ГАНГНУС Ю. С.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Саратов

2012

Материал, представленный в данном пособии служит дополнением к курсу лекций, читавших Гангнусом Ю.С. для студентов физического факультета СГУ в течении нескольких последних лет. Помимо прямого продолжения Пособия «Методы математической физики», часть 1, в данном пособии содержится краткое изложение теории специальных функций с учетом их дальнейшего использования в курсах по электродинамике, электронике и радиофизике, квантовой механике и ядерной физике. Остальные разделы содержат материал, дополняющий лекции и предназначенный для самостоятельной работы и проведения практических занятий.

Раздел 1. Специальные функции.

5.1^0 Гармонические колебания круглой мембраны.

Дифференциальное уравнение для этого процесса уже встречалось ранее:
$u_{tt} = v^2\nabla^2 u$, (2.4)
где v – скорость распространения колебаний. Для плоской мембраны:
$u(x,y,z,t) = u(x,y)e^{i\omega t}$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Для установившихся колебаний получаем:
$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0,$
где $k = \frac{\omega}{v}$ называется волновым вектором.

Перейдём к полярным координатам (ρ,α) (см. 4.3^0):
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + k^2 u = 0,$ (5.1)
$u(\rho = r,\alpha) = 0,$
$u(0,\alpha) < \infty.$
представим $u(\rho,\alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha)$:
$\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + k^2\rho^2 = -\frac{\Phi_{\alpha\alpha}}{\Phi} = \lambda.$

Получаем $\Phi(\alpha) = A\sin(\sqrt{\lambda}\alpha) + B\cos(\sqrt{\lambda}\alpha)$, где из-за периодичности $\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha + 2\pi)$ находим $\sqrt{\lambda} = n = 0,1,2,\ldots$
$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R_n}{\partial\rho}\right) + (k^2\rho^2 - n^2) = 0.$

Введём $z = k\rho$ и получим
$z\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial R_n}{\partial z}\right) + (z^2 - n^2) = 0.$ (5.2)

Будем искать решение в виде ряда $R_n = r^\sigma \sum_{k=1}^{n} a_k r^k$.
Получаем два варианта $\sigma = n$ и $\sigma = -n$. От второго варианта откажемся, так как $R_n \to \infty$ при $z \to 0$. Для коэффициентов a_k получаем
$a_0(\sigma^2 - n^2) = 0,$
$a_1((\sigma+1)^2 - n^2) = 0,$
$a_2((\sigma+2)^2 - n^2) = 0$
и т.д.
Получаем
$a_{2m+1} = 0,\ a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(\sigma+2m+n)(\sigma+2m-n)}.$

$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2(m+n)2m} = (-1)^m\frac{a_0}{2^{2m}m!(n+1)(n+2)\ldots(m+n)}.$
Для упрощения вводят
$a_0 = \frac{1}{2^n\Gamma(n+1)},$
Где Γ(s) – известная гамма-функция.
По определению

$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s+1} dx = s\Gamma(s)$,
$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$,
$\Gamma(n+1) = n!$,
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$,
$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{2n-1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{2m-1}} \sqrt{\pi}$.

Тогда
$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n}(m+n)!\,m!} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n}\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}$.
В итоге
$R_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}$ (5.3)
Полученные выражения представляют собой разновидность цилиндрических функций (функций Бесселя).

5.2⁰ Функции Бесселя

Обобщим уравнение (5.2)
$z\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial I_n}{\partial z}\right) + (z^2 - \nu^2)I_n = 0,$
где – любое число. Тогда вместо (5.3) получим
$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}$,
$I_{-\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-\nu}$.
Приведём некоторые варианты этих функций:

$I_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} = 1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \cdots$
$I_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+1} = \frac{z}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{z}{2}\right)^5 + \cdots$,
$I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} sinz$,
$I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} cosz.$
Функции $I_n(z)$ и $I_{-n}(z)$ линейно зависимы, так как
$I_{-n}(z) = (-1)^n I_n(z).$
Докажем это.
$I_{-n}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$.
Пропадают слагаемые, в которых есть гамма-функция от отрицательных чисел и нуля. Сделаем замену $l = m - n$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} = (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} = (-1)^n I_n(z).$$

Для не целых ν общее решение (5.2) имеет вид $R_\nu = c_1 I_\nu(z) + c_2 I_{-\nu}(z)$. С учётом ограниченности решения в точке $z = 0$ второе решение следует отбросить.

5.3⁰ Рекуррентные формулы для функций Бесселя.

$\frac{d}{dz}\left(\frac{I_\nu(z)}{z^\nu}\right) = -\frac{I_{\nu+1}(z)}{z^\nu}$ (1) , $\frac{d}{dz}(x^\nu I_\nu(x)) = x^\nu I_{\nu-1}(x)$ (2)

Докажем первое соотношение прямой подстановкой:

$$\frac{1}{2^\nu}\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{x}{2})^{2m+1}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} = \frac{1}{2^\nu}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\frac{1}{2}2m(\frac{x}{2})^{2m-1}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}$$

Сделаем замену $l = m - 1$

$$x^\nu\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(\frac{x}{2})^{2l+\nu+1}}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+(\nu+1)+1)} = -I_{\nu+1}(x).$$

Частные случаи рекуррентных формул:

$\frac{d}{dx}I_0(x) = -I_1(x)$, $\frac{d}{dx}(xI_1(x)) = xI_0(x)$.

(1) $x^\nu\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu}{x^\nu}\right) = -I_{\nu+1} \to \frac{\nu I_\nu}{x} - I_\nu' = I_{\nu+1}$ (1’)

(2) $\frac{1}{x^\nu}\frac{d}{dx}(x^\nu I_\nu) = I_{\nu-1} \to \frac{\nu I_\nu}{x} + I_\nu' = I_{\nu-1}$ (2’)

Отсюда

$$\boxed{I_{\nu+1} = \frac{2\nu I_\nu}{x} - I_{\nu-1}} \qquad (5.4)$$

$I_{\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}$; $\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right) = \frac{(2m+1)!!}{2^{2m+1}}\sqrt{\pi}$

$I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}}\,sinz$, $I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}}\,cosz.$

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) = \frac{2n+1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{(2n+1)(2n-1)\dots1}{2^{2n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!!}{2^{2n+1}}\sqrt{\pi}$$

Дополнение

$N_\nu = \frac{I_\nu\cos(\nu\pi) - I_{-\nu}}{\sin(\nu\pi)}$ - функция Неймана.

$H_\nu^1 = I_\nu + iN_\nu$, $H_\nu^2 = I_\nu - iN_\nu$ - функции Ханкеля.

5.4⁰ Интегральные представления цилиндрических функций.

Вернёмся к уравнению гармонических колебаний мембраны $u_{tt} = v^2(u_{xx} + u_{yy})$, где $u = u(x, y, t)$.

Представим $U(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}$, тогда

$u_{xx} + u_{yy} + k^2u(x, y) = 0, k = \frac{w}{v}$.

Это уравнение имеет частные решения

$u_1(x) = Ae^{\pm ikx}$, $u_2(y) = Be^{\pm iky}$.

Выявим физический смысл этих решений на примере
$u_1(x) = Ae^{i(wt-kx)}$
Возьмём две точки:
Первая точка: $x = x_0, t = t_0$;
Вторая точка: $x = x_0 + v * 1c, t = t_0 + 1c$.
Значения функции в этих точках совпадают. Поскольку вторая точка отстоит от первой на $\Delta t = 1c$ и $\Delta x = v * 1c$, можно считать, что это решение описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X со скоростью v.
Возьмём волну, идущую в положительном направлении оси X и перейдём к полярным координатам (ρ, α).
Представим как разложение в ряд Фурье:
$e^{ik\rho sin\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-in\alpha}$, где $r = k\rho$,
$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-irsin\beta+in\beta}d\beta$. Докажем, что $A_n(r) = I_n(r)$.
Дифференцирование по частям даёт
$r^2\frac{d^2A_n}{dr^2} + r\frac{dA_n}{dr} + (r^2 - n^2)A_n = 0$, то есть
$A_n(r) = c_n I_n(r)$.
Чтобы найти c_n перейдём к $r \to 0$.
Из (5.3) получаем при $R \to 0$
$\left(\frac{d^n}{dr^n}I_n(r)\right) = \frac{1}{2^n}$.
С другой стороны при $r = 0$
$\frac{d^k}{dr^k}A_n = \frac{1}{2\pi}(-i)^r\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\beta}sin^k\beta d\beta = \frac{(-1)^k}{2\pi 2^k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{in\beta}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})^k d\beta$.
В итоге при $r \to 0$ $\quad \left(\frac{d^k}{dr^k}A_n(r)\right) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \frac{1}{2^n}, & k = n. \end{cases}$

Следовательно
$$I_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-irsin\beta+in\beta}d\beta \qquad (5.5)$$

5.5⁰ Гармонические колебания сферы.

Ранее (2.4)⁰ для электромагнитных волн в пространстве были получены уравнения
$u_{tt} = v^2\nabla^2 u$, где v – скорость волны.
Будем считать колебания установившимися, то есть
$u(x, y, z, t) = u(x, y, t)e^{i\omega t}, w$ – циклическая частота колебаний.
Получаем
$\nabla^2 u + k^2 u_{tt} = 0,\ k = \frac{w}{v}$.
Перейдём к сферическим координатам (r, θ, α).
$\nabla^2 u(r, \theta, \alpha) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\alpha}u = 0$,
$\Delta_{\theta,\alpha}u = \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial^2\alpha}$.

Уравнение
$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\Delta_{\theta,\alpha}u+k^2r^2u=0$
будем решать методом разделения переменных $u=R(r)\Psi(\theta,\alpha)$.
$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+k^2r^2=-\frac{\Delta_{\theta,\alpha}\Psi}{\Psi}=\lambda\ (\lambda>0)$.
Для радиальной части искомой функции уравнение
$r^2R_{rr}+2rR_r+k^2r^2R-\lambda R=0$ называется уравнением Эйлера.
Функции Ψ, для которых $\Delta_{\theta,\alpha}\Psi+\lambda\Psi=0$, (5.6)
$\Psi(\theta,\alpha+2\pi)=\Psi(\theta,\alpha)$,
$|\Psi(0,\alpha)|<\infty$,
$|\Psi(\pi,\alpha)|<\infty$,
называются сферическими или шаровыми.
Представим $\Psi(\theta,\alpha)=T(\theta)\Phi(\alpha)$.
$\frac{\sin\theta}{T}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta T=-\frac{\Phi_{\alpha\alpha}}{\Phi}=\mu.$
$\Phi_{\alpha\alpha}+\mu\Phi=0$ имеет решения $\Phi(\alpha)=A\sin\sqrt{\mu}\alpha+B\cos\sqrt{\mu}\alpha$.
Условие периодичности $\Phi(\alpha+2\pi)=\Phi(\alpha)$ даёт $\mu=m^2=0,1,4,9\ldots$
$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)T=0.$

5.6[0] Сферические функции.

Имеем $\Psi(\theta,\alpha)=T(\theta)\{A\sin n\alpha+B\cos n\alpha\}$, где $T(\theta)$ удовлетворяет
$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)T=0.$
Введём обозначение $t=\cos\theta, T(\theta)=X(t)$ и получим
$(1-t^2)X_{tt}-2tX_t+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-t^2}\right)X=0, (-1\le t\le 1).$ (5.7)
Решение уравнения имеет особенности в точках $t=\pm1$. Введём новую переменную $z=t-1$.
$T_{zz}+\frac{2(z+1)}{z(z-2)}T_z-\left(\frac{\lambda}{z(z+2)}+\frac{m^2}{z^2(z+2)^2}\right)T=0.$
Ищем решение в виде ряда $T_{zz}=z^\sigma\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$.
После подстановок для наименьшей степени имеем
$(\sigma(\sigma-1)+\sigma-\frac{m^2}{4})a_0z^{\sigma-2}=0, \sigma=\pm\frac{m}{2}.$
Такое же значение получается для разложения вблизи особой точки $z=-1$.
Чтобы решение оставалось конечным при $t=\pm1$, будем брать $\sigma=\frac{|m|}{2}$.
Можем представить $T(t)=(1-t^2)^{\frac{|m|}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$.
Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем рекуррентную формулу
$(k+2)(k+1)b_{k+2}=\{k(k-1)+1(|m|+1)k-\lambda+|m|+m^2\}b_k.$
Предположим, что ряд обрывается при некотором значении k,что происходит лишь при случае

$k(k-1)+1(|m|+1)k-\lambda+|m|+m^2=0,$

Т.е. $\lambda=(k+|m|)(k+|m|+1)$. Обозначим $l=|m|+k$ и получим спектр собственных значений $\lambda=l(l+1)$, где $l=0,1,2,3\ldots;\ |m|=0,1,\ldots,l$.

Переобозначим $T(t)=P_l^{|m|}(t)$, где $t=cos\theta$.

$P_l^{|m|}(t)=(1-t^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}}P_l(t)$, где P_l является решением уравнения (5.7) при $m=0$ и называется полиномом Лежандра. Рекуррентное соотношение упрощается

$(k+2)(k+1)b_{k+2}=\{k(k+1)-l(l+1)\}b_k.$

Можно получить $P_l=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l,$ (5.8)

и $P_l^{|m|}(t)=(1-t^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}}P_l(t).$

Сферические функции представим в виде

$\Psi_{lm}(\theta,\alpha)=N_{lm}P_l^{|m|}(cos\theta)e^{im\alpha}$ (5.9)

Здесь N_{lm}- нормированный множитель, обеспечивающий полную ортогональную систему функций Ψ_{lm} на поверхности шара.

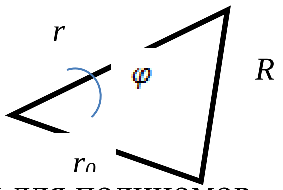
5.7⁰ Полиномы Лежандра.

Полиномы Лежандра оказываются связанными с фундаментальным решением уравнения Лапласа $\frac{1}{R}$ (см 4.4⁰), где

$R=\frac{1}{\sqrt{r_0{}^2+r^2-2r_0rcos\theta}}.$

Пусть $\rho=\frac{r}{r_0}<1$ или $\rho=\frac{r_0}{r}<1$.

$\frac{1}{R}=\begin{cases}\frac{1}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho t}}, r\le r_0\\ \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho t}}, r\ge r_0\end{cases}$, где $t=cos\theta$.



Функцию $\Psi(\rho,t)=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho t}}$ называют производящей для полиномов Лежандра, поскольку

$\Psi(\rho,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\rho^n.$

Легко видеть

$(1+2\rho t+\rho^2)\Psi_\rho-(t-\rho)\Psi=0,$

$(1+2\rho t+\rho^2)\Psi_t-\rho\Psi=0,$

$\rho\Psi_\rho-(t-\rho)\Psi_t=0$, что даёт возможность получить рекуррентную формулу

$nP_n(t)-tP_n'(t)+P_{n-1}'(t)=0.$

Покажем, что можно представить $P_n(t)$ как

$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$

Обозначим $v=(t^2-1)^n$.

Видим, что $v_t=2nt(t^2-1)^{n-1},$

$(t^2-1)v_t-2ntv=0.$

Дифференцируем последнее соотношение (m+1) раз:

$(t^2-1)v^{(m+2)} - (2n-2m-2)tv^{(m+1)} + \big(m(m+1) - 2n(m+1)\big)v^{(m)} = 0.$

Полагаем n=m и получаем:

$(1-t^2)v^{(n+2)} - 2tv^{(n+1)} + n(n+1)v^{(n)} = 0.$

Следовательно, функция $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n v}{dt^n}$ удовлетворяет уравнению Лежандра

$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dP_n}{dt}\right] + n(n+1)P_n = 0.$ (5.10)

Присоединёнными функциями Лежандра будем называть

$P_n^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t).$

Покажем, что эти функции удовлетворяют уравнению

$(1-t^2)X_{tt} - 2tX_t + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2}\right)X = 0.$ (5.7)

Введём функцию $z(t) = \frac{d^m}{dt^m}P_n(t)$. Получим

$(1-t^2)z_{tt} - 2(m+1)tz_t + \big(\lambda - m(m+1)\big)z = 0,$

дифференцируем (5.10) m раз по t и приходим к

$$(1-t^2)\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}P_n - 2(m+1)t\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}P_n + \big(\lambda - m(m+1)\big)\frac{d^m P_n}{dt^m} = 0.$$

Следовательно, P_n^m удовлетворяет уравнению (5.7).

5.8⁰ Полиномы Чебышева-Эрмита и Чебышева-Лагерра.

Задача о линейном гармоническом осцилляторе приводит к уравнению $u_{xx} - 2xu_x + \lambda u = 0,$ которое можно записать в виде

$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right) + \lambda e^{-x^2}u = 0.$ (5.11)

Решения (5.11) определяются на прямой $-\infty < x < \infty$, причём при $x \to \infty$ решение стремится к бесконечности как конечная степень x.

Введём производящую функцию $\Psi(x,t) = e^{2tx-t^2}$. Тогда $\Psi_x = 2t\Psi$,

$\Psi_t + 2(t-x)\Psi = 0,$ что даёт для коэффициентов разложения

$\Psi(x,t) = e^{x^2}e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$,

что приводит к уравнению

$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) = 0$

и $H_{n+1} - 2xH_n' + 2nH_{n-1} = 0.$

В результате при t=0:

$H_n(x) = \frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n} = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$.

Прямые вычисления дают

$H_0 = 1, H_1 = 2x, H_2 = 4x^2 - 2, H_3 = 8x^3 - 12x, H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12.$

Полиномы Чебышева-Лагерра определяются как решения уравнения

$xu_{xx} + (1-x)u_x + \lambda u = 0 \ (0 < x < \infty)$ (5.12)

эквивалентное

$\frac{d}{dx}(xe^{-x}u_x) + \lambda e^{-x}u = 0$ (5.12’)

Будем искать решение в виде ряда $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$;

после подстановки в (5.12) получаем

$\sum_{n=0}^{\infty}\{a_{n+1}(n+1)^2 - a_n(n-\lambda)\}x^n = 0.$

В результате $a_{n+1} = \frac{n-\lambda}{(n+1)^2}a_n$.

Выберем a_0 так, чтобы коэффициент при старшей степени x равнялся $(-1)^n$ и $a_0 = n!$.

Обозначим решения $L_n(x)$ и назовём их полиномами Чебышева-Лагерра.

В частных случаях

$L_0 = 1, L_1 = -x + 1, L_2 = x^2 - 4x + 2, L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6, \ldots$

Полиномы Чебышева-Лагерра имеют производящую функцию

$\Psi(x,t) = \frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}.$

Вопросы ортогональности и нормировки в рамках данного изложения рассматриваться не будут.

Раздел 2.

2.11^0 Метод разделения переменных для вынужденных колебаний ограниченной струны.

$$\begin{cases} U_{tt} = v^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty \\ U(x,o) = \varphi(x) \\ U_t(x,o) = \psi(x) \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (2.11)$$

Будем искать решение системы (2.11) в виде:

$U\ (x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\ (t)\sin\frac{\pi n}{l}x$, где $U_n\ (t) = \frac{2}{l}\int_0^l U(y,t)\sin\frac{\pi n}{l}y\,dy$

$$\begin{cases} f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x \\ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\sin\frac{\pi n}{l}x \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\sin\frac{\pi n}{l}x \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(y,t)\sin\frac{\pi n}{l}y\,dy \\ \varphi_n(x) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y)\sin\frac{\pi n}{l}y\,dy \\ \psi_n(x) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(y)\sin\frac{\pi n}{l}y\,dy \end{cases}$$

Найдём U_{tt} и U_{xx}:

$$U_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty}\ddot{U_n}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$U_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 U_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Подставляя в уравнение, получим:

$\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{U_n}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x = -v^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 U_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$;

Тогда $\forall n$: $\ddot{U_n}(t) + \left(\frac{\pi n}{l}v\right)^2 U_n(t) = f_n(t)$

Обозначим $k^2 = \left(\frac{\pi n}{l}v\right)^2$

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\ (0)\sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$\dot{U}_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{U}_n(0) \sin\frac{\pi n}{l} x = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \sin\frac{\pi n}{l} x,$

откуда следует:

$U_n(0) = \varphi_n$

$\dot{U}_n(0) = \psi_n$

Тогда получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \ddot{U}_n(t) + k^2 U_n(t) = f_n(t) \\ U_n(0) = \varphi_n \\ \dot{U}_n(0) = \psi_n \end{cases} \qquad (2.11\ \text{а})$$

Так как уравнения линейны, то можем использовать метод редукции:

$U_n = U_n^{(1)} + U_n^{(2)}$

$$\begin{cases} \ddot{U}_n^{(1)}(t) + k^2 U_n^{(1)}(t) = 0 \\ U_n^{(1)}(0) = \varphi_n \\ \dot{U}_n^{(1)}(0) = \psi_n \end{cases} \qquad (2.11\ \text{б})$$

Решение (2.11 б), то есть однородного уравнения с заданными начальными условиями:

$U_n^{(1)} = C_n \sin kt + D_n \cos kt$

Найдём коэффициенты: C_n и D_n:

$U_n^{(1)}(0) = D_n = \varphi_n$

$\dot{U}_n^{(1)}(0) = kC_n = \psi_n \ \rightarrow \ C_n = \dfrac{\psi_n}{k} = \dfrac{\psi_n l}{\pi n v}$

Подставляя найденные коэффициенты в выражение для $U_n^{(1)}$, получим:

$U_n^{(1)} = \varphi_n \cos\dfrac{\pi n}{l} v\, t + \dfrac{\psi_n l}{\pi n v} \sin\dfrac{\pi n}{l} vt$

$U^{(1)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(1)} \sin\frac{\pi n}{l} x$

Подставляя в данную формулу выражение для U_{n1}, получаем:

$$U^{(1)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos\frac{\pi n}{l} v\, t + \frac{\psi_n l}{\pi n v} \sin\frac{\pi n}{l} vt\right) \sin\frac{\pi n}{l} x$$

Рассмотрим 2-ую задачу (неоднородное уравнение с нулевыми начальными условиями):

$$\begin{cases} \ddot{U}_{n\,2}(t) + k^2 U_{n\,2}(t) = f(x,t) \\ U_{n\,2}(0) = 0 \\ \dot{U}_{n\,2}(0) = 0 \end{cases} \qquad (2.11\ \text{в})$$

Неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} L(U(t)) = f(t) \\ L(U(t)) = U^{(n)}(t) + p_1 U^{(n-1)}(t) + \dots + p_n U(t) \\ U^{(i)}(0) = 0 \ (i = 1, 2, (n-1)) \end{cases} \quad (*)$$

Тогда соответствующее ему однородное уравнение с начальными условиями:

$$\begin{cases} L(U(t)) = 0 \\ U^{(i)}(0) = 0 \ (i = 1, 2, (n-2)) \\ U^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases} \quad (**)$$

Если $U_0(t)$ является решением системы (**), то решение системы (*) представимо в виде:

$$\boldsymbol{U(t) = \int_0^t U_0(t-\tau) f_n(\tau) d\tau} \ (***)$$

В таком случае для нахождения решения системы (2.11 в) достаточно найти решение системы (2.11 г), воспользовавшись формулой (***):

$$\begin{cases} \ddot{U}_0(t) + k^2 U_0(t) = 0 \\ U_0(0) = 0 \\ \dot{U}_0(0) = 1 \end{cases} \quad (2.11 \text{ г})$$

$$U_0(t) = A_n \sin kt + B_n \cos kt$$

Найдём коэффициенты A_n и B_n, затем подставим их в $U_0(t)$:

$$U_0(0) = B_n \to B_n = 0$$

$$U_0(t) = A_n \sin kt$$

$$\dot{U}_0(t) = kA_n \cos kt$$

$$\dot{U}_0(0) = kA_n \to A_n = \frac{1}{k} = \frac{l}{\pi n v}$$

$$U_0(t) = \frac{l}{\pi n v} \sin \frac{\pi n v}{l} t$$

Тогда решение (2.11 в) имеет вид:

$$U_n^{(2)}(t) = \frac{l}{\pi n v} \int_0^t \sin \frac{\pi n v}{l} (t-\tau) f_n(\tau) d\tau$$

$$U^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\frac{l}{\pi n v} \int_0^t \sin \frac{\pi n v}{l} (t-\tau) f_n(\tau) d\tau\} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Получаем окончательный ответ:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} v\, t + \frac{\psi_n l}{\pi n v} \sin \frac{\pi n}{l} vt + \frac{l}{\pi n v} \int_0^t \sin \frac{\pi n v}{l} (t-\tau) f_n(\tau) d\tau\} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

2.12^0 Резонанс.

$$\begin{cases} U_{tt} = v^2 U_{xx} + \Phi(x)\sin\omega t, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0 \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \\ U(x,0) = U_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (2.12)$$

Применим редукцию:

$U(x,t) = U^{(1)}(x,t) + U^{(2)}(x,t)$

2)

$$\begin{cases} U_{tt}^{(2)} = v^2 U_{xx}^{(2)} + \Phi(x)\sin\omega t \\ U^{(2)}(0,t) = 0 \\ U^{(2)}(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (2.12\ a)$$

1)

$$\begin{cases} U_{tt}^{(1)} = v^2 U_{xx}^{(1)} \\ U^{(1)}(0,t) = U^{(1)}(l,t) = 0 \\ U^{(1)}(x,0) = -U^{(2)}(x,0) \\ U_t^{(1)}(x,0) = -U_t^{(2)}(x,0) \end{cases} \qquad (2.12\ б)$$

Рассмотрим несколько ситуаций:

I. $\omega \ne \omega_c = \frac{\pi n v}{l}$, $n = 1,2, \dots$

Представим решение системы $(2.12\ a)$ в виде: $U^{(2)}(x,t) = X(x)\sin\omega t$

Подставляя в уравнение, получим:

$$-X\omega^2 \sin\omega t = v^2 \ddot{X} \sin\omega t + \Phi(x)\sin\omega t;$$

$-X\omega^2 = v^2\ddot{X} + \Phi(x)$

Приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} \ddot{X} + X\dfrac{\omega^2}{v^2} = -\dfrac{\Phi(x)}{v^2} \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$X(x) = C_1 \sin\dfrac{\omega}{v}x + C_2\cos\dfrac{\omega}{v}x$

Тогда решение неоднородного уравнения:

$X(x) = C_1(x)\sin\dfrac{\omega}{v}x + C_2(x)\cos\dfrac{\omega}{v}x$

Чтобы найти коэффициенты $C_1(x)$ и $C_2(x)$, требуется найти производные: $\dot{X}$ и $\ddot{X}$:

$$\dot{X} = \dot{C}_1 \sin\tfrac{\omega}{v}x + \dot{C}_2\cos\tfrac{\omega}{v}x + \tfrac{\omega}{v}C_1\cos\tfrac{\omega}{v}x - \tfrac{\omega}{v}C_2\sin\tfrac{\omega}{v}x$$, при этом

$\dot{C}_1 \sin\dfrac{\omega}{v}x + \dot{C}_2\cos\dfrac{\omega}{v}x = 0$

$$\ddot{X} = \dot{C}_1\tfrac{\omega}{v}\cos\tfrac{\omega}{v}x - \dot{C}_2\tfrac{\omega}{v}\sin\tfrac{\omega}{v}x - \tfrac{\omega^2}{v^2}C_1\sin\tfrac{\omega}{v}x - \tfrac{\omega^2}{v^2}C_2\cos\tfrac{\omega}{v}x,$$ при этом

$\dot{C}_1\dfrac{\omega}{v}\cos\dfrac{\omega}{v}x - \dot{C}_2\dfrac{\omega}{v}\sin\dfrac{\omega}{v}x = -\dfrac{\Phi(x)}{v^2}$

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \frac{\omega}{v} \cos\frac{\omega}{v} x - \dot{C}_2 \frac{\omega}{v} \sin\frac{\omega}{v} x = -\frac{\Phi(x)}{v^2} \\ \dot{C}_2 = -\dot{C}_1 \frac{\sin\frac{\omega}{v} x}{\cos\frac{\omega}{v} x} \end{cases}$$

$$\dot{C}_1 = -\frac{\Phi(x)}{\omega v} \cos\frac{\omega}{v} x$$

$$C_1 = -\frac{1}{\omega v} \int_0^x \Phi(\varepsilon) \cos\frac{\omega}{v} \varepsilon d\varepsilon + \overline{C_1}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega v} \int_0^x \Phi(\varepsilon) \sin\frac{\omega}{v} \varepsilon \, d\varepsilon + \overline{C_2}$$

Подставляя найденные коэффициенты в $X(x)$, получим:

$$X(x) = \overline{C_1} \sin\frac{\omega}{v} x + \overline{C_2} \cos\frac{\omega}{v} x - \frac{1}{\omega v} \int_0^x \Phi(\varepsilon) \sin\frac{\omega}{v} (x-\varepsilon) \, d\varepsilon$$

Из граничных условий находим константы $\overline{C_1}$ и $\overline{C_2}$:

$$X(0) = 0 \ \rightarrow \overline{C_2} = 0$$

$$X(l) = 0 \ \rightarrow \overline{C_1} = \frac{1}{\omega v} \frac{1}{\sin\frac{\omega}{v} l} \int_0^l \Phi(\varepsilon) \sin\frac{\omega}{v} (l-\varepsilon) \, d\varepsilon$$

Тогда:

$$X(x) = \frac{1}{\omega v} \frac{\sin\frac{\omega}{v} x}{\sin\frac{\omega}{v} l} \int_0^l \Phi(\varepsilon) \sin\frac{\omega}{v} (l-\varepsilon) \, d\varepsilon - \frac{1}{\omega v} \int_0^x \Phi(\varepsilon) \sin\frac{\omega}{v} (x-\varepsilon) \, d\varepsilon$$

II. $\omega = \omega_c = \frac{\pi n_0 v}{l}$

$$\int_0^l \Phi(x) \sin\frac{\pi n_0}{l} x \, dx = 0$$

Это означает, что функции $\Phi(x)$ и $\sin\frac{\pi n_0}{l} x$ ортогональны.

$$U^{(2)}(x,t) = X(x) \sin\omega t$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$\begin{cases} \ddot{X} + X\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\Phi(x)}{v^2} \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

Решение этого уравнения:

$$X(x) = \overline{C_1} \sin\frac{\omega}{v} x + \overline{C_2} \cos\frac{\omega}{v} x - \frac{1}{\omega v} \int_0^x \Phi(\varepsilon) \sin\frac{\omega}{v} (x-\varepsilon) \, d\varepsilon$$

Находим постоянные интегрирования:

$$X(0) = 0 \ \rightarrow \overline{C_2} = 0$$

$$X(l) = 0 \ \rightarrow \overline{C_1} = 0$$

Тогда:

$$X(x) = -\frac{1}{\omega v} \int_0^x \Phi(\varepsilon) \sin\frac{\omega}{v} (x-\varepsilon) \, d\varepsilon$$

III.

$\psi(x) = -\frac{\Phi(x)}{v^2} + A_{n_0}\sin\frac{\pi n_0}{l}x$, где $A_{n_0} = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\Phi(\varepsilon)}{v^2}\sin\frac{\pi n_0}{l}\varepsilon\, d\varepsilon$

Функции $\psi(x)$ и $\sin\frac{\pi n_0}{l}x$ ортогональны на отрезке $[0, l]$.

$$U_{tt}^{(2)} = v^2 U_{xx}^{(2)} - v^2\psi(x)\sin\omega t + v^2 A_{n_0}\sin\frac{\pi n_0}{l}x\sin\omega t$$

Воспользуемся методом редукции: $U^{(2)} = U^{(3)} + U^{(4)}$

$$\begin{cases} U_{tt}^{(3)} = v^2 U_{xx}^{(3)} - v^2\psi(x)\sin\omega t \\ U^{(3)}(0,t) = U^{(3)}(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (2.12\ a')$$

$$\begin{cases} U_{tt}^{(4)} = v^2 U_{xx}^{(4)} + v^2 A_{n_0}\sin\frac{\pi n_0}{l}x\sin\omega t \\ U^{(4)}(0,t) = U^{(4)}(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (2.12\ a'')$$

Решения этих систем:

$$U^{(3)}(x,t) = \frac{v}{\omega}\sin\omega t\int_0^x \psi(\varepsilon)\sin\frac{\omega}{v}(x-\varepsilon)d\varepsilon$$

$$U^{(4)}(x,t) = T(t)\ \sin\frac{\pi n_0}{l}x$$

Подставляя выражение для $U^{(4)}(x,t)$ в уравнение системы $(2.12\ a'')$, получим:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = v^2 A_{n_0}\sin\omega t$$

Решение этого уравнения представляем в виде:

$$T(t) = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$2B\omega\cos\omega t - 2A\omega\sin\omega t = v^2 A_{n_0}\sin\omega t,$$

откуда следует: $B = 0$, $A = -\frac{v^2 A_{n_0}}{2\omega}$

Тогда $T(t) = -\frac{v^2 A_{n_0}}{2\omega}t\cos\omega t$

$$U^{(4)}(x,t) = -\frac{v^2 A_{n_0}}{2\omega}t\cos\omega t\sin\frac{\pi n_0}{l}x$$

$$U^{(2)}(x,t) = \frac{v}{\omega}\sin\omega t\int_0^x \psi(\varepsilon)\sin\frac{\omega}{v}(x-\varepsilon)d\varepsilon - \frac{v^2 A_{n_0}}{2\omega}t\cos\omega t\sin\frac{\omega}{v}x$$

Раздел 3. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа

Сформулируем общую краевую задачу гиперболического типа:

$$\begin{cases} L(u) = f(x,y), \\ u(x, g(x)) = \varphi(x), \vec{n} - \text{ нормаль к } g(x) \\ -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{(S)} \{vL(u) - uM(v)\}dxdy = \iint\limits_{(S)} v(x,y)f(x,y)dxdy$$

Здесь M(v) подобрано так, что M(v) $= 0$.
Как уже было показано,

$$vL(u) - uM(v) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \text{где}$$

$$P = (vu)_y - (2v_y + b_2 v)u;$$

$$Q = (vu)_x - (2v_x - b_1 v)u.$$

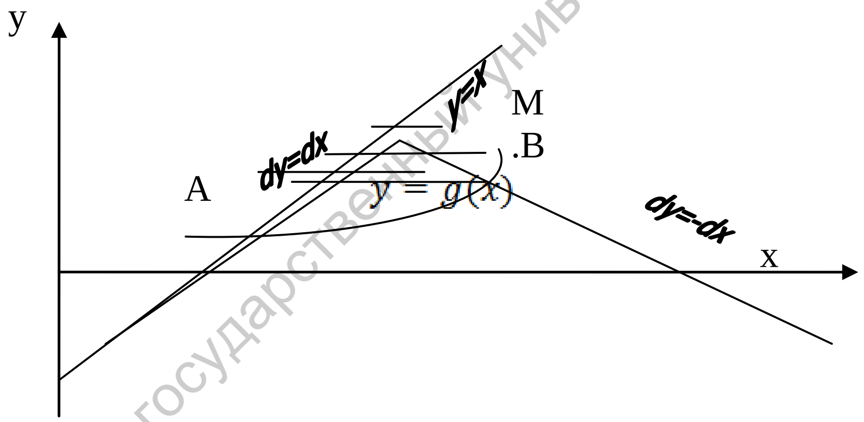
Тогда, используя формулу Грина

$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{(L)} (Pdx + Qdy)$, имеем:

$$\oint\limits_{(L)} \left([(vu)_y - (2v_y + b_2 v)u]dx + [(vu)_x - (2v_x - b_1 v)u]dy\right) =$$

$$= \iint\limits_{(S)} v(x,y)f(x,y)dxdy$$

В качестве (L) возьмем на фазовой плоскости (y,x) криволинейный треугольник ΔAMB, образованный характеристиками и функцией $y = g(x)$.



Интеграл по контуру L разбивается на три интеграла:

1) На BM: $dy = -dx$

$$\int_B^M (-[(vu)_y - (2v_y + b_2 v)u]dx + [(vu)_x - (2v_x - b_1 v)u]dy) =$$

$$\int_B^M \{(vu)_y - (vu)_x + 2u(-v_y + v_x) - (b_1 + b_2)vu\}dx =$$

Нетрудно видеть, что на отрезке BM:

$(vu)_y - (vu)_x = -\frac{\partial(vu)}{\partial y}\frac{dy}{dx} - \frac{\partial(vu)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} = -(vu)'$, (так как $\frac{dy}{dx} = -1$)

$-v_y + v_x = v'$.

$= \int_B^M \{-(vu)' + 2v'u - (b_1 + b_2)vu\}dx = (-vu)\,/_B^M + \int_B^M [2v'u - (b_1 +$
$+b_2)vu]dx =$

(потребуем, чтобы $2v'u - (b_1 + b_2)vu$=0 на BM)
$= -v(M)u(M) + v(B)u(B).$

2) На MA: $dy = dx;$

$$\int_M^A ([(vu)_y - (2v_y + b_2v)u]dx + [(vu)_x - (2v_x - b_1v)u]dy) =$$
$$\int_M^A \{(vu)_y + (vu)_x - 2u(v_y + v_x) + (b_1 + b_2)\,vu\}dx =$$

Нетрудно видеть, что на отрезке MA:
$(vu)_y + (vu)_x = -\frac{\partial(vu)}{\partial y}\frac{dy}{dx} - \frac{\partial(vu)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} = (vu)'$, (так как $\frac{dy}{dx} = -1$)
$v_y + v_x = v'$.
$= \int_M^A \{(vu)' - 2v'u + (b_1 + b_2)vu\}dx = (vu)\,/_M^A + \int_M^A [-2v'u + (b_1 -$
$-b_2)vu]dx =$

(потребуем, чтобы $-2v'u + (b_1 - b_2)vu$=0 на MA)
$= -v(A)u(A) + v(M)u(M).$

3) На AB интеграл оставим без изменения.

Итак,

$$\iint\limits_{(S)} v(x,y)f(x,y)dxdy = -2v(M)u(M) + v(A)u(A) + v(B)u(B) +$$
$$+ \int_A^B \{[(vu)_y - (2v_y + b_2v)u]dx + [(vu)_x - (2v_x - b_1v)u]dy\}$$

Определим условия, налагаемые на $v(M)$:

$$\begin{cases} M(v) = 0 \\ 2v' - (b_1 + b_2)v = 0 \text{ на BM} \Longrightarrow \text{на BM } v = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{b_1+b_2}{2} dS} \\ 2v' - (b_1 - b_2)v = 0 \text{ на MA} \Longrightarrow \text{на MA } v = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{b_1-b_2}{2} dS} \\ \text{Положим } v(M) = 1 \end{cases}$$

Получаем окончательную формулу (формулу Римана)

$$u(M)=\frac{1}{2}\{v(A)u(A)+v(B)u(B)\}+\frac{1}{2}\int_A^B\{[(vu)_y-(2v_y+b_1v)u]dx+$$

$$+[(vu)_x-(2v_x-b_1v)u]dy\}-\frac{1}{2}\iint_{(S)}v(x,y)f(x,y)dxdy$$

Это общее решение линейного дифференциального уравнения гиперболического типа.

$v(x,y)$ называется функцией Римана.

Таким образом, значение функции u в точке M зависит от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданных вдоль кривой $g(x)$.Значение функции $v(x,y)$на кривой AB однозначно определяет решение в т. M

Легко доказать единственность решения.

Раздел 4.

Классификация дифференциальных уравнений 2 порядка в частных производных

<u>Краткая теория.</u>

1. Линейным дифференциальным уравнением называют уравнение вида

$$aU_{xx}+bU_{xy}+cU_{yy}+b_1U_x+b_2U_y+dU+f=0 \qquad (1)$$

где a,b,c не зависят от U, но могут зависить от x и y.

2. Выражение

$$\Delta=b^2-4ac \qquad (2)$$

Называют дискриминантом для уравнения (1)

Если $\Delta>0$, то (1) – гиперболическое
Если $\Delta=0$, то (1) – параболическое
Если $\Delta<0$, то (1) – эллиптическое

3. Пусть совершается замена

$$\{x,y\}\rightarrow\{\xi,\eta\} \qquad (3)$$

где $\xi=\varphi(x,y)$; $\eta=\psi(x,y)$.

Тогда если

$$D = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0 \qquad (4)$$

то замена будет линейно-независимой и (1) перейдет в уравнение

$$a'U_{\xi\xi} + b'U_{\xi\eta} + c'U_{\eta\eta} + F(\xi,\eta,U,U_\zeta,U_\eta) = 0$$

также линейное по старшим производным. Коэффициенты a', b', c' определяются по следующим формулам:

$$a' = a\xi^2_x + b\xi_x\xi_y + c\xi^2_y \qquad (5)$$
$$b' = 2a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2a\xi_y\eta_y \qquad (6)$$
$$c' = a\eta^2_x + b\eta_x\eta_y + c\eta^2_y \qquad (7)$$

4. С помощью специальных замен, отличающихся для каждого типа уравнения (1) возможно приведение его к канонической форме записи.

А) гиперболические уравнения ($\Delta>0$)

Заменой

$$\xi = y - \int \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,dx \qquad (8)$$
$$\eta = y - \int \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,dx \qquad (9)$$

приводятся к виду

$$U_{\xi\eta} + F_1(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) = 0 \qquad (10)$$

Либо

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = F_2(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) \qquad (11)$$

В) параболические уравнения ($\Delta=0$)

Заменой

$$\xi = y - \int \frac{b}{2a}\,dx \qquad (12)$$

приводятся к виду

$$U_{\eta\eta} + F_3(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) = 0 \qquad (13)$$

С) эллиптические уравнения ($\Delta<0$)

Заменой

$$\xi = y - \int \frac{b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\,dx \qquad (14)$$

$$\eta = y - \int \frac{b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\, dx \qquad (15)$$

Уравнение приводятся к виду

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = F_4(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \qquad (16)$$

5. При замене переменных (3) в (1) справедливы следующие формулы

$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$ (16)_

$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y$ (17)

$U_{xx} = U_{\xi\xi}\, \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \eta^2_x$ (18)

$U_{yy} = U_{\xi\xi}\, \xi_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \eta^2_y$ (19)

$U_{xy} = U_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} \xi_x \eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + U_{\xi\eta} \xi_y \eta_x + U_\eta \eta_{xy}$ (20)

6. В уравнении (1) при постоянных коэффициентах возможно, помимо приведения к каноническому виду, устранение первых производных. Для этого полагают

$$U = \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W(\xi, \eta) \qquad (21)$$

и выбирают коэффициенты λ и μ так, чтобы суммарные коэффициенты при первых производных были равны нулю.

Приведение к канонической форме.

Задача 1. $y^2 U_{xx} - x^2 U_{yy} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{4x^2y^2}}{2y^2} = \pm\frac{x}{y} \longrightarrow ydy = \pm xdx \longrightarrow C_{12} = \frac{y^2}{2} \pm \frac{x^2}{2}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix} \xi = \dfrac{y^2}{2} \\ \eta = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \xi_x = 0 & \eta_x = x \\ \xi_y = y & \eta_y = 0 \end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_{xx} = x^2 U_{\eta\eta}$$

$$U_{yy} = y^2 U_{\xi\xi}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$x^2 y^2 U_{\eta\eta} - x^2 y^2 U_{\xi\xi} = 0$

Ответ: $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$

Задача 2. $x^2 U_{xx} - y^2 U_{yy} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{2xy}{2x^2} = \pm\frac{y}{x} \longrightarrow \frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x} \longrightarrow C_{12} = \ln(y) \pm \ln(x)$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$\xi = \ln(x)$

$\eta = \ln(y)$

Из формул (16)-(20) следует

$U_{xx} = \frac{1}{x^2} U_{\xi\xi}$

$U_{yy} = \frac{1}{y^2} U_{\eta\eta}$

Подставляя в исходное уравнение получим

$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$

Ответ: $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$

Задача 3. $U_{xx} - 2\cos x U_{xy} - (3 + \sin x) U_{yy} - y U_y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos x \pm \sqrt{4\cos^2 x + 12 + 4\sin^2 x}}{2} = \frac{-2\cos x \pm 4}{2} = -\cos x \pm 2$

$dy = -(\cos x \pm 2)dx \longrightarrow y = -(\sin x \pm 2x) + C_{12} \longrightarrow C_{12} = y + \sin x \pm 2x$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$\xi = 2y + 2\sin x$

$\eta = -4x$

$\xi_x = 2\cos x \quad \eta_x = -4$

$\xi_y = 2 \qquad \eta_y = 0$

Из формул (16)-(20) следует

$U_y = 2U_\xi$

$U_{xx} = 4\cos^2 x U_{\xi\xi} - 16\cos x U_{\xi\eta} + 16U\eta\eta$

$U_{YY} = 4U_{\xi\xi}$

$U_{xy} = 4\cos x U_{\xi\xi} - 8U_{\xi\eta}$

Подставляя в исходное уравнение получим

$4\cos^2 x U_{\xi\xi} - 16\cos x U_{\xi\eta} - 8\cos^2 x U_{\eta\eta} + 16\cos x U_{\xi\eta} - 12U_{\xi\xi} - 4\sin^2 x U_{\xi\xi} + 2yU_\xi = 0$

$U_{\xi\xi}(4\cos^2 x - 8\cos^2 x - 12 - 4\sin^2 x) + 16U_{\eta\eta} + 2yU_\xi = 0$

$-16U_{\xi\xi} + 16U_{\eta\eta} + 2yU_\xi = 0$

$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + yU_\xi / 8 = 0$

Ответ: $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + yU_\xi / 8 = 0$

Задача 4. $x^2 U_{xx} + y^2 U_{yy} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \pm i \frac{2xy}{2x^2} = \pm i \frac{y}{x} \longrightarrow \frac{dy}{y} = \pm i \frac{dx}{x} \longrightarrow C_{12} = \ln(y) \pm i \ln(x)$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$\xi = \ln(x)$

$\eta = \ln(y)$

Из формул (16)-(20) следует

$U_{xx} = \frac{1}{x^2} U_{\xi\xi}$

$U_{yy}=\frac{1}{y^2}U_{\eta\eta}$

Подставляя в исходное уравнение получим

$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}=0$

Ответ: $U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}=0$

Задача 5. $x^2U_{xx}-2xyU_{xy}+y^2U_{yy}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy}{2x^2}=-\frac{y}{x}\longrightarrow\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0\longrightarrow\ln y+\ln x=C$$

Выберем ξ как C и η произвольно

$$\begin{matrix}\xi=\ln y+\ln x\\ \eta=x\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\xi_x=\frac{1}{x} & \eta_x=1\\ \xi_y=\frac{1}{y} & \eta_y=0\end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_{xx}=\frac{U_{\xi\xi}}{x^2}+\frac{2U_{\xi\eta}}{x}+U_{\eta\eta}$$

$$U_{YY}=\frac{U_{\xi\xi}}{y^2}$$

$$U_{xy}=\frac{U_{\xi\xi}}{xy}+\frac{U_{\xi\eta}}{y}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$U_{\xi\xi}+2xU_{\xi\eta}+x^2U_{\zeta\eta}+U_{\xi\xi}-2U_{\xi\xi}-2xU_{\xi\eta}=0$$

$$x^2U_{\zeta\eta}=0$$

Ответ: $x^2U_{\zeta\eta}=0$

Задача 6. $U_{xx}-2\sin xU_{xy}-\cos^2 xU_{yy}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin\pm\sqrt{4\sin^2x+4\cos^2x}}{2}=\frac{-2\sin x\pm 2}{2}=-\sin x\pm 1\longrightarrow dy+\sin xdx\pm dx=0\longrightarrow$$ 9

$$\longrightarrow C_{12}=y-\cos x\pm x$$

Выберем ξ как C_1 и η как C_2

$$\begin{matrix}\xi=y-\cos x+x\\ \eta=y-\cos x-x\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\xi_x=\sin x+1 & \eta_x=\sin x-1\\ \xi_y=1 & \eta_y=1\end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_{xx}=(\sin x+1)^2U_{\xi\xi}-2(\sin x+1)(\sin x-1)U_{\xi\eta}+(\sin x-1)^2U_{\eta\eta}$$

$$U_{YY}=U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}$$

$$U_{xy}=(\sin x+1)U_{\xi\xi}+(\sin x+1)U_{\xi\eta}+(\sin x-1)U_{\eta\eta}+(\sin x-1)U_{\xi\eta}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$(\sin x+1)^2U_{\xi\xi}-2(\sin^2 x-1)U_{\xi\eta}+(\sin x-1)^2U_{\eta\eta}-2\sin x(\sin x+1)U_{\xi\xi}-2\sin x(\sin x+1)U_{\xi\eta}-$$
$$-2\sin x(\sin x-1)U_{\eta\eta}-2\sin x(\sin x-1)U_{\xi\eta}-\cos^2 xU_{\xi\xi}-2\cos^2 xU_{\xi\eta}-\cos^2 xU_{\eta\eta}=0$$
$$U_{\xi\xi}(\sin^2 x+2\sin x+1-2\sin^2 x-2\sin x-\cos^2 x)+U_{\xi\eta}(2\sin^2 x-2-2\sin^2 x-2\sin x-2\sin^2 x+2\sin x-$$
$$-2\cos^2 x)+U_{\eta\eta}(\sin^2 x-2\sin x+1-2\sin^2 x+2\sin x-\cos^2 x)=0$$
$$-2U_{\xi\eta}=0$$
$$U_{\xi\eta}=0$$
Ответ: $U_{\xi\eta}=0$

Задача 7. $U_{tt}=\upsilon^2U_{xx}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\pm 2\upsilon}{2}=\pm\upsilon\longrightarrow x\pm\upsilon t=C_{12}$$
Выберем ξ как C_1 и η как C_2

$$\begin{matrix}\xi=x+\upsilon t\\ \eta=x-\upsilon t\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\xi_t=\upsilon & \xi_x=1\\ \eta_t=-\upsilon & \eta_x=1\end{matrix}$$
Из формул (16)-(20) следует

$$U_{tt}=\upsilon^2U_{\xi\xi}-2\upsilon^2U_{\xi\eta}+\upsilon^2U_{\eta\eta}$$
$$U_{xx}=U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}$$
Подставляя в исходное уравнение получим

$$-2\upsilon^2U_{\xi\eta}=2\upsilon^2U_{\xi\eta}$$
$$U_{\xi\eta}=0$$
Ответ: $U_{\xi\eta}=0$

Задача 8. $U_{xx}-yU_{yy}=0$

а) $y>0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{4y}}{2}=\pm\sqrt{y}\longrightarrow\frac{dy}{\sqrt{y}}\pm dx=0\longrightarrow 2\sqrt{y}\pm x=C_{12}$$
Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix}\xi=2\sqrt{y}\\ \eta=x\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\xi_x=0 & \eta_x=1\\ \xi_y=\frac{1}{\sqrt{y}} & \eta_y=0\end{matrix}$$
Из формул (16)-(20) следует

$$U_{xx}=U_{\eta\eta}$$
$$U_{yy}=\frac{1}{y}U_{\xi\xi}$$
Подставляя в исходное уравнение получим

$U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}=0$

Ответ: $U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}=0$

б) $y<0$

$U_{xx}-yU_{yy}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{4y}}{2}=\pm i\sqrt{y}\longrightarrow\frac{dy}{\sqrt{y}}\pm idx=0\longrightarrow 2\sqrt{y}\pm ix=C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix}\xi=2\sqrt{y}\\ \eta=x\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\xi_x=0 & \eta_x=1\\ \xi_y=\frac{1}{\sqrt{y}} & \eta_y=0\end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_{xx}=U_{\eta\eta}$$

$$U_{yy}=-\frac{1}{y}U_{\xi\xi}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}=0$

Ответ: $U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}=0$

<u>Задача 9.</u> $yU_{xx}-xU_{yy}=0$

а)$xy>0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{4xy}}{2}=\pm\sqrt{\frac{x}{y}}\longrightarrow\sqrt{y}dy\pm\sqrt{x}dx=0\longrightarrow\frac{2}{3}(y)^{\frac{3}{2}}\pm\frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}=C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix}\xi=\frac{2}{3}(y)^{\frac{3}{2}}\\ \eta=\frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\xi_x=0 & \eta_x=\sqrt{x}\\ \xi_y=\sqrt{y} & \eta_y=0\end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_{xx}=xU_{\eta\eta}$$

$$U_{yy}=yU_{\xi\xi}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$xyU_{\eta\eta}-xyU_{\xi\xi}=0$$

$$U_{\eta\eta}-U_{\xi\xi}=0$$

Ответ: $U_{\eta\eta}-U_{\xi\xi}=0$

б)$xy<0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{4xy}}{2}=\pm i\sqrt{\left|\frac{x}{y}\right|}\longrightarrow\sqrt{|y|}dy\pm i\sqrt{|x|}dx=0\longrightarrow\frac{2}{3}(|y|)^{\frac{3}{2}}\pm i\frac{2}{3}(|x|)^{\frac{3}{2}}=C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix}\xi=\frac{2}{3}(|y|)^{\frac{3}{2}}\\ \eta=\frac{2}{3}(|x|)^{\frac{3}{2}}\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\xi_x=0 & \eta_x=\sqrt{|x|}\\ \xi_y=\sqrt{|y|} & \eta_y=0\end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_{xx}=-xU_{\eta\eta}$$

$$U_{yy}=yU_{\xi\xi}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$-xyU_{\eta\eta} - xyU_{\xi\xi} = 0$$

$$U_{\eta\eta} + U_{\xi\xi} = 0$$

Ответ: $U_{\eta\eta} + U_{\xi\xi} = 0$

<u>Задача 10. </u>$xU_{xx} + yU_{yy} = 0$

а) xy>0

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{-4xy}}{2x} = \pm i\sqrt{\frac{y}{x}} \longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} \pm i\frac{dx}{\sqrt{x}} = C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix} \xi = 2\sqrt{y} \\ \eta = 2\sqrt{x} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \xi_x = 0 \quad \eta_x = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ \xi_y = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \quad \eta_y = 0 \end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_{xx} = \frac{U_{\eta\eta}}{x}$$

$$U_{yy} = \frac{U_{\xi\xi}}{y}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$xyU_{\eta\eta} + xyU_{\xi\xi} = 0$$

$$U_{\eta\eta} + U_{\xi\xi} = 0$$

Ответ: $U_{\eta\eta} + U_{\xi\xi} = 0$

б) xy<0

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{-4xy}}{2x} = \pm\sqrt{-\frac{y}{x}} \longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} \pm \frac{dx}{\sqrt{-x}} = C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix} \xi = 2\sqrt{y} \\ \eta = 2\sqrt{-x} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \xi_x = 0 \quad \eta_x = \dfrac{1}{\sqrt{-x}} \\ \xi_y = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \quad \eta_y = 0 \end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_{xx} = -\frac{U_{\eta\eta}}{x}$$

$$U_{yy} = \frac{U_{\xi\xi}}{y}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$-xyU_{\eta\eta} + xyU_{\xi\xi} = 0$$

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$$

Ответ: $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$

Уравнения с постоянными коэффициентами

Задача 1. $U_{tt} = \upsilon^2 U_{xx} + \alpha U_x + \beta U_t + \gamma U = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pm 2\upsilon}{2} = \pm\upsilon \longrightarrow x \pm \upsilon t = C_{12}$$

Выберем ξ как C_1 и η как C_2

$$\begin{matrix} \xi = x + \upsilon t \\ \eta = x - \upsilon t \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \xi_t = \upsilon & \xi_x = 1 \\ \eta_t = -\upsilon & \eta_x = 1 \end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_x = U_\xi + U_\eta \quad U_t = \upsilon(U_\xi - U_\eta)$$

$$U_{tt} = \upsilon^2 U_{\xi\xi} - 2\upsilon^2 U_{\xi\eta} + \upsilon^2 U_{\eta\eta}$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$-2\upsilon^2 U_{\xi\eta} = 2\upsilon^2 U_{\xi\eta} + \alpha(U_\xi + U_\eta) + \beta\upsilon(U_\xi - U_\eta) + \gamma U = 0$$

$$4\upsilon^2 U_{\xi\eta} + \alpha(U_\xi + U_\eta) + \beta\upsilon(U_\xi - U_\eta) + \gamma U = 0$$

$$U_{\xi\eta} + \frac{\alpha + \beta\upsilon}{4\upsilon^2} U_\xi + \frac{\alpha - \beta\upsilon}{4\upsilon^2} U_\eta + \frac{\gamma}{4\upsilon^2} U = 0$$

Положим $U = \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W(\xi, \eta)$

$$U_\zeta = \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W_\xi + \lambda \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W$$

$$U_\eta = \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W_\eta + \mu \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W$$

$$U_{\xi\eta} = \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W_{\xi\eta} + \mu \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W_\xi + \lambda \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W_\eta + \lambda\mu \exp(\lambda\xi + \mu\eta) W$$

Подставляя в преобразованное исходное уравнение получим

$$W_{\xi\eta} + (\mu + \frac{\alpha + \beta\upsilon}{4\upsilon^2}) W_\xi + (\lambda + \frac{\alpha - \beta\upsilon}{4\upsilon^2}) W_\eta + W(\lambda\mu + \lambda\frac{\alpha + \beta\upsilon}{4\upsilon^2} + \mu\frac{\alpha - \beta\upsilon}{4\upsilon^2} + \frac{\gamma}{4\upsilon^2}) = 0$$

Положим

$$\mu = -\frac{\alpha + \beta\upsilon}{4\upsilon^2}$$

$$\lambda = -\frac{\alpha - \beta\upsilon}{4\upsilon^2}$$

Тогда уравнение примет вид

$$W_{\xi\eta} + W(\frac{\upsilon^2(4\gamma - \beta) - \alpha^2}{16\upsilon^4}) = 0$$

Ответ: $W_{\xi\eta} + W(\frac{\upsilon^2(4\gamma - \beta) - \alpha^2}{16\upsilon^4}) = 0$

Задача 2. $2aU_{xx} + 2aU_{xy} + aU_{yy} + bU_x + cU_y + dU = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 8a^2}}{4a} = \frac{2a \pm i2a}{4a} = \frac{1 \pm i}{2} \longrightarrow dy - \frac{dx}{2} \pm i\frac{dx}{2} = 0 \longrightarrow y - \frac{x}{2} \pm i\frac{x}{2} = C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{aligned} &\xi = y - \frac{x}{2} \\ &\eta = \frac{x}{2} \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} &\xi_x = -\frac{1}{2} \quad \eta_x = \frac{1}{2} \\ &\xi_y = 1 \quad \eta_y = 0 \end{aligned}$$

Из формул (16)-(20) следует

$$U_x = \frac{1}{2}(U_\eta - U_\xi) \quad U_y = U_\xi$$

$$U_{xx} = \frac{U_{\xi\xi}}{4} + \frac{U_{\eta\eta}}{4} - \frac{U_{\xi\eta}}{2}$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi}$$

$$U_{xy} = -\frac{U_{\xi\xi}}{2} + \frac{U_{\xi\eta}}{2}$$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \frac{b}{a}(U_\eta - U_\xi) + \frac{2c}{a}U_\xi + \frac{2d}{a}U = 0$$

Положим $U = \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W(\xi,\eta)$

$$U_\zeta = \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_\xi + \lambda\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W$$

$$U_\eta = \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_\eta + \mu\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W$$

$$U_{\xi\xi} = \lambda^2\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W + 2\lambda\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_\xi + \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_{\xi\xi}$$

$$U_{\eta\eta} = \mu^2\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W + 2\mu\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_\eta + \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_{\eta\eta}$$

Подставляя в преобразованное исходное уравнение получим

$$\lambda^2 W + 2\lambda W_\xi + W_{\xi\xi} + \mu^2 W + 2\mu W_\eta + W_{\eta\eta} + \frac{b}{a}(W_\eta + \mu W - W_\xi - \lambda W) + \frac{2c}{a}(W_\xi + \lambda W) + \frac{2d}{a}W = 0$$

Положим

$$\lambda = \frac{b-2c}{2a} \quad \mu = -\frac{b}{2a}$$

Тогда уравнение примет вид

$$W_{\xi\xi} + W_{\eta\eta} + \left(\frac{2d}{a} - \frac{(b-2c)^2 + b^2}{4a^2}\right)W = 0$$

Ответ: $W_{\xi\xi} + W_{\eta\eta} + \left(\frac{2d}{a} - \frac{(b-2c)^2 + b^2}{4a^2}\right)W = 0$

<u>Задача 3.</u> $aU_{xx} + 4aU_{xy} + 2aU_{yy} + bU_x + cU_y + dU = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a \pm \sqrt{16a^2 - 8a^2}}{4a} = 2 \pm \sqrt{2} \longrightarrow dy = 2 \pm \sqrt{2}dx \longrightarrow y - 2x \pm \sqrt{2}x = C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{aligned} &\xi = y - 2x \\ &\eta = \sqrt{2}x \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} &\xi_x = -2 \quad \eta_x = \sqrt{2} \\ &\xi_y = 1 \quad \eta_y = 0 \end{aligned}$$

Из формул (16)-(20) следует

$U_x = \sqrt{2}U_\eta - 2U_\xi \quad U_y = U_\xi$

$U_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 2U_{\eta\eta} - 4\sqrt{2}U_{\xi\eta}$

$U_{yy} = U_{\xi\xi}$

$U_{xy} = -2U_{\xi\xi} + \sqrt{2}U_{\xi\eta}$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$-U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \frac{b}{a}(\sqrt{2}U_\eta - 2U_\xi) + \frac{c}{a}U_\xi + \frac{d}{a}U = 0$$

Положим $U = \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W(\xi,\eta)$

$U_\zeta = \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_\xi + \lambda\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W$

$U_\eta = \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_\eta + \mu\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W$

$U_{\xi\xi} = \lambda^2\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W + 2\lambda\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_\xi + \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_{\xi\xi}$

$U_{\eta\eta} = \mu^2\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W + 2\mu\exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_\eta + \exp(\lambda\xi + \mu\eta)W_{\eta\eta}$

Подставляя в преобразованное исходное уравнение получим

$$\lambda^2W + 2\lambda W_\xi + W_{\xi\xi} + \mu^2W + 2\mu W_\eta + W_{\eta\eta} + \frac{b}{a}(\sqrt{2}W_\eta + \sqrt{2}\mu W - 2W_\xi - 2\lambda W) + \frac{c}{a}(W_\xi + \lambda W) + \frac{d}{a}W = 0$$

Положим

$$\lambda = \frac{2b-c}{2a} \quad \mu = -\frac{\sqrt{2}b}{2a}$$

Тогда уравнение примет вид

$$W_{\xi\xi} + W_{\eta\eta} + \left(\frac{d}{a} - \frac{(2b-c)^2 + 2b^2}{4a^2}\right)W = 0$$

Ответ: $W_{\xi\xi} + W_{\eta\eta} + \left(\frac{d}{a} - \frac{(2b-c)^2 + 2b^2}{4a^2}\right)W = 0$

<u>Проверочная работа.</u>

<u>Задача 1.</u> $yU_{xx}+U_{yy}=0$

а) $y>0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{-4y}}{2y} = \pm i\frac{1}{\sqrt{y}} \longrightarrow \sqrt{y}dy \pm idx = 0 \longrightarrow \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \pm ix = C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix} \xi = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \\ \eta = x \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \xi_x = 0 \quad \eta_x = 1 \\ \xi_y = \sqrt{y} \quad \eta_y = 0 \end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$U_{xx} = U_{\eta\eta}$

$U_{yy} = yU_{\xi\xi}$

Подставляя в исходное уравнение получим

$yU_{\xi\xi}yU_{\eta\eta}=0$

$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}=0$

Ответ: $U_{\xi\xi} +U_{\eta\eta}=0$

б)y<0

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{-4y}}{2y}=\pm\frac{1}{\sqrt{-y}}\longrightarrow\sqrt{-y}dy\pm dx=0\longrightarrow\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\pm x=C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix}\xi=\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \\ \eta=x\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\xi_x=0 & \eta_x=1 \\ \xi_y=\sqrt{-y} & \eta_y=0\end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$U_{xx}=U_{\eta\eta}$

$U_{yy}=-yU_{\xi\xi}$

Подставляя в исходное уравнение получим

$yU_{\xi\xi}-yU_{\eta\eta}=0$

Ответ: $U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}=0$

<u>Задача 2.</u> $aU_{xx}+2aU_{xy}+2aU_{yy}+bU_x+cU_y+dU=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-8a^2}}{2a}=\frac{2a\pm i2a}{2a}=1\pm i\longrightarrow dy-dx\pm idx=0\longrightarrow y-x\pm ix=C_{12}$$

Выберем ξ и η как линейную комбинацию C_1 и C_2

$$\begin{matrix}\xi=y-x \\ \eta=x\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\xi_x=-1 & \eta_x=1 \\ \xi_y=1 & \eta_y=0\end{matrix}$$

Из формул (16)-(20) следует

$U_x=U_\eta-U_\xi \quad U_y=U_\xi$

$U_{xx}=U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}-2U_{\xi\eta}$

$U_{yy}=U_{\xi\xi}$

$U_{xy}=-U_{\xi\xi}+U_{\xi\eta}$

Подставляя в исходное уравнение получим

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}+\frac{c-b}{a}U_\xi+\frac{b}{a}U_\eta+\frac{d}{a}U=0$$

Положим $U=\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W(\xi,\eta)$

$U_\xi=\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W_\xi+\lambda\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W$

$U_\eta=\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W_\eta+\mu\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W$

$U_{\xi\xi}=\lambda^2\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W+2\lambda\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W_\xi+\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W_{\xi\xi}$

$U_{\eta\eta}=\mu^2\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W+2\mu\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W_\eta+\exp(\lambda\xi+\mu\eta)W_{\eta\eta}$

Подставляя в преобразованное исходное уравнение получим

$$(W_{\xi\xi}+W_{\eta\eta}+(2\lambda+\frac{c-b}{a})W_\xi+(2\mu+\frac{b}{a})W_\eta+(\lambda^2+\mu^2+\lambda\frac{c-b}{a}+\mu\frac{b}{a}+\frac{2d}{a})W=0$$

Положим

$$\lambda=\frac{b-c}{2a}\quad\mu=-\frac{b}{2a}$$

Тогда уравнение примет вид

$$W_{\xi\xi}+W_{\eta\eta}+(\frac{d}{a}-\frac{(b-2c)^2+b^2}{4a^2})W=0$$

Ответ: $W_{\xi\xi}+W_{\eta\eta}+(\frac{d}{a}-\frac{(b-2c)^2+b^2}{4a^2})W=0$

Оглавление……………………………………………….стр