ГАНГНУС Ю. С.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(часть 1)



г. Саратов

2011

Данное учебное пособие представляет собой конспект лекций, читавшихся автором в течении нескольких лет в Саратовском государственном университете им. Н. Г. Чернышевского. Лекции записывались и набирались студентами физического факультета и факультета нелинейных процессов с последующей редакцией автора. Все замечания просим присылать по адресу TMF@SGU.RU. Gangnus Yu.S.

**Введение.**

Использование математического аппарата для описания физических процессов является необходимым условием для получения количественных результатов, совпадающих с экспериментальными данными практически с любой степенью точности. Следует, однако, отметить, что употребление дифференциального и интегрального исчисления подразумевает возможность замены физических понятий «достаточно малое» и «достаточно большое» на бесконечно малое и бесконечно большое. В том случае, когда дискретной природой физических величин пренебречь нельзя, следует переходить к использованию конечно-разностных схем. Поскольку эти ситуации выходят за пределы данного курса, в дальнейшем они рассматриваться не будут.

Важным достоинством математического подхода к описанию физических процессов является возможность объединения их в группы, внутри которых переход от одной задачи к другой может осуществляться путем некоторой замены переменных или предельного перехода. Поскольку математическое решение для всех элементов одной группы одно и то же, возникают жесткие связи между различными физическими явлениями. В качестве примера рассмотрим аналогию в описании механических и электромагнитных колебаний.

а) Механические колебания пружинного маятника

Пусть колебания груза массой m совершаются вдоль оси X


Если $\overline{F_{\text{сопр}}} = 0 \to \overline{F_{\text{упр}}} = m\bar{a}$ , $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ , $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ , $\overline{F_{\text{упр}}} = -k\bar{x}$,

$$m\ddot{x} = -kx \to \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (1)$$

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$x(t) = x_m \cos\omega_0 t$ , $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , если считать, что при $t = 0$, $x = x_m$.

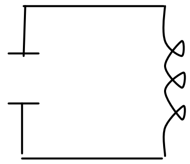
Пусть $\overline{F_{\text{сопр}}} = -r\bar{v}$; $m\bar{a} = \overline{F_{\text{упр}}} + \overline{F_{\text{сопр}}}$.

Получаем уравнение $\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$ (1')

Решение (1') имеет вид

$x = x_m e^{-\alpha t} \cos\omega_0 t$ , что указывает на затухание колебаний.

б) Электромагнитные колебания в колебательном контуре.




Для идеального колебательного контура, сопротивление которого $R = 0$, напряжение на конденсаторе $U = \frac{q(t)}{C}$ совпадает с э.д.с. индукции на катушке $L$.

$U(t) = \varepsilon_i(t)$; $\varepsilon_i(1) = -L\frac{dI}{dt} = -L\ddot{q}$, $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ ,

Получаем уравнение $\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ (2) , решение которого имеет вид $q(t) = q_m \cos\omega_0 t$, если при $t = 0$, $q = q_m$.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

При $R \neq 0$, $\varepsilon_i = U + IR \to -L\ddot{q} = \frac{q}{C} + R\dot{q}$, что дает уравнение

$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$ (2')

Один из процессов переходит в другой при замене

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| маятник | $x(t)$ | $v = \dot{x}$ | $a = \ddot{x}$ | $m$ | $r$ | $k$ |
| контур | $q(t)$ | $I = \dot{q}$ | $\dot{I} = \ddot{q}$ | $L$ | $R$ | $\frac{1}{C}$ |

## Тема 1. Классификация дифференциальных уравнений 2 порядка в частных производных

Для упрощения записей ограничимся случаем двух переменных.

Пусть $U(x,y)$ - искомая функция. Ограничиваясь случаем производных не выше второй степени будем считать заданным некий функционал

$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0$, где $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$; $u_x=\frac{\partial u}{\partial y}$; $u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; $u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

### 1.1⁰ Линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

Введем более простое уравнение:

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0. \qquad (1.1)$$

Оно линейно по старшим производным, если a, b, c зависят только от x, y. (не зависят от u). Учитывая вклады от производных более низкого порядка запишем (1.1) как

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+du+f=0. \qquad (1.2)$$

Если $\{a,b,c,b_1,b_2,d,f\}$ – зависят только от x, y, то уравнение (1.2) линейно.

Если $\{a,b,c,b_1,b_2,d,f\}=$ const, то уравнение называется линейным ДУ с постоянными коэффициентами.

Если $f=0$, то (1.2) – линейное однородное уравнение. Нашей дальнейшей целью является упрощение формы ДУ путем подбора других систем координат. Введем замену переменных

$\{x,y\}\to\{\xi,\eta\}$, где $\xi=\varphi(x,y)$; $\eta=\Psi(x,y)$.

Новые координаты выбираются так, чтобы соответствующий определитель

$$D=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x\neq 0.$$

<u>Лемма 1.</u> При переходе к новой системе координат линейное уравнение остается линейным. Нужно доказать, что (1.1) перейдет в некоторое линейное уравнение:

$$\tilde{a}u_{\xi\xi}+\tilde{b}u_{\xi\eta}+\tilde{c}u_{\eta\eta}+\tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0. \qquad (1.1')$$

Докажем, что $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$ зависят только от $\xi,\eta$. Подсчитаем производные в (1.1) через новые переменные.

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$ ,

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$ ,

$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\xi_x^2 + u_\eta \eta_{xx}$ ,

$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y + u_\xi \xi_{xy} + u_{\eta\xi}\xi_x\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\eta \eta_{xy}$ ,

$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_{\eta\xi}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy}$ .

Чтобы построить уравнение (1.1’), нужно сгруппировать члены с одинаковыми производными. Получаем

$\tilde{a} = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,$

$\tilde{b} = 2a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + 2c\xi_y\eta_y,$

$\tilde{c} = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2,$ (1.3)

$\widetilde{b_1} = a\xi_{xx} + b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y,$

$\widetilde{b_2} = a\eta_{xx} + b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y.$

Видим, что $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ зависят только от $\xi, \eta$.

Ч. т. д.

Аналогично можно увидеть, что линейное уравнение (1.2) также переходит в линейное дифференциальное уравнение.

## $1.2^0$ Три типа ДУ второго порядка в частных производных

Введем некоторую величину, называемую дискриминантом для (1.1) и (1.2)

Для (1.1) $\Delta = b^2 - 4ac,$ (1.4)

Для (1.1’) $\Delta = \widetilde{b^2} - 4\tilde{a}\tilde{c}$ . (1.4’)

Лемма 2. При смене системы координат знак $\Delta$ не меняется, если определитель преобразования $D$ не обращается в ноль.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Доказательство

Представим:

$$\tilde{\Delta} = k(a^2)a^2 + k(b^2)b^2 + k(c^2)c^2 + k(ab)ab + k(ac)ac + k(bc)bc\ .$$

Непосредственные вычисления дают

$$k(a^2) = 4\xi_x^2\eta_x^2 - 4\xi_x^2\eta_x^2 = 0,$$

$$k(b^2) = (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)^2 - 4(\xi_x\eta_x\xi_y\eta_y) = (\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_y)^2 = D^2,$$

$$k(c^2) = 4\xi_y^2\eta_y^2 - 4\xi_y^2\eta_y^2 = 0,$$

$$k(ab) = 4\xi_x\eta_x(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) - 4\xi_x^2\eta_x\eta_y - 4\eta_x^2\xi_x\eta_y = 0,$$

$$k(ac) = 8\xi_x\eta_x\xi_y\eta_y - 4\xi_x^2\eta_y^2 - \eta_x^2\xi_y^2 = -4(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 = -4D^2,$$

$$k(bc) = 0.$$

Соединим результаты:

$$\tilde{\Delta} = b^2D^2 - 4D^2ac = \Delta D^2, \qquad \tilde{\Delta} = \Delta D^2.$$

Якобиан не ноль, значит $D^2 > 0$, т.е. знак $\Delta$ не меняется.

Ч.т.д.

Если в какой-то области дискриминант имел определенный знак, то он имеет тот же знак в области, полученной данным преобразованием координат.

Будем называть уравнения в той области, где

$\Delta > 0$ – гиперболическим,

$\Delta = 0$ – параболическим,

$\Delta < 0$ – эллиптическим.

Рассмотрим условия, когда $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ обращаются в ноль.

### 1.3⁰ Характеристические уравнения для ДУ второго порядка

Новые координаты приводят к изменению коэффициентов по формулам (1.3)

$$\tilde{a} = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,$$

$$\tilde{c} = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2.$$

Лемма 3. Если $\xi = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения

$$a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0, \qquad (1.5)$$

то $\varphi(x,y)=c$, где c = const является общим интегралом уравнения

$$a(dy)^2-bdxdy+c(dx)^2=0. \qquad (1.6)$$

Доказательство:

Будем считать, что уравнение (1.5) выполняется, если вместо $\xi$ подставить $\varphi$(x,y).

$$a\varphi_x^2+b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2=0. \qquad (1.5)$$

Поделим обе части на $\varphi_y$:

$$a\frac{\varphi_x{}^2}{\varphi_y}-b\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+c=0. \qquad (*)$$

$\varphi(x,y)=c\rightarrow y=y(x)\rightarrow\varphi(x,y(x))=C$ – общий интеграл.

Мы должны показать, что оно удовлетворяет (1.6).

Продифференцируем по x:

$$\varphi_x+\varphi_y y_x=0.$$

Отсюда:

$y_x=\frac{dy}{dx}\rightarrow y_x=-(\frac{\varphi_x}{\varphi_y})$ - из определения общего интеграла.

Получаем

$$a(\frac{dy}{dx})^2-b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0. \qquad (1.5)$$

Помножим на $(dx)^2$, получим:

$$a(dy)^2-bdxdy+c(dx)^2=0, \qquad (1.6)$$

т.е. (1.5) → (1.6)

Ч.т.д.

Лемма 4. Если $\varphi(x,y)=C$– является общим интегралом

$a(dy)^2-bdxdy+c(dx)^2=0$ (1.6), то $\xi=\varphi(x,y)$ - частное решение (1.5), т. е. $a\varphi_x^2+b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2=0$ (1.5).

Доказательство.

Рассмотрим область решения, в которой выберем произвольную точку $(x_0,y_0)$.

Обозначим значение $\varphi(x_0, y_0) = C_0$. Построим линию L, на которой $\varphi(x, y) = C_0$.

Поделим (1.6) на $(dx)^2$ , получим:

$(1.6) \to a(\frac{dy}{dx})^2 - b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0,$

$ay_x^2 - by_x^2 + c = 0$. Поскольку $\varphi(x, y(x)) = C_0$ , $y_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$.

Получаем:

$a(\frac{\varphi_x}{\varphi_y})^2 + b\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0$, на линии $L$.

Помножим на $\varphi_y^2$, получаем:

$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$ , на линии $L$. Поскольку точка $x_0, y_0$ выбиралась произвольно, то уравнение (1.5) справедливо во всей рассматриваемой области.

Ч.т.д.

Уравнение (1.6) – характеристическое уравнение для (1.1). Зная общий интеграл для характеристического уравнения, мы можем так подобрать новую переменную $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = C_1$ - общий интеграл для (1.6), чтобы $\tilde{a} = 0$.

Аналогичным образом, если у нас есть еще один общий интеграл для (1.6),

$\Psi(x, y) = C_2$ - общий интеграл для (1.6), чтобы $\tilde{c} = 0$.

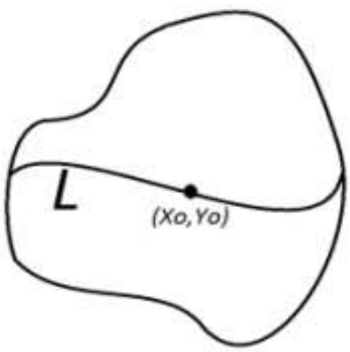
Для характеристического уравнения

$a(\frac{dy}{dx})^2 - b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0$. (1.6)

Получаем два решения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2a} = \frac{\mathrm{b} + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2a} = \frac{\mathrm{b} - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$




1) $\Delta > 0$ – гиперболические уравнения.

В этом случае есть 2 решения (2 общих интеграла) для (1.6).

$\varphi(x, y) = C_1$, $\Psi(x, y) = C_2$.

Тогда можем обеспечить уничтожаемость $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$.

2) $\Delta = 0$ - параболические уравнения.

Есть одно решение (один общий интеграл) для (1.6).

$\varphi(x,y) = C$, исключается только $\tilde{a}$ или $\tilde{c}$.

3) $\Delta > 0$ – эллиптическое уравнение.

Есть два комплексных решения характеристического уравнения.

**1.4[0] Приведение дифференциальных уравнений второго порядка к каноническому виду**

1) Гиперболические уравнения $(\Delta > 0)$.

$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y) = 0.$

Сведем его с помощью замены переменных к

$\tilde{a}u_{\xi\xi} + \tilde{b}u_{\xi\eta} + \tilde{c}u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$

Так как $\Delta > 0$. Выбираем $\xi = \varphi(x,y)$ , где $\varphi$ – общий интеграл (1.6)

Тогда: $\tilde{a} = a\xi_x^2 + b(\xi_x\xi_y) + c\xi_y^2 = 0$ (1.5), - аналогично

$\eta = \Psi(x,y)$; $\tilde{c} = a\eta_x^2 + b(\eta_x\eta_y) + c\eta_y^2 = 0.$ (1.5)

Получаем канонический вид гиперболического уравнения

$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$, где $\Phi = -\frac{\tilde{F}}{\tilde{b}}.$ (1.7)

Введем еще одну замену:

$\xi = \alpha + \beta; \eta = \alpha + \beta;$

$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}; \beta = \frac{\xi+\eta}{2}.$

Посчитаем производные:

$u_\xi = u_\alpha\alpha_\xi + u_\beta\beta_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta) \quad \alpha_\xi = \frac{1}{2}; \beta_\xi = \frac{1}{2}.$

$u_\eta = u_\alpha\alpha_\eta + u_\beta\beta_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta) \quad \alpha_\eta = \frac{1}{2}; \beta_\eta = -\frac{1}{2}.$

$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha\alpha}\alpha_\xi + u_{\alpha\beta}\beta_\eta + u_{\alpha\beta}\alpha_\eta + u_{\beta\beta}\beta_\eta = \frac{1}{2}\ (\frac{1}{2}u_{\alpha\alpha} - \frac{1}{2}u_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\ u_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}u_{\beta\beta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$

В итоге получаем еще один канонический вид для гиперболических уравнений

$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)$, где $\Phi_1 = 4\Phi$. (1.7')

2) Параболические уравнения ($\Delta = 0$).

Поскольку, $\Delta = b^2 - 4ac$, $b^2 = 4ac$.

Характеристическое уравнение имеет одно решение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{b}}{2a}.$$

Пусть $\varphi(x,y) = C$. Выберем новую переменную $\xi = \varphi(x,y)$, что позволяет обратить коэффициент $\tilde{a}$ в 0.

$\tilde{a} = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0$. Вторую переменную берем произвольным образом

$\eta = \Psi(x,y)$

Подсчитаем $\tilde{b}$.

$$\tilde{b} = 2a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_x) + 2c\xi_y\eta_y = 2\varphi_x\Psi_x + b(\varphi_x\Psi_y + \varphi_y\Psi_x) + 2c\varphi_y\Psi_y =$$
$$\Psi_x(2a\varphi_x + b\varphi_y + \Psi_y(b\varphi_x + 2c\varphi_y) = \phi_x\Psi_x\left(-2a\,\frac{dy}{dx} + b\right) + \phi_y\Psi_y\left(-b\frac{dy}{dx} + 2c\right) = 0,$$

поскольку $\varphi(x,y(x)) = C$, $\varphi_x + \varphi_y\frac{dy}{dx} = 0$;

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ . В результате получаем

$u_{\eta\eta} = \Phi_2(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$. (1.8)

Это каноническая форма уравнения параболического типа.

3) Эллиптические уравнения ($\Delta < 0$).

В этом случае

$\varphi(x,y) = C$ ,

$\varphi^*(x,y) = C^*$,

- комплексные общие интегралы. Представим

$\xi = \varphi(x,y) = C = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$,

$\eta = \varphi^*(x,y) = C^* = \alpha(x,y) - i\beta(x,y)$,

(1.1'') $\tilde{a}'u_{\alpha\alpha} + \tilde{b}'u_{\alpha\alpha} + \tilde{c}'u_{\beta\beta} + F(\alpha,\beta)$.

После замены переменных получаем

$\tilde{a}u_{\xi\xi} + \tilde{b}u_{\xi\eta} + \tilde{c}u_{\xi\xi} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$, где

$\tilde{a} = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0.$

Совершим еще одну замену переменных

** $\{x, y\} \to \{\xi, \eta\} \to \{\alpha, \beta\}.$

$\tilde{a} = a(\alpha_x + i\beta_x)^2 + b(\alpha_x + i\beta_x)^2(\alpha_y + i\beta_y)^2 + c(\alpha_y + i\beta_y)^2 = a({\alpha_x}^2 - {\beta_x}^2) + b(\alpha_x\alpha_y - \beta_x\beta_y) + c({\alpha_y}^2 - {\beta_y}^2) + i[2a\alpha_x\beta_x + b(\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x) + 2c\alpha_y\beta_y] = 0$

.

При второй замене переменных (1.3) переходит в (1.3')

$$\tilde{a}' = a\alpha_x^2 + b\alpha_x\alpha_y + c\alpha_y^2,$$

$$\tilde{b}' = 2a\alpha_x\beta_x + b(\alpha_x\beta_y + \beta_x\alpha_y) + 2c\alpha_y\beta_y, \qquad (1.3')$$

$$\tilde{c}' = a\beta_x^2 + b\beta_x\beta_y + c\beta_y^2.$$

Получаем: $\widetilde{a'} = \widetilde{c'}$ ; $\widetilde{b'} = 0.$

Каноническая форма эллиптического ДУ имеет вид

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi_3(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \qquad (1.9)$$

где $\Phi_3 = -\frac{\tilde{F}}{\tilde{a}'}$.

В итоге для разных типов уравнений получаем

$$u_{\xi\eta} = \Phi, \qquad (1.7)$$

$$u_{\eta\eta} = \Phi_2, \qquad (1.8)$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \Phi_1, \qquad (1.7')$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi_3. \qquad (1.9)$$

$\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ - всевозможные комбинации из $\{\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\}$.

**1. 5$^0$ Каноническая форма ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.**

Рассмотрим уравнение (1.2)

$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + du + f = 0$ , где

$\{a, b, c, b_1, b_2, d, f\}$ - постоянные по $x, y$.

Попробуем свести к канонической форме путем замены переменных.

Если использовать замену (*), то можно перейти:

$* \quad \{x, y\} \to \{\xi, \eta\},$

$\xi = \varphi(x, y); \eta = \Psi(x, y).$

Получим канонические формы следующего типа:

$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \tilde{b}_1 u_\xi + \tilde{b}_2 u_\eta + \tilde{d}u + \tilde{f} = 0,$

$u_{\eta\eta} + \tilde{b}_1 u_\xi + \tilde{b}_2 u_\eta + \tilde{d}u + \tilde{f} = 0,$

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{b}_1 u_\xi + \tilde{b}_2 u_\eta + \tilde{d}u + \tilde{f} = 0.$

Существует преобразование, позволяющее упростить эти уравнения.

Введем: $u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} v(\xi, \eta)$

$\lambda$ и $\mu$ подбираются так, чтобы коэффициенты при первых производных обращались в ноль

$$\begin{array}{r|l}
\tilde{b}_1 & u_\xi = \lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta} v + e^{\lambda\xi+\mu\eta} v_\xi \\
\tilde{b}_2 & u_\eta = \mu e^{\lambda\xi+\mu\eta} v + e^{\lambda\xi+\mu\eta} v_\eta \\
1 & u_{\xi\xi} = \lambda^2 e^{\lambda\xi+\mu\eta} v + \lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta} v_\xi + \lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta} v_\xi + e^{\lambda\xi+\mu\eta} v_{\xi\xi} \\
-1 & u_{\eta\eta} = \mu^2 e^{\lambda\xi+\mu\eta} v + 2\mu e^{\lambda\xi+\mu\eta} v_\eta + e^{\lambda\xi+\mu\eta} v_{\eta\eta}
\end{array}$$

После подстановки в (1.7') получаем

$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + (2\lambda + \tilde{b}_1) v_\xi + (-2\mu + \tilde{b}_2) v_\eta + (\lambda^2 - \mu^2 + \tilde{b}_1\lambda + \tilde{b}_2\mu + \tilde{d}) v + e^{-(\lambda\xi+\mu\eta)} \tilde{f} = 0$ ,

где $f_1 = e^{-(\lambda\xi+\mu\eta)} \tilde{f}$ .

Берем: $\lambda = -\frac{\tilde{b}_1}{2}$; $\mu = -\frac{\tilde{b}_2}{2}$ .

В результате получаем: $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma_1 v + f_1$ . (1.10)

Аналогично, вместо (1.8) и (1.9) получаем

$v_{\xi\xi} + \tilde{b}_1 u_\xi + f_1 = 0,$ (1.11)

$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma_3 v + f_1 = 0,$ (1.12)

где все $\gamma$ и все $f$ постоянные величины.

Получили каноническую форму ДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами.

## $1.6^0$ Каноническая форма ДУ со многими переменными

Будем считать, что искомая функция зависит от $n$ переменных

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Представим уравнение в виде

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}\right) = 0$. (1.13)

Здесь $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$; $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$;

Перейдем к другой системе координат:

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \to \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$

$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1,2, \dots, n.$

Распишем в общем виде производные из (1.13)

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$ Получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{ij} u_{\xi_k \xi_l} + \tilde{F}\left(\xi_1, \dots, \xi_n, u, u_{\xi_1}, \dots, u_{\xi_n}\right) = 0,$$ где

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}.$$

При замене переменных меняется матрица, составленная из коэффициентов при двух производных:

$A = \|a_{ij}\| \to \tilde{A} = \|\tilde{a}_{ij}\|$

Существует линейное преобразование, приводящее матрицу квадратичной формы к диагональному виду

$$a_{ij}^0 = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j \\ \pm 1, 0 \text{ при } i = j \end{cases}$$

При линейных преобразованиях матрицы число диагональных элементов >0, <0, =0 сохраняется (в точке).

Предположим, что один элемент одного знака, а остальные – другого.

Тогда:

$u_{\xi_1\xi_1} - \sum_{i=2}^{n} u_{\xi_i\xi_i} = \Phi_i$ – это каноническая форма уравнения гиперболического типа.

$1 \le m < n$.

$$\sum_{i=1}^{m} u_{\xi_i\xi_i} - \sum_{i=m+1}^{n} u_{\xi_i\xi_i} = \Phi_1' \qquad (1.14)$$

–супергиперболическая форма ( $m$ - с плюсом, $(n-m)$ - с минусом),

$$\sum_{i=1}^{m} u_{\xi_i\xi_i} = \Phi_2 \qquad (1.15)$$

– $(1 \le m < n)$ - параболическая форма,

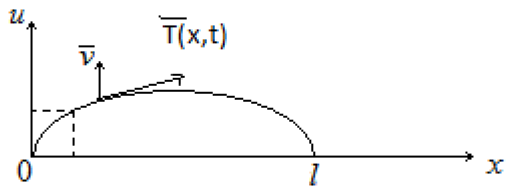
$$\sum_{i=1}^{n} u_{\xi_i\xi_i} = \Phi_3 \qquad (1.16)$$

–эллиптическая форма.

### Тема 2. Краевые задачи гиперболического типа

### $2.1^0$. Уравнения малых поперечных колебаний упругой струны.

У нас есть некая гибкая струна, которая колеблется.

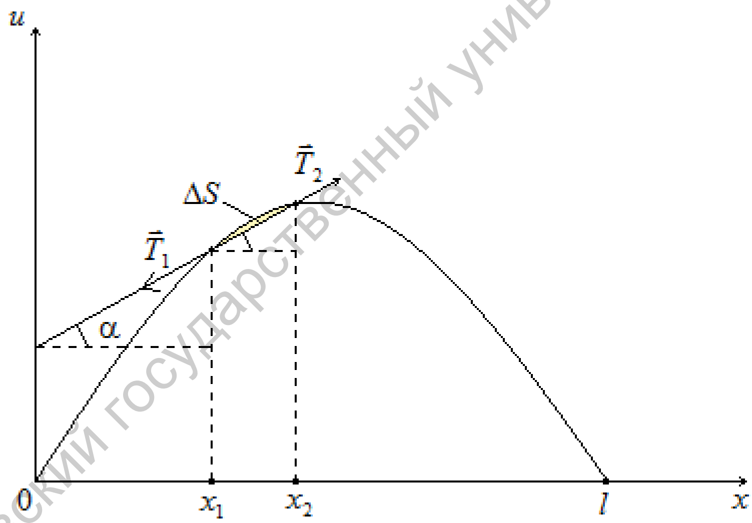



В каждый момент времени струна имеет профиль u(x,t) – смещение точки с координатами $x$ к моменту времени $t$.

Рассмотрим некоторые ограничения.

*а*) $\vec{v}(x,t) \perp Ox$ , $\vec{F}вн \perp Ox$ (поперечность). Поперечные колебания реализуются перпендикулярно направлению оси $Ox$ и лежат в одной плоскости. В положении равновесия струна лежит на оси x. Сила внешнего воздействия тоже перпендикулярна направлению оси $Ox$.

*б*) $\vec{T}$ (сила упругости) касательна к профилю струны и ее величина мало меняется со временем $\left|\vec{T}(x,t_2)\right| = \left|\vec{T}(x,t_1)\right|$.




в) Колебания малы, т.е. нет растяжения участков длины (участки практически свою длину не меняют).

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2},$$

$$dS = \sqrt{1 + u_x^2}\, dx \, .$$

Длина дуги ΔS:

$$\Delta S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1, \text{где}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = tg\, \alpha\, .$$

Условие малости колебаний дает

$$\Delta S \approx \Delta x \to \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 \approx 0, \qquad u_x \approx 0,$$

$$tg^2 \alpha = 0.$$

Выпишем проекции векторов $\vec{v}$ и $\vec{\mathrm{T}}$ на оси.

$$\left. \begin{array}{l} v_{[x]} = 0 \\ v_{[u]} = \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_t \end{array} \right| \begin{array}{l} T_{[x]} = T \cos\alpha = T \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = T \dfrac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{U}_x^2}} \approx T, \\ T_{[u]} = T \sin\alpha = T \cdot \dfrac{tg\, \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} \approx T u_x \end{array} .$$

Пусть m – масса длины l.

Введем $k(x) = \dfrac{dm}{dx}$ - линейная плотность массы.

Если струна однородна, то $k = \dfrac{m}{l}$. Участок струны dx с *dm=kdx*, движется со скоростью $\vec{v}$ *(x,t).*

Для участка dx и Δx получаем изменение импульса

$d\vec{p}(x,t) = k\vec{v}(x,t)dx, \; \vec{p}(t) = \int_{x_1}^{x_2} k\vec{v}(x,t)dx.$

Теперь используем 2ой закон Ньютона: $\bar{p}(t_2) - \bar{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt$ ,

$$d\bar{p} = \kappa(x)\vec{v}(x,t)dx, \qquad \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \int_{x_1}^{x_2} \kappa(x)\left[\vec{v}(x,t_2) - \vec{v}(x,t_1)\right] dx.$$

Определим силу, действующую на участок струны

$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{вн}$ , где $F_{вн}$ - внешняя сила.

Пусть $\vec{f}(x,t)=\dfrac{d\vec{F}_{вн}}{dx}$ и $\vec{F}_{вн}=\int\limits_{x_1}^{x_2}\vec{f}(x,t)dx$. Сила $\vec{f}$ перпендикулярна к оси x, т.е. $f_{[u]}=f$ , $f_{[x]}=0$.

Тогда второй закон Ньютона примет вид векторного равенства

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\kappa(x)\left[\vec{v}(x,t_2)-\vec{v}(x,t)\right]dx=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\vec{T}_1(x,t)+\vec{T}_2(x,t)+\int\limits_{x_1}^{x_2}\vec{f}(x,t)dx\right]dt.$$

Получаем проекцию векторного равенства на ось Ou:

$$Ou:\int\limits_{x_1}^{x_2}\kappa(x)\left[\mathrm{u}_t(x,t_2)-\mathrm{u}_t(x,t_1)\right]dx=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{T_2(x_2)\mathrm{u}_x(x_2,t)-T_1(x_1)\mathrm{u}_x(x_1,t)+\int\limits_{x_1}^{x_2}\vec{f}(x,t)dx\right\}dt.$$

Проекция этого равенства на ось Ox может быть сведена к векторному равенству $0=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[T_2(x,t)-\vec{T}_1(x,t)\right]dt$ .

Интеграл не зависит от $t$, и нет зависимости $|\vec{\mathrm{T}}|$ от x. В итоге

$T_1=T_2=T_0=const$.

Получаем:

$\int_{x1}^{x2}k(x)(u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1))dx=\int_{t1}^{t2}[T_0(u_x(x_2,t)-u_x(x_1,t))+$

$+\int_{x1}^{x2}f(x,t)dx]dt$ – интегральное уравнение колебаний струны.

Чтобы привести интегральное уравнение к дифференциальному, нужно воспользоваться теоремой о среднем.

Теорема о среднем

$$\int\limits_a^b f(x)dx=f_{ср}(b-a)=f(\xi)(b-a);\quad \xi\in[a,b].$$

Тогда

$$\kappa(\xi)\left[u_t(\xi,t_2)-u_t(\xi,t_1)\right]\Delta x=\left\{T_0\left[u_x(x_2,t)-u_x(x_1,t)\right]+\int\limits_{x_1}^{x_2}\vec{f}(\xi,\tau)\Delta x\right\}\Delta t$$ , где

$\Delta x=x_2-x_1;\quad \Delta t=t_2-t_1;\quad \xi,\xi_1\in[x_1,x_2];\quad \tau\in[t_1,t_2]$. После деления на $\Delta x\Delta t$

$$\kappa(\xi)\frac{u_t(\xi,t_2)-u_t(\xi,t_1)}{\Delta t}=T_0\frac{u_x(x_2,\tau)-u_x(x_1,\tau)}{\Delta x}+f(\xi,\tau)$$ и предельного перехода

$\Delta x\to 0$ , $\Delta t\to 0$ , $x_1,x_2\to x$ , $t_1,t_2\to t$ , $\xi,\xi_1\to\xi$ , $\tau_1,\tau_2\to\tau;$ получаем дифференциальное уравнение со вторыми производными

$$\kappa(x)u_{xx}(x,t) = T_0 u_{xx}(x,t) + f(x,t),$$

$$u_{tt}(x,t) = \mathrm{v}^2 u_{xx}(x,t) + f_1(x,t), \qquad (2.1)$$

где

$$\mathrm{v}^2 = \frac{T_0}{\kappa},\ f_1 = \frac{f}{\kappa}.$$

Для однородной струны к – постоянна.
(2.1) – уравнение, описывающее малые колебания струны.

Физический смысл $\mathrm{v}^2$ определим из соображений размерности.

$$[\mathrm{v}^2] = \left[\frac{T_0}{\kappa}\right] = \frac{Н}{кг/м} = \frac{Н\cdot м}{кг} = \frac{\cancel{кг}\cdot м}{с^2}\cdot\frac{м}{\cancel{кг}} = \frac{м^2}{с^2}$$

, следовательно v является скоростью, не совпадающей со скоростью точек струны. Ее смысл будет установлен в дальнейшем.
Покажем, что (2.1) уравнение гиперболического типа.
В общем виде

$$(1.1)\ au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0\ ,\ y \to t.$$

Определим дискриминант $\Delta$ для (2.1). Сравнивая с (1.1), получаем

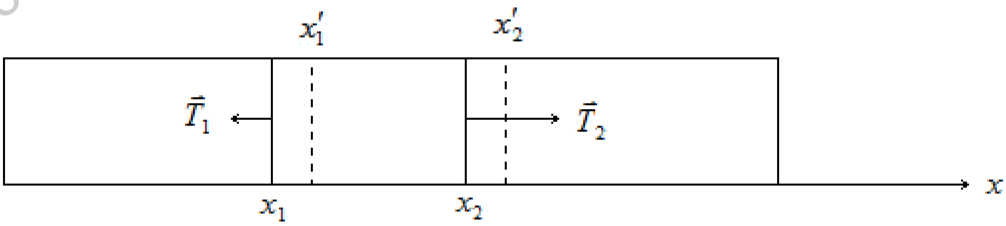
$$a = \mathrm{v}^2\ ,\ b = 0\ ,\ c = -1,$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4\mathrm{v}^2 > 0$ . Следовательно (2.1) является уравнением гиперболического типа.

## $2.2^0$. Малые продольные колебания упругого стержня

Под действием внешних сил стержень начинает колебаться.

Искомая функция $u = u(x,t)$ – величина смещения к моменту времени t точки, имевшей в положении равновесия координату x.




Рассмотрим некоторые ограничения:
*а*) колебания точек стержня совершаются вдоль оси $x$, т.е.$\mathrm{v}=\mathrm{v}_x$, $T=T_x$, $F=F_x$;
*б*) работает закон Гука, причем $|\vec{T}(x,t_2)| = |\vec{T}(x,t_1)|$;

*в*) колебания малы $(u_x)^2 \approx 0$ (по аналогии с $2.1^0$).

Введем характеристики деформации.

Если $l_0$ – длина в положении равновесия,

$l$ – длина в смещенном положении,

тогда $l - l_0$ – абсолютное удлинение,

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$ – относительное удлинение.

Пусть

$$\Delta x = x_2 - x_1,\ x_1 = x,\ x_2 = x + \Delta x,$$

$$t = 0,\ \Delta t = t,\ t_1 = 0,\ t_2 - t = \Delta t.$$

Начало рассматриваемого участка x переходит в $x + u(x, \Delta t)$, его конец x+Δx переходит в $x + \Delta x + u(x + \Delta x, \Delta t)$. Тогда

$$l_0 = \Delta x,\ \ l - l_0 = l - \Delta x = u(x + \Delta x, \Delta t) - u(x, \Delta t),\ l = \Delta x + u(x + \Delta x, \Delta t) - u(x, \Delta t).$$

Относительное удлинение примет вид:

$$\varepsilon = \frac{u(x + \Delta x, \Delta t) - u(x, \Delta t)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta t = t$, $\Delta x \to 0$, получаем: $\varepsilon(x, t) = u_x(x, t)$.

Силу натяжения по закону Гука представим как

$$T(x, t) = \kappa(x) u_x(x, t).$$

Будем пользоваться вторым законом Ньютона:

$$\bar{p}(t_2) - \bar{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt, \text{где}$$

$$\vec{F} = \bar{T}_2 + \bar{T}_1 + \vec{F}_{внеш},\ \vec{F}_{внеш} = \int_{x_1}^{x_2} \bar{f}(x, t) dx.$$

Введем линейную плотность массы

$\kappa = \dfrac{dm}{dx}$, где $m$ – масса стержня; $l$ – длина стержня.

dm=kdx, $d\vec{p} = \vec{v}(x,t)dm$.

Если стержень однороден, то $\kappa = \dfrac{m}{l}$. Запишем изменение импульса

$$d\bar{p}(x,t) = \kappa\vec{v}(x,t)\,dx \quad , \qquad \bar{p}(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} \kappa\vec{v}(x,t)\,dx \ ,$$

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \int_{x_1}^{x_2} \kappa\left[\vec{v}(x,t_2) - \vec{v}(x,t_1)\right]dx.$$

В нашем случае $\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dx$.

Импульс силы равен:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \vec{T}_2(x_2,t) + \vec{T}_1(x_1,t) + \int_{x_1}^{x_2} \vec{f}(x,t)\,dx \right\} dt$$

, тогда по второму закону Ньютона получаем

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \int_{x_1}^{x_2} \kappa\left[\vec{\mathrm{v}}(x,t_2) - \vec{\mathrm{v}}(x,t_1)\right]dx = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{\kappa}\left[\vec{T}_1(x,t) + \vec{T}_2(x,t) - \int_{x_1}^{x_2} \bar{f}(x,t)\,dx\right]dt .$$

Легко видеть, что $\mathrm{v}_x = \frac{\partial u}{\partial t} = u_t$.

Проекция векторного равенства на ось $Ox$ дает

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{\kappa}\left[u_t(x,t_2) - u_t(x,t_1)\right]dx = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \mathrm{\kappa}(x_2)\,u_x(x_2,t) - \mathrm{\kappa}(x_1)\,u_x(x_1,t) + \int_{x_1}^{x_2} \bar{f}(x,t)\,dx \right\} dt .$$

Можем воспользоваться теоремой о среднем.
Получаем:

$$\kappa(\xi)\left[u_t(\xi,t_2) - u_t(\xi,t_1)\right]\Delta x = \left[\kappa(x_2)\,u_x(x_2,\tau) - \kappa(x_1)\,u_x(x_1,\tau)\right]\Delta t + f(\xi,\tau)\,\Delta x\Delta t \ |$$

Делим на ΔxΔt.
Устремляем $\Delta x$ и $\Delta t$ к нулю и получаем:

$$\Delta x \to 0,\ x_1 = x,\ x_2 = x + \Delta x,$$

$$\Delta t \to 0,\ t_1 = t,\ t_2 = t + \Delta t,$$

$$\xi, \xi_1 \to x,\ \tau \to t.$$

Получаем уравнение

$$\kappa(x)\,u_{tt}(x,t) = \left[\kappa(x)\,u_x(x,t)\right]_x + f(x,t) \ . \quad (2.2)$$

Пусть $\kappa$ не зависит от x.
Тогда уравнение (2.2) примет вид

$\kappa(x)u_{tt} = \kappa(x)u_{xx} + f(x,t)$

Если ввести: $\quad \text{v}^2 = \dfrac{k}{\kappa}$ , $f_x = \dfrac{f}{\kappa}$ , то получим

$u_{tt} = \text{v}^2 u_{xx} + f_x \quad (2.2)$ – уравнение продольных колебаний стержня, которое совпадает с уравнением для поперечных колебаний струны; т.е. 2 разных математических процесса описываются одинаково.

### $2.3^0$. Малые поперечные колебания упругой мембраны

Под мембраной будем понимать поверхность $S$, опирающуюся на замкнутый контур $L$.

Введём некоторые ограничения:

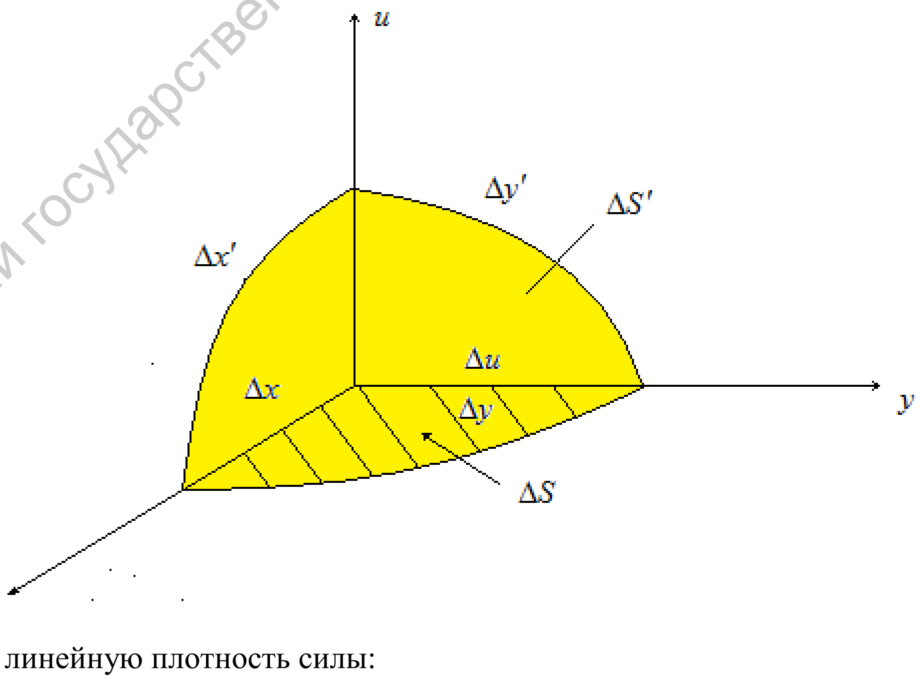
а) $\vec{v}, \overline{F}_{внеш} \perp Ox$ и $Oy$, где v- скорость точки мембраны.

Точки мембраны колеблются перпендикулярно плоскости, в которой она находится в положении равновесия.

$u = u(x,y,t)$ – отклонение от положения равновесия точки с координатами $(x,y)$ в момент времени $t$. Скорость $\vec{v}$ перпендикулярна плоскости (x,y). Таким образом, любое сечение перпендикулярно плоскости $(x,y)$ и для него может быть построена задача, аналогичная 2.1°

б) Будем считать мембрану гибкой, т.е. силы натяжения направлены по касательной к мгновенному профилю.

в) $|T(x,y,t_1)| = |T(x,y,t_2)|$ – модуль силы натяжения не меняется со временем.




Введём линейную плотность силы:

$$\bar{\theta} = \frac{d\bar{T}}{dl}\ ,\ \bar{T} = \int\limits_L \bar{\theta} dl.$$

г) Колебания малы и происходят без растяжения мембраны:

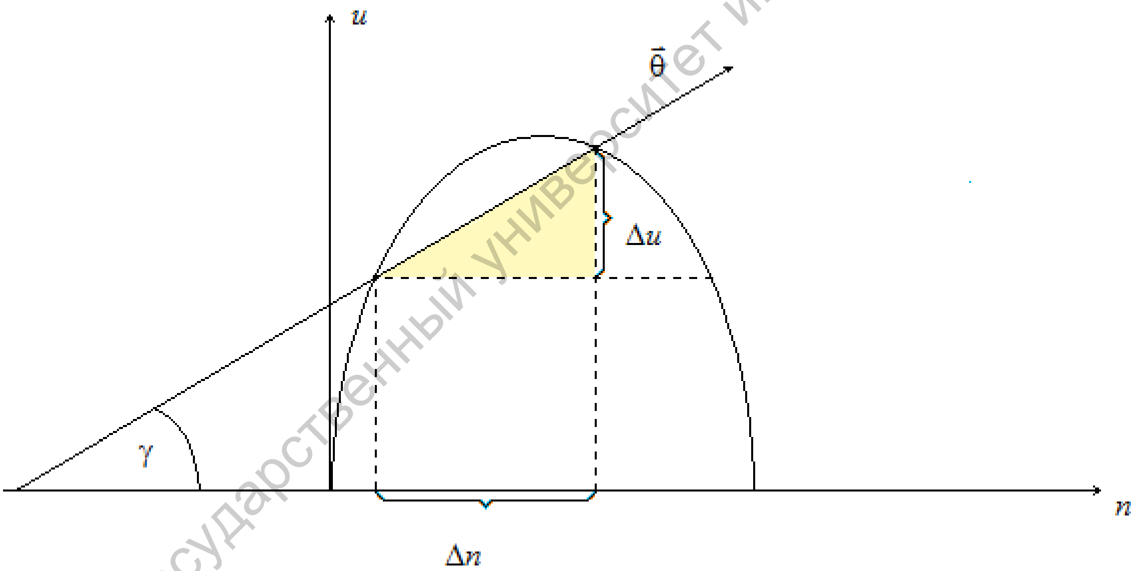
$$\Delta S = \frac{1}{2}\Delta x \Delta y\,, \Delta S' = \frac{1}{2}\Delta x' \Delta y' = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2}\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta u)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta x \Delta y \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2} \approx \Delta S$$

, что дает:

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 = u_x^2 \approx 0\,, \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2 = u_y^2 \approx 0\,, u_x = u_y \approx 0\,, \Delta x \to 0\,, \Delta y \to 0.$$

Возьмём направление $\bar{n}$, в котором мембрана имеет наиболее крутой наклон и рассечём мембрану в этом направлении.




γ – максимальный угол наклона касательной к оси x.

$$tg\,\gamma = \frac{\Delta u}{\Delta n} \Rightarrow tg\,\gamma = \frac{\partial u}{\partial n}; \frac{\Delta u}{\Delta n} = grad\,u \text{ при } \Delta n \to 0.$$

Градиент u направлен в сторону наибольшего возрастания функции u.

Проекции $\vec{\theta} = \dfrac{\partial \vec{T}}{\partial l}$ равны

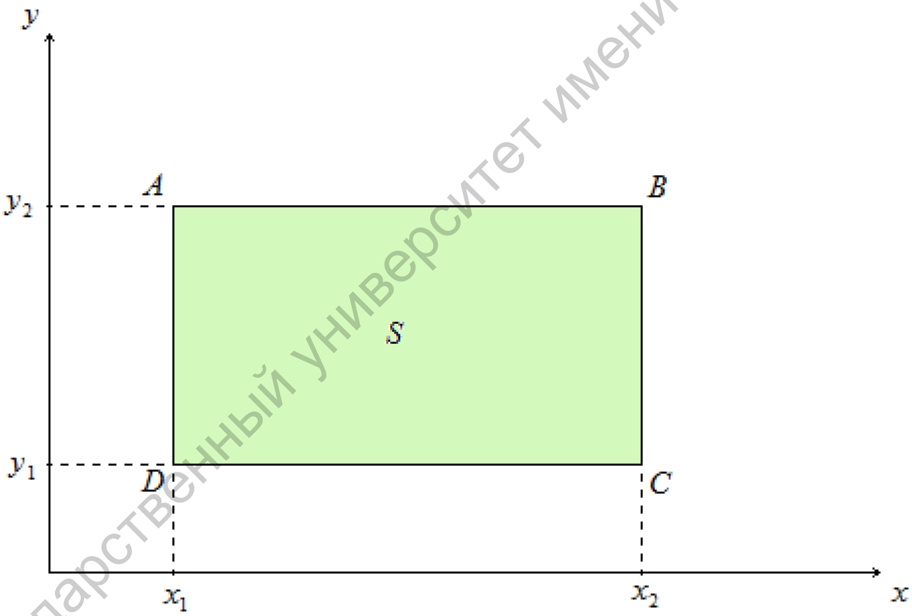
$$\theta(l) = \theta \sin\gamma = \theta \frac{tg\,\gamma}{\sqrt{1+tg^2\gamma}} = \theta \frac{\partial u}{\partial n} = \theta grad_n u,$$

$$\theta(y) = \theta(l) = \theta \cos\gamma = \theta \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\gamma}} = \theta$$ , тогда

$$\theta \frac{\partial u}{\partial n} = \theta grad_n u \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Производная остаётся постоянной и не зависит от времени.

д) Участок мембраны при колебаниях не сдвигается в плоскости $(x, y)$ за время $t$. Пусть
$S \to S'$ за время $t$.




$L \to L'$ за время $t$. Получаем

$\overline{T} = \oint\limits_{ABCD} \overline{\theta} dl = 0$ – условие отсутствия сдвига.

$$T(x) = \int_A^B \theta(x, y)\,dx + \int_C^D \theta(x, y)\,dx = 0.$$

Если равны интегралы по произвольной области, то равны подынтегральные выражения.

$\theta(x, y_2) = \theta(x, y_1) \to 0$ и $|\overline{\theta}|$ не зависит от $y$.
Аналогично

$$T(l) = \int_D^A \theta(x,y)\,dl + \int_B^C \theta(x,y)\,dl = 0,$$

$\theta(x_2) = \theta(x_1)$, $|\theta|$ не зависит от $x$. Следовательно,

$$\theta(x,y,t) = \theta_0 = const.$$

Введем поверхностную плотность массы. Пусть $dS$ – малый элемент мембраны и $m$– масса мембраны, тогда

$$\sigma = \frac{dm}{dS}, \quad m = \iint_{S_M} \sigma(S)\,dS.$$

Используем второй закон Ньютона

$$\bar p(t_2) - \bar p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec F dt,$$

$$d\vec p = dm\vec v, \quad \vec p(t) = \iint_{S_M} \sigma(x,y)\,\vec v(x,y,t)\,dS.$$

Для малого элемента мембраны dS : $dm = \sigma dS$, d$\vec p$=$\sigma dS\,\vec v$.

Для конечного по размерам участка $S \to \vec p(t) = \iint_{S_M} \sigma(x,y)\,\vec v(x,y,t)\,dS$,

$$\vec p(t_2) - \vec p(t_1) = \iint_S \sigma(S)\left[\vec v(S,t_2) - \vec v(S,t_1)\right]dS.$$

Получаем

$$\iint_S \sigma\left[\vec v(S,t_2) - \vec v(S,t_1)\right]dS = \int_{t_1}^{t_2}\left[\vec T + \vec F_{внеш}\right]dt.$$

Введем поверхностную плотность внешней силы

$\vec F = \vec T + \vec F_{внеш}$, $\vec f = \frac{d\vec F_{внеш}}{dS}$, $\vec F_{внеш} = \iint_S \bar f(S,t)\,dS$, тогда второй закон Ньютона перепишется в виде

$$\iint_S \sigma\left[\vec v(S,t_2) - \vec v(S,t_1)\right]dS = \int_{t_1}^{t_2}\left[\oint_L \bar\theta\,dl + \iint_S \bar f(S,t)\,dS\right]dt.$$

Проектируем на ось $Ou$

$$v_u = \frac{du}{dt} = u_t, \quad \theta_u = \theta_0\, grad_n u, \quad f_u = f,$$

$$\iint_S \sigma\left[u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)\right]dS=\int_{t_1}^{t_2}\left[\oint_L \theta_0 grad_n u\,dl+\iint_S \bar f(x,t)\,dS\right]dt.$$

Теорема Остроградского – Гаусса имеет вид в двумерном случае

$$\bar a=\bar a(x,y),\quad \oint_L \bar a_n dl=\int_S div\,\bar a\,dS$$, где

$$div\,\vec a=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y},\quad \vec a=grad\,u=\bar i\,\frac{\partial u}{\partial x}+\bar j\,\frac{\partial u}{\partial y}$$. Тогда

$$a_x=u_x,\quad a_y=u_y;$$

$$\oint_L grad_n u\,dl=\iint_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dS=\iint_S (u_{xx}+u_{yy})\,dS$$. В нашем случае

$$\iint_S \sigma\left[u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)\right]dS=\iint_S \theta_0\int_{t_1}^{t_2}\left[(u_{xx}+u_{yy})\,dS+f(x,t)\,dS\right]dt.$$

Имеем интегральное равенство для произвольных областей, следовательно, равны подынтегральные выражения.

$$\sigma\left[u_t(x,y,t_2)-u_t(x,y,t_1)\right]=\int_{t_1}^{t_2}\left[\theta_0(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)\right]dt.$$

Воспользуемся теоремой о среднем:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt=f(\tau)(t_2-t_1),\ где\ \tau\in[t_1,t_2]$$, и получим

$$\sigma\left[u_t(x,y,t_2)-u_t(x,y,t_1)\right]=\left[\theta_0(u_{xx}+u_{yy})+\bar f(x,y,t)\right]\Delta t\Big|_{\tau}.$$

После предельного перехода

$\Delta t=t_2-t_1$, $t_1=t$, $t_2=t+\Delta t$, $\Delta t\to 0$, $\tau,t_2,t_1\to t;$

получаем

$$\sigma u_{tt}(x,y,t)=\theta_0(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t),$$

$$u_{tt}(x,y,t)=v^2(u_{xx}+u_{yy})+\tilde f(x,y,t),\quad где\ v=\frac{\theta_0}{\sigma},\quad \tilde f=\frac{f}{\sigma}. \qquad (2.3)$$

В отличии от одномерных задач (2.1) и (2.2) уравнение (2.3) является двумерным.

Проверяем размерность $\vec v$:

$$v^2=\frac{\theta_0}{\sigma}\qquad [v]^2=\frac{[\theta_0]}{[\sigma]}=\frac{Н/м}{кг/м^2}=\frac{Н\cdot м}{кг}=\frac{кг\cdot м^2}{с^2\cdot кг}=\frac{м^2}{с^2},\quad [v]=\frac{м}{с}.$$

## 2.4° Электромагнитное поле в однородных средах

Запишем уравнения Максвелла в произвольной среде.

$$(I)\quad rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c} j + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t},$$

$$(II)\quad rot\,\overline{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t},$$

$$(III)\quad div\,\mu\overline{H} = 0,$$

$$(IV)\quad div\,\varepsilon\overline{E} = 4\pi\rho.$$

$\overline{D}$ – *вектор электрической индукции*;
$\overline{E}$ – *вектор напряжённости эл / м поля*;
$\varepsilon$ – *диэлектрическая проницаемость среды*;
$\vec{H}$ – *вектор напряжённости магнитного поля*;
$\vec{B}$ – *вектор магнитной индукции*;
$\mu$ – *магнитная проницаемость среды*.
$\overline{D} = \varepsilon\overline{E}$, $\overline{B} = \mu\overline{H}$,
В однородной среде:
$\bar{j} = \lambda\overline{E}$, $\rho = 0$, $\varepsilon, \mu, \lambda = const$, где λ- удельная электропроводность.

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1, \lambda = 0$.

Запишем уравнения Максвелла в изотропной среде (λ,μ,ε- постоянны):

$$(I)\quad rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\lambda\overline{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t},$$

$$(II)\quad rot\,\overline{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t},$$

$$(III)\quad div\,\overline{H} = 0,$$

$$(IV)\quad div\,\overline{E} = 0.$$

Известно векторное равенство
rot rot $\vec{a}$= grad div $\vec{a}$ - Δ $\vec{a}$.
Действуем операцией rot на первое уравнение.

$$rot\,rot\,\vec{H} = \frac{4\pi\lambda}{c} rot\,\overline{E} + \frac{\varepsilon}{c} rot\frac{\partial \overline{E}}{\partial t},$$

$$grad\,div\,\vec{H} - \nabla^2\vec{H} = \frac{4\pi\lambda}{c} rot\,\overline{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\,\overline{E},$$

Так как $div\,\overline{H} = 0$, то

$$-\nabla^2\vec{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}\left(-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}\right) + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}\right),$$

$$\nabla^2\vec{H} - \frac{4\pi\lambda\mu}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Действуем операцией rot на второе уравнение.

$$rot\,rot\,\overline{E} = -\frac{\mu}{c} rot \frac{\partial \overline{H}}{\partial t},$$

$$grad\,div\,\overline{E} - \nabla^2 \overline{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\,\overline{H}.$$

Так как $div\,\overline{E} = 0$, то

$$-\nabla^2 \overline{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi}{c}\lambda \overline{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}\right).$$ Получаем 6 уравнений для компонент векторов напряженности.

$$\overline{E}\,(E_x, E_y, E_z),\ \overline{H}\,(H_x, H_y, H_z).$$

$$\nabla^2 \overline{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla^2 \vec{H} - \frac{4\pi\lambda\mu}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Введем полевую функцию

$u = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$, для которой

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ где\ \mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},\ b = \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2},$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}u_{tt} - bu_t = 0 \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) – уравнение гиперболического типа, в соответствии с 1.6º , причем - $bu_t$ – поглощение электромагнитным полем энергии.

В одномерном случае уравнение принимает вид:

$$u = u(x,t),\ u_{tt} = \mathrm{v}^2 u_{xx} + f(x,t). \qquad (2.1)$$

### $2.5^0$. Постановка краевых задач и их редукция.

Краевая задача – это совокупность дифференциальных уравнений второго порядка, начальных и краевых условий.
Будем рассматривать уравнение (2.1) – одномерные колебания.

$$u_{tt} = \mathrm{v}^2 u_{xx} + f(x,t),\ u = u(x,t),\ f = f(x,t).$$

Это будут вынужденные колебания, но при $f = 0$ имеем собственные колебания.
Надо ставить задачу так, чтобы существовало решение и притом единственное.

Для этого начальные условия задаются поведением функции в начальный момент времени.

1. Начальные условия:

$$\begin{cases} а)\ u(x,0)=\varphi(x) - \text{начальнае смещение,} \\ б)\ u_t(x,0)=\psi(x) - \text{начальная скорость.} \end{cases}$$

Краевые условия определяют функцию на границах области ее определения.

2. Граничные условия для струны ограниченных размеров

$$\begin{cases} в)\ u(0,t)=\mu_1(t), \\ г)\ u(l,t)=\mu_2(t), \end{cases} \qquad \text{где} \quad 0 \le x \le l.$$

а) Концы закреплены u(0,t)=u(l,t)=0;

б) Если второй конец удалён от области рассмотрения, то струна считается полубесконечной и остается условие только для одного конца. Например, u(0,t)=0;

в) Если оба конца удалены от области рассмотрения, то граничные условия не задаются.

Вариации краевых задач:

(2.1а)
$$\begin{cases} u_{tt} = \mathrm{v}^2 u_{xx} + f(x,t); \\ -\infty < x < \infty; \\ t \ge 0; \\ u(x,0) = \varphi(x); \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$
Вынужденные колебания бесконечной струны

(2.1б)
$$\begin{cases} u_{tt} = \mathrm{v}^2 \mathrm{u}_{xx} + f(x,t); \\ 0 \le x < \infty;\ t \ge 0; \\ u(x,0) = \varphi(x); \\ u_t(x,0) = \psi(x); \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$
Вынужденные колебания полубесконечной струны с закреплённым левым краем

(2.1в)
$$\begin{cases} u_{tt} = \mathrm{v}^2 \mathrm{u}_{xx} + f(x,t); \\ 0 \le x \le l;\ t \ge 0; \\ u(x,0) = \varphi(0); \\ u_t(x,t) = \psi(x); \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$
Вынужденные колебания струны, ограниченных размеров с обоими закреплёнными концами

Общая краевая задача может быть записана в виде:

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} + f(x,t); \\ 0 \le x < l\ ; t \ge 0; \\ u(x,0) = \varphi(x); \\ u_t(x,t) = \psi(x); \\ u_t(0,t) = \mu_1(t); \\ u(l,t) = \mu_2(t); \end{cases}$$

Метод редукции – это сведение решения сложных краевых задач к совокупности решений более простых краевых задач.

Представим решение в виде суммы четырёх функций.

$u(x,t) = u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t) + u^{(3)}(x,t) + u^{(4)}(x,t)$, где для каждой функции строится своя задача.

$$\begin{cases} u_{tt}^{(1)} = v^2 u_{xx}^{(1)}; \\ u^{(1)}(x,0) = \varphi(x); \\ u_t^{(1)}(x,0) = \psi(x); \\ -\infty < x < \infty; \\ t \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}^{(2)} = v^2 u_{xx}^{(2)}; \\ u^{(2)}(x,0) = 0; \\ u_t^{(2)}(x,0) = 0; \\ u^{(2)}(0,t) = \mu_1(t); \\ 0 \le x < \infty\,; t \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}^{(3)} = v^2 u_{xx}^{(3)}; \\ u^{(3)}(x,0) = 0; \\ u_t^{(3)}(x,0) = 0; \\ u^{(3)}(l,t) = \mu_2(t); \\ 0 \le x \le l\,; t \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}^{(4)} = v^2 u_{xx}^{(4)} + f(x,t); \\ u^{(4)}(x,0) = 0; \\ u_t^{(4)}(x,0) = 0; \\ u^{(4)}(0,t) = u^{(4)}(l,t) = 0; \\ 0 \le x \le l\,; t \ge 0; \end{cases}$$

Сумма этих задач даёт общую задачу. Решая их по отдельности, можем построить решение общей краевой задачи (2.5).

### $2.6^0$. Свободные колебания бесконечной струны (стержня)

В этом случае краевая задача имеет вид:

$$(2.5) \qquad \begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ -\infty < x < \infty \\ t \ge 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Сведём дифференциальное уравнение к каноническому виду, для чего сначала определим тип уравнения

$(1.1)\ au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + F = 0,\ \Delta = b^2 - 4ac$.

В нашем случае

$t \to y\ a = v^2, b = 0, c = -1$,

$\Delta = 4v^2 > 0$.

Введем характеристическое уравнение (1.6):

$(1.6)\quad a(dy)^2 - bdxdy + c(dx)^2 = 0$ с решением

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ \frac{dt}{dx}=\pm\frac{1}{\text{v}}.$$

для (2.5) имеем два общих интеграла

$$dx+\text{v}dt=0, x+\text{v}t=c_1,$$
$$dx-\text{v}dt=0, x-\text{v}dt=c_2.$$

Введём новые переменные

$\xi=x+\text{v}t$ и $\eta=x-\text{v}t$. Тогда

$$u_x=u_\xi\xi_x-u_\eta\eta_x=u_\xi+u_\eta,$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x+u_{\eta\xi}\xi_x+u_{\eta\eta}\eta_x=u_{\xi\xi}-2u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta},$$

$$u_t=u_\xi\xi_t+u_\eta\eta_t=\text{v}(u_\xi-u_\eta),$$

$$u_{tt}=\text{v}(u_{\xi\xi}\xi_t-u_{\xi\eta}\eta_t-u_{\eta\xi}\xi_t-u_{\eta\eta}\eta_t)=\text{v}^2(u_{\xi\xi}-2u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta}),$$

$$\text{v}^2(u_{\xi\xi}-2u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta})=\text{v}^2(u_{\xi\xi}+2u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta}).$$

$$4u_{\xi\eta}=0\ ,u_{\xi\eta}=0.$$

Возьмём неопределённый интеграл от смешанной производной

$\int u_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\xi=0$. Постоянная интегрирования является функцией η.

$\int u_\eta(\xi,\eta)d\xi=f^*(\eta)$. Еще одно интегрирование

$\int u_\eta(\xi,\eta)d\eta=\int f^*(\eta)d\eta+f^1(\xi)$

дает

$u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$. Следовательно

$$u(x,y)=f_1(x+\text{v}t)+f_2(x-\text{v}t).$$

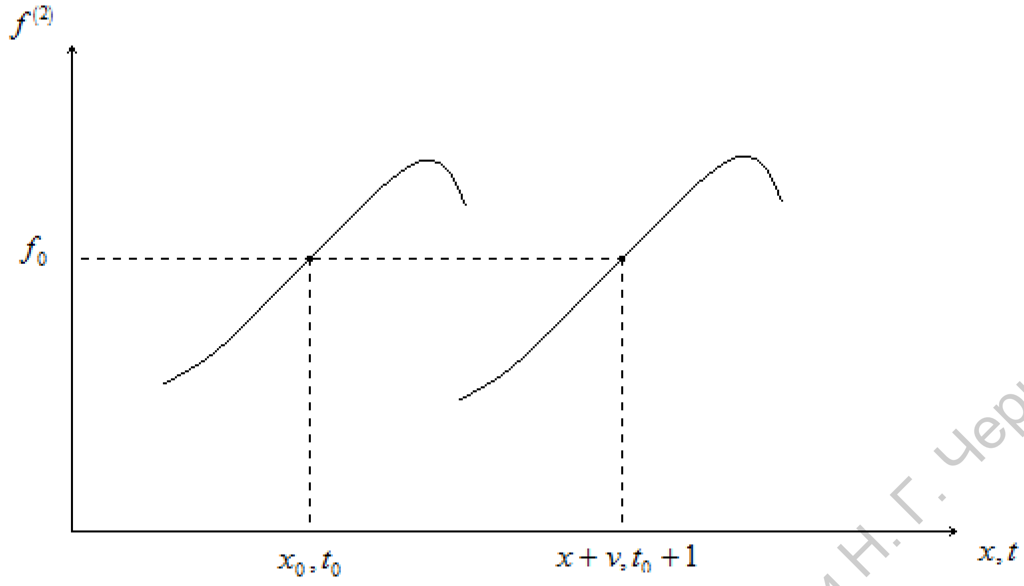
Какими бы не были $f_1$ и $f_2$, построенное из них выражение u является решением (2.5)

Установим физический смысл решений $f_1(x+\text{v}t)$ и $f_2(x-\text{v}t)$.

Для $f_2(x-\text{v}t)$ выберем точку 1: $x=x_0$, $t=t_0$.

Обозначим $f_2(x_0-\text{v}t_0)=f_0$.

Возьмём точку 2: $x = x_0 + \mathrm{v}\cdot 1c, \qquad t = t_0 + 1c$.




Найдём

$$f^{(2)}(x,t) = f^{(2)}(x + \mathrm{v} - \mathrm{v}(t_0 + 1)) = f^{(2)}(x_0 - \mathrm{v}t) = f_0.$$

Следовательно, v скорость распространения колебаний в пространстве.
Значение $f_0$ переместилось со скоростью v в точку 2, т.е. взяв некий профиль, получим его движение со скоростью v.
Решение $f^{(2)}$ – это волна, идущая со скоростью v вдоль оси $Ox$ слева направо.

Аналогично $f^{(1)}(x + \mathrm{v}t)$ связываем с волной, идущей справа налево со скоростью v. Явный вид функции $u(x,t) = f^{(1)}(x + \mathrm{v}t) + f^{(2)}(x - \mathrm{v}t)$
определим из начальных условий

$a) \, u(x,0) = \varphi(x), \; f^{(1)} + f^{(2)} = \varphi(x),$

$b) \, u_t(x,0) = \Psi(x), \; u_t(\xi,\eta) = f_t^{(1)}(\xi) + f_t^{(2)}(\eta) = f_t^{(1)}\xi_t + f_t^{(2)}\eta_t = \mathrm{v}\left(f_t^{(1)}(\xi) - f_t^{(2)}(\eta)\right).$

Тогда получаем: $f_x^{(1)}(x) + f_x^{(2)}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{v}}\psi(x)$.

$$b) \; f_x^{(1)}(x) - f_x^{(2)}(x) = \frac{1}{v}\int_0^x \psi(x)\,dx + C$$

$$a) \; f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) = \varphi(x)$$

Складывая $b)$ и $a)$, получим новые выражения:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2v}\int_0^x \psi(x)\,dx + \frac{c}{2}; \qquad f^{(2)}(\underset{\substack{\uparrow \\ x - vt}}{x}) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2v}\int_0^x \psi(x)\,dx - \frac{c}{2}.$$

$$f(x+vt)=\frac{1}{2}\varphi(x+vt)+\frac{1}{2v}\int_0^{x+vt}\psi(x)\,dx+\frac{c}{2};\quad f(x-\text{v}t)=\frac{1}{2}\varphi(x-\text{v}t)+\frac{1}{2v}\int_0^{x-vt}\psi(x)\,dx-\frac{c}{2}.$$

Снова складывая их, получим:

$$u(x,t)=f(x+\text{v}t)+f(x-\text{v}t),$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+\text{v}t)+\varphi(x-\text{v}t)\right)+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\psi(y)\,dy. \tag{2.6}$$

Выражение (2.6) носит название формулы Даламбера.

Она описывает две волны, бегущие в противоположных направлениях с начальным профилем φ(x) и с начальной скоростью по вертикали ψ(x).

$$f(x+\text{v}t)=\frac{1}{2}\varphi(x+\text{v}t)+\frac{1}{2v}\int_0^{x+vt}\psi(y)\,dy,$$

$$f(x-\text{v}t)=\frac{1}{2}\varphi(x-\text{v}t)+\frac{1}{2v}\int_0^{x-vt}\psi(y)\,dy.$$

### $2.7^0$. **Свободные колебания полубесконечной струны (стержня)**

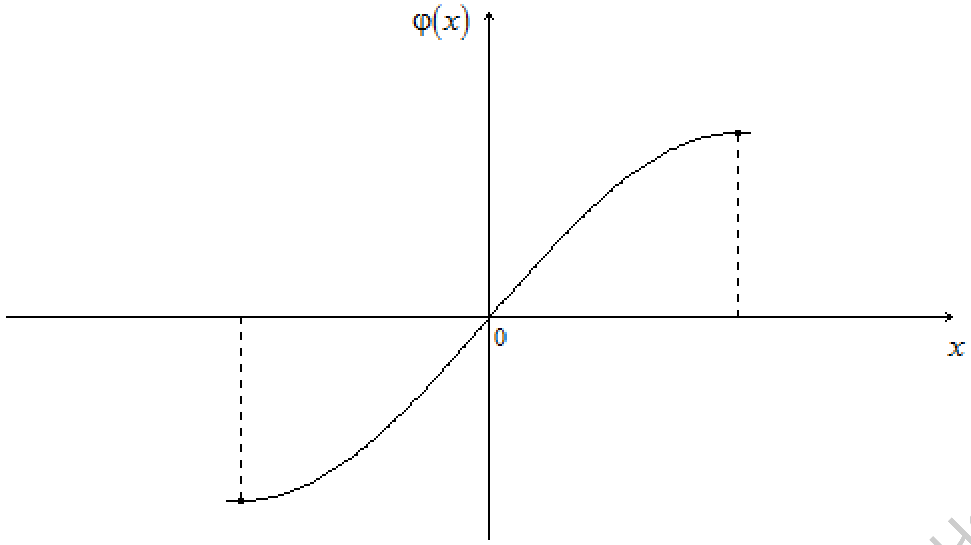
Соответствующая краевая задача для струны с жестко закрепленным краем имеет вид:

$$(2.7a)\begin{cases} u_{tt}-\text{v}^2u_{xx}=0; \\ -\infty<x<\infty; \\ t\ge 0; \\ u(x,0)=\varphi(x); \\ u_t(x,0)=\psi(x); \\ u(0,t)=0; \end{cases}$$

Введём функции:

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), x>0; \\ -\varphi(-x), x<0;\end{cases}\qquad \tilde{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x), x>0; \\ -\psi(-x), x<0;\end{cases}$$

получающиеся нечетным продолжением начальных условий через точку x=0.




Тогда краевая задача сводится к уже рассмотренной ранее:

$$(2.7a) \to (2.5)\begin{cases} u_{tt} = \mathrm{v}^2 u_{xx}; \\ -\infty < x < \infty; \\ t \ge 0; \\ u(x,0) = \tilde{\varphi}(x); \\ u_t(x,0) = \tilde{\psi}(x); \end{cases} \to (2.6)\; u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x+\mathrm{v}t) + \tilde{\varphi}(x-\mathrm{v}t)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{x-vt}^{x+vt}\tilde{\psi}(y)\,dy.$$

Проверим выполнимость начальных и краевых условий.

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x+\mathrm{v}t) + \tilde{\varphi}(x)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{x}^{x}\tilde{\psi}(x)\,dx = \tilde{\varphi}(x),$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{v}\tilde{\varphi}_x(x+\mathrm{v}t) - \mathrm{v}\tilde{\varphi}_x(x-\mathrm{v}t)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\left[\mathrm{v}\tilde{\psi}(x+\mathrm{v}t) - (-\mathrm{v})\tilde{\psi}(x-\mathrm{v}t)\right].$$

Поскольку производная от интеграла

$$I(x,t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$$

имеет вид

$$I_t(x,t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)\,dx + b_t f(x,b) - a_t f(x,a),$$ получаем

$$u_t(x,0) = \frac{\mathrm{v}}{2}\left[\tilde{\varphi}_x(x) + \tilde{\varphi}_x(x)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\left[\mathrm{v}\tilde{\psi}(x) + \mathrm{v}\tilde{\psi}(x)\right] = \tilde{\psi}(x).$$

При x=0 получаем

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(vt) + \tilde{\varphi}(-vt)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{-vt}^{vt}\tilde{\psi}(x)\,dx = 0.$$

Получили решение краевой задачи (2.7a) в области $0 \le x < \infty$ в виде (2.6) при нечетном продолжении начальных условий.

Рассмотрим теперь краевую задачу:

$$(2.7b)\quad \begin{cases} u_{tt} = \mathrm{v}^2 u_{xx}; \\ 0 \le x < \infty; \\ t \ge 0; \\ u(x,0) = \tilde{\varphi}(x); \\ u_t(x,0) = \tilde{\psi}(x); \\ u_x(0,t) = 0. \end{cases}$$

Начальные условия четным образом продолжим через x=0:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), x > 0; \\ \varphi(-x), x < 0; \end{cases} \qquad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), x > 0; \\ \psi(-x), x < 0. \end{cases}$$

Эта краевая задача тоже сводится к уже рассмотренной (2.5) с решением:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x + \mathrm{v}t) + \tilde{\varphi}(x - \mathrm{v}t)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{x-vt}^{x+vt} \tilde{\psi}(x)\,dx. \qquad (2.6)$$

Теперь проверяем выполнимость начальных и краевых условий:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x + \mathrm{v}t) + \tilde{\varphi}(x)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{x}^{x} \tilde{\Psi}(x)\,dx = \tilde{\varphi}(x),$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{v}\tilde{\varphi}_x(x + \mathrm{v}t) - \mathrm{v}\tilde{\varphi}_x(x - \mathrm{v}t)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\left[\mathrm{v}\tilde{\psi}(x + \mathrm{v}t) - (-\mathrm{v})\tilde{\psi}(x - \mathrm{v}t)\right],$$

$$u_t(x,0) = \frac{\mathrm{v}}{2}\left[\tilde{\varphi}_x(x) + \tilde{\varphi}_x(x)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}} 2\mathrm{v}\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x).$$

Для вычисления $u_x(x,t)$ воспользуемся правилом дифференцируемости интегралов

$$I(x,t) = \int_{a(x,t)}^{b(x,t)} f_t(x,t)\,dx,$$

$$I_x(x,t) = \int_{a}^{b} f_t(x,t)\,dx + b_x f(b,t) - a_x f(a,t).$$

Получаем

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}_x(x + \mathrm{v}t) - \tilde{\varphi}_x(x - \mathrm{v}t)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{x-\mathrm{v}t}^{x+\mathrm{v}t} \tilde{\psi}_x(x)\,dx + \frac{1}{2\mathrm{v}}\left[\tilde{\psi}(x + \mathrm{v}t) - \tilde{\psi}(x - \mathrm{v}t)\right],$$

$$u_x(0,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}_x(\mathrm{v}t) + \tilde{\varphi}_x(-\mathrm{v}t)\right] + \frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{-\mathrm{v}t}^{\mathrm{v}t} \tilde{\psi}_x(x)\,dx + \frac{1}{2\mathrm{v}}\left[\tilde{\psi}(\mathrm{v}t) - \tilde{\psi}(-\mathrm{v}t)\right] = 0.$$

Получили решение краевой задачи (2.7б) при четном продолжении начальных условий.

### $2.8^0$. Свободные колебания струны ограниченных размеров

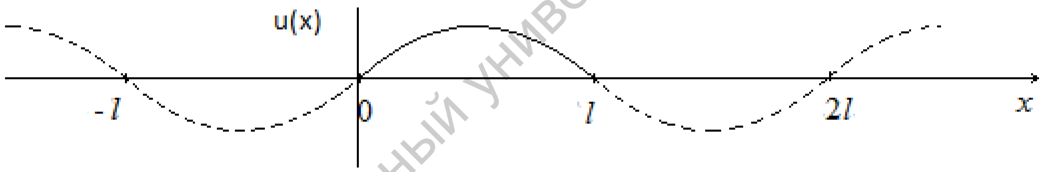
При закрепленных концах струны краевая задача имеет вид:

$$(2.8a)\quad \begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx}; \\ 0 \le x \le l; \\ t > 0; \\ u(x,0) = \tilde{\varphi}(x); \\ u_t(x,0) = \tilde{\psi}(x); \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

Продолжаем функции нечетным образом с периодом 2l черех x=0 и x=l.

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), 0 < x < l, \\ -\varphi(-x), 0 < x < l, \text{ и т.д.} \\ -\varphi(x), l < x < 2l, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), 0 < x < l, \\ -\psi(-x), 0 < x < l, \text{ и т. д.} \\ -\psi(x), l < x < 2l, \end{cases}$$




При этом (2.8a)сводится к (2.5) с решением (2.6).

$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x+vt) + \tilde{\varphi}(x-vt)\right] + \frac{1}{2v}\int\limits_{x-vt}^{x+vt}\tilde{\psi}(x)\,dx$. Ясно, что $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.

Проверим выполнение начальных и краевых условий.

Начальные условия:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x,0) + \tilde{\varphi}(x,0)\right] + \frac{1}{2v}\int\limits_{x}^{x}\tilde{\psi}(y)\,dy = \tilde{\varphi}(x,0),$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left[v\tilde{\varphi}_x(x+vt) - v\tilde{\varphi}_x(x-vt)\right] + \frac{1}{2}\left[v\psi(x+vt) - (-v)\psi(x-vt)\right],$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}\left[v\tilde{\varphi}_x(x) - v\tilde{\varphi}_x(x)\right] + \frac{1}{2}2v\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x).$$

Краевые условия:

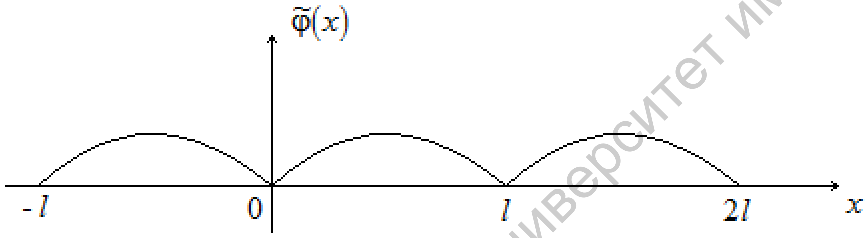
$$u(0,t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(vt)+\tilde{\varphi}(-vt)\right]+\frac{1}{2v}\int\limits_{-vt}^{+vt}\tilde{\psi}(\xi)\,dx=0,$$

$$u(l,t)=-\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(l+vt)+\tilde{\varphi}(l-vt)\right]+\frac{1}{2v}\int\limits_{l-vt}^{l+vt}\tilde{\psi}(x)\,dx=\frac{1}{2v}\int\limits_{-vt}^{+vt}\tilde{\psi}(y)\,dy=0,$$ где сделана замена x→y, y=x – $l$.

Рассмотрим краевую задачу

$$(2.8б)\begin{cases} u_{tt}+l=v^2u_{xx};\\ 0<x<l;\\ l>0;\\ u(x,0)=\varphi(x);\\ u_t(x,0)=\Psi(x);\\ u_x(0,t)=u_x(l,t).\end{cases}$$

Начальные условия продолжим четным образом через x=0 и x=l.




$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), 0<x<l,\\ \varphi(-x), 0<x<l,\\ \varphi(x), l<x<2l,\end{cases}$$ и т.д.

Тогда (2.8б) сводится к уже решенной залаче (2.5) с решением (2.6).

### 2.9$^0$ Вынужденные колебания бесконечной струны

Сформулируем задачу для вынужденных колебаний бесконечной струны с внешним воздействием:

$$(2.9)\begin{cases} u_{tt}=v^2u_{xx}+f(x,t);\\ 0\le x\le l;\\ t>0;\\ u(x,0)=\tilde{\varphi}(x);\\ u_t(x,0)=\tilde{\psi}(x).\end{cases}$$

Используем метод редукции представим решение в виде суммы

$u(x,t) = u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t)$. Разбиваем краевую задачу (2.9) на 2 части.

(2.9а) $\begin{cases} u_{tt}^{(1)} = \mathrm{v}^2 u_{xx}^{(1)}; \\ u^{(1)}(x,0) = \varphi(x); \\ u_t^{(1)}(x,0) = \psi(x); \\ -\infty < x < \infty; \\ t \ge 0; \end{cases}$ (2.9б) $\begin{cases} u_{tt}^{(2)} = \mathrm{v}^2 u_{xx}^{(2)} + f(x,t); \\ 0 \le x < \infty,\ t \ge 0; \\ u^{(2)}(x,0) = 0; \\ u_t^{(2)}(x,0) = 0; \end{cases}$

Решение (2.9а) есть решение (2.5). Тогда получаем:

$$u^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+\mathrm{v}t) + \tilde{\varphi}(x-\mathrm{v}t)\right) + \frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{x-\mathrm{v}t}^{x+\mathrm{v}t} \tilde{\psi}(x)\,dx.$$

Представим $u^{(2)}(x,t) = \int_0^t z(x,t,\tau)\,d\tau$

Лемма:

$u^{(2)}$ есть решение (2.9б), если $z(x,t,\tau)$ является решением (2.9в):

(2.9в) $\begin{cases} z_{tt}^{(2)} = \mathrm{v}^2 z_{xx}, \\ 0 \le x < \infty,\ t \ge 0, \\ z(x,t=\tau) = 0, \\ z_t(x,t=\tau) = f(x,t). \end{cases}$

Доказательство:

$u_{xx}^{(2)}(x,t) = \int_0^t z(x,t,\tau)\,d\tau$,

$u_t^{(2)} = z(x,t=\tau) + \int_0^t z_t(x,t,\tau)\,d\tau$.

Воспользуемся формулой интегрирования интеграла, зависящего от параметра, и получим:

$u_{tt}^{(2)} = z_t(x,t=\tau) + \int_0^t z_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau$.

$u_{tt}^{(2)} - \mathrm{v}^2 u_{xx}^{(2)} = z_t(x,t=\tau) + \int_0^t z_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau - \mathrm{v}^2 \int_0^t z_{xx}(x,t,\tau)\,d\tau = f(x,t)$.

Лемма доказана.

Введем обозначение $z(x,t,\tau)=z(x,t-\tau)=z(x,s)$, где s=t-τ. Тогда запишем (2.9в)

$$\begin{cases} z_{ss}(x,s)=\mathrm{v}^2 Z_{xx}, \\ 0\le x<\infty,\ s\ge 0, \\ z(x,0)=0, \\ z_t(x,0)=f(x,\tau). \end{cases}$$

(2.9в) переходит в (2.5) при переобозначениях t→s, φ(x)→0, ψ(x)→f(x,τ).

Поэтому решение(2.9в) можно построить через формулу Даламбера

(2.6) $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+\mathrm{v}t)+\varphi(x-\mathrm{v}t)\right]+\frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{x-vt}^{x+vt}\tilde{\psi}(x)\,dx.$

z(x,s)= $\frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{x-vt}^{x+vt} f(y,\tau)\,dy$. Тогда

u(2)(x,t)= $\frac{1}{2\mathrm{v}}\int_0^t\int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t+\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau$.

Получаем решение краевой задачи (2.8).

(2.9) $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+\mathrm{v}t)+\varphi(x-\mathrm{v}t)\right]+\frac{1}{2\mathrm{v}}\int_{x-vt}^{x+vt}\tilde{\psi}(x)\,dx+\frac{1}{2\mathrm{v}}\int_0^t\int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t+\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau$.

Выражение (2.9) при f(x,t)=0 переходит в решение в виде формулы Даламбера (2.6).

### 2.10º Распространение сферически симметричных волн в пространстве.

В разделе 2.4º для однородных диэлектриков возникает уравнение

$$\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0,$$
$$U_{tt}=v^2\nabla^2 U.$$

Будем искать полевую функцию

$U=U(x,y,z,t)$ в произвольной точке $M(x,y,z)$.

Краевая задача для полевой функции $U(M,t)$ принимает вид

$$\begin{cases} U_{tt}=v^2\nabla^2 U, \\ -\infty<x,y,z<\infty, \\ 0\le t<\infty, \\ U(M,0)=\varphi(M), \\ U_t(M,0)=\psi(M). \end{cases}$$

Перейдем к сферической системе координат $r,\theta,\alpha$ и, учитывая сферическую симметрию полевой функции $U(r,t)$, получим

$$(2.10)\begin{cases} U_{tt} = v^2\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right), \\ 0 \le r < \infty, \\ 0 \le t < \infty, \\ U(r,0) = \varphi(r), \\ U_t(r,0) = \psi(r), \end{cases}$$

Представим искомую функцию в виде $U(r,t) = \frac{W(r,t)}{r}$.
Для того чтобы в точке $z = 0$ не возникало нефизической особенности, потребуем: $W(0,t) = 0$. Тогда краевая задача перепишется в виде (2.10a)

$$\begin{cases} W_{tt} = v^2 W_{rr}, \\ 0 \le r < \infty, \\ t \ge 0, \\ W(r,0) = r\varphi(r) = \tilde{\varphi}(r), \\ W_t(r,0) = r\psi(r) = \tilde{\psi}(r). \end{cases}$$

Такая задача уже возникала для колебаний полубесконечной струны с жестко закрепленным левым концом (см. 2.7 º).
Введем расширение начальных условий путем их нечетного продолжения через точку $r = 0$.

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi_1(r), r > 0, \\ -\varphi_2(r), r < 0. \end{cases}$$

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \psi_1(r), r > 0, \\ -\psi_2(r), r < 0. \end{cases}$$

После этого функция $W(r,t)$ представляется формулой Даламбера

$$W(r,t) = \frac{1}{2}\{\tilde{\varphi}(r+vt) + \tilde{\varphi}(r-vt)\} + \frac{1}{2v}\int_{r-vt}^{r+vt} \tilde{\psi}(r)dr.$$

Это решение можно представить как сумму двух независимых функций

$$W(r,t) = f_1(r+vt) + f_2(r-vt).$$

Установим физический смысл этих функций. Для $f_2(r-vt)$ возьмем две пространственно-временные точки. Первая точка $r = r_0, t = t_0$. Зафиксируем значение функции в этой точке.

$$f_2(r_0 - vt_0) = f_0,$$

Вторая точка $r = r_0 + v * 1\text{сек}, t = t_0 + 1$. Значение функции в этой точке совпадает с ее значением в первой точке

$$f_2(r-vt) = f_2\big(r_0 + v - v(t+1)\big) = f_2(r_0 - vt) = f_0.$$

Получаем, что $f_2$ сферически симметричная волна, распространяющаяся от центра по радиусу к бесконечности со скоростью $v$. Аналогично можно показать, что $f_1$ сферически симметричная волна, распространяющаяся к центру по радиусу из бесконечности со скоростью $v$. Амплитуда сферически симметричных волн с ростом $r$ убывает:

$$U(r,t) = \frac{W(r,t)}{r}.$$

## 2.11° Метод разделения переменных для свободных колебаний струны ограниченных размеров.

Рассмотрим случай, когда струна жестко закреплена с обоих концов

$$(2.11)\begin{cases} U_{tt} = v^2 U_{xx}, \\ 0 \le x \le l, \\ 0 \le t, \\ U(x,0) = \varphi(x), \\ U_t(x,0) = \psi(x), \\ U(0,t) = U(l,t) = 0. \end{cases}$$

Представим $U(x,t)$ в виде произведения двух функций

$U(x,t) = X(x)T(t)$.

Уравнение преобразуется к виду

$XT_{tt} = v^2 X_{xx} T$.

После деления на $XT$ получаем равенство двух отношений, каждое из которых зависит от разных переменных, то есть является константой.

$\frac{1}{v^2}\frac{T_{tt}}{T} = \frac{X_{xx}}{X} = -\lambda$.

Получим два независимых уравнения

$X_{xx} + \lambda X = 0,\ \ T_{tt} + \lambda v^2 T = 0$.

Для функции $X(x)$ получаем задачу Штурма – Лиувиля

$$(2.11a)\begin{cases} X_{xx} + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим три возможных случая.

1. $\lambda < 0$

Тогда решение уравнения имеет вид
$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

Определим значения констант $C_1$ и $C_2$:

$X(0) = C_1 + C_2 = 0\ \ (-C_1 = C_2)$,

$X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

Следовательно, ненулевых решений нет.

2. $\lambda = 0$

В этом случае

$X_{xx} = 0 \Rightarrow \ X(x) = C_1x + C_2,$
$X(0) = C_2 = 0,$
$X(l) = C_1l = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$

Как и в предыдущем случае ненулевых решений нет.

3. $\lambda > 0$

Решения представим в виде

$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 cos\sqrt{\lambda}x.$

Ненулевое решение возникает, если

$X(0) = C_2 \,, \qquad X(l)\ C_1 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$

Чтобы получить нетривиальное решение нужно, чтобы $C_1 \neq 0$, а $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0.$

Возникает дискретный спектр собственных значений:

$\sqrt{\lambda}l = \pi n\ (n = 0{,}1, \dots)$

Получим ненулевое решение при

$\lambda \to \lambda_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$

В результате получаем дискретный набор решений $X(x) = C_1 sin\frac{\pi n}{l}x$. Пусть $C_1 = 0$, тогда

$X_n(x) = sin\frac{\pi n}{l}x,$

Для $T(t)$ имеет место уравнение

$T_{tt} + \lambda v^2 T = 0.$ (2.11б)

Его решения $T_{tt} = A_n sin\frac{\pi n}{l}vt + B_n cos\frac{\pi n}{l}vt$ .

Начальные условия имеют вид

$X(x)T(0) = \varphi(x),$

$X(x)T_t(0) = \psi(x).$

Решение уравнения имеет вид

$T_n = A_n sin\frac{\pi n}{l}vt + B_n cos\frac{\pi n}{l}vt,$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n sin\frac{\pi n}{l}vt + B_n cos\frac{\pi n}{l}vt\right\} sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Найдем общее решение, используя теорию рядов Фурье.

Если функция $f(x)$ периодическая и имеет период $T = 2l$ ,то ее можно представить в виде ряда Фурье

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n sin\frac{\pi n}{l}x + b_n cos\frac{\pi n}{l}x \right\}, \text{ где:}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\ sin\frac{\pi n}{l}ydy, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)cos\frac{\pi n}{l}ydy.$$

Если $f(x)$ нечетная функция, то $b_n = 0$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ где } a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\ sin\frac{\pi n}{l}ydy$$

Начальные условия, учитывая нечетность искомого решения, представим в виде

$$U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$U_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ где}$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(y) sin\frac{\pi n}{l}ydy, \ \ \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y) sin\frac{\pi n}{l}ydy.$$

Подставляя в начальные условия

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x \text{ , получим } \qquad B_n = 0, \qquad A_n = \frac{\psi_n l}{\pi n v}.$$

Запишем общее решение краевой задачи в виде

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \psi_n \frac{l}{\pi n v} sin\frac{\pi n}{l}vt + \varphi_n cos\frac{\pi n}{l}vt \right\} sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ где} \qquad (2.12)$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(y) sin\frac{\pi n}{l}ydy\ , \qquad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y) sin\frac{\pi n}{l}ydy.$$

### 2.12° Возникновение стоячих волн и их суперпозиция

Покажем, что (2.12) есть суперпозиция стоячих волн, иными словами, что функцию

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n sin\frac{\pi n}{l}vt + B_n cos\frac{\pi n}{l}vt \right\} sin\frac{\pi n}{l}x$$

можно представить как

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{\pi n}{l}(v(t+\delta_n))sin\frac{\pi n}{l}x \text{ ,где}$$

$$a_n=\sqrt{{A_n}^2+{B_n}^2}, \quad \frac{\pi n}{l}v\delta_n=-arctg\frac{A_n}{B_n}.$$

Используя тригонометрические соотношения

$$\cos(\alpha+\beta)=cos\alpha\, cos\beta+sin\alpha\, sin\beta,$$

$$arctgx=arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

получим

$$cos\left(\frac{\pi n}{l}vt+\frac{\pi n}{l}v\delta_n\right)=cos\frac{\pi n}{l}vtcos\left(-arctg\frac{A_n}{B_n}\right)-sin\frac{\pi n}{l}vtsin\left(-arctg\frac{A_n}{B_n}\right)=$$

$$=coscos\left(arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A_n}{B_n}}}\right)+sin\frac{\pi n}{l}vt\,sinarcsin\frac{A_n}{B_n}=$$

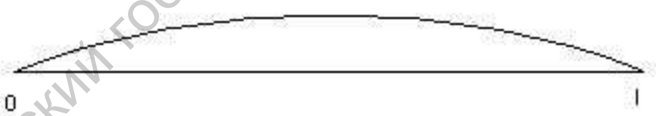
$$=\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}cos\frac{\pi n}{l}vt+\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}sin\frac{\pi n}{l}vt.$$

Следовательно, доказано, что (2.12) сводится к (2.13), которое можно записать как

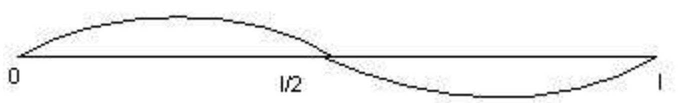
$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\,sin\frac{\pi n}{l}x, \text{где } C_n=\sqrt{{A_n}^2+{B_n}^2}cos\frac{\pi n}{l}v(t+\delta_n).$$

Рассмотрим частные случаи $n=1,2,3,\ldots$

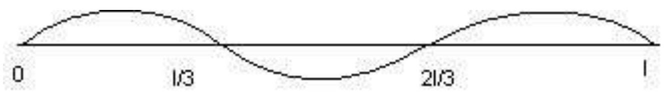
1) $n=1$, решение обращается в ноль при $x_1=0, x_2=l$.




2) $n=2, x_1=0, x_2=\frac{l}{2}, x_3=l.$




3) $n=3, x_1=0, x_2=\frac{l}{3}, x_3=\frac{2l}{3}, x_4=l.$




Таким образом, найденные частные решения представляют собой стоячие волны и (2.13) можно считать суперпозицией стоячих волн.

Для того, чтобы (2.12) было решением (2.11) нужно, чтобы равномерно сходились ряды $U(x,t)$

$$U_{xx} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \left\{A_n sin\frac{\pi n}{l}vt + B_n cos\frac{\pi n}{l}vt\right\} sin\frac{\pi n}{l}x\,,$$

$$U_{tt} = -\left(\frac{\pi v}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \left\{A_n sin\frac{\pi n}{l}vt + B_n cos\frac{\pi n}{l}vt\right\} sin\frac{\pi n}{l}x\,.$$

Введем мажорантные ряды

$$.M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| + |B_n| \quad ,$$

$$.M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, |A_n| + |B_n| \quad ,$$

Для рядов Фурье

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n sin\frac{\pi n}{l}x + b_n cos\frac{\pi n}{l}x\right\}$$

выполняется ТЕОРЕМА СХОДИМОСТИ.

Если функция

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n sin\frac{\pi n}{l}x + b_n cos\frac{\pi n}{l}x\right\}$$

имеет непрерывными $k$ - первых производных, а $(k+1)$-ую кусочно-непрерывную, то ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} n^k\{|a_n| + |b_n|\}$ сходятся.

Причем для нечетных функций

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\frac{\pi n}{l}x,$$

необходимо, чтобы $f(0) = f(l) = 0, f^{(2)}(0) = f^{(2)}(l) = 0$ и т.д., чтобы для производной $2m$-порядка $f^{(2m)}(0) = f^{(2m)}(l) = 0$ , где $2m \le k$.

Мажорантные ряды $M_1$ и $M_2$ сходятся, если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|A_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|B_n|$, где $A_n = \frac{l\psi_n}{\pi n v}$, $B_n = \varphi_n$.

Возникают дополнительные требования к краевой задаче:

1) $\varphi(x), \varphi_x(x), \varphi_{xx}(x)$ непрерывны, а $\varphi_{xxx}(x)$ кусочно-непрерывна, кроме того $\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \varphi_{xx}(0) = \varphi_{xx}(l) = 0$
2) $\psi(x), \psi_{xx}(x)$ непрерывны, а $\psi_{xx}(x)$ кусочно-непрерывна и $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

### 2.13° Связь формулы Даламбера с решением в виде рядов Фурье

Для свободных колебаний струны ограниченных размеров с закрепленными концами краевая задача имеет вид

$$(2.14)\begin{cases} U_{tt} = v^2 U_{xx}, \\ 0 \le x \le l, \\ 0 \le t, \\ U(x,0) = \varphi(x), \\ U_t(x,0) = \psi(x), \\ U(0,t) = U(l,t) = 0. \end{cases}$$

Ее решение было найдено ранее, путем замены $\varphi \to \tilde{\varphi}$, $\psi \to \tilde{\psi}$, где $\tilde{\varphi}$ строится как нечетное продолжение функции φ через точку $(0, l)$ с периодичностью $2l$, аналогично для $\psi$.

Краевая задача (2.14) сводится к (2.5) и её решение имеет вид (2.6):

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+vt) - \tilde{\varphi}(x-vt)] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \tilde{\psi}(x)dx.$$

Представим расширенные начальные условия в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n sin\frac{\pi n}{l}x; \ \tilde{\psi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $\varphi_n = \int_0^l \tilde{\varphi}(y) sin\frac{\pi n}{l} y dy$; $\psi_n = \int_0^l \tilde{\psi}(y) sin\frac{\pi n}{l} y dy$.

После подстановки в (2.6) получаем

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left[sin\frac{\pi n}{l}(x+vt) + sin\frac{\pi n}{l}(x-vt)\right] + \frac{1}{2v}\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \int_{x-vt}^{x+vt} sin\frac{\pi n}{l}x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n 2sin\frac{\pi n}{l}x cos\frac{\pi n}{l}vt - \frac{1}{2v}\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{l}{\pi n}\left[cos\frac{\pi n}{l}(x+vt) - cos\frac{\pi n}{l}(x-vt)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n cos\frac{\pi n}{l}vt\, sin\frac{\pi n}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{l}{\pi n v} sin\frac{\pi n}{l}vt\, sin\frac{\pi n}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n \frac{l}{\pi n v} sin\frac{\pi n}{l}vt + \right.$$

$$+\varphi_n cos\frac{\pi n}{l}vt\Big) sin\frac{\pi n}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n sin\frac{\pi n}{l}vt + B_n cos\frac{\pi n}{l}vt\right) sin\frac{\pi n}{l}x, \text{где } A_n = \frac{l\psi_n}{\pi n v}\,; B_n = \varphi_n\,.$$

Следовательно, на примере задачи (2.14), показано, что решение (2.12) совпадает с решением (2.6). При этом для нечетных функций должны выполняться дополнительные условия для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ введенные в предыдущем пункте.

### 2.14º Решение неоднородной краевой задачи методом разделения переменных.

Рассмотрим краевую задачу для вынужденных колебаний струны ограниченных размеров.

$$\begin{cases} U_{tt} = v^2U_{xx} + f(x,t), \\ 0 \le x \le l, \\ 0 \le t, \\ U(x,0) = \varphi(x), \\ U_t(x,0) = \psi(x), \\ U(0,t) = U(l,t) = 0. \end{cases}$$

Представим

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x, \text{где } f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(y,t) sin\frac{\pi n}{l}y dy.$$

Для начальных условий в силу их нечетности будем считать

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \text{где } \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y) sin\frac{\pi n}{l}y dy,$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \text{где } \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(y) sin\frac{\pi n}{l}y dy.$$

Исходное дифференциальное уравнение запишется в виде равенства рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{U}_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x = -\left(\frac{\pi v}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 U_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x\ .$$

Получаем $\ddot{U}_n(t) = -\left(\frac{\pi v}{l}\right)^2 U_n(t) + f_n(t)$, где $\ddot{U}$-вторая производная по времени.

Используя начальные условия, получаем

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(0) sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n sin\frac{\pi n}{l}x \Rightarrow U_n(0) = \varphi_n\,,$$

$$U_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\dot U_n(0)sin\frac{\pi n}{l}x=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n sin\frac{\pi n}{l}x\Rightarrow\dot U_n(0)=\psi_n.$$

Для коэффициентов $U_n(t)$ получаем краевую задачу

$$(2.15)\begin{cases}\dot U_n=\left(\frac{\pi n v}{l}\right)^2U_n=f_n(t),\\ \qquad 0\le t,\\ U_n(0)=\varphi_n,\\ U_n(0)=\psi_n.\end{cases}$$

Представим $U_n(t)=U_n^{(1)}+U_n^{(2)}$.

Тогда для $U_n^{(1)}$ и $U_n^{(2)}$ получаются задачи

$$(2.15a)\begin{cases}\ddot U_n^{(1)}(t)+k^2U_n^{(1)}=0,\\ \qquad t\ge0,\\ U_n^{(1)}=0,\\ \dot U_n^{(1)}=\psi_n.\end{cases}\qquad(2.15a)\begin{cases}\ddot U_n^{(2)}(t)+k^2U_n^{(2)}=0,\\ \qquad t\ge0,\\ U_n^{(2)}=0,\\ \dot U_n^{(2)}=0.\end{cases}$$

, где $k=\frac{\pi n v}{l}$

Решение (2.15б) будем искать в виде

$$U_n^{(1)}=A_n\sin kt+B_n\cos kt.$$

Используя начальные условия

$$U_n^{(1)}(0)=B_n=\varphi_n,$$

$$\dot U_n^{(1)}=A_nk=\psi_n;$$

получаем, что

$$A_n=\frac{\psi_n l}{\pi n v};\quad B_n=\varphi_n.$$

Тогда

$$U_n^{(1)}=A_n\sin\frac{\pi n}{l}vt+B_n\cos\frac{\pi n}{l}vt=\frac{\psi_n l}{\pi n v}\sin\frac{\pi n}{l}vt+\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}vt;$$

$$U^{(1)}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n^{(1)}(t)sin\frac{\pi n}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\psi_n l}{\pi n v}\sin\frac{\pi n}{l}vt+\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}vt\right\}sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$(2.16)\ U^{(1)}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\sin\frac{\pi n}{l}vt+B_n\cos\frac{\pi n}{l}vt\right\}sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Используем известную в теории обыкновенных дифференциальных уравнений связь между решением неоднородной задачи U(t) и решением однородной задачи $U_0(t)$

$$\begin{cases} LU(t) = f(t), \\ LU(t) = U^{(n)} + p_1 U^{(n-1)} + \dots + p_n U^{(0)}, \\ U^{(i)}(0) = 0, \text{где } \big(i = 1, \dots, (n-1)\big). \end{cases}$$

$$\begin{cases} LU_0(t) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ U_0^{(i)}(0) = 0, \big(i = 1, \dots, (n-2)\big), \\ \dots\dots\dots \\ U_0^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Представим $U(t)$ в виде

$$U(t) = \int\limits_0^t U_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Следовательно, для $U_0(t)$ возникает задача

$$(2.17) \begin{cases} \ddot{U}_0(t) + k^2 U_0(t) = 0, \\ t \geq 0, \\ U_0(t) = 0, \\ \dot{U}_0(0) = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что (2.17) совпадает с (2.15а) при $\varphi_n = 0$ и $\psi_n = 1$. Тогда из решения (2.15а) получаем

$$U_n^{(1)} = \frac{\psi_n l}{\pi n v} \sin\frac{\pi n}{l} vt + \varphi_n \cos\frac{\pi n}{l} vt\,; \; U_0(t) = \frac{l}{\pi n v} \sin\frac{\pi n}{l} vt\,.$$

Поскольку

$$U_n^{(2)}(t) = \int\limits_0^t U_0(t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau,$$

$$U_0(t) = \frac{l}{\pi n v} \int\limits_0^t \sin\frac{\pi n}{l} v\,(t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau,$$

$$U^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(2)} \sin\frac{\pi n}{l} x.$$

Окончательный результат запишем в виде

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \sin\frac{\pi n}{l} vt + B_n \cos\frac{\pi n}{l} vt + \frac{l}{\pi n v} \int\limits_0^t \sin\frac{\pi n}{l} v\,(t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\} \sin\frac{\pi n}{l} x. \qquad (2.18)$$

Очевидно, что при $f(x,t) = 0$ решение (2.18) переходит в (2.12).

### 2.15$^{\text{O}}$ Формула Римана для вынужденных колебаний бесконечной струны

В этом случае краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} + f(x,t), \\ -\infty < x < \infty, \qquad t \geq 0, \\ \\ \\ \end{cases}$$

$u(x,0) = \varphi(x)$,
$u_t(x,o) = \psi(x)$,
где $u(x,0)$ – начальный профиль, а $u_t(x,0)$ – начальное распределение скоростей для точек струны.

Для дальнейшего потребуется видоизменить теорему Стокса.
Теорема Стокса:

$$\int\limits_S \mathrm{rot}_n \vec{a}\, dS = \oint\limits_L \vec{a} d\vec{l}.$$

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет только две компоненты: $\vec{a}(P,Q,0)$. В прямоугольных координатах:

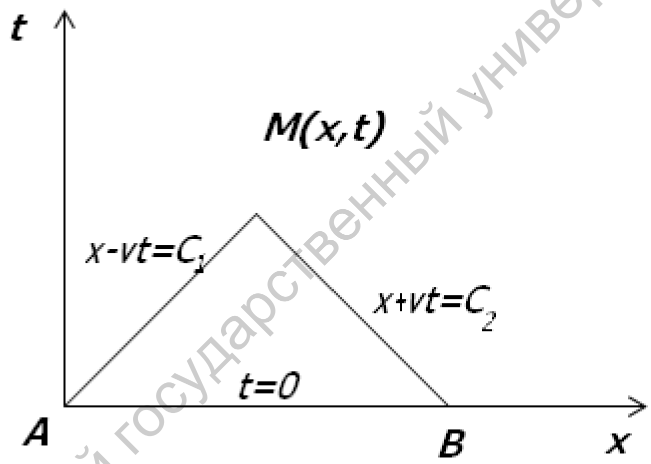
$$\mathrm{rot}_n \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y},$$

$\vec{a}d\vec{l} = a_x dx + a_y dy$. Тогда

$$\int\limits_S \left\{\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right\} dS = \int\limits_S \left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} dS = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$

Сделаем замену: $y \rightarrow t$, $a_y = Q = v^2 u_x$; $a_x = u_t$
В результате получаем:

$$\int\limits_S \left\{\frac{\partial}{\partial x} v^2 u_x - \frac{\partial}{\partial y} u_t\right\} dS = \oint\limits_L \{u_t dx + v^2 u_x dt\}.$$




Пусть фазовая плоскость – это плоскость аргументов x,t. Рассмотрим треугольник AMB.

$$\int\limits_{S\Delta-\text{ка}} (v^2 u_{xx} - u_{tt}) dS = \oint\limits_L \{u_t dx + v^2 u_x dt\}.$$

Тогда: $v^2 u_{xx} - u_{tt} + f(x,t) = 0 \;\Rightarrow\; \oint_L \{u_t dx + v^2 u_x dt\} + \int_{S\Delta} f(x,t) dS = 0$.

Сторона BM: на этом участке $x + vt = C_1 \;\Rightarrow\; dx = -v dt \;\Rightarrow\; dt = -\frac{dx}{v}$.

$$\int\limits_B^M \{-v u_t dt - v u_x dx\} = -v \int\limits_B^M \{u_t dt + u_x dx\} = -v \int\limits_B^M du = -v\big(u(M) - u(B)\big).$$

Сторона MA: на этом участке $x - vt = C_2 \;\Rightarrow\; dx = v dt \;\Rightarrow\; dt = \frac{dx}{v}$.

$$\int\limits_M^A \{v u_t dt + v u_x dx\} = v \int\limits_B^M \{u_t dt + u_x dx\} = v \int\limits_B^M du = v\big(u(A) - u(M)\big).$$

Сторона AB: на ней t=0 => $\int_A^B \{u_t dx + \upsilon u_x dt\} = \int_A^B u_t(x,0)dx$.
В результате получаем:

$$-\upsilon u(M) + \upsilon u(B) + \upsilon u(A) - \upsilon u(M) + \int_A^B u_t(x,0)dx + \int_{S\Delta} f(x,t)dxdt = 0.$$

Отсюда:

$$u(M) = \frac{1}{2}\{u(B) + u(A)\} + \frac{1}{2\upsilon}\int_A^B u_t(x,0)dx + \frac{1}{2\upsilon}\int_{S\Delta} f(x,t)dxdt. \qquad (2.17)$$

Это и есть искомое решение. Точно такое же можно получить, если решать задачу с помощью формулы Даламбера, т.к.
$u(A) = u(x,0) = \boldsymbol{\varphi}(x - \upsilon t)$,
$u(B) = \boldsymbol{\varphi}(x + \upsilon t)$,
$u_t(x,0) = \psi(x)$.
Тогда (2.19) принимает вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{\varphi(x + \upsilon t) + \varphi(x - \upsilon t)\} + \frac{1}{2\upsilon}\int_{x-\upsilon t}^{x+\upsilon t} \psi(x)dx + \frac{1}{2\upsilon}\int_{S\Delta} f(x,t)\,dS.$$

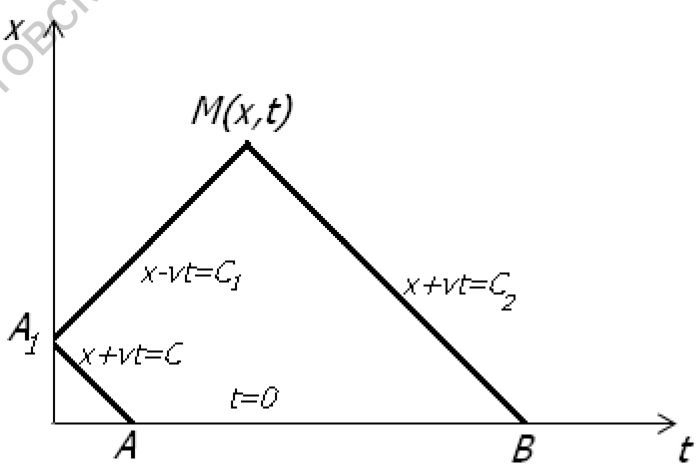
$\frac{1}{2\upsilon}\int_{S\Delta} f(x,t)dS$ – добавка, связанная с вынужденностью колебаний. Т.е. при f=0 получаем (2.6) – формулу Даламбера. При f=0 решение в произвольной точке M целиком определяется только значением функции на участке AB. В формуле (2.19), как и в (2.6) решение определяется через начальное условие на струне путем задания воздействия на струну.
Формула Римана есть обобщение формулы Даламбера и решение интегрального уравнения для бесконечной струны.

### 2.16$^{О}$ Формула Римана для колебаний полубесконечной струны

В этом случае имеем краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = \upsilon^2 u_{xx} + f(x,t), \\ 0 \le x < \infty, \qquad t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,o) = \psi(x), \\ u(0,t) = \mu(t). \end{cases}$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение по площади четырехугольника ABMA$_1$.




Пусть S – площадь фигуры, изображенной на рисунке.

$$\int_S \{\upsilon^2 u_{xx} - u_{tt}\}ds + \int_S f(x,t)ds = 0.$$

Преобразуем первый интеграл по теореме Стокса (y=t, $Q = \upsilon^2 u_x$, $p = u_t$).

$$\int_L \{u_t dx + \upsilon^2 u_x dt\} + \int_S f(x,t)ds = 0,$$

где L – контур AA$_1$MB. Для разных

сторон четырехугольника вычислим интегралы

Для BM: $x + \vartheta t = C_2 \Rightarrow dx = -\vartheta dt \Rightarrow dt = -\frac{dx}{\vartheta}$.

$$\int_B^M \{u_t dx + u_x dt\} = \int_B^M (-\vartheta u_t dt - \vartheta u_x dx) = -\vartheta \int_B^M du = -\vartheta u(M) + \vartheta u(B).$$

Для $MA_1$: $x - \vartheta t = C_1 \Rightarrow dx = \vartheta dt \Rightarrow dt = \frac{dx}{\vartheta}$.

$$\int_M^{A_1} \{u_t dt + u_x dt\} = \vartheta \int_M^{A_1} (u_t dt + u_x dx) = \vartheta \int_M^{A_1} du = \vartheta u(A_1) - \vartheta u(M).$$

Для $A_1A$: $x + \vartheta t = C \Rightarrow dx = -\vartheta dt$.

$$\int_{A_1}^{A} \{u_t dx + u_x dt\} = \int_{A_1}^{A} (-\vartheta u_t dt - \vartheta u_x dx) = \vartheta \int_B^M du = -\vartheta u(A) + \vartheta u(A_1).$$

Для AB: t=0, dt=0,

$$\int_A^B \{u_t dx + u_x dt\} = \int_A^B u_t(x,0)dx.$$

В итоге суммирования получим

$$-\vartheta u(M) + \vartheta u(B) - \vartheta u(M) - \vartheta u(A) + \vartheta u(A_1) + \int_A^B u_t(x,0)dx + \int_S f(x,t)ds = 0\,.$$

$$u(M) = u(A_1) + \frac{1}{2}\{u(B) - u(A)\} + \frac{1}{2\vartheta}\int_A^B u_t(x,0)dx + \frac{1}{2\vartheta}\int_S f(x,t)ds. \quad (2.18)$$

(2.20) переходит в (2.19), если $A_1 = A$. Это тоже формула Римана и она связана с формулой Даламбера.

$A = x - \vartheta t, \qquad u(A) = \varphi(x - \vartheta t),$

$B = x + \vartheta t, \qquad u(B) = \varphi(x + \vartheta t),$

$u_t(x,0) = \psi(x).$

$u(A_1)$ определяется функцией $\mu$. Краевое условие явно вошло в решение.

(2.20) – решение неоднородной задачи для полубесконечной струны.

## 2.17^O Существование и единственность краевых задач гиперболического типа

При постановке краевой задачи, ее решение должно существовать и быть единственным. Рассмотрим вынужденные колебания бесконечной струны.

$$\begin{cases} u_{tt} = \vartheta^2 u_{xx} + f(x,t)\,, \\ -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) = \varphi(x)\,, \\ u_t(x,0) = \psi(x)\,. \end{cases}$$

Существование решения для этой, как и для других задач, было показано ранее.

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)\} + \frac{1}{2v}\int\limits_{x-vt}^{x+vt}\psi(x)dx + \frac{1}{2v}\int\limits_{0}^{t}dt\int\limits_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t-\tau)}f(x,\tau)dx.$$

Докажем единственность решения. Положим, что у краевой задачи есть два решения: $u^{[1]}(x,t)$ и $u^{[2]}(x,t)$.

Возьмем $w(x,t) = u^{[1]}(x,t) - u^{[2]}(x,t)$ .

Получаем краевую задачу для w:

$$\begin{cases} w_{tt} = v^2 w_{xx}, \\ -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ w(x,0) = 0, \\ w_t(x,0) = 0, \end{cases}$$

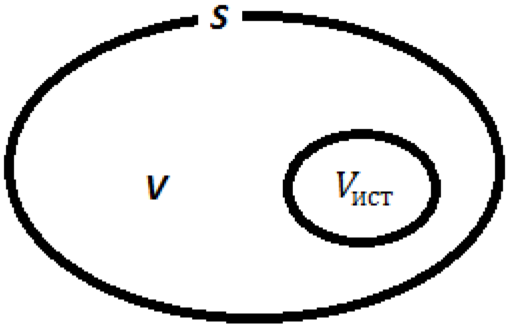
Для w(x,t): f(x,t)=0, (x,t)=0, $\varphi(x) = 0$.

Т.е. решение этой краевой задачи будет $w(x,t) = 0$. Следовательно, $u^{[1]}$ совпадает с $u^{[2]}$.

Аналогичным образом можно доказать единственность решений других краевых задач.

## Тема 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

### 3.1$^O$ Уравнение теплопроводности




Рассмотрим ограниченный объем V, в котором идет процесс выделения тепла. В нем существует процесс теплопередачи и есть источник тепла $V_{ист}$.

Пусть q – удельная тепловая мощность: $q = \frac{dQ}{dV\Delta t}$.

Количество теплоты, выделившееся в объеме за время Δt будет равно:

$$Q_1 = \int\limits_{V_{ист}} q dV\Delta t = \Delta t \int\limits_{V} q\, dV.$$

Так как $q \neq 0$ только на $V_{ист}$, то область интегрирования можно расширить до объема V.

Пусть $\rho = \frac{dm}{dV}$ – плотность тела, c – удельная теплоемкость.

Тогда количество теплоты, идущее на нагрев V:

$$Q_2 = \int\limits_{V} c\rho\, dV\, \Delta T,$$

где $\Delta T$ – перепад температуры.

Введем функцию $u(x, y, z, t)$ – температура в точке $(x, y, z)$ в момент времени t. Тогда:

$$Q_2 = \Delta u \int\limits_{V} c\rho\, dV.$$

Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой. Из закона теплопроводности Фурье:

$dQ_3 = -k\frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, \Delta t$ – количество теплоты, перетекающее через элемент поверхности dS за время $\Delta t$,

$$Q_3 = -\oint\limits_{S} k\frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, \Delta t,$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности S, k – коэффициент теплопроводности.

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = -\mathrm{grad}_n ku.$$

Используем теорему Гаусса-Остроградского:

$$\oint\limits_{S} a_n ds = \int\limits_{V} \mathrm{div}\vec{a}\, dV, \qquad \text{для } \vec{a} = k\, \mathrm{grad}u,$$

$$Q_3 = -k\int\limits_{V} \mathrm{div}(k\, \mathrm{grad}u) dV\Delta t.$$

Уравнение теплового баланса $Q_1 = Q_2 + Q_3$ дает

$$\Delta t \int\limits_V q\, dV = \Delta u \int\limits_V c\rho\, dV - \Delta t \int\limits_V \mathrm{div}(k\, \mathrm{grad} u) dV .$$

Объем V был выбран произвольно. Следовательно, равенство интегралов равносильно равенству подынтегральных выражений.

$$q + \mathrm{div}(k\, \mathrm{grad} u) = c\rho \frac{\Delta u}{\Delta t} .$$

При $\Delta t \to 0$, $\frac{\Delta u}{\Delta t} \to \frac{du}{dt}$ получаем

$$u_t = \frac{q}{c\rho} + \frac{1}{c\rho} \mathrm{div}(k\, \mathrm{grad} u) .$$

Если k=const, то $u_t = a^2 \nabla^2 u + f$.           (3.1)

(3.1) – уравнение теплопроводности. Где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f = \frac{q}{c\rho}$.

(3.1) – дифференциальное уравнение параболического типа. В одномерном случае u=u(x,t). Тогда (3.1) принимается вид:

$u_t = a^2 u_{xx} + f$. (3.1')

Само дифференциальное уравнение неоднородно. Если $f \neq 0$, то в системе есть подкачка тепла извне, а если $f = 0$, то подкачки нет, и в системе осуществляется охлаждение.

Построим простейшие краевые задачи.

1. Охлаждение бесконечного стержня:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} , \\ -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

2. Охлаждение полубесконечного стержня, левый конец стержня поддерживается при нулевой температуре:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} , \\ 0 < x < \infty, t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

3. Полубесконечный стержень, через левый край которого нет теплопередачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} , \\ 0 < x < \infty, t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_x(0,t) = 0. \end{cases}$$

4. Краевая задача для конечного стержня, оба конца которого поддерживаются при нулевой температуре:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} , \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases}$$

5. Наиболее общая краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

## $3.2^O$ Охлаждение бесконечного стержня. Формула Пуассона.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ -\infty < x < \infty, t \ge 0, \qquad (3.2) \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Решение задачи (3.2) имеет вид (3.3):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy. \qquad (3.3)$$

Теорема:

Функция (3.3) является решением краевой задачи (3.2), если $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена в указанной области и удовлетворяет условию Липшица:

$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le L(x_1 - x_2)$ при $x_1 \to x_2$, $L = const.$

Доказательство:

1) Докажем, что (3.3) удовлетворяет дифференциальному уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$.

$$u_t = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \left\{ -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \frac{(x-y)^2}{4a^2 t^2} \right\} dy,$$

$$u_x = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \left\{ -2 \frac{(x-y)^2}{4a^2 t^2} t^{-\frac{1}{2}} \right\} dy,$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \left\{ -\frac{1}{2a^2 t} + \frac{(x-y)}{4a^4 t^2} \right\} t^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Что и требовалось доказать.

2) Докажем выполнение начальных условий:

$u(x,t) = \varphi(x)$, при $t \to 0$.

Условие Липшица: $|\varphi(y) - \varphi(x)| \le L(x - y)$ при $x \to y$.

$$|u(x,t) - \varphi(x)| = \left| \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} - \varphi(x) \right| =$$

Используем интеграл вероятности: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$, где $\xi = (x-y)/2a\sqrt{t}$.

$$= \left| \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy - \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right| = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(y) - \varphi(x)\}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy \right|.$$

Применяем условие Липшица:

$$|u(x,t)-\varphi(x)| \le \frac{L}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |x-y| e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy = K\sqrt{t},$$

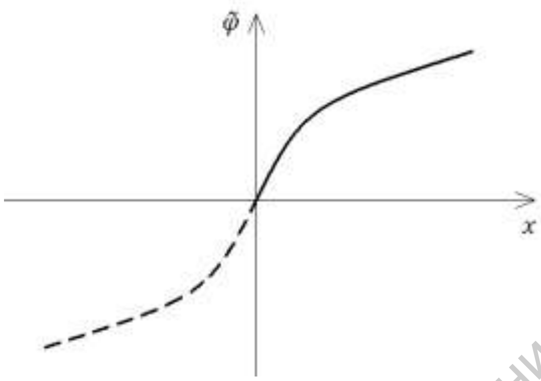
так как $dy = 2a\sqrt{t}d\xi$, $K = \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-\xi^2} d\xi$. Этот интеграл сходится при $t \to 0$.
Значит $|u(x,t)-\varphi(x)| = 0$ при $t \to 0$, т.е. начальные условия выполняются.

### 3.3$^O$ Охлаждение полубесконечного стержня и стержня ограниченных размеров.

Краевая задача для полубесконечного стержня:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ -\infty \le x < \infty, t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = 0. \end{cases} \qquad (3.4\ а)$$

Левый край стержня поддерживается при нулевой температуре.




Введем вместо $\varphi(x)$ новую функцию $\tilde{\varphi}(x)$.

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x > 0, \\ -\varphi(x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

При таком продолжении задача (3.4а) сводится к (3.2), решение которой имеет вид формулы Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy.$$

В предыдущем пункте было показано, что данная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальным условиям: $u(x,0) = \tilde{\varphi}(x)$. Нужно доказать, что выполняется краевое условие.

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy + \int_{0}^{\infty} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy \right\} =$$

Во втором интеграле заменим y на –y:

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy + \int_{0}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy \right\} =$$

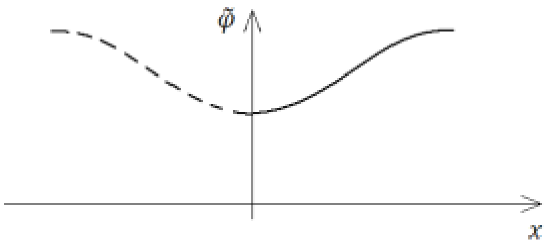
$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ \int_{0}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy - \int_{0}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy \right\}.$$

При $x \to 0$ эти два интеграла совпадают, т.е. $u(0,t) = 0$. Что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим тот же стержень при условии отсутствия теплопередачи через левый край:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ -\infty \le x < \infty, t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_x(0,t) = 0. \end{cases} \qquad (3.4\ б)$$

Введем новую функцию $\tilde{\varphi}(x)$ такую, что:




$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ при } x > 0, \\ \varphi(x) \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Задача (3.4б) сводится к задаче (3.2) и имеет решение (3.3):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\, dy.$$

Проверим выполнимость краевого условия:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} \left\{-\frac{2(x-y)}{4a^2t}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi t^3}} \left\{ \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (x-y)dy + \int_{-\infty}^{0} \tilde{\varphi}(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (x-y)dy \right\} =$$

Во втором интеграле заменим y на –y:

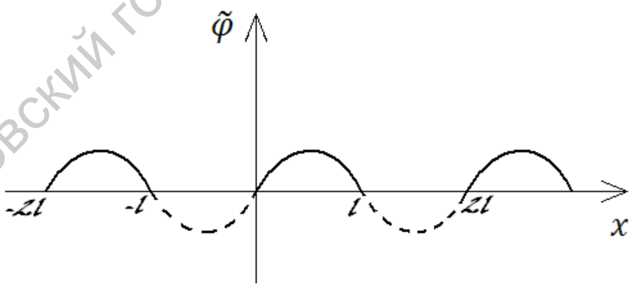
$$= \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi t^3}} \left\{ \int_0^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} \{(x-y) + (x+y)\}dy \right\}.$$

При $x \to 0$ это выражение равно 0, т.е. $u_x(0,t) = 0$. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим охлаждение стержня ограниченных размеров, оба конца которого имеют нулевую температуру.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Продолжим начальное условие нечетным образом влево и вправо с периодом 2l.




$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ при } 0 < x < l, \\ -\varphi(x) \text{ при } -l \le x \le 0, \\ -\varphi(x) \text{ при } l \le x \le 2l, \end{cases}$$

и т.д.

Тогда задача (3.5) сводится к (3.2) и дает решение в виде формулы Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\, dy.$$

Уже было показано, что эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности и начальному условию $u(x,0) = \tilde{\varphi}(x)$ при выполнении условия Липшица.

Проверим выполнение краевого условия $u(l,t) = 0$. Для этого разобьем интеграл на два:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int\limits_{l}^{\infty} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\, dy + \int\limits_{-\infty}^{l} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\, dy\right\}.$$

Введем новую переменную z=y-l

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\varphi}(z)\, e^{-\frac{(x-(z+l))^2}{4a^2t}}\, dz + \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{\varphi}(z)\, e^{-\frac{(x-(z+l))^2}{4a^2t}}\, dz\right\} =$$

Заменим z на –z во втором интеграле.

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\varphi}(z)\, e^{-\frac{(x-(z+l))^2}{4a^2t}}\, dz - \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{\varphi}(z)\, e^{-\frac{(x-(z+l))^2}{4a^2t}}\, dz\right\}.$$

Если x=l, то

$$u(l,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int\limits_{0}^{\infty} \left(\tilde{\varphi}(z) - \tilde{\varphi}(z)\right) e^{-\frac{(x-(z+l))^2}{4a^2t}}\, dz\right\} = 0\,,$$

Что и требовалось доказать.

### 3.4° Решение неоднородной краевой задачи теплопроводности.

Задача для бесконечного стержня с подкачкой в него энергии будет иметь вид:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ -\infty < x < +\infty, t \geq 0, \\ U(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (3.6)$$

В данной задаче подкачку энергии определяет $f(x,t)$.

Представим решение в виде суммы слагаемых (метод редукции):

$u(x,t) = u^{\textcircled{1}}(x,t) + u^{\textcircled{2}}(x,t)$, и для каждого слагаемого составим свои задачи (3.6а) и (3.6б).

$$\begin{cases} u_t^{\textcircled{1}} = a^2 u_{xx}^{\textcircled{1}}, \\ -\infty < x < +\infty, t \geq 0, \\ U^{\textcircled{1}}(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (3.6а)$$

$$\begin{cases} u_t^{\textcircled{2}} = a^2 u_{xx}^{\textcircled{2}} + f(x,t), \\ -\infty < x < +\infty, t \geq 0, \\ u^{\textcircled{2}}(x,0) = 0. \end{cases} \quad (3.6б)$$

Задача (3.6а) это задача (3.2), то есть ранее уже решенная. Её решение представляется формулой Пуассона:

$$u^{\textcircled{1}}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} dy. \quad (3.3)$$

Будем искать решение задачи (3.6б) в виде:

$u^{\oslash}(x,t) = \int_0^t z(x,t-\tau)d\tau.$

Лемма:

$u^{\oslash}(t)$ – удовлетворяет (3.6б), если $z(x,t,\tau)$ удовлетворяет (3.6в):

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx}, \\ -\infty < x < +\infty, t \geq 0, \\ z(x,t-\tau) = f(t). \end{cases} \tag{3.6в}$$

Доказательство:

Найдем $u_t^{\oslash}$ и $u_{xx}^{\oslash}$:

$u_t^{\oslash} = z(t=\tau) + \int_0^t z_t(x,t-\tau)d\tau.$

$u_{xx}^{\oslash} = \int_0^t z_{xx}(x,t-\tau)d\tau.$

Можно увидеть, что

$z(t-\tau) + \int_0^t z_t(x,t-\tau)d\tau - a^2 \int_0^t z_{xx}(x,t-\tau)d\tau = f(x,t)$, т.е. $u_t = a^2 u_{xx}$.

Лемма доказана.

Найдем решение (3.6в).

Введем новую переменную $s = t-\tau$, и функцию $z(x,s)$, тогда (3.6в) примет вид:

$$\begin{cases} z_s = a^2 z_{xx}, \\ -\infty < x < +\infty, s \geq 0, \\ z(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Это задача является задачей (3.2) с заменами $s = t, U(x,t) = Z(x,s), f(x) = \varphi(x)$. Её решение имеет вид (3.3):

$U(x,s) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y,s)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 s}} dy.$

Поскольку $U^{\oslash}(x,t) = \int_0^t z(x,t-\tau)d\tau$,

$u^{\oslash}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} f(y,\tau) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau dy.$

В конечном итоге получаем решение:

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} f(y,\tau)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau dy. \tag{3.7}$$

При $f = 0$, подкачки энергии нет, решение (3.7) принимает вид решения (3.3).

## $3.5^0$ Решение однородной краевой задачи теплопроводности методом разделения переменных.

Вернемся к задаче охлаждения стержня ограниченных размеров.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Оба края стержня находятся при фиксированной нулевой температуре.

Представим искомую функцию, в виде:

$U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ и подставим в дифференциальное уравнение.

$XT_t = a^2 X_{xx} T$,

$\frac{1}{a^2}\frac{T_t}{T} = \frac{X_{xx}}{X}$.

Левая часть зависит только от $t$, а правая только от $x$. Такое возможно, только если обе части одна и та же константа. Если эта константа $< 0$, то решение для $X(x)$ есть, если $\ge 0$, то решения нет. Это было доказано в теме 2.

$\frac{1}{a^2}\frac{T_t}{T} = \frac{X_{xx}}{X} = -\Lambda^2$.

Получаем для функций $X(x)$ и $T(t)$:

$X_{xx} + \Lambda^2 X = 0$,

$T_t + a^2\Lambda^2 T = 0$.

Построим краевые задачи для этих функций.

Для ***X***:

$$\begin{cases} X_{xx} + \Lambda^2 X = 0, \\ 0 \le x \le l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{3.5a}$$

Найдем решение этой задачи:

$X(x) = A\sin\Lambda x + B\cos\Lambda x$ ,

$X(0) = B = 0$,

$X(l) = A\sin\Lambda l = 0$.

Если $A = 0$, то решение будет нулевое, которое нас не интересует, значит:

$\sin \Lambda l = 0$

$\Lambda l = n\pi, (n = 0,1,2 \dots)$

Получаем дискретный набор $\Lambda$ (собственных значений):

$\Lambda = \Lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, ему соответствует дискретный набор собственных функций:

$X(x) = X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x$ , где $A_n$- произвольная константа.

Пользуясь произвольностью выбора $A_n$, положим что $A_n = 1$, в таком случае получаем:

$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x.$

Для Т:

$U_n(x,t) = X_n(x) T_n(t).$

$$\begin{cases} \dot{T}_n + a^2 \Lambda^2 T_n = 0 \\ X(x)T(0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{3.5б}$$

Решение дифференциального уравнения и имеет вид:

$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \Lambda^2 t}.$

Найдем $C_n$ из начальных условий:

Пусть $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x$ , где $\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(y) \sin \frac{\pi n}{l} y dy.$

Тогда 2-е уравнение системы дает нам:

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$

$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$ .

$T_n(0) = \varphi_n = C_n.$

Нашли частное решение в виде:

$U_n(x,t) = \varphi_n e^{-a^2 \Lambda^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x.$

Чтобы найти общее решение построим бесконечный ряд:

$$\boldsymbol{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-a^2 \Lambda_n^2 t} sin \frac{\pi n}{l} x}, \textbf{ где } \boldsymbol{\Lambda_n = \frac{\pi n}{l}} \tag{3.8}$$

Чтобы ряд был общим решением задачи (3.5) надо чтобы ряды для $U(x,t)$, $U_t(x,t)$, $U_{xx}(x,t)$ равномерно сходились.

$$U_t(x,t) = -a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2\, e^{-a^2\Lambda_n^2 t} sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$U_{xx}(x,t) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2\, e^{-a^2\Lambda_n^2 t} sin\frac{\pi n}{l}x\,.$$

Чтобы ряды равномерно сходились, надо чтобы сходились мажорантные ряды:

$$M_0 = -\left(a\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-a^2\Lambda_n^2 t}\,,$$

$$M_2 = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 e^{-a^2\Lambda_n^2 t}\,,$$

Будем считать, что $\varphi(x) < M$, где есть температура ограничена сверху:

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y)\sin\frac{\pi n}{l}y dy < 2M.$$

Нас интересуют ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\, e^{-a^2\Lambda_n^2 t}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\, n^2 e^{-a^2\Lambda_n^2 t}$

Проверим их сходимость.

Условие сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ при $n \to \infty$.

Применим его для наших рядов:

$a_n = e^{-a^2\Lambda_n^2 t} = e^{-n^2\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}$, возьмем $a_n' = n^2\, e^{-a^2\Lambda_n^2 t}$, и рассмотрим отношение:

$$\frac{a_{n+1}'}{a_n'} = \frac{(n+1)^2}{n^2} e^{-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 (n+1)^2 + \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} e^{-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 (2n+1)^2} \to 1, \text{при } n \to \infty.$$

Мы доказали сходимость мажорантных рядов, значит равномерно сходятся ряды для $U(x,t)$, $U_t(x,t)$, $U_{xx}(x,t)$, а значит (3.8) является общим решением задачи (3.5).

$$\boldsymbol{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-a^2\Lambda_n^2 t} sin\frac{\pi n}{l}x\,,\quad \text{где } \Lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y)\sin\frac{\pi n}{l}y dy.} \tag{3.8}$$

## 3.6 $^{O}$ Решение неоднородной краевой задачи теплопроводности методом разделения переменных

Задача на подогрев стержня ограниченных размеров имеет вид:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ \quad 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ \quad u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Представим решение в виде суммы решений (метод редукции):

$u(x,t) = u^{\textcircled{1}}(x,t) + u^{\textcircled{2}}(x,t)$, и для каждого решения составим свои задачи (3.9а) и (3.9б).

$$\begin{cases} u_t^{\textcircled{1}} = a^2 u_{xx}^{\textcircled{1}}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u^{\textcircled{1}}(x,0) = \varphi(x), \\ u^{\textcircled{1}}(0,t) = u^{\textcircled{1}}(l,t) = 0. \end{cases} \qquad (3.9а)$$

$$\begin{cases} u_t^{\textcircled{2}} = a^2 u_{xx}^{\textcircled{2}}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u^{\textcircled{2}}(x,0) = 0, \\ u^{\textcircled{2}}(0,t) = u^{\textcircled{2}}(l,t) = 0. \end{cases} \qquad (3.9б)$$

Задача (3.9а) ранее уже решена. Её решением является:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-a^2 \Lambda_n^2 t} sin\frac{\pi n}{l} x. \qquad (3.8)$$

Будем искать решение задачи (3.9б).

Представим:

$U^{\textcircled{2}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x$, чтобы сразу удовлетворить краевым условиям.

$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x$, где

$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(y,t) sin\frac{\pi n}{l} y dy$. После подстановки получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{U}_n(t) sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 U_n(t) sin\frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin\frac{\pi n}{l} x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых гармониках и получаем дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} \dot{U}_n(t) = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 U_n(t) + f_n(t), \\ U_n(0) = 0. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде:

$U_n(t) = \int_0^t z(t,\tau) d\tau.$

Лемма:

$U_n(t)$ - удовлетворяет (3.9в) если $z(t,\tau)$ - удовлетворяет (3.9г).

$$\begin{cases} z_t + K^2 z = 0, K = \frac{an\pi}{l}, \\ \qquad t \geq 0, \\ \quad z(t=\tau) = f_n(t). \end{cases} \qquad (3.9г)$$

Доказательство:

$$\begin{cases} \dot{u_n}(t) = Z(t-\tau) - \int_0^t z_t(t,\tau)d\tau, \\ \quad K^2 u_n(t) = K^2 \int_0^t z(t,\tau)d\tau. \end{cases}$$

Складываем оба уравнения системы, и получим:

$$\dot{U_n} + K^2 U_n = f_n(t).$$

Лемма доказана.

Осталось найти решение (3.9г).

Введем переменную $s = t - \tau$. $z(t,\tau) = z(t-\tau)$. Получаем измененное условие задачи (3.9г):

$$\begin{cases} z_s + K^2 z = 0, \\ \quad s \geq 0, \\ z(0) = f_n(t). \end{cases}$$

Находим:

$$z(s) = Ce^{-K^2 s}, C = f_n(\tau).$$

Подставим в $U_n(t) = \int_0^t z(t,\tau)d\tau$, получаем:

$$U_n(t) = \int_0^t f_n(\tau)e^{-K^2(t-\tau)}d\tau,$$

$$U^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau)e^{-K^2(t-\tau)}d\tau \, sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$U^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\varphi_n e^{-a^2\Lambda^2 t} + \int_0^t f_n(\tau)e^{-a^2\Lambda^2(t-\tau)}d\tau \right\} \sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (3.10)$$

При $f(x,t) = 0$, (3.10) сводится к (3.8).

### 3.7⁰ Связь формулы Пуассона с решением методом разделения переменных

Вспомним задачу (3.2), для охлаждения бесконечного стержня:

$$\begin{cases} \quad u_t = a^2 u_{xx} \\ -\infty < x < +\infty, t \geq 0 \\ \quad u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \qquad (3.2)$$

Её решение имеет вид:

$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy$ - формула Пуассона. (3.3)

Решим задачу (3.2) методом разделения переменных. Представим

$U(x,t) = X(x)T(t)$,

$XT_t = a^2 X_{xx} T$,

$\frac{T_t}{a^2 T} = \frac{X_{xx}}{X} = -\Lambda^2$. Для $X(x)$ находим:

$X_{xx} + \Lambda^2 X = 0$,

$X(x) = C_1 e^{i\Lambda x} + C_2 e^{-i\Lambda x}$ .

Выберем $X(x) = e^{i\Lambda x}, (-\infty < \Lambda < +\infty)$, чтобы убрать произведения констант, в дальнейшем.

Для собственных значений $\Lambda$ спектр непрерывный.

Для T:

$\dot{T}\Lambda + a^2\Lambda^2 T = 0, T_\Lambda(t) = C\Lambda e^{-a^2\Lambda^2 T}$

Чтобы получить общее решение надо проинтегрировать частные решения, потому что спектр непрерывен:

$U_\Lambda(x,t) = C_\Lambda e^{-a^2\Lambda^2 t + i\Lambda x}$ ,

$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_\Lambda e^{-a^2\Lambda^2 t + i\Lambda x} d\Lambda$.

Возьмем начальные условия:

$U(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_\Lambda e^{-i\Lambda x} d\Lambda$ – интеграл Фурье. Существует обратное преобразование Фурье:

$C_\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-i\Lambda y} dy$ .

Получим решение:

$U(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-a^2\Lambda^2 t + i\Lambda(x-y)} d\Lambda dy$ (3.11)

Покажем, что решение (3.11) эквивалентно решению (3.3).

Обозначим $b^2 = a^2 t, z = x - y$.

Вычислим интеграл:

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2\Lambda^2 + i\Lambda z} d\Lambda$.

Воспользуемся интегралом вероятности: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2\left(\Lambda^2 - \frac{i\Lambda z}{b^2}\right)} d\Lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2\left(\Lambda - \frac{i\Lambda z}{2b^2}\right) - \frac{z^2}{4b^4}} d\Lambda = e^{-\frac{z^2}{4b^4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2\left(\Lambda - \frac{i\Lambda z}{2b^2}\right)^2} d\Lambda.$$

Замена: $\xi = b\left(\Lambda - \frac{i\Lambda z}{2b^2}\right)$, даст:

$$I = e^{-\frac{z^2}{4b^4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{1}{b} d\xi = e^{-\frac{z^2}{4b^4}} \frac{1}{b} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}.$$

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) I\, dy = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy.$$

Следовательно, оба метода дают одинаковые решения.

## $3.8^0$ Теорема об экстремуме и её следствия.

На фазовой поверхности рассмотрим область $0 \le x \le l, 0 \le t \le T,$ которую будем считать состоящей из внутренности $\{P\} 0 < x < l, 0 \le t \le T$ и незамкнутой границы $\{G\}\ x = 0, x = l, 0 \le t < T$.

Теорема: если функция $u(x,t)$ - определена и непрерывна в области $\{P + G\}$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$ на $\{P\}$, то экстремальное значение решения существует только на границе $\{G\}$.

Доказательство: обозначим максимальное значение функции на границе $\{G\}$: $U_{max}(G) = M$. Исходя из противного, предположим, что в точке $(x_0; t_0)$ - функция имеет максимум:

$U(x_0; t_0) = M + \varepsilon > M$. Следовательно, в этой точке выполняются условия максимума для функции 2 - х переменных: $u_x(x_0; t_0) = 0$, $u_{xx}(x_0; t_0) \le 0$, $u_t(x_0; t_0) \ge 0$.

Отсутствие противоречия возникает только при $u_{xx}(x_0; t_0) = 0$ и $u_t(x_0; t_0) = 0$.

Введем вспомогательную функцию: $v(x,t) = u(x,t) + k(t_0 - t)$, где $k$ - константа.

Получаем: $v(x_0; t_0) = u(x_0; t_0) = M + \varepsilon$. Определим значение функции $v$ на границе области. Легко видеть, что $k(t_0 - t) \le kT$. Если взять $k = \frac{\varepsilon}{2T}$, то $V(G) \le \mu + \frac{\varepsilon}{2}$. Значит для функции $v$ максимум достигается внутри области $\{P\}$. Предположим, что он реализуется в точке $(x_1; t_1)$, где должно выполнятся условие:

$v_x(x_1; t_1) = 0$, $v_{xx}(x_1; t_1) \le 0$, $v_t(x_1; t_1) \ge 0$.

Получаем: $v_{xx}(x_1; t_1) = u_{xx}(x_0; t_0) \le 0$, $v_t(x_1; t_1) = u_t(x_0; t_0) \ge 0$.

Видим, что равенство $u_t = a^2 u_{xx}$ нарушается. Следовательно максимум решения $u(x,t)$ существует только на границе $\{G\}$. Для доказательства отсутствия минимума решения внутри $\{P\}$ следует рассматривать $u_1(x,t) = -u(x,t)$.

Теорема доказана.

Следствие 1.

Если $u_1$ и $u_2$ удовлетворяет условиям применимости теоремы об экстремуме и $u_1(G) \leq u_2(G)$, то это неравенство выполняется и внутри области $\{P\}$.
Доказательство.
Введем функцию $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$. Для этой функции тоже справедлива теорема об экстремуме . Поскольку $v(G) \geq 0$, то и $v(P) \geq 0$, т.е. $u_1(P) \leq u_2(P)$.

Следствие 2.
Если $u_1(x,t), u_2(x,t)$ и $u_3(x,t)$ удовлетворяют условию применимости теоремы об экстремуме и на границе выполняется $u_1(G) \leq u_2(G) \leq u_3(G)$, то это неравенство выполняется во всех точках области $P$.
Доказательство.
Введем функции $v_1 = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ , $v_2 = u_3(x,t) - u_2(x,t)$. Для этих функций может быть применена теорема об экстремуме, следовательно, знак функций $v_1$ и $v_2$ внутри области $P$ изменятся не может и $u_1(P) \leq u_2(P) \leq u_3(P)$.
Следствие 3.
Если $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяет условию применимости теоремы об экстремуме на границе $|u_1(G) - u_2(G)| \leq \varepsilon$, то внутри области $\{P\}$, $|u_1(P) - u_2(P)| \leq \varepsilon$.
Доказательство.
Постоянная $\varepsilon$ удовлетворяет теореме об экстремуме. Введем $v_1 = -\varepsilon$, $v_2 = u_1 - u_2$, $v_3 = \varepsilon$ и доказательство сводится к предыдущему.

## 3.9 $^{O}$ Существование, единственность и корректность решений краевых задач теплопроводности.

Существование решений различных краевых задач теплопроводности было доказано в рамках данной темы 3.
**1.** Докажем единственность решения общей краевой задачи.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,l), \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Проведем доказательство от противного.
Предположим, что есть 2 разных решения этой краевой задачи, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$.
Построим $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Построим краевую задачу для каждой функции, и получаем:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ v(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases}$$

Решение этой краевой задачи в соответствии с теоремой об экстремуме является нулевым. Значит
$u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

**2.** Вернемся к задаче на охлаждение бесконечного стержня.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ -\infty < x < +\infty, t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

При доказательстве будем считать $|u(x,t) \le M$ во всей области определения решения.

Исходя от противного предположим, что есть два разных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Получаем ограничение для функции $v(x,t) = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le 2M$.

Временно ограничим координату $|x| \le L$ и введем функцию $V(x,t) = \frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2 t)$, которая удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Поскольку $V(x,0) = \frac{4M}{L^2}\frac{x^2}{2} \ge |v(x,0)| = 0$, $V(\pm L,t) = 2M + a^2 t \ge |v(\pm L,t)| \le 2M$, получаем $V(G) \ge |v(G)|$ и на основе следствия из теоремы об экстремуме

$-V(x,t) \le v(x,t) \le V(x,t)$.

$-\frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2 t) \le v(x,t) \le \frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2 t)$. Устремляем $L \to \infty$ и получаем

$v(x,t) = |u_1(x,t)$ -$u_2(x,t)| = 0$. Следовательно, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

**3.** Краевую задачу будем называть корректной, если малому изменению начальных или краевых условий соответствует малое изменение её решения. Рассмотрим 2 краевые задачи, отличающиеся малым изменением начальных и краевых условий.

$$\begin{cases} u_t^{\textcircled{1}} = a^2 u_{xx}^{\textcircled{1}} + f(x,t), \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u^{\textcircled{1}}(x,0) = \varphi(x), \\ u^{\textcircled{1}}(0,t) = \mu_1(t), \\ u^{\textcircled{1}}(l,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t^{\textcircled{2}} = a^2 u_{xx}^{\textcircled{2}} + f(x,t), \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u^{\textcircled{2}}(x,0) = \varphi(x) + \varepsilon_1, \\ u^{\textcircled{2}}(0,t) = \mu_1(t) + \varepsilon_2, \\ u^{\textcircled{2}}(l,t) = \mu_2(t) + \varepsilon_3. \end{cases}$$

Построим функцию $|v(x,t)| = |u^{\textcircled{2}} - u^{\textcircled{1}}|$, для которой получим:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ v(x,0) \le \varepsilon, \\ v(0,t) \le \varepsilon, \\ v(l,t) \le \varepsilon. \end{cases}$$

Где в качестве $\varepsilon$ выбрано наибольшее из $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$. Видим, что на границе области $|v(G)| \le \varepsilon$. В соответствии со следствием 3 получаем $|v| \le \varepsilon$ во всей области определения решения. Следовательно $u^{\textcircled{1}}(x,t)$ мало отличается от $u^{\textcircled{2}}(x,t)$.

## Тема 4.Краевые задачи эллиптического типа

### $4.1^0$ Физические процессы, порождающие уравнения эллиптического типа

Уравнения эллиптического типа возникают в физике при описании состояний не меняющихся с течением времени.

1) Гиперболические и параболические уравнения в статическом пределе.

При описании электромагнитного поля ($2.4^0$) возникают уравнения

$$u_{tt} = v^2\nabla^2 \mathrm{u} + \mathrm{f(x,y,z,t)} \rightarrow \nabla^2\mathrm{u} = -\tilde{\mathrm{f}},$$

где u(x,y,z,t) задает распределение поля в пространстве, создаваемого его источниками f(x,y,z,t).

В статическом пределе ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) получаем $\nabla^2\mathrm{u(x,y,z)} = -\mathrm{f(x,y,z)}$. (4.1)

В тех областях, где источники отсутствуют $\nabla^2\mathrm{u} = 0$ (4.1′). При описании процесса теплопроводности получаем уравнение $u_t = a^2\nabla^2\mathrm{u} + \mathrm{f}$ ,(3.1) где u(x,y,z,t) задает распределение температуры по объёму, f(x,y,z,t) определяет вклад от источников тепла. Вне этих источников $\nabla^2\mathrm{u(x,y,z)} = 0$.

Уравнения $\nabla^2 u = -\tilde{\mathrm{f}}$ (4.1) называется уравнениями Пуассона, $\nabla^2 u = 0$ $(4.1')$ называется уравнениями Лапласа, $\nabla^2 = divgrad$ называют лапласианом.

2) Электростатическое поле.

Это поле определяется векторами напряженности ($\bar{E}$) и индукции ($\bar{D}$). Для них существует система уравнений

$$\begin{cases} rot\,\bar{E} = 0, \\ div\,\bar{D} = 4\pi\rho, \\ \bar{D} = \varepsilon\bar{E}. \end{cases}$$

Известно, что для любого скаляра $rot(gradf) = 0$.

Положим $\bar{E} = -grad\varphi, \quad div(-\varepsilon grad\varphi) = 4\pi\rho.$

Для $\varepsilon$=const получаем уравнения

$$\nabla^2\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}\ (\text{на } V_{\text{зар}}),$$

$$\nabla^2\varphi = 0\ (\text{вне зарядов}).$$

$\varphi(x,y,z)$ называют скалярным потенциалом.

3) Стационарное магнитное поле.

Это поле определяется векторами напряженности ($\bar{H}$) и индукции ($\bar{B}$). Для них существует система уравнений

$$\begin{cases} rot\,\bar{H} = \dfrac{4\pi}{c}\bar{j}, \\ div\,\bar{B} = 0, \\ \bar{B} = \mu\bar{H}. \end{cases}$$

Известно, что для любого вектора $divrot\bar{a} = 0$. Положим $\bar{B} = rot\bar{A}$, что дает

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} rot\,\bar{A}\ ,\ \ rot\frac{1}{\mu} rot\bar{A} = \frac{4\pi}{c}\bar{j}.$$

Для $\mu = const$, положим $div\bar{A} = 0$ и получим.

$$\nabla^2\bar{A} = -\frac{4\pi}{c}\bar{j}\ (\text{на } V_{\text{тока}}),$$

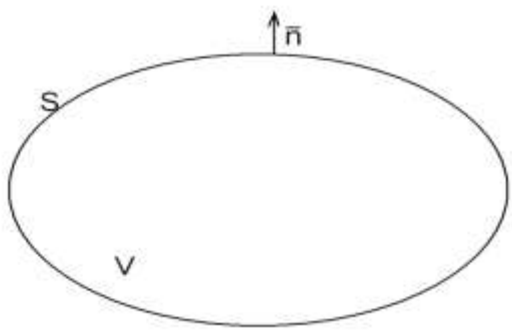
$$\nabla^2\bar{A} = 0\ (\text{вне токов}).$$

$\bar{A}(x, y, z)$ называют векторным потенциалом.

Для постановки краевых задач уравнения Пуассона (4.1) и Лапласа ($4.1'$) следует дополнить краевыми условиями, которые задают поведение функции или её нормальной производной на границе S:

а) $u(s) = \varphi(s)$ или

б) $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_s = \psi(s)$.




В дальнейшем нам потребуются выражения для $\nabla^2$ в различных координатных системах.

В сферических координатах $r, \theta, \alpha$:

$$\nabla^2 u(r,\theta,\alpha) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}.$$

В цилиндрических координатах $\rho, \alpha, z$:

$$\nabla^2 u(\rho,\alpha,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В прямоугольных координатах x,y,z:

$$\nabla^2 u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

### $4.2^0$ Решение одномерных уравнений Пуассона и Лапласа

Рассмотрим случаи, когда функция u зависит от одной переменной.

а) Сферическая симметрия.

Пусть u= u(r), f=f(r), тогда

(4.1)→ $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = f(r)$.

Умножаем на $r^2dr$ и получаем после интегрирования $r^2\frac{du}{dr} = \int fr^2dr + c_1$.

Умножаем $\frac{dr}{r^2}$ и после интегрирования получаем:

$u(r) = \int\{\int fr^2dr\}\frac{dr}{r^2} - \frac{c_1}{r} + c_2$ – общее решение уравнения Пуассона.

При f=const, $u(r) = f\frac{r^2}{6} - \frac{c_1}{r} + c_2$ .

При f=0, $u(r) = -\frac{c_1'}{r} + c_2'$ - общее решение уравнения Лапласа.

б) Цилиндрическая симметрия.

Пусть $u = u(\rho), f = f(\rho)$, тогда

(4.1)→ $\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = f(\rho)$.

Умножаем на $\rho d\rho$ и после интегрирования получаем $\rho\frac{du}{d\rho} = \int f\rho d\rho + c_1$ .

Умножаем на $\frac{d\rho}{\rho}$ и после интегрирования получаем:

$u(\rho) = \int\{\int f\rho d\rho\}\frac{d\rho}{\rho} + c_1 ln\rho + c_2$ - общее решение уравнения Пуассона.

При f=const, $u(\rho) = f\frac{\rho^2}{u} + c_1 ln\rho + c_2$.

При f=0, $u(\rho) = c_1' ln\rho + c_2'$ - общее решение уравнения Лапласа.

в) прямоугольная симметрия.

Пусть u=u(x), f=f(x), тогда

(4.1)→ $\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$.

Умножаем на dx и после интегрирования получаем $\frac{du}{dx} = \int f dx + c_1$.

Умножаем на dx и после интегрирования получаем:

$u(x) = \int\{\int f dx\}dx + c_1 x + c_2$ – общее решение уравнения Пуассона.

При f=const, $u(x) = f\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$ .

При f=0, $u(x) = c_1' x + c_2'$ - общее решение уравнения Лапласа.

### 4.3[0] Решение двумерных уравнений Лапласа методом разделенных переменных

Пусть u=u(x, y), f=f(x, y).

Перейдем к полярным координатам $\{x, y\} \to \{\rho, \alpha\}$, (см. 4.1[0]).

$$\nabla^2 u(\rho,\alpha) = 0, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = 0.$$

Считая границей окружность радиуса r построим краевую задачу:

$$(4.2)\quad \begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = 0, \\ 0 \le \rho < \infty; 0 \le \alpha \le 2\pi, \\ \quad u(r,\alpha) = \varphi(\alpha). \end{cases}$$

Пусть $u(\rho,\alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha)$,

$\Phi(\alpha)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + R\Phi_{\alpha\alpha} = 0$. Разделим на $R\Phi$:

$\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) = -\frac{\Phi_{\alpha\alpha}}{\Phi} = \lambda$, где $\lambda = const$, так как $\rho$ и $\alpha$ независимые переменные.

Уравнение $\Phi_{\alpha\alpha} + \lambda\Phi = 0$ имеет общее решение $\Phi(\alpha) = A\sin\sqrt{\lambda}\alpha + B\cos\sqrt{\lambda}\alpha$.

Условие периодичности функции $\Phi(\alpha)$

$\Phi(\alpha + 2\pi) = \Phi(\alpha)$ дает $\sqrt{\lambda} = n$, где $n = 0, 1, 2$ ....Получаем

$\Phi_n(\alpha) = A_n \sin n\alpha + B_n \cos n\alpha$.

Ищем частные решения уравнения

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_n}{d\rho}\right) - \lambda_n R_n = 0.$$

Будем искать решение в виде $R_n(\rho) = \rho^\mu$.

$$\mu^2\rho^\mu - n^2\rho^\mu = 0,$$

$$\mu^2 - n^2 = 0,$$

$$\mu = \pm n.$$

Выберем

$$R_n = \begin{cases} \rho^n (0 \le \rho \le r), \\ \rho^{-n} (\rho \ge r). \end{cases}$$

В зависимости от области определения решения имеем

$$u_n(\rho,\alpha) = \begin{cases} \rho^n \{A_n \sin n\alpha + B_n \cos n\alpha\}, 0 \le \rho \le r, \\ \rho^{-n}\{A'_n \sin n\alpha + B'_n \cos n\alpha\}, \rho \ge r. \end{cases}$$

Общее решение краевой задачи представим в виде ряда

$$u(\rho,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho,\alpha).$$

Краевые условия дают $u(r,\alpha) = \varphi(\alpha) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha\}$ (4.3), где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\beta) \sin n\beta \, d\beta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\beta) \cos n\beta \, d\beta.$$

Для внутренней области введем обозначения

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \{A_n \sin n\alpha + B_n \cos n\alpha\} = \varphi(\alpha) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha\}.$$

Для внешней области

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} \{A'_n \sin n\alpha + B'_n \cos n\alpha\} = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha\}.$$

Общее решение запишем следующим образом

$$u(\rho,\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\rho^n}{r^n}\{a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha\}, 0 \le \rho \le r, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{r^n}{\rho^n}\{a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha\}, \rho \ge r. \end{cases}$$

Обозначим $t = \begin{cases} \frac{\rho}{r}\ (0 \le \rho \le r), \\ \frac{r}{\rho} (\rho \ge r). \end{cases}$

В общем виде получаем

$$u(\rho, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \{a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha\}\ (4.3), \text{где}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\beta) \sin n\beta\, d\beta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\beta) \cos n\beta\, d\beta.$$

Для того чтобы (4.3) было общим решением (4.2) необходимо, чтобы равномерно сходились ряды $u(\rho, \alpha), \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right), u_{\alpha\alpha}$.

$$u_{\alpha\alpha} = -\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^2 \{a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha\}.$$

Будем считать, что $\varphi(\alpha)$ не обращается в бесконечность $\varphi(\alpha) \le M$. Тогда введем мажорантные ряды.

$\varphi(r, \alpha) \le M,$

$a_n \le 2M, b_n \le 2M.$

$$M_0 = 4M \sum_{n=1}^{\infty} t^n, M_2 = 4M \sum_{n=1}^{\infty} t^n n^2, \text{которые сходятся при } t < 1.$$

Следовательно, ряды $u(r, \alpha), \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right), u_{\alpha\alpha}$ равномерно сходятся и (4.3) является общим решением поставленной краевой задачи.

**Математическое дополнение, формулы Грина.**

Теорема Остроградского-Гаусса имеет вид $\int_V div\bar{a}\, dV = \oint_S a_n\, dS$, где функция $\bar{a}$ непрерывна и конечна в рассматриваемом объёме V, охватываемом поверхностью S. Нормаль $\bar{n}$ к $S$ направлена наружу от объёма V. Возьмем

$\bar{a}_1 = ugradv = u(\nabla v).$Тогда

$$div\bar{a}_1 = \nabla u(\nabla v), a_{1n} = u\frac{\partial v}{\partial n},$$

$$\int_V \{u\nabla^2 v + (\nabla u)(\nabla v)\}dV = \oint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS. \qquad (4.4)$$

Аналогично для $\bar{a}_2 = vgradu$ получим

$$\int_V \{v\nabla^2 \mathrm{u} + (\nabla v)(\nabla \mathrm{u})\}dV = \oint_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS. \qquad (4.4')$$

Разность (4.4) и (4.4$'$) дает

$$\int_V \{u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\}dV = \oint_S \left\{u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS. \qquad (4.5)$$

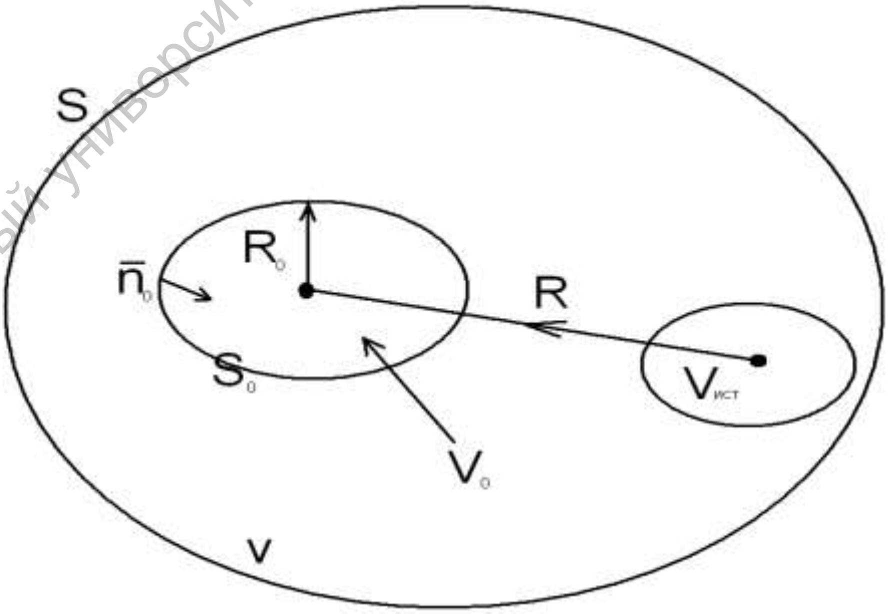
(4.4) и (4.5) будем называть первой и второй формулами Грина. Эти формулы справедливы в той области, где функции u и $v$ непрерывны и конечны вместе со своими первыми производными.

### 4.4$^0$ Решение трехмерных уравнений Пуассона и Лапласа в общем случае

Возьмем уравнения Пуассона и Лапласа для полевой функции u(x,y,z).

$\nabla^2 u = f$(на $V_{\text{ист.}}$),

$\nabla^2 u = 0$(вне источников).




Уравнение Пуассона имеет
$f \neq 0$ на $V_{\text{ист.}}$, создающими соответствующее поле.

$\nabla^2 u(x, y, z) = f(x, y, z)$

Его решение в произвольном объёме V, включающем в себя $V_{\text{ист.}}$ ,будем искать с помощью формулы Грина (4.5).

$$\int_V \{u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\}dV = \oint_S \left\{u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS.$$

В этой формуле в качестве u(x, y, z) возьмем полевую функцию, удовлетворяющую уравнению Пуассона на $V_{\text{ист.}}$. Возьмем в качестве $v=\frac{1}{R}$, где R- расстояние между, любой точкой источника и любой точкой объёма V. При совпадении точки наблюдения с точкой истока R=0 и условия применимости формулы Грина нарушится. Окружим точку наблюдения сферой $S_0$ радиуса $R_0$ и выбросим область внутри сферы из рассмотрения. Тогда для области $V-V_0$ формула Грина дает

$$\int_{V-V_0}\left(u\nabla^2\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\nabla^2 u\right)dV=\oint_{S+S_0}\left\{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS.$$

Сведем выброшенный объем к точке $V_0\to 0, S_0\to 0, R_0\to 0$.

$$\int_{V}\left(u\nabla^2\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\nabla^2 u\right)dV=\oint_{S}\left\{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS+\oint_{S_0\to 0}\left\{u\frac{\partial}{\partial n_0}\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial n_0}\right\}dS.$$

Из ($4.2^0$) $\nabla^2 u(R)=0$ имеет решение $u(R)=-\frac{c_1}{R}+c_2$, в частном случае $\nabla^2\frac{1}{R}=0$.

Учитывая, $\nabla^2 u$=f имеем $-\int_V\frac{f}{R}dV\equiv\oint_S\left\{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS+I_0$, где

$$I_0=\oint_{S_0\to 0}\left\{u\frac{\partial}{\partial n_0}\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial n_0}\right\}dS=\oint_{R_0\to 0}\left\{\frac{u}{R_0^2}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial R_0}\right\}dS=$$
$$=\lim_{R_0\to 0}\left\{\frac{u}{R_0^2}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial R_0}\right\}_{\text{ср.}}\times 4\pi R_0^2=4\pi u.$$

Здесь использована теорема о среднем $\int f(S)dS=f_{\text{ср.}}S$.

Учитывая, что $u_{\text{ср.}}$ совпадает с искомой функцией, находим

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\int_{V_{\text{ист.}}}\frac{f}{R}dV+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS \qquad (4.6).\to$$

(4.6) – общее решение уравнения Пуассона.

Для уравнения Лапласа при f=0

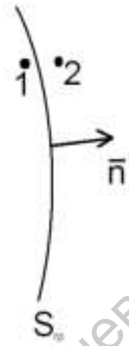
$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS \qquad (4.6').$$

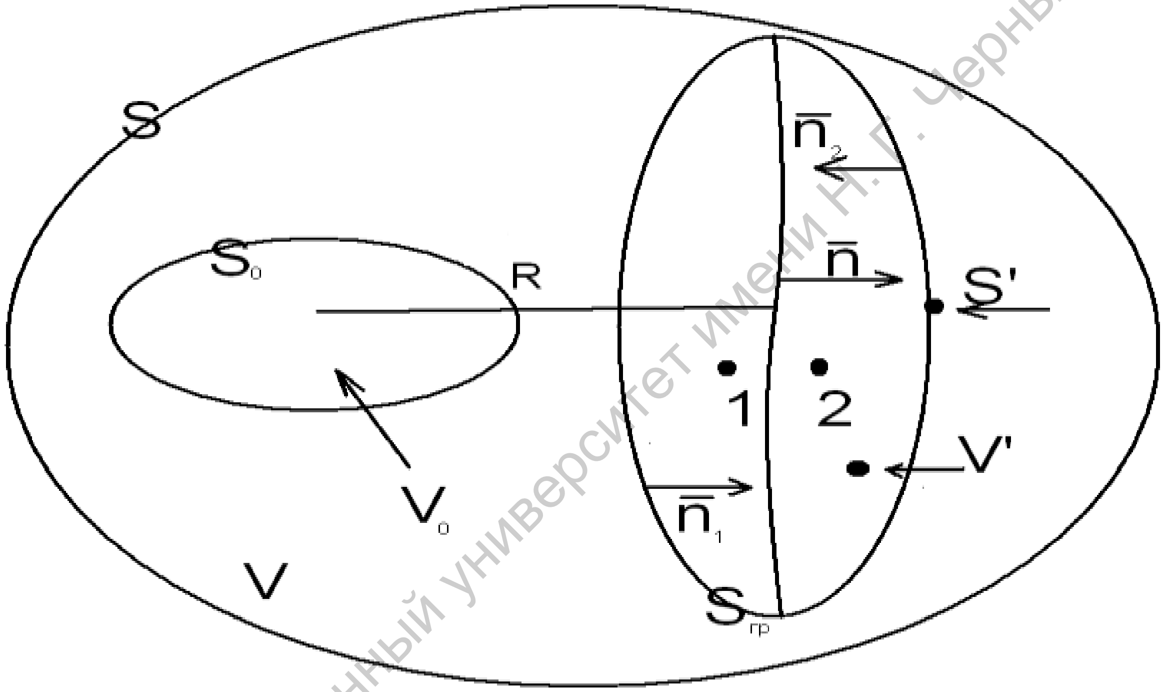
**$4.5^0$ Общее решение уравнения Лапласа при наличии разрыва производной искомой функции.**

Будем считать, что искомая функция удовлетворяет уравнению Лапласа в объёме V, где есть поверхность $S_{\text{гр.}}$, на которой производная претерпевает скачок

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1-\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_2=b\neq 0, 1\leftrightarrow 2.$$

Выбросим из рассмотрения точки $S_{гр}$,
которые будем считать точками истока. В формуле Грина (4.5) выберем u,как полевую функцию удовлетворяющую уравнению $\nabla^2 u = 0, v = \frac{1}{R}$.




Выбросим из рассмотрения $V_0$ и $V'$, $V \to V - V_0 - V'$. Получаем

$$\int_{V-V_0-V'} \left\{u\nabla^2 \frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mathrm{R}}\nabla^2 \mathrm{u}\right\} dV = \oint_{S+S_0+S'} \left\{u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right\} dS .$$

Устремляем $V_0 \to 0, S_0 \to 0, R_0 \to 0, V' \to 0, S' \to 2S$.

$$\int_V \left\{u\nabla^2 \frac{1}{R} - \frac{1}{R}\nabla^2 u\right\} dV = \oint_S \left\{u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right\} dS + I_0 + \oint_{S \to 2S_{гр}} \left\{u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right\} dS,$$

где $I_0$ был вычислен в $4.4^0$.

$$I_0 = \oint_{S_0 \to 0} \left\{u \frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{R_0}\right) - \frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial n_0}\right\} dS = 4\pi u.$$

Подсчитаем $I'$ при $S' \to S_{гр.}$

$$I' = \oint_{S\to 2S_{\text{гр.}}} \left\{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right\} dS =$$

$$= \int_{S_{\text{гр.}}} \left\{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right\}_1 dS - \int_{S_{\text{гр.}}} \left\{u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right\}_2 dS.$$

Поскольку $(\frac{\partial u}{\partial n})_1 - (\frac{\partial u}{\partial n})_2 = b \neq 0$ на $S_{\text{гр.}}$ и $R_1 = R_2 = R, u_1 = u_2 = u$, получаем

$$I' = -\oint_{S_{\text{гр.}}} \frac{b}{R} ds.$$

Окончательный ответ имеет вид

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_{\text{гр.}}} \frac{b}{R} dS + \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\} dS \ . \qquad (4.7)$$

При отсутствии разрыва производной функции u(x, y, z) внутри V (4.7) переходит в (4.6$'$).

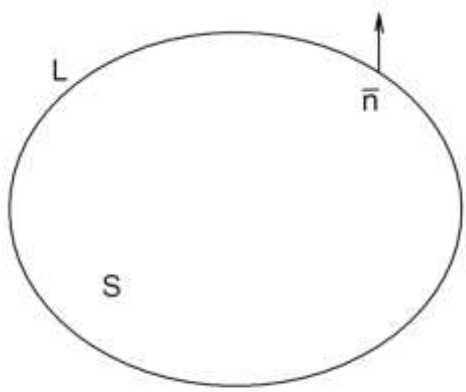
### $4.6^0$ Общее решение уравнения Пуассона в двумерном случае

### Математическое дополнение

Теорема Остроградского-Гаусса в двумерном варианте имеет вид

$$\int_S div_2\, \bar{a} dS = \oint_L a_n dl \text{, где}$$

$div_2 \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}$, $\bar{n}$ – нормаль к границе области S.




Выбирая $\bar{a}_1 = u\nabla\bar{v}$ и $\bar{a}_2 = v\nabla u$, по аналогии с получением формул Грина в $4.4^0$, получим

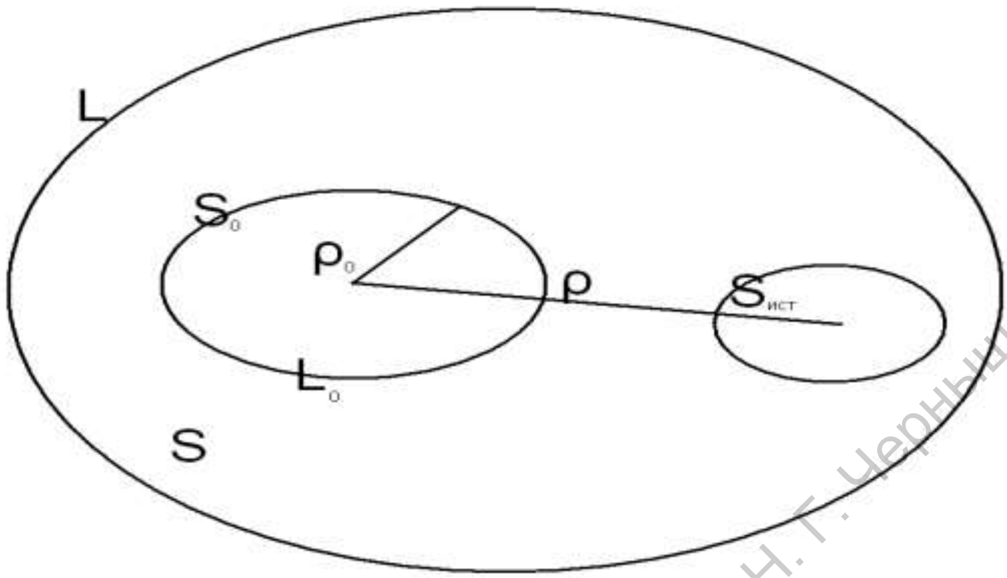
$$\int_S \{u\Delta_2 v - v\Delta_2 u\} dS = \oint_L \left\{u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right\} dl \text{, где}$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Предположим, что искомая функция u=u(x, y) удовлетворяет уравнению

$\nabla_2^2 u = f(x,y)$ на $S_{\text{ист.}}$,

$\nabla_2^2 u = 0$ вне источников.




В формуле Грина будем считать u – искомой функцией, $v = ln\rho$. Контур $L_0$ является окружностью радиуса $\rho_0$ и временно исключим площадь круга $S_0$ из рассмотрения. Тогда

$$\int_{S-S_0}\{u\nabla_2^2 ln\rho - ln\rho\nabla_2^2 u\}dS = \oint_{L+L_0}\left\{u\frac{\partial}{\partial n}ln\rho - ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dl.$$

Устремим $S_0 \to 0, L_0 \to 0, \rho_0 \to 0.$

$$\int_{S}\{u\nabla_2^2 ln\rho - ln\rho\nabla_2^2 u\}dS = \oint_{L}\left\{u\frac{\partial}{\partial n}ln\rho - ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dl + I_0, \text{ где}$$

$$I_0 = \oint_{L_0\to 0}\left\{u\frac{\partial}{\partial n_0}ln\rho_0 - ln\rho_0\frac{\partial u}{\partial n_0}\right\}dl$$

$$= \oint_{L_0\to 0}\left\{-\frac{u}{\rho_0} + ln\rho\frac{\partial u}{\partial n_0}\right\}dl = \lim_{\rho_0\to 0}\left\{-\frac{u}{\rho_0} + ln\rho_0\frac{\partial u}{\partial \rho_0}\right\}_{\text{ср.}} \times 2\pi\rho_0 = -2\pi u.$$

Учитывая, $\nabla^2 ln\rho = 0$ получаем в результате

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{S_{\text{ист.}}} u ln\frac{1}{\rho}dS + \frac{1}{2\pi}\oint_{S}\left\{u\frac{\partial}{\partial n}ln\rho - ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dl\ (4.8).\to$$

Следовательно, найдено решение краевой задачи (3.5). Решение неоднородной краевой задачи теплопроводности.

### 4.7 Гармонические функции

Функции $u = u(x, y, z)$ будем называть гармонической, если она определена и непрерывна в области $V + S$ и удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 u = 0$ внутри $V$.

Лемма.

Пусть $u = \upsilon + iw = u(z),\ где\ z = x + iy$ - комплексная переменная.

Функция называется аналитической, если производная от неё в некоторой точке не зависит от пути подхода к этой точке.

Если функция аналитическая, то её действительная и мнимая части тоже являются аналитическими функциями.

Доказательство.

$$u_x = \upsilon_x + iw_{x=} = \frac{\partial u}{\partial t} z_x = \frac{du}{dz}.$$

$$u_y = \upsilon_y + iw_y = \frac{du}{dz} z_y = i\frac{du}{dz}.$$

$$\frac{du}{dz} = \upsilon_x + iw_x = -i\upsilon_y + w_y.$$

$$\upsilon_x = w_y \to \upsilon_{xx} = w_{yx},$$

$$\upsilon_y = -w_x \to \upsilon_{yy} = -w_{xy},$$

$$\upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} = 0.$$

Аналогично,

$w_{xx} + w_{yy} = 0$, следовательно,

$$\nabla^2 \upsilon = \nabla^2 w = 0.$$

Введем понятие обратный радиус-вектор $\bar{r} \cdot r = a$. Полагая для простоты $a = 1$, получим $\tilde{r} = \frac{1}{r}$.

Для плоскости: $\hat{\rho} \cdot \rho = 1, \quad \hat{\rho} = \dfrac{1}{\rho}$

Если в гармонической функции от радиус-вектора перейти к обратному радиус-вектору, то функция остается гармонической в двухмерном случае.

Возьмем уравнение Лапласа на плоскости (см. 4.3 ͨ)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}=0.\quad \text{Заменим}\,\rho\to\tilde{\rho},\ u(\rho(\alpha)\to V(\tilde{\rho},\alpha)$$

$$\rho=\frac{1}{\tilde{\rho}},\ \rho\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}},$$

$$\left(\tilde{\rho}\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\right)\left(\tilde{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)V+V_{\alpha\alpha}=0,$$

$$\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}})+\frac{1}{\tilde{\rho}^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}=0.$$

Следовательно, V функция гармоническая.

Для объема: $\tilde{r}=\frac{1}{r}$

Возьмем уравнение Лапласа в трехмерном случае (см. 4.1[с])

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\nabla^2_{\theta,\alpha}u=0$, где

$\nabla_{\theta,\alpha}$ – *угловая* часть Лапласиана с производными по $\theta,\alpha$.

$$\nabla^2_{\theta,\alpha}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}.$$

Заменим $r\to\tilde{r},\ \ u(r,\theta,\alpha)\to\upsilon(r,\theta,\alpha)=ru(r,\theta,\alpha)$

Поскольку $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$, получим

$$r\nabla^2 u=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\nabla^2_{\theta,\alpha}\upsilon=0,\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial\tilde{r}}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}=-\tilde{r}^2\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}.$$

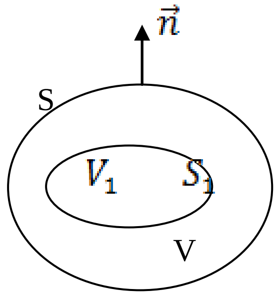
В итоге $\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\frac{\partial\upsilon}{\partial\tilde{r}}\right)+\frac{1}{\tilde{r}^2}\nabla^2_{\theta,\alpha}\upsilon=0.$

Следовательно, $\upsilon$ функция гармоническая.

### 4.8[с] Некоторые свойства гармонических функций

Свойство 1.

Если u(x,y,z) является гармонической функцией, то $\oint\limits_{S_1}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0,$




где $S_1$- целиком находится внутри S.

Доказательство. Воспользуемся 2-ой формулой Грина (4.4°)

$$\int_V \left(u\nabla^2\upsilon - \upsilon\nabla^2 u\right)dV = \oint_S \left\{u\frac{\partial\upsilon}{\partial n} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS.$$

Будем считать

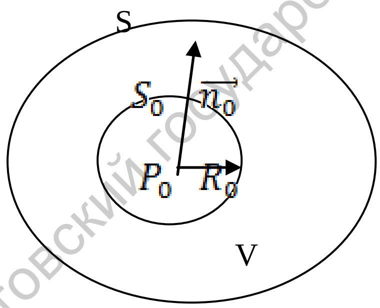
$\nabla^2 u = 0$ и возьмем $\upsilon = 1$, тогда

$$0 = \oint_{S_1} \frac{\partial u}{\partial n}dS.$$

Свойство 2.

Если u(x,y,z) –гармоническая функция, то $u(P_0) = \dfrac{1}{4\pi R_0^2}\oint_{S_0} u(S)dS,$

где $S_0$ – сфера с радиусом $R_0$ с центром в точке P, целиком лежащая внутри S.




Используем решение уравнения Лапласа из 4.4°:

$$u(P)=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS.$$

Будем считать, что S является сферой радиуса $R_0$, целиком лежащая внутри области определения функции.

Поскольку $\frac{\partial}{\partial n_0}=\frac{\partial}{\partial R_0}$ получаем

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi}\oint_{S_0\to 0}\left\{\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial n_0}-u\frac{\partial}{\partial n0}\left(\frac{1}{R_0}\right)\right\}dS=\frac{1}{4\pi}\oint_{S_0\to 0}\left\{\frac{u}{R_0{}^2}-\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial R_0}\right\}dS=\frac{1}{4\pi R_0^2}\oint_{S_0}udS,$$

с учетом свойства 1.

Свойство 3. Теорема об экстремуме.

Если u(x,y,z) является гармонической функцией, то экстремальные значения u(x,y,z) могут находиться только на S

Доказательство (от противного).

Будем считать $u(P_0)=u_{max}=M$, где точка $P_0$ лежит внутри $S$. Окружаем т. $P_0$ сферой радиуса $R_0$. На основании свойства 2 →

$$U(P_0)=\frac{1}{4\pi R_0^2}\oint_{S_0}udS=M$$

Это равенство может выполняться, если $u(S_0)=M$ . Исходное предположение о том, что max находится внутри поверхности, прямо противоречит полученному равенству.

Случай min для $u$ можно доказать, взяв гармоническую функцию

$\upsilon=-u.$

Следствия теоремы об экстремуме.

3а) Если $u_1$ и $u_2$ являются гармоническими функциями, то из $u_1(S)\le u_2(S)$ следует, что $u_1(V)\le u_2(V)$, внутри S.

Доказательство. Введем $\upsilon$ функцию, которая будет равняться $\upsilon=u_2-u_1$, для которой $\upsilon(S)\ge 0$.

На основании свойства 3 получаем $\upsilon(V)\ge 0$, т.е $u_1(V)\le u_2(V)$

3б) Если $u_1$ , $u_2$ являются гармоническими функциями и $|u_1(S)|\le|u_2(S)|$, то $|u_1(V)|\le|u_2(V)|$, внутри S.

Доказательство.

$-u_2(S) \le u_1(S) \le u_2(S)$. Обозначим $v_1 = u_1 + u_2, v_2 = u_2 - u_1$, для которых

на S $v_1 \ge 0, v_2 \ge 0$. Поскольку это тоже гармонические функции, получаем в итоге $|u_1(V)| \le |u_2(V)|$.

3в) Пусть u-гармоническая функция и $|u(S)| \le \varepsilon$, то $|u(V)| \le \varepsilon$ внутри S.

Доказательство.

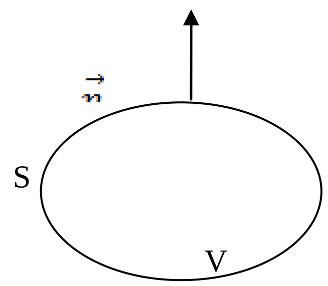
Обозначим $u_1 = u$ и $u_2 = \varepsilon$, и тогда доказательство сводится к предыдущему.

### 4.9° Существование, единственной и корректностно краевой задачи эллиптического типа

Существование решений различных краевых задач было доказано в рамках этой темы.

<u>1-ая краевая задача (внутренняя)</u>

$$\begin{cases} u \text{ - определена и непрерывная на } V+S, \\ \nabla^2 u = 0 \text{ на } V, \\ u(S) = \varphi(x). \end{cases}$$




Докажем единственность, её решения.

Пусть $u_1$и $u_2$ удовлетворяют краевой задачи $u_1 \ne u_2$

Введем $V = u_1 - u_2$, для которой:

$V$ - определена и непрерывна на $V+S$,

$$\begin{cases} \nabla^2 V = 0, \\ V(S) = 0. \to \upsilon(V) = 0, u_1 = u_2 \end{cases}$$

Теорема об экстремуме дает

$V(S) = 0, V(V) = 0$. Следовательно $u_1 = u_2$ везде в области определения функции.

Докажем корректность поставленной задачи.

Пусть $u_1 u\, u_2$ удовлетворяют краевым задачам.

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = 0, \\ u_1(S) = \varphi(S), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 u_2 = 0, \\ u_2(S) = \varphi(S) + \varepsilon \end{cases}$$

Возьмем $\upsilon = |u_1 - u_2|$, для которой получаем

$$\begin{cases} \nabla^2 \upsilon = 0, \\ \upsilon(S) \le \varepsilon \end{cases}$$

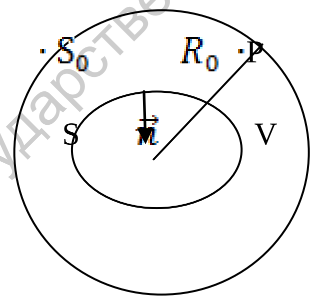
Если $|u_1 - u_2| \le \varepsilon \text{ на } S$ , то по следствию 3в, это неравенство сохраняется во всех точках V+S. Следовательно, краевая задача поставлена корректно.

1-ая краевая задача (внешняя)

Рассмотрим внешнюю первую краевую задачу и докажем единственность ее решения. Будем считать, что

$u$ - определена и непрерывна на $V + S$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \text{ на } \quad V, \\ u(S) = \varphi(S), \\ u(P) \to 0, \quad \text{где P произвольная точка} \\ P \to \infty. \end{cases}$$




Предположим, что $u_1$ и $u_2$ удовлетворяют краевой задаче и получим $\upsilon = u_1 - u_2$, для которой возникает краевая задача.

$\upsilon$ – определена и непрерывна на V+S,

$\nabla^2 \upsilon = 0 \text{ на } V,$

$\upsilon(S) = 0,$

$\upsilon(P) \le \varepsilon, \text{при } P \to \infty.$

Построим сферу радиуса $R_0$, включающая в себя границу S. При $R_0 \to \infty$ имеем $\upsilon$ и $\varepsilon$ стремятся к нулю. Значит на S и в пределе на $S_0$ функция $\upsilon \to 0$. По теореме об экстремуме получаем $\upsilon = 0$ в объеме V и $u_1 = u_2$.

2-ая краевая задача (внутренняя)

Рассмотрим 2-ую внутреннюю краевую задачу.

$$\begin{cases} u \text{ - определена и непрерывна на V+S,} \\ \nabla^2 u = 0 \text{ на } V, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi(S). \end{cases}$$

Выясним вопрос о единственности её решения. Пусть $u_1$ и $u_2$ удовлетворяют этой краевой задаче. Воспользуемся 1-ой формулой Грина (см. 4.4°).

$$\int_V \{u\nabla^2\upsilon + \nabla u \nabla \upsilon\}\, dV = \oint_S u\frac{\partial \upsilon}{\partial n} dS.$$

В формуле Грина положим $u = \upsilon = u_1 - u_2$. Для этих функций $\nabla^2 u = \nabla^2 \upsilon = 0$

$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\right|_S = 0$ и в итоге $\int_V (grad\, \upsilon)^2\, dV = 0$.

Поскольку объем V произволен

$$(grad\, \upsilon)^2 = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)^2 = 0,$$

$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial \upsilon}{\partial z} = 0$. Следовательно, $\upsilon = u_1 - u_2 = const$, т.е. решение определяется с точностью до постоянной величины.

Решение 2-ой краевой задачи находится неоднозначно.

## Список литературы:

1. Кшевецкий С. П. – Математические методы теоретической физики. Калининград, 1995 – 112 с.

2. Морс, Ф. М. – Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит. 1960 – 896 с.

3. Стеклов В. А. – Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983 – 432с.

4. Рид М. – Методы современной математической физики. М.: «Мир» , 1977

5. Арсенин В. Я. – Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. М.: Наука, 1966

6. Рихтмайер Р. Д. – Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982 – 486 с.

7. Арсеньев А. А., Самарский А. А. – Что такое математическая физика. М.: Знание, 1983 – 64 с.

8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. – Уравнения мат физики. М.: Наука, 1977 – 735 с.

9. Арсенин В. Я. – Методы мат физики и специальные функции. М.: Наука, 1984 – 384 с.

10. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. – Сборник задач по мат физике. М.:Наука, 1979

11. Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. – Задачи по математической физике. уч. пособие, 1998 – 350 с.

12. Курант Р., Гильберт Д. – Методы математической физики. М.:Наука, 1975

13. Никифоров А. Ф., Уварский В. В. – Основы теории специальных функций. М.:Наука,1974

14. Михлин С. Г. – Курс математической физики. М.:Наука, 2010

15. Емельянов В. М., Рыбалина Е. А. – Уравнения математической физики. М.:Наука, 2009

Оглавление стр.