leq \lambda \leq \gamma.$$

Модули координат всех точек из P не превосходят некоторого фиксированного числа μ , поэтому и $|\gamma|$, и $|\delta|$ не превосходят μ , следовательно, $|\beta|$ и $|\lambda|$ не превосходят μ . $\square$

11.2.16. Выпуклая оболочка $\hat{\mathcal{L}}(P)$ конечного множества P точек из аффинного пространства A является ограниченным множеством.

Доказательство. Конечное множество точек всегда является ограниченным, поэтому ограниченными являются множество P и вследствие утверждения 11.2.15 множество $\hat{\mathcal{L}}(P)$. $\square$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

12.1. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Каждое из выражений

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n \geq \beta,$$

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n \leq \beta,$$

в которых $\xi_1, \dots, \xi_n$ — переменные, принимающие значения из $\mathbb{R}$, и $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, называется **линейным неравенством**. В этой главе будут изучаться множества точек аффинного пространства, которые можно задать системой линейных неравенств вида

$$\begin{cases} \alpha_{11} \xi_1 + \dots + \alpha_{1n} \xi_n \geq \beta_1, \\ \dots \\ \alpha_{m1} \xi_1 + \dots + \alpha_{mn} \xi_n \geq \beta_m. \end{cases} \quad (12.1.1)$$

12.1.1. Система линейных неравенств называется **однородной**, если все свободные члены $\beta_1, \dots, \beta_m$ равны нулю, в ином случае система называется **неоднородной**. Совместной называется система неравенств, имеющая решения. Система неравенств, не имеющая решений, называется **несовместной**. Две системы неравенств называются **эквивалентными**, если множества их решений совпадают.

В системе (12.1.1) все неравенства имеют одинаковый смысл (везде использован знак $\geq$). Если нам нужно исследовать систему, в которой встречаются линейные неравенства противоположного смысла, то, умножая обе части неравенств со знаком $\leq$ на -1 , приходим к системе указанного вида. Впрочем, часто нами будут использоваться и системы с неравенствами противоположного смысла. Далее будут встречаться

также неравенства, в которых вместо символа $\geq$ используется знак $>$. Такие неравенства называются строгими.

Каждое линейное уравнение

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n = \beta$$

можно рассматривать как систему

$$\begin{cases} \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n \geq \beta, \\ \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n \leq \beta, \end{cases}$$

состоящую из двух неравенств. В связи с этим мы будем иногда рассматривать смешанные системы, состоящие из равенств и неравенств, а также считать системы линейных уравнений системами неравенств.

12.1.2. Пусть $\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, $\bar{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$. Запись $\bar{a} \geq \bar{b}$ означает, что $\alpha_i \geq \beta_i$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначая через A матрицу из коэффициентов в системе неравенств (12.1.1) и полагая

$$(\xi_1, \dots, \xi_n)^T = \bar{x}, \quad (\beta_1, \dots, \beta_m) = \bar{b},$$

получаем краткую запись этой системы:

$$A\bar{x} \geq \bar{b}.$$

Если $\bar{a}_i^T$ — i -я строка матрицы A , то i -е неравенство из системы (12.1.1) можно записывать в виде $\bar{a}_i^T \bar{x} \geq \beta_i$.

12.1.3. Линейная комбинация $\alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_k M_k$ точек пространства A называется **неотрицательной**, если $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, k}$. Через $\mathcal{L}^+(M_1, \dots, M_k) = \mathcal{L}^+(S)$ будем обозначать совокупность всех векторов, представимых в виде неотрицательных комбинаций векторов системы $S = \langle M_1, \dots, M_k \rangle$.

12.1.4. Однородная система неравенств всегда совместна. Любая неотрицательная линейная комбинация решений однородной системы линейных неравенств также является решением этой системы. В частности, если $\alpha \geq 0$ и $\bar{M}$ — решение однородной системы линейных неравенств, то и $\alpha \bar{M}$ является решением этой системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему неравенств $A\bar{x} \geq 0$. Поскольку $A0 = 0$, первое утверждение справедливо. Пусть столбцы $\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_k$ являются решениями указанной системы неравенств,

$$\bar{M} = \alpha_1 \bar{M}_1 + \dots + \alpha_k \bar{M}_k, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Так как $A\bar{M}_i \geq 0$ для каждого $i = \overline{1, k}$, то

$$A\bar{M} = \alpha_1 A\bar{M}_1 + \dots + \alpha_k A\bar{M}_k \geq 0. \quad \square$$

12.1.5. Система векторов S , содержащая более одного вектора, называется *позитивно независимой*, если ни один вектор из S нельзя представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов этой системы. Система $\langle a \rangle$, состоящая из одного вектора, называется *позитивно независимой*, если $a \neq 0$.

ПРИМЕР. 1. Каждая линейно независимая система векторов является и позитивно независимой.

2. Зададим на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Она делит плоскость на четыре части. Система, состоящая из векторов

$$\bar{a}_1 = (1, 0)^T, \quad \bar{a}_2 = (0, 1)^T, \quad \bar{a}_3 = (-1, -1)^T,$$

является позитивно независимой. Действительно, все точки множества $\mathcal{L}^+(-a_1, a_2)$ расположены во второй четверти плоскости, множество $\mathcal{L}^+(a_1, -a_2)$ образовано точками, принадлежащими четвертой четверти. Принадлежащие множеству $\mathcal{L}^+(-a_1, a_3)$ находятся в той части третьей четверти, в которой у каждой точки вторая координата не меньше первой, а точки множества $\mathcal{L}^+(-a_2, a_3)$ принадлежат другой части этой же четверти. Наконец, точки из $\mathcal{L}^+(a_1, -a_3)$ и $\mathcal{L}^+(a_2, -a_3)$ лежат в первой четверти по разные стороны биссектрисы координатного угла. Легко заметить, что в каждом случае вектор исходной системы, не участвующий в построении неотрицательных линейных комбинаций, полученному множеству не принадлежит. Согласно 12.1.5 это означает, что система $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ является позитивно независимой.

12.1.6. Система векторов $\langle a_1, \dots, a_s \rangle$ называется *зеркальной* к системе векторов $\langle b_1, \dots, b_s \rangle$, если найдется такое $i \in \{1, \dots, s\}$, что $b_i = a_i$ и $b_j = -a_j$ для всех $j \neq i$.

ПРИМЕР. Системы векторов

$$\langle -a_1, -a_2, a_3 \rangle, \quad \langle -a_1, a_2, -a_3 \rangle, \quad \langle a_1, -a_2, -a_3 \rangle$$

являются зеркальными к системе $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. $\square$

Пример к определению 12.1.5 показывает, что даже для системы из трех векторов проверка ее положительной независимости на основе этого определения является весьма трудоемкой. Следующее утверждение, являющееся аналогом леммы о расширении линейно независимой системы векторов, позволяет делать такую проверку гораздо быстрее.

12.1.7. Пусть $S = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ — положительно независимая система векторов. Расширенная система $S_1 = \langle a_1, \dots, a_s, a_{s+1} \rangle$ является положительно независимой тогда и только тогда, когда вектор a_{s+1} нельзя представить в виде неотрицательной линейной комбинации векторов никакой системы, зеркальной к S .

Доказательство проведем от противного. Если система S_1 положительно зависима, то найдется такое $i \in \{1, \dots, s+1\}$ и такие

$$\alpha_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, s+1\},$$

что

$$a_i = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \dots + \alpha_{s+1} a_{s+1}.$$

Очевидно, если $\alpha_{s+1} = 0$, то $i \leq s$ и система S оказывается положительно зависимой, что противоречит условию. Если же $\alpha_{s+1} \neq 0$, то вектор a_{s+1} представим в виде неотрицательной линейной комбинации векторов системы, зеркальной к S :

$$a_{s+1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_{s+1}} a_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_{s+1}} a_{i-1} + a_i - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_{s+1}} a_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_{s+1}} a_{s+1}. \quad \square$$

Несмотря на тривиальность, следующее утверждение часто оказывается полезным.

12.1.8. Зеркальные системы векторов являются эквивалентными и потому их линейные оболочки совпадают. Вектор, не принадлежащий линейной оболочке системы векторов S , нельзя представить в виде неотрицательной линейной комбинации векторов системы, зеркальной к S . Система, полученная расширением положительно независимой системы P вектором, не принадлежащим линейной оболочке $\mathcal{L}(P)$, всегда является положительно независимой. $\square$

12.1.9. Система S решений однородной системы линейных неравенств называется **фундаментальной**, если она является **позитивно независимой**, и каждое решение данной системы неравенств можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации решений из S .

Определение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений дано лишь после того, как было установлено, что множество всех решений такой системы является линейным пространством, поэтому существование такой системы не вызывает сомнений. Иначе обстоит дело с определением 12.1.9. Докажем сначала, что система, состоящая из одного неравенства, всегда обладает фундаментальной системой решений, и укажем способ построения этой системы решений.

12.1.10. Пусть $\langle \overline{M}_1, \dots, \overline{M}_{n-1} \rangle$ — фундаментальная система решений уравнения $\bar{a}^T \bar{x} = 0$ с n неизвестными, $\overline{M}_{n+1}$ — частное решение уравнения $\bar{a}^T \bar{x} = 1$, а $\overline{M}_n = -\overline{M}_1 - \dots - \overline{M}_{n-1}$. Совокупность $\langle \overline{M}_1, \dots, \overline{M}_{n+1} \rangle$ является фундаментальной системой решений неравенства $\bar{a}^T \bar{x} \geq 0$ с n неизвестными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем позитивную независимость системы векторов $\langle \overline{M}_1, \dots, \overline{M}_{n+1} \rangle$. По условию, система

$$S = \langle \overline{M}_1, \dots, \overline{M}_{n-1} \rangle$$

линейно независима, а потому и позитивно независима. Каждая система

$$\begin{aligned} S_i = \langle -\overline{M}_1, \dots, -\overline{M}_{i-1}, \overline{M}_i, -\overline{M}_{i+1}, \dots, -\overline{M}_{n-1} \rangle = \\ = \langle \overline{Q}_1, \dots, \overline{Q}_{n-1} \rangle, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

эквивалентна S и потому линейно независима. Согласно условию вектор $\overline{M}_n$ можно линейно выразить через векторы $\overline{Q}_1, \dots, \overline{Q}_{n-1}$:

$$\begin{aligned} \overline{M}_n = -\overline{M}_1 - \dots - \overline{M}_{n-1} = \\ = \overline{Q}_1 + \dots + \overline{Q}_{i-1} - \overline{Q}_i + \overline{Q}_{i+1} + \dots + \overline{Q}_{n-1}. \quad (12.1.2) \end{aligned}$$

Система S_i линейно независима, поэтому вектор $\overline{M}_n$ нельзя выразить через векторы из S_i другим способом (см. 2.2.12). Поскольку линейная комбинация (12.1.2) не является неотрицательной, а любая другая

линейная комбинация векторов из S_i не равна вектору $\overline{M}_n$, система $\langle \overline{M}_1, \dots, \overline{M}_n \rangle$ позитивно независима (см. 12.1.8).

Вектор $\overline{M}_{n+1}$ не является решением уравнения $\overline{a}^T \overline{x} = 0$ и потому не принадлежит линейной оболочке векторов $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_n$. Отсюда следует, что и система $\langle \overline{M}_1, \dots, \overline{M}_{n+1} \rangle$ является позитивно независимой (см. 12.1.8).

Согласно условию $\overline{a}^T \overline{M}_i = 0$, $i = \overline{1, n-1}$. Вектор $\overline{M}_n$ также является решением уравнения $\overline{a}^T \overline{x} = 0$, поскольку является линейной комбинацией решений $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_{n-1}$. Кроме того, $\overline{a}^T \overline{M}_{n+1} = 1 > 0$. Таким образом, каждый из векторов $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_{n+1}$ является решением неравенства $\overline{a}^T \overline{x} \geq 0$. Докажем, что любое решение этого неравенства можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации указанных векторов.

Предположим, что $\overline{Z}$ является произвольным решением неравенства $\overline{a}^T \overline{x} \geq 0$, тогда $\overline{a}^T \overline{Z} = \gamma \geq 0$. Обозначим через $\overline{Y}$ разность $\overline{Z} - \gamma \overline{M}_{n+1}$ и докажем, что $\overline{a}^T \overline{Y} = 0$. Действительно, умножая обе части равенства $\overline{Y} = \overline{Z} - \gamma \overline{M}_{n+1}$ слева на $\overline{a}^T$, получим соотношения

$$\overline{a}^T \overline{Y} = \overline{a}^T \overline{Z} - \gamma \overline{a}^T \overline{M}_{n+1} = \gamma - \gamma = 0.$$

Векторы $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_{n-1}$ образуют базис в пространстве всех решений уравнения $\overline{a}^T \overline{x} = 0$, поэтому найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ такие, что

$$\alpha_1 \overline{M}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \overline{M}_{n-1} = \overline{Y}.$$

Пусть $\beta = \max(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{n-1}|)$. Так как $\overline{M}_n = -\overline{M}_1 - \dots - \overline{M}_{n-1}$, то

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= \alpha_1 \overline{M}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \overline{M}_{n-1} - \beta \overline{M}_n + \beta \overline{M}_n = \\ &= \alpha_1 \overline{M}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \overline{M}_{n-1} - \beta(-\overline{M}_1 - \dots - \overline{M}_{n-1}) + \beta \overline{M}_n = \\ &= (\alpha_1 + \beta) \overline{M}_1 + \dots + (\alpha_{n-1} + \beta) \overline{M}_{n-1} + \beta \overline{M}_n. \end{aligned}$$

В последней линейной комбинации все коэффициенты неотрицательные. Обозначая их через $\delta_1, \dots, \delta_n$, получаем разложение для вектора $\overline{Z}$:

$$\overline{Z} = \overline{Y} + \gamma \overline{M}_{n+1} = \delta_1 \overline{M}_1 + \dots + \delta_n \overline{M}_n + \gamma \overline{M}_{n+1}.$$

В этом разложении все коэффициенты неотрицательные. □

ПРИМЕР. Найти фундаментальную систему решений неравенства

$$2\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 \geq 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

является общим решением уравнения

$$2\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = 1.$$

Если

$$\begin{aligned} \overline{M}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \overline{M}_3 &= -\overline{M}_1 - \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то $\langle \overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3, \overline{M}_4 \rangle$ — фундаментальная система решений исходного неравенства. $\square$

Предположим теперь, что нам известна фундаментальная система решений $S = \langle \overline{M}_1, \dots, \overline{M}_k \rangle$ однородной системы неравенств

$$A\bar{x} \geq 0. \quad (12.1.3)$$

Построим фундаментальную систему решений системы неравенств

$$\begin{cases} A\bar{x} \geq 0, \\ \bar{a}^T \bar{x} \geq 0, \end{cases} \quad (12.1.4)$$

полученной из исходной системы добавлением одного неравенства. Для этого представим систему S в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств S^+ , S^0 и S^- . Точку $\overline{M}_i \in S$, $i \in \{1, \dots, s\}$, включаем в S^+ , если $\bar{a}^T \overline{M}_i > 0$, в S^0 , если $\bar{a}^T \overline{M}_i = 0$, и в S^- , если $\bar{a}^T \overline{M}_i < 0$. Каждое решение системы (12.1.4) является решением системы (12.1.3). Все векторы из $S^+ \cup S^0$ являются решениями системы (12.1.4), а векторы из S^- ей не удовлетворяют. Если $S^- = \emptyset$, то каждый столбец из S является решением системы (12.1.4), и любая

неотрицательная линейная комбинация векторов из S является ее решением, поэтому при выполнении данного условия множества решений систем (12.1.3) и (12.1.4) совпадают.

Предположим, что $S^+ = \emptyset$. Докажем, что единственным решением системы (12.1.4) является вектор $\mathbf{0}$. Каждое решение

$$\bar{Y} = \alpha_1 \bar{M}_1 + \dots + \alpha_k \bar{M}_k, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k},$$

системы (12.1.3) удовлетворяет соотношениям

$$\bar{a}^T \bar{Y} = \alpha_1 \bar{a}^T \bar{M}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}^T \bar{M}_k \leq 0.$$

Если $M_i \in S^0$, то $\bar{a}^T \bar{M}_i = 0$, и слагаемое $\alpha_i \bar{a}^T \bar{M}_i$ можно из правой части удалить. Проведем такую операцию для каждого вектора из S^0 , получим равенство

$$\bar{a}^T \bar{Y} = \alpha_{i_1} \bar{a}^T \bar{M}_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s} \bar{a}^T \bar{M}_{i_s}, \quad \alpha_{i_j} \geq 0, \quad j = \overline{1, s},$$

в котором все векторы M_{i_j} принадлежат множеству S^- . Все коэффициенты в правой части неотрицательны, а числа $\bar{a}^T \bar{M}_{i_j}$ меньше нуля. Если какой-то из коэффициентов справа отличен от нуля, то $\bar{a}^T \bar{Y} < 0$ и $\bar{Y}$ не является решением системы неравенств (12.1.4). Это означает, что вектор $\mathbf{0}$ является единственным решением системы (12.1.4).

Вследствие сказанного будем далее предполагать, что $S^+ \neq \emptyset$ и $S^- \neq \emptyset$. Пусть

$$\bar{M}_i \in S^+, \quad \bar{M}_j \in S^-, \quad \bar{a}^T \bar{M}_i = \gamma, \quad \bar{a}^T \bar{M}_j = -\delta.$$

Ввиду выбора векторов $\bar{M}_i$ и $\bar{M}_j$ числа γ и $-\delta$ больше нуля. Положим

$$\bar{M}_{ij} = \gamma \bar{M}_j + \delta \bar{M}_i, \quad S^* = \{\bar{M}_{ij} \mid \bar{M}_i \in S^+, \bar{M}_j \in S^-\}.$$

Вектор $\bar{M}_{ij}$ является решением уравнения $\bar{a}^T \bar{x} = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{a}^T \bar{M}_{ij} &= \bar{a}^T (\gamma \bar{M}_j + \delta \bar{M}_i) = \gamma \bar{a}^T \bar{M}_j + \delta \bar{a}^T \bar{M}_i = \\ &= \bar{a}^T \bar{M}_i \bar{a}^T \bar{M}_j - \bar{a}^T \bar{M}_j \bar{a}^T \bar{M}_i = 0. \end{aligned}$$

12.1.11. Если $\bar{M}_i \in S^+$, $\bar{M}_j \in S^-$ и $\bar{Z} \in \mathcal{L}^+(\bar{M}_i, \bar{M}_j)$, то либо $\bar{Z} \in \mathcal{L}^+(\bar{M}_i, \bar{M}_{ij})$, либо $\bar{Z} \in \mathcal{L}^+(\bar{M}_j, \bar{M}_{ij})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{Z} = \alpha \bar{M}_i + \beta \bar{M}_j$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. По определению $\bar{M}_{ij} = \delta \bar{M}_i + \gamma \bar{M}_j$, причем $\gamma > 0$ и $\delta > 0$. Отсюда

$$\bar{M}_j = \frac{1}{\gamma} (\bar{M}_{ij} - \delta \bar{M}_i), \quad \bar{M}_i = \frac{1}{\delta} (\bar{M}_{ij} - \gamma \bar{M}_j).$$

Получаем два разложения для $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = \alpha \bar{M}_i + \beta \frac{1}{\gamma} (\bar{M}_{ij} - \delta \bar{M}_i) = \frac{1}{\gamma} ((\alpha\gamma - \beta\delta) \bar{M}_i + \beta \bar{M}_{ij}), \quad (12.1.5)$$

$$\bar{Z} = \alpha \frac{1}{\delta} (\bar{M}_{ij} - \gamma \bar{M}_j) + \beta \bar{M}_j = \frac{1}{\delta} ((\beta\delta - \alpha\gamma) \bar{M}_j + \alpha \bar{M}_{ij}). \quad (12.1.6)$$

Числа α и β неотрицательны согласно условию, γ и δ выбраны положительными. Из двух разностей

$$\alpha\gamma - \beta\delta, \quad \beta\delta - \alpha\gamma$$

одна является неотрицательной. Видим, что в одном из разложений (12.1.5), (12.1.6) все коэффициенты неотрицательные. $\square$

В следующем утверждении говорится о том, что каждое решение системы неравенств (12.1.4) можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации нескольких фиксированных решений той же системы.

12.1.12. Любое решение системы неравенств (12.1.4) является неотрицательной линейной комбинацией конечного числа точек, принадлежащих множеству $S^+ \cup S^0 \cup S^*$.

Доказательство. Каждое решение $\bar{Z}$ системы (12.1.4) является решением системы (12.1.3) и потому может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из множества $S^+ \cup S^0 \cup S^-$:

$$\bar{Z} = \alpha_1 \bar{M}_1 + \dots + \alpha_k \bar{M}_k. \quad (12.1.7)$$

Если в этом разложении коэффициенты при векторах из S^- равны нулю, то $\bar{Z} \in \mathcal{L}^+(S^+ \cup S^0)$, что и требуется доказать. Предположим поэтому, что в (12.1.7) $\alpha_j \neq 0$ для некоторого j и $\bar{M}_j \in S^-$. В этом случае в S^+ обязательно найдется такой вектор $\bar{M}_i$, что $\alpha_i \neq 0$. Действительно, если все коэффициенты в (12.1.7) при векторах из S^+ равны нулю, то

$$\bar{a}^T \bar{Z} = \alpha_1 \bar{a}^T \bar{M}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}^T \bar{M}_k < 0,$$

так как все слагаемые в правой части неположительны и $\alpha_j \bar{a}^T \bar{M}_j < 0$. Это означает, что $\bar{Z}$ не является решением системы (12.1.4), что противоречит выбору вектора $\bar{Z}$.

Итак, если для некоторого индекса j в (12.1.7) $\alpha_j \neq 0$ и $\bar{M}_j \in S^-$, то обязательно существует такое $i \neq j$, для которого $\alpha_i \neq 0$ и $\bar{M}_i \in S^+$. Согласно 12.1.11 если $\bar{Y} = \alpha_i \bar{M}_i + \alpha_j \bar{M}_j$ и $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_j \geq 0$, то либо $\bar{Y} \in$

$\in \mathcal{L}^+(\overline{M}_i, \overline{M}_{ij})$, либо $\overline{Y} \in \mathcal{L}^+(\overline{M}_j, \overline{M}_{ij})$. В первом случае существуют такие $\alpha_1^{(1)} \geq 0$ и $\alpha_2^{(1)} \geq 0$, что $\overline{Y} = \alpha_1^{(1)} \overline{M}_i + \alpha_2^{(1)} \overline{M}_{ij}$. Во втором случае $\overline{Y} = \alpha_1^{(2)} \overline{M}_j + \alpha_2^{(2)} \overline{M}_{ij}$ для подходящих $\alpha_1^{(2)} \geq 0$ и $\alpha_2^{(2)} \geq 0$.

Заменяя в (12.1.7) сумму $\overline{Y} = \alpha_i \overline{M}_i + \alpha_j \overline{M}_j$ одним из указанных выражений, получим новое равенство, не содержащее какого-то из элементов множества $S^+ \cup S^-$. Для удобства рассуждения будем считать, что если $\overline{M}_p$ встречается в новом равенстве, то коэффициент при нем равен β_p . Если в этом равенстве нет слагаемых, представляющих собой произведение ненулевого коэффициента на элемент из S^- , то утверждение доказано. В противном случае для некоторого индекса m в правой части нового равенства $\beta_m \neq 0$ и $\overline{M}_m \in S^-$. В силу проведенных выше рассуждений в этом же равенстве имеется слагаемое $\beta_s \overline{M}_s$, в котором $\beta_s \neq 0$ и $\overline{M}_s \in S^+$. Как и ранее, заменяя сумму $\beta_s \overline{M}_s + \beta_m \overline{M}_m$ либо на неотрицательную линейную комбинацию векторов $\overline{M}_s$, $\overline{M}_{sm}$, либо на неотрицательную линейную комбинацию векторов $\overline{M}_m$, $\overline{M}_{sm}$, получим третье равенство и т. д.

Число точек из множества $S^+ \cup S^-$, встречающихся в каждом новом равенстве, уменьшается. Поскольку это множество конечное, то через какое-то число шагов процесс оборвется. Проведенные ранее рассуждения показывают, что процесс оборвется тогда, когда очередное равенство не будет содержать точек из множества S^- . $\square$

12.1.13. Для любой однородной системы неравенств можно найти конечную фундаментальную систему решений.

Доказательство. В 12.1.10 и 12.1.12 было доказано, что существует такая конечная система U решений однородной системы неравенств, что каждое решение системы неравенств является неотрицательной линейной комбинацией векторов из U . Если система U позитивно независимая, то она является фундаментальной. В противном случае один из векторов системы U представим в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов этой системы. Удалив его, получим систему векторов U_1 . Очевидно, каждое решение системы неравенств можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из U_1 . Если какой-то вектор из U_1 представим в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов, удалим его и получим систему U_2 . Продолжая этот процесс, придем к фундаментальной системе решений. $\square$

12.2. НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим теперь неоднородную систему неравенств

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n \geq \beta_1, \\ \dots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n \geq \beta_m. \end{cases} \quad (12.2.1)$$

Свойства множества ее решений тесно связаны со свойствами множества решений однородной системы неравенств

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n - \beta_1\xi_{n+1} \geq 0, \\ \dots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n - \beta_m\xi_{n+1} \geq 0, \\ \xi_{n+1} \geq 0, \end{cases} \quad (12.2.2)$$

иногда называемой **сопутствующей**.

12.2.1. Столбец $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ является решением системы (12.2.1) тогда и только тогда, когда столбец $(\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1)^T$ является решением однородной системы неравенств (12.2.2). Система (12.2.1) несовместна тогда и только тогда, когда нуль является последней компонентой каждого решения системы (12.2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Из него следует, что если среди решений системы (12.2.2) нет столбцов, оканчивающихся на единицу, то система (12.2.1) несовместна. Докажем, что если последняя компонента какого-нибудь решения системы (12.2.2) не равна нулю, существует решение системы (12.2.2), оканчивающееся на единицу. Предположим, что $\overline{M} = (\delta_1, \dots, \delta_{n+1})^T$ принадлежит множеству решений системы (12.2.2). Так как (12.2.2) содержит неравенство $\xi_{n+1} \geq 0$, то $\delta_{n+1} \geq 0$. Если $\delta_{n+1} \neq 0$, то столбец

$$\frac{1}{\delta_{n+1}}\overline{M} = \left(\frac{\delta_1}{\delta_{n+1}}, \dots, \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}}, 1 \right)^T,$$

оканчивающийся на единицу, является согласно 12.1.4 решением системы (12.2.2).

Таким образом, если известны все решения системы (12.2.2), то, выбрав среди них все решения, оканчивающиеся на единицу, найдем

все решения системы (12.2.1). В этом смысле решение неоднородной системы неравенств (12.2.1) с n неизвестными сводится к решению однородной системы вида (12.2.2) с $n + 1$ неизвестными. Следует, однако, иметь в виду, что если $(\delta_1, \dots, \delta_{n+1})^T$ является решением системы (12.2.2), то столбец $(\delta_1, \dots, \delta_n)^T$ может оказаться решением системы (12.2.1) даже при $\delta_{n+1} \neq 1$. $\square$

Чтобы иметь возможность записывать переход от решений системы (12.2.2) к решениям системы (12.2.1), введем специальную функцию.

12.2.2. Через $\text{Pr}(\bar{a})$ обозначим оператор, проектирующий пространство R^{n+1} на R^n : для каждого $\bar{a} \in R^{n+1}$ если

$$\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})^T, \quad \text{Pr}(\bar{a}) = \bar{b},$$

$$\text{то } \bar{b} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

Чтобы записать общее решение системы (12.2.1), возьмем какую-нибудь фундаментальную систему $S = \langle \bar{M}_1, \dots, \bar{M}_k \rangle$ решений системы (12.2.2). Если последняя компонента каждого столбца из S равна нулю, то нулю равна также последняя компонента каждого вектора из множества $\mathcal{L}(S)$, содержащего все решения системы (12.2.2), и потому система (12.2.1) не имеет решений (см. 12.2.1). Будем поэтому предполагать, что последняя компонента некоторых векторов системы S нулю не равна. Для удобства изложения будем считать, что отличны от нуля последние компоненты $\beta_1, \dots, \beta_s$ векторов $\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_s$, а остальные принадлежащие системе S столбцы оканчиваются на нуль. Общее решение однородной системы (12.2.2) имеет вид

$$\alpha_1 \bar{M}_1 + \dots + \alpha_k \bar{M}_k, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Напомним, что каждое оканчивающееся на единицу решение системы (12.2.2) после удаления последней компоненты превращается в решение системы (12.2.1).

12.2.3. Пусть в фундаментальной системе решений

$$\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_k$$

однородной системы неравенств (12.2.2) последние компоненты столбцов

$$\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_s, \quad 1 \leq s \leq k,$$

отличны от нуля и равны $\beta_1, \dots, \beta_s$, а последние компоненты столбцов $\overline{M}_{s+1}, \dots, \overline{M}_k$ равны нулю. Общее решение $\overline{Z}$ неоднородной системы неравенств (12.2.1) можно задать равенством

$$\overline{Z} = \text{Pr}(\alpha_1 \overline{M}_1 + \dots + \alpha_k \overline{M}_k), \quad (12.2.3)$$

в котором

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_s \beta_s = 1.$$

Доказательство. Разобьем расположенную в правой части равенства (12.2.3) линейную комбинацию на два слагаемых:

$$(\alpha_1 \overline{M}_1 + \dots + \alpha_s \overline{M}_s) + (\alpha_{s+1} \overline{M}_{s+1} + \dots + \alpha_k \overline{M}_k) = \overline{N}_1 + \overline{N}_2. \quad (12.2.4)$$

Все содержащиеся в левой части равенства (12.2.4) коэффициенты α_i неотрицательные, поэтому как $\overline{N}_1$, так и $\overline{N}_2$ являются решениями однородной системы (12.2.2). Поскольку $\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_s \beta_s = 1$, то последней компонентой столбца $\overline{N}_1$ является единица. Согласно условию векторы $\overline{M}_{s+1}, \dots, \overline{M}_k$ оканчиваются на нуль, следовательно, нуль является последней компонентой столбца $\overline{N}_2$. Ввиду этого вектор $\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2$ оканчивается на единицу, и потому $\text{Pr } \overline{N}$ является решением системы (12.2.1).

Пусть $\overline{R} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ — решение системы (12.2.1), тогда $\overline{R}_1 = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1)^T$ является решением системы (12.2.2). Вектор $\overline{R}_1$ можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации решений $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_k$:

$$\overline{R}_1 = \delta_1 \overline{M}_1 + \dots + \delta_k \overline{M}_k, \quad \delta_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Поскольку столбец $\overline{R}_1$ оканчивается на единицу, а последние компоненты векторов $\overline{M}_{s+1}, \dots, \overline{M}_k$ равны нулю, должно выполняться условие

$$\delta_1 \beta_1 + \dots + \delta_s \beta_s = 1. \quad \square$$

При изучении множества решений неоднородной системы линейных уравнений важную роль играла присоединенная однородная система линейных уравнений. Введем аналогичное понятие для систем неравенств.

12.2.4. Система линейных неравенств

$$\begin{cases} \alpha_{11} \xi_1 + \dots + \alpha_{1n} \xi_n \geq 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{m1} \xi_1 + \dots + \alpha_{mn} \xi_n \geq 0, \end{cases} \quad (12.2.5)$$

полученная из системы (12.2.1) заменой свободных членов β_i нулями, называется *системой, присоединенной к системе* (12.2.1).

12.2.5. Если $\bar{a} \geq \bar{b}$ и $\bar{c} \geq \bar{d}$, то $\bar{a} + \bar{c} \geq \bar{b} + \bar{d}$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, & \bar{b} &= (\beta_1, \dots, \beta_n)^T, \\ \bar{c} &= (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T, & \bar{d} &= (\delta_1, \dots, \delta_n)^T.\end{aligned}$$

Утверждение следует из хорошо известного свойства числовых неравенств: для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ если $\alpha_i \geq \beta_i$ и $\gamma_i \geq \delta_i$, то

$$\alpha_i + \gamma_i \geq \beta_i + \delta_i. \quad \square$$

12.2.6. Сумма любого решения системы (12.2.1) с любым решением присоединенной системы (12.2.5) является решением системы (12.2.1).

Доказательство. Пусть $A\bar{x} \geq \bar{b}$ и $A\bar{x} \geq \mathbf{0}$ — краткие записи рассматриваемых систем, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ — их решения, тогда

$$A(\bar{c} + \bar{d}) = A\bar{c} + A\bar{d} \geq \bar{b},$$

так как $A\bar{c} \geq \bar{b}$ и $A\bar{d} \geq \mathbf{0}$. $\square$

12.2.7. Если неоднородная система (12.2.1) совместна, то существует такая система точек $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_k$ и такое $s \in \{1, \dots, k\}$, что точки $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_s$ являются решениями системы (12.2.1), точки $\bar{P}_{s+1}, \dots, \bar{P}_k$ являются решениями однородной системы (12.2.5) и любой вектор $\bar{Z}$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$, где

$$\bar{Z}_1 \in \hat{\mathcal{L}}(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_s), \quad \bar{Z}_2 \in \mathcal{L}^+(\bar{P}_{s+1}, \dots, \bar{P}_k).$$

Доказательство. Пусть выполнены все условия утверждения 12.2.3. Так как система (12.2.2) содержит неравенство $\xi_{n+1} \geq 0$, то отличные от нуля числа $\beta_1, \dots, \beta_s$ могут быть только положительными. Из утверждения 12.1.4 и определения 12.1.9 следует, что векторы

$$\frac{1}{\beta_1} \bar{M}_1, \dots, \frac{1}{\beta_s} \bar{M}_s, \bar{M}_{s+1}, \dots, \bar{M}_k$$

также образуют фундаментальную систему решений системы неравенств (12.2.2). Эта система решений отличается от исходной тем, что

последняя компонента каждого принадлежащего ей вектора равна либо единице, либо нулю.

Имея в виду сказанное, в формулировке утверждения 12.2.3 можно потребовать, чтобы выполнялись равенства

$$\beta_i = 1, \quad i = \overline{1, s},$$

т. е. чтобы столбцы $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_s$ оканчивались на единицу. Поскольку все условия теоремы выполнены, общее решение неоднородной системы (12.2.1) дается формулой (12.2.3) с ограничениями

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_s \beta_s = 1,$$

из которых последнее превращается в

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_s = 1.$$

Вследствие этого в соотношениях (12.2.4)

$$\overline{N}_1 \in \widehat{\mathcal{L}}(\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_s).$$

Так как все коэффициенты в (12.2.4) неотрицательные, то

$$\overline{N}_2 \in \mathcal{L}^+(\overline{M}_{s+1}, \dots, \overline{M}_k).$$

Последние компоненты столбцов

$$\overline{M}_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad \overline{Z} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2$$

равны единице, следовательно, векторы

$$\text{Pr } \overline{M}_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad \text{Pr } \overline{Z} = \text{Pr } \overline{N}_1 + \text{Pr } \overline{N}_2$$

являются решениями системы (12.2.1). Нетрудно также заметить, что если $(\gamma_1, \dots, \gamma_n, 0)^T$ — решение системы (12.2.2), то $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ является решением системы (12.2.5). Наконец,

$$\begin{aligned} \text{Pr } \overline{Z} &= (\alpha_1 \text{Pr } \overline{M}_1 + \dots + \alpha_s \text{Pr } \overline{M}_s) + \\ &+ (\alpha_{s+1} \text{Pr } \overline{M}_{s+1} + \dots + \alpha_k \text{Pr } \overline{M}_k) = (\alpha_1 \overline{P}_1 + \dots + \alpha_s \overline{P}_s) + \\ &+ (\alpha_{s+1} \overline{P}_{s+1} + \dots + \alpha_k \overline{P}_k). \end{aligned}$$

□

МНОГОГРАННЫЕ МНОЖЕСТВА

13.1. ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННЫЕ МНОЖЕСТВА

Каждую гиперплоскость в аффинном пространстве A можно задать уравнением вида

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n = \beta. \quad (13.1.1)$$

Пространство A делится этой гиперплоскостью на три части, не имеющие общих точек. Первая часть состоит из тех точек, координаты которых удовлетворяют равенству (13.1.1). Во вторую часть попадают точки, удовлетворяющие неравенству

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n < \beta.$$

Координаты точек третьей части удовлетворяют неравенству

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n > \beta.$$

13.1.1. Два множества точек, одно из которых задается неравенством

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n \leq \beta, \quad (13.1.2)$$

а другое — неравенством

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n \geq \beta, \quad (13.1.3)$$

называются *полупространствами, определяемыми гиперплоскостью с уравнением (13.1.1). Каждое из этих двух полупространств содержит все точки гиперплоскости (13.1.1), называемой граничной.*

Полагая

$$\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, \quad \bar{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T, \quad (13.1.4)$$

соотношения (13.1.1)–(13.1.3) можно записать соответственно в виде

$$\bar{a}^T \bar{x} = \beta, \quad \bar{a}^T \bar{x} \leq \beta, \quad \bar{a}^T \bar{x} \geq \beta.$$

13.1.2. Если точки M и N принадлежат разным полупространствам, определяемым гиперплоскостью (13.1.1), то отрезок $[MN]$ имеет с этой гиперплоскостью общую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точки M и N принадлежат полупространствам π_1 и π_2 соответственно, полупространство π_1 задано неравенством $\bar{a}^T \bar{x} \leq \beta$, а π_2 — неравенством $\bar{a}^T \bar{x} \geq \beta$, тогда

$$\bar{a}^T \bar{M} \leq \beta, \quad \bar{a}^T \bar{N} \geq \beta.$$

Если выполнено одно из равенств

$$\bar{a}^T \bar{M} = \beta, \quad \bar{a}^T \bar{N} = \beta,$$

то утверждение справедливо. Остается рассмотреть случай, когда

$$\bar{a}^T \bar{M} < \beta, \quad \bar{a}^T \bar{N} > \beta.$$

При этих условиях $\bar{a}^T \bar{N} > \bar{a}^T \bar{M}$. Если $\bar{a}^T \bar{N} > 0$ и $\bar{a}^T \bar{M} > 0$, то, очевидно,

$$\bar{a}^T \bar{N} - \bar{a}^T \bar{M} > 0. \quad (13.1.5)$$

При $\bar{a}^T \bar{N} > 0$ и $\bar{a}^T \bar{M} < 0$ неравенство (13.1.5) также выполняется, так как $-\bar{a}^T \bar{M} > 0$. Наконец, если $\bar{a}^T \bar{N} < 0$ и $\bar{a}^T \bar{M} < 0$, то

$$|\bar{a}^T \bar{N}| < |\bar{a}^T \bar{M}|,$$

и потому (13.1.5) снова справедливо. Из сказанного следует, что действительное число

$$\gamma = \frac{\beta - \bar{a}^T \bar{M}}{\bar{a}^T \bar{N} - \bar{a}^T \bar{M}}$$

существует и удовлетворяет соотношениям $0 < \gamma < 1$. Точка $L = M + \gamma(N - M)$ принадлежит отрезку $[MN]$ (см. 11.1.7). Докажем, что она принадлежит также гиперплоскости (13.1.1). Введем обозначение

$$\delta = \frac{1}{\bar{a}^T \bar{N} - \bar{a}^T \bar{M}}$$

и вычислим $\bar{a}^T \bar{L}$:

$$\begin{aligned} \bar{a}^T \bar{L} &= \bar{a}^T (\bar{M} + \gamma(\bar{N} - \bar{M})) = \bar{a}^T \left(\frac{\delta}{\delta} \bar{M} + \delta(\beta - \bar{a}^T \bar{M})(\bar{N} - \bar{M}) \right) = \\ &= \delta \bar{a}^T ((\bar{a}^T \bar{N})\bar{M} - (\bar{a}^T \bar{M})\bar{M} + \beta\bar{N} - \beta\bar{M} - (\bar{a}^T \bar{M})\bar{N} + (\bar{a}^T \bar{M})\bar{M}) = \\ &= \delta((\bar{a}^T \bar{N})(\bar{a}^T \bar{M}) - (\bar{a}^T \bar{M})(\bar{a}^T \bar{N}) + \beta\bar{a}^T \bar{N} - \beta\bar{a}^T \bar{M}) = \\ &= \frac{\beta}{\bar{a}^T \bar{N} - \bar{a}^T \bar{M}} (\bar{a}^T \bar{N} - \bar{a}^T \bar{M}) = \beta. \quad \square \end{aligned}$$

13.1.3. Полупространство π , определяемое нестрогим неравенством вида $\bar{a}^T \bar{x} \geq \beta$, является выпуклым замкнутым множеством.

Доказательство. Если M и N — две точки из π и $Z \in [MN]$, то $Z = \varphi M + \psi N$ для подходящих неотрицательных φ и ψ , удовлетворяющих равенству $\varphi + \psi = 1$. Кроме того, согласно условию

$$\bar{a}^T \bar{M} \geq \beta, \quad \bar{a}^T \bar{N} \geq \beta.$$

Так как

$$\bar{a}^T \bar{Z} = \bar{a}^T (\varphi \bar{M} + \psi \bar{N}) = \varphi \bar{a}^T \bar{M} + \psi \bar{a}^T \bar{N} \geq (\varphi + \psi) \beta = \beta,$$

то $Z \in \pi$. Тем самым доказано, что множество π выпуклое.

Докажем замкнутость множества π . Обозначим через π_0 граничную гиперплоскость с уравнением $\bar{a}^T \bar{x} = \beta$ и через π_1 полупространство, определяемое неравенством $\bar{a}^T \bar{x} \leq \beta$. Согласно определениям 11.2.11 и 11.2.12 необходимо показать, что каждая не принадлежащая π точка M не касается этого множества. Проведем через точку M прямую π_2 . Точка M принадлежит полупространству π_1 . Если на прямой π_2 найдется точка, принадлежащая другому полупространству, то π_2 имеет общую точку с гиперплоскостью π_0 (см. 13.1.2). Отсюда следует, что если π_2 не пересекается с π_0 , то никакой отрезок этой прямой не содержит точек из π .

Предположим, что прямая π_2 и полупространство π имеют общие точки. Согласно 13.1.2 π_2 пересекает гиперплоскость π_0 в некоторой точке N . Все отличные от N точки отрезка $[MN]$ не принадлежат π . Действительно, пусть

$$K \in [MN], \quad K \neq N, \quad K \in \pi,$$

тогда отрезок $[MK]$ имеет общую точку с π_0 , не совпадающую с N . В этом случае прямая π_2 должна лежать в гиперплоскости π_0 , что противоречит условиям $M \in \pi_2$, $M \notin \pi$.

Пусть Q — внутренняя точка отрезка $[MN]$, P — такая точка прямой π_2 , что $M \in [PN]$, $M \neq P$. Рассуждения, аналогичные только что проведенным, показывают, что все отличные от N точки отрезка $[PN]$ не принадлежат π . Точка M является внутренней точкой отрезка $[PQ]$, не содержащего точек из π , следовательно, не может касаться этого множества. $\square$

13.1.4. Точки M и N находятся по разные стороны от гиперплоскости π , если обе они не принадлежат π , а отрезок $[MN]$ имеет с π

общую точку. Если две точки не находятся по разные стороны от гиперплоскости, то они лежат по одну сторону от нее.

Нетрудно убедиться в том, что отношение «быть по одну сторону» является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Легко также проверить, что каждое полупространство образовано множеством всех точек, находящихся по одну сторону от гиперплоскости.

13.1.5. Точки $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ находятся по одну сторону от гиперплоскости, заданной уравнением $\bar{a}^T \bar{x} = \beta$, тогда и только тогда, когда числа $\bar{a}^T \bar{P}_1 - \beta$ и $\bar{a}^T \bar{P}_2 - \beta$ имеют одинаковые знаки. $\square$

ПРИМЕР. Прямая задана на плоскости уравнением

$$2\xi_1 + 3\xi_2 - 6 = 0.$$

Определить, как расположены относительно этой прямой точки

$$\bar{P}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим левую часть уравнения прямой через $\Psi(\bar{x})$. Так как

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{P}_1) &= 22 > 0, & \Psi(\bar{P}_2) &= -1 < 0, \\ \Psi(\bar{P}_3) &= 0, & \Psi(\bar{P}_4) &= -8 < 0, \end{aligned}$$

точки $\bar{P}_2$ и $\bar{P}_4$ лежат по одну сторону от прямой, $\bar{P}_1$ находится по другую сторону, а $\bar{P}_3$ расположена на прямой. $\square$

13.1.6. Пересечение конечной совокупности полупространств аффинного пространства называется **выпуклым многогранным множеством**. Ограниченное выпуклое многогранное множество называется **выпуклым многогранником**.

Поскольку каждое полупространство можно задать некоторым неравенством, то каждое выпуклое многогранное множество является множеством решений подходящей системы линейных неравенств.

ПРИМЕРЫ. Каждое полупространство является выпуклым многогранным множеством, так как его можно задать системой, содержащей

одно неравенство. Выпуклым многогранным множеством является любая гиперплоскость, поскольку ее уравнение $\bar{a}^T \bar{x} = \beta$ можно заменить системой

$$\begin{cases} \bar{a}^T \bar{x} \leq \beta, \\ \bar{a}^T \bar{x} \geq \beta, \end{cases}$$

состоящей из двух неравенств. Любую плоскость в аффинном пространстве, а также любую точку можно задать системой линейных уравнений. Так как каждое уравнение можно заменить двумя неравенствами, указанные объекты также являются выпуклыми многогранными множествами.

Рассмотрим теперь обычную плоскость, на которой задана декартова прямоугольная система координат. Уравнения

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_1 = 0 \quad \xi_2 = -\xi_1 + 2$$

задают ось абсцисс, ось ординат и прямую, пересекающую их в точках $(2, 0)^T$ и $(0, 2)^T$. Множество решений системы, состоящей из неравенств

$$\xi_2 \geq 0, \quad \xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 \leq -\xi_1 + 2,$$

совпадает с множеством точек, лежащих внутри и на сторонах треугольника с вершинами в точках $(0, 0)^T$, $(2, 0)^T$ и $(0, 2)^T$. Очевидно, это множество точек является выпуклым многогранником. $\square$

13.1.7. Точки M и N находятся в аффинном пространстве по одну сторону от точки Q , если либо M лежит между точками Q и N , либо N лежит между точками Q и M . Точки M и N находятся по разные стороны от точки Q , если Q является внутренней точкой отрезка $[MN]$.

Напомним, что если одна точка находится между двумя другими, то все три точки принадлежат одной прямой (см. 11.1.2). Вследствие этого все точки, лежащие по ту же сторону от точки Q , что и точка N , лежат вместе с точками Q и N на одной прямой. Если точки M и N находятся по разные стороны от точки Q , то также существует прямая, которой принадлежат все три точки.

13.1.8. Множество точек аффинного пространства A , находящихся от точки M по ту же сторону, что и точка $N \neq M$, называется *лучом* с началом в точке M , проведенным через точку N .

13.1.9. Каждый луч является выпуклым многогранным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим луч π с началом в точке M . Пусть $N \in \pi$, $N \neq M$. Как уже говорилось в комментарии к определению 13.1.7, все точки луча принадлежат некоторой прямой. Эта прямая задается некоторой системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \bar{a}_1^T \bar{x} = \beta_1, \\ \dots \\ \bar{a}_{n-1}^T \bar{x} = \beta_{n-1}, \end{cases}$$

содержащей $n - 1$ независимых уравнений с n неизвестными, если размерность пространства равна n . Очевидно, найдется столбец $\bar{a}_n$, который нельзя линейно выразить через столбцы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}$. Квадратная система

$$\begin{cases} \bar{a}_1^T \bar{x} = \beta_1, \\ \dots \\ \bar{a}_{n-1}^T \bar{x} = \beta_{n-1}, \\ \bar{a}_n^T \bar{x} = \beta_n, \end{cases}$$

в которой $\beta_n = \bar{a}_n^T \bar{M}$, имеет единственное решение $\bar{M}$. Гиперплоскость $\bar{a}_n^T \bar{x} = \beta_n$ определяет два полупространства. Предположим, что точку N содержит полупространство, задаваемое неравенством $\bar{a}_n^T \bar{x} \geq \beta_n$, тогда система

$$\begin{cases} \bar{a}_1^T \bar{x} = \beta_1, \\ \dots \\ \bar{a}_{n-1}^T \bar{x} = \beta_{n-1}, \\ \bar{a}_n^T \bar{x} \geq \beta_n \end{cases}$$

задает луч π и потому π является выпуклым многогранным множеством. $\square$

13.1.10. Принадлежащее системе $A\bar{x} \geq \bar{b}$ неравенство $\bar{a}^T \bar{x} \geq \beta$ называется **жестким**, если при замене его уравнением $\bar{a}^T \bar{x} = \beta$ множество решений системы не изменится.

ПРИМЕР. Рассмотрим систему, составленную из неравенств

$$\xi_1 - \xi_2 \geq 0, \quad \xi_1 - \xi_2 \leq 0, \quad \xi_1 \geq 1, \quad \xi_1 \leq 2.$$

Первые два неравенства совместно задают прямую $\xi_1 = \xi_2$, а два других выделяют на ней отрезок с концами в точках $(1, 1)^T$ и $(2, 2)^T$. Каждое

из двух первых неравенств является жестким, так как после замены его уравнением $\xi_1 - \xi_2 = 0$ множество решений системы не изменится. Остальные неравенства нежесткие, поскольку в случае замены любого из них соответствующим равенством решение новой системы состоит из одной точки, совпадающей с одним из концов указанного отрезка. $\square$

13.1.11. Если выпуклое многогранное множество π задано системой $A\bar{x} \geq \bar{b}$, состоящей из нежестких неравенств, то каждое решение $\bar{Z}$ системы строгих неравенств $A\bar{x} > \bar{b}$ является внутренней точкой множества π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что на любой прямой π_1 , проходящей через точку Z , найдется отрезок, все точки которого принадлежат π и для которого точка Z является внутренней (см. 11.2.9), т. е. не совпадает ни с одним из концов этого отрезка (см. 11.1.9). Зафиксируем на π_1 точку $Y \neq Z$. Точка X принадлежит π_1 тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{ZX} = \tau \overrightarrow{ZY}$$

для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Будем предполагать, что $X \in [ZY]$, т. е. что

$$X = \tau Y + (1 - \tau)Z, \quad 0 < \tau \leq 1.$$

(Значение $\tau = 0$ отбрасывается, так как ищется точка, отличная от Z .) Нам нужно подобрать такое τ , чтобы столбец $\bar{X}$ удовлетворял строгому неравенству $A\bar{X} > \bar{b}$.

Пусть

$$\bar{Z} = (\delta_1, \dots, \delta_n)^T, \quad \bar{Y} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T,$$

тогда

$$\bar{X} = (\tau\zeta_1 + (1 - \tau)\delta_1, \dots, \tau\zeta_n + (1 - \tau)\delta_n)^T.$$

Если $\bar{a}_1^T, \dots, \bar{a}_m^T$ — все строки матрицы A и $\bar{a}_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})^T$, то

$$\begin{aligned} \bar{a}_i^T \bar{X} &= \tau\alpha_{1i}\zeta_1 + (1 - \tau)\alpha_{1i}\delta_1 + \dots + \tau\alpha_{ni}\zeta_n + (1 - \tau)\alpha_{ni}\delta_n = \\ &= \tau(\alpha_{1i}\zeta_1 + \dots + \alpha_{ni}\zeta_n) + (\alpha_{1i}\delta_1 + \dots + \alpha_{ni}\delta_n) - \\ &\quad - \tau(\alpha_{1i}\delta_1 + \dots + \alpha_{ni}\delta_n) = \\ &= (\alpha_{1i}\delta_1 + \dots + \alpha_{ni}\delta_n) - \tau(\alpha_{1i}(\delta_1 - \zeta_1) + \dots + \alpha_{ni}(\delta_n - \zeta_n)). \end{aligned} \quad (13.1.6)$$

Положим

$$A\bar{Z} = \bar{c}, \quad \bar{c} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T, \quad \bar{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T,$$

тогда

$$\alpha_{1i}\delta_1 + \dots + \alpha_{ni}\delta_n = \gamma_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (13.1.7)$$

По условию, $\gamma_i > \beta_i$ для $i = \overline{1, n}$. Мы ищем τ , при котором $\bar{a}_i^T \bar{X} > \beta_i$. Вследствие (13.1.7) и (13.1.6) это неравенство превращается в соотношения

$$\begin{aligned} \bar{a}_i^T \bar{X} &= \gamma_i - \tau(\alpha_{1i}(\delta_1 - \zeta_1) + \dots + \alpha_{ni}(\delta_n - \zeta_n)) > \beta_i, \\ \tau(\alpha_{1i}(\delta_1 - \zeta_1) + \dots + \alpha_{ni}(\delta_n - \zeta_n)) &< \gamma_i - \beta_i. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть последнего неравенства положительна, в случае отрицательной левой части оно будет выполнено независимо от величины τ . Чтобы восстановить зависимость от τ , заменим его неравенством

$$|\tau(\alpha_{1i}(\delta_1 - \zeta_1) + \dots + \alpha_{ni}(\delta_n - \zeta_n))| < \gamma_i - \beta_i.$$

Полагая $\mu_i = \max(|\delta_1 - \zeta_1|, \dots, |\delta_n - \zeta_n|)$ и учитывая, что

$$0 < \tau \leq 1, \quad \alpha_{ji} \geq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

оценим величину левой части:

$$\begin{aligned} |\tau(\alpha_{1i}(\delta_1 - \zeta_1) + \dots + \alpha_{ni}(\delta_n - \zeta_n))| &\leq \\ &\leq \tau(\alpha_{1i}|\delta_1 - \zeta_1| + \dots + \alpha_{ni}|\delta_n - \zeta_n|) \leq \tau\mu_i(\alpha_{1i} + \dots + \alpha_{ni}). \end{aligned}$$

Последнее число должно быть строго меньше разности $\gamma_i - \beta_i$. Это будет выполняться при

$$\tau < \frac{\gamma_i - \beta_i}{\mu_i(\alpha_{1i} + \dots + \alpha_{ni})}. \quad (13.1.8)$$

Знаменатель дроби в правой части не может оказаться нулем. Действительно, $\mu_i \neq 0$ при $X \neq Z$. Сумма $\alpha_{1i} + \dots + \alpha_{ni}$ также не равна нулю, так как $\alpha_{ji} \geq 0$ и хотя бы одно из чисел α_{ji} отлично от нуля, поскольку рассматриваются только нежесткие неравенства.

Мы оценили величину множителя τ исходя из одного неравенства. Обозначим через ψ_i правую часть неравенства (13.1.8) и через ψ наименьшее среди чисел $\psi_1, \dots, \psi_m$. Очевидно, если $\tau < \psi$, то $X \in \pi$. Осталось найти еще одну такую точку $X_1 \in \pi$, чтобы отрезок $[XX_1]$ проходил через Z . Пусть

$$\begin{aligned} \bar{X} &= (\xi_1, \dots, \xi_n)^T, \quad \bar{Y} = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T, \\ \lambda_j &= \xi_j - \delta_j, \quad \omega_j = \eta_j - \delta_j, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

тогда

$$\overline{X} = (\delta_1 + \lambda_1, \dots, \delta_n + \lambda_n)^T, \quad \overline{Y} = (\delta_1 + \omega_1, \dots, \delta_n + \omega_n)^T.$$

Точка Z принадлежит отрезкам $[Y Y_1]$ и $[X X_1]$, где

$$\overline{X}_1 = (\delta_1 - \lambda_1, \dots, \delta_n - \lambda_n)^T, \quad \overline{Y}_1 = (\delta_1 - \omega_1, \dots, \delta_n - \omega_n)^T,$$

так как

$$\frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Y_1 = Z = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X_1.$$

Более того, точка X_1 лежит между Y_1 и Z , поскольку из $\omega_j \leq \lambda_j$, $j = \overline{1, n}$, следует, что

$$X_1 = \tau Y_1 + (1 - \tau)Z, \quad 0 < \tau \leq 1.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что точка X_1 также принадлежит π . $\square$

13.1.12. Пусть выпуклое многогранное множество π задано системой S линейных неравенств, S_1 — система неравенств, полученная из S заменой некоторых нежестких неравенств на равенства. Определяемое системой S_1 выпуклое многогранное множество π_1 называется *гранью* множества π . Одномерные грани называются *ребрами*, нульмерные — *вершинами* (угловыми точками).

Согласно этому определению каждую грань можно задать системой линейных неравенств, следовательно, каждая грань является выпуклым многогранным множеством.

13.1.13. Если размерность грани выпуклого многогранного множества π равна нулю, то грань является точкой, если размерность грани равна единице, то эта грань является либо прямой, либо лучом, либо отрезком. Одномерная грань выпуклого многогранника всегда является отрезком.

Доказательство. Множество P имеет размерность m , если все его точки принадлежат какой-нибудь m -мерной плоскости и не содержатся ни в какой плоскости меньшей размерности (11.2.12). Плоскость размерности нуль является точкой, поэтому точкой является каждая вершина множества π .

Каждая одномерная плоскость является прямой, следовательно, все точки одномерной грани π_1 множества π принадлежат некоторой прямой π_2 . Пусть точка M принадлежит как π_1 , так и π_2 . Если N — другая

точка из пересечения π_1 с π_2 , то все точки, расположенные между M и N , принадлежат $\pi_1 \cap \pi_2$, так как и π_1 , и π_2 являются выпуклыми множествами. Теперь рассмотрим несколько возможностей.

а) Для любой точки K , расположенной на прямой π_2 по ту же сторону от точки M , что и точка N , есть точки, принадлежащие π_1 и находящиеся по разные стороны от K . Так как грань π_1 является выпуклым множеством, ей принадлежат все точки отрезка, соединяющего эти точки, поэтому $K \in \pi_1$. Это означает, что прямой π_2 принадлежат все точки, лежащие на π_2 по ту же сторону, что и N .

б) На прямой π_2 по ту сторону, где находится точка N , есть такая точка $L \in \pi_1$, что все принадлежащие π_2 точки грани π_1 расположены по одну сторону от L .

в) Для любой точки K_1 , расположенной на прямой π_2 таким образом, что K_1 и N находятся по разные стороны от точки M , есть точки, принадлежащие π_1 и находящиеся по разные стороны от K_1 . В этом случае прямой π_2 принадлежат все точки, лежащие на π_2 на стороне, не содержащей N .

г) На той части прямой π_2 , которая не содержит точку N , есть такая точка $L_1 \in \pi_1$, что все принадлежащие π_2 точки грани π_1 расположены по одну сторону от L_1 .

Очевидно, других вариантов нет. При одновременном выполнении условий (а) и (в) грань совпадает с прямой π_2 . Если выполнены условия (б) и (г), то все точки грани находятся между точками L и L_1 и грань является отрезком $[LL_1]$. Если совместно выполняются либо условия (б) и (в), либо условия (а) и (г), то грань является лучом.

Выпуклый многогранник является ограниченным множеством, и все его грани также являются ограниченными множествами, следовательно, они не могут быть лучами и прямыми, а могут быть только отрезками. $\square$

Пусть выпуклое многогранное множество π задано системой неравенств

$$\begin{cases} \bar{a}_1^T \bar{x} \geq \beta_1, \\ \dots \\ \bar{a}_m^T \bar{x} \geq \beta_m. \end{cases} \quad (13.1.9)$$

Превратим систему неравенств (13.1.9) в систему линейных уравнений, заменив все знаки неравенств равенствами:

$$\begin{cases} \bar{a}_1^T \bar{x} = \beta_1, \\ \dots \\ \bar{a}_m^T \bar{x} = \beta_m. \end{cases} \quad (13.1.10)$$

13.1.14. Если точка $\bar{P}$ является вершиной выпуклого многогранного множества π , задаваемого системой неравенств (13.1.9), то система уравнений (13.1.10) содержит подсистему, для которой $\bar{P}$ служит единственным решением.

Доказательство. Ввиду 13.1.12 точка $\bar{P}$ является вершиной множества π , если она является единственным решением системы линейных неравенств S , полученной из (13.1.9) заменой некоторых нежестких неравенств равенствами. Система S также может содержать жесткие неравенства. Заменим все такие неравенства равенствами и запишем полученную систему таким образом, чтобы сначала были выписаны все уравнения, а затем все неравенства:

$$\begin{cases} \bar{a}_1^T \bar{x} = \beta_1, \\ \dots \\ \bar{a}_k^T \bar{x} = \beta_k, \\ \bar{a}_{k+1}^T \bar{x} \geq \beta_{k+1}, \\ \dots \\ \bar{a}_m^T \bar{x} \geq \beta_m. \end{cases} \quad (13.1.11)$$

Если некоторое уравнение в системе (13.1.11) является линейной комбинацией остальных уравнений, то его можно удалить без изменения множества решений. Ввиду этого будем считать, что ранг матрицы системы

$$\begin{cases} \bar{a}_1^T \bar{x} = \beta_1, \\ \dots \\ \bar{a}_k^T \bar{x} = \beta_k \end{cases} \quad (13.1.12)$$

равен k .

Пусть $\bar{a}_i^T \bar{P} = \gamma_i$, $i = \overline{k+1, m}$. Составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \bar{a}_1^T \bar{x} = \beta_1, \\ \dots \\ \bar{a}_k^T \bar{x} = \beta_k, \\ \bar{a}_{k+1}^T \bar{x} = \gamma_{k+1}, \\ \dots \\ \bar{a}_m^T \bar{x} = \gamma_m. \end{cases} \quad (13.1.13)$$

Очевидно, точка $\bar{P}$ является ее решением.

Обозначим через r ранг матрицы системы (13.1.13). Если r меньше числа неизвестных n , то множество решений системы (13.1.13) содержит более одной точки. Так как P является единственным решением системы (13.1.11) и каждое решение системы (13.1.13) является решением системы (13.1.11), получаем противоречие.

Ранг матрицы системы (13.1.13) не может превышать n , поэтому будем считать, что $r = n$. Если ранг k матрицы системы (13.1.12) также равен n , то $\bar{P}$ является ее единственным решением, и утверждение 13.1.14 справедливо.

Предположим, что $k < n$. Сравнивая системы (13.1.11) и (13.1.13), заметим, что $\gamma_i \neq \beta_i$ при $i \in \{k+1, \dots, m\}$. Действительно, предположим, что для некоторого $j \in \{k+1, \dots, m\}$ выполняется равенство $\gamma_j = \beta_j$. Так как множество решений системы (13.1.11) состоит из одной точки, то неравенство $\bar{a}_j^T \bar{x} \geq \beta_j$ оказывается в этой системе жестким вопреки нашему построению.

Сказанное означает, что точка $\bar{P}$ является решением системы строгих неравенств

$$\begin{cases} \bar{a}_{k+1}^T \bar{x} > \beta_{k+1}, \\ \dots \\ \bar{a}_m^T \bar{x} > \beta_m. \end{cases}$$

Из 13.1.11 следует, что $\bar{P}$ является внутренней точкой множества решений системы

$$\begin{cases} \bar{a}_{k+1}^T \bar{x} \geq \beta_{k+1}, \\ \dots \\ \bar{a}_m^T \bar{x} \geq \beta_m. \end{cases} \quad (13.1.14)$$

Предположим, что $k < n - 1$. Поскольку

$$\text{rank}[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k] = k, \quad \text{rank}[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k \bar{a}_{k+1} \dots \bar{a}_m] = n,$$

то среди $\bar{a}_{k_1}, \dots, \bar{a}_m$ найдутся такие векторы $\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_{n-k}+1}$, что

$$\text{rank}[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k \bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_{n-k}+1}] = n - 1.$$

Составим систему

$$\begin{cases} \bar{a}_1^T \bar{x} = \beta_1, \\ \dots \\ \bar{a}_k^T \bar{x} = \beta_k, \\ \bar{a}_{i_1}^T \bar{x} = \gamma_{i_1}, \\ \dots \\ \bar{a}_{i_{n-k}+1}^T \bar{x} = \gamma_{i_{n-k}+1}. \end{cases} \quad (13.1.15)$$

Эта система является подсистемой системы (13.1.13), следовательно, прямая, которую задает система (13.1.15), проходит через точку $\bar{P}$. Выше было выяснено, что $\bar{P}$ является внутренней точкой множества решений системы (13.1.14). Отсюда следует, что на прямой, задаваемой системой (13.1.15), имеется еще одна точка $\bar{P}_1$, не совпадающая с $\bar{P}$ и являющаяся решением системы (13.1.14). Поскольку точка $\bar{P}_1$ удовлетворяет системам (13.1.14) и (13.1.15), она является решением системы (13.1.11). Это противоречит предположению о том, что $\bar{P}$ является единственным решением системы (13.1.11). Таким образом, k не может быть меньше $n - 1$.

Если же $k=n-1$, то вместо системы (13.1.14) возьмем систему (13.1.12). Рассуждения, аналогичные только что проведенным, показывают, что и в этом случае система (13.1.11) имеет более одного решения. Полученные противоречия доказывают, что $k = n$ и $\bar{P}$ является единственным решением подсистемы (13.1.12) системы (13.1.10). $\square$

13.1.15. Выпуклое многогранное множество может иметь только конечное число вершин.

Доказательство. Пусть многогранное множество задано системой неравенств (13.1.9). Согласно 13.1.14 каждая его вершина является решением какой-то подсистемы системы линейных уравнений (13.1.10). Существует только конечное число таких подсистем, значит, и вершин может быть только конечное число. $\square$

Отметим, что не у всякого выпуклого многогранного множества есть вершины. Например, полупространство, задаваемое неравенством

$$\alpha_1 \bar{\xi}_1 + \dots + \alpha_n \bar{\xi}_n \geq \beta,$$

при $n > 1$ вершин не имеет.

Утверждение 13.1.14 лежит в основе следующего алгоритма поиска вершин выпуклого многогранного множества, правда, весьма трудоемкого при большом числе неравенств.

13.1.16. Пусть выпуклое многогранное множество π задано системой неравенств (13.1.9), содержащей n неизвестных. Чтобы найти все вершины множества π , следует:

- 1) выписать систему линейных уравнений (13.1.10);
- 2) составить всевозможные подсистемы системы (13.1.10), содержащие по n уравнений;
- 3) отбросить несовместные подсистемы и подсистемы, имеющие более одного решения;
- 4) найти единственное решение каждой из оставшихся подсистем. Среди полученных решений вершинами являются те точки, которые являются решениями системы (13.1.9). $\square$

ПРИМЕР. Найти все вершины выпуклого многогранного множества π , заданного системой неравенств

$$\begin{cases} -\xi_1 + \xi_2 \geq 1, \\ \xi_1 - \xi_2 \geq -4, \\ \xi_1 + 2\xi_2 \geq 17, \\ -\xi_2 \geq -10. \end{cases} \quad (13.1.16)$$

Составляем шесть систем уравнений:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -\xi_1 + \xi_2 = 1, \\ \xi_1 - \xi_2 = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} -\xi_1 + \xi_2 = 1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 = 17, \end{cases} \quad \begin{cases} -\xi_1 + \xi_2 = 1, \\ -\xi_2 = -10, \end{cases} \\ &\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = -4, \\ \xi_1 + 2\xi_2 = 17, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = -4, \\ -\xi_2 = -10, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 17, \\ -\xi_2 = -10. \end{cases} \end{aligned}$$

Первая система несовместна, а остальные дают пять решений:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Первые четыре точки являются решениями системы (13.1.16), а потому и вершинами множества π . Пятая точка в (13.1.16) не подходит. $\square$

13.1.17. Принадлежащая выпуклому множеству π точка $\overline{P}$ называется *крайней точкой* этого множества, если $\overline{P}$ не является внутренней точкой ни для какого отрезка, все точки которого находятся в π .

Пример. Рассмотрим на плоскости множество π всех точек, лежащих на некоторой окружности ненулевого радиуса и внутри нее. Очевидно, крайними точками множества π являются те и только те точки, которые принадлежат окружности. $\square$

13.1.18. Если точка M грани π_1 выпуклого многогранного множества π является выпуклой линейной комбинацией $\alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_k M_k$ точек из π и $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, то точки M_i , $i = \overline{1, k}$, также принадлежат грани π_1 .

Доказательство. Чтобы задать грань π_1 , надо в системе неравенств, определяющей множество π , заменить определенные неравенства на равенства. Пусть неравенство

$$\bar{a}_s^T \bar{x} \geq \beta_s \quad (13.1.17)$$

является одним из них. Подставим в (13.1.17) точки $M_1, \dots, M_k$:

$$\bar{a}_s^T \overline{M}_1 \geq \beta_s, \dots, \bar{a}_s^T \overline{M}_k \geq \beta_s. \quad (13.1.18)$$

Докажем, что в (13.1.18) все неравенства выполняются только как равенства. Действительно, если $\bar{a}_s^T \overline{M}_i = \beta_s$ для $i = \overline{1, k}$, то

$$\bar{a}_s^T \overline{M} = \alpha_1 \bar{a}_s^T \overline{M}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_s^T \overline{M}_k = (\alpha_1 + \dots + \alpha_k) \beta_s = \beta_s,$$

поскольку $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$. Предположим, что $\bar{a}_s^T \overline{M}_i > \beta_s$ для некоторого i , $1 \leq i \leq k$, тогда число $\gamma_i = \bar{a}_s^T \overline{M}_i - \beta_s$ положительно. Так как согласно условию $\alpha_i > 0$, то и

$$\alpha_i \gamma_i = \alpha_i \bar{a}_s^T \overline{M}_i - \alpha_i \beta_s > 0.$$

Учитывая, что $\alpha_i \bar{a}_s^T \overline{M}_i = \alpha_i \gamma_i + \alpha_i \beta_s$, получаем соотношения

$$\begin{aligned} \bar{a}_s^T \overline{M} &= \alpha_1 \bar{a}_s^T \overline{M}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_s^T \overline{M}_k = \\ &= (\alpha_1 + \dots + \alpha_k) \beta_s + \alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_k \gamma_k = \beta_s + \alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_k \gamma_k > \beta_s. \end{aligned}$$

Однако это невозможно: M принадлежит грани π_1 , для всех точек которой (13.1.17) выполняется только как равенство, и, следовательно, должно быть $\bar{a}_s^T \bar{M} = \beta_s$.

Видим, что если какое-либо неравенство из системы, определяющей множество π , для точек грани π_1 выполняется только как равенство, то оно выполняется только как равенство и для точек $M_1, \dots, M_k$. Это означает, что эти точки принадлежат грани π_1 . $\square$

13.1.19. Точка $\bar{P}$ является вершиной выпуклого многогранного множества π тогда и только тогда, когда $\bar{P}$ является крайней точкой множества π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Пусть M — вершина множества π . Если $M_1, M_2 \in \pi$ и $M \in [M_1 M_2]$, то

$$M = \varphi M_1 + \psi M_2, \quad \varphi + \psi = 1, \quad \varphi \geq 0, \quad \psi \geq 0.$$

Предположим, что M является внутренней точкой отрезка $[M_1 M_2]$, тогда $\varphi > 0$ и $\psi > 0$. Точка M является выпуклой линейной комбинацией точек M_1 и M_2 , поэтому согласно 13.1.18 точки M_1 и M_2 принадлежат тем граням, которым принадлежит M . Наименьшей среди этих граней является грань, образованная точкой M . Таким образом, $M_1 = M_2 = M$ и M не является внутренней точкой отрезка $[M_1 M_2]$.

($\Leftarrow$) Доказательство этого утверждения отличается от доказательства утверждения 13.1.14 лишь деталями. Пусть множество π задано системой неравенств (13.1.9) с n неизвестными и $\bar{P}$ является его крайней точкой. Подставим $\bar{P}$ в первое неравенство системы (13.1.9). Если окажется, что $\bar{a}_1^T \bar{P} = \beta_1$, заменим в системе указанное неравенство уравнением $\bar{a}_1^T \bar{x} = \beta_1$. После этого проверим второе неравенство и т. д. В результате система (13.1.9) примет вид (13.1.11), причем $\bar{P}$ является решением системы (13.1.11). Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что ранг матрицы системы (13.1.12) линейных уравнений, содержащихся в (13.1.11), равен k . Этого всегда можно добиться, удаляя из системы те уравнения, которые являются линейными комбинациями остальных уравнений.

Предположим, что $k < n$. Обозначим через γ_i число $\bar{a}_i^T \bar{P}$, $i = \overline{k+1, m}$, и составим систему линейных уравнений (13.1.13). Из способа построения системы (13.1.11) следует, что $\beta_j \neq \gamma_j$, $j = \overline{k+1, m}$. Пусть ранг матрицы системы (13.1.13) равен r . Если $r < n$, то эта система задает некоторую плоскость π_1 , все точки которой удовлетворяют системе (13.1.9) и потому принадлежат π . Очевидно, найдется отрезок

зок, целиком лежащий в плоскости π_1 , для которого точка $\bar{P}$ является внутренней.

Полученное противоречие доказывает, что $r = n$. Если $k < n - 1$, то составим систему (13.1.15) с матрицей ранга $n - 1$ и обозначим ее через S . В случае $k = n - 1$ через S обозначим систему (13.1.12). Прямая π_2 , которую задает система (13.1.15), проходит через точку $\bar{P}$. В процессе доказательства утверждения 13.1.14 было показано, что $\bar{P}$ является внутренней точкой множества решений системы (13.1.14). Вследствие этого на прямой π_2 имеется отрезок, для которого точка $\bar{P}$ также является внутренней. Все точки этого отрезка принадлежат π .

Таким образом, предположения $k < n - 1$ и $k = n - 1$ являются неверными. Остается случай $k = n$. Точка $\bar{P}$ является единственным решением систем (13.1.12), (13.1.11) и, следовательно, вершиной множества π (см. 13.1.14). $\square$

13.1.20. Выпуклая оболочка $\hat{\mathcal{L}}(S)$ произвольного множества S точек из аффинного пространства A является замкнутым множеством.

Доказательство. Если $\hat{\mathcal{L}}(S)$ совпадает с A , то утверждение справедливо. Пусть $\hat{\mathcal{L}}(S) \neq A$. Согласно определениям 11.2.11 и 11.2.12 необходимо показать, что каждая не принадлежащая $\hat{\mathcal{L}}(S)$ точка M не касается этого множества. Обозначим через π прямую, проходящую через точку M . Если пересечение π с $\hat{\mathcal{L}}(S)$ пусто, то никакой отрезок этой прямой не содержит точек из $\hat{\mathcal{L}}(S)$.

Предположим, что множества π и $\hat{\mathcal{L}}(S)$ имеют общие точки. Каждое из этих множеств замкнутое выпуклое, значит, таким же является их пересечение π_1 (см. 11.2.2). Воспроизводя соответствующую часть доказательства утверждения 13.1.13, нетрудно показать, что π_1 может быть лишь прямой, лучом, отрезком или точкой. Первый случай невозможен, так как π содержит точку M , не принадлежащую $\hat{\mathcal{L}}(S)$. Предположим, что π_1 является отрезком с концами в точках P и Q . Из трех точек P , Q и M одна находится между двумя другими (см. 11.1.4). Если бы M лежала между P и Q , то она принадлежала бы пересечению π_1 , а потому и $\hat{\mathcal{L}}(S)$. Это противоречит условию. Не ограничивая общности, будем считать, что P находится между M и Q . Каждая внутренняя точка L отрезка $[MP]$ принадлежит отрезку $[MQ]$ (см. 11.1.5, 11.1.6). Очевидно, P лежит между L и Q , следовательно, $L \notin [PQ]$ и потому $L \notin \hat{\mathcal{L}}(S)$.

Если π_1 — луч, то через P обозначим его начало, через Q любую отличную от P точку луча, а через L какую-нибудь внутреннюю точку

отрезка $[MP]$. Очевидно, точки Q и L лежат по разные стороны от P , вследствие чего $L \notin \hat{L}(S)$.

Если же π_1 содержит только одну точку, обозначим эту точку через P , а через L внутреннюю точку отрезка $[MP]$. Точка L не может принадлежать $\hat{L}(S)$, так как не совпадает с P .

Итак, во всех случаях на прямой π имеются точки M и L , не принадлежащие $\hat{L}(S)$, и точка $P \in \hat{L}(S)$, причем L и P лежат от M по одну сторону и L находится между M и P . Зафиксируем на π еще одну точку R таким образом, чтобы R и P находились по разные стороны от M . Если $T \in [RL]$ и $T \in \pi_1$, то вследствие выпуклости множества π_1 ему должны принадлежать все точки отрезка $[TP]$, в том числе и точка L . Поскольку это неверно, все точки отрезка $[RL]$ не принадлежат множеству $\hat{L}(S)$. Точка M является внутренней точкой этого отрезка и потому не касается множества $\hat{L}(S)$. $\square$

13.1.21. Выпуклая оболочка аффинно независимой системы точек $\langle M_1, \dots, M_k \rangle$ пространства A называется k -мерным симплексом с вершинами $M_1, \dots, M_k$.

Согласно 11.2.7 выпуклая оболочка множества точек P совпадает с совокупностью $K(P)$ всевозможных конечных выпуклых комбинаций точек из P . Полагая $P = \{M_1, \dots, M_k\}$, видим, что определяемый в 13.1.20 симплекс σ состоит из таких точек Z , для которых

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OZ} &= \alpha_1 \overrightarrow{OM_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{OM_k}, \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k &= 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}, \end{aligned} \quad (13.1.19)$$

13.1.22. Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ в (13.1.19) называются *барицентрическими координатами* принадлежащей симплексу σ точки Z . Точка симплекса, в которой все барицентрические координаты равны между собой, называется *центром* симплекса.

Из определения 13.1.21 и утверждения 11.2.8 непосредственно следует, что нульмерный симплекс является точкой, одномерный — отрезком, двумерный — треугольником, трехмерный — треугольной пирамидой.

13.2. ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННЫЕ КОНУСЫ

13.2.1. Пересечение конечной совокупности полупространств аффинного пространства, граничные плоскости которых имеют общую точку, называется *выпуклым многогранным конусом*.

Очевидно, каждый выпуклый многогранный конус является выпуклым многогранным множеством. Грани и ребра этого множества называются **гранями** и **ребрами** конуса. В дальнейшем слово «конус» будет означать выпуклый многогранный конус, поскольку никаких других конусов рассматриваться не будет.

ПРИМЕРЫ. По причинам, изложенным в предыдущих примерах, каждое полупространство, каждая плоскость и каждая точка являются конусами. Указанный в примере к 13.1.6 треугольник конусом не является, так как ограничивающие его прямые не пересекаются в одной точке. Примером конуса на плоскости может служить множество точек, принадлежащих первой четверти декартовой прямоугольной системы координат. Оно задается двумя неравенствами

$$\xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 \geq 0. \quad \square$$

13.2.2. При подходящем выборе системы координат конус всегда можно задать однородной системой линейных неравенств. Множество решений любой однородной системы линейных неравенств является конусом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый конус совпадает с пересечением нескольких полупространств, граничные гиперплоскости которых имеют общую точку. Если перенести начало системы координат в эту точку, то каждая из этих гиперплоскостей может быть задана линейным однородным уравнением, а конус — однородной системой линейных неравенств. Второе утверждение очевидно. $\square$

Согласно 12.1.9 гранями конуса являются множества решений систем неравенств, получаемых заменой в системе, задающей этот конус, некоторых нежестких неравенств равенствами. Легко заметить, что каждая из этих граней также является конусом.

13.2.3. Пусть конус π задан системой S линейных неравенств. Заменим в системе S все неравенства равенствами и полученную систему линейных уравнений обозначим через S_1 . Система S_1 всегда совместна, так как содержит общую точку всех граничных гиперплоскостей полупространств, пересечением которых является данный конус. Множество решений системы S_1 называется **минимальной гранью** конуса π .

Из определений 13.2.3 и 13.1.11 вытекает, что все точки минимальной грани конуса содержатся в любой другой грани этого конуса.

13.2.4. Размерность минимальной грани конуса π , задаваемого системой неравенств $A\bar{x} \geq 0$ в n -мерном аффинном пространстве, равна $n - k$, где k — ранг матрицы A .

Доказательство. Минимальная грань конуса π совпадает с подпространством решений однородной системы линейных уравнений $A\bar{x} = 0$. Размерность этого подпространства равна $n - k$ (см. 4.1.9). $\square$

13.2.5. Если минимальная грань конуса является точкой, то конус называется **заостренным**. В ином случае конус называется **тупым** (или **клином**).

Примеры. Рассмотрим трехмерное пространство с заданной в нем декартовой прямоугольной системой координат. Система из двух неравенств

$$\xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 \geq 0$$

определяет в нем множество точек, у которых первые две координаты неотрицательны. Все эти точки расположены в двугранном угле, образованном плоскостями с уравнениями

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0.$$

Указанное множество точек образует конус, минимальной гранью которого является линия пересечения этих плоскостей. Это означает, что данный конус тупой.

Зададим конус тремя неравенствами

$$\xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 \geq 0, \quad \xi_3 \geq 0,$$

Минимальной гранью этого конуса служит точка $(0, 0, 0)^T$, поэтому конус является острым. $\square$

13.2.6. Каждый луч является конусом.

Доказательство. Согласно 13.1.8 луч является выпуклым многогранным множеством. В процессе доказательства этого утверждения было показано, что любой луч можно задать такой системой линейных неравенств, что граничные гиперплоскости полупространств, задаваемых этими неравенствами, имеют общую точку. Ввиду 13.2.1 отсюда следует нужное утверждение. $\square$

13.2.7. Пусть M — фиксированная точка пространства A . Проходящий через точку M луч с началом в точке O (начале системы координат) совпадает с множеством точек

$$\{\alpha M \mid \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0\}.$$

Доказательство. Каждая точка X , для которой

$$\overline{OX} = \tau \overline{OM}, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (13.2.1)$$

лежит между точками O и M . Если же точка Y удовлетворяет соотношению

$$\overline{OY} = \tau \overline{OM}, \quad \tau > 1, \quad (13.2.2)$$

то точка M лежит между точками O и Y . Согласно определениям 13.1.6 и 13.1.7 множество всех точек, удовлетворяющих равенству (13.2.1), вместе с множеством всех точек, удовлетворяющих равенству (13.2.2), образует луч с вершиной в точке O , проходящий через точку M . Легко заметить, что это множество совпадает с множеством $\{\alpha M \mid \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0\}$. $\square$

13.2.8. Если точка Y является неотрицательной линейной комбинацией точек $X_1, \dots, X_k$, принадлежащих конусу π , заданному однородной системой линейных неравенств, то Y также принадлежит π .

Доказательство. Утверждение следует из 12.1.4. $\square$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что задающая конус система линейных неравенств является однородной. Утверждение 13.2.2 говорит о том, что такая система всегда найдется. Согласно 12.1.12 для любой однородной системы неравенств существует такая конечная совокупность S ее решений, что каждое решение этой системы неравенств является неотрицательной линейной комбинацией точек из S .

13.2.9. Пусть S — какая-то непустая конечная система точек из аффинного пространства. Если $\pi = \mathcal{L}^+(S)$, то говорят, что S порождает конус π . Множество S называется системой порождающих этого конуса.

Таким образом, если $\pi = \mathcal{L}^+(S)$ и $S = \{\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_k\}$, то каждую точку $\overline{Z} \in \pi$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\overline{Z} = \alpha_1 \overline{M}_1 + \dots + \alpha_k \overline{M}_k \quad (13.2.3)$$

точек из S с неотрицательными коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Можно предполагать, что в (13.2.3) $\overline{M}_i \neq \mathbf{0}$ для любого i , так как нулевой вектор всегда можно удалить из множества порождающих S без изменения порождаемого конуса.

При выполнении этого условия каждое слагаемое $\alpha_i \overline{M}_i$ в правой части равенства (13.2.3) является лучом с вершиной в точке O .

13.2.10. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — какие-то множества векторов, принадлежащих одному и тому же векторному пространству. Множество векторов B называется *суммой* множеств $A_1, \dots, A_n$, если $x \in B$ тогда и только тогда, когда $x = y_1 + \dots + y_n$ и $y_i \in A_i$ для каждого $i \in \overline{1, n}$.

Примером подобной суммы служит рассматривавшаяся ранее сумма подпространств. Учитывая сказанное выше, теперь можно утверждать, что конус, порождаемый системой точек $\langle \overline{M}_1, \dots, \overline{M}_k \rangle$, не содержащей точки O , является суммой лучей $\alpha_1 \overline{M}_1, \dots, \alpha_k \overline{M}_k$. Дополнительные сведения о строении этой суммы дает следующее утверждение.

13.2.11. Пусть

$$\pi_1 = \mathcal{L}^+(\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_k), \quad \pi_2 = \mathcal{L}^+(\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_k, \overline{M}_{k+1}).$$

Конус π_2 состоит из всех тех точек, которые принадлежат отрезкам, соединяющим каждую точку конуса π_1 с каждой точкой луча $\pi_3 = \gamma \overline{M}_{k+1}$, $\gamma \geq 0$.

Доказательство. Конус π_2 является выпуклым множеством, поэтому все точки каждого отрезка, соединяющего точку конуса π_1 с точкой луча $\gamma \overline{M}_{k+1}$, принадлежат π_2 . Остается проверить, что каждая точка конуса π_2 принадлежит какому-нибудь отрезку $[XY]$, у которого $\overline{X} \in \pi_1$ и $\overline{Y} \in \pi_3$. Пусть $\overline{N} \in \pi_2$, тогда

$$\overline{N} = \alpha_1 \overline{M}_1 + \dots + \alpha_k \overline{M}_k + \alpha_{k+1} \overline{M}_{k+1}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k+1}.$$

Если $\delta = \alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1}$ и $\delta = 0$, то $\overline{N} = O$, следовательно, точка $\overline{N}$ лежит на отрезке $[M_1 O]$. При $\delta \neq 0$ и $\alpha_{k+1} = 0$ точка $\overline{N}$ принадлежит π_1 и находится на отрезке $[NM_{k+1}]$.

Предположим, что $\delta \neq 0$ и $\alpha_{k+1} \neq 0$. Очевидно,

$$\overline{N} = \delta \left(\frac{\alpha_1}{\delta} \overline{M}_1 + \dots + \frac{\alpha_{k+1}}{\delta} \overline{M}_{k+1} \right), \quad \frac{\alpha_1}{\delta} + \dots + \frac{\alpha_{k+1}}{\delta} = 1.$$

Это означает, что точка

$$\overline{Q} = \frac{1}{\delta} \overline{N}$$

принадлежит выпуклой оболочке точек

$$\bar{L}_1 = \frac{\alpha_1}{\delta} \bar{M}_1, \dots, \bar{L}_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1}}{\delta} \bar{M}_{k+1}.$$

Согласно 11.2.8 точка $\bar{Q}$ лежит на каком-то отрезке $[\bar{P}\bar{L}_{k+1}]$, конец $\bar{P}$ которого принадлежит множеству $\hat{\mathcal{L}}(\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_k)$. Отсюда следует, что

$$\bar{Q} = \varphi \bar{P} + \psi \bar{L}_{k+1}, \quad \varphi + \psi = 1, \quad \varphi \geq 0, \quad \psi \geq 0.$$

Конус π_1 является выпуклым множеством и ему принадлежат точки $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_k$, поэтому все точки множества $\hat{\mathcal{L}}(\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_k)$ принадлежат π_1 . Так как $\bar{P} \in \pi_1$, то и $\delta \bar{P} \in \pi_1$. Очевидно,

$$\bar{N} = \delta \bar{Q} = \delta(\varphi \bar{P} + \psi \bar{L}_{k+1}) = \varphi \delta \bar{P} + \psi \delta \bar{L}_{k+1} = \varphi \delta \bar{P} + \psi(\alpha_{k+1} \bar{M}_{k+1}).$$

Видим, что точка $\bar{N}$ принадлежит отрезку с концами $\delta \bar{P} \in \pi_1$ и $\alpha_{k+1} \bar{M}_{k+1} \in \pi_1$. $\square$

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

14.1. НЕРАЗЛОЖИМЫЕ МАТРИЦЫ

Элементы всех упоминаемых в этой главе матриц являются действительными числами. Каждый столбец $\bar{a}$ из n действительных чисел можно считать столбцом координат вектора a из n -мерного действительного векторного пространства V в некотором фиксированном базисе, а каждую квадратную матрицу порядка n можно рассматривать как матрицу линейного преобразования пространства V в том же базисе. Для упрощения изложения столбец $\bar{a}$ будет отождествляться с вектором a и называться или вектором, или точкой.

Большая часть используемых при построении экономических моделей величин по своей природе не могут быть отрицательными. Таковыми являются, например, численность персонала, количество станков, затраченное время. Матрицы, элементами которых являются подобные величины, называются неотрицательными. Неотрицательные матрицы находят применение и в других разделах математики, например в теории вероятностей. Все это дает основание изучить свойства таких матриц.

14.1.1. Матрица A над $\mathbb{R}$ называется *неотрицательной* (положительной), если все ее элементы неотрицательны (положительны). Будем писать $A \geq 0$, если матрица A является неотрицательной, и $A > 0$, если A положительна. Вектор a называется *неотрицательным* (положительным), если столбец его координат является неотрицательной (положительной) матрицей.

14.1.2. Если A — ненулевая неотрицательная матрица и $\bar{a}$ — отличный от нуля неотрицательный вектор, то:

- а) произведение $A\bar{a} = \bar{b}$ также является неотрицательным вектором,
- б) число ненулевых компонент вектора $\bar{c} = (E + A)\bar{a}$ не меньше числа ненулевых компонент вектора $\bar{a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$. Произведение $A\bar{a}$ представляет собой линейную комбинацию столбцов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ с коэффициентами, равными компонентам столбца $\bar{a}$ (см. 3.1.7). Так как все компоненты столбца $\bar{a}$ и столбцов матрицы A неотрицательные, то и столбец $\bar{b} = A\bar{a}$ неотрицательный.

б) Вектор $\bar{c} = (E + A)\bar{a}$ является суммой $\bar{a} + A\bar{a}$ двух столбцов. Это означает, что каждая компонента вектора $\bar{c}$ получается прибавлением к соответствующей компоненте вектора $\bar{a} \geq 0$ неотрицательного числа. От этого число ненулевых компонент может только возрасти. $\square$

14.1.3. Пусть A — действительная матрица с n столбцами. Если для каждого неотрицательного столбца $\bar{u} \neq 0$ высоты n справедливо неравенство $A\bar{u} > 0$ ($A\bar{u} \geq 0$), то матрица A является положительной (неотрицательной).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ и неотрицательный столбец $\bar{e}_i$ имеет высоту n , то $A\bar{e}_i = \bar{a}_i$, $i = \overline{1, n}$. Из условия утверждения заключаем, что $\bar{a}_i > 0$ ($\bar{a}_i \geq 0$). Очевидно, если каждый столбец $\bar{a}_i$ положителен (неотрицателен), то и матрица A является положительной (неотрицательной). $\square$

14.1.4. Если произведение положительной матрицы B на неотрицательный вектор $\bar{v} \neq 0$ определено, то $B\bar{v}$ является положительным вектором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведение $B\bar{v}$ представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы B , коэффициенты которой принадлежат столбцу $\bar{v}$. Каждый столбец матрицы B является положительным вектором, т. е. содержит только положительные числа. Вектор $\bar{v}$ отличен от нуля и все его ненулевые координаты положительны. Очевидно, линейная комбинация нескольких положительных векторов с положительными коэффициентами является положительным вектором. $\square$

14.1.5. Если A — положительная матрица, x и y — неотрицательные векторы и $x \leq y$, то $Ax \leq Ay$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$ — i -я строка матрицы A ,

$$\bar{x} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T, \quad \bar{y} = (\delta_1, \dots, \delta_n)^T.$$

Компоненты столбцов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и строки a_i неотрицательны и $\gamma_j \leq \delta_j$, $j = \overline{1, n}$, поэтому для $i = \overline{1, n}$

$$a_i \bar{x} = \alpha_{i1} \gamma_1 + \dots + \alpha_{in} \gamma_n \leq \alpha_{i1} \delta_1 + \dots + \alpha_{in} \delta_n = a_i \bar{y}. \quad \square$$

Пусть $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ — матрица линейного преобразования ψ n -мерного векторного пространства, записанная в базисе $B = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$. Поменяв в B местами i -й и j -й векторы, получим новый базис B_1 . Описанные в 3.3.2 свойства матрицы линейного оператора позволяют сделать следующий вывод: поменяв местами i -й и j -й столбцы матрицы A и i -ю и j -ю строки возникшей матрицы, получим матрицу преобразования ψ в базисе B_1 .

Это наблюдение можно обобщить следующим образом. Пусть $(j_1, \dots, j_n)$ — перестановка чисел $1, \dots, n$. Переместим в базисе B векторы таким образом, чтобы первым оказался вектор b_{j_1} , вторым — вектор b_{j_2} и т. д. Чтобы записать матрицу преобразования ψ в новом базисе, следует сначала перейти к матрице $[\bar{a}_{j_1} \dots \bar{a}_{j_n}]$, а затем аналогичным образом переставить в ней строки. Описанный процесс перестройки строк и столбцов матрицы назовем **согласованной перестановкой строк и столбцов**.

14.1.6. *Квадратная матрица называется **разложимой**, если согласованной перестановкой строк и столбцов она может быть приведена к блочно-треугольному виду*

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где B и D — квадратные матрицы. В противном случае матрица называется **неразложимой**.

Заметим, что свойство матрицы быть или не быть разложимой связано с расположением нулей внутри матрицы. Если все элементы матрицы отличны от нуля, то матрица является неразложимой. Напротив, матрица является заведомо разложимой, если все элементы какой-нибудь ее строки равны нулю.

ПРИМЕР. Матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

является разложимой. Чтобы это доказать, выпишем последовательность матриц, в которой каждая матрица, кроме первой, получается из предыдущей перестановкой либо двух строк, либо двух столбцов

с соблюдением условия согласованности этих перестановок. Номера переставляемых столбцов указаны над стрелкой, номера переставляемых строк — под стрелкой.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow[3,4]{3,4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow[3,4]{3,4}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xRightarrow[3,1]{3,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xRightarrow[3,1]{3,1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \quad \square$$

14.1.7. Если A — неразложимая неотрицательная матрица и $\bar{u}$ — отличный от нуля неотрицательный вектор, то число ненулевых компонент вектора

$$\bar{v} = (E + A)\bar{u} \quad (14.1.1)$$

больше числа ненулевых компонент вектора $\bar{u}$.

Доказательство. Согласно 14.1.2 число ненулевых компонент вектора $\bar{v}$ не может быть меньше числа ненулевых компонент вектора $\bar{u}$. Предположим, что эти два числа совпадают. Из рассуждений, проведенных при доказательстве утверждения 14.1.2, вытекает, что если i -я компонента вектора $\bar{u}$ отлична от нуля, то и i -я компонента вектора $\bar{v}$ не равна нулю. Это означает, что нули в столбцах $\bar{u}$ и $\bar{v}$ находятся на одинаковых местах. Для упрощения выкладок будем считать, что первые k компонент векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ отличны от нуля, а остальные равны нулю. Указанные векторы имеют следующий вид:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \bar{a} \neq \mathbf{0}, \quad \bar{b} \neq \mathbf{0}.$$

Представим матрицу A в виде совокупности четырех клеток:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

среди которых матрица A_{11} является квадратной k -го порядка. Равенство (14.1.1) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (14.1.2)$$

Ввиду выбранных размеров столбца $\bar{a}$ и клеток матрицы A справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} \bar{a} + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} \mathbf{0} = \begin{pmatrix} A_{11} \bar{a} \\ A_{21} \bar{a} \end{pmatrix}$$

Равенство (14.1.2) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} \bar{a} \\ A_{21} \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что $A_{21} \bar{a} = \mathbf{0}$. Последнее равенство равносильно утверждению о том, что линейная комбинация неотрицательных столбцов матрицы A_{21} равна нулю. Поскольку все компоненты вектора $\bar{a}$ больше нуля, то отсюда следует, что матрица A_{21} состоит из нулей. Ввиду этого матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{pmatrix}$$

и является разложимой, что противоречит условию теоремы. $\square$

14.1.8 (Следствие). Если A — неразложимая неотрицательная матрица порядка $n > 1$, то

$$(E + A)^{n-1} > \mathbf{0}.$$

Доказательство. Пусть $\bar{b}_0 \neq \mathbf{0}$ — произвольный неотрицательный вектор высоты n ,

$$\bar{b}_i = (E + A)^i \bar{b}_0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Очевидно, $\bar{b}_{i+1} = (E + A) \bar{b}_i$. Согласно 14.1.7 число ненулевых компонент вектора $\bar{b}_{i+1}$ строго больше числа ненулевых компонент вектора $\bar{b}_i$. Неотрицательный столбец $\bar{b}_0 \neq \mathbf{0}$ может содержать не более $n - 1$ нулей, значит, вектор

$$\bar{b}_{n-1} = (E + A)^{n-1} \bar{b}_0$$

положительный. Из 14.1.3 следует, что $(E + A)^{n-1} > \mathbf{0}$. $\square$

14.2. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

14.2.1. Пусть A — неотрицательная (n, n) -матрица и $\bar{a}$ — неотрицательный вектор высоты n . Среди чисел $\mu \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $\mu \bar{a} \leq A\bar{a}$, существует наибольшее число $\mu(a)$. Определенная таким образом функция $\mu(x)$ обладает следующим свойством: если $\delta > 0$, x_1 и x_2 — неотрицательные векторы высоты n и $x_1 = \delta x_2$, то $\mu(x_1) = \mu(x_2)$.

Доказательство. Пусть

$$\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, \quad A\bar{a} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T. \quad (14.2.1)$$

Среди тех дробей

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta_n}{\alpha_n},$$

у которых знаменатель отличен от нуля, имеется наименьшая дробь $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$. Рассмотрим произведение $\gamma \bar{a}$, где γ — некоторое положительное действительное число. Если $\gamma > \frac{\beta_i}{\alpha_i}$, то $\gamma \alpha_i > \beta_i$ и неравенство $\gamma \bar{a} \leq A\bar{a}$ не выполняется. Если же $\gamma \leq \frac{\beta_i}{\alpha_i}$, то $\gamma \leq \frac{\beta_j}{\alpha_j}$ для всех тех $j \in \{1, \dots, n\}$, для которых $\alpha_j \neq 0$, и потому для всех указанных значений индекса j выполняются неравенства $\gamma \alpha_j \leq \beta_j$. Вместе с ними выполняется и неравенство $\gamma \bar{a} \leq A\bar{a}$. Наибольшее возможное значение множителя γ , при котором справедливо последнее неравенство, равно $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$. Это и есть $\mu(a)$.

Докажем последнее утверждение. Если $b = \delta a$, то, учитывая (14.2.1),

$$\bar{b} = (\delta \alpha_1, \dots, \delta \alpha_n)^T, \quad A\bar{b} = (\delta \beta_1, \dots, \delta \beta_n)^T.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным ранее, показывают, что число $\mu(b)$ совпадает с наименьшей из тех дробей

$$\frac{\delta \beta_1}{\delta \alpha_1}, \dots, \frac{\delta \beta_n}{\delta \alpha_n},$$

у которых знаменатель отличен от нуля. Очевидно, этой дробью будет $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$, и потому $\mu(b) = \mu(a)$. □

14.2.2. Пусть A — неотрицательная неразложимая (n, n) -матрица, $\mu(x)$ — функция, определенная в 14.2.1. Среди неотрицательных векторов высоты n существует такой вектор $\bar{b}$, что $\mu(b) \geq \mu(x)$ для любого неотрицательного вектора $\bar{x}$ той же высоты.

Доказательство. В 14.2.1 было доказано, что в случае пропорциональности отличных от нуля неотрицательных векторов x_1 и x_2 функция μ в точках x_1, x_2 принимает равные значения. Вследствие этого для любого вектора $\bar{z} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$

$$\mu(z) = \mu((\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^{-1}z).$$

Это позволяет нам ограничиться изучением значений функции $\mu(x)$ для тех $\bar{x} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$, для которых $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 1$. Множество всех векторов высоты n , сумма координат которых равна единице, обозначим буквой M .

Умножим каждый вектор из M слева на матрицу $(E + A)^{n-1}$ и обозначим множество всех полученных таким способом векторов через N . Если

$$\bar{x} \in N, \quad \bar{x} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T, \quad (E + A)^{n-1} = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n],$$

то

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 1, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$(E + A)^{n-1} \bar{x} = \gamma_1 \bar{a}_1 + \dots + \gamma_n \bar{a}_n.$$

Это означает, что множество N является выпуклой оболочкой столбцов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ матрицы $(E + A)^{n-1}$ (см. 11.2.7). Вследствие этого и ввиду 11.2.16 множество N ограниченное. Оно также является замкнутым (см. 13.1.20).

Матрица $(E + A)^{n-1}$ положительная (см. 14.1.8), поэтому положительным является каждый вектор $(E + A)^{n-1} \bar{x}$ из множества N . Если

$$\bar{a} \in N, \quad \bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, \quad A = (\delta_{ij}), \quad A\bar{a} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T,$$

то

$$\beta_i = \delta_{i1}\alpha_1 + \dots + \delta_{in}\alpha_n \quad (14.2.2)$$

и согласно 14.2.1

$$\mu(a) = \min \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta_n}{\alpha_n} \right). \quad (14.2.3)$$

Элементы δ_{ij} матрицы A являются постоянными величинами. Формула (14.2.2) показывает, что функция β_i , зависящая от координат вектора a , непрерывна. Все координаты вектора a положительны, следовательно, каждая дробь в (14.2.3) также является непрерывной функцией, зависящей от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Функция $\min(\xi_1, \dots, \xi_n)$ тоже непрерывна. Из (14.2.3) заключаем, что непрерывной является функция $\mu(a)$.

Известная из курса математического анализа теорема утверждает, что зависящая от нескольких переменных функция, непрерывная в замкнутом ограниченном множестве, принимает в некоторых точках этого множества наибольшее и наименьшее значения. Ввиду этого в N имеется такой вектор b , что $\mu(b) \geq \mu(z)$ для каждого вектора $z \in N$.

Осталось доказать, что $\mu(b) \geq \mu(x)$ для любого вектора $\bar{x} \in M$. Действительно, $\mu(x)\bar{x} \leq A\bar{x}$ согласно 14.2.1. Матрица $(E + A)^{n-1}$ положительная, поэтому мы можем воспользоваться утверждением 14.1.5:

$$\mu(x)\bar{y} = \mu(x)(E + A)^{n-1}\bar{x} = (E + A)^{n-1}\mu(x)\bar{x} \leq (E + A)^{n-1}A\bar{x}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (E + A)^{n-1}A &= \left(E + \binom{n-1}{1}A + \binom{n-1}{2}A^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \binom{n-1}{n-2}A^{n-2} + A^{n-1}\right)A = A(E + A)^{n-1}, \end{aligned}$$

то

$$\mu(x)\bar{y} \leq A(E + A)^{n-1}\bar{x} = A\bar{y}.$$

Отсюда и из 14.2.1 получаем неравенство $\mu(x) \leq \mu(y)$. Из $\bar{y} \in N$ следует, что $\mu(y) \leq \mu(b)$, и потому $\mu(x) \leq \mu(b)$. $\square$

14.2.3. Пусть $A = (\alpha_{ij})_n^n$ — неотрицательная неразложимая матрица. Тогда:

- 1) определенное в 14.2.2 действительное число $\mu(b)$ является положительным;
- 2) $\mu(b)$ является характеристическим числом матрицы A , а b является собственным вектором, принадлежащим $\mu(b)$;
- 3) для любого неотрицательного вектора g из $\mu(b) = \mu(g)$ следует, что $\bar{g} > 0$. В частности, $b > 0$, поэтому среди собственных векторов, принадлежащих $\mu(b)$, всегда имеются положительные векторы;
- 4) все неотрицательные собственные векторы матрицы A принадлежат собственному значению $\mu(b)$ и вследствие утверждения (3) являются положительными;

5) модули всех отличных от $\mu(b)$ характеристических чисел матрицы A не превосходят $\mu(b)$;

6) геометрическая кратность числа $\mu(b)$ равна единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Возьмем вектор $\bar{w} = (1, \dots, 1)^T$ высоты n . Очевидно, $A\bar{w} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, где

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Заменяя в начальной части доказательства утверждения 14.2.1 вектор a вектором w , легко убедиться в том, что для некоторого k

$$\mu(w) = \min(\beta_1, \dots, \beta_n) = \beta_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}.$$

У матрицы A не может быть строки, все элементы которой равны нулю, так как в этом случае она была бы разложимой. Но в таком случае $\mu(w) > 0$ и $\mu(b) > 0$, поскольку $\mu(b) \geq \mu(w)$.

2) Докажем, что $A\bar{b} = \mu(b)\bar{b}$. Ввиду выбора числа $\mu(b)$ справедливо неравенство $A\bar{b} \geq \mu(b)\bar{b}$, из которого следует, что

$$A\bar{b} - \mu(b)\bar{b} \geq \mathbf{0}. \quad (14.2.4)$$

Если $A\bar{b} \neq \mu(b)\bar{b}$, то согласно 14.1.8 и 14.1.4

$$(E + A)^{n-1}A\bar{b} - (E + A)^{n-1}\mu(b)\bar{b} > \mathbf{0},$$

поскольку левая часть в (14.2.4) является неотрицательным вектором. В конце доказательства утверждения 14.2.2 уже было показано, что $(E + A)^{n-1}A = A(E + A)^{n-1}$, поэтому, полагая $(E + A)^{n-1}\bar{b} = \bar{u}$, получим соотношения

$$A(E + A)^{n-1}\bar{b} - \mu(b)(E + A)^{n-1}\bar{b} = A\bar{u} - \mu(b)\bar{u} > \mathbf{0}.$$

Отметим, что $\bar{u} > \mathbf{0}$ ввиду 14.1.4.

Пусть $A\bar{u} - \mu(b)\bar{u} = \bar{v}$. Так как все координаты векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ положительны, найдется такое $\gamma > 0$, для которого $\bar{v} > \gamma\bar{u}$. В таком случае

$$A\bar{u} = \mu(b)\bar{u} + \bar{v} > (\mu(b) + \gamma)\bar{u},$$

откуда следует, что $\mu(u) \geq \mu(b) + \gamma$. Это противоречит утверждению 14.2.2, согласно которому $\mu(b) \geq \mu(x)$ для любого неотрицательного

вектора $\bar{x}$. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства $A\bar{b} = \mu(b)\bar{b}$, означающего, что $\mu(b)$ является характеристическим числом матрицы A и этому числу принадлежит собственный вектор b .

3) Выше уже упоминалось о том, что ввиду 14.1.8 и 14.1.4 вектор $\bar{h} = (E + A)^{n-1}\bar{g}$ является положительным. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 0 &< \bar{h}(E + A)^{n-1}\bar{g} = \\ &= \left(E + \binom{n-1}{1}A + \binom{n-1}{2}A^2 + \dots + \binom{n-1}{n-2}A^{n-2} + A^{n-1} \right) \bar{g} = \\ &= \left(\bar{g} + \binom{n-1}{1}\mu(b)\bar{g} + \binom{n-1}{2}(\mu(b))^2\bar{g} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \binom{n-1}{n-2}(\mu(b))^{n-2}\bar{g} + (\mu(b))^{n-1}\bar{g} \right) = (1 + \mu(b))^{n-1}\bar{g}. \end{aligned}$$

В (1) уже доказано, что $\mu(b) > 0$, поэтому $(1 + \mu(b))^{n-1} > 0$ и $\bar{g} > 0$.

4) Докажем, что если $A\bar{z} = \delta\bar{z}$ и $\bar{z} \geq 0$, то $\delta = \mu(b)$. Действительно, характеристические числа матриц A и A^T совпадают, поэтому $\mu(b)$ является собственным числом матрицы A^T . Матрица A^T неотрицательная и неразложимая. Согласно (3) среди принадлежащих $\mu(b)$ собственных векторов матрицы A^T найдется положительный вектор d . Справедливы равенства

$$\delta \bar{d}^T \bar{z} = \bar{d}^T \delta \bar{z} = \bar{d}^T (A\bar{z}) = (\bar{d}^T A) \bar{z} = (A^T \bar{d})^T \bar{z} = \mu(b) \bar{d}^T \bar{z}. \quad (14.2.5)$$

Так как $\bar{d}^T \bar{z} > 0$ и $\bar{z} \geq 0$, то число $\bar{d}^T \bar{z}$ больше нуля. Вследствие этого из (14.2.5) получаем требуемое равенство $\delta = \mu(b)$. Поскольку $A\bar{z} = \mu(b)\bar{z}$, то $\mu(z) = \mu(b)$ и вследствие утверждения (3) $\bar{z} > 0$.

5) Если λ — характеристическое число матрицы A , то $\lambda\bar{x} = A\bar{x}$ для некоторого ненулевого вектора $\bar{x} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$. Отсюда следует, что для $j = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} \lambda\gamma_i &= \alpha_{i1}\gamma_1 + \dots + \alpha_{in}\gamma_n, \\ |\lambda\gamma_i| &= |\alpha_{i1}\gamma_1 + \dots + \alpha_{in}\gamma_n|. \end{aligned}$$

Так как $\alpha_{ij} \geq 0$, то

$$|\lambda||\gamma_i| \leq \alpha_{i1}|\gamma_1| + \dots + \alpha_{in}|\gamma_n|.$$

Это означает, что $|\lambda|\bar{x}^* \leq A\bar{x}^*$, где $\bar{x}^* = (|\gamma_1|, \dots, |\gamma_n|)^T$. Но тогда $|\lambda| \leq \mu(\bar{x}^*) \leq \mu(b)$.

6) Если все принадлежащие $\mu(b)$ собственные векторы матрицы A пропорциональны b , то геометрическая кратность числа $\mu(b)$ равна единице. Предположим, что существует собственный вектор c , принадлежащий $\mu(b)$ и не пропорциональный b . Так как $\bar{b} > 0$, то все координаты вектора b являются положительными числами. Очевидно, всегда можно найти такое действительное число ψ , что модуль одной из координат вектора ψc совпадет с соответствующей координатой вектора b , а модули остальных координат вектора ψc будут не превосходить соответствующих координат вектора b . Любая линейная комбинация векторов b и c является собственным вектором матрицы A , принадлежащим $\mu(b)$ (6.1.4), поэтому и $b \pm \psi c$ — собственные векторы, принадлежащие $\mu(b)$. Каждый из этих векторов неотрицателен, и по крайней мере у одного из них имеется равная нулю координата. Это противоречит утверждению (3). $\square$

Рассматривая произвольную, не обязательно неразложимую квадратную неотрицательную матрицу A , докажем следующее утверждение.

14.2.4. Если A — неотрицательная (n, n) -матрица, то:

1) максимальное по модулю характеристическое число матрицы A является действительным неотрицательным;

2) среди принадлежащих этому числу собственных векторов имеются неотрицательные векторы.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n . Если $n = 1$, то матрица A имеет единственный элемент, который и является ее характеристическим числом. Это число неотрицательно, так как $A \geq 0$. Поскольку размерность пространства равна единице, каждый неотрицательный вектор является собственным вектором такой матрицы.

Пусть утверждения теоремы справедливы, если порядок матрицы не превосходит целого числа $k > 0$. Предположим, что $n = k + 1$. Если матрица A неразложима, то утверждение следует из 14.2.3. Если же A разложима, то согласованной перестановкой строк и столбцов из нее можно получить блочно-треугольную матрицу

$$A_1 \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Как уже указывалось в тексте перед определением 14.1.6, матрицы A и A_1 задают одно и то же линейное преобразование простран-

ства в разных базисах этого пространства, поэтому они подобны и их характеристические числа совпадают (см. 6.2.2, 6.2.3). Так как

$$\begin{aligned}\det(A_1 - \lambda E) &= \\ &= \det \begin{pmatrix} B - \lambda E_1 & C \\ \mathbf{0} & D - \lambda E_2 \end{pmatrix} = \det(B - \lambda E_1) \det(D - \lambda E_2)\end{aligned}$$

(в этих равенствах E_1 и E_2 — единичные матрицы соответствующего размера), то комплексное число является корнем характеристического многочлена матрицы A_1 тогда и только тогда, когда оно является либо характеристическим числом матрицы B , либо характеристическим числом матрицы D .

Порядки квадратных матриц B и D не превосходят k , следовательно, B обладает таким действительным характеристическим числом $\lambda_1 \geq 0$, которое не меньше модуля любого другого характеристического числа этой матрицы, и неотрицательным собственным вектором $\bar{u}$, принадлежащим λ_1 . Матрица D также обладает действительным характеристическим числом $\lambda_2 \geq 0$, которое не меньше модуля любого другого характеристического числа матрицы D , и неотрицательным собственным вектором $\bar{v}$, принадлежащим λ_2 . Высота каждого из столбцов $\bar{u}$, $\bar{v}$ меньше n . Дополнив первый из них до высоты n нулями, получим новый вектор

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Вектор u_1 неотрицателен и является собственным вектором матрицы A_1 , так как

$$A_1 \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\bar{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \bar{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \lambda_1 \bar{u}_1.$$

Число $\lambda_1 \geq 0$ не меньше модуля любого другого характеристического числа матрицы B . Если $\lambda_1 \geq \lambda_2$, то λ_1 также не меньше модуля каждого из характеристических чисел матрицы D . Это число является характеристическим для матриц A_1 и A и ему принадлежит неотрицательный собственный вектор u_1 . Видим, что в этом случае утверждение 14.2.4 справедливо. $\square$

Оставшуюся часть доказательства мы опустим.

Впервые свойства положительных матриц были исследованы О. Перроном. Им было доказано следующее утверждение.

14.2.5 (Теорема Перрона). Среди собственных значений квадратной положительной матрицы A всегда имеется положительное действительное число λ_0 , обладающее следующими свойствами:

- 1) λ_0 больше модуля любого другого собственного значения матрицы A ;
- 2) алгебраическая кратность собственного значения λ_0 равна единице;
- 3) среди собственных векторов, принадлежащих λ_0 , имеется положительный вектор. $\square$

Позже Г. Фробениус исследовал свойства неотрицательных матриц. Часть полученных им результатов приведена выше в виде утверждений 14.2.3 и 14.2.4. Положительная матрица не содержит равных нулю элементов, по этой причине является неразложимой, и для нее справедливы все утверждения теоремы 14.2.3. Очевидно, все утверждения теоремы Перрона являются следствиями теоремы 14.2.3, за исключением свойства (2), которое у Фробениуса присутствует, но в 14.2.3 заменено на утверждение о том, что единице равна геометрическая кратность собственного числа λ_0 . В современной литературе утверждения 14.2.3–14.2.5 обычно объединяют в одно и называют теоремой Фробениуса—Перрона.

14.3. ПРОДУКТИВНЫЕ МАТРИЦЫ

Рассмотрим условную экономику, в которой имеется n отраслей, каждая из которых производит свой продукт, отличный от продукции других отраслей. Будем предполагать, что в процессе производства каждая из этих отраслей потребляет продукцию остальных отраслей. Пусть для производства единицы продукта j -й отрасли необходимо α_{ij} единиц продукции i -й отрасли. Числа α_{ij} , $i = \overline{1, n}$, называются **производственными коэффициентами** или **коэффициентами прямых затрат i -й отрасли**. Из них составим матрицу $A = (\alpha_{ij})_n^n$. Обозначим через β_i объем выпуска (в тех же единицах) i -й отрасли. В процессе производства некоторое количество, например γ_i единиц, продукции этой отрасли было потрачено на нужды производства самой отрасли и других отраслей. Если вычесть γ_i из β_i , получим конечный выпуск δ_i продукции данной отрасли, который можно использовать для непродовственных целей. Будем предполагать, что на протяжении рассматриваемого отрезка времени производственные коэффициенты не меняются и что технология производства обладает свойством линейности, т. е. что на производство π единиц продукции

j -й отрасли расходуется $\pi\alpha_{ij}$ единиц продукции i -й отрасли. При этих условиях

$$\delta_i = \beta_i - \gamma_i = \beta_i - (\alpha_{i1}\beta_1 + \dots + \alpha_{in}\beta_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть

$$\bar{x} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T, \quad \bar{y} = (\delta_1, \dots, \delta_n)^T,$$

тогда указанные выше соотношения можно записать в матричной форме:

$$\bar{y} = \bar{x} - A\bar{x}.$$

Если задан план $\bar{y}$ выпуска продукции всей экономики, то, решив данное уравнение, найдем валовый выпуск $\bar{x}$. Однако всегда ли указанное уравнение имеет решение? Это приводит нас к следующему определению.

14.3.1. Неотрицательная матрица $A \in R^{n,n}$ называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора $\bar{y} \in R^n$ уравнение

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y} \quad (14.3.1)$$

с неизвестным $\bar{x}$ имеет неотрицательное решение.

Далее указываются некоторые признаки продуктивности неотрицательной матрицы.

14.3.2. Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и является неотрицательной.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Перепишем уравнение (14.3.1) в виде

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y}. \quad (14.3.2)$$

Если матрица $(E - A)^{-1}$ существует, то для любого вектора $\bar{y}$ уравнение (14.3.2) имеет решение

$$\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y}.$$

Все компоненты столбца $\bar{y}$ неотрицательны. Если неотрицательными являются все элементы матрицы $(E - A)^{-1}$, то и вектор $\bar{x}$ получится неотрицательным (см. 14.1.2).

($\Rightarrow$) Предположим, что матрица A продуктивна. Тогда уравнение (14.3.2) имеет неотрицательное решение для любого неотрицательного вектора $\bar{y}$, следовательно, имеет решение каждое из уравнений

$$(E - A)\bar{x} = \bar{e}_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Поскольку $\bar{e}_i, i = \overline{1, n}$, — столбцы единичной матрицы E , то решениями указанных уравнений являются столбцы матрицы $(E - A)^{-1}$. Каждый из этих столбцов неотрицателен, так как является решением уравнения (14.3.1) с продуктивной матрицей A , поэтому и матрица $(E - A)^{-1}$ неотрицательна. $\square$

14.3.3. Максимальное по модулю характеристическое число неотрицательной матрицы A называется **числом Фробениуса** этой матрицы. Принадлежащие числу Фробениуса неотрицательные собственные векторы называются **векторами Фробениуса** матрицы A .

Определитель матрицы не меняется при транспонировании, поэтому у квадратных матриц A и A^T совпадают характеристические многочлены и характеристические числа. Очевидно, если матрица A неотрицательная, то неотрицательной является и матрица A^T , и числа Фробениуса этих двух матриц совпадают.

14.3.4. Неотрицательная квадратная матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Если матрица A является продуктивной, то согласно 14.3.1 для любого неотрицательного вектора $\bar{y}$ уравнение

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y} \quad (14.3.3)$$

имеет неотрицательное решение. Возьмем положительный вектор $\bar{y}$. В этом случае столбец $\bar{x}$ является суммой неотрицательного и положительного столбцов и потому сам является положительным. Матрица A^T неотрицательная, поэтому существует вектор Фробениуса $\bar{a}$ этой матрицы. Умножим обе части равенства (14.3.3) слева на $\bar{a}^T$:

$$\bar{a}^T \bar{x} = \bar{a}^T A \bar{x} + \bar{a}^T \bar{y}. \quad (14.3.4)$$

Так как вектор $\bar{a}$ является собственным вектором матрицы A^T , то

$$A^T \bar{a} = \lambda_0 \bar{a},$$

где λ_0 — число Фробениуса матрицы A^T , совпадающее с числом Фробениуса матрицы A . Транспонируя обе части этого равенства, получаем соотношение

$$\bar{a}^T A = \lambda_0 \bar{a}^T.$$

Вследствие этого равенство (14.3.4) превращается в

$$\bar{a}^T \bar{x} = \lambda_0 \bar{a}^T \bar{x} + \bar{a}^T \bar{y}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\bar{a}^T \bar{x} - \lambda_0 \bar{a}^T \bar{x} &= \bar{a}^T \bar{y}, \\ (1 - \lambda_0) \bar{a}^T \bar{x} &= \bar{a}^T \bar{y}.\end{aligned}$$

Поскольку векторы $\bar{x}$, $\bar{y}$ положительны и $\bar{a} \geq 0$, произведения $\bar{a}^T \bar{x}$ и $\bar{a}^T \bar{y}$ являются положительными числами, и потому $1 - \lambda_0 > 0$. Последнее возможно только при $\lambda_0 < 1$. ($\Leftarrow$) Пусть $\lambda_0 < 1$ является числом Фробениуса неотрицательной (n, n) -матрицы A . Зафиксируем некоторый неотрицательный вектор $\bar{y}$ и докажем, что уравнение (14.3.1) имеет неотрицательное решение. Введем вспомогательную неотрицательную $(n + 1, n + 1)$ -матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & \bar{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через E единичную матрицу порядка $n + 1$, а через E_1 единичную матрицу порядка n . Так как

$$\det(B - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda E_1 & \bar{y} \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \det(A - \lambda E_1)(1 - \lambda),$$

то комплексное число является корнем характеристического многочлена матрицы B тогда и только тогда, когда оно является либо характеристическим числом матрицы A , либо равно единице. Модуль каждого характеристического числа матрицы A не превосходит λ_0 , поскольку λ_0 — число Фробениуса этой матрицы. Из неравенства $\lambda_0 < 1$ следует, что число Фробениуса матрицы B равно единице.

Согласно 14.2.4 собственному значению единицы принадлежит некоторый неотрицательный вектор $\bar{d}$, который мы представим в виде

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \beta \end{pmatrix},$$

где $\bar{f}$ — неотрицательный столбец, а β — неотрицательное число. Из равенства

$$\begin{pmatrix} A & \bar{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \beta \end{pmatrix}$$

получаем систему

$$\begin{cases} A\bar{f} + \beta\bar{y} = \bar{f}, \\ \beta = \beta. \end{cases} \quad (14.3.5)$$

Если $\beta = 0$, то первое равенство в системе (14.3.5) превращается в $A\bar{f} = \bar{f}$, означающее, что единица является характеристическим числом матрицы A . Однако мы предполагали, что у матрицы A все такие числа строго меньше единицы. Таким образом, β не может равняться нулю.

Итак, $\bar{d}$ является неотрицательным собственным вектором матрицы B , принадлежащим собственному значению единицы, и его последняя координата β отлична от нуля. Вектор

$$\bar{d}_1 = \frac{1}{\beta} \bar{d} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

также является неотрицательным собственным вектором матрицы B и принадлежит тому же собственному значению. Это означает, что

$$\begin{pmatrix} A & \bar{y} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем равенство $A\bar{f}_1 + \bar{y} = \bar{f}_1$, означающее, что $\bar{f}_1$ является решением уравнения (14.3.1). Это решение неотрицательно, так как столбец $\bar{f}_1$ получен из неотрицательного столбца $\bar{d}_1$ удалением последней компоненты. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб.: Лань, 2009.
2. *Ашманов С. А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
3. *Ашманов С. А., Тимохов А. В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
4. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Высшая школа, 1998.
5. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2008.
6. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. СПб.: Лань, 2008.
7. *Булавский В. А., Копытова М. К.* Линейная алгебра: Методические указания. Новосибирск: НГУ, 1986.
8. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. СПб.: Лань, 2009.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
10. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1971.
11. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1960.
12. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.
13. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. I. М.: Наука, 1981.
14. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2006.
15. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2010.
16. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
17. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2008.
18. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
19. Линейные неравенства и смежные вопросы: Сборник статей / Под ред. Г. У. Куна и А. У. Таккера. М.: Иностранная литература, 1959.
20. *Львов И. В.* Многомерная аналитическая геометрия. Ч. 1. Координатные пространства. Новосибирск: НГУ, 1999. Вып. 1, 2.

21. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2009.
22. Мальцев И. А. Линейная алгебра. Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2001.
23. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М.: Наука, 1965.
24. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2008.
25. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
26. Солодовников А. С. Системы линейных неравенств. М.: Наука, 1977.
27. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В. Математика в экономике. М.: Финансы и статистика, 1998.
28. Фаддеев Д. К., Соминский Н. С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Лань, 2008.
29. Федорчук В. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990.
30. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные векторные пространства. СПб.: Лань, 2004.
31. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2009.
32. Wielandt H. Unzerlegbare, nicht negative Matrizen// Math. Zeitschrift. 1950. V. 52. № 5. P. 642–648.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(m, n) -матрица 70
 $m \times n$ -матрица 70

А

Алгоритм Евклида 18
Аргумент комплексного числа 10
Асимптота гиперболы 265

Б

База системы векторов 50
Базис
 векторного пространства 52
 естественный в F_n 55

Биекция i
Блок матрицы 156

В

Вектор 40
Фробениуса 338
 неотрицательный 325
 положительный 325
 сдвига 121
 собственный линейного
 преобразования 165
Векторы ортогональные 177
Вершина 311
 гиперболы 264
Вершины эллипса 261
Ветвь гиперболы 264
Вид квадратичной формы
 канонический 239
Вложение i
Вращение фигуры 276
Выражение арифметическое 5

Г

Гипербола 257
Гиперболоид
 двулоостный 259, 273
 однолоостный 258, 273
Гиперплоскость 121, 227
Гиперповерхность второго
 порядка 249
Гомоморфизм 79
Грань 311
 конуса 320
 конуса минимальная 321

Д

Делитель
 общий 17
Диагональ матрицы
 главная 77
 дополнительная 77
Директриса параболы 267
Длина вектора 225
Дополнение
 множества векторов
 ортогональное 186
 подпространства
 алгебраическое 67
Дробь рациональная 27
 действительная 27
 правильная 27

Е

Единица
 мнимая 5
 поля 2

З

Закон инерции квадратичных форм 241

Замена переменных 239

Запись решения системы в параметрическом виде 108

Значение собственное
линейного преобразования 165

матрицы 167

И

Изоморфизм

векторных пространств 81

евклидовых пространств 195

Инверсия 139

Инъекция ii

К

Клетка матрицы 156

Клин 321

Комбинация

векторов линейная 42

линейная неотрицательная 290

точек

аффинная 284

выпуклая 284

линейная 279

Конец

вектора 222

отрезка 281

Конус 259

второго порядка 272

заостренный 321

мнимый 259, 278

многогранный выпуклый 320

тупой 321

Координаты

барицентрические 319

вектора 54

Корень

квадратный из комплексного числа 7

многочлена 19

простой 23

Кратность

корня многочлена 23

собственного значения

алгебраическая 168

геометрическая 166

Кривая

второго порядка 249

направляющая 272

Л

Лемма

о векторе, ортогональном системе, порождающей

подпространство 185

о расширении системы

векторов 46

Луч 307

М

Матрица 70

Грама 178

блочная 156

блочно-треугольная 156

вырожденная 77

единичная 76

квадратная 70

клеточная 156

линейного

оператора 84

преобразования 84

невыврожденная 77

неособенная 77

неотрицательная 325

неразложимая 327

обратная 77

левая 132

правая 132

ортогональная 198

особенная 77

отрицательно

определенная 218

полуопределенная 218

перестановочная 98

перехода от

нового базиса к старому 91

старого базиса к новому 93

полного ранга 103

положительная 325

положительно

определенная 218

полуопределенная 218

продуктивная 337

разложимая 327

размера m на n 70

системы

линейных уравнений 107

расширенная 38, 110

транспонированная 72
 треугольная 144
 элементарная 98
 Матрицы подобные 96
 Метод
 Гаусса–Жордана 42
 Горнера 21
 Лагранжа 240
 исключения неизвестных 35
 Минор матрицы 152
 Многогранник выпуклый 306
 Многообразие
 аффинное 120
 линейное 120
 Многочлен 13
 над полем 13
 нулевой 14
 характеристический 167
 Многочлены равные 14
 Множества векторов взаимно ортогональные 185
 Множество
 выпуклое
 амкнутое 287
 открытое 287
 многогранное выпуклое 306
 точек
 выпуклое 282
 ограниченное 287
 Модуль суммы комплексных чисел 13

Н

Наложение ii
 Начало
 вектора 222
 луча 307
 Неизвестные
 базисные 38
 свободные 38
 Неравенство
 Коши–Буняковского 192
 линейное 289
 треугольника 177
 Нуль поля 2

О

Область
 значений отображения ii
 определения отображения ii
 Оболочка
 выпуклая 283

линейная 58
 Образ
 вектора 79
 векторного пространства 80
 множества ii
 элемента ii
 Образующая поверхности 272
 Оператор линейный 79
 Операции с матрицами 70
 Определитель
 матрицы 143
 треугольной матрицы 144
 Оси эллипса 262
 Ось
 абсцисс 269
 аппликата 269
 вращения 276
 ординат 269
 симметрии 269
 фокальная 267
 эллипса
 большая 262
 малая 262
 Отображение
 взаимно однозначное ii
 на ii
 Отрезок 281
 соединяющий точки 281

П

Пара
 мнимых
 параллельных плоскостей
 260, 278
 параллельных прямых 257
 пересекающихся
 плоскостей 259, 278
 пересекающихся прямых
 257
 параллельных
 плоскостей 260, 277
 прямых 257
 пересекающихся
 плоскостей 259, 277
 прямых 257
 совпадающих
 плоскостей 260, 277
 прямых 257
 Парабола 257
 Параболоид
 гиперболический 259, 275
 эллиптический 259, 275

- Параметр фокальный 267
Пересечение подпространств 61
Перестановка 138
нечетная 139
строк и столбцов
согласованная 327
четная 139
Плоскость 121, 227
комплексная 8
симметрии 269
Поверхность
вращения 276
второго порядка 249
распадающаяся 278
цилиндрическая 272
Подполе 2
Подпространство 56
аффинное 120
инвариантное 164
Подсистема 47
линейно независимая
максимальная 49
Поле 1
бесконечное 3
Полупространство 303
Поля изоморфные 3
Преобразование
векторного пространства
линейное 81
евклидова пространства
ортогональное 200
переменных
линейное 239
невыврожденное 239
подобия 96
самосопряженное 210
сопряженное 205
Преобразования системы
векторов элементарные 50
Признак
Якоби 246
линейной зависимости 44
Признаки прямой суммы 67
Проекция вектора на
подпространство 69
Произведение скалярное 176
Прообраз вектора 79
Пространства аффинные
изоморфные 224
Пространство
аффинное 222
векторное 40
бесконечномерное 51
действительное 40
комплексное 40
конечномерное 52
евклидово 176
линейное 39
точечно-аффинное 222
точечно-векторное 222
арифметическое 223
точечно-евклидово 225
Процесс ортогонализации 181
Прямая 121, 227
- Р**
- Радиус
полярный 8
фокальный 265
Разложение
вектора по базису 54
многочлена на линейные
множители 21
преобразования полярное 215
Размерность
аффинного многообразия 121
векторного пространства 53
множества 287
Ранг матрицы 77
Расстояние фокусное 265
Ребро 311
конуса 320
Репер 225
Решение системы линейных
уравнений 106
- С**
- Сдвиг подпространства 121
Символ Кронекера 181
Симплекс 319
Система
векторов 42
аффинно зависимая 122
аффинно независимая 122
линейно зависимая 43
линейно независимая 43
ортогональная 177
координат
в аффинном пространстве
225
полярная 9
прямоугольная 227

- линейных уравнений
 - квадратная 35
 - независимая 115
 - неоднородная 35, 106
 - неопределенная 106
 - несовместная 35, 106
 - однородная 35, 106
 - определенная 106
 - присоединенная 107
 - совместная 35, 106
- неравенств сопутствующая 298
- порождающих
 - конуса 322
 - подпространства 61
- присоединенная к системе неравенств 301
- решений фундаментальная 107
- уравнений, задающая множество 123, 229
- Системы
 - векторов эквивалентные 49
 - линейных уравнений эквивалентные 36, 106
- Скаляр 40
- Следствие системы линейных уравнений 113
- Степень многочлена 14
- Сумма подпространств 61
- прямая 66
- Сюръекция ii
- Т
- Теорема
 - Кронекера–Капелли 110
 - Пифагора 178
 - Ролля 247
 - Фредгольма 115
 - Фробениуса–Перрона 336
 - высшей алгебры основная 20
 - косинусов 178
 - о двух системах векторов 48
 - о ранге матрицы 99
 - о существовании корня многочлена 20
- Точка 121
 - выпуклого множества внутренняя 286
 - касающаяся выпуклого множества 287
 - лежащая между другими точками 279
 - отрезка внутренняя 282
 - угловая 311
- Транспозиция 139
- У
- Угол
 - между векторами 177
 - полярный 8
- Уравнение
 - кривой второго порядка каноническое 256
 - поверхности второго порядка каноническое 258
- Уравнения плоскости параметрические 231
- Ф
- Фокус параболы 267
- Фокусы
 - гиперболы 265
 - эллипса 262
- Форма 235
 - билинейная 236
 - квадратичная 235, 238
 - неотрицательная 245
 - неположительная 245
 - отрицательно определенная 245
 - отрицательно полуопределенная 245
 - положительно определенная 245
 - положительно полуопределенная 245
 - комплексного числа алгебраическая 5
 - тригонометрическая 9
- Формула разложения определителя 153
- Формулы Крамера 159, 162
- Функционал 235
 - билинейный 235
- Функция дробно-рациональная 27
- простейшая 31
- Ц
- Центр
 - гиперболы 265
 - симметрии 269
 - эллипса 262

Цилиндр

гиперболический 259, 272

параболический 260, 272

эллиптический 259, 272

мнимый 259, 278

Ч

Часть комплексного числа

действительная 5

мнимая 5

Числа комплексные

сопряженные 5

Число

Фробениуса 338

комплексное 3

матрицы характеристическое

167

Член

многочлена

свободный 14

старший 14

определителя матрицы 142

Э

Эллипс 256

мнимый 256

Эллипсоид 258, 270

мнимый 258, 278

Список обозначений

(x, y) — скалярное произведение векторов x, y 176

A^T — транспонированная матрица 72

A^{-1} — матрица, обратная к A 77

C^n — комплексное арифметическое пространство 41

E — единичная матрица 76

F^n — пространство столбцов высоты n с компонентами из поля F 41

G^i — векторное пространство, состоящее из всех отрезков, имеющих общее начало 41

$L_1 + \dots + L_m$ — сумма подпространств 61

$L_1 \cap L_2$ — пересечение подпространств 61

$L_1 \oplus L_2$ — прямая сумма подпространств 66

R^n — действительное арифметическое пространство 41

$X^\perp$ — ортогональное дополнение множества векторов X 186

$[MN]$ — отрезок 281

$\&$ — логическая связка «и» ii

$\text{Conv } M$ — выпуклая оболочка множества точек M 283

Γ_S — матрица Грама системы S 178

$\text{Im } z$ — мнимая часть комплексного числа 5

$\Leftarrow$ — символ, означающий, что из правой части утверждения следует левая ii

$\Phi(x, x)$ — квадратичная форма 238

$\text{Pr}(\bar{a})$ — оператор, проектирующий R^{n+1} на R^n 299

$\text{Re } z$ — действительная часть комплексного числа 5

$\Rightarrow$ — символ, означающий, что из левой части утверждения следует правая ii

$\bar{A}$ — расширенная матрица системы 110

$\bar{a} \geq \bar{b}$ — неравенство для столбцов 290

$\bar{x}$ — столбец координат вектора x 54

$\bar{x}_B$ — столбец координат вектора x в базисе B 54

$\bar{z}$ — комплексное число, сопряженное с числом z 5

δ_{ij} — символ Кронекера 181

$\det A$ — определитель матрицы A 143

$\dim M$ — размерность аффинного многообразия M 121

$\dim$ — размерность пространства 53

$\exists$ — квантор существования ii

$\forall$ — квантор всеобщности ii

$\Leftrightarrow$ — символ, означающий равносильность условий ii

$\vee$ — логическая связка «или» ii

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел 2

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел 2

$\mathbf{0}$ — нулевой вектор 40

$\mathcal{L}(S)$ — линейная оболочка системы S 58

$\mathcal{L}^+(S)$ — неотрицательная линейная комбинация векторов из S 290

$|$ — символ, заменяющий слова «где», «таких, что» и т. д. ii

$\overline{M}$ — столбец координат точки M 279

$\overline{1, n}$ — сокращенная запись $\{1, \dots, n\}$ ii

$\overrightarrow{M_1 M_2}$ — вектор с началом в M_1 и концом в M_2 222

$\pi(M, L)$ — плоскость, проведенная через точку M в направлении L 227

ψ^* — преобразование, сопряженное с ψ 205

rank — ранг матрицы или системы векторов 77

rank — ранг системы 50

rank_T — ранг системы строк матрицы 77

σ — функция четности подстановки 139

$\simeq$ — отношение изоморфизма 81

$\simeq$ — отношение подобия матриц 96

$\square$ — символ, означающий конец доказательства или очевидность утверждения ii

$\rightarrow$ — знак отображения, функции ii

$\widehat{\mathcal{L}}(M)$ — выпуклая оболочка множества точек M 283

i — мнимая единица 4

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Введение</i>	3
<i>Глава 1.</i> Комплексные числа. Многочлены	6
1.1. Поле комплексных чисел	6
1.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа	10
1.3. Комплексные числа в тригонометрической форме	13
1.4. Многочлены над полем комплексных чисел	19
1.5. Дробно-рациональные функции	33
<i>Глава 2.</i> Векторные пространства	42
2.1. Решение систем линейных уравнений	42
2.2. Линейная зависимость векторов	47
2.3. Базис векторного пространства	59
2.4. Подпространства векторного пространства	64
<i>Глава 3.</i> Матрицы, линейные операторы	79
3.1. Операции с матрицами	79
3.2. Линейные операторы	88
3.3. Матрица линейного оператора	93
3.4. Переход к новому базису	101
3.5. Ранг матрицы	107
<i>Глава 4.</i> Системы линейных уравнений	117
4.1. Множество решений системы линейных уравнений	117
4.2. Аффинные многообразия	131
4.3. Обратная матрица	143
<i>Глава 5.</i> Определители	150
5.1. Перестановки	150
5.2. Определители, их свойства	153
5.3. Определитель матрицы как функция, зависящая от столбцов этой матрицы	158
5.4. Определитель произведения матриц	163
5.5. Разложение определителя	166
5.6. Определитель блочно-треугольной матрицы. Формулы Крамера	169

<i>Глава 6.</i>	Инвариантные подпространства	178
6.1.	Собственные векторы	178
6.2.	Характеристический многочлен	180
<i>Глава 7.</i>	Евклидовы пространства	191
7.1.	Скалярное произведение	191
7.2.	Процесс ортогонализации	196
7.3.	Ортогональное дополнение	201
7.4.	Изоморфизмы евклидовых пространств	211
<i>Глава 8.</i>	Линейные преобразования евклидовых пространств	215
8.1.	Ортогональные матрицы	215
8.2.	Сопряженные преобразования	220
8.3.	Полярное разложение преобразования	232
8.4.	Положительно полуопределенные матрицы	236
<i>Глава 9.</i>	Аффинные пространства	240
9.1.	Начальные понятия	240
9.2.	Координаты в аффинном пространстве	243
9.3.	Плоскости	245
<i>Глава 10.</i>	Поверхности второго порядка	254
10.1.	Билинейные функционалы	254
10.2.	Квадратичные формы	257
10.3.	Гиперповерхности второго порядка	268
10.4.	Кривые и поверхности второго порядка	276
10.5.	Некоторые свойства кривых второго порядка	280
10.6.	Виды поверхностей второго порядка	290
<i>Глава 11.</i>	Выпуклые множества	302
11.1.	Отрезки	302
11.2.	Выпуклые множества	305
<i>Глава 12.</i>	Системы линейных неравенств	313
12.1.	Однородные системы линейных неравенств	313
12.2.	Неоднородные системы линейных неравенств	323
<i>Глава 13.</i>	Многогранные множества	328
13.1.	Выпуклые многогранные множества	328
13.2.	Выпуклые многогранные конусы	345
<i>Глава 14.</i>	Неотрицательные матрицы	351
14.1.	Неразложимые матрицы	351
14.2.	Собственные векторы неотрицательных матриц	356
14.3.	Продуктивные матрицы	363
<i>Литература</i>		368
<i>Предметный указатель</i>		370
<i>Список обозначений</i>		376

Иван Анатольевич МАЛЫЦЕВ
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
Учебное пособие

Издание второе,
исправленное и дополненное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 26.07.10.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 60×90^{1/16}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 24,00. Тираж 1500 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122