Министерство образования и науки Российской федерации
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет
Кафедра математики и методики её преподавания

Капитонова Т.А.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

для студентов, обучающихся по направлению подготовки 050100 – Педагогическое образование (Профиль подготовки – Математическое образование)

Саратов, 2012

Рекомендовано к печати
кафедрой математики и методики её преподавания
Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского

К 20 **Капитонова Т.А. Методика и технология профильного обучения математике**: Учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 050100 – Педагогическое образование (профиль подготовки – Математическое образование) / Т.А.Капитонова – Саратов, 2012. – 72 с.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение истории математики завершает процесс изучения математики как целостной системы. Для её успешного освоения необходимы знания, умения и компетенции, приобретаемые студентами при изучении математических, исторических, философских и методических дисциплин.

Целью освоения дисциплины «История математики» бакалаврами педагогического образования по профилю «Математическое образование» является формирование представления студентов о математике как непрерывно развивающейся науке, приобретение знаний о зарождении и развитии математики, систематизация знаний будущих учителей математики об основных периодах развития математики, формирование умений применения знания истории математики при обучении школьников.

<u>Задачи курса:</u>

– систематизировать знания будущих учителей математики об основных периодах развития математики и математического образования,

– ознакомить студентов с биографиями выдающихся ученых-математиков,

– продемонстрировать историческое развитие каждой содержательно-методической линии школьного курса математики,

– сформировать умения применять знания истории математики при обучении школьников.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

<u>Знать</u>:

– основные этапы становления и развития математической науки;
– периодизацию развития математики;
– персоналии ведущих ученых-математиков;
– вклад отечественных математиков в развитие математического знания;
– особенности современного этапа развития математики.

<u>Уметь</u>:

– охарактеризовать каждый период развития математики;
– охарактеризовать важнейшие факты истории математики в свете исторических событий той или иной эпохи;
– охарактеризовать вклад различных цивилизаций (Древний Египет, Вавилон, Римская империя, Древняя Греция, Индия и Китай и др.) в развития математики;
– использовать исторический материал в процессе обучения математике школьников;
– включать факты биографий выдающихся учёных-математиков в содержание уроков математики;
– объяснить учащимся особенности современного этапа развития математической науки.

<u>Владеть:</u>

– способами пропаганды важности педагогической профессии для социально-экономического развития страны;

– способами ориентации в профессиональных источниках информациях;

– способами взаимодействия с другими субъектами образовательного процесса;

– способами проектной деятельности в образовании;

– способами совершенствования профессиональных знаний и умений путём использования возможностей информационной среды ОУ, региона, области, страны.

По курсу «История математики» предусмотрены лекции и практические занятия.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Основные этапы развития математики

Проблемные вопросы.

1. Основные периоды развития математики.
2. Охарактеризуйте кратко каждый из этапов развития математики.

Теоретические сведения.

Общепризнанна периодизация основных этапов развития математики (как целостной науки), представленная А.Н.Колмогоровым[1]. В статье «Математика» в Большой Советской Энциклопедии (1954) он выделяет четыре периода развития математики.

1. *Зарождение математики.* Этот период начинается с возникновением человечества и продолжается до VI-V веков до н.э. Здесь происходит накопление фактического материала математики в рамках общей неразделенной науки. Формируются первичные представления о натуральных и дробных числах, геометрических фигурах и телах. Вырабатываются методы решения простейших прикладных задач. Включает в себя математику Древнего Египта, Древнего Вавилона, Древней Индии и Китая. Заканчивается в Древней Греции.

2. *Период элементарной математики.* Этот период продолжается от VI-V веков до н.э. до конца XVI века н.э. Он характеризуется достижениями в изучении свойств постоянных величин. Поэтому иногда этот период в литературе называют еще «периодом математики постоянных величин». Эта математика в основном изучается в средней школе. Математика превращается в строгую дедуктивную науку. Включает в себя математику Древней Греции, эллинистических стран, средневекового Китая и Индии, стран ислама, средневековой Европы и Эпохи Возрождения.

3. *Период создания математики переменных величин.* Этот период продолжается от начала XVII века до середины XIX века. Он отличается введением в математику функций и их изучением. Введение переменных величин в геометрию приводит к созданию аналитической геометрии. Для изучения фун-

[1] Колмогоров А.Н. Математика /Большая Советская Энциклопедия. Т. 26. – М.: 1954.

кциональных зависимостей создается дифференциальное и интегральное исчисление. В этот период складываются почти все научные дисциплины в качестве классической основы современной математики. Поэтому его называют также «периодом высшей математики». Условно подразделяется на математику XVII и XVIII веков.

4. *Период современной математики.* Этот период отсчитывается с середины XIX века и продолжается в наши дни. К нему привел критический пересмотр проблем оснований математики. Появляются многие новые математические теории и расширяются ее приложения. Создаются теоретико-групповые методы в алгебре, неевклидовы геометрии. Математический анализ перестраивается на основе строгого определения действительного числа и предела.

Во второй половине XX века, на фоне бурного развития вычислительной техники и проникновения компьютерных технологий во все области практической и теоретической деятельности людей, ими стали пользоваться и математики. Использование компьютеров налагает отпечаток, и на математику. Но, пока, нет оснований считать его началом нового периода развития математики.

С позицией А.Н Колмогорова не совсем согласен Б.В. Гнеденко. Он пишет: «можно отметить следующие основные вехи на пути математического прогресса:

1) накопление элементарных сведений по измерению длин, площадей, объемов, проведению счета предметов; создание понятия целого положительного числа, в значительной степени еще связанного с перечислением конкретных предметов;

2) приведение накопленных знаний в систему, появление теоретической математики, выделение математических методов доказательства;

3) создание и развитие математических методов изучения движения, процессов изменения, т.е. развитие математики переменных величин;

4) превращение математики в науку о всех возможных пространственных и пространственно-подобных формах и количественных отношениях».[2]

Н.Я Виленкин в работе[3] говорит о пяти периодах в истории математики. Пятый период у него начинается с середины XX в. Виленкин пишет: «Серьезный толчок расширению области применения математики дало создание во второй половине XX в. быстродействующих вычислительных машин… С помощью таких машин можно решать задач, о которых раньше невозможно было и мечтать, настолько большой вычислительной работы они. ЭВМ во много раз ускоряет формирование, поиск и обработку информации… Создание быстродействующих вычислительных машин сделало «прикладными» области математики, которые казались раньше весьма далекими от практики. В частности, весьма важно для приложений оказалась математическая логика, возникли новые отрасли математики (теория

[2] Гнеденко Б.В. Роль математики в развитии современного естествознания. – Кн. Диалектика в науках о неживой природе, М.,1964

[3] Виленкин Н.Я. Методологические основы математики. Современные основы школьного курса математики, М.1980, с. 19-20

кодирования, теория информации, теория алгоритмов, теория автоматов), так или иначе связанных с вычислительными машинами. Бурное развитие получила конечная математика, связанная с изучением конечных множеств, почти заново была создана вычислительная математика. На многие классические разделы математики пришлось смотреть под иным углом зрения. Все это позволяет говорить о начале нового, пятого периода в развитии математики, периода машинной математики.»

Выделяется позиция А.Д. Александрова. Если в статье «Общий взгляд на математику», открывшую фундаментальный 7-томный труд «Математика, ее содержание, методы и значение» (1956 г.), он полностью солидаризируется с периодизацией Колмогорова, то уже в статье «Математика», опубликованной в статье «Философская энциклопедия» (1964 г., т.3) он приводит измененную точку зрения.

Практическое занятие.

I. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

Задание 1. Проанализируйте учебники алгебры /алгебры и начала анализа по теме «Доказательство неравенств». Разработайте 1) фрагмент урока/урок, 2) элективный курс «Доказательство неравенств», посвятив одно из занятий данной теме.

Задание 2. Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 1.

Задание 3. Выберите материал для презентации по теме 1.

III. Внеаудиторная работа.

Задание 1. Составьте глоссарий по теме 1.

Задание 2. Разработайте ЦОР «мини-тест» для контроля знаний по теме «Основные этапы развития математики» или

Разработайте компьютерную презентацию по теме «Основные этапы развития математики».

Тема 2. Период зарождения математики

Проблемные вопросы.

1. Временные рамки периода зарождения математики».
2. Охарактеризуйте кратко основные достижения математики Древнего Египта.
3. Практическая математика Древнего Вавилона: основные достижения.

Теоретические сведения.

По определению, данному Ф. Энгельсом в «Анти-Дюринге» (1877): «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть – весьма реальный материал».

Чувство формы выражается воспроизведением объекта в рисунке, то есть в фигуре. Количественное отношение выражается числом. Таким образом, число и фигура – первоначальные математические понятия.

Первые представления о них относятся к эпохе древнего каменного века – палеолита, начало которого относят ко времени около 3 миллионов лет назад. К концу палеолита (около 25-15 тысяч лет назад) появляются наскальные рисунки, найденные, например, в пещерах Франции, Испании. Археологические данные подтверждают, что к этому времени люди научились рисовать, писать, считать. На Кипре найден глиняный диск овальной формы с письменностью минойцев, древнего населения острова. В Моравии найдена кость волка с делениями. Всем этим документам 15 тысяч лет.

Около 20 тысяч лет назад началось потепление, климат, близкий к современному, установился около 12 тысяч лет назад. Отступают ледники, появляется возможность обрабатывать землю. На Ближнем Востоке 15-12 тысяч лет назад зарождается земледелие. Происходит переход от простого собирания пищи к активному ее производству. Примерно 10 тысяч лет назад земледелие становится основным занятием человека, а чуть позже появляется скотоводство. Начинается новая эра в развитии человечества – неолит, или новый каменный век.

В эпоху палеолита люди мало продвинулись в понимании числовых величин и пространственных отношений. В эпоху неолита появляются условия для их развития. Прекращаются странствования в поисках пищи. Строятся жилища, хранилища для урожая, изготавливается посуда. Появляются ремесла: гончарное, плотницкое, ткацкое. Возникает обмен – зачатки торговли. Развитие человечества в эпоху неолита делает значительный скачок. Люди научились плавить металл (10 тысяч лет назад, а далее по-разному в различных районах земли). Каменный век сменяется бронзовым веком (6 тысяч лет назад в Месопотамии, 4 тысячи лет – в Европе), а затем железным веком (3 тысячи лет назад). Совершенствуются орудия труда, повышается производительность. Деревенские поселения с развитым ремеслом и торговлей вырастают в первые города (7,5 тысячи лет назад в Месопотамии, Египте). Родовые отношения постепенно разрушаются. Общество расслаивается на классы. Возникает рабовладельческое общество. Образуются государства. По различным причинам, в результате войн, покорения одних народов другими, возникают новые или исчезают ослабевшие государства и народы. Большинство народов прошли такой путь развития. К концу IV тысячелетия до н.э. родовой строй был изжит в наиболее развитых обществах и первобытные общества подошли к эпохе цивилизаций.

На таком фоне исторического развития народов и возникли первоначальные математические понятия числа и фигуры. Непосредственных свидетельств их возникновения и развития не сохранилось. Поэтому мы обращаемся к косвенным свидетельствам. Для составления полной картины математической культуры любого народа следует изучить все этапы ее развития, начиная с дописьменного периода. Для этого используются материалы археологии, этнографии, сравнительного языкознания, фольклора. С возникновением живописи и письменности появляется возможность передать при помощи картины или знаков то или иное содержание. До нас дошли древние папирусы (Египет), глиняные таблички (Крит, Междуречье), дощечки из бамбука (Индия, Китай) с древними текстами. Бумага была изобретена в I веке до н.э. в Китае. Для изучения развития математики в ранние периоды обращаются и к трудам историков более позднего времени. Сопоставляя сведения, полученные из этих источников, можно приблизительно восстановить картину того, как считали наши далекие предки, как они оценивали величины при помощи чисел. Эти сведения имеют значение и для опровержения теорий, согласно которым понятия числа и фигуры являются у человека врожденными.

Первоначальные математические понятия взяты из практики, из наблюдений за окружающими предметами. Ф. Энгельс пишет: «Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствовано исключительно из внешнего мира, а не возникло в голове из чистого мышления».

С конкретными геометрическими фигурами человек столкнулся в своей трудовой деятельности. Еще в эпоху, когда люди пользовались каменными орудиями труда, они придавали им некоторую форму: треугольников, трапеций. Художники земледельческих обществ уже не только копировали природу, а изображали ее в символах и орнаменте. Ломаная или волнистая линия обозначала воду, треугольник – плодородие, окружающий мир представлялся в виде ромба, ориентированного по сторонам света. Дальнейший толчок развитию геометрических представлений дали ремесла: изготовление сосудов, одежды, постройка зданий. Особенно сильное влияние оказало земледелие. Тогда задачи проведения границ участков, определения длин и площадей сделались жизненно насущными.

Геометрические фигуры встречаются в самых древних дошедших до нас математических документах (египетских папирусах, вавилонских клинописных текстах), написанных около 4 тысяч лет назад.

«Число» и «фигура», исторически первые понятия математики, и в наше время лежат в основе всех математических знаний. Другие математические понятия: «площадь», «объем» и другие абстракции пространственных свойств предметов, сформировались аналогично в результате длительного исторического развития и возникли из повседневной практической деятельности людей.

Рассмотрим, как происходило накопление математических сведений и создание практической математики древними цивилизациями Востока.

В течение V-III тысячелетия до н.э. новые и более совершенные формы общества сложились на берегах великих рек Азии и Африки в субтропическом поясе: на долинах рек Нил, Тигр и Евфрат, Инд и Ганг, Хуанхэ и Янцзы. С переходом на земледелие в первую очередь заселились районы с плодородными землями. Прибрежные земли в районах рек могли давать обильные урожаи при условии ухода за посевами: регулировании разливов, орошения, осушения болот. Требовалось строить плотины, водохранилища, каналы. Все эти работы требовали централизованного управления. Возникли города, появились новые специальности: ремесленники, солдаты, писцы. Руководство общественными работами находилось в руках людей, сведущих в смене времен года, в деле землеустройства, хранения запасов, взимания налогов. Чиновники накопили различные знания: технические, медицинские и др. Они постигли также искусства счета и измерения. Появились жрецы – служители храмов, которые стали носителями этих знаний.

Восточное общество жило циклами: периоды культурного подъема сменялись веками застоя и упадка. Еще одной особенностью древневосточных государств была их обособленность и консервативность. Несмотря на сходство экономического строя и одинаковый уровень научных знаний, их культуры оставались различными. Поэтому культуру этих цивилизаций изучают отдельно. В том числе и математику – хотя по арифметической природе они весьма схожи.

Восточная математика возникла как прикладная наука, имевшая целью обеспечить календарные расчеты, межевание земель, распределение материалов и урожая, организацию общественных работ, сбор налогов. Поэтому она основывалась на арифметических расчетах и измерениях.

Наши сведения о восточной математике весьма отрывочны, так как хранилища научных знаний часто уничтожались в результате войн, наводнений, пожаров. Трудность в датировке математических знаний связана также с материалом, которым пользовались эти народы для их закрепления (папирусы, глиняные дощечки, кора, бамбук, шелк, позже бумага).

Математика Древнего Египта. Одними из первых перешли к земледелию жители долины Нила. К концу IV тысячелетия до н.э. образуется единое государство Египет во главе с фараоном. Долгая история этого государства проходит через Древнее, Среднее, Новое царства. В разное время столицами были города Тис, Мемфис, Фивы, Саис. Наиболее известные фараоны Менес (Мина), Хеопс, Эхнатон, Тутмос, Рамсес. Последнее самостоятельное древнеегипетское царство – при фараоне Псамметихе. В 655 г. до н.э. он при помощи греков изгоняет захвативших их ассирийцев, и позволяет грекам организовать колонию в Египте. Дальнейшая история Египта – время упадка страны. В 525 г. до н.э. был завоеван персидским царем Камбизом, в 332 г. до н.э. – Александром Македонским.

Знаковыми достижениями древнеегипетской цивилизации являются: изобретение иероглифической письменности (в IV тысячелетии до н.э.), строительство пирамид (например, пирамида Хеопса, построенная в XXVI в. до н.э., высотой в 146 м., причислялась древними к семи чудесам света), первый календарь (принятый еще в V тысячелетии до н.э., с продолжительностью года в 365 дней). О состоянии математики в Древнем Египте нам позволяют судить два дошедших до нас папируса. Египетская математика мало изменилась с тех пор, как были составлены эти папирусы.

Первый папирус известен в истории математики как «папирус Райнда», или «папирус Ахмеса». Он хранится в Британском музее в Лондоне. Найден в 1858 г. и приобретен англичанином Райндом. Расшифрован в 1870 г. Имеет размеры: длина 544 см, ширина 33 см. Содержит 84 задачи. Написан в XVII в. до н.э., но содержит более старый материал. Назван «Наставление, как достигнуть знания всех темных..., всех тайн, которые содержат в себе вещи. Сочинение написано в 33 году в 4 месяце времени вод в царствовании царя Ра-а-ус. Со старых рукописей времени царя ...Писец Ахмес написал это».

Второй папирус называют «московским папирусом», он хранится в московском Музее изобразительных искусств имени А.С. Пушкина. Имеет размеры: длина 550 см, ширина 8 см. Содержит 25 задач. Написан на два века раньше. Приобретен в конце XIX в. востоковедом В.С. Голенищевым. Расшифрован в 1927 г.

Математика в папирусах излагается как решение задач. Все задачи имеют практическое содержание: о количестве хлеба, о емкости хранилищ, о площади поля и т.п. Они группируются не по методам решений, а по темам. Каждая задача решается заново, без каких-либо пояснений, в числах. Числа как таковые, а также методы решения задач еще не являются предметом рассмотрения.

Числа записывались в десятичной системе счисления со специальными знаками – иероглифами – для десятичных единиц каждого разряда. Таким образом, позиционного принципа записи еще не было. Иероглифы первоначально имели вид рисунков и сохраняли внешнее сходство с конкретными предметами.

Каждый знак в записи числа повторяется столько раз, сколько в данном числе единиц соответствующего разряда. Записи выполняются справа налево.

Арифметика египтян преимущественно аддитивного характера, т.е. все вычисления сводятся к сложению, Умножение сводится к удвоению и сложению. Например, для вычисления 13×11 выполнялись удвоения

1	11
2	22
4	44
8	88

и складывались 88+44+11=143. В египетской арифметике вводятся и дроби. Все дроби сводятся к суммам так называемых «аликвотных» дробей. Это дроби, имеющие числителем единицу. Исключение составляла дробь ⅔: ⅔ = 1– ⅓. У историков математики принято писать $\bar{n}$ вместо $1/n$. Самые простые разложения писцы должны были знать наизусть. Разложение дробей на сумму аликвотных дробей применялось в математике очень долго, даже в средние века.

Греческий математик Прокл писал в V в. н.э., что согласно большинству мнений геометрия была впервые открыта в Египте, имела свое происхождение в измерении площадей. Действительно, некоторые задачи египтян имеют геометрическую природу и касаются преимущественно измерений земельных участков соответствующей формы. Площадь треугольника вычислялась правильно: половина произведения основания на высоту. Площадь круга диаметра d вычислялась по правилу $S=(d-\frac{d}{9})^2$. Вычисляются объемы тел, как произведение площади основания на высоту: куба, параллелепипеда, цилиндра. Все они рассматриваются как сосуды для зерна.

«Египетские треугольники», прямоугольные треугольники соотношениями сторон 3:4:5, использовались в землемерной практике. С помощью веревки с завязанными на ней на равном расстоянии узлами размечали прямые углы земельных участков. Арпедонавты (натягивающие веревку) применяли свои сведения и в строительном деле.

Рассматривают египтяне и алгебраические задачи, сводящиеся к линейным уравнениям с одним неизвестным.

Пример. Некое количество и его четвертая часть вместе дают 15. Каково количество?

Приведем традиционное решение в египетском духе:

Начни с 4. Получишь 5. 15 подели на 5. Результат умножь на 4.

В этом решении применяется метод, получивший позднее название «правила ложного положения». Встречаются задачи, в которых отыскивается отвлеченное число, не связанное с определенным объектом. Оно обозначается специальным иероглифом, обозначающим «кучу» – читается «хау». Поэтому египетскую алгебру иногда называют хау-исчислением.

Таким образом, в математике Древнего Египта встречаем некоторые элементы классической элементарной математики. После завоевания Египта Александром Македонским начинается процесс синтеза греческой и египетской культур.

Математика Древнего Вавилона. Культура древнего Двуречья, образованного Тигром и Евфратом, называется вавилонской по имени одного из крупнейших городов этой области. Двуречье называют также Междуречьем, Месопотамией. Первоначально эта культура возникла южнее, на берегу Персидского залива. В IV тысячелетии до н.э. на дельтах этих рек возникли шумерские города Ур, Урук, Лагаш. Основа культуры Двуречья была заложена шумерами. Позднее с северо-запада в Двуречье пришли семитские племена, главным городом которых стал Аккад. В середине IV тысячелетия произошло крупное наводнение с большими жертвами, которое послужила основой мифа о Всемирном потопе.

В XXIV веке до н.э. шумеры были завоеваны аккадянами, образуется единое государство. Его история знала много раз периоды подъема и упадка. Шумеры как народ исчезают в XVIII в. до н.э. Их история была восстановлена только в новейшее время. В XVIII в. Месопотамия достигает своего расцвета. Это новое царство со столицей в Вавилоне, вблизи нынешнего Багдада. Царь Хаммурапи присоединяет соседние земли. При нем был разработан свод законов, которые действовали на его территории на протяжении тысячи лет. Этот свод был образцом для законодателей. Однако войны ослабили вавилонское государство и оно было завоевано племенами горцев. Наступил длительный период застоя. В 729 г. Вавилон захватили ассирийцы. Восстановление могущества Вавилона состоялось в VII в до н.э. при царе Навуходоносоре. Затем в 538 г. до н.э. он был захвачен персами, в 336 г. — Александром Македонским. После его смерти Двуречье становится одной из областей эллинистического государства Селевкидов. В это время усиливается взаимное проникновение и развитие восточной и. греческой математики.

Известность Вавилона как центра торговли, ремесел и искусств связана с тем, что через него шли водные пути от Персидского залива к предгорьям Кавказа и караванная дорога из Ирана в Египет. Расцвет торговли повлек за собой развитие денежной системы. Необходимость путешествий заставила наблюдать за небесным сводом. Эти наблюдения привели к первым систематизированным знаниям по астрологии и астрономии. Вавилоняне составили подробную карту звездного неба, первыми установили продолжительность года в 365 дней. О достаточно обширных познаниях вавилонян в математике сообщает древний историк Геродот. Он рассказывает о реализованных ими грандиозных проектах по изменению русла рек, созданию искусственных каналов.

Шумеры изобрели клинописное письмо. Основным материалом для письма служили глиняные плитки. На пластинку из мягкой глины наносили знаки, после чего их обжигали, или просто высушивали. Полученные дощечки при бережном обращении могли храниться веками. Много их найдено при археологических раскопках. Датируются они разными веками от XXX до I века до н.э. Сейчас такие плитки находятся в разных музеях мира. Известно примерно 150 фрагментов с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами. В расшифровке клинописных текстов значительны заслуги О. Нейгебауэра, Ф. Тюро-Данжена, А. Сакса и. др. Анализ этих математических текстов проводился в 30-х годах XX века.

В Вавилоне мы впервые встречаемся с последовательной позиционной нумерацией. Эта нумерация использует только два клинописных знака: вертикальный клин ▼– для обозначения 1 и горизонтальный клин ◄ – для 10. Числа от 1 до 59 записываются при помощи этих знаков, повторяя необходимое количество соответствующих клиньев. 60 изображается тем же вертикальным клином. Знака для нуля сначала не было, позже был введен знак, заменявший нуль, для отделения разрядов между собой. Этот знак никогда не ставился в конце числа. Впоследствии вертикальный клин стал обозначать любую целую степень числа 60, в том числе и отрицательную.

У историков математики теперь принята такая запись:

$$2,21;12,27 = 2 \cdot 60 + 21 + \frac{12}{60} + \frac{27}{60^2}.$$

Операции сложения и вычитания производились так же, как по делается в десятичной позиционной системе счисления. Для умножения существовал обширный набор таблиц.

Еще 4000 лет назад вавилонские ученые составляли наряду с таблицами умножения и таблицами обратных величин (при помощи которых деление чисел сводилось к умножению) таблицы квадратов чисел и квадратных корней из чисел. Вавилонский метод извлечения квадратного корня можно иллюстрировать на следующем примере, изложенном в одной из найденных при раскопках клинописных табличек.

Найти квадратный корень из 1700. Для решения задачи данное число разлагается на сумму двух слагаемых: $1700 = 1600 + 100 = 40^2 + 100,$ первое из которых является полным квадратом. Затем указывается, что $\sqrt{1700} = 40 + \frac{100}{2 \cdot 40} = 41\frac{1}{4}.$ Правило, применявшееся вавилонянами, может быть выражено так: чтобы извлечь корень из числа c , разлагают его на сумму $a^2 + b$ (b должно быть достаточно малым в сравнении с a^2) и вычисляют по приближенной формуле: $\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}.$ Вавилонский метод извлечения квадратного корня был заимствован греками. Например, у Герона Александрийского (I в.) находим: $\sqrt{160} = \sqrt{144 + 16} = 12 + \frac{16}{24} = 12\frac{2}{3}.$

Вавилоняне умели решать квадратные уравнения около 2000 лет до н.э. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения: $x^2 + x = \frac{3}{4}$, $x^2 - x = 14\frac{1}{2}$.

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современными, однако неясно, каким образом вавилоняне дошли до этого правила. Почти все известные клинописные тексты содержат только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены.

Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствует понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

Основной чертой вавилонской геометрии был ее алгебраический характер. Приводятся формулы площадей и объемов. В частности, имеются правила для вычисления площадей некоторых правильных многоугольников. Считается, что вавилонянам была известна теорема Пифагора. В одной из глиняных табличек имеется список прямоугольных треугольников с рациональными сторонами, т.е. пифагоровых троек чисел x, y, z таких, что $x^2 + y^2 = z^2$. Реконструкция методов их подбора приводит к формулам $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, $z = p^2 + q^2$, известным в теории чисел как диофантовы.

Вавилонская математика считается выше греческой. Она оказала существенное влияние как на греческую математику, так и на математику других народов, находившихся в политических и экономических связях с Вавилоном. Хотя влияние египетской науки на греческую считается выше.

<u>Практическое занятие.</u>

II. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

<u>Задание 1.</u> Разработайте урок/фрагмент урока по теме «Извлечение квадратного корня» с вычислениями по таблицам и по вавилонскому методу.

<u>Задание 2.</u> Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 2.

<u>Задание 3.</u> Выберите материал для презентации по теме 2.

III. Внеаудиторная работа.

<u>Задание 1</u>. Составьте глоссарий по теме 2.

<u>Задание 2</u>. Разработайте ЦОР «мини-тест» для контроля знаний по теме «Период зарождения математики» или

Разработайте компьютерную презентацию по теме «Период зарождения математикиматематики».

<u>Тема 3. Период элементарной математики</u>

<u>Проблемные вопросы.</u>

1. Назовите примерные временные рамки периода элементарной математики.

2. Вклад Древней Греции в развитие математики.

3. Краткие биографии математиков Древней Греции.

Теоретические сведения.

В странах древнего Востока математики как науки в нашем теперешнем понимании, то есть развитой дедуктивной системы предложений, не было. Рождение такой науки, основанной на строгих доказательствах, произошло в Древней Греции. Почему же именно греки пришли к новой математике?

В VII-VI вв. до н.э. возникли новые самоуправляющиеся города-государства (полисы) с зачатками демократического управления. В этих городах вместо единовластного землевладельца управление осуществлялось Народным Собранием. Каждый имел право на собрании высказать свои пожелания, но также при этом должен был обосновать их.

В VII-VI веках до н.э. ведущее место среди новых полисов занимал город Милет, находящийся в Ионии, на анатолийском берегу. Позже стали значительны и другие города: Коринф, Афины в Греции, Кротон в Италии, Сиракузы в Сицилии. Но в VI в. появился общий враг греческих государств – персы. Они завоевали Ионию. На первое место выдвигается Аттика в материковой Греции и ее столица Афины. Позже греки, объединившись, разбили персов дважды (в 490 г. при Марафоне и в 480 г. при Саламине). После этих побед Афины становятся политическим и культурным центром всей Греции.

Одними из распространителей восточной математики были греческие купцы. Они познакомились с ней, когда прокладывали свои торговые пути. Основывая колонии на доступных территориях, греки изучали культуру и науку соседних народов.

Греки обнаружили, что на Востоке теорией не занимались. Там ставился только один практический вопрос: «как?», но не ставился научный вопрос «почему?». А древних греков начали интересовать философские вопросы, позволяющие понять, какое место занимает человек в рамках некоторой рациональной схемы. Также их интересовала не математика в чистом виде, а ее место в этой схеме, ее возможности для выражения законов природы. Возникли первые философские школы, которые стали логически обосновывать свое миропонимание. Начали разрабатываться методы научного мышления. И математика стала неким универсальным языком для выражения этих методов.

Греческая наука выделяется в первую очередь тем, что только один раз в истории человечества и только в одном месте – в Греции – возникла та математика, которую называют аксиоматико-дедуктивной. Именно такой подход к построению математических теорий используется в настоящее время. Кроме того, в Греции впервые стали известны авторы древних научных открытий, в том числе и математических, и их сочинения.

Период времени с VII-VI вв. до н.э., времени возникновения греческой цивилизации, до второй половины V в. н.э., когда под ударами варваров пала Римская империя, в истории науки называют античностью. Таким образом, античная наука включает науку Древней Греции, эллинистического мира и Древнего Рима.

В Милете в VI в. до н.э. возникла первая математическая, точнее, натурфилософская, школа. Она называлась ионийской школой, по названию местности Иония. Согласно преданию, отцом греческой математики является милетский купец Фалес (около 624-547 г. до н.э.), политический деятель, философ, астроном и математик. К его школе принадлежали ученики Фалеса – Анаксимен, Анаксимандр, Анаксагор. Школа просуществовала около ста лет, до падения Милета, завоеванного персами в 494 г.

Философы ионийской школы впервые стали заниматься геометрией теоретически. Однако строгой логической геометрической системы они не создали. Были лишь собраны правила, найденные эмпирическим путем, которыми они руководствована при конкретных построениях. Тем не менее считается, что в этой школе был введен процесс обоснования как необходимый компонент математической деятельности. Фалесу приписывают первые доказательства (объяснения правильности) следующих утверждений: вертикальные углы равны; углы при основании равнобедренного треугольника равны; треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам; диаметр делит круг на равные части; вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой; сумма углов прямоугольного треугольника равна двум прямым; если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне. Последнее утверждение теперь носит название теоремы Фалеса.

Ионийская система счисления была алфавитной.

Таким образом, ионийская школа положила начало дедуктивному изложению геометрии и предприняла попытки изучения свойств абстрактных фигур.

С VI в. до н.э. существовала так называемая пифагорейская школа, названная в честь основателя этой школы Пифагора.

Пифагор (около 570-473 гг. до н.э.) – самый популярный ученый за всю историю человечества. По традиции, коренное преобразование математики приписывают ему. Так же, как Ньютон определил развитие всей культуры последних четырех столетий, так и Пифагор 2500 лет назад направил людей по пути торжества Разума. Он был великим философом, сравнимым с его современниками Конфуцием, Буддой, Заратуштрой. Пифагор Самосскин – легендарная личность. Было время, например, в начале XX в., когда его объявили вымышленным, а все научные достижения той эпохи стали приписывать школе пифагорейцев. Конечно, вся биография Пифагора является знаком вопроса. Родился он на богатом торговом острове Самос в Эгейском море рядом с Ионией. Учился у Фалеса и Анаксимандра. Был призером Олимпийских игр по кулачному бою. По совету Фалеса отправился для усовершенствования знаний в Египет, учился математике у египетских жрецов. В то время Египет был завоеван персами (525 г. до н.э.). Пифагор попал в плен и был отправлен в Вавилон..

В настоящее время невозможно отделить сделанное самим Пифагором, от работ его учеников. Поэтому обычно говорят о Математике пифагорейцев. Они занимались астрономией, геометрией, гармонией (теорией музыки) и арифметикой (теорией чисел).

Пифагорейцы занимались теоретической и практической арифметикой, последняя называлась логистикой или счетным искусством. Таблица умножения на обложках ученических тетрадей называется таблицей Пифагора в его честь.

В пифагорейской школе геометрия из собрания рецептов решения различных задач на измерение площадей и объемов Превратилась в абстрактную науку. Пифагор в геометрии перцы м пришел к следующим мыслям. Во-первых, должны рассматриваться абстрактные идеальные объекты: точка – «то, что не имеет частей», линия – «длина без ширины» и. т.д. Во-вторых, свойства этих идеальных объектов должны устанавливаться не с помощью измерений на конечном числе объектов, а с помощью рассуждений, справедливых для бесконечного числа объектов, т.е. должны быть доказаны. Эти рассуждения должны сводить неочевидные утверждения к известным или очевидным истинам. В-третьих, в геометрии можно выбрать конечное число первоначальных истин, из которых с помощью логических правил выводимо неограниченное число геометрических предложений. Эти отправные недоказуемые положения были названы *аксиомами*. Таким образом, в VI-V вв. до н.э. в школе Пифагора возник аксиоматический метод построения науки.

Принято считать, что Пифагор дал первое доказательство самой популярной геометрической теоремы, носящей теперь его имя. Существует много различных доказательств этой теоремы: геометрических, алгебраических, тригонометрических, механических. Доказательство самого Пифагора до нас не дошло.

Пифагорейцы изучали также пропорции, но определить отношение величин $a:b$ в общем случае они не смогли.

Открытие несоизмеримости, то есть обнаружение таких величин, отношение которых не может быть выражено с помощью целых чисел, является наивысшим достижением пифагорейской школы и поворотным этапом в развитии всей математики.

Открытие несоизмеримости заставило математиков начать поиски путей выхода из кризиса. Греки начали строить математику не на основе арифметики рациональных чисел, а на основе геометрии. Была создана так называемая «геометрическая алгебра». Исчисление, определенное в геометрической алгебре, было ступенчатым. Все правила, теоремы и задачи формулировались в терминах отношений между длинами отрезков и площадями прямолинейных фигур.

Геометрические построения выполнялись с помощью прямых и окружностей, то есть греческая математика стала теорией построений с помощью циркуля и линейки. Все задачи, связанные с решением квадратных уравнений, решались тоже с помощью построений.

Несоизмеримые отрезки Пифагора и парадоксы Зенона говорят о логическом кризисе древнегреческой математики.

В V в. до н.э. сложились два пути в развитии математики. материалистический (Демокрит) и идеалистический (Пифагор, далее Платон). Платон (429-348 гг. до н.э.) в Афинах организовал свою Академию, там занимались миром идей. Математика рассматривалась как условие для занятия философией. Известно, что при входе висела надпись: «Не войдет сюда тот, кто не знает геометрии».

Учеником Платона является Аристотель (384-322 гг. до н.э.). Он является общепризнанным основателем логики. Именно ее не хватало для дедуктивного построения математики.

Математическая школа, связанная с Академией Платона, представлена следующими математиками: Архит Тарентский, Теэтет Афинский, Евдокс Киидский. Архит (428-365 те до н.э.) известен стереометрическим решением задачи об удвоении куба. Теэтет (IV в. до н.э.) установил пять правильных многогранников и изучал иррациональности.

Итогом афинской школы стали наметившиеся пути выхода греческой математики из возникшего кризиса: это дедуктивное построение математики Аристотеля и теория отношений Евдокса.

Новая эпоха античного мира началась с завоеваний Александра Македонского.

Проследим историю математики этой эпохи в ее действующих лицах. Ученый-энциклопедист Эратосфен из Кирены (276-196 гг. до н.э.) – математик, географ, историк, филолог, поэт. Его имя вошло в историю математики изобретением «решета Эратосфена» – метода, при помощи которого можно выписать все простые числа.

Одним из первых александрийских ученых был Евклид (около 340-287 гг. до н.э.). Он является одним из наиболее влиятельных математиков всех времен.

Имя Евклида почти всегда упоминается в связи с наиболее известным его сочинением «Начала», выдающимся произведением математики. В них он систематизирует достижения предшествующей математики. По словам Ф. Клейна, «великое историческое значение «Начал» в том, что они передали последующим временам идеал вполне логической обработки геометрии». Они уступают по популярности, по числу изданий только Библии. «Начала» были основой для изучения геометрии более 2000 лет. Большая часть нашей школьной геометрии заимствована из первых шести книг «Начал». На геометрии Евклида базировалась классическая механика.

В VIII-IX вв. появились первые переводы «Начал» на арабский язык, в XII в. – на латинский язык. Первое издание на русском языке вышло в 1739 г.

С именем Евклида связана известная крылатая фраза: «В геометрии даже для царей нет другой дороги». Египетский царь Птолемей I, наслышавшись о необыкновенной мудрости Евклида, пожелал лично познакомиться с ним. Он попросил Евклида изложить ему содержание его книг. Выслушав доказательства первых теорем, он спросил, нет ли более короткого пути для изучения геометрии, чем изучение «Начал». Так ответ Евклида вошел в историю.

Следующим гениальным математиком, творчество которого определило на долгие века, судьбу науки, был Архимед (287-212 гг. до н.э.). Его вклад в науку сравнивают с вкладом Ньютона и Эйлера. Сохранились также некоторые сведения о его жизни и личности. Нам известно, что он был великим механиком, прославившим себя инженерной деятельностью. В отличие от многих предшественников, почти все его математические исследования имели практические истоки и чаще всего были связаны с механикой.

Исследования Архимеда не получили развития в древности, так как не хватало аналитической базы, буквенного исчисления. После построения символической алгебры Виетом и Декартом, аналитической геометрии Декартом и Ферма, стало возможным создание исчисления бесконечно малых. Эта работа закончилась Ньютоном и Лейбницем в XVII в. И тогда даже великий Лейбниц сказал: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометрии».

Последний крупный математик эллинистической эпохи – Аполлоний Пергский (260-170 гг. до н.э.). Он работал в Александрии. Прославился как геометр и астроном. Написал трактат из восьми книг «Конические сечения». Эллипс, гипербола, парабола определяются как сечения кругового конуса. Мы называем эти кривые, следуя Аполлонию.

Теория конических сечений – это пример математический теории, созданной «впрок».

Последний период античного общества – период господства Рима. Проследим содержание математики этой эпохи в трудах ее основных представителей.

Гиппарх из Никеи (около 180-125 гг. до н.э.) – один из основоположников астрономии и тригонометрии.

Никомах из Герасы (I-II .вв. н.э.). Его «Арифметическое и ведение» является изложением пифагорейской теории чисел. Имеете с «Началами» Евклида долгое время оно было самым Распространенным математическим учебником древности.

Герои Александрийский (I в. н.э.) – механик и инженер, изобретатель. Его математические работы являются энциклопедии античной прикладной математики. В лучшей из них «Метрике» даны правила и формулы для точного и приближенного вычисления площадей и объемов. В частности, там приведены так называемая формула Герона для определения площади треугольника по трем сторонам.

Диофант (III в. н.э.) – последний из великих математиков античности, один из основоположников алгебры. Основное по сочинение – «Арифметика» в 13 книгах, до нас дошло только 6. Он начал вновь строить алгебру не на базе геометрии, а опираясь на арифметику. Ввел буквенную символику: обозначение неизвестного, его степеней (до шестой степени), обратных чисел, символ отрицательного числа, равенства, употребляя сокращенную запись слов. Сформулировал основные правила алгебраических операций, действий со степенями. Ему принадлежит постановка и решение задач, сводимых к неопределенным уравнениям и их системам, решаемым в рациональных положительных числах. Такие уравнения теперь называются *диофантовыми.*

Сочинения Диофанта были отправной точкой для теоретико-числовых исследований П. Ферма, Л, Эйлера, К. Гаусса и других математиков.

Афинская академия была закрыта как языческая школа в 529 г. Возникли некоторые школы в Константинополе, столице Византии – Восточной римской империи, которые пытались продолжить традиции греческой математики. В 630 г. Александрию взяли арабы. Центр научной деятельности перемещается на восток: Китай, Индию, Среднюю Азию.

Таким образом, завершилась эпоха античной математики. Ее значение в истории математики огромно. Она определила дальнейшее развитие науки в течение многих веков.

Практическое занятие.

III. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

Задание 1. Разработайте фрагмент урока/урок по теме «Теорема Пифагора».

Задание 2. Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 3.

Задание 3. Выберите материал для презентации по теме 3.

III. Внеаудиторная работа.

Задание 1. Составьте глоссарий по теме 3.

Задание 2. Разработайте ЦОР по персоналиям.

Тема 4. Математика Индии и Китая. Математика стран ислама

Проблемные вопросы.

1. Охарактеризуйте кратко основные достижения древнекитайской математики.
2. Охарактеризуйте кратко достижения древнеиндийской математики.
3. Великие математики стран ислама.

Теоретические сведения.

Китайская культура, включая и математику, – древнейшего происхождения. Китайская цивилизация возникла в начале II тысячелетия до н.э. на берегах реки Хуанхэ, а затем распространилась на бассейн реки Янцзы. Считается, что в эпоху Инь (XVIII-XII вв до н.э.) – появления первого китайского государства – в Китае возникла математика и астрономия. В VII в. до н.э. китайские ученые умели предсказывать солнечные и лунные затмения. Астономы составили первый звездный каталог (IV в. до н.э.). Великими открытиями китайцев являются компас, сейсмограф, порох, бумага, шелк, лак, рис и чай. Роявились первые математические книги, которые до нас не дошли. Но они легли в основу известных классических математических трудов, дошедших до нас: «Трактат об измерительном шесте» и самая известная «Математика в девяти книгах» (окончательную редакцию которой сделал Чжан Цан во II в. до н.э.). Она была предназначена для чиновников, торговцев, землемеров, строителей. В ней помещено 246 задач с указаниями для их решения. Они являются итогом достижения Китая до начала нашей эры. В VII-

X вв. н.э. она стала основным учебником для чиновников. В это время появились сочинения «Трактат о морском острове» и «Математический трактат» Сунь-цзы (III в.).

Китайские иероглифические цифры возникли во II тысячелетия до н.э. и установились к III в. н.э. Эти иероглифы применяются и в настоящее время. Система счисления – десятичная. В научных записях числа изображалтсь различно расположенными, горизонтальными и вертикальными, палочками и кружочками. Арифметические действия производились на счетной доске – суан-пан – с помощью палочек.

Обыкновенные дроби появились почти одновременно с целыми числами. Операции над дробями выполнялись по правилам, отличающимся от современных незначительно. На счетной доске дроби изображались парой чисел, и действия над дробями сводились к действиям над ними.

В Китае уже ко II в. до н.э. имелась развитая система десятичных мер длины, я чуть позже и объема, веса. Они привели к первому появлению десятичных дробей (III в. н.э.).

Некоторые задачи сводились к системам линейных уравнений с двумя неизвестными, которые решались с помощью «правила ложных положений». При их решении возникали таблицы в виде матриц, которые преобразовывались методом «фан-чэн», схожим с методом Гаусса. При этом приходилось иногда вычитать из меньшего числа большее. Здесь впервые в истории математики появились отрицательные числа. Они выделялись на счетной доске палочками другого цвета или другой формы, а при письме записывались чернилами другого цвета. Позже их назвали «фу» и стали толковать как «долг», в отличие от положительных чисел «чжен» («имущество»).

Девятая книга «Математики в девяти книгах» была посвящена геометрическим задачам. При решении некоторых из них применялась теорема Пифагора. Вычислялись площади многоугольников, круга и его частей, кругового кольца, объемы прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы, пирамиды с квадратным основанием.

Из Китая до нас дошел первый магический квадрат «Ло-шу», связанный со многими легендами.

Таким образом, математика Китая являлась совокупностью вычислительных алгоритмов, предназначенных для решения на счетной доске некоторых классов задач арифметики, алгебры и геометрии. Но она имела мало общего с дедуктивной наукой греческого образца.

Китайская математика не была изолирована от развития математики в других странах. Имеются факты влияния математики Китая, Индии и стран ислама. Например, появление отрицательных чисел в Индии, десятичных дробей в Средней Азии, близость китайской и индийской нумераций и др.

В долине Инда существовала развития цивилизация еще в середине III тысячелетия до н.э. В XII в до н.э. стала заселяться долина Ганга. Индийцы сооружали оросительные каналы, городские водосточные системы, применяли гончарный круг. В I тысячелетии до н.э. появились священные книги брахманов «Веды» («Знания»). К VII-V вв. до н.э. относятся первые индийские письменные математические памятники. Большинство трактатов индийцев написаны на санскрите – языке религиозных книг. Одна из них – «Сульва сутра» («Правила веревки»), относящаяся к VI-V вв. до н.э. В ней излагаются способы построения культовых сооружений и связанные с ними математические правила: построение прямого угла, квадрата, прямоугольника, деление отрезка пополам.

Величайшим достижением древнеиндийской математики является наша современная десятичная позиционная система счисления. Установлено, что, начиная с VI в. до н.э. в Индии была распространена десятичная непозиционная система счисления – числа «брахми». Каждая единица, десятка,сотня, тысяча имела свой символ. Эта система позже была вытеснена позиционной записью, заимствованной у вавилонян и переделанной на десятичную. Первое ее применение относитсч к источнику 595 г. Еще раньше был введен нуль, обозначаемый словом «сунья» («пустое»). Он изображался точкой, позднее знаком 0, возможно, от греческого слова «juden» («ничто»). В отличие от вавилонян, нуль ставился и в конце числа. Отныне любое число стало записываться с помощью десяти знаков. Десятичная система счисления была заимствована арабпми (VII-VIII вв.) и начала свое продвижение на Запад.

Математические школы существовали в Удджайне (Центральная Индия) и Майсоре (Южная индия). Наиболее известные индийские математики: Ариабхата (конец I в), Брамагупта (VII в.) и Бхаскара (XII в.). Для их работ характерны арифметико-алгебраические разделы и вопросы астрономии. Отметим своеобразие индийских трактатов: некоторые из них написаны в стихах, чтобы математические правила можно было заучивать наизусть.

В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмевает славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи».[4] Часто задачи формулировались в стихотворной форме. Пример одной из задач Бхаскары из его книги «Видиса Ганита» (вычисление корней):

«Обезьянок резвых стая, всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая на поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам стали прыгать, повисая.
Сколько ж было обезьянок, ты скажи мне, в этой стае?»

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что он знал о двузначности корней квадратного уравнения. Соответствующее задаче уравнение $\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$

[4] Глейзер Г.И. История математики в школе. VII-VIII кл. М.: Просвещение, 1982, С. 22.

Бхаскара пишет под видом $x^2 - 64x = -768$ и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 32^2, получая затем: $x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024, (x-32)^2 = 256, x - 32 = \pm 16, x_1 - 16, x_2 = 48.$

Считается что наша арифметика имеет индийское происхождение. В арифметике индийцы рассматривали 8 действий: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в квадрат и куб, извлечение квадратного и кубического корня. Существовало свыше десятка способов умножения.

Вычисления индийцы когда-то производили на счетной доске, покрытой песком или пылью. Поэтому арифметические вычисления назывались «дхули-карма» – «работа с пылью». При этом приходилось стирать промежуточные выкладки. Поэтому нужно было уметь проверять результаты вычислений. Индийцы ввели проверку с помощью 9, которая применялась в арифметике долгое время.

Дроби в Индии тоже известны очень давно. Индийцы записывали дроби так, как это делается в настоящее время: числитель над знаменателем, только без дробной черты. Правила действий над дробями почти не отличаются от современных.

Начиная с Брахмагупты индийские математики пользовались отрицательными числами, трактуя их как долг, а положительные числа – как имущество. Брамагупта приводит все правила арифметических действий над отрицательными числами. Например, сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов – долг, имущества и долга – их разность и т.д.

Выдающимся достижением индийской математики было создание развитой алгебраической символики. Она была даже богаче, чем у Диофанта. Большинство символов представляют собой первые слоги соответствующих санскритских терминов. Например, неизвестную величину индийцы называли «йа-ват-тават» («столько, сколько»), а для обозначения неизвестной служила буква, означающая слог «йа». Квадратный корень обозначался слогом «му», от слова «мула» – «основание». «Мула» по-индийски также «корень растения». Арабские переводчики индийских сиддхант в VIII в. перевели этот термин словом «джизр» («корень растения»). Латинские переводчики в XII в. перевели это слово «radix», откуда происходят наши термины «корень», «радикал».

Индийцы решали задачи на линейные, квадратные уравнения и их системы. Рассматривались также неопределенные уравнения первой степени $ax + by = c.$ Первое общее решение встречается у Брахмагупты. Поэтому нет оснований называть неопределенные линейные уравнения диофантовыми. Индийцы допускали для них только целочисленные, в том числе отрицательные решения.

Знания и открытия индийских математиков в геометрии относительно слабые. Геометрические доказательства крайне лаконичны, но весьма наглядны. Например, для обоснования правила вычисления площади треугольника приводится рисунок, в котором высота прямоугольника равна половине высоты треугольника.

В индийской астрономии вопросы тригонометрии хорд александрийских астрономов развились в теорию тригонометрических величин. Используемые при вычислениях хорды и полухорды (линия синуса), индийцы называли «джива» («тетива»). Арабы произносили его «джайб» («впадина»), при переводе арабских сочинений на латынь европейские переводчики использовали слово «sinus» с тем же значением.

Для вычислений замена хорд синусами несущественна, так как хорда дуги равна удвоенному синусу половины дуги. Таблицы синусов приводятся у Ариабхаты. Кроме линии синуса, индийцы пользовались линией косинуса и линией синуса-версуса, то есть разностью между радиусом и линией косинуса. Они также пользовались тенью, отбрасываемой вертикальным шестом – гномоном, для определения высот и расстояний. Эти вычисления впоследствии привели математиков стран ислама к тангенсам и котангенсам. Линии синуса, косинуса, тени применялись для решения астрономических задач.

Таким образом, в Индии математика является очень древней наукой, составляющей часть старинной культуры. В ней тоже, как и в Китае, преобладали вычислительно-алгоритмические методы и отсутствовали попытки построения дедуктивных систем.

История так распорядилась, что наиболее значительным источником знаний для европейских ученых в Средние века и Эпоху Возрождения стала не античная математика, а арабская.

Научные труды математиков стран ислама написаны на арабском языке, некоторые – на персидском. Ведущая наука арабской эпохи – астрономия, поэтому она в первую очередь разрабатывала вычислительно-алгоритмические проблемы и методы. Эти методы стояли на первом месте во всей восточной математике, но в Китае и Индии развивались менее строго и медленно. В математике стран ислама алгебра и тригонометрия впервые сформировались в самостоятельные науки.

В исламской математике были распространены два типа нумерации: сначала буквенная, затем десятичная, заимствованная у индийцев.

Понятие отрицательного числа не нашло заметного применения в арабской науке. Тем не менее, встречаются термины «мусбат» и «манфи», имеющие тот же смысл, что и китайские «чжен» и «фу». Математики Западной Европы их перевели на латынь как positivus и negativus и стали обозначать ими положительные и отрицательные числа.

Дроби записывали на индийский манер: знаменатель под числительным. Разделительная черта появилась в XII в. В деловой математике в ходу было египетское представление дробей в виде суммы аликвотных дробей. Арабские астрономы пользовались сначала только шестидесятичными дробями – по традиции, восходящей через александрийских астрономов к Древнему Вавилону.

Проследим далее историю математики стран ислама через труды, выдающихся мусульманских ученых. Первым в этом ряду стоит Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми (787-850). Он был хорошо знаком с индийской математикой и наукой эллинистических стран. Написал несколько книг по математике и астрономии. В своей книге «Об индийском счете» впервые разъяснил индийскую систему записи чисел. Книга была переведена на латынь и стала одним из источников, через которые Европа познакомилась с десятичной позиционной нумерацией. Автора в переводах называли Aigorizmi, Algorithmus, что ввело в наш математический язык термин «алгоритм».

В другой книге «Хисаб аль-джабр ва-л-мукабала» («Исчисление восполнения и противопоставления») он рассматривал вопросы решения уравнений. Эта алгебра стала известна тоже в латинском переводе, и слово «аль-джабр» стало употребляться как синоним всей науки «алгебры», которая до XIX в. была наукой о решении уравнений.

В алгебраическом трактате ал-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) «Квадраты равны корням», т.е. $ax^2 = bx.$
2) «Квадраты равны числу», т.е. $ax^2 = c.$
3) «Корни равны числу», т.е. $ax = c.$
4) «Квадраты и числа равны корням», т.е. $ax^2 + c = bx.$
5) «Квадраты и корни равны числу», т.е. $ax^2 + bx = c.$
6) «Корни и числа равны квадратам», т.е. $bx + c = ax^2.$

Для ал-Хорезми избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал-джабр и ал-мукабала. Его решение, конечно, не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида ал-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывали нулевого решения, вероятно потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений ал-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства. Рассмотрим пример.

Задача. Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень (подразумевается корень уравнения $x^2 + 21 = 10x$).

Решение автора гласит примерно так: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Заметим, что трактат ал-Хорезми является первой дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решений.

Во всех исламских странах пользовались учением ал-Хорезми об имущественных расчетах по мусульманскому наследственному праву. Большим недостатком алгебры во времена ал -Хорезми было отсутствие символики, словесное описание операций. Это задерживало развитие алгебры. 'Тем не менее его труды сыграли важную роль в истории математики. До середины XIX в. в алгебре сказывалось ее восточное происхождение – ей не хватало аксиоматического обоснования. В наших школьных учебниках алгебры и геометрии до сих пор сохранились эти признаки их различного происхождения.

В VIII-X вв., в начальный период развития математики стран ислама, арабские ученые перевели на свой язык индийские сиддханты и сочинения греческих математиков – Евклида, Архимеда, Аполлония, Птолемея, Диофанта и др. Удивительно то, что со многими работами греков Европа позже познакомилась через арабские переводы. В этом отношении особо выделяется Сабит ибн Корра (836-901). Этот математик, астроном, механик, переводчик работал в Багдаде. Именно в его переводах сохранились не дошедшие до нас по-гречески мемуары Аполлония и Архимеда. Все позднейшие ученые пользовались его переводами «Начал» Евклида, «Альмагеста» Птолемея.

Многие арабские математики пытались решить классические задачи древности. В частности, в работе «Деление прямолинейного угла на три равные части» Сабит ибн Корра решал задачи трисекции угла и удвоения куба. Он занимался также исследованиями по теории параллельных прямых, посвященных V постулату, а также Омар Хайям, ат-Туси. На протяжении X в. уравнениями были выражены многие геометрические, тригонометрические, физические задачи: трисекция угла, построение вписанных многоугольников и др.

Омар Хайям (1048-1131) – персидский поэт, философ, астроном и математик. Больше известен как поэт, автор «Рубайят». Он составил «Маликшахские астрономические таблицы», работал над реформой солнечного календаря. Она была осуществлена в 1079 г. Этот календарь действовал в Иране почти 900 лет и был отменен только в 1976 г. Известно, что календарь Хайяма «Джалали» точнее григорианского календаря.

Хайям первым среди математиков создал теорию решения уравнений до третьей степени включительно и дал общую классификацию всех уравнений в трактате «О доказательствах задач аль-джабры и аль-мукабалы» (1069). В этом труде он определил и предмет алгебры – нахождение неизвестных величин, отнесенных к другим известным величинам с помощью уравнений. Тем самым, алгебра рассматривается как наука об уравнениях.

Хайям берется и за изучение проблемы V постулата Евклида, которую безуспешно пытались решить ученые уже тысячу лет. В 1077 г. он завершил работу над трактатом «Комментарии к трудным постулатам книги Евклида». Сам того не зная, Хайям близко подошел к проблемам, которые решил гениальный русский геометр Лобачевский. Предвосхитил он и Декарта, создавшего аналитическую геометрию, изучая геометрию в числах. Занимался Хайям и географией, естествознанием, философией. Поэтому весь мир признает его теперь ученым-энциклопедистом.

Ат-Туси (1201-1274) – ученый-знциклопедист и государственный деятель. Ат-туси перевел на арабский язык важные работы дрквних ученых и написал к ним комментарии и приложения. Написал ряд трактатов по математике, астрономии, философии, медицине. Развивал связанные с астрономией разделы математики, в первую очередь тригонометрию. Благодаря нему тригонометрия отделилась от астрономии. В его «Трактате о полном четырехстороннике» (1260) плоская и сферическая тригонометрия выступают как самостоятельные предметы. В них стал преобладать материал об алгебраических зависимостях. Большое значение имела также его работа «Изложение Евклида», в которой он сформулировал новый постулат, которым предложил заменить пятый постулат Евклида.

Таким образом, тригонометрия, возникшая в трудах александрийских и индийских ученых, существенно продвинулась вперед в работах математиков и астрономов исламских стран (Сабит ибн Корра, аль-Бируни, аль-Баттани, ат-Туси, аль-Каши). Из совокупности вспомогательных средств астрономии она преобразовалась в науку о тригонометрических функциях в плоских и сферических треугольниках и о способах решения этих треугольников. Арабские математики применяли уже линии синуса, косинуса, тангенса, котангенса. Линии тангенса и котангенса рассматривались как тени: горизонтального гномона – на вертикальную плоскость и вертикального гномона – на горизонтальную плоскость. Линии синуса и косинуса измеряли как александрийские и индийские астрономы – в 60-х долях радиуса.

Последним крупным ученым исламской математики считается аль-Каши (?-1430) – математик и астроном, работавший в Самаркандской обсерватории Улугбека. Последним произведением аль-Каши было «Ключ арифметики» – энциклопедия элементарной математики своего времени, приспособленная к нуждам практиков-вычислителей. Книга выделялась среди средневековой математической литературы богатством материала, ясностью и стройностью изложения. В этом трактате аль-Каши впервые более точно, чем ранее в Китае, изложил и применил теорию десятичных дробей, описал правила действий над ними. Отделял дробную часть от целой части вертикальной чертой или писал другим цветом. В Европе десятичные дроби были введены голландцем С. Стевином только в 1586 г. В этой же работе аль-Каши изложил приемы извлечения корней любой степени, один из которых был основан на применении формулы бинома Ньютона для натурального показателя. Аль-Каши также дал правила приближенного решения уравнений высших степеней, усовершенствовал тригонометрические вычисления.

Начиная с XIV в. основным путем влияния математики стран ислама на Европу становится Византия. Примерно с середины XV в. развитие исламской математики замедляется.

Математика стран ислама оказала исключительное влияние на развитие математики и на Востоке, и на Западе. Значительная ее часть создавалась в алгоритмически-алгебраическом духе, но существенно продвинулась по отношению к античным методам. Западная Европа достигла того же уровня только в XVI в.

Практическое занятие.

I. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

Задание 1. Разработайте урок по теме «Практическая геометрия у разных народов».

Задание 2. Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 4.

Задание 3. Выберите материал для презентации по теме 4.

III. Внеаудиторная работа.

Задание 1. Составьте глоссарий по теме 4.

Задание 2. Разработайте ЦОР по персоналиям.

Задание 3. Подберите историко-математические задачи в стихотворной форме. Подготовьте беседу об исторических традициях составления таких задач.

Тема 5. Период математики переменных величин

Проблемные вопросы.

1. Охарактеризуйте кратко основные достижения периода математики переменных величин.
2. «Геометрия» Декарта.
3. Л. Эйлер и его вклад в развитие математики в России.
4. Великие математики этого периода.

Теоретические сведения.

Условно XVII-XVIII века называют Новым временем. В Европе в это время укреплялся новый общественный строй – капитализм. Новое время было и эпохой научной революции.

Прежде всего, изменилась концепция мира в целом. В трудах Коперника, Кеплера утвердилась и усовершенствовалась гелиоцентрическая система мира. Галилей дал новую механику. Наиболее заметных достижений достигла оптика благодаря открытию зрительной трубы, телескопа, микроскопа. Были изобретены часы с маятником, барометр, термометр. Открытие научных приборов и их совершенствование расширило возможности и точность научных измерений.

В XVII веке в развитии математики было сделано столько, сколько не было сделано со времен античности. Математические исследования расширились, возникли новые разделы науки. Создание аналитической геометрии и анализа произвело в математике подлинную революцию.

К концу XVI в. математика складывалась из арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. Была введена удобная десятичная запись чисел, до высокой степени доведена техника вычислений. Но это была по преимуществу математикой постоянных величин. В XVII веке в физико-математической картине мира на первое место выдвигались законы, которые представляли собой аналитически выраженные функциональные зависимости между совместно изменяющимися величинами. Вспомним открытую Кеплером зависимость интенсивности света от расстояния до его источника, закон Галилея о движении тел в пустоте, закон Торричелли, закон Бойля-Мариотта, закон Гука о растяжении пружины и др. Таким образом, преобладающее значение в разработке физики приобрело измерение величин, поиск законов, выражающихся формулами алгебры. Отныне математика переходит к исследованию переменных величин и функций, как аналогов механического движения и любого количественного изменения вообще. Ф. Энгельс характеризовал революцию в математике XVII в. следующим образом: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и тем самым диалектика и, благодаря этому же, стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление». Построение нового анализа функций как системы алгоритмов оказалось главной целью и главным достижением новой математики.

Развитие математики происходило неравномерно в различных странах. В Италии, где работали Галилей, Кавальери, Торричелли, из-за разгула религиозной реакции, произошел спад научных исследований. Наиболее передовыми стали страны: Англия (где работали Непер, Валлис, Барроу, Ньютон), Франция (Декарт, Ферма, Паскаль, Дезарг), Голландия (Стевин, Жирар, Гюйгенс).

В тесном взаимодействии математики и смежных наук вырабатывались методы бесконечно малых (инфинитезимальные методы). Для создания исчисления бесконечно малых в математике XVII в, сложились достаточные предпосылки. Это были: наличие сложившейся алгебры, введение в математику переменных величин, усвоение метода неделимых древних греков, идей Архимеда, накопление методов решения задач на вычисление площадей и объемов, нахождения касательных и экстремумов. В создании анализа бесконечно малых принимали участие многие ученые, начиная от Кеплера и Галилея.

Новый мощный толчок развитию всей математики сообщил Рене Декарт (1596-1650), выдающийся французский философ, математик, физик и физиолог. Декарт искал общий метод мышления, который позволял бы делать открытия и выявлять истину в науках. Единственной наукой о природе, обладавшей систематическим изложением, была тогда механика, которая основывалась на математике. Все явления природы Декарт трактовал как перемещения делимых и подвижных частей трехмерно протяженной материи. По мнению Декарта, математика должна была стать наиболее важным средством для понимания мира.

Свою новую математику Декарт называл всеобщей. Ее изложение содержится в единственном печатном труде по математике – «Геометрии» (1637). «Геометрия» являлась настольной книгой всех творческих математиков. Тем не менее, она не является трактатом по геометрии. Значительную ее часть составляет теория алгебраических уравнений. Заслуга Декарта в том, что он последовательно применил хорошо развитую алгебру начала XVII в. к геометрии греков. Это явилось началом современной аналитической геометрии. В «Геометрии» Декарт впервые ввел понятие переменной величины и функции.

Для представления общей непрерывной величины Декарт пользовался геометрией. Он построил исчисление отрезков: представлял любые величины и составленные из них выражения отрезками, в отличие от геометрической алгебры греков. Отрезки обозначались буквами: данные – начальными буквами алфавита, неопределенные количества – последними буквами x, y, z. Все задачи математики, по Декарту, могут быть выражены с помощью уравнений. Единственный общий метод решения уравнений – построение их корней, как отрезков – координат точек пересечения некоторых плоских кривых.

Координаты появились еще в древности, например, широта и долгота в «Географии» Птолемея. Другой вид координат – отрезки, зависимости между которыми («симптомы») выражали определяющие свойства этих кривых. Слово «координаты» ввел Лейбниц только в 1692 г. В «Геометрии» Декарта нет «декартовых осей», не выведены уравнения прямой линии и конических сечений. Он чертил только одну ось с начальной точкой и указывал направление других координат; вообще говоря, наклонных. Отрицательные абсциссы не рассматривались. Хотя Декарт их истолковывал как противоположно направленные отрезки. «Истинные» (действительные) корни он подразделял на «явные» (положительные) и «неявные» или «ложные» (отрицательные). Также у него существовали «воображаемые» корни, как недействительные корни, которые можно вообразить себе в числе, требуемом для справедливости основной теоремы алгебры. В алгебраических обозначениях Декарта многое уже является современным: степени $a^2, a^3, \ldots$, радикалы $\sqrt{\ }$.

Декарт также первым описал алгебраический способ построения касательных и нормалей к кривым. При этом он пользовался еще одним важным методом – «методом неопределенных коэффициентов» для многочленов.

Среди открытий Декарта заслуживают внимания также вычисление площади циклоиды по методу неделимых и построение к ней касательных. Он знал также открытое позднее Эйлером соотношение между числами граней, вершин и ребер выпуклых многогранников. С именем Декарта связаны такие понятия, как декартовы координаты, произведение, парабола, лист, овал и др. Его «Геометрия» оказала огромное влияние на развитие математики, и около 150 лет алгебра и геометрия развивались в направлениях, указанных Декартом.

Несколько ближе к современной аналитической геометрии подошел другой «Великий дилетант» математики – Пьер Ферма (1601-1665), юрист из Тулузы. Он стал разносторонним математиком: вместе с Декартом явился создателем аналитической геометрии, вместе с Паскалем заложил основы теории, вероятностей, создал новый метод касательных и экстремумов. Ферма может считаться основоположником алгебраической теории чисел.

Его результаты дошли до нас в разрозненном виде. Он писал мало и сжато, не публиковался. Некоторые теоретико-числовые результаты дошли лишь в виде проблем, без доказательств.

Трактат «Введение в изучение плоских и телесных мест» (1636) содержит начала аналитической геометрии Ферма. Он формулирует принцип аналитической геометрии следующим образом: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию... Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин». Во «Введении» впервые встречаются уравнения для прямых линий и конических сечений относительно системы перпендикулярных осей.

Ферма произвел квадратуру любых кривых $y = x^n, n \in Z, n > 0.$ При этом он возродил метод интегральных сумм. Вычислял также кубатуры и определял центры тяжести тел вращения.

Большое значение для становления дифференциального исчисления имело предложенное Ферма правило нахождения экстремумов. В сочинении «Метод отыскания максимумов и минимумов» (1638) Ферма изобрел прием, пригодный для нахождения экстремумов и касательных. Это правило совпадает с известным теперь необходимым условием экстремума дифференцируемой функции: $f'(x) = 0.$

В XVII в. перед естествознанием возникла новая проблема – найти законы движения. Для этого аппарат математики постоянных величин был недостаточным. Работы Кавальери, Декарта, Валлиса, Гюйгенса, Паскаля и др. подготовили все для построения дифференциального и интегрального исчисления. Они действительно появились в работах Ньютона и Лейбница и стали могучим средством решения новых задач. О том, что они опирались на труды предыдущих поколений математиков, Ньютон сказал: «Я сделал так много потому, что стоял на плечах гигантов».

Очень много написано по вопросу о приоритете этого открытия. Установлено, что оба они открыли свои методы независимо друг от друга. Ньютон первым открыл свои методы анализа (1665-1666), а Лейбниц позже (1673-1676), но Лейбниц первым выступил в печати (Лейбниц в 1684-1686 гг., Ньютон в 1704-1736 гг.).

Гениальный английский ученый, основоположник современной механики, создатель математики непрерывных процессов Исаак Ньютон (1643-1727) в 1665-1666 гг. открыл свой общий метод анализа, который назвал «теорией флюкций». Первое систематическое изложение этой теории дано в рукописи «Следующие предложения достаточны, чтобы решать задачи с помощью движения» (1666). В его следующем труде «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (1669) содержатся фундаментальные открытия в области бесконечных рядов. В частности, он обобщил общее разложение степени бинома на случай любого действительного показателя. Данный Ньютоном метод изучения функций с помощью рядов имел впоследствии огромное значение для всего анализа.

Изложение анализа Ньютона имеет механическую основу. Текущие переменные величины изменяются в зависимости от времени, они называются «флюэнтами», обозначаются *v, x, y z.* Скорости, с которыми каждая флюэнта изменяется при движении, называются «флюкциями», обозначаются $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Бесконечно малые изменения флюэнт, названные «моментами флюкций», обозначаются *vo,xo,yo,zo,* где *o* – «бесконечно малое количество». Нетрудно видеть, что *флюкция* Ньютона – это производная. Однако его способ не был вполне определенным. Бесконечно малое количество было определено нестрого: и одних случаях им пренебрегали, отбрасывали, в других случаях на него делили, то есть считали ненулевым.

Ньютоном были поставлены в терминах метода флюкций две главные проблемы анализа. Первая: по данному соотношению между флюэнтами определить соотношение между флюкциями. Это задача дифференцирования функций, зависящих от «времени». Вторая: по данному уравнению, содержащему флюкции, найти соотношение между флюэнтами. Это задача интегрирования дифференциального уравнения первого порядка.

С именем Ньютона связано решение многих взаимосвязанных задач математики и физики, Он рассматривал математику только как способ для физических исследований. Его основной труд «Математические начала натуральной философии» (1687) насквозь проникнут духом новых исчислений, он показывает все могущество этих исчислений в изучении законов природы. В этой работе он свел все известные до него и все найденные им самим сведения о движении и силе в одну дедуктивную систему земной и небесной механики. В этом же труде Ньютон впервые разработал общую теорию предельных переходов под названием «метода первых и последних отношений». Здесь вводится и сам термин «предел» (limes). Понятию предела определения не дается, метод пределов излагается в 12 леммах.

Вклад Ньютона в математику не исчерпывается созданием анализа. Его «Универсальная арифметика» становится одним из первых учебников Нового времени по арифметике, алгебре и применению алгебры к геометрическим задачам. В алгебре ему принадлежат метод численного решения алгебраических уравнений (метод Ньютона), важные теоремы о симметрических функциях корней алгебраических уравнений (формулы Ньютона), об отделении корней. В сочинении «Всеобщая арифметика» (1707) он развил учение о числе, дал определение числа: «Под числом: мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей».

Недостатки аналитических методов Ньютона вызывали нападки на теорию флюкций. Эти недоразумения были устранены лишь после четкого установления современного понятия предела.

Великий немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) – один из основоположников математического анализа. Родился в Лейпциге. Окончил юридический факультет Лейпцигского университета. Состоял на юридической и дипломатической службе и выезжал в Париж. Творческая математическая деятельность началась там, где он познакомился с Гюйгенсом и под его руководством изучал работы Галилея, Декарта, Ферма, Паскаля и самого Гюйгенса. В 1700 г. организовал Академию наук в Берлине и стал ее первым президентом. Способствовал открытию академий наук в Вене и Петербурге. Встречался с Петром I, работал над проектом организации образования в России.

Лейбниц нашел свое новое исчисление в 1673-1676 гг. под влиянием Гюйгенса, в ходе изучения работ Декарта и Паскаля. Он знал, что Ньютон обладал подобным методом. Но подход Ньютона был механическим, а подход Лейбница – геометрическим. При этом он исходил не из квадратуры кривых, как Ньютон, а из проблемы касательных. Рассматривал «характеристический треугольник» *(dx, dy, dz),* который уже встречался у Паскаля. Прежние частные и разрозненные приемы Лейбниц свел в единую систему взаимосвязанных понятий анализа, что позволило производить действия с бесконечно малыми по определенному алгоритму. Впервые анализ в форме Лейбница изложен им в печати в 1684 г. в статье «Новый метод для максимумов и минимумов, а также для касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого». В этой статье впервые вводились наши символы *dx, dy,* правила дифференцирования произведения и частного

$$d(uv) = vdu + udv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

условие $dy = 0$ для точек экстремума, $d^2 y = 0$ для точек перегиба.

Разъяснения анализа Лейбница страдали той же неопределенностью, что и у Ньютона. Иногда *dx, dy* были конечными величинами, иногда меньше любого определенного количества и все-таки не нули. В 1686 г. вышла следующая статья «О скрытой геометрии ...» с правилами интегрального исчисления. В ней содержался символ $\int$, который Лейбниц называл «суммой» (термин «интеграл» позже ввел Я. Бернулли).

Лейбниц был одним из самых плодовитых изобретателей современных математических символов. Немногие математики так хорошо понимали единство формы и содержания символики. Название «дифференциальное и интегральное исчисление» принадлежит Лейбницу. Он же ввел термины: «функция», «переменная величина», «координаты», «абсцисса», «ордината», «дифференциал», «алгоритм». Благодаря его влиянию стали пользоваться знаками равенства «=» и умножения «•», логической символикой. Математические работы Лейбница не ограничиваются областью анализа. Ученый занимался поиском всеобщего метода для овладения науками. Он искал «всеобщий язык», в котором все ошибки мысли выявились бы как ошибки вычислений. Это привело его к символической логике. Таким образом, Лейбниц считается одним из основоположников математической логики.

Лейбница можно считать идейным вдохновителем современной машинной математики. Он одним из первых сконструировал счетную машину, которая выполняла не только сложение и вычитание, но и умножение, деление, возведение в степень и извлечение квадратного и кубического корней. Свыше 40 лет Лейбниц посвятил усовершенствованию своего изобретения. Изобрел он и первый интегрирующий механизм.

Лейбниц ввел понятие определителя и выдвинул некоторые идеи, касающиеся теории определителей, которые далее развивали Вандермонд, Коши, Гаусс и окончательно разработал К. Якоби.

Влияние работ Лейбница на современников оказалось огромным. Он создал собственную математическую школу, в которую входили братья Бернулли, Лопиталь, Эйлер и др.

Главным итогом развития математики XVII столетия является создание аппарата математики переменных величин: понятия функции как аналитического выражения и главного средства, исследования функций – алгоритмов исчисления бесконечно малых, развитых до дифференциального и интегрального исчисления. Созданы новые разделы математики: аналитическая геометрия, теория вероятностей, проективная геометрия. Поставлены и решены ряд важных задач теории чисел. Развиты численные методы. Сформулирована основная теорема алгебры.

Таким образом, XVIII в. начался новым кризисом в развитии математики. Было создано исчисление, дающее прекрасные результаты в вычислениях, но оно не было подкреплено прочным логическим фундаментом.

Одно из названий XVIII века – «Век Просвещения». Научная деятельность в основном сосредоточилась в Парижской, Берлинской, и Петербургской академиях (организована в 1725 г.).

Восемнадцатый век характеризуется в математике в основном развитием анализа и его приложений. Крупнейшие математики XVII-XVIII веков после Лейбница вышли из швейцарского города Базеля. В первую очередь, это братья Бернулли, Якоб и Иоганн. Они стали первыми выдающимися учениками Лейбница, совместно с ним создали основы современного дифференциального и интегрального исчисления. Оставили свой след в развитии математики два сына Иоганна: Николай Бернулли (1695-1726) и Даниил Бернулли (1700-1784). Они некоторое время работали в Петербурге по приглашению Петра I. Гениальный математик, механик, физик, астроном Леонард Эйлер (1707-1783) тоже вышел из Базеля. Его отец, пастор, был учеником Я. Бернулли. Леонард учился у отца и И. Бернулли. Окончил Базельский университет. Был приглашен для работы в недавно организованной Петербургской Академии наук и долгое время работал в ней (1727-1741, 1766-1783), был украшением и славой Академии более 50 лет. В 1741-1766 гг. работал в Берлине, но не порвал связи с Петербургом. Он продолжал помогать в подготовке русских математиков. Его статьи на латинском языке появлялись без перерыва в печатном органе Академии («Комментарии Петербургской Академии наук») начиная со 2-го тома за 1727 г. до самой смерти и еще 43 года спустя. Россия стала его второй родиной. Похоронен в Санкт-Петербурге.

Ему принадлежат заметные результаты во всех областях математики и ее приложений, существовавших в его время. Он заложил основы многих математических дисциплин. Среди всех ученых Эйлер выделялся фантастической продуктивностью и невероятной интуицией. В 1735 г. он ослеп на один глаз, в 1766 г. почти полностью потерял зрение, но ничто не могло ослабить его трудоспособность. Слепой Эйлер, пользуясь феноменальной памятью, продолжал диктовать свои открытия. Написал 886 работ. 550 его книг и статей опубликованы при жизни, остальные в течение 47 лет после смерти. В 1909-1975 гг. в Швейцарии издавалось Полное собрание сочинений Эйлера, состоящее из 72 томов.

Многочисленные открытия Эйлера по математическому анализу, сделанные им за 30 лет и напечатанные в различных академических изданиях, были объединены в одном произведении – двухтомном «Введении в анализ бесконечных» (1748). Оно было посвящено свойствам рациональных и трансцендентных функций, исследованию кривых и поверхностей. В этом труде содержится изложение нынешней тригонометрии с ее определениями и обозначениями и теории рядов. Впервые вводится понятие функции комплексного переменного. Приводится известная формула Эйлера, связывающая показательные и тригонометрические функции $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, разложения в степенной ряд функций $e^x, \sin x, \cos x$. Здесь впервые вводятся углы

Эйлера, играющие в математике и механике важную роль. Затем вышел трактат в 4-х томах. Первый том, «Дифференциальное исчисление» (1755), был издан в Берлине, остальные три тома «Интегрального исчисления» (1768-1770) – в Петербурге. В последнем томе рассматривалось вариационное исчисление, созданное Эйлером и Лагранжем. Все эти книги служили основными руководствами для математиков. Они выгодно отличались от «Начал» Евклида и от «Принципов» Ньютона. Возведя стройное здание математического анализа от самого фундамента, Эйлер не убрал те леса и лестницы, по которым он сам карабкался к своим открытиям. Многие красивые догадки и начальные идеи доказательств сохранены в тексте, несмотря на содержащиеся в них ошибки – в поучение всем наследникам эйлеровой мысли. «Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить», – сказал великий немецкий математик Гаусс.

Эйлер посвятил ряд работ алгебре и теории чисел. Работа «Элементы алгебры» (1768) вышла на русском, немецком и французском языках. Ученый положил начало аналитическому методу в теории чисел. Всего теории чисел посвящены более 140 его работ: известны функция Эйлера, закон квадратичной взаимности Эйлера и др. Исследуя простые числа, Эйлер предложил ряд формул, при подстановке в которые большого числа первых целых чисел получаются простые. Например, $2x^2+29, x^2+x+41, x^2-79x+1001$ дают соответственно 29, 41, 80 простых чисел при x =0, 1, 2, ... Эйлер доказал также, что любой многочлен с целыми коэффициентами при подстановке чисел 0, 1, 2,... рано или поздно даст составное число.

Эйлер был одним из творцов современной дифференциальной геометрии. Ему же принадлежит доказательство топологической теоремы о соотношении между числом вершин, граней и ребер многогранника: $V+F=E+2$. В алгебраической топологии важную роль играют эйлерова характеристика и эйлеров класс.

Почти во всех областях математики и ее приложений встречается имя Эйлера: теоремы, тождества, постоянные, углы, функции, интегралы, формулы, уравнения, подстановки.

Большая часть работ Эйлера посвящена вопросам приложений математики в физике, механике, астрономии.

Ученый оказал огромное влияние на развитие математического образования в России. Эйлер считается основоположником не только Петербургской математической школы, но также первой в России методико-математической школы. Первые учебники математики, изданные на русском языке, были написаны Эйлером. Первые русские академики по математике были учениками Эйлера (С.К. Котельников, С. Я. Румовский, Н.И. Фусс, М.Е. Головин). Математическая школа Эйлера под его руководством провела огромную просветительскую работу, создала замечательную для своего времени учебную литературу.

Влияние Эйлера на все дальнейшее развитие математики бесспорно, «Читайте Эйлера, это наш общий учитель», – скачал великий французский математик Лаплас.

Ведущим математиком французских энциклопедистов был Жан Лерон Даламбер (1717-1783), математик, механик, философ, член Парижской Академии наук. Основные работы относятся к динамике, статике, гидродинамике, аэродинамике.

Усовершенствованием исчисления бесконечно малых занимался Жозеф Луи Лагранж (1736-1813), французский математик и механик. Он пытался обосновать строго теорию пределов, исключить недостатки анализа Ньютона, Лейбница и Даламбера. Но его алгебраический метод обоснований анализа оказался неудовлетворительным.

Работы Лагранжа и Эйлера легли в основу нового раздела математического анализа – вариационного исчисления. Причем Эйлер часто признавал преимущества методов Лагранжа над своими. В период работы в Берлине Лагранж получил важные результаты в диофантовом анализе, теории алгебраических уравнений, вариационном исчислении. В книге «О решении численных уравнений» (1767) дал методы отделения действительных корней алгебраического уравнения и их приближенного вычисления. Нашел метод исключения переменных из системы уравнений при помощи результанта. В «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений» (1770) исследовал проблему о возможности решения уравнений выше четвертой степени. Они повлияли в дальнейшем на Галуа и Абеля, которые решили эти проблемы.

В Париже Лагранж издал свои курсы математического анализа в двух частях: «Теория аналитических функций» (1797) и «Лекции по исчислению функций» (1801-1806). Дал формулу остаточного члена ряда Тейлора, формулу конечных приращений и интерполяционную формулу. Ввел тройные интегралы. Разработал метод вариации произвольных постоянных. Использовал функции комплексной переменной для решения задач гидродинамики. В 1788 г. опубликовал «Аналитическую механику», в которой создал классическую механику в виде учения об общих дифференциальных уравнениях движения материальных систем. Таким образом, он заменил геометрический подход Ньютона к механике аналитическим подходом.

Пьер Симон Лаплас (1749-1827), французский математик, физик и астроном, – последний ведущий математик XVIII века. Ему принадлежат фундаментальные работы по математике, экспериментальной и математической физике, небесной механике. Основная математическая работа Лапласа – «Аналитическая теория вероятностей» (1812). Она включает все то, что составляет современный курс теории вероятностей.

К концу VIII века некоторые ведущие математики высказывались, что область математических исследований истощена, что все уже открыто и изложено.

<u>Практическое занятие.</u>

II. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

<u>Задание 1.</u> Разработайте урок по теме «Экстремальные задачи».

Задание 2. Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 5.

Задание 3. Выберите материал для презентации по теме 5.

III. Внеаудиторная работа.

Задание 1. Составьте глоссарий по теме 5.

Задание 2. Разработайте ЦОР по персоналиям.

Тема 6. Период современной математики

Проблемные вопросы.

1. Охарактеризуйте кратко основные достижения периода современной математики.
2. Н.И. Лобачевский и его вклад в развитие математики.
3. Н. Бурбаки и вклад в развитие математики.
4. Великие математики этого периода.

Теоретические сведения.

Этот период отсчитывается примерно с середины XIX века. Начало этому периоду положило открытие неевклидовой геометрии Лобачевским Н.И. (1826) и Бояьи (1832), которое радикально изменило существовавшие воззрения на характер геометрических понятий математического пространства вообще, что привело к неограниченному разнообразию геометрических пространств. Создание функционального пространства, изучающего пространства функций. Качественно изменилась и алгебра: стали рассматриваться различные операции не только над числами, но и над объектами другой природы (векторами, кватернионами, матрицами, логическими высказываниями и т. д.), что привело к необходимости исследовать общие свойства алгебраических операций в произвольных множествах. Возникают алгебраические структуры, ставшие в дальнейшем основным предметом изучения алгебры. Глубокие сдвиги и в области математического анализа, что выразилось в критическом пересмотре основных понятий анализа, начиная с понятия действительного числа, понятий «предел функции», «непрерывность», «производная», «интеграл». Появилась теория точечных множеств, охватившая в дальнейшем с единой точки зрения области математики, казавшиеся весьма отдаленными друг от друга. Все эти изменения привели математику к современному ее состоянию.

К нему привел критический пересмотр проблем оснований математики. Появляются многие новые математические теории и расширяются ее приложения. Создаются теоретико-групповые методы в алгебре, неевклидовы геометрии. Математический анализ перестраивается на основе строгого определения действительного числа и предела.

Накопленный в 17 и 18 вв. огромный фактический материал привёл к необходимости углублённого логического анализа и объединения его с новых точек зрения. Открытие и введение в употребление геометрической интерпретации комплексных чисел, доказательство неразрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения пятой степени, создание франц. математиком О. Коши основ теории функций комплексного переменного, работы Коши по строгому обоснованию анализа бесконечно малых, создание русским математиком Н. И. Лобачевским (1826, опубликовано в 1829-30) и венгерским математиком Я. Больяй (1832) неевклидовой геометрии, работы немецкого математика К. Гаусса (1827) по внутренней геометрии поверхностей – вот типичные примеры наметившихся на рубеже XVIII и XIX вв. новых тенденций в развитии математики. Связь математики с естествознанием, оставаясь по существу не менее тесной, приобретает теперь более сложные формы.

Замечательным примером теории, возникшей в результате внутреннего развития самой математики, явилась «воображаемая геометрия» Лобачевского. Самому Лобачевскому удалось применить свою геометрию лишь к вычислению некоторых интегралов. Позднее были обнаружены связи его геометрии с теорией поверхностей и с теорией групп преобразований, геометрия эта нашла применения при исследовании важных классов аналитических функций и т. д. Только в XX в. с созданием теории относительности получило осуществление предположение Лобачевского о возможности применения его геометрических идей к исследованию реального физического пространства.

Таким образом, как в результате внутренних потребностей математики, так и новых запросов естествознания круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых в математике, чрезвычайно расширяется: в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, всё разнообразие форм пространств любого числа измерений и т. п. При таком широком понимании терминов «количественные отношения» и «пространственные формы» применимо и на новом современном этапе её развития.

Чрезвычайное расширение предмета математики привлекло в XIX в. усиленное внимание к вопросам её «обоснования», т. е. критического пересмотра её исходных положений (аксиом), построения строгой системы определений и доказательств, а также критического рассмотрения логических приёмов, употребляемых при этих доказательствах. Важность такого рода работы становится особенно понятной, если учесть то, что было выше сказано об изменившемся характере взаимоотношений между развитием математической теории и её проверкой на практическом. материале, доставляемом естествознанием и техникой. При построении обширных и иногда весьма абстрактных теорий, охватывающих, помимо тех частных случаев, которые привели к их созданию, огромный материал, получающий конкретные применения лишь в перспективе десятилетий, ждать непосредственных сигналов о недостаточной корректности теории в форме зарегистрированных ошибок уже нельзя. Вместо этого приходится обратиться ко всему накопленному опыту работы человеческой мысли, который как раз и суммируется в вырабатываемых постепенно наукой требованиях к «строгости» доказательств.

В соответствии с этим работы по строгому обоснованию тех или иных отделов математики справедливо занимают значительное место в математике XIX и XX вв. В применении к основам анализа (теория действительных чисел, теория пределов и строгое обоснование всех приёмов дифференциального и интегрального исчисления) результаты этой работы с большей или меньшей полнотой излагаются в настоящее время в большинстве учебников (даже чисто практического характера). Однако до последнего времени встречаются случаи, когда строгое обоснование возникшей из практических потребностей математической теории запаздывает. Так в течение долгого времени уже на рубеже XIX и XX вв. было с операционным исчислением, получившим весьма широкие применения в механике и электротехнике. Лишь с большим запозданием было построено логически безупречное изложение математической теории вероятностей.

Только к концу XIX в. сложился стандарт требований к логической строгости, остающийся и до настоящего времени господствующим в практической работе математиков над развитием отдельных математических теорий. Этот стандарт основан на теоретико-множественной концепции строения любой математической теории. С этой точки зрения любая математическая теория имеет дело с одним или несколькими множествами объектов, связанных между собой некоторыми отношениями. Все формальные свойства этих объектов и отношений, необходимые для развития теории, фиксируются в виде аксиом, не затрагивающих конкретной природы самих объектов и отношений. Теория применима к любой системе объектов с отношениями, удовлетворяющей полошенной в её основу системе аксиом. В соответствии с этим теория может считаться логически строго построенной только в том случае, если при ее развитии не используется никаких конкретных, не упомянутых в аксиомах, свойств изучаемых объектов и отношений между ними, а все новые объекты или отношения, вводимые по мере развития теории сверх упомянутых в аксиомах, формально определяются через эти последние.

Из указанных требовании, в частности, вытекает, что математическая теория, применимая к какой-либо системе объектов, применима автоматически и к любой «изоморфной» системе. Заметим по этому поводу, что кажущееся иногда весьма абстрактным понятие изоморфизма является просто математическим выражением идеи «моделирования» физических явлений из какой-либо одной области физическими явлениями иной природы.

Таким образом, в первой половине XX в. возникла концепция аксиоматического построения всей математики. Согласно этой концепции на основе всей математики лежит чистая теория множеств». Казалось, что Кантору суждено найти такое место для математики, которое Гильберт назвал «раем». Но теории множеств обнаружились парадоксы. Поэтому потребовался пересмотр оснований математики. Возникли два направления обоснования математики: *интуиционистское* и *конструктивное.* Немецкий математик Эрнст Цермело (1871-1953) дал первую систему аксиом теории множеств. Была аксиоматизирована алгебра, элементарная геометрия, теория вероятностей, топология, теория меры и др. В конце тридцатых годов группа французских математиков объединилась, чтобы построить всю математику на аксиоматической основе. Результатом их деятельности стал многотомный трактат «Элементы математики», изданный под псевдонимом Никола Бурбаки. Фундаментом являлась теория множеств. Эта попытка осталась незавершенной. Тем не менее их работа имела большое значение для развития математики. По крайней мере был создан язык, на котором математики понимают друг друга.

Войны XX века разорвали международные научные связи. После 1945 г. они быстро восстановились. В 1950 г. собрался первый послевоенный Международный математический конгресс в США (Гарвард). С тех пор конгрессы собирались регулярно. Во второй половине столетия математика приобрела характер истинно интернациональной науки. Начала осуществляться мысль Гильберта о том, что для математика весь культурный мир представляет собой единую страну.

Процесс математизации различных наук идет в нарастающем темпе. Теперь можно указать и на нетрадиционные области ее применения: химия, биология, лингвистика, психология, медицина, геология и др. Происходит качественное изменение самой математики. Понятие предмета математики приобретает все более глубокое содержание.

Практическое занятие.

I. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

Задание 1. Подберите задачный материал для элективного курса по теме «Геометрические построения в плоскости Лобачевского».

Задание 2. Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 6.

Задание 3. Выберите материал для презентации по теме 6.

III. Внеаудиторная работа.

Задание 1. Составьте глоссарий по теме 6.

Задание 2. Разработайте ЦОР по персоналиям.

Тема 7. История развития отечественной и региональной математики. Математические школы СГУ

Проблемные вопросы.

1. Охарактеризуйте кратко основные достижения древнерусской математики.
2. Магницкий и его вклад в развитие отечественной математики.
3. Великие русские математики.
4. Математические школы СГУ.

Теоретические сведения.

Первые сведения о развитии арифметики в Древней Руси относятся к IX-X вв. Существование городов, ведение земледелия и торговли свидетельствуют о распространении простейших математических знаниях – навыки арифметических действий и геометрические правила конструирования. Об этом говорят и археологические находки, берестяные грамоты, сохранившиеся храмы и дворцы.

Буквы древнерусского алфавита имели также числовое значение, для обозначения которого над буквами ставился значок «~» – титло. Для обозначения тысяч пользовались теми же буквами, у которых снизу слева ставился знак в виде перечеркнутой черточки. Для единиц более высоких десятичных разрядов имелись свои названия и обозначения: «тьма» (десять тысяч), «легион» (десять тем), «леодр» (десять легионов). Таким образом, древнерусская нумерация была основана на принципах ионийской нумерации. Она применялась до конца XVII в., далее начала вытесняться индийской нумерацией.

Простейшие дроби были известны давно. Сначала возникли 1/2 и 1/3, потом их последовательные половинки: 1/4 (четь), 1/8 (полчети), 1/6 (полтрети), 1/12 (пол-полтрети) и т.д.

Большую роль в развитии арифметики играли различные системы мер: длины, площади, сыпучих тел, весовой и денежной единиц. Более сложные вычисления велись в календарных и хронологических расчетах. Древнейшее русское математическое сочинение, дошедшее до нас, – «Учение им же ведати человеку числа всех лет» (1136) написал Кирик Новгородец (родился в 1110 г.), первый русский математик, известный нам по имени. Оно посвящено хронологическим расчетам. Счет годам велся не от рождества Христова, а от сотворения мира. Кирик вычислил не только число годов, но и число месяцев, недель и дней.

Таким образом, в начале истории русского государства ход развития ее математической культуры был общим со всеми государствами Европы. Далее на Западе знакомятся с арабской математикой. В России, больше связанной с Византией, чем со странами ислама, развитие математики пошло иным путем. Сближение с Европой насильственно прервалось в XIII веке из-за нашествия монголо-татар (1240) и крестоносцев (1242).

К началу Нового времени Россия отстала от Европы по уровню науки вообще и математики в частности.

Единой системы образования в России до XVIII в. не было. В 1687 г. открывается Славяно-греко-латинская академия в Москве. Из этой академии вышли Л.Ф. Магницкий и М.В. Ломоносов.

В первой четверти XVIII в. математическое просвещение становится одной из задач государства. За спешную подготовку военных и технических специалистов принимается царь Петр I. Реформы, начатые им, потребовали и организации широкого светского обучения. Посылка людей за границу для обучения не дала эффекта.

В 1701 г. в Москве начала работу Навигацкая школа. От нее в 1715 г. отделилась Морская академия, переведенная и Петербург. В Навигацкой школе готовили специалистов во все роды военной, морской и гражданской службы. Преподавание математики включало арифметику, геометрию, тригонометрию, пользование таблицами логарифмов, счетными линейками. Основными преподавателями были А.Д. Фархварсон и Л.Ф. Магницкий, известные российские просветители.

Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739) – один из выдающихся людей петровского времени по образованности и математическим познаниям. В 1703 г. он напечатал в Москве первое руководство – энциклопедическую «Арифметику», которая сразу же стала основным учебником математики в

России на многие годы. Прослужила она до середины XVIII в., оказав немалое влияние на все учебные руководства русских авторов. Полное название книги – «Арифметика сиречь наука числительная». Это большой том, разделенный на две книги. Первая книга посвящена арифметике, вторая включает алгебру с геометрическими приложениями, начала тригонометрии, географию и навигацию.

Поворотным пунктом в развитии математики в России явилось основание Петербургской Академии наук (1725), которая дала мощный толчок в подготовке русских математиков. Среди 23 академиков, приглашенных на работу в течение первых лет, семь являлись математиками. Были приглашены Яков Герман, Христиан Гольдбах, Николай и Даниил Бернулли, Леонард Эйлер. Начиная с 1728 г. выходили «Записки Императорской Петербургской Академии наук» на латинском языке, в которых печатались оригинальные математические труды академиков, среди них 400 трудов Эйлера. На академиков возлагались также преподавание в университете и гимназии и занятия с наиболее способными студентами. Некоторые студенты направлялись для усовершенствования знаний в Германию. Таким образом, педагогические и методические идеи Европы проникали в Россию через представителей первой российской научно-методической школы Эйлера. Академические учебные заведения сыграли важную роль в развитии науки и просвещении. Они дали гениального ученого М.В. Ломоносова, а также первых русских академиков-математиков.

Большую заслугу имеет академия в создании учебной математической литературы. Ведущими учебниками были руководства Эйлера, оказавшие влияние на все создававшиеся учебники: «Руководство к арифметике, для употребления в гимназии при Императорской Академии наук» и «Универсальная арифметика» Эйлера, «Универсальная арифметика» (1757) и «Арифметика или числовник» (1771) Н.Г. Курганова и др.

В 1755 г. был основан Московский университет. В нем почти полстолетия преподавалась только элементарная математика. Для трех его факультетов готовили студентов две гимназии. Первая половина XIX века характеризуется постепенным повышением уровня преподавания и ростом квалификации преподавателей. Из выпускников того периода вышло немало выдающихся ученых, в том числе академик П.Л. Чебышёв.

Университеты организовались в Дерпте (Тарту) (1802), Вильнюсе (1803), Казани и Харькове (1804), Петербурге (1819). Позже они были открыты в Киеве (1834), Одессе (1865), Варшаве (1869), Томске (1888). Важной особенностью новой системы учебных заведений была ее непрерывность. Окончив уездное училище, можно было перейти в гимназию, а гимназическая подготовка считалась достаточной для поступления в университет. С 1808 г. никто не мог поступить на государственную службу без диплома училища. Преподаватели училищ готовились в университетах.

В каждом университете учреждались физико-математические факультеты и кафедры математики. В них обучали алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению, читали повторительный курс элементарной математики. Сначала срок обучения был трехгодичным, потом – четырехгодичным (1835).

После смерти Эйлера (1783) уровень математического творчества в Академии снизился. Новый подъем начался в 20-е годы XIX века в период плодотворной работы молодых академиков М.В. Остроградского и В..Я. Буняковского. Важнейшим событием в истории отечественной математики этого периода явилось открытие Н.Й. Лобачевским первой системы неевклидовой геометрии (1826). Они имели не только выдающиеся научные достижения. Все они были блестящими педагогами-новаторами с прогрессивными идеями в преподавании математики.

Начиная с 1828 г. все наши академики-математики вышли из русских университетов. В середине века в Петербурге начал складываться творческий коллектив математиков, ведущее место в котором занял П.Л. Чебышёв. Его научная и педагогическая работа оказала решающее влияние на создание Петербургской математической школы.

Петербургские математики оказали большое влияние на формирование научных школ и в других городах, например, А.М. Ляпунов и В.А. Стеклов в Харькове, Д.А. Граве в Киеве. Хотя с течением времени развитие математики в каждом университете приобретало свои особенности.

Особо следует отметить первую научную алгебраическую школу, созданную Д. А. Граве в 10-е годы XX века в Киевском университете, куда он переехал в 1902 г. Граве в Киеве отошел от прежней тематики и сосредоточился на новой алгебре и теории чисел.

Славу русской науки составляет научная деятельность первой в мире женщины – профессора математики СВ. Ковалевской. В 70-80-х годах она получила замечательные результаты в аналитической теории дифференциальных уравнений.

Кроме занятия преподавательской деятельностью, она была одним из редакторов известного математического журнала под латинским названием «Акта математика» (Математические ведомости), занималась серьезными научными исследованиями, увлекалась литературной деятельностью, писала романы, стихи, драмы. Для многих казалось странным, как она сочетает математику с поэзией. По этому поводу Ковалевская писала: «Многие, которым никогда не представлялось случая более глубоко узнать математику, смешивают ее с арифметикой и считают наукой сухой. В сущности же это наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего столетия говорит совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи в то же время поэтом в душе».

В 1882 г. Виктор Викторович Бобынин (.1849-1919) впервые в России стал читать в МГУ факультативный курс истории математики.

Новый этап движения за реформу математического образования начался в конце XIX в.

История формирования Московской математической школы непосредственно связана с Московским университетом. В Московском университете на рубеже XIX-XX вв. общепризнанным лидером математиков-прикладников стал Николай Егорович Жуковский (1847-1921).

Другая научная школа московских математиков, по классической дифференциальной геометрии, ведет начало от работ Карла Михайловича Петерсона (1828-1881). После них геометрическую школу возглавил Дмитрий Федорович Егоров (1869-1931), он же положил начало Московской школе ТФДП.

К началу советского периода развития отечественная математика имела выдающиеся достижения, которые явились базой, на основе которой в короткое время после Октябрьской революции оказалось возможным создать новые научные школы, основать новые направления, обеспечившие успехи отечественной математики.

Необходимо отметить, что ряд новых математических школ был создан в городах, бывших до революции глухими окраинами России.

Советская математическая школа занимала передовое место в мировой математической науке.

Выдающийся математик, основоположник московской школы теории функций Николай Николаевич Лузин (1883-1950) является одним из связующих звеньев между дореволюционной российской и советской математикой. Он обучался в Московском университете, в Сорбонне, стажировался в Геттингене; учился у Бореля, Пуанкаре, Адамара, Дарбу, Лебега. Его знаменитый труд «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915) определил на многие годы вперед линию развития теории функций. Лузин с 1922 г. работал в МГУ, после избрания академиком (1929) руководил отделом теории функций Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Учениками Н.Н. Лузина были П.С. Александров, Н.К. Бари, Л.В. Келдыш, А.Н. Колмогоров, М.А. Лаврентьев, Л.А, Люстерник, Д.Е. Меньшов, МЛ. Суслин, А.Я. Хинчин, Л.Г Шнирельман и др. Они составили основу Московской математической школы. Ни одна математическая школа мира не располагала таким созвездием выдающихся ученых.

Павел Сергеевич Александров (1896-1982) – выдающийся советский математик, академик (1953), создатель советской топологической школы, имеющей мировое признание. Многие понятия и теоремы общей топологии носят имя Александрова. Долгие годы руководил деятельностью Московского математического общества в качестве его президента. Был членом многих иностранных академий наук и научных обществ.

Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987) – выдающийся советский математик, академик (1939), член АПН СССР (1968). С 1930г. – профессор МГУ Внес основополагающий вклад во многие области современной математики: теорию функций действительного переменного, теорию вероятностей, теорию марковских случайных процессов, топологию, конструктивную логику, функциональный анализ, механику, прикладную математику, статистику, теорию информации.

Принято считать, что основные этапы развития современной математики – это время работы пяти великих математиков – Ньютона, Эйлера, Гаусса, Пуанкаре и Колмогорова. Важнейшим научным вкладом Колмогорова является аксиоматическое построение теории вероятностей. Эта аксиоматика связала воедино теорию множеств, теорию функций и теорию вероятностей. На ее основе стало возможным развитие теории случайных непрерывных процессов, например, точное математическое описание броуновского движения. А.Н. Колмогоров создал большие школы теории функций и теории вероятностей. Многие его ученики стали известными во всем мире математиками (например академик В.И, Арнольд).

Много сил и времени Колмогоров отдал реформе школьного математического образования. Он является автором и редактором школьных учебников, программ и учебных планов. По его инициативе при МГУ была создана школа-интернат для одаренных детей.

Александр Яковлевич Хинчин (1894-1959) имеет первоклассные труды по теории функций и теории чисел. Он является одним из основоположников советской школы теории вероятностей. Преподавал в МГУ член-корреспондент АН СССР (1939), действительный член АПН РСФСР (1944). Значителен его вклад в математическое образование в высшей и средней школе. Он является автором известных книг «Краткий курс математического анализа», «Теорема Ферма», «Три жемчужины теории чисел» и др.

После революции алгебраическая школа Д.А. Граве продолжала работать успешно. Он сам принял активное участие в строительстве советской науки и в реформе высшей школы. В 1920 г. был избран членом АН УССР, в 1929 г. – почетным членом АН СССР. Еще до революции начали свои исследования по алгебре и теории чисел ученики Д.А. Граве – О.Ю. Шмидт, Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарев и др. Отто Юльевич Шмидт (1891-1956, академик с 1935) еще в 1916 г. опубликовал монографию «Абстрактная теория групп». С 1923 г. Шмидт работал в Московском университете, руководил кафедрой алгебры. Он известен также как полярный исследователь и геофизик, астроном, общественный деятель, Герой Советского Союза, главный редактор БСЭ. Борис Николаевич Делоне (1890-1980) успешно занимался вопросами новой алгебры и теорией алгебраических чисел, стал членом-корреспондентом АН СССР (1929). Николай Григорьевич Чеботарев (1894-1947) – крупнейший советский алгебраист, член-корреспондент АН СССР (1929). Занимался вопросами теории алгебраических чисел, теории Галуа, групп Ли. Работал в Киеве, Одессе, с 1927 г. в Казани, заведовал кафедрой алгебры КГУ Был директором Научно-исследовательского института математики и механики, теперь носящего его имя, председателем Казанского физико-математического общества. Создал известную Казанскую алгебраическую школу. Автор известных монографий «Теория Галуа», «Теория групп Ли».

Важные результаты были получены в теории чисел. В аналитической теории чисел основные достижения связаны с работами академика Ивана Матвеевича Виноградова (1891-1983), С 3 929 г. – действительный член Академии наук СССР, с 1932 г. руководил Математическим институтом АН СССР.

В начале XX в. создавалась школа, занимавшаяся проблемами теории интегральных уравнений, ярким представителем которой был В.И. Смирнов.

Владимир Иванович Смирнов (1887-1974) окончил Петербургский университет (1910), ученик В.А. Стеклова. Академик (1943). Профессор Петербургского (Ленинградского) университета, возглавлял Институт математики и механики Ленинградского университета, теперь носящего его имя. Основные работы относятся к теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, математической физике, истории математики. Возглавлял Комиссию АН СССР по истории физико-математических наук. Был президентом Ленинградского математического общества. Автор энциклопедического пятитомного труда «Курс высшей математики», который многократно переиздавался и был базовым вузовским учебником в течение более 50 лет. За этот фундаментальный труд был удостоен Государственной премии (1948). В 1941-1944 гг. в составе научного филиала ЛГУ был в эвакуации в Елабуге, работал заведующим кафедрой физики и математики Елабужского государственного учительского института.

В 1934 г. Академия наук СССР была переведена в Москву. Переехал также и Математический институт АН СССР. Ленинградская (Петербургская) и Московская математические школы стали работать вместе. Этот сплав крупнейших специалистов стал одной из мощнейших научных школ в мире – советской математической школой. Эта школа вплоть до распада СССР была ведущей в мире. Росли научные кадры и на периферии СССР.

Во время Великой Отечественной войны многие отечественные математики переключились на решение задач, связанных с обороной страны (А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, Л.С. Понтрягин и др.).

Замечательные достижения советской математики выдвинули ее в первые ряды мировой науки. Ее результаты описаны в обзорах «Математика в СССР за 15 лет» (1933), «Математика в СССР за 30 лет» (1948), «Математика в СССР за 40 лет» (1959), «Математика в СССР, 1958-1967» (1970).

История развития математики в Саратове связана с именем французского математика и военного инженера Жана-Виктора Понселе, который в качестве военнопленного прибыл в марте 1813 г. в Саратов. В предисловие к своему классическому сочинению «Приложения анализа и геометрии» (1822) Понселе вспоминает, что сначала он не мог даже думать от истощения, но яркое апрельское солнце оживило его и он вспомнил, что получил хорошее математическое образование (Политехническая школа в Париже и военная академия в Меце), и, чтобы смягчить строгости заключения, решил воспроизвести на сколько сможет то, что учил. Именно таким образом он пришел к созданию проективной геометрии. В сентябре 1814 г. Понселе вернулся во Францию, привезя с собой материал 7 рукописных книжек, написанных в Саратове в русском плену (с 1813 по 1814 г.) вместе с разными другими записями старыми и новыми.

Физико-математический факультет (механико-математический – с сентября 1945 г.) открылся в Саратовском университете 1 июня 1917 г. в составе двух отделений – физико-математического и естественного. Первым деканом был избран В.Д. Зернов. В весенний семестр 1917-1918 года была организована кафедра высшей математики физико-математического факультета.

Становление и развитие кафедры высшей математики связано с именем замечательного ученого и человека – Владимира Васильевича Голубева. В.В. Голубев заведовал кафедрой высшей математики со дня ее основания и до 1930 года, а с 1920 года он был ректором нашего университета. В первые годы существования кафедры высшей математики значительную роль сыграла деятельность выдающегося математика – Ивана Ивановича Привалова, проработавшего в должности экстраординарного профессора до 1921 года. В 1920 году была открыта кафедра механики во главе с Георгием Николаевичем Свешниковым.

В 1921 году состоялся первый выпуск физико-математического факультета. Из числа первых выпускников в аспирантуру по кафедре математики поступил Георгий Петрович Боев, ставший впоследствии первым деканом уже механико-математического факультета.

В 1922-1934 гг. кафедра высшей математики растет – увеличивается состав кафедры, возрастает интенсивность научных работ. Возникают новые научные направления: математическая статистика, интегральные уравнения, уравнения математической физики. В 1924-1930 гг. на скромные средства, отпускавшиеся кафедре, была создана математическая библиотека, которая содержала почти всю вышедшую в то время на русском языке математическую литературу.

В 1935 году вместо одной кафедры высшей математики было организовано 5 новых математических кафедр: кафедра математического анализа, кафедра теории функций, кафедра теории вероятностей, кафедра геометрии и кафедра алгебры. Заведовать вновь открытыми кафедрами были приглашены крупные ученые: И.Г. Петровский, А.Я. Хинчин, А.Г. Курош, В.В. Вагнер. А.Я.Хинчин и А.Г. Курош проработали в Саратове около двух лет, и их работа оставила яркий след в истории факультета.

В 1937 году была открыта кафедра теории упругости, заведовать которой стал Сергей Георгиевич Лехницкий (впоследствии – профессор, лауреат государственной премии). В том же году на факультете был организован институт математики, механики и физики, который возглавил В.В. Вагнер. Еще одно важное событие предвоенных лет – создание аэродинамической трубы под руководством И.Г. Чудакова и С.Н Кутина. В 1938 году была открыта лаборатория оптических методов исследования напряжений. Важные исследования по теории фильтрации грунтовых вод проводил Бруно Константинович Ризенкампф. Эти работы были объединены в монографии «Гидравлика грунтовых вод», защищенной им в качестве докторской диссертации в 1940 году В период Великой Отечественной войны кафедры, наряду с учебной работой, занимались решением задач для нужд оборонной промышленности: производились расчеты по заказам военных заводов, консультации для инженеров и техников. Постановлением Совнаркома СССР от 18 июля 1945 г. физический факультет был выделен из состава физико-математического факультета Саратовского государственного университета в качестве самостоятельного структурного подразделения, а факультет был переименован в механико-математический. Тогда на факультете было 5 кафедр, а набор составлял около 50-ти студентов.

Послевоенный период 1945-1959 г.г. явился периодом бурного развития механико-математического факультета. Он характеризуется возникновением новых научных направлений, увеличением числа защит кандидатских и докторских диссертаций. Докторские диссертации защитили СВ. Фалькович, А.А. Назаров, К.А. Родосский, А.Е. Либер. Важным событием в жизни факультета явилось создание в апреле 1957 года Вычислительного центра – он был первым вычислительным центром не только города Саратова, но и всего Поволжья. Большую роль в создании ВЦ сыграли Г.П. Боев, А.М. Богомолов, Е.Ф. Бурмистров, Н.П. Купцов, В.М. Гурьянов, Ю.П. Васильев, А.И. Барабанов. Алексей Иванович Барабанов, бессменно возглавлявший факультет с 1947 по 1961 гг., сумел создать на факультете деловую и вместе с тем дружественную обстановку.

60-е и 70-е годы можно отнести к периоду эволюционного развития мехмата. В этот период особенно заметную роль в жизни факультета играют профессора В.В. Вагнер, Н.Г. Чудаков, СВ. Фалькович, Н.П. Купцов.

В Конце 70-х на факультет возвращается Анатолий Михайлович Богомолов, организовавший и возглавивший кафедру математической кибернетики и одновременно ставший ректором университета. А.М. Богомолов внес очень значительный вклад в развитие механико-математического факультета. Создаются новые кафедры – кафедра математической кибернетики, а впоследствии – кафедра дискретного анализа, кафедра системного анализа и автоматического управления, кафедра теоретических основ информатики. По инициативе Анатолия Михайловича на базе Саратовского университета проводились Всесоюзные конференции и научные школы по кибернетике, создан Специализированный Ученый Совет по защите диссертаций, начаты выпуски научных трудов по кибернетике и искусственному интеллекту. А.М. Богомоловым написано свыше 150-ти научных работ и более 10-ти монографий по вопросам автоматизации программирования, методам контроля и диагностирования сложных систем, теории автоматов.

1 сентября 2004 года на механико-математическом факультете была создана кафедра прикладной информатики. У истоков её создания стояли ректор СГУ профессор Леонид Юрьевич Коссович, заведующий кафедрой доцент Сергей Павлович Шевырёв, доценты кафедры Валерий Александрович Иванов, Алексей Владимирович Гортинский.

<u>Практическое занятие.</u>

I. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

<u>Задание 1.</u> Проанализируйте содержание школьного учебника на предмет наличия сведений об отечественных математиках. Дополните его адаптированным историко-математическим материалом, который целесообразно, на ваш взгляд, включить в содержание этого учебника.

<u>Задание 2.</u> Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 7.

<u>Задание 3.</u> Выберите материал для презентации по теме 7.

III. Внеаудиторная работа.

Задание 1. Составьте глоссарий по теме 7.

Задание 2. Разработайте ЦОР по персоналиям.

Тема 8. Историческое развитие содержательно-методических линий школьного курса математики[5]. Развитие учения о числе.

Проблемные вопросы.

1. Перечислите основные содержательно-методические линии школьного курса математики.
2. Этапы становления понятия числа.
3. Система письма и нумерации, ноль, арифметические действия над числами; дробные числа.
4. Решение арифметических задач.
5. Положительные и отрицательные числа.
6. Введение иррациональных чисел.
7. Введение комплексных чисел.

Теоретические сведения.

Считается, что понятие числа возникло вследствие практической необходимости пересчета предметов. Полагают, что первые числа – один и много – имеют качественный, а не количественный характер. Запас чисел на ранних стадиях весьма ограничен. Ряд известных и используемых чисел конечен и удлиняется лишь постепенно. Сначала появляется число 2, которое отождествляется с реальными объектами: у индейцев – глаза, у тибетцев – крылья и т.п. Большие числа сначала образуются с помощью сложения, т.е. одновременно с получением новых чисел вводится и основное действие над ними – сложение. Эти выводы делаются также из наблюдения за развитием счета у малоразвитых народов. Например, ко времени прихода европейцев в XVII в. коренные племена Австралии имели крайне бедный запас чисел. Одно из племен использовало для выражения малых чисел такие слова: 1 – энэа, 2 – петчевал, 3 – петчевал-энэа, 4 – петчевал-петчевал. Миклухо-Маклай в XIX в. так описывал счет папуасов Новой Гвинеи: загибая пальцы руки они издавали определенный звук, например, «бе»: бе, бе, бе, бе, ибон-бе, потом на другой руке – бе, бе, бе, бе, ибон-али, на ноге – самба-бе, на другой ноге – самба-али. Можно понять, что али – это два, но в сочетании с другим словом, обозначающим конкретный предмет. Наличие многих общих черт позволяет предположить, что аналогично было возникновение счета и у других народов.

Вообще, каждое натуральное число есть свойство, общее для всех совокупностей, предметы которых можно сопоставить по одному, и разное у совокупностей, для которых такое сопоставление невозможно. Естественно, такое понимание о нем возникло в результате очень длительного и сложного исторического процесса развития способности к абстрактному мышлению. В

[5] Студентам, изучающим данную дисциплину, предоставляется право самостоятельного выбора: ознакомиться с историей развития линий, представленных в пособии, или выбрать одну или несколько других линий из представленных в Приложении.

возникновении первоначального представления о числе можно выделить три основных этапа:

1. Установление случайного взаимнооднозначного соответствия между двумя сравниваемыми множествами.

2. Появление различных эталонов счета, вначале естественных: луна– 1, глаза – 2, рука – 5 и т.п., затем искусственных – счетные палочки, камешки и т.п.

3. Переход к единому, наиболее удобному эталону счета: руки – двоичная, пальцы руки – пяточная, пальцы обеих рук – десятичная системы счисления.

Счет предметов с помощью эталонов сопровождался образованием числительных и возникновением числовых обозначений. Изображение и наименование чисел у разных народов и в разные времена были основаны на следующих общих принципах. Вводятся основные знаки, с помощью которых записываются и называются остальные числа. Обычно используется сочетание трех принципов: аддитивного, субтрактивного и мультипликативного, когда стоящие рядом знаки означают соответственно сумму, разность и произведение значений этих знаков. В более поздних нумерациях значение знака стало зависеть еще от его позиции.

Таким образом, по мере совершенствования счета появляются различные системы счисления. Следы древних систем счисления сохраняются и в наши дни, например, пятичной, двадцатичной, шестидесятичной.

Когда количество предметов превышало количество пальцев рук и ног, люди стали пользоваться для числовых записей камешками, зарубками на палках, пучками, узлами на веревках и т.п. Для перехода от таких приемов к специальным символам оставался только один шаг. И такие символы мы обнаруживаем в начале писаной истории.

Сознание неограниченной продолжимости ряда чисел является признаком высокого уровня знаний и культуры. В разное время у разных народов предельными числами были 2, 3, 5, 7, 10, 40, 60, 100 и др. Многие из них попали в категорию «мистических чисел».

Известно, что натуральные числа возникли при счете предметов. Потребность человека измерять величины и то обстоятельство, что результат измерения не всегда выражается целым числом, привели к расширению множества натуральных чисел. Были введены нуль и дробные числа. Процесс исторического развития понятия числа на этом не закончился. Однако не всегда первым толчком к расширению понятия числа были исключительно практические потребности людей. Бывало и так, что задачи самой математики требовали расширения понятия числа.

Именно так обстояло дело с возникновением отрицательных чисел. Понятие об отрицательных числах возникло в практике решения алгебраических уравнений.

Дроби вводятся в египетской арифметике. Все дроби сводятся к суммам так называемых «аликвотных» дробей. Это дроби, имеющие числителем единицу. Исключение составляла дробь $\frac{2}{3}$: $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$. У историков математики принято писать $\overline{n}$ вместо $1/n$. Самые простые разложения писцы должны были знать наизусть. Разложение дробей на сумму аликвотных дробей применялось в математике очень долго, даже в средние века.

После расширения множества натуральных чисел до дробных стало возможным делить любое целое число на другое целое число (за исключением деления на нуль). Вычитать же целое число из другого целого числа, когда вычитаемое больше уменьшаемого, долгое время казалось невозможным. Однако при решении уравнений нередко приходилось производить вычитание большего числа из меньшего и сталкиваться таким образом с понятием отрицательного числа.

Не только египтяне и вавилоняне, но и древние греки не знали отрицательных чисел. Понятие отрицательного числа появляется при решении систем линейных уравнений. Для производства вычислений математики того времени пользовались счетной доской, на которой числа изображались с помощью счетных палочек. Так как знаков «+» и «–» в то время еще не было, палочками красного цвета изображали положительные числа, отрицательные же – палочками черного цвета. Отрицательные числа долгое время называли словами, которые означали «долг», «недостача». Даже в VII в. в Индии положительные числа толковались как имущество, а отрицательные – как долг. В древнем Китае были известны лишь правила сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел; правила умножения и деления не применялись.

Алгебра возникла из решения практических задач с по мощью уравнений. Действия, производимые для решения уравнений, выполняются, по существу, над числами, так как буквы применяются в элементарной алгебре для обозначения чисел.

При решении уравнений нельзя, вообще говоря, ограничиться множеством одних только целых положительных чисел. Даже рассматривая, например, общее уравнение первой степени с одним неизвестным, в качестве его корня можем получать как натуральное, так и отрицательное или дробное значение.

Итак, для того чтобы можно было решать любое уравнение, даже только первой степени, необходимо иметь, помимо натуральных чисел, еще и дробные и отрицательные числа, то есть необходимо иметь все рациональные числа.

Таким образом, практика решения уравнений первой степени породила необходимость расширения понятия числа от множества положительных целых чисел до множества рациональных чисел. Зная это множество, можно решать любое уравнение (и систему уравнений) первой степени. При этом коэффициенты уравнения могут быть любыми рациональными числами.

Решение уравнений второй степени требует дальнейшего расширения множества чисел, введения новых чисел, сначала иррациональных (объединение всех рациональных и иррациональных чисел дает множество действительных чисел), а затем и комплексных.

Потребовалась не одна сотня лет для того, чтобы математики смогли осмыслить понятие иррационального числа и выработать способ записи такого числа и приближенного значения его в виде бесконечной десятичной дроби.

Как видно, понятие числа прошло длинный путь развития: сначала целые числа, затем дробные, рациональные (положительные и отрицательные) и, наконец, действительные. (Любое число, которое можно выразить в виде конечной или бесконечной десятичной дроби, представляет собой элемент множества действительных чисел). Но на этом развитие не завершилось. В связи с решением уравнений математики встретились с числом, которое выражалось $\sqrt{-1}$. Оно получило название мнимой единицы. Долгое время мнимые числа не признавали за числа. После того как норвежский математик Гаспар Вессель (1745-1818) нашел возможность представить мнимое число геометрически, то так называемые «мнимые числа» получили свое место в множестве комплексных чисел. Однако и раньше интерпретация этих чисел имелась у Даламбера и Эйлера, которые ставили в соответствие комплексным числам точки плоскости и некоторые функции комплексного переменного истолковывали геометрически. Обозначение комплексного числа $a+b\sqrt{-1}$ принадлежит Кардано. Эйлер стал записывать это число в виде $a+bi$, где $i=\sqrt{-1}$, а i^2 = -1. По рекомендации ирландского математика Уильяма Роуэна Гамильтона (1805-1865) комплексные числа стали выражать парой действительных чисел в вид (a,b). Однако и на этом развитие понятия числа не завершилось. В настоящее время ученик с самого начала изучения комплексных чисел узнает, что их можно представить в виде векторов или точек на плоскости. Однако до этой идеи, сколь простой бы она нам ни казалась, ученые дошли лишь в XIX в.

Говоря об эволюции понятия числа, мы отмечали, что не всегда первым толчком к расширению понятия числа были непосредственные практические потребности людей в узком смысле слова. Комплексные числа, как и отрицательные, возникли из внутреннего развития математической науки, из практики решения алгебраических уравнений.

<u>Практическое занятие.</u>

I. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

<u>Задание 1.</u> Проведите анализ содержания историко-математического материала в учебнике/учебниках по теме и результаты представьте в виде методических рекомендаций для учителей.

<u>Задание 2.</u> Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 8.

<u>Задание 3.</u> Выберите материал для презентации по теме 8.

III. Внеаудиторная работа.

<u>Задание 1</u>. Составьте глоссарий по теме 8.

<u>Задание 2</u>. Разработайте ЦОР по персоналиям.

<u>Тема 9. История возникновения и развития алгебры</u>

<u>Проблемные вопросы.</u>

1. История возникновения алгебраической символики.
2. Решение уравнений первой и второй степени.

3. Диофантовы уравнения.
4. Неравенства.
5. Дробные и отрицательные степени.
6. История возникновения логарифмов.
7. Прогрессии.

Теоретические сведения.

Алгебра возникла в связи с решением разнообразных задач при помощи уравнений. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведенных над искомыми и данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или системы нескольких уравнений, к нахождению искомых с помощью алгебраических действий над данными величинами. В алгебре изучаются общие свойства действий над величинами.

Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4000 лет назад в Древнем Вавилоне. Это было обусловлено потребностью решать практические задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера. Немало свойств, правил действий над величинами, алгебраических приемов знали ученые Древней Греции. Однако они выражали их в геометрической форме. Например, Евклид (ок. 300 г. до н.э.) занимался вопросами превращения одних фигур в другие, им равновеликие. В «Началах» решается задача о построении квадрата, равновеликого любому данному многоугольнику. При этом Евклид оперирует самими площадями, а не числами, которые выражают эти площади. То, что мы получаем с помощью алгебры, Евклид получал геометрическим путем. Извлечение квадратного корня из числа означало для Евклида построение стороны квадрата, площадь которого равна площади данного многоугольника. Следы геометрической алгебры мы встречаем и сейчас в терминах «квадрат» числа, «куб» числа. Процесс освобождения алгебры от геометрической формы и создание буквенной символики начался в Древней Греции, в трудах Диофанта (III в. до н. э.), и продолжился в Индии и в средние века в арабских странах и в Европе. Однако, только после того, как Виет (1540-1603) ввел буквенные обозначения не только для неизвестных, но и для обозначения известных величин и коэффициентов, после появления трудов Декарта (1596-1650), Ньютона (1643-1727) и других ученых этот длительный исторический процесс был в основном завершен. Именно благодаря введению буквенных коэффициентов стало возможным исследование алгебраических уравнений в общем виде и применение общих формул.

Задачи, сформулированные в общем виде, без конкретных числовых данных, встречаются уже в древности и в средние века. Например, в астрономическом трактате «Ариабхаттиам» индийского ученого Ариабхатты (род. в 476 г.) имеется следующая задача: «Два лица имеют равные имущества, причем каждое состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Однако как число вещей, так и сумма денег у них различны. Какова стоимость вещи?».[6]

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, но содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней. При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные. Рассмотрим в качестве примера одну из этих задач: «Найти два числа, зная, что сумма их равна 20, а произведение – 96».[7]

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т.е. $10+x$, другое же меньше, т.е. $10-x$. Разность между ними $2x$. Отсюда уравнение $(10+x)(10-x)=96$, или $100-x^2=96,\ x^2-4=0.$ Отсюда $x=2.$ Одно из искомых чисел равно12, другое 8. Решение $x=-2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа. Современный школьник, решая эту задачу, выберет в качестве неизвестной одно из искомых чисел, и придет в решению уравнения $y(20-y)=96,\ y^2-20y+96=0.$ Ясно, что выбирая в качестве неизвестного полуразность искомых чисел, Диофант упрощает решение; ему удается свести задачу к решению неполного квадратного уравнения.

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в упомянутом выше астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой (I в.). Другой индийский ученый Брахмагупта(VII в.) изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме: $ax^2+bx=c, a>0.$ В этом уравнении коэффициенты, кроме a, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим. В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных алгебраических задач, формулируемых часто в стихотворной форме.

В начале IX века выдающийся математик восточного средневековья Мухаммед ибн-Муса ал-Хорезми, родившийся во второй половине VIII в. и умерший между 830 и 840 гг, написал учебник, ставший родоначальником европейских учебников алгебры и давший этой науке не только название, но и совершенно новый характер.

Евклид вопросы алгебры решает геометрически. Диофант, которого называют «отцом греческой алгебры», искусственными приемами находит числа, удовлетворяющие заданным условиям, выражаемым уравнениями. Ал-Хорезми же пишет в предисловии к своей книге «Китаб ал-джабр ва-л-мукабала» («Книга противоположения и восстановления»), что он «составил это небольшое сочинение из наиболее легкого и полезного в науке счисления и притом такого, что требуется постоянно людям в делах о наследовании, наследственных пошлинах, при разделах имущества, в судебных процессах, в

[6] Глейзер Г.И. История математики в школе. VII-VIII кл. М.: Просвещение, 1982, С. 12.
[7] Там же, С. 21.

торговле и во всех их деловых взаимоотношениях, случаях измерения земель, проведения каналов, в геометрических вычислениях и других предметах различного рода и сорта…».

«Алгебра» Хорезми, сохранившаяся до нашего времени в арабской рукописи, переведена на разные языки. В теоретической части сочинения изложены правила алгебраических преобразований, дана классификация уравнений 2-й степени и приводятся правила их решения, доказанные геометрическим способом. Вторая часть содержит приложения алгебраических методов к решению задач практики.

Хорезми рассматривает шесть видов линейных и квадратных уравнений: 1) $ax^2 = bx$, 2) $ax^2 = c$, 3) $bx = c$, 4) $ax^2 + bx = c$, 5) $ax^2 + c = bx$, 6) $ax^2 = bx + c$, где $a, b, c > 0$, и формулирует правила их решения (выраженные в словесной форме); правила сопровождаются многочисленными примерами.

Такая классификация объясняется тем, что Хорезми, как и другие ученые его времени, требовал, чтобы все члены уравнения были положительными. Для приведения к одному из этих видов Хорезми вводит вводит два действия: *ал-джабр* (т.е. восполнение) и *ал-мукабала* (т.е. противопоставление). Первое состоит в перенесении отрицательного члена из одной части уравнения в другую, второе – в приведении подобных членов.

От термина «ал-джабр», с которым европейские математики познакомились по латинским переводам восточных алгебраических сочинений, возникло современное слово «алгебра».

Большая часть книги отведена решения практических задач, чего совершенно избегали греческие математики.

Крупнейший математик средневековья Абу Райхан Беруни (973 – 1048) в сочинении «Книга вразумления начаткам науки о звездах», один из разделов посвятил рассмотрению понятий алгебры. Беруни дает определение неизвестной и ее степеней, формулирует правило знаков, разъясняет алгебраические операции, в том числе действия «*ал-джабр*»(«*восполнение»*, т.е. перенесение отрицательного члена уравнения в противоположную часть для получения в обеих частях положительных членов), и «*ал-мукабала»* («*противопоставление»,* т.е. приведение подобных членов уравнения), приводит традиционную классификацию квадратных уравнений, впервые введенную Хорезми. Здесь же разъясняется так называемое «правило двух ложных положений», или «правило двух ошибок», широко применявшееся в средневековой математике для решения задач на линейные уравнения: если требуется решить уравнение $ax + b = c,$ придаем неизвестной x произвольное значение («ложные положения») x_1 и x_2; тогда, подставляя, получим: $ax_1 + b = c + d_1, ax_2 + b = c + d_2,$ где d_1 и d_2 – первая и вторая «ошибки»; отсюда $\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{d_1}{d_2}$ и $x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}$. Таким образом находится истинное значение неизвестной.

В Европе формулы решения квадратных уравнений по образцу ал-Хорезми были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи (ок. 1170 - ок. 1250). Это объемный труд, в котором отражено влияние математики как стран ислама, так и Древней Греции, отличается и полнотой, и ясностью изложения. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел. Его книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из «Книги абака» переходили почти во все европейские учебники XVI-XVII вв. и частично XVIII в.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду $x^2+bx=c,$ при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b,c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М.Штифелем (ок. 1496-1567).

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

О происхождении терминов и обозначений.

К умножению равных сомножителей приводит решение многих задач. Понятие степени с натуральным показателем возникло уже в Древней Греции, но современные обозначения (типа a^4, a^5) в XVII в. ввел Декарт.

Дробные показатели степени и наиболее простые правила действий над степенями с дробным показателями встречаются в XIV в. у французского математика Н. Орема (1323-1382).

Начиная с XIII в. итальянские и другие европейские математики обозначали корень латинским словом Radix (корень) или сокращенно R. В XV в. Н. Шюке писал $R^2 12$ вместо $\sqrt{12}$.

В примере из книги Бомбелли (1572) используется следующее обозначение: $R.c.\,\mathrm{L}\,R.q.4352\,p.16\,\rfloor \quad m.R.c.\,\mathrm{L}\,R.q.4352\,m.16\,\rfloor$, которой соответствует следующая современная запись: $\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}.$

В 1626 г. нидерландский математик А. Жирар ввел близкое к современному обозначение $\overset{2}{\vee}, \overset{3}{\vee}$ и т. д. Это обозначение стало вытеснять знак R. Лишь в 1637 г. Рене Декарт соединил знак корня с горизонтальной чертой, применив в своей «Геометрии» современный знак корня $\sqrt{}$. Этот знак вошел во всеобщее употребление лишь в начале XVIII в.

Потребность в сложных расчётах в XVI веке быстро росла, и значительная часть трудностей была связана с умножением и делением многозначных чисел, а также извлечением корней. В конце века нескольким математикам, почти одновременно, пришла в голову идея: заменить трудоёмкое умножение на простое сложение, сопоставив с помощью специальных таблиц геометрическую и арифметическую прогрессии, при этом геометрическая будет исходной. Тогда и деление автоматически заменяется на неизмеримо более простое и надёжное вычитание, а извлечение корня степени n сводится к делению логарифма подкоренного выражения на *n*. Первым эту идею опубликовал в своей книге «Arithmetica integra» Михаэль Штифель, который, впрочем, не приложил серьёзных усилий для реализации своей идеи.

В 1614 году шотландский математик-любитель Джон Непер (1550-1617) опубликовал на латинском языке сочинение под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов». В нём было краткое описание логарифмов и их свойств, а также 8-значные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов, с шагом 1'. Термин логарифм, предложенный Непером, утвердился в науке. Теорию логарифмов Непер изложил в другой своей книге «Построение удивительной таблицы логарифмов».

К сожалению, все значения таблицы Непера содержали вычислительную ошибку после шестого знака. Однако это не помешало новой методике вычислений получить широчайшую популярность, и составлением логарифмических таблиц занялись многие европейские математики, включая Кеплера. Уже спустя 5 лет, в 1619 г., лондонский учитель математики Джон Спайделл переиздал таблицы Непера, преобразованные так, что они фактически стали таблицами натуральных. Термин «натуральный логарифм» предложил итальянский математик Пьетро Менголи в середине XVI века.

В 1620-е годы Эдмунд Уингейт и Уильям Отред изобрели первую логарифмическую линейку, до появления карманных калькуляторов – незаменимый инструмент инженера.

Близкое к современному понимание логарифмирования – как операции, обратной возведению в степень – впервые появилось у Валлиса и Иоганна Бернулли, а окончательно было узаконено Эйлером в XVIII веке. В книге «Введение в анализ бесконечных» (1748) Эйлер дал современные определения как показательной, так и логарифмической функций, привёл разложение их в степенные ряды, особо отметил роль натурального логарифма. Эйлеру принадлежит и заслуга распространения логарифмической функции на комплексную область.

Практическое занятие.

I. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

Задание 1. Разработайте сценарий внеклассного мероприятия с использованием задач историко-математического характера по изучаемой теме.

Задание 2. Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 9.

Задание 3. Выберите материал для презентации по теме 9.

III. Внеаудиторная работа.

Задание 1. Составьте глоссарий по теме 9.

Задание 2. Разработайте ЦОР по персоналиям.

Тема 10. Развитие понятия функции

Проблемные вопросы.

1. Понятие о конструктивно заданных функциях в Древней Греции (идея зависимости некоторых величин геометрической природы).
2. Метод координат П.Ферма и Р.Декарта (17 век) и его роль в развитии понятия «функция».
3. Введение термина «функция» Г.Лейбницем в рамках геометрических представлений.
4. Отход от геометрических образов при определении функции (И.Бернулли, 1718г.).
5. Общий подход к понятию функция у Л.Эйлера (функция как зависимость одной переменной от другой).
6. Развитие понятия «функция»в трудах Н.И.Лобачевского и П.Дирихле (функция как соответствие между числовыми множествами).
7. Функция Дирихле. Вклад Д.Бернулли и Ж.Фурье.
8. Дальнейшее развитие понятия функции как соответствия между множествами различной природы.

Теоретические сведения.

Начиная с XVII в. одним из важнейших понятий является понятие функции. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира. Идея функциональной зависимости восходит к древности, она содержится уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действий над числами, в первых формулах для нахождения площади и объема тех или иных фигур. Примерами табличного задания функции могут служить астрономические таблицы вавилонян, древних греков и индийцев, а примерами словесного задания функции – теорема о постоянстве отношения площадей круга и квадрата на его диаметре или античные определения конических сечений, причем сами эти кривые выступали в качестве геометрических образов соответствующей зависимости. Путь к появлению понятия функции заложили в XVII веке французские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт; они разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание. Введено было единое обозначение: неизвестных – последними буквами латинского алфавита: x, y, z,… известных – начальными буквами того же алфавита: a, b, c и т.д.

В своей «Геометрии» в 1637 году Декарт дает понятие функции, как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы; он систематически рассматривал лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться, таким образом, с понятием аналитического выражения - формулы. В 1671 году Ньютон под функцией стал понимать переменную величину, которая изменяется с течением времени. В «Геометрии» Декарта, в работах Ферма, Ньютона и Лейбница, понятие функции носило по существу интуитивный характер и было связано либо с геометрическими, либо с механическими представлениями: ординаты точек кривых – функция от абсцисс *(x);* путь и скорость – функция от времени *(t)* и т.п. В XVIII веке появляется новый взгляд на функцию как на формулу, связывающую одну переменную с другой. Это так называемая аналитическая точка зрения на понятие функции.

Окончательную формулировку определения функции с аналитической точки зрения сделал в 1748 году ученик Бернулли Эйлер (во «Введении в анализ бесконечного»): «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств».

В 1837 году немецкий математик П.Л. Дирихле так сформулировал общее определение понятия функции: *«y* есть функция переменной *x* (на отрезке $a \le x \le b$), если каждому значению *x* на этом отрезке соответствует совершенно определенное значение *y,* причем безразлично каким образом установлено это соответствие – аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами».

Во второй половине XIX века после создания теории множеств в понятие функции, помимо идеи соответствия была включена и идея множества. Таким образом, в полном своем объеме общее определение понятия функции формулируется следующим образом: если каждому элементу *x* множества *A* поставлен в соответствие некоторый определенный элемент *y* из множества *B,* то говорят, что на множестве *A* задана функция $y = f(x)$, или что множество *A* отображено на множество *B.* В первом случае элементы *x* множества *A* называют значениями аргумента, а элементы их множества *B* – значениями функции; во втором случае *x* – прообразы, *y* – образы.

Дальнейшее развитие математической науки в XIX веке основывалось на общем определении функции Дирихле, ставшим классическим.

Практическое занятие.

I. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

Задание 1. Проведите сравнительный анализ содержания нескольких (по крайней мере, трех) школьных учебников разных авторов и выясните, какая информация о великих математиках в них присутствует и в каком виде. Составьте глоссарий персоналий. В случае необходимости дополните глоссарий, обосновывая свой вариант.

Задание 2. Составьте мини-тест для контроля знаний по теме 10.

Задание 3. Выберите материал для презентации по теме 10.

III. Внеаудиторная работа.

Задание 1. Составьте глоссарий по теме 10.

Задание 2. Разработайте ЦОР по персоналиям.

Тема 11. Развитие геометрии

Проблемные вопросы.

1. Начальная стадия геометрии.
2. «Начала» Евклида.
3. Практическая геометрия Древнего Китая и Древней Индии.

4. Построение изображений плоских и пространственных фигур.

5. История аксиоматического построения геометрии.

6. Аналитическая геометрия Декарта и Ферма.

Теоретические сведения.

Первое сочинение, содержащее простейшие геометрические сведения, дошло до нас из Древнего Египта. Оно относится к XVII в. до н. э. В нем содержатся правила вычисления площадей и объемов некоторых фигур и тел. Эти правила были получены практическим путем, без какого-либо логического доказательства их справедливости.

Становление геометрии как математической науки произошло позднее и связано с именами греческих ученых Фалеса (ок. 625-547 гг. до н. э.), Пифагора (ок. 580-500 гг. до н. э.), Демокрита (ок. 460-370 гг. до н. э.), Евклида (III в. до н.э.) и др.

Усвоив все конкретные знания, полученные в Египте, Вавилоне греки превратили геометрию в дедуктивную науку, основанную на строгих доказательствах.

В знаменитом сочинении Евклида «Начала» были систематизированы основные известные в то время геометрические сведения. Главное же – в «Началах» был развит аксиоматический подход к построению геометрии, который состоит в том, что сначала формулируются основные положения (аксиомы), а затем на их основе посредством рассуждений доказываются другие утверждения (теоремы). Полученные результаты используются как на практике, так и в дальнейших научных исследованиях. Некоторые из аксиом, предложенных Евклидом, и сейчас используются в курсах геометрии. Часть из них в современной формулировке имеется в нашем курсе. Например: «Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна».

Большой вклад в дальнейшее исследование различных вопросов геометрии внесли Архимед (ок. 287-212 гг. до н. э.), Аполлоний (III в. до н. э.) и другие древнегреческие ученые.

Понятие фигуры является одним из основных в геометрии. Геометрические фигуры встречаются в древнегреческих папирусах и древневавилонских клинописных текстах, написанных около 4000 лет назад. В них имеются задачи на вычисление площадей и объемов отдельных фигур. Обозначение прямых, концов отрезков и вершин углов фигур буквами берет начало от геометров Древней Греции. Еще в древности стали вводить некоторые знаки и обозначения для геометрических фигур и понятий.

Простейший из многоугольников – треугольник – играет в геометрии особую роль. В Древней Греции учение о треугольниках развивалось в ионийской школе, основанной Фалесом и в школе Пифагора. Уже Фалес доказал, что треугольник определяется одной стороной и двумя прилежащими к ней углами. Учение о треугольниках полностью изложено в «Началах» Евклида.

Центральное место в геометрии треугольника играют свойства замечательных точек и линий. Исследование свойств треугольника, связанных с этими и другими точками положило начало созданию новой ветви элементарной математики – «геометрии треугольника», или «новой геометрии треугольника», одним из основателей которого был Леонард Эйлер. В 1765 г. Л.Эйлер доказал, что в любом треугольнике ортоцентр, барицентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой. Ее позже назвали «прямой Эйлера».

У каждого треугольника имеется и притом, единственная, окружность девяти точек. Это окружность, проходящая через следующие три тройки точек, положение которых определено для треугольника: основания его высот; основания его медиан; середины отрезков прямых от точки пересечения его высот до его вершин. Эта окружность, найденная в XVIII в. великим ученым Л.Эйлером поэтому ее часто называют окружностью Эйлера. Эта окружность заново была открыта в следующем столетии, учителем провинциальной гимназии в Германии, звали его Карл Фейербах. К.Фейербах установил, что центр этой окружности лежит на «прямой Эйлера».

В древних египетских и вавилонских математических документах встречаются такие многоугольники как: квадраты, прямоугольники, равнобедренные и прямоугольные трапеции.

Термин «параллелограмм» греческого происхождения и был введен Евклидом. Понятие параллелограмма и некоторые его свойства были известны еще пифагорейцами.

В «Началах» Евклида доказывается теорема: в параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны, а диагональ разделяет его пополам. Но у Евклида нет упоминания о том, что точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам. Он не рассматривает ни прямоугольника, ни ромба. Полная теория параллелограммов разработана к концу средних веков, а в учебниках появилась лишь в XVII в. Хотя вся теория основывается на аксиоме параллельности Евклида.

Трапеция – слово греческое означает столик, обеденный стол (трапеза, трапезная), В «Началах» Евклида термин применялся в другом смысле: любой четырехугольник (не параллелограмм).

Еще древним египтянам было известно о том, что средняя линия трапеции равна полусумме ее основания. Это понятие было знакомо и землемерам Вавилона, а также встречается и в трудах Герона Александрийского.

Определение площадей геометрических фигур – одна из древнейших практических задач. Правильный подход был найден не сразу. Еще 4-5 тысяч лет назад вавилоняне умели определять площадь прямоугольника и трапеции в квадратных единицах. Квадрат служил эталоном при измерении площадей.

В своих «Началах» Евклид не употребляет слова площадь так как он под словом «фигура» понимает часть плоскости, ограниченной замкнутой линией. Евклид, не выражал площадь числом, а сравнивал площади разных фигур между собой. Так измеряли площади в Древней Греции.

Окружность – самая простая из кривых линий. Это одна из древнейших геометрических фигур. Философы древности придавали ей большое значение. Согласно Аристотелю, небесная материя, из которой состоят планеты и звезды, как самая совершенная, должна двигаться по самой совершенной линии – окружности. Так считали астрономы сотни лет, только в XVII в. это ошибочное мнение опровергли ученые Коперник, Галилей, Кеплер, Ньютон.

Качественно новый этап в развитии геометрии начался лишь много веков спустя – в XVII в. н. э. – и был связан с накопленными к этому времени достижениями алгебры. Выдающийся французский математик и философ Р. Декарт (1596-1650) предложил новый подход к решению геометрических задач. В своей «Геометрии» 1637) он ввел метод координат, связав геометрию и алгебру, что позволило решать многие геометрические задачи алгебраическими методами.

В развитии геометрии важную роль сыграла аксиома, которая в «Началах» Евклида называлась пятым постулатом. Формулировка пятого постулата у Евклида весьма сложна. Поэтому обычно его заменяют эквивалентной ему аксиомой параллельных прямых: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Много веков усилия большого числа ученых были направлены на доказательство пятого постулата. Это объяснялось тем, что число аксиом стремились свести к минимуму. Ученые думали, что пятый постулат можно доказать как теорему, опираясь на остальные аксиомы.

В конце XVIII в. у некоторых геометров возникла мысль о «возможности доказать пятый постулат. Решение этого вопроса было найдено великим русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским (1792-1856).

Вся творческая жизнь нашего выдающегося соотечественника была связана с Казанским университетом, где он учился, затем был профессором, а с 1827 г. – ректором университета. Его очень рано заинтересовала геометрия, и он, как и многие его предшественники, пытался доказать пятый постулат Евклида. Лобачевский предпринял попытку доказать пятый постулат от противного: он предположил, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести несколько прямых, не пересекающих данную. Исходя из этого, он попытался получить утверждение, которое противоречило бы аксиомам или полученным из них теоремам. Если бы такое утверждение удалось получить, то это означало бы, что предположение неверно, а верно противоположное утверждение: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данную. Тем самым пятый постулат Евклида был бы доказан.

Но Лобачевский не получил противоречивых утверждений. На основании этого им был сделан замечательный вывод: можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида.

Такая геометрия им была построена. Ее называют теперь геометрией Лобачевского. Сообщение об открытии новой геометрии было сделано Лобачевским в 1826 г.

К аналогичным выводам пришел венгерский математик Я. Бойяи (1802-1860), но он свои результаты опубликовал несколько позже, в 1832 г. В рукописях великого немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777-1855) высказывались идеи, близкие к идеям Лобачевского и Бойяи. Однако он, опасаясь критики, не решился их обнародовать.

Открытие нашим великим соотечественником новой геометрии оказало огромное влияние на развитие науки. Геометрия Лобачевского широко используется в естествознании. Неизмеримо влияние новой геометрии на развитие самой геометрии. Наиболее ярко оно выразилось в дальнейшем углублении наших представлений о пространстве: ведь до Лобачевского казалось, что геометрией окружающего нас пространства может быть только евклидова геометрия. Но так как возможна другая геометрия, то истинность той или иной геометрии может быть проверена лишь опытным путем. Современной наукой установлено, что евклидова геометрия лишь приближенно, хотя и с весьма большой точностью, описывает окружающее нас пространство, а в космических масштабах она имеет заметное отличие от геометрии реального пространства.

Бурное развитие математики в XIX в. привело к ряду замечательных открытий в геометрии. Так, выдающимся немецким математиком Б. Риманом (1826-1866) была создана новая геометрия, обобщающая и геометрию Евклида, и геометрию Лобачевского. Возникают вопросы: являются ли геометрия Евклида и геометрия Лобачевского непротиворечивыми? Не может ли так случиться, что при дальнейшем развитии как той, так и другой геометрии получатся противоречивые выводы? Этот вопрос тесно связан с важными проблемами непротиворечивости, полноты и независимости систем аксиом, определяющих ту или иную геометрию. Перечисленные проблемы относятся к предмету, называемому «Основания геометрии».

Крупнейший вклад в решение этих проблем внес великий немецкий математик Д. Гильберт (1862-1943).

Отметим, что в настоящее время геометрия широко используется в самых разнообразных разделах естествознания: в физике, химии, биологии и т. д. Неоценимо ее значение в прикладных науках: в машиностроении, геодезии, картографии. Методы геометрии широко применяются практически во всех разделах науки и техники и, конечно же, в самой математике.

Практическое занятие.

I. Контроль за усвоением учебного материала (проверочная работа – 15 мин.).

II. Практическая работа (75 мин.).

Задание 1. Проведите анализ содержания историко-математического материала в учебнике/учебниках и результаты представьте в виде методических рекомендаций для учителей.

Задание 2. Изучите материал статьи и разработайте на основе предложенного историко-математического материала элективный курс: *Скопец З.А. Теорема Марлея /Геометрические миниатюры. Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1990. С.210-212.*

«Любителям математики хорошо известна эта удивительная теорема элементарной математики о трисектрисах треугольника. Она была сформулирована американским математиком Ф. Морлеем. Первые доказательства теоремы Морлея были опубликованы в 1909 г. Позднее появилось более десятка новых доказательств, но довольно сложных по сравнению с ее простой формулировкой.

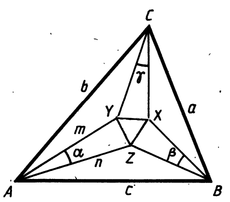


Рис. 1

Теорема. *Трисектрисы углов треугольника, примыкающие к одной стороне, попарно пересекаются в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника.*

Трисектрисами угла называют прямые, проходящие через вершину угла и делящие его на три равные части.

Доказательство. Пусть трисектрисы углов данного треугольника *ABC*, примыкающие к сторонам *BC*, *CA* и *AB*, пересекаются в точках *X, Y, Z* (рис.1).

Введем обозначения: $A = 3\alpha, B = 3\beta, C = 3\gamma, |AY| = m, |AZ| = n.$ Длины сторон треугольника *ABC* будем обозначать через $a, b, c.$

Вычислим величины углов *AZY* и *BZX*. Так как $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^o$, то $\alpha + \beta + \gamma = 60^o$, и $\alpha + \beta = 60^o - \gamma.$ Применив теорему синусов к треугольнику *AZB*, получим:

$\frac{n}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, отсюда $n = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c\sin\beta}{\sin(60^o-\gamma)}.$

Аналогично находим, что

$m = \frac{b\sin\gamma}{\sin(60^o-\beta)}.$

Из треугольника *ABC* по теореме синусов имеем: $\frac{b}{c} = \frac{\sin 3\beta}{\sin 3\gamma}.$

Следовательно, $\frac{m}{n} = \frac{\sin 3\beta \sin\gamma \sin(60^o-\gamma)}{\sin 3\gamma \sin\beta \sin(60^o-\beta)}.$ Упростим это равенство, применив тождество $\sin 3\beta = 4\sin\beta\sin(60^o+\beta)\sin(60^o-\beta).$ Получим: $\frac{m}{n} = \frac{\sin(60^o+\beta)}{\sin(60^o+\gamma)}.$

Теперь уже без всяких вычислений можно доказать, что интересующие нас углы *AZY* и *AYZ* треугольника *AYZ* равны $60^o+\beta$ и $60^o+\gamma.$

Действительно, так как $\alpha+\beta+\gamma = 60^o$, то существует треугольник с углами $60^o+\beta$, $60^o+\gamma$ и α, а отношение его сторон, заключающих угол α, равно $\frac{\sin(60^o+\beta)}{\sin(60^o+\gamma)} = \frac{m}{n}$. Поскольку величина угла $YAZ = \alpha$, треугольник *AYZ* подобен такому треугольнику. Тогда величина угла $AZY = 60^o+\beta$ и величина угла $AYZ = 60^o+\gamma$.

Точно так же докажем, что величина угла $BZX = 60^o+\alpha.$ А так как величина угла $AZB = 120^o+\gamma$ и сумма углов $YZA + AZB + BZX = (60^o+\beta)+(120^o+\gamma)+(60^o+\alpha) = 300^o$, то величина угла $XZY = 60^o.$

Аналогично докажем, что каждый из двух других углов треугольника XYZ также равен $60^o.$ Значит, треугольник XYZ равносторонний.

При попытке доказать теорему Морлея геометрически возникают большие трудности. Их удается преодолеть, если действовать в обратном порядке: сначала построить равносторонний треугольник XYZ, а затем исходный треугольник *ABC*.

Теорему Морлея можно обобщить, если рассматривать, кроме внутренних, еще и внешние трисектрисы треугольника (прямые, делящие на три равные части внешние углы треугольника, а также углы, дополняющие углы треугольника до 360^o).

Знаменитый французский математик А. Лебег (1875-1941), используя элементарные средства, доказал, что среди точек пересечения всех трисектрис треугольника можно указать 27 троек, являющихся вершинами равносторонних треугольников.

В частности, трисектрисы внешних углов треугольника ABC, примыкающих к одной и той же стороне, попарно пересекаются в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника (рис. 2). Простое и экономичное доказательство можно получить, применив тригонометрию. Если X_1, Y_1, Z_1 – точки пересечения указанных трисектрис, то, пользуясь теоремой синусов, как в приведенном выше доказательстве, устанавливаем, что углы Z_1 и Y_1 треугольника AY_1Z_1 равны соответственно β и γ, а каждый из углов треугольника $X_1Y_1Z_1$ равен 60^o. Кроме того, легко установить, что стороны треугольника $X_1Y_1Z_1$ соответственно параллельны сторонам треугольника XYZ.

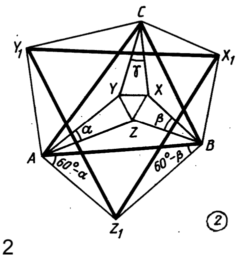


Рис. 2

Эффективное доказательство полной обобщенной теоремы Морлея можно провести, используя аппарат комплексных чисел».

III. Внеаудиторная работа.

Задание 1. Составьте глоссарий по теме «Развитие геометрии».

Задание 2. Разработайте ЦОР по персоналиям.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Контрольная работа

Вариант 1

1. Происхождение письменной нумерации: цифры и числа.
2. История зарождения геометрии. Геометрия древних египтян.
3. История аксиоматического построения геометрии.
4. Предложите сценарий факультативного занятия по теме «Аксиоматическое построение арифметики» с использованием историко-математического материала.
5. Л.Ф. Магницкий и его «Арифметика»

Вариант 2

1. Происхождение письменной нумерации. Цифры и числа.
2. Решение уравнений первой и второй степени с древних времён и до наших дней.
3. Предложите список задач для решения на занятии математического кружка по теме «Математика Древней Греции: от Фалеса до Евклида»
4. Аналитическая геометрия Декарта и Ферма.
5. Предложите сценарий занятия математического кружка по теме «Биографии великих математиков».

Вариант 3

1. Зарождение арифметики. Арифметические действия над числами. Арифметические задачи.
2. Составьте фрагмент урока математики в 5 классе с использованием историко-математического материала по арифметике.

3. Охарактеризуйте основные этапы развития математики.
4. Геометрия Древней Греции: Пифагор, Герон.
5. Предложите сценарий занятия математического кружка по решению одной из трёх знаменитых задач древности.

Вариант 4

1. История возникновения дробных чисел.
2. История возникновения алгебраической символики.
3. Предложите сценарий занятия математического кружка по теме «Старинные русские меры».
4. Прогрессии в историческом аспекте.
5. Решите:

А) задачу № 79 из папируса Райнда (текст адаптирован): $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 =$

Б) шахматную задачу арабского математика XIII века Ибн Албанни:
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} =$

Вариант 5

1. История возникновения иррациональных чисел.
2. Составьте фрагмент урока математики в 5-6 класса с использованием историко-математического материала.
3. «Начала» Евклида.
4. Сформулируйте три знаменитые задачи древности.
5. История зарождения и развития логики от Аристотеля до наших дней.

Вариант 6

1. Предложите сценарий занятия математического кружка по теме «Логические задачи» с использованием историко-математического материала.
2. Предложите сценарий занятия математического кружка по теме «Пифагор и музыка» (или «Фигурные числа»).
3. История возникновения комплексных чисел.
4. Составьте фрагмент факультативного занятия по теме «Комплексные числа» с использованием историко-математического материала.
5. Решение уравнений первой и второй степени с древних времён и до наших дней.

Вариант 7

1. Изобретение логарифмов.
2. Абак и другие приборы для счёта.
3. Предложите сценарий факультативного занятия по теме «Русские счёты и десятичная система счисления» с описанием возможных наглядных пособий.
4. Перечислите предпосылки возникновения математики. Становление арифметики и геометрии.
5. Расшифруйте следующую запись:

$$\begin{array}{r} 2R + 1 \\ 3R \div 2 \\ \hline 6Q + 3R \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \div\, 4R \div 2 \\ \hline 6Q \div 1R \div 2 \end{array}$$

Вариант 8

1. Н.И. Лобачевский и его геометрия.
2. Аналитическая геометрия Декарта и Ферма.
3. Предложите сценарий занятия математического кружка по теме «Биографии великих математиков».
4. История зарождения и развития комбинаторики и теории вероятностей.
5. Предложите сценарий факультативного занятия (или занятия математического кружка) по теме «Комбинаторные задачи» с использованием историко-математического материала

Вариант 9

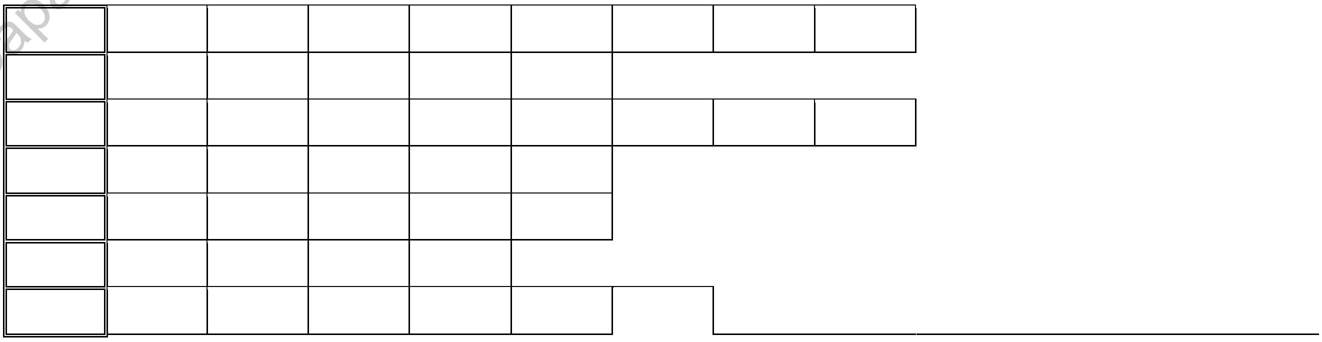
1. Задачи и особенности использования историко-математического материала на уроках математики.
2. Устный счёт и различные системы счисления у древних народов.
3. Составьте фрагмент урока по алгебре по теме «Линейная функция» («Квадратичная функция») с использованием историко-математического материала.
4. Развитие в историческом аспекте функциональной линии.
5. На картине «Урок арифметики» Н.П. Богданова-Бельского изображён «урок устного счёта» в школе для крестьянских детей второй половины XIX века. На доске записан пример, поясните его решение:

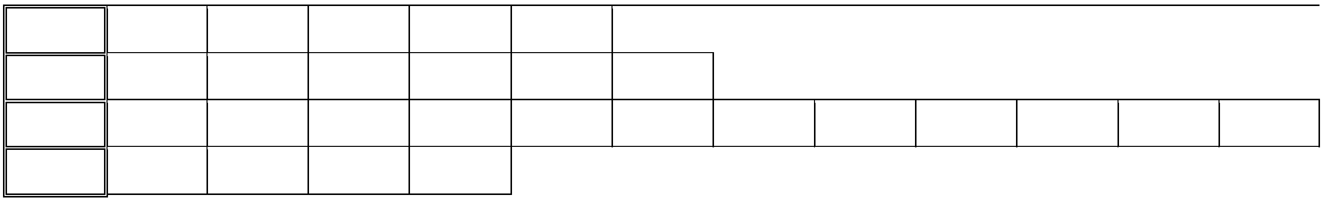
$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{315}$$

Вариант 10

1. История возникновения отрицательных чисел.
2. Составьте фрагмент урока математики в 5 классе с использованием историко-математического материала по арифметике.
3. Славянская нумерация. Позиционная система счисления в России.
4. Создание Российской Академии наук. Леонард Эйлер
5. Разгадайте кроссворд «Практические основания геометрии» и составьте сценарий занятия математического кружка с использованием этого кроссворда.

Разгадав правильно кроссворд, вы узнаете, как в Древнем Египте называли землемера.





1. Одна из древнейших математических наук?
2. Основоположник аксиоматической теории?
3. Основное отношение отрезков?
4. Основное неопределяемое понятие евклидовой геометрии пришедшее на смену понятию отрезок – основному неопределяемому понятию практических оснований геометрии?
5. Древнегреческий геометр создатель первой математической теории естествознания, теории отношения несоизмеримых величин, метода «исчерпывания» нахождения площадей и объёмов?
6. Основная характеристика отрезка?
7. Одно из основных неопределяемых понятий практических оснований геометрии?
8. Основной научный труд Евклида?
9. Положение, принимаемое без доказательства в качестве исходного, отправного для данной теории, неоспоримая истина?
10. Фигура, наиболее часто встречающаяся в практике; форму этой фигуры имеет, например, лист бумаги?
11. Одно из основных неопределяемых понятий практических оснований геометрии?

Вопросы к курсу

1. Четыре периода развития математики.
2. Современный этап развития математического знания.
3. Предпосылки возникновения математики в Древнем мире.
4. Происхождение арифметики. Счёт у древних людей.
5. Устный счёт и различные системы счисления у древних народов.
6. Славянская нумерация. Позиционная система счисления в России.
7. Происхождение геометрии.
8. Развитие цивилизации и математических знаний на Древнем Востоке и в Древнем Египте.
9. Арифметико-алгебраический характер вавилонской математики.
10. Папирус Райнда и Московский папирус. Дроби в Древнем Египте.
11. Возникновение и развитие геометрии в Междуречье и Древнем Египте.
12. Развитие математики в древней Индии и Китае.
13. Арифметика в Античном мире. Простые числа.
14. Геометрия в Античном мире. Пифагор и его школа. О теореме Пифагора.
15. Евклид и его «Начала».
16. Величайший математик и физик древности Архимед.
17. История возникновения алгебраической символики.
18. Решение уравнений первой и второй степени. Диофантовы уравнения.
19. Алгебраическая символика Виета и Декарта.
20. История появления дробных и отрицательных степеней.

21. Изобретение логарифмов.
22. Понятие о конструктивно заданных функциях в Древней Греции
23. Введение термина «функция» Г.Лейбницем в рамках геометрических представлений. Подход к определению функции И.Бернулли и Л.Эйлера.
24. Развитие понятия «функция» в трудах Н.И.Лобачевского, П.Дирихле, Д.Бернулли и Ж.Фурье. Дальнейшее развитие понятия функции как соответствия между множествами различной природы.
25. Начала тригонометрии в трудах Птолемея Вклад в развитие тригонометрии математиков Индии и арабских учёных.
26. Таблицы синусов ал-Хорезми. «Канон» ал-Беруни. Сочинение ат-Тути «Трактат о полном четырёхстороннике».
27. Развитие тригонометрии в Европе. Современный вид тригонометрии в трудах Л.Эйлера.
28. Развитие математической логики в трудах древнегреческих математиков.
29. Развитие формальной логики. Логическое исчисление Лейбница. Создание современной символьной логики. Развитие формальной логики. Формализованный язык и его модификации.
30. Развитие аксиоматического метода в математике.
31. Аксиоматический метод математики на современном этапе её развития.
32. Предпосылки создания высшей математики в работах И. Кеплера, Р. Декарта, П. Ферма.
33. Предпосылки создания высшей математики. Работы И. Кеплера, Р. Декарта, П. Ферма.
34. Создание неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевским.
35. Интерпретации геометрии Лобачевского (Э.Бельтрами, Ф.Клейн, А.Пуанкаре). Геометрия Лобачевского и работы А.Эйнштейна по теории относительности.
36. Л.Ф. Магницкий и его «Арифметика»
37. Развитие математики в России в XVIII веке. Создание Российской Академии наук. Работы Леонарда Эйлера.
38. Развитие математики русскими учёными в XIX веке.
39. Развитие математики русскими учёными в XX веке.
40. Математика и информатика, компьютерная математика. Прикладная математика.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Виленкин Н.Я. Методологические основы математики. Современные основы школьного курса математики, М.1980, с. 19-20.
2. Гильмуллин М.Ф. История математики. Учебное пособие. – Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2009.
3. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII-VIII кл. М.: Просвещение, 1982.
4. Глейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей/ под ред. Молодшего В.Н. – М., 1964, С.27.
5. Гнеденко Б.В. Введение в специальность математика. – М.: Наука, 1991, С. 217, 224.
6. Гнеденко Б.В. Роль математики в развитии современного естествознания. – Кн. Диалектика в науках о неживой природе, М.,1964.
7. Колмогоров А.Н. Математика /Большая Советская Энциклопедия. Т. 26. – М.: 1954.
8. Программа курса истории математики, читаемого в Московском университете приват-доцентом В.В. Бобыниным. – М., 1890.
9. Рыбников К.А. История математики, I. – М.: Московский Университет, 1960.
10. Скопец З.А. Теорема Марлея /Геометрические миниатюры. Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1990. С.210-212.

Развитие тригонометрии

Начала тригонометрии в труде Птолемея «Великое математическое построение астрономии». Вклад в развитие тригонометрии математиков Индии и арабских учёных. Таблицы синусов ал-Хорезми. «Канон» ал-Беруни. Сочинение ат-Тути «Трактат о полном четырёхстороннике» (1260 г.). развитие тригонометрии в Европе. Сочинение Региомонтана «Пять книг о всевозможных построениях» (15 век). Современный вид тригонометрии в трактате «Введение в анализ» (1748 г.) Л.Эйлера.

Развитие математической логики.

Логические рассуждения в доэллинской математике. «Эвристические» рассуждения греческих математиков: «Трактат о методе» Архимеда. Доказательства Евклида, Апполония. Развитие и выявление сути «дедуктивного метода» в пифагорейской школе (4 -5 веках до н.э.). развитие формальной логики. Формулировка принципа исключения третьего (Парменид, 5 век до н.э.). Доказательство Зенона. Трудности в период формирования логики: от элеатов до Платона и Аристотеля. Силлогизмы Аристотеля. Логическое исчисление Лейбница. Дж.Буль – создатель современной символьной логики. Работы Джевонса (1864 г.), де Моргана (1858, 1960 гг.), К.С.Пирса (1867 г.), Шрёдер. Работы Фреге, Пеано («Формуляр математики»). Школа Пеано. Формализованный язык (Рассел, Уайтхэд) и его модификации (Лукасевич, Гильберт).

Развитие стохастики, комбинаторики, теории вероятностей.

Зарождение стохастики. Вклад русских математиков А.А.Маркова, А.Н.Колмогорова, А.Я. Хинчина и американских математиков В.Феллерона, Н.Винера, Дж.Дуб в развитие стохастики. Современный этап развития науки. Возникновение и развитие комбинаторики и теории вероятностей. Я.Бернулли: закон больших чисел. Приложение теории вероятностей к анализу ошибок наблюдений. Лаплас и Пуассон. Теория вероятностей и математическая статистика во второй половине 19 века: П.Л.Чебышев, А.А.Марков, А.М.Ляпунов. 20 век: теория случайных процессов, теория информации и теория игр.

Развитие аксиоматического метода.

Практические основания геометрии: как зарождался аксиоматический метод? «Начала» Евклида – пример первого дедуктивного построения научной теории. О заслугах Гаусса в разработке аксиоматики. Я.Бояи, Н.И.Лобачевский – неевклидовые геометрии. Интерпретация геометрии Лобачевского (Бельтрами, Клейн, Пуанкаре). Аксиоматическое построение арифметики Джузеппе Пеано. Попытка обоснования Давида Гильберта математики путём её полной формализации. Вклад К.Гёделя в развитие аксиоматического метода. Начало 20 века: трактат Н.Бурбаки «Начала математики». Аксиоматический метод математики на современном этапе её развития.

Математическое образование в России в историческом аспекте.

Школа и математическое образование до 17 века. Реформы Петра Великого в области науки и образования и преподавание математики. Математическое образование в России в 18 веке. Университетский устав 1804 года и преподавание математики в первой половин и в середине 19 века. Борьба за обновление содержания математического образования в конце 19 – начале 20 века. Вопросы преподавания математики в периодической печати России в конце 19 – начале 20 века. Математика в советской школе с 1917 по 1988 годы.

Современный период развития школьного математического образования.

ОГЛАВЛЕНИЕ