А. П. ГУРЕВИЧ, В. В. КОРНЕВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. П. ГУРЕВИЧ, В. В. КОРНЕВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

2012

Эта книга написана по материалам лекций, которые в течение многих лет читались на механико-математическом факультете Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. В ней нашли отражение основные разделы министерской программы по курсу дифференциальных уравнений для классических университетов. Данный учебник может использоваться студентами для самостоятельного изучения курса.

Для студентов физико-математических специальностей университетов и других специальностей, требующих знания теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений является важной частью современного математического образования. Для ее изучения требуются знания основ математического анализа и высшей алгебры.

Данное пособие написано на основе лекций, которые в течение многих лет читаются студентам второго курса механико-математического, физического и других факультетов Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений весьма обширна и содержит много разделов, которые невозможно изложить в одной книге. Пособие охватывает необходимый минимум сведений по обыкновенным дифференциальным уравнениям, который, по мнению авторов, должны знать студенты разных специальностей, а именно — методы интегрирования уравнений первого порядка, теория линейных уравнений n-го порядка, теория линейных систем дифференциальных уравнений. Кроме того, в пособие включены дополнительные разделы, традиционно читаемые студентам-математикам, такие как краевые задачи для уравнений второго порядка, теория устойчивости и теория уравнений в частных производных первого порядка, тесно связанная с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Изложение материала носит классический характер и не использует понятие абсолютно непрерывной функции. При подготовке пособия авторы уделяли особое внимание строгости определений и доказательств теорем. В то же время они старались сделать их как можно проще и нагляднее, чтобы студенты могли самостоятельно изучить теорию дифференциальных уравнений.

По обыкновенным дифференциальным уравнениям имеется много хороших учебников и монографий, некоторые из которых указаны в списке литературы. В качестве задачника можно рекомендовать известный сборник задач А. Ф. Филиппова.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1.1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1.1)$$

где x — независимая переменная, y — неизвестная функция $y(x)$, y' — производная $y'(x)$, F — заданная функция трех переменных, определенная в некоторой области D_F пространства $\mathbb{R}^3$.

Замечание Все функции в этом разделе предполагаются вещественными.

Определение 1.2. Пусть $x \in (a, b)$. Непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$ называется *решением* уравнения (1.1) на (a, b), если при подстановке ее в уравнение (1.1) вместо функции y получается тождество, т. е.

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b)$$

(при этом, конечно, подразумевается, что $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D_F$ для всех x).

Важным частным случаем уравнения (1.1) является уравнение

$$y' = f(x, y), \qquad (1.2)$$

где f — заданная функция двух переменных, определенная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 1.3. Уравнение (1.2) называется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, *разрешенным относительно производной* (или уравнением первого порядка в *нормальной форме*).

Простейшим примером уравнения, разрешенного относительно производной, является уравнение $y' = f(x)$, нахождение решения которого представляет собой не что иное, как задачу восстановления функции по ее производной. Если $f(x)$ в этом уравнении является непрерывной, то любая ее первообразная $\int f(x)\,dx$ является решением этого уравнения. Таким образом, дифференциальное уравнение может иметь бесконечно много решений.

Определение 1.4. Каждое конкретное решение уравнения (1.1) (или(1.2)) называется *частным решением*, а множество всех частных решений этого уравнения называется *общим решением*. Решить дифференциальное уравнение означает найти его общее решение.

Очень часто требуется найти не общее решение уравнения (1.2), а частное решение $y(x)$, про которое известно, что в заданной точке x_0 оно принимает заданное значение y_0, т. е.

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.3}$$

Определение 1.5. Задача нахождения решения уравнения (1.2), удовлетворяющего условию (1.3), называется *задачей Коши*. Условие (1.3) называется *начальным условием*.

Впоследствии будет доказано, что задача Коши, как правило, имеет единственное решение.

1.1. Геометрическая интерпретация уравнения первого порядка

Решения уравнения (1.2) имеют простой геометрический смысл.

Определение 1.6. Поставим каждой точке $(x, y) \in D$ в соответствие прямую, проходящую через эту точку под углом, тангенс которого равен $f(x, y)$, где f — правая часть уравнения (1.2). В этом случае говорят, что правая часть уравнения (1.2) задает в области D *поле направлений*.

Определение 1.7. *Интегральной кривой* уравнения (1.2) называется кривая, график которой лежит в области D, и в каждой точке графика существует касательная, которая совпадает с прямой поля направлений для этой точки.

Пусть $\varphi(x)$ — решение уравнения (1.2). Вспоминая геометрическую интерпретацию производной функции в точке, легко видеть, что график функции $\varphi(x)$ является интегральной кривой этого уравнения. Обратно, если некоторая интегральная кривая уравнения (1.2) является графиком функции $\varphi(x)$, то функция $\varphi(x)$ является решением уравнения (1.2).

Таким образом, нахождение решений уравнения (1.2) с геометрической точки зрения есть задача построения интегральных кривых этого уравнения. А задача Коши с начальным условием (1.3) эквивалентна задаче нахождения интегральной кривой, проходящей через заданную точку $(x_0, y_0) \in D$.

Заметим, что не решая уравнение (1.2), с помощью его поля направлений можно приближенно строить интегральные кривые и делать качественные выводы о свойствах его решений.

Следующая теорема дает ответы на вопросы: когда у задачи Коши (1.2)–(1.3) существует решение и является ли оно единственным?

Теорема 1.1. *Предположим, что функция* $f(x,y)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *непрерывны в области* D *и* $(x_0,y_0) \in D$. *Тогда существует число* $h > 0$ *такое, что задача Коши* (1.2)–(1.3) *имеет единственное решение, определенное на интервале* (x_0-h, x_0+h).

Эта теорема является частным случаем теоремы 2.3. Сделаем только два замечания.

Замечание Теорема 1.1 носит локальный характер: число h может оказаться как угодно малым, поэтому речь идет о решении, определенном только в некоторой окрестности точки x_0. Размер этой окрестности зависит, вообще говоря, от точки $(x_0,y_0) \in D$.

Замечание С геометрической точки зрения, теорема 1.1 утверждает, что через каждую точку области D проходит единственная интегральная кривая уравнения (1.2).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = y. \tag{1.4}$$

Можно показать, что общее решение этого уравнения задается формулой

$$y = ce^x,$$

где c — произвольная вещественная константа. Другими словами, функция $\varphi(x,c) = ce^x$ при любом значении константы c есть решение уравнения (1.4). И, наоборот, любое решение уравнения (1.4) совпадает с функцией $\varphi(x,c)$ при некотором значении c. В связи с этим можно ввести и такое определение общего решения.

Определение 1.8. Функция $\varphi(x,c)$, зависящая от параметра c, называется *общим решением* уравнения (1.1), если при любом допустимом значении константы c функция $\varphi(x,c)$ есть решение уравнения (1.1), и, наоборот, любое решение уравнения (1.1) совпадает с $\varphi(x,c)$ при некотором значении c.

Как известно из математического анализа, функцию $z(x)$ можно задать неявно с помощью уравнения

$$\Phi(x,z) = 0. \tag{1.5}$$

Если уравнение (1.5) при любом $x \in (a,b)$ имеет единственное решение $z(x)$, то говорят, что оно задает однозначную неявную функцию $z(x)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2 (о неявной функции). *Предположим, что функция* $\Phi(x,z)$ *определена и непрерывно дифференцируема в некоторой* *окрестности точки* (x_0, z_0), *причем* $\Phi(x_0, z_0) = 0$ *и* $\Phi'_z(x_0, z_0) \neq 0$. *Тогда уравнение* (1.5) *задает однозначную неявную функцию* $z(x)$, *которая определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* x_0, *при этом* $z(x_0) = z_0$ *и*

$$z'(x) = -\frac{\Phi'_x(x, z(x))}{\Phi'_z(x, z, (x))}.$$

В дальнейшем эта теорема неоднократно используется, так как очень часто решения дифференциальных уравнений находятся в неявном виде. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 1.9. Если соотношение

$$\Phi(x, y) = c \tag{1.6}$$

(c — вещественный параметр) задает однозначную неявную функцию $y = \varphi(x, c)$, которая является общим решением уравнения (1.1), то оно называется *общим интегралом* этого уравнения.

Рассмотрим простейшие типы обыкновенных дифференциальных уравнений I-го порядка и методы их решения.

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.10. Уравнение

$$y' = f_1(x) f_2(y), \tag{1.7}$$

где $f_1(x)$, $f_2(y)$ — заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Очевидно, уравнение (1.7) — частный случай уравнения (1.2).

Теорема 1.3. *Предположим, что функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(y)$ *определены и непрерывны на интервалах* (a_1, b_1) *и* (a_2, b_2) *соответственно, причем* $f_2(y)$ *нигде не обращается в ноль. Тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, *где* $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ *— прямоугольник, определяемый неравенствами* $a_1 < x < b_1$, $a_2 < x < b_2$, *задача Коши для уравнения* (1.7) *с начальным условием*

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.8}$$

имеет единственное решение, определенное в некоторой окрестности *точки x_0, а соотношение*[1]

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} - \int f_1(x)\,dx = c \tag{1.9}$$

является общим интегралом уравнения (1.7).

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ — первообразная функции $f_1(x)$, $F_2(y)$ — первообразная функции $\frac{1}{f_2(y)}$, $c_0 = F_2(y_0) - F_1(x_0)$. Перепишем (1.9) в виде

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{1.10}$$

где $\Phi(x, y) = F_2(y) - F_1(x) - c_0$.
Нетрудно видеть, что $\Phi'_x(x, y) = -f_1(x)$, $\Phi'_y(x, y) = \frac{1}{f_2(y)}$, $\Phi(x_0, y_0) = = 0$ и выполняются условия теоремы 1.2. Следовательно, соотношение (1.10) задает неявно функцию $y = \varphi(x)$, определенную и непрерывно дифференцируемую в некоторой окрестности точки x_0, причем

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{и} \quad \varphi'(x) = -\frac{\Phi'_x(x, \varphi(x))}{\Phi'_y(x, \varphi(x))} = f_1(x) f_2(\varphi(x)),$$

т.е.

$$\varphi'(x) \equiv f_1(x) f_2(\varphi(x)).$$

Таким образом, $\varphi(x)$ — решение задачи Коши (1.7)–(1.8).

Докажем единственность решения этой задачи Коши. Пусть $\tilde{\varphi}(x)$ является решением задачи (1.7)–(1.8). Это означает, что

$$\tilde{\varphi}'_x \equiv f_1(x) f_2(\tilde{\varphi}(x)), \quad \tilde{\varphi}(x_0) = y_0.$$

Рассмотрим функцию $\Phi(x, \tilde{\varphi}(x))$ и продифференцируем ее:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, \tilde{\varphi}(x)) = \Phi'_x(x, \tilde{\varphi}(x)) + \Phi'_y(x, \tilde{\varphi}(x))\tilde{\varphi}'(x) =$$

$$= -f_1(x) + \frac{1}{f_2(\tilde{\varphi}(x))} \cdot f_1(x) f_2(\tilde{\varphi}(x)) = 0.$$

Следовательно, $\Phi(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv \text{const}$. Найдем эту константу. Имеем

$$\Phi(x_0, \tilde{\varphi}(x_0)) = \Phi(x_0, y_0) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\Phi(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv 0,$$

[1]Под $\int f(x)\,dx$ в формуле (1.9) и в дальнейшем понимается произвольная, но фиксированная первообразная.

т. е. $\tilde{\varphi}(x)$ — неявная функция, определяемая уравнением (1.10). В силу единственности неявной функции $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$. Единственность решения задачи Коши доказана.

Учитывая, что (x_0, y_0) — произвольная точка области $D = (a_1, b_1) \times \times (a_2, b_2)$, заключаем, что любое решение уравнения (1.7) является неявной функцией, определяемой уравнением (1.9) при некотором c. Следовательно, соотношение (1.4) — общий интеграл уравнения (1.7). Теорема доказана. □

Замечание Таким образом, решение уравнения с разделяющимися переменными (1.7) сводится к вычислению первообразных

$$F_1(x) = \int f_1(x)\,dx, \quad F_2(y) = \int \frac{dy}{f_2(y)},$$

а решение задачи Коши (1.7)–(1.8) дается формулой

$$F_2(y) - F_1(x) = F_2(y_0) - F_1(x_0),$$

или

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{f_2(t)} = \int_{x_0}^{x} f_1(t)dt.$$

1.3. Симметрическая форма уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной

Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1.2) на интервале (a, b), причем $\varphi'(x) \neq 0$. Тогда у функции φ существует обратная функция $x = = \psi(y)$. По свойству обратных функций из тождества $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ следует, что

$$\psi'(y) \equiv \frac{1}{f(\psi(y), y)}.$$

Это означает, что функция $x = \psi(y)$ является решением уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{1.11}$$

С формальной точки зрения уравнения (1.2) и (1.11) можно записать в виде одного уравнения

$$dy = f(x, y)\,dx. \tag{1.12}$$

Если считать y функцией переменной x, то (1.2) получается из (1.12) делением на dx, а если x есть функция переменной y, то разделив обе части (1.12) на $f(x, y)\,dy$, получим уравнение (1.11).

Эти рассуждения можно обобщить.

Определение 1.11. Уравнением *в дифференциалах* называется уравнение

$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0, \tag{1.13}$$

где A, B — заданные функции в области D. Если $B(x,y) \neq 0$, то уравнение(1.13) называется *симметрической формой* уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}. \tag{1.14}$$

Если $A(x,y) \neq 0$, то уравнение (1.13) называется *симметрической формой* уравнения

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{B(x,y)}{A(x,y)}. \tag{1.15}$$

Если $A(x,y)$ и $B(x,y)$ не обращаются в нуль в области D одновременно, то уравнения (1.14) и (1.15) равносильны в том смысле, что множества их интегральных кривых совпадают. Другими словами, если известно решение одного из этих уравнений, то обратная функция будет решением другого уравнения. Таким образом, в уравнении (1.13) переменные x и y равноправны.

Определение 1.12. Уравнение (1.13) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если $A(x,y) = A_1(x)A_2(y)$ и $B(x,y) = B_1(x)B_2(y)$.

Нетрудно видеть, что если (1.13) есть уравнение с разделяющимися переменными и функции A, B не обращаются в нуль в области D, то из теоремы 1.3 следует, что и для уравнения (1.14), и для уравнения (1.15) общим интегралом будет одно и то же соотношение, а именно,

$$\int \frac{A_1(x)}{B_1(x)}dx + \int \frac{B_2(y)}{A_2(y)}dy = c. \tag{1.16}$$

1.4. Однородные дифференциальные уравнения

Определение 1.13. Уравнение

$$y' = f(x,y) \tag{1.17}$$

называется *однородным*, если функция f обладает следующим свойством:

$$f(\lambda u, \lambda y) = f(u,y) \tag{1.18}$$

при любом допустимом значении параметра λ.

Теорема 1.4. *Пусть $y(x)$ есть решение однородного уравнения* (1.17)*, а функция $z(x)$ определяется равенством*

$$y(x) = xz(x). \tag{1.19}$$

Тогда функция $z(x)$ есть решение уравнения с разделяющимися переменными

$$z' = \frac{1}{x}(\varphi(z) - z), \tag{1.20}$$

где $\varphi(z) = f(1, z)$.

Обратно, если $z(x)$ — решение уравнения (1.20)*, то функция $y(x)$, определяемая формулой* (1.19)*, будет решением уравнения* (1.17).

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1.17), т. е.

$$y'(x) = f(x, y(x)) = f\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y(x)}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y(x)}{x}\right) = \varphi(z(x)).$$

С другой стороны, $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Следовательно, $z(x) + xz'(x) = \varphi(z(x))$ или $z'(x) \equiv \frac{1}{x}(\varphi(z(x)) - z(x))$. Таким образом, $z(x)$ — решение уравнения (1.20). Повторяя эти рассуждения в обратном порядке, получаем утверждение теоремы. $\square$

Замечание Теорема 1.4 содержит метод решения однородного уравнения (1.17). Для этого в уравнении надо выполнить замену неизвестной функции $y(x)$ по формуле (1.19). Для новой неизвестной функции $z(x)$ получается уравнение с разделяющимися переменными, решив которое и выполнив замену $z(x) = \frac{1}{x}y(x)$, мы получим решение однородного уравнения.

1.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1.14. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0, \tag{1.21}$$

где $a(x)$, $b(x)$,$c(x)$ — заданные функции на интервале (a, b).

Если $c(x) \equiv 0$, то уравнение (1.21) называется линейным однородным уравнением.

Если $a(x) \neq 0$ на (a, b), то на $a(x)$ можно разделить обе части и записать уравнение (1.21) в нормальной форме

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.22}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — известные функции.

Теорема 1.5. *Предположим, что функции $p(x)$, $q(x)$ непрерывны на интервале (a,b). Тогда для любых чисел x_0 и y_0 ($a < x_0 < b$, $-\infty < < y_0 < \infty$) задача Коши для уравнения (1.22) с начальным условием*

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.23}$$

имеет единственное решение, которое определено на всем (a,b) и задается формулой

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\Big(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds} q(t)\,dt\Big). \tag{1.24}$$

Доказательство. Продифференцируем обе части формулы (1.24), получим

$$y'(x) = -p(x)y(x) + q(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Следовательно, формула (1.24) дает решение задачи Коши (1.22)–(1.23), определенное на всем интервале (a,b).

Для обоснования единственности решения этой задачи Коши достаточно сослаться на теорему 1.1, так как уравнение (1.22) удовлетворяет ее условиям в области $D = (a,b) \times (-\infty,\infty)$. Теорема доказана. □

Следствие. Общее решение линейного уравнения (1.22) можно задать формулой

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\Big(c + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds} q(t)\,dt\Big), \tag{1.25}$$

где c — произвольная постоянная, x_0 — произвольная фиксированная точка из интервала (a,b).

Следующий метод позволяет решать линейные уравнения, не пользуясь формулой (1.24), и фактически содержит ее вывод.

1.6. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Изложим этот метод в виде алгоритма:

1) решим вначале соответствующее однородное уравнение

$$y' + p(x)y = 0, \tag{1.26}$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными, его общее решение можно найти по формуле (1.9) и записать в виде

$$y_0(x) = c \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt}, \tag{1.27}$$

где c — произвольная константа;

2) ищем решение уравнения (1.22) в виде (1.27), но c понимаем не как константу, а как функцию переменной x, т. е. в виде

$$y(x) = c(x) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt}; \tag{1.28}$$

3) подставляем формулу (1.28) в уравнение (1.22):

$$c'(x) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt} - p(x)y(x) + p(x)y(x) = q(x),$$

отсюда получаем

$$c'(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} q(x); \tag{1.29}$$

4) находим из соотношения (1.29) функцию $c(x)$:

$$c(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds} q(t)dt + c_1, \tag{1.30}$$

где c_1 — произвольная константа;

5) подставляем формулу (1.30) в формулу (1.28) и получаем общее решение уравнения (1.22), которое совпадает с (1.25).

Замечание Проще запомнить метод вариации произвольной постоянной, чем формулу (1.24) или (1.25).

1.7. Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение первого порядка в симметрической форме

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{1.31}$$

где функции M и N определены в области D.

Определение 1.15. Уравнение (1.31) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует функция $\Phi(x, y)$, определенная и дифференцируемая в области D, такая что

$$\Phi'_x(x, y) = M(x, y), \quad \Phi'_y(x, y) = N(x, y). \tag{1.32}$$

Замечание В этом случае левая часть уравнения (1.31) является полным дифференциалом $dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$.

Теорема 1.6. *Пусть уравнение* (1.31) *является уравнением в полных дифференциалах, причем функции* $M(x,y)$, $N(x,y)$ *непрерывны и* $N(x,y) \neq 0$ *в* D. *Тогда*

1) *для любой точки* $(x_0, y_0) \in D$ *задача Коши для уравнения* (1.31) *с начальным условием*

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.33}$$

имеет единственное решение;

2) *общий интеграл уравнения* (1.31) *имеет вид*

$$\Phi(x,y) = c. \tag{1.34}$$

Доказательство. Обозначим $\Phi_1(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0)$ и рассмотрим уравнение

$$\Phi_1(x,y) = 0. \tag{1.35}$$

$\Phi_1(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2 о неявной функции, так как $\Phi'_{1x}(x,y) = M(x,y)$, $\Phi'_{1y}(x,y) = N(x,y) \neq 0$ и $\Phi_1(x_0,y_0) = 0$. Следовательно, уравнение (1.35) определяет в некоторой окрестности точки x_0 однозначную непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, которая удовлетворяет равенствам

$$\varphi(x_0) = y_0, \qquad \varphi'(x) = -\frac{M(x,\varphi(x))}{N(x,\varphi(x))}.$$

Из второго равенства следует, что $\varphi(x)$ есть решение уравнения

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

которое равносильно уравнению (1.31). Таким образом, $\varphi(x)$ — решение задачи Коши (1.31), (1.33).

Докажем единственность. Пусть $\tilde{\varphi}(x)$ также является решением решением этой задачи Коши, т.е.

$$\tilde{\varphi}(x_0) = y_0 \quad \text{и} \quad \tilde{\varphi}'(x) \equiv -\frac{M(x,\tilde{\varphi}(x))}{N(x,\tilde{\varphi}(x))}.$$

Рассмотрим функцию $\Phi_1(x,\tilde{\varphi}(x))$ и вычислим ее производную:

$$\frac{d}{dx}\Phi_1(x,\tilde{\varphi}(x)) = \Phi'_x(x,\tilde{\varphi}(x)) + \Phi'_y(x,\tilde{\varphi}(x))\tilde{\varphi}'(x) =$$

$$= M(x, \tilde{\varphi}(x)) - N(x, \tilde{\varphi}(x)) \frac{M(x, \tilde{\varphi}(x))}{N(x, \tilde{\varphi}(x))} = 0.$$

Следовательно, $\Phi_1(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv \text{const} = \Phi_1(x_0, \tilde{\varphi}(x_0)) = \Phi_1(x_0, y_0) = 0$. Это означает, что $\tilde{\varphi}(x)$ есть неявная функция, определяемая уравнением (1.35). В силу единственности неявной функции

$$\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x).$$

Из предыдущих рассуждений следует, что уравнение (1.35) дает любое решение решение уравнения (1.31) при надлежащем выборе (x_0, y_0). Но уравнение (1.35) совпадает с соотношением (1.34), если положить $c = \Phi(x_0, y_0)$. Следовательно, (1.34) — общий интеграл уравнения (1.31). Теорема доказана. $\square$

Итак, если уравнение (1.31) является уравнением в полных дифференциалах и функция $\Phi(x, y)$ известна, то можно сразу выписать общее решение этого уравнения в виде (1.34).

Естественно, возникают две проблемы:

1) как определить, является ли уравнение (1.31) уравнением в полных дифференциалах;

2) если (1.31) является уравнением в полных дифференциалах, как найти функцию $\Phi(x, y)$?

Эти проблемы решаются в следующей теореме.

Теорема 1.7. *Предположим, что функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области $D = (a, b) \times (c, d)$. Тогда для того, чтобы уравнение* (1.31) *было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в D выполнялось тождество*

$$M'_y(x, y) = N'_x(x, y). \tag{1.36}$$

Доказательство. Пусть уравнение (1.30) является уравнением в полных дифференциалах, т. е. существует дифференцируемая функция $\Phi(x, y)$, для которой выполняются тождества (1.32). Из непрерывной дифференцируемости функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$ следует, что в этом случае существуют непрерывные производные $\Phi''_{xy}(x, y) = M'_y(x, y)$ и $\Phi''_{yx}(x, y) = N'_x(x, y)$. По известной теореме математического анализа непрерывные смешанные производные должны совпадать, т. е. имеет место тождество (1.36).

Обратно, пусть выполняется тождество (1.36). Покажем, что существует $\Phi(x, y)$, удовлетворяющая условием (1.32). Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in D$. Из первого условия (1.32) следует, что функция $\Phi(x, y)$ должна иметь вид

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(t, y)\, dt + c(y), \tag{1.37}$$

где $c(y)$ — пока неизвестная функция. Из (1.37) и (1.36) имеем:

$$\Phi'_y(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M'_y(t, y)\, dt + c'(y) = \int\limits_{x_0}^{x} N'_t(t, y)\, dt + c'(y) =$$

$$= N(x, y) - N(x_0, y) + c'(y).$$

Отсюда, с учетом второго условия (1.32), заключаем, что

$$c'(y) = N(x_0, y). \tag{1.38}$$

Следовательно,в качестве $c(y)$ можно взять функцию

$$c(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, t)\, dt,$$

после подстановки которой в формулу (1.37), получаем функцию

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(t, y)\, dt + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, t)\, dt. \tag{1.39}$$

Легко видеть, что функция $\Phi(x, y)$, определяемая формулой (1.39), в области D удовлетворяет соотношениям (1.32). Следовательно, уравнение (1.31) является уравнением в полных дифференциалах. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим уравнение в симметрической форме (1.31). Умножим обе его части на произвольную функцию $\mu(x, y)$, отличную от нуля в области D. В результате получим уравнение

$$\mu(x, y) M(x, y) du + \mu(x, y) N(x, y)\, dy = 0. \tag{1.40}$$

Уравнения (1.31)и (1.40) эквивалентны: любое решение одного из них является решением другого. При этом возможна ситуация, когда уравнение (1.31) не является уравнением в полных дифференциалах, а уравнение (1.40) является.

Определение 1.16. Функция $\mu(x, y)$, не обращающаяся в ноль в области D, называется *интегрирующим множителем* для уравнения (1.31), если уравнение (1.40) является уравнением в полных дифференциалах.

Из предыдущих теорем следует, что если нам удастся найти интегрирующий множитель для уравнения (1.31), то мы сможем его проинтегрировать, т. е. найти его общее решение. Однако общего метода нахождения интегрирующего множителя не существует. В то же время, разработаны методы нахождения интегрирующих множителей для отдельных частных случаев, когда коэффициенты $M(x, y)$ и $N(x, y)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. В следующей теореме содержится один из таких методов.

Теорема 1.8. *Пусть $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывно дифференцируемы и существуют непрерывная функция $\Gamma(t)$ и непрерывно дифференцируемая функция $w(x, y)$, такие что*

$$\Gamma(t)|_{t=w(x,y)} = \frac{M'_y(x, y) - N'_x(x, y)}{N(x, y)w'_x(x, y) - M(x, y)w'_y(x, y)}. \tag{1.41}$$

Тогда функция $\mu(x, y) = \gamma(w(x, y))$, где $\gamma(t) = e^{\int \Gamma(t)\,dt}$, является интегрирующим множителем для уравнения (1.31).

Доказательство. Из определения функции $\gamma(t)$ следует, что $\gamma'(t) = \gamma(t)\Gamma(t)$, или $\Gamma(t) = \gamma'(t)/\gamma(t)$. Подставим последнюю формулу в (1.41) и преобразуем:

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\Big|_{t=w(x,y)} = \frac{M'_y - N'_x}{Nw'_x - Mw'_y}\,;$$

$$\gamma'(w)(Nw'_x - Mw'_y) = \gamma(w)(M'_y - N'_x)\,;$$

$$\mu'_x N - \mu'_y M = \mu M'_y - \mu N'_x\,;$$

$$\mu'_x N + \mu N'_x = \mu'_y M + \mu M'_y\,;$$

$$(\mu N)'_x = (\mu M)'_y\,. \tag{1.42}$$

Из тождества (1.42) на основании теоремы 1.7 заключаем, что уравнение(1.40) является уравнением в полных дифференциалах.

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.1. *Если выполняется условие*

$$\frac{M'_y(x,y) - N'_x(x,y)}{N(x,y)} = q(x)$$

(т.е. дробь не зависит от y), то функция $\mu(x) = e^{\int q(x)\,dx}$ есть интегрирующий множитель для уравнения (1.31) *(в этом случае в теореме надо взять $w(x) = x$ и $\Gamma(t) = q(t)$).*

Следствие 1.2. *Если выполняется условие*

$$\frac{N'_x(x,y) - M'_y(x,y)}{M(x,y)} = p(y)$$

(т. е. дробь не зависит от x), то функция $\mu(y) = e^{\int p(y)\,dy}$ есть интегрирующий множитель для уравнения (1.31) *(в этом случае в теореме надо взять $w(y) = y$ и $\Gamma(t) = p(t)$).*

1.8. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Все изученные в предыдущих разделах типы дифференциальных уравнений относятся к дифференциальным уравнениям, разрешенным относительно производной. Рассмотрим теперь уравнения вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.43}$$

Предположим, что это уравнение можно разрешить относительно y' и свести его к одному или нескольким уравнениям вида (1.2). Решения этих уравнений в совокупности образуют решение (1.43). Однако такое сведение не всегда возможно или очень сложно, например, как в следующем уравнении

$$y - y'^2 - y'^5 = 0. \tag{1.44}$$

Изложим метод решения уравнений вида (1.43), которые можно разрешить относительно y или x. Этот метод можно назвать методом введения параметра, так как решение уравнения ищется в параметрическом виде. Пусть, для определенности, уравнение (1.43) можно разрешить относительно y, т. е. привести его к эквивалентному уравнению вида

$$y = f(x, y') \tag{1.45}$$

(случай $x = f(y, y')$ рассматривается аналогично).

Алгоритм метода введения параметра состоит в следующем:

1) в уравнении (1.45) заменяем y' на параметр (переменную) p, т. е. $y' = p$, или

$$\frac{dy}{dx} = p. \tag{1.46}$$

Получаем

$$y = f(x, p); \tag{1.47}$$

2) в равенстве (1.47) берем от обеих частей дифференциалы:

$$dy = f'_x(x, p)\,dx + f'_{y'}(x, p)\,dp; \tag{1.48}$$

3) в соотношении (1.48) в силу (1.46) заменяем dy на $p\,dx$:

$$(f'_x(x, p) - p)\,dx + f'_{y'}(x, p)\,dp = 0; \tag{1.49}$$

4) уравнение (1.49) рассматриваем как дифференциальное уравнение в симметрической форме относительно переменных x и p, т. е. как уравнение, разрешимое относительно производной, к которому можно применить изученные методы;

5) пусть $x = \varphi(p)$ — решение уравнения (1.49), подставим $\varphi(p)$ в формулу (1.47), получаем

$$x = \varphi(p), \qquad y = f(\varphi(p), p)\,. \tag{1.50}$$

Уравнения (1.50) являются параметрическими уравнениями кривой, которая является графиком решения уравнения(1.45).

Замечание Если в уравнениях (1.50) можно из первого уравнения найти p как функцию x, то после подстановки ее во второе уравнение получается функция $y = g(x)$, которая является решением уравнения (1.45).

В качестве примера, применим этот алгоритм к решению уравнения (1.44):

1) $y = p^2 + p^5$;

2) $dy = (2p + 5p^4)\,dp$;

3) $p\,dx = (2p + 5p^4)\,dp$;

4) считаем x функцией p и находим $x = 2p + \frac{5}{4}p^4 + c$;

5) получаем семейство кривых, которые являются графиками решений уравнения (1.44)

$$x = 2p + \frac{5}{4}p^4 + c, \quad y = p^2 + p^5 \quad (p \in \mathbb{R})$$

(к этому множеству надо добавить решение $y(x) = 0$, которое было потеряно в п.3 при делении на p).

Обоснование изложенного алгоритма содержится в следующей теореме.

Теорема 1.9. *Пусть функция f в уравнении* (1.45) *определена и непрерывно дифференцируема в некоторой области. Пусть $y = g(x)$ является непрерывно дифференцируемым решением уравнения* (1.45), *график которого задается системой параметрических уравнений*

$$x = \varphi(p), y = \psi(p), p \in (\alpha, \beta), \tag{1.51}$$

где φ, ψ — непрерывно дифференцируемые функции, причем

$$\varphi'(p) \neq 0$$

и

$$\frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)} = p, \tag{1.52}$$

(т. е. в качестве параметра выбрано значение тангенса угла наклона касательной к графику). Тогда функция $\varphi(p)$ есть решение уравнения (1.49).

Обратно, пусть $x = \varphi(p)$ является решением уравнения (1.49) *на интервале (a, b), $\varphi'(p) \neq 0$, $\psi(p) = f(\varphi(p), p)$. Тогда уравнения* (1.50) *определяют кривую, являющуюся графиком некоторого решения уравнения*(1.45).

Доказательство. Пусть $y = g(x)$ является решением уравнения (1.45), которое удовлетворяет условиям теоремы. По определению решения и учитывая, что $y' = \frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}$, имеем

$$\psi(p) \equiv f(\varphi(p), p).$$

Продифференцируем это тождество

$$\psi'(p) \equiv f'_x(\varphi(p), p)\varphi'(p) + f'_{y'}(\varphi(p), p)$$

и воспользуемся формулой (1.52), получим

$$p\varphi'(p) \equiv f'_x(\varphi(p), p)\varphi'(p) + f'_{y'}(\varphi(p), p),$$

или

$$(f'_x(\varphi(p), p) - p)\varphi'(p) + f'_{y'}(\varphi(p), p) \equiv 0. \tag{1.53}$$

Последнее тождество означает, что $\varphi(p)$ есть решение уравнения (1.49).

Обратно, пусть $x = \varphi(p)$ является решением уравнения (1.49), т. е. имеет место тождество (1.53). Введем функцию

$$\psi(p) = f(\varphi(p), p), \tag{1.54}$$

и рассмотрим кривую, определяемую уравнениями (1.51). Покажем, что эта кривая является графиком функции $y = g(x)$, которая является решением уравнения (1.45). Для этого продифференцируем обе части формулы (1.54):

$$\psi'(p) \equiv f'_x(\varphi(p), p)\varphi'(p) + f'_{y'}(\varphi(p), p).$$

Из этого тождества и тождества (1.53) следует, что

$$\psi'(p) \equiv p\varphi'(p),$$

откуда, учитывая, что $\varphi'(p) \neq 0$, получаем формулу (1.52). Подставляем формулы (1.51),(1.52) в формулу (1.54) и на основании того, что

$$g'(\varphi(p)) = \frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)},$$

приходим к тождеству

$$g(x) \equiv f(x, g'(x)).$$

Следовательно, $g(x)$ — решение уравнения (1.45). Теорема доказана. $\square$

2. Задача Коши для нормальной системы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешённых относительно производных:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\{f_k(x, y_1, \ldots, y_n)\}_{k=1}^n$ — заданные функции. Системы вида (2.1) называют *нормальными системами дифференциальных уравнений.*

Определение 2.1. Функции $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ называются *решением системы* (2.1) на отрезке $[a, b]$, если $\tilde{y}_k(x)$ непрерывны на $[a, b]$ вместе со своими производными $\tilde{y}_k'(x)$ и для любых $x \in [a, b]$ справедливы тождества

$$\tilde{y}_k'(x) \equiv f_k(x, \tilde{y}_1(x), \ldots, \tilde{y}_n(x)), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Задача Коши состоит в нахождении такого решения $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ системы, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0) = y_n^0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где x_0, $y_1^0, \ldots,$ y_n^0 — заданные числа, $x_0 \in [a, b]$.

2.1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Обозначим через Π_{n+1} $(n+1)$-мерный параллелепипед, определяемый следующим образом:

$$\Pi_{n+1} = \left\{(x, y_1, \ldots, y_n) |\ x_0 - a \le x \le x_0 + a;\ y_k^0 - b_k \le y_k \le y_k^0 + b_k\right\},$$

где a, $b_1, \ldots, b_n$ — фиксированные положительные числа $(k = 1, \ldots, n)$.

Определение 2.2. Будем говорить, что функция $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ *удовлетворяет в* Π_{n+1} *условию Липшица по переменным* $y_1, \ldots, y_n$, если существует положительная константа L, такая что для любых $(x, y_1, \ldots, y_n)$, $(x, z_1, \ldots, z_n)$, принадлежащих параллелепипеду, выполняется неравенство:

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, z_1, \ldots, z_n)| \le L \sum_{j=1}^n |y_j - z_j|. \tag{2.3}$$

Укажем простое достаточное условие, при выполнении которого функция $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2.1. *Предположим, что* $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ *в* Π_{n+1} *непрерывна вместе со своими частными производными по переменным* $y_1, \ldots, y_n$. *Тогда эта функция удовлетворяет в* Π_{n+1} *условию Липшица.*

Доказательство. Оценим разность

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, z_1, \ldots, z_n)| \leq$$
$$\leq |f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f(x, z_1, y_2, \ldots, y_n)| +$$
$$+ |f(x, z_1, y_2, \ldots, y_n) - f(x, z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n)| +$$
$$+ |f(x, z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n) - f(x, z_1, z_2, z_3, y_4, \ldots, y_n)| + \cdots +$$
$$+ |f(x, z_1, \ldots, z_{n-1}, y_n) - f(x, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n)|.$$

Преобразуем каждую из получившихся разностей по теореме о конечных приращениях (теорема Лагранжа), в результате получим:

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, z_1, \ldots, z_n)| \leq$$
$$\leq \left| \frac{\partial f(x, \xi_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_1} \right| |y_1 - z_1| +$$
$$+ \left| \frac{\partial f(x, z_1, \xi_2, y_3, \ldots, y_n)}{\partial y_2} \right| |y_2 - z_2| + \cdots +$$
$$+ \left| \frac{\partial f(x, z_1, \ldots, z_{n-1}, \xi_n)}{\partial y_n} \right| |y_n - z_n|,$$

где $\xi_k \quad (k = 1, \ldots, n)$ — некоторые числа из отрезков $[y_k^0 - b_k, y_k^0 + b_k]$. Частные производные функции $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывны в Π_{n+1}, поэтому они ограничены, т. е. существует положительная константа L, такая что $\left| \dfrac{\partial f(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k} \right| \leq L$. Отсюда

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, z_1, \ldots, z_n)| \leq L \sum_{j=1}^{n} |y_j - z_j|.$$

Теорема доказана. □

Замечание Пусть $f(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) y_k + g(x)$, где $a_k(x)$ и $g(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции. Очевидно, что $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 в области $\{a \leq x \leq b; -\infty < y < < \infty\}$, причем в качестве L можно взять $L = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \max\limits_{a \leq x \leq b} |\, a_k(x) \,|$.

В дальнейшем неоднократно будет использована следующая теорема.

Теорема 2.2 (неравенство Беллмана). *Предположим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны, неотрицательны на отрезке $[a,b]$ и существует $c \geqslant 0$ такое, что для всех $x \in [a,b]$ справедливо неравенство*

$$u(x) \leqslant c + \int\limits_a^x u(t)v(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Тогда

$$u(x) \leqslant c e^{\int\limits_a^x v(t)\,dt}, \qquad x \in [a,b]\,. \tag{2.5}$$

Последнее неравенство называется *неравенством Беллмана.*

Доказательство. Предположим сначала, что $c > 0$. Из (2.4) следует, что

$$\frac{u(x)}{c + \int\limits_a^x u(t)v(t)\,dt} \leqslant 1.$$

Умножим обе части этого неравенства на $v(x)$, а затем проинтегрируем по отрезку $[a,x]$. В результате получим

$$\int\limits_a^x \frac{u(\tau)v(\tau)}{c + \int\limits_a^\tau u(t)v(t)dt}\,d\tau \leq \int\limits_a^x v(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда

$$\ln(c + \int\limits_a^\tau u(t)v(t)\,dt)\Big|_{\tau=a}^x \leq \int\limits_a^x v(\tau)\,d\tau,$$

Выполнив подстановки, получим

$$\ln(c + \int\limits_a^x u(t)v(t)\,dt) - \ln c \leq \int\limits_a^x v(\tau)\,d\tau,$$

или

$$\ln(c + \int\limits_a^x u(t)v(t)\,dt) \leq \int\limits_a^x v(\tau)\,d\tau + \ln c.$$

Потенцируя, заключаем, что $c+\int\limits_a^x u(t)v(t)\,dt \le ce^{\int\limits_a^x v(t)\,dt}$. Учитывая (2.4), получаем (2.5). Пусть теперь $c = 0$. В этом случае (2.4) превращается в неравенство $u(x) \le \int\limits_a^x u(t)v(t)\,dt$. Но тогда для любого натурального n выполняется $u(x) \le \frac{1}{n}+\int\limits_a^x u(t)v(t)\,dt$. Отсюда $u(x) \le \frac{1}{n}e^{\int\limits_a^x v(t)\,dt}$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем $u(x) \le 0$, т. е. (2.5) при $c = 0$. $\square$

Теорема 2.3 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Предположим, что* $\{f_k(x, y_1, \ldots, y_n)\}_{k=1}^n$ *непрерывны в* Π_{n+1} *и по переменным* $y_1, \ldots, y_n$ *удовлетворяют условию Липшица. Тогда задача Коши (2.1)–(2.2) имеет единственное решение, определенное на отрезке* $[x_0 - h, x_0 + h]$, *где* $h = \min\left\{a, \frac{b_1}{M}, \ldots, \frac{b_n}{M}\right\}$, M *— произвольное положительное число такое, что при* $k = 1, \ldots, n$ *и любых* $(x, y_1, \ldots, y_n) \in \Pi_{n+1}$ *выполняется неравенство* $|f_k(x, y_1, \ldots, y_n)| \le M$ *(в частности, если не все* $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$ *тождественно равны нулю, то в качестве* M *можно взять* $\max\limits_{1\le k\le n} \max\limits_{(x,y_1,\ldots,y_n)\in\Pi_{n+1}} |f_k(x, y_1, \ldots, y_n)|$*).*

Доказательство. I этап. Покажем, что задача Коши (2.1)–(2.2) в определенном смысле эквивалентна некоторой системе интегральных уравнений, которая будет получена позднее. Пусть $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ — решение задачи Коши на отрезке $J = [x_0 - h, x_0 + h]$. Следовательно, при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ справедливы тождества:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1'(x) \equiv f_1(x, \tilde{y}_1(x), \ldots, \tilde{y}_n(x)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{y}_n'(x) \equiv f_n(x, \tilde{y}_1(x), \ldots, \tilde{y}_n(x)). \end{cases} \tag{2.6}$$

Проинтегрируем их в пределах от x_0 до x. В результате получим тождества

$$\begin{cases} \tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_1(x_0) \equiv \int\limits_{x_0}^x f_1(t, \tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_n(t))\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{y}_n(x) - \tilde{y}_n(x_0) \equiv \int\limits_{x_0}^x f_n(t, \tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_n(t))\,dt. \end{cases}$$

Так как $\tilde{y}_k(x_0) = y_k^0$, $k = 1, \dots, n$, то

$$\begin{cases} \tilde{y}_1(x) \equiv y_1^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t, \tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_n(t))\, dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{y}_n(x) \equiv y_1^n + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t, \tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_n(t))\, dt. \end{cases} \tag{2.7}$$

Тождества (2.7) означают, что система функций $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ является решением системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = y_1^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t, y_1, \dots, y_n)\, dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_1^n + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t, y_1, \dots, y_n)\, dt. \end{cases} \tag{2.8}$$

Обратно, пусть $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ — непрерывное на J решение системы (2.8). Докажем, что $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ является решением задачи Коши (2.1)–(2.2) на этом же отрезке. Действительно, так как $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ — решение (2.8), то справедливы тождества (2.7). Полагая в них $x = x_0$, заключаем, что $\tilde{y}_k(x_0) = y_k^0$, $k = 1, \dots, n$. Далее, функции $F_k(t) = f_k(t, \tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_n(t))$ являются непрерывными на $[x_0 - h, x_0 + h]$, поэтому правые части в (2.7) имеют непрерывные производные по x. Следовательно, функции $\tilde{y}_k(x)$ тоже непрерывно дифференцируемы. Продифференцируем тождества (2.7). В результате получим (2.6), что и требовалось доказать.

II этап. Докажем теперь, что система (2.8) имеет непрерывное решение на отрезке J. Для этого воспользуемся методом последовательных приближений, предложенным Пикаром. Введем в рассмотрение функции $\{y_{km}(x)\}_{m=0}^{\infty}$, $k = 1, \dots, n$, определяемые следующим образом: в качестве $y_{k0}(x)$ возьмем $y_{k0}(x) = y_k^0$, $y_{k1}(x) \equiv y_k^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_k(t, y_{10}(t), \dots, y_{n0}(t))dt$; в общем случае:

$$y_{km}(x) \equiv y_k^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_k(t, y_{1,m-1}(t), \dots, y_{n,m-1}(t))\, dt. \tag{2.9}$$

Сначала убедимся, что формулы (2.9) корректны в том смысле, что для любого m и для любого $x \in J$ точка $(x, y_{1m}(x), \dots, y_{nm}(x)) \in \Pi_{n+1}$, т. е. что аргументы подинтегральных функций в (2.9) принадлежат области определения функций $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$. Воспользуемся методом математической индукции. При $m = 0$ утверждение очевидно. Теперь предположим, что $(x, y_{1,m-1}(x), \dots, y_{n,m-1}(x)) \in \Pi_{n+1}$ $(x \in J)$ и убедимся, что и $(x, y_{1m}(x), \dots, y_{nm}(x)) \in \Pi_{n+1}$. В самом деле, из (2.9) следует, что:

$$|y_{km}(x) - y_k^0| \le \left| \int\limits_{x_0}^{x} f_k(t, y_{1,m-1}(t), \dots, y_{n,m-1}(t))\, dt \right| \le$$

$$\le \int\limits_{x_0}^{x} |f_k(t, y_{1,m-1}(t), \dots, y_{n,m-1}(t))|\, dt.$$

Но $|f_k(t, y_{1,m-1}(t), \dots, y_{n,m-1}(t))| \le M$, поэтому

$$|y_{km}(x) - y_k^0| \le M|x - x_0| \le Mh \le M\frac{b_k}{M} = b_k.$$

Также по индукции устанавливается, что функции $y_{km}(x)$ являются непрерывными на J. Далее, покажем, что при любом k последовательность $\{y_{km}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ равномерно сходится на J. С этой целью заметим, что равномерная сходимость последовательности равносильна равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} [y_{km}(x) - y_{k,m-1}(x)]$. Для доказательства равномерной сходимости этого ряда применим признак мажорации.

Оценим $|y_{km}(x) - y_{k,m-1}(x)|$ по индукции. При $m = 1$ имеем

$$|y_{k1}(x) - y_k^0| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f_k(t, y_1^0, \dots, y_n^0) dt \right| \le M|x - x_0|. \tag{2.10}$$

Далее, из (2.9) получим

$$y_{k2}(x) \equiv y_k^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_k(t, y_{11}(t), \dots, y_{n1}(t)) dt,$$

$$y_{k1}(x) \equiv y_k^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_k(t, y_{10}(t), \dots, y_{n0}(t)) dt.$$

Отсюда

$$|y_{k2}(x) - y_{k1}(x)| =$$

$$= \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left[f_k(t, y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t)) - f_k(t, y_{10}(t), \ldots, y_{n0}(t)) \right] dt \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left| f_k(t, y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t)) - f_k(t, y_{10}(t), \ldots, y_{n0}(t)) \right| dt \right| \le$$

$$\le L \left| \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |y_{i1}(x) - y_i^0| dt \right|.$$

Учитывая (2.10), заключаем, что

$$|y_{k2}(x) - y_{k1}(x)| \le ML \left| \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} |t - x_0| \, dt \right| = MnL \frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Рассуждая по индукции, приходим к следующей оценке

$$|y_{km}(x) - y_{k,m-1}(x)| \le Mn^{m-1} L^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!} \le$$

$$\le \frac{M}{nL} \frac{(nLh)^m}{m!}, \qquad m = 1, 2, \ldots \, .$$

Таким образом, ряд мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\frac{M}{nL} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(nLh)^m}{m!} \le \frac{M}{nL} e^{nLh}.$$

Обозначим $\lim\limits_{m \to \infty} y_{km}(x) = \tilde{y}_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$. Так как, равномерный предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией, то $\tilde{y}_k(x)$ непрерывны на J. Докажем, что $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^{m}$ является решением системы (2.8). С этой целью перейдем к пределу в (2.9) при $m \to \infty$. Учитывая непрерывность (а, следовательно, и равномерную непрерывность в Π_{n+1}) функций $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$, мы можем перейти к пределу под знаком интеграла. В результате будем иметь

$$\tilde{y}_k(x) \equiv y_k^0 + \lim_{m \to \infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_k(t, y_{1,m-1}(t), \ldots, y_{n,m-1}(t)) dt \equiv$$

$$\equiv y_k^0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{m\to\infty} f_k(t, y_{1,m-1}(t), \ldots, y_{n,m-1}(t))dt \equiv$$

$$\equiv y_k^0 + \int_{x_0}^{x} f_k(t, \lim_{m\to\infty} y_{1,m-1}(t), \ldots, \lim_{m\to\infty} y_{n,m-1}(t))dt \equiv$$

$$\equiv y_k^0 + \int_{x_0}^{x} f_k(t, \tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_n(t))dt, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Что и требовалось доказать.

III этап. Докажем единственность. Пусть наряду с $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ имеется решение $\{\tilde{z}_k(x)\}_{k=1}^n$. Имеем

$$\tilde{y}_k(x) \equiv y_k^0 + \int_{x_0}^{x} f_k(t, \tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_n(t))dt,$$

$$\tilde{z}_k(x) \equiv y_k^0 + \int_{x_0}^{x} f_k(t, \tilde{z}_1(t), \ldots, \tilde{z}_n(t))dt.$$

Вычитая из первого тождества второе, получим

$$\tilde{y}_k(x) - \tilde{z}_k(x) \equiv \int_{x_0}^{x} \left[f_k(t, \tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_n(t)) - f_k(t, \tilde{z}_1(t), \ldots, \tilde{z}_n(t))\right] dt.$$

Отсюда

$$|\tilde{y}_k(x) - \tilde{z}_k(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f_k(t, \tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_n(t)) - f_k(t, \tilde{z}_1(t), \ldots, \tilde{z}_n(t))| \, dt \right| \le$$

$$\le L \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} |\tilde{y}_j(t) - \tilde{z}_j(t)| \, dt \right|, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Просуммируем эти неравенства по k:

$$\sum_{k=1}^{n} |\tilde{y}_k(x) - \tilde{z}_k(x)| \le nL \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} |\tilde{y}_j(t) - \tilde{z}_j(t)| \, dt \right|.$$

Обозначим $z(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |\tilde{y}_k(x) - \tilde{z}_k(x)|$. Тогда последнее неравенство запишется в виде

$$z(x) \le nL \left| \int\limits_{x_0}^{x} z(t)\,dt \right|. \tag{2.11}$$

Из неравенства Беллмана при $c = 0$ следует, что $z(x) \equiv 0$. Теорема доказана. $\square$

Замечание Проиллюстрируем идею доказательства теоремы 2.3 на следующем простом примере. Рассмотрим задачу Коши

$$y' = y, \qquad y(0) = 1. \tag{2.12}$$

Как установлено на I-м этапе данная задача равносильна интегральному уравнению $y(x) = 1 + \int\limits_0^x y(t)dt$. Последовательные приближения в этом случае имеют вид $y_m(x) = 1 + \int\limits_0^x y_{m-1}(t)dt$, $m = 1, 2, \ldots$, $y_0(x) = 1$. Найдем явное выражение $y_m(x)$. Имеем $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = 1 + \int\limits_0^x 1dt = 1 + \dfrac{x}{1!}$, $y_2(x) = 1 + \int\limits_0^x \left(1 + \dfrac{t}{1!}\right) dt = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!}$. В общем случае $y_m(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^m}{m!}$. Отсюда заключаем, что $y_m(x)$ равномерно сходится к $\tilde{y}(x) = e^x$. Это и есть решение исходной задачи Коши.

ЗамечаниеАналогично можно рассмотреть случай, когда начальные условия задаются на конце отрезка. Например, $x_0 \le x \le x_0 + a$. В этом случае в качестве параллелепипеда Π_{n+1} следует взять $\Pi_{n+1} = \{(x, y_1, \ldots, y_n) |\ x_0 \le x \le x_0 + a,\ y_k^0 - b_k \le y_k \le y_k^0 + b_k,\ k = 1, \ldots, n\}$.

Теорема 2.4. *Предположим, что функции* $\{f_k(x, y_1, \ldots, y_n)\}_{k=1}^n$*:*

1) *непрерывны в области* D*:* $a \le x \le b$, $-\infty < y_k < \infty$, $k = 1, \ldots, n$*;*

2) *по переменным* $y_1, \ldots, y_n$ *удовлетворяют условию Липшица с константой* L.

Тогда задача Коши (2.1)–(2.2) *имеет единственное решение, определенное на всем отрезке* $[a, b]$.

Для доказательства этого утверждения достаточно почти дословно повторить рассуждения из теоремы 2.3, заметив при этом, что появление константы M было связано лишь с необходимостью, чтобы последовательные приближения попадали в область определения функций $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$. В рассматриваемом случае этот факт гарантируется условием 1).

Следствие 2.1. *Задача Коши для линейной системы*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases}$$

где функции $a_{jk}(x), f_k(x)$ *являются непрерывными на* $[a, b]$, *с начальными условиями* (2.2) *имеет единственное решение, определенное на всем отрезке* $[a, b]$.

Справедливость данного утверждения очевидна, так как в качестве L можно взять любую положительную константу, для которой выполняются неравенства $|a_{jk}(x)| \leq L$ при $x \in [a, b]$, $j, k = 1, \ldots, n$. В частности, если среди функций $a_{jk}(x)$ имеются отличные от тождественного нуля, в качестве L можно взять $L = \max\limits_{j,k} \max\limits_{x \in [a,b]} |a_{jk}(x)|$ и воспользоваться предыдущей теоремой.

Замечание Выполнение условия Липшица является существенным в том смысле, что одна лишь непрерывность функций $\{f_k(x, y_1, \ldots, y_n)\}$ не гарантирует единственности решения задачи Коши, о чем свидетельствует следующий пример. Рассмотрим случай $n = 1$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(0) = 0,$$

где

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что $f(x, y)$ непрерывная функция во всей плоскости. Очевидно, что в проверке нуждается лишь непрерывность $f(x, y)$ в точке $x = 0, \quad y = 0$. Имеем $x^4 + y^2 \geq 2x^2|y|$. Отсюда при $x \neq 0$, $y \neq 0$ справедливо неравенство

$$|f(x, y)| \leq \frac{2|x|(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2} = 2|x| < \varepsilon,$$

если $|x| < \delta$, $|y| < \delta$, где $\delta = \varepsilon/2$.

Отсюда следует непрерывность $f(x, y)$ для любых x, y. Непосредственная проверка показывает, что при любых c функция

$y(x,c) = c^2 - \sqrt{x^4 + c^4}$ является решением рассматриваемой задачи Коши, т. е. существует бесконечное множество решений.

Справедлива следующая *теорема Пеано.*

Теорема 2.5. *Пусть функции* $\{f_k(x, y_1, \ldots, y_n)\}_{k=1}^n$ *непрерывны в* Π_{n+1}. *Тогда задача Коши* (2.1)–(2.2) *имеет, по крайней мере, одно решение, которое определено на отрезке* $J = [x_0 - h, x_0 + h]$, *где* h *определяется также, как и в теореме* 2.3.

2.2. Сведение системы дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, к нормальной системе

До сих пор все рассуждения велись относительно нормальной системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим теперь следующую систему:

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(m_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \end{cases} \tag{2.13}$$

где $f_k(x, z_1, \ldots, z_{n_0})$ $(k = 1, \ldots, n)$ — заданные функции, $n_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$. Иными словами, рассмотрим систему дифференциальных уравнений произвольного порядка, разрешенную относительно старших производных.

Определение 2.3. Система функций $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ называется *решением* (2.13) *на отрезке* $[a, b]$, если выполнены следующие условия: а) $y_k(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеют непрерывные производные до порядка m_k включительно; б) при подстановке $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ в уравнения (2.13) последние обращаются в тождества, справедливые при $x \in [a, b]$.

Задача Коши для (2.13) состоит в нахождении такого решения этой системы, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$\begin{cases} y_k(x_0) = y_k^0, \\ y_k'(x_0) = y_k^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k^{(m_k-1)}(x_0) = y_k^{(m_k-1)}, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $y_k^{(j)}$ — заданные числа, $k = 1, \dots, n$.

Очевидно, что при $m_k = 1$, $k = 1, \dots, n$, задача Коши (2.13)–(2.14) совпадает с задачей Коши для нормальной системы.

Теорема 2.6. *Система* (2.13) *эквивалентна некоторой нормальной системе относительно* n_0 *функций.*

Доказательство. Пусть $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ — решение системы (2.13) и, следовательно, выполняются тождества:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1^{(m_1)}(x) = f_1(x, \tilde{y}_1(x), \tilde{y}_1'(x), \dots, \tilde{y}_1^{(m_1-1)}(x), \dots, \tilde{y}_n(x), \dots, \tilde{y}_n^{(m_n-1)}(x)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{y}_n^{(m_n)}(x) = f_n(x, \tilde{y}_1(x), \tilde{y}_1'(x), \dots, \tilde{y}_1^{(m_1-1)}(x), \dots, \tilde{y}_n(x), \dots, \tilde{y}_n^{(m_n-1)}(x)). \end{cases} \tag{2.15}$$

Введем в рассмотрение функции $\{\tilde{z}_k(x)\}_{k=1}^{n_0}$, определив их следующим образом:

$$\begin{gathered} \tilde{z}_1(x) = \tilde{y}_1(x), \quad \tilde{z}_{m_1+1}(x) = \tilde{y}_2(x), \quad \dots, \quad \tilde{z}_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}(x) = \tilde{y}_n(x), \\ \tilde{z}_2(x) = \tilde{y}_1'(x), \quad \tilde{z}_{m_1+2}(x) = \tilde{y}_2'(x), \quad \dots, \quad \tilde{z}_{m_1+\dots+m_{n-1}+2}(x) = \tilde{y}_n'(x), \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \tilde{z}_{m_1}(x) = \tilde{y}_1^{(m_1-1)}(x), \quad \tilde{z}_{m_1+m_2}(x) = \tilde{y}_2^{(m_2-1)}(x), \quad \dots, \\ \tilde{z}_{m_1+\dots+m_n}(x) = \tilde{y}_n^{(m_n-1)}(x). \end{gathered} \tag{2.16}$$

В силу (2.16) и (2.15) для функций $\{\tilde{z}_k(x)\}_{k=1}^{n_0}$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \tilde{z}_1'(x) \equiv \tilde{z}_2(x), \quad \tilde{z}_{m_1+1}'(x) \equiv \tilde{z}_{m_1+2}(x), \quad \dots, \\ \tilde{z}_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}'(x) \equiv \tilde{z}_{m_1+\dots+m_{n-1}+2}(x), \\[1ex] \tilde{z}_2'(x) \equiv \tilde{z}_3(x), \quad \tilde{z}_{m_1+2}'(x) \equiv \tilde{z}_{m_1+3}(x), \quad \dots, \\ \tilde{z}_{m_1+\dots+m_{n-1}+2}'(x) \equiv \tilde{z}_{m_1+\dots+m_{n-1}+3}(x), \\[1ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[1ex] \tilde{z}_{m_1-1}'(x) \equiv \tilde{z}_{m_1}(x), \quad \tilde{z}_{m_1+m_2-1}'(x) \equiv \tilde{z}_{m_1+m_2}(x), \quad \dots, \\ \tilde{z}_{m_1+\dots+m_n-1}'(x) \equiv \tilde{z}_{m_1+\dots+m_n}(x), \\[1ex] \tilde{z}_{m_1}'(x) \equiv f_1(x, \tilde{z}_1(x), \dots, \tilde{z}_{n_0}(x)), \quad \tilde{z}_{m_1+m_2}'(x) \equiv f_2(x, \tilde{z}_1(x), \dots, \tilde{z}_{n_0}(x)), \\ \dots, \quad \tilde{z}_{m_1+\dots+m_n}'(x) \equiv f_n(x, \tilde{z}_1(x), \dots, \tilde{z}_{n_0}(x)). \end{gathered} \tag{2.17}$$

Следовательно, функции $\{\tilde{z}_k(x)\}_{k=1}^{n_0}$ являются решением нормальной системы

$$z'_1 = z_2, \quad z'_{m_1+1} = z_{m_1+2}, \quad \dots, \quad z'_{m_1+\dots+m_{n-1}+1} = z_{m_1+\dots+m_{n-1}+2},$$

$$z'_2(x) = z_3, \quad z'_{m_1+2} = z_{m_1+3}, \quad \dots, \quad z'_{m_1+\dots+m_{n-1}+2} = z_{m_1+\dots+m_{n-1}+3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z'_{m_1-1} = z_{m_1}, \quad z'_{m_1+m_2-1} = z_{m_1+m_2}, \quad \dots, \quad z'_{m_1+\dots+m_n-1} = z_{m_1+\dots+m_n},$$

$$z'_{m_1} = f_1(x, z_1, \dots, z_{n_0}), \quad z'_{m_1+m_2} = f_2(x, z_1, \dots, z_{n_0}),$$
$$\dots, \quad z'_{m_1+\dots+m_n} = f_n(x, z_1, \dots, z_{n_0}). \tag{2.18}$$

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение: если $\{\tilde{z}_k(x)\}_{k=1}^{n_0}$ — решение (2.2), то функции $\{\tilde{y}_k(x)\}$, определяемые верхней строчкой в (2.16), образуют решение (2.13). Легко видеть, что система (2.2) является нормальной. Именно она подразумевается в формулировке теоремы. $\square$

ЗамечаниеУбедимся, что требование разрешимости системы дифференциальных уравнений относительно старших производных, присутствующее в теореме 2.3, является существенным.

С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} y'_1 + y'_2 + y_2 = 0, \\ y''_1 + y''_2 + y'_2 + y_1 + y_2 = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Тот факт, что эта система не является системой первого порядка не существенен, так как с помощью приема, рассмотренного в предыдущей теореме, система (2.19) приводится к системе первого порядка.

Найдем множество решений системы. Будем рассуждать по необходимости: предположим, что $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^{2}$ — решение. Тогда

$$\begin{cases} \tilde{y}'_1(x) + \tilde{y}'_2(x) + \tilde{y}_2(x) \equiv 0, \\ \tilde{y}''_1(x) + \tilde{y}''_2(x) + \tilde{y}'_2(x) + \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) \equiv 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Из второго тождества вычтем продифференцированное первое. В результате получим $\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) \equiv 0$. Продифференцируем это тождество, а затем вычтем его из первого в (2.20). Тогда $\tilde{y}_2(x) \equiv 0$. Поэтому и $\tilde{y}_1(x) \equiv 0$. Отсюда заключаем, что единственным решением системы (2.20) является $\tilde{y}_1(x) \equiv 0$, $\tilde{y}_2(x) \equiv 0$. А это означает, что только задача Коши с нулевыми начальными условиями имеет решение.

2.3. Векторная форма записи нормальной системы дифференциальных уравнений

Пусть имеется система

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \tag{2.21}$$

Введем в рассмотрение вектор-функции

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

По определению производной вектор-функции

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (2.21) равносильна векторному уравнению

$$Y' = F(x, Y), \tag{2.22}$$

в том смысле, что для того, чтобы система функций $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ являлась решением (2.21), необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $\tilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(x) \\ \vdots \\ \tilde{y}_n(x) \end{pmatrix}$ была решением (2.22).

Обозначим $Y_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что задача Коши (2.21),(2.2) равносильна векторной задаче Коши

$$Y' = F(x, Y), \qquad Y(x_0) = Y_0.$$

Пусть теперь имеется система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{2.23}$$

где $a_{jk}(x)$, $f_k(x)$ — заданные функции.

Введем в рассмотрение матрицу-функцию $A(x)$ и вектор $F(x)$:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, система (2.23) равносильна уравнению

$$Y' = A(x)Y + F(x). \tag{2.24}$$

2.4. Зависимость решений нормальной системы от параметров и начальных условий

Изучим теперь вопрос о гладкости решений системы (2.21).

Теорема 2.7. *Если в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ *функции* $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ *имеют непрерывные частные производные по всем переменным до* m*-го порядка включительно, то решение задачи Коши*

$$Y' = F(x, Y), \qquad Y(x_0) = Y_0, \tag{2.25}$$

определенное на некотором отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ $(h > 0)$*, имеет непрерывные производные до порядка* $m + 1$ *включительно.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Пусть $m = 1$. Обозначим через $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ решение задачи Коши (2.25). Тогда

$$\tilde{y}_k'(x) \equiv f_k(x, \tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)), \qquad k = 1, \dots, n. \tag{2.26}$$

Так как функции $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ имеют по условию непрерывные частные производные по всем переменным, то правые части в (2.26), рассматриваемые как сложные функции переменной x, имеют непрерывную производную. Следовательно, $\tilde{y}_k(x)$ имеют непрерывную производную по x, причем по правилу дифференцирования сложной функции

$$\tilde{y}_k''(x) \equiv \frac{\partial f_k(x, \tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x))}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k(x, \tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x))}{\partial y_k} \tilde{y}_k'(x)$$

Учитывая (2.26), заключаем, что

$$\tilde{y}_k''(x) \equiv \frac{\partial f_k(x, \tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x))}{\partial x} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_k(x,\tilde y_1(x),\ldots,\tilde y_n(x))}{\partial y_k}f_k(x,\tilde y_1(x),\ldots,\tilde y_n(x)),$$

т. е. существование вторых производных у функции $\tilde y_k(x)$ обеспечивается наличием у функций $f_k(x,y_1,\ldots,y_n)$ непрерывных частных производных первого порядка.

Для завершения доказательства остается воспользоваться стандартными рассуждениями, связанными с методом математической индукции. □

2.4.1. Теорема о продолжении решения

Рассмотрим уравнение

$$Y'=F(x,Y). \tag{2.27}$$

Теорема 2.3 указывает достаточные условия, при выполнении которых у (2.27) существует решение, определенное на некотором отрезке. Естественно возникает вопрос о возможности продолжения данного решения за пределы исходного отрезка.

Теорема 2.8. *Предположим, что уравнение* (2.27) *имеет решения* $Y_1(x)$ *и* $Y_2(x)$*, определенные соответственно на отрезках* $[x_0,x_1]$ *и* $[x_1,x_2]$*, причем* $Y_1(x_1)=Y_2(x_1)$*. Тогда функция*

$$Y(x)=\begin{cases}Y_1(x) & \text{при} \quad x\in[x_0,x_1],\\ Y_2(x) & \text{при} \quad x\in[x_1,x_2]\end{cases}$$

является решением (2.27) *на отрезке* $[x_0,x_2]$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что у функции $Y(x)$ существует производная в точке $x=x_1$. Для этого нужно показать, что $Y'(x_1-0)=Y'(x_1+0)$. Последнее равносильно равенству $Y_1'(x_1)=Y_2'(x_1)$. Но в силу предполагаемой непрерывности функции $F(x,Y)$ $Y_1'(x_1)=F(x_1,Y_1(x_1))$, а $Y_2'(x_1)=F(x_1,Y_2(x_1))$. По условию теоремы $Y_1(x_1)=Y_2(x_1)$. Получили требуемое. □

Теорема 2.9. *Предположим, что функция* $F(x,Y)$*: 1) непрерывна вместе с частными производными по* y_k*,* $k=1,2,\ldots,n$*, в области* $\mathrm{D}=\{(x,Y)\,|\,x\in[a,\,b],\,Y\in\mathbb{R}^n\}$*, 2) в* D *справедливо неравенство*

$$\|F(x,Y)\|\le\alpha(x)\|Y\|+\beta(x), \tag{2.28}$$

где $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *— непрерывные функции, тогда если* $Y(x)$ *— решение задачи Коши*

$$Y'=F(x,Y),$$

$$Y(x_0) = Y_0, \tag{2.29}$$

$x_0 \in [a, b]$, *определенное на отрезке* $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, *то существует константа* C_0, *не зависящая от* x_1, x_2, *такая что для любых* $x \in$ $\in [x_1, x_2]$ *выполняется неравенство*

$$\|Y(x)\| \le C_0 \tag{2.30}$$

Доказательство. Пусть для определенности $x \ge x_0$. Из тождества $Y(x) \equiv Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, Y(t))\, dt$ следует неравенство $\|Y(x)\| \le \|Y_0\| +$ $+ \int\limits_{x_0}^{x} \|F(t, Y(t))\|\, dt$. Отсюда учитывая (2.1), заключаем, что

$$\|Y(x)\| \le \|Y_0\| + \int\limits_{x_0}^{x} \alpha(t)\|Y(t)\|dt + \int\limits_{x_0}^{x} \beta(t)dt \le$$

$$\le \|Y_0\| + \int\limits_{a}^{b} \beta(t)dt + \int\limits_{x_0}^{x} \alpha(t)\|Y(t)\|dt.$$

Воспользуемся неравенством Беллмана:

$$\|Y(x)\| \le \left(\|Y_0\| + \int\limits_{a}^{b} \beta(t)dt \right) \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} \alpha(t)dt \right) \le$$

$$\le \left(\|Y_0\| + \int\limits_{a}^{b} \beta(t)dt \right) \exp\left(\int\limits_{a}^{b} \alpha(t)dt \right) = C_0. \quad \square$$

Теорема 2.10. *Пусть* $F(x, Y)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.9, *тогда для любого* Y_0 *задача Коши* (2.29) *имеет единственное решение, определенное на всем отрезке* $[a, b]$.

Доказательство. Введем в рассмотрение множество $D_0 =$ $= \{(x, Y) \,|\, x \in [a, b], \|Y\| \le C_0 + 1\}$. Пусть далее, $M =$ $= \max\limits_{1 \le k \le n} \max\limits_{(x,Y) \in D_0} |f_k(x, y_1, \ldots, y_n)|$. Будем считать, не теряя общности, что $x_0 < b$. Убедимся, что задача Коши имеет единственное решение, определенное на $[x_0, b]$. В силу теоремы 2.3 эта задача имеет единственное решение $\tilde{Y}(x)$, определенное на $[x_0, x_0 + h]$, где $h = \min\{b - x_0, \frac{1}{M}\}$. Если $h = b - x_0$, то утверждение доказано. В противном случае оно определено на $[x_0, x_0 + \frac{1}{M}]$. Рассмотрим задачу Коши с начальным условием $Y(x_0 + \frac{1}{M}) = \tilde{Y}(x_0 + \frac{1}{M})$. Снова применяя теорему 2.3, приходим к выводу, что эта задача имеет единственное решение, определенное на $[x_0 + \frac{1}{M}, b]$, если $x_0 + \frac{2}{M} > b$, или на $[x_0 + \frac{1}{M}, x_0 + \frac{2}{M}]$ в противном случае. Из теоремы 2.8 следует, что у задачи (2.29) существует единственное решение, определенное на $[x_0, b]$ в первом случае, или на отрезке $[x_0, x_0 + \frac{2}{M}]$ во втором. Но тогда очевидно, что после конечного числа шагов будет построено единственное решение, определенное на $[x_0, b]$. Продолжение решения $\tilde{Y}(x)$ на $[a, x_0]$ осуществляется аналогично. $\Box$

Теорема 2.9 не улучшаема в том смысле, что наличие неравенства $\|F(x,Y)\| \le \alpha(x)\|Y\|^\gamma + \beta(x)$, где $\gamma > 1$, не гарантирует, вообще говоря, справедливости ее заключения. В самом деле, рассмотрим следующую задачу Коши для скалярного уравнения: $y' = y^{1+\frac{1}{\alpha}}$, $y(0) = 1$, где $\alpha > 0$. Ее решением является $y(x) = \dfrac{\alpha^\alpha}{(\alpha - x)^\alpha}$, которое, очевидно, не продолжаемо за точку $x = \alpha$.

Следствие 2.1. Предположим, что функция $F(x, Y)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.9 в области $\mathrm{D} = \{(x, Y) \,|\, x \ge a,\ Y \in \mathbb{R}^n\}$, тогда задача Коши (2.4.1) имеет единственное решение, определенное на полуоси $[a, \infty)$.

Следствие 2.2. Задача Коши для линейной системы

$$\begin{aligned} Y' &= A(x)Y + F(x), \\ Y(x_0) &= Y_0, \end{aligned} \tag{2.31}$$

где $A(x)$, $F(x)$ — непрерывные на $[a, \infty)$ матрица и вектор-функция соответственно, имеет единственное решение, определенное на $[a, \infty)$.

Для доказательства этого предложения достаточно убедиться, что правая часть в уравнении (2.4.1) удовлетворяет условиям теоремы 2.10 или следствия 2.1 на произвольном отрезке $[a, b] (b > a)$.

2.4.2. Зависимость решений от параметров

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n, \mu_1, \dots, \mu_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n, \mu_1, \dots, \mu_m), \end{cases} \tag{2.32}$$

$$
\begin{cases}
y_1(x_0) = y_1^0, \\
\dots\dots\dots\dots \\
y_n(x_0) = y_n^0,
\end{cases}
\tag{2.33}
$$

где правые части в (2.32) зависят от параметров $\mu_1, \dots, \mu_m$, $m \in N$. Очевидно, что решение задачи (2.32)–(2.33) является функциями переменных $x, \mu_1, \dots, \mu_n$. В данном разделе изучаются вопросы гладкости этих функций.

Обозначим через P_m параллелепипед

$$
\{(\mu_1, \dots, \mu_m) |\ \mu_k^{(1)} \le \mu_k \le \mu_k^{(2)},\ k = 1, \dots, m\},
$$

где $\mu_k^{(1)}, \mu_k^{(2)}$ — заданные числа, причем $\mu_k^{(i)} < \mu_k^{(2)}$.

Теорема 2.11 (о непрерывной зависимости от параметров). *Предположим, что функции $\{f_k(x, y_1, \dots, y_n, \mu_1, \dots, \mu_m)\}_{k=1}^n$ удовлетворяют следующим условиям в $\Pi_{n+1} \times P_m$:*

1) *они определены и непрерывны при $(x, y_1, \dots, y_n) \in \Pi_{n+1}$, $(\mu_1, \dots \dots, \mu_m) \in P_m$;*

2) *по переменным $y_1, \dots, y_n$ выполняется условие Липшица с константой, независящей от переменной x и параметров.*

Тогда задача Коши (2.8), (2.2) имеет единственное решение $\{\tilde{y}_k(x, \mu_1, \dots, \mu_m)\}_{k=1}^n$, определенное на отрезке $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, где

$$
h = \min\left\{a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}\right\},
$$

$$
M = \max_k \max_{\substack{(x, y_1, \dots, y_n, \mu_1 \dots, \mu_m) \in \\ \in \Pi_{n+1} \times P_m}} |f_k(x, y_1, \dots, y_n, \mu_1, \dots, \mu_m)|,
$$

причем функции $\tilde{y}_k(x, \mu_1, \dots, \mu_m)$ являются непрерывными на множестве: $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $(\mu_1, \dots, \mu_m) \in P_m$.

Доказательство. Воспользуемся методом Пикара. Как и при доказательстве теоремы 2.3 рассмотрим последовательные приближения

$$
y_{kj}(x, \mu_1, \dots, \mu_m) =
$$

$$
= y_k^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_k(x, y_{1,j-1}(t, \mu_1, \dots, \mu_m), \dots, y_{n,j-1}(t, \mu_1, \dots, \mu_m))dt,
$$

$$
j = 1, 2, \dots,
$$

причем $y_{k,0}(x,\mu_1,\dots,\mu_m)=y_k^0$.

Повторяя те же рассуждения, что и в теореме 2.3, приходим к выводу, что функции $y_{kj}(x,\mu_1,\dots,\mu_m)$ непрерывны при $x\in[x_0-h, x_0+h]$, $(\mu_1,\dots,\mu_m)\in P_m$, причем $y_{kj}(x,\mu_1,\dots,\mu_m)$ равномерно сходятся к $\tilde y_k(x,\mu_1,\dots,\mu_m)$ при $j\to\infty$, образующим решение задачи Коши. А так как равномерный предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией, то теорема доказана. □

Изучим теперь вопрос о дифференцируемости решения по параметрам. Для простоты ограничимся лишь случаем $n=m=1$, т. е. рассмотрим задачу Коши

$$y'=f(x,y,\mu), \tag{2.34}$$

$$y(x_0)=y_0, \tag{2.35}$$

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.1 (Адамара). *Пусть G — выпуклая область пространства R_n, а функция $F(x_1,\dots,x_n)$ непрерывна вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}$, $k=1,\dots,n$, в $\overline{G}$, где $\overline{G}$ — замыкание G. Тогда для любых точек $(x_1,\dots,x_n)$, $(\tilde x_1,\dots,\tilde x_n)$, принадлежащих $\overline{G}$, справедливо равенство*

$$F(\tilde x_1,\dots,\tilde x_n)-F(x_1,\dots,x_n)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\tilde x_k-x_k)\int\limits_0^1\frac{\partial F(x_1+t(\tilde x_1-x_1),\dots,x_n+t(\tilde x_n-x_n))}{\partial x_k}dt.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)=F(x_1+t(\tilde x_1-x_1),\dots,x_n+t(\tilde x_1-x_n))$. Очевидно, $\varphi(0)=F(x_1,\dots,x_n)$, $\varphi(1)=F(\tilde x_1,\dots,\tilde x_n)$. Поэтому используя формулу Ньютона – Лейбница, получим:

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\int\limits_0^1\frac{d\varphi(t)}{dt}dt=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^1\frac{\partial F(x_1+t(\tilde x_1-x_1),\dots,x_n+t(\tilde x_n-x_n))}{\partial x_k}(\tilde x_k-x_k)dt.$$

Лемма доказана. □

Обозначим через Π_3 параллелепипед

$$\{(x,y,\mu)|\ x_0-a\le x\le x_0+a;\ y_0-b\le y\le y_0+b;\ \alpha\le\mu\le\beta\}.$$

Теорема 2.12. *Предположим, что функция $f(x,y,\mu)$ непрерывна в Π_3 вместе со своими частными производными по всем переменным. Тогда решение $\tilde{y}(x,\mu)$ задачи Коши (2.34)–(2.35), определенное при $x\in[x_0-h,x_0+h]$, где $h=\min\{a,b/M\}$, $M=\max\limits_{(x,y,\mu)\in\Pi_3}|f(x,y,\mu)|$, имеет непрерывную производную по μ на отрезке $[\alpha,\beta]$ (т. е. $\tilde{y}(x,\mu)$ непрерывна вместе с частной производной по μ по совокупности переменных).*

Доказательство. Рассмотрим $\tilde{y}(x,\mu)$ и $\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu)$. Тогда

$$\tilde{y}'(x,\mu+\Delta\mu)\equiv f(x,\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu),$$
$$\tilde{y}'(x,\mu)\equiv f(x,\tilde{y}(x,\mu),\mu).$$

Вычитая из первого тождества второе, получим

$$\frac{d}{dx}(\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu)-\tilde{y}(x,\mu))\equiv f(x,\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(x,\tilde{y}(x,\mu),\mu).$$

Преобразуя правую часть, используя лемму Адамара:

$$\frac{d}{dx}(\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu)-\tilde{y}(x,\mu))\equiv(\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu)-\tilde{y}(x,\mu))\times$$
$$\times\int\limits_0^1\frac{\partial f(x,\tilde{y}(x,\mu)+t(\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu)-\tilde{y}(x,\mu)),\mu+t\Delta\mu)}{\partial y}dt+$$
$$+\int\limits_0^1\frac{\partial f(x,\tilde{y}(x,\mu)+t(\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu)-\tilde{y}(x,\mu)),\mu+t\Delta\mu)}{\partial\mu}\Delta\mu dt.$$

Обозначим первой интеграл через $A_1(x,\mu,\Delta\mu)$, а второй — через $A_2(x,\mu,\Delta\mu)$. Разделив получившееся тождество на $\Delta\mu$, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu)-\tilde{y}(x,\mu)}{\Delta\mu}\right)\equiv$$
$$\equiv A_1(x,\mu,\Delta\mu)\frac{\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu)-\tilde{y}(x,\mu)}{\Delta\mu}+A_2(x,\mu,\Delta\mu).\qquad(2.36)$$

Обозначим $\dfrac{\tilde{y}(x,\mu+\Delta\mu)-\tilde{y}(x,\mu)}{\Delta\mu}=\dfrac{\Delta\tilde{y}}{\Delta\mu}$. Тогда тождество (2.36) примет вид:

$$\frac{d}{dx}(\frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta\mu}) \equiv A_1(x,\mu,\Delta\mu)\frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta\mu} + A_2(x,\mu,\Delta\mu). \tag{2.37}$$

Кроме того очевидно, что $\frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta\mu}\big|_{x=x_0} = 0$, т. е. функция $\frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta\mu}$ при $\Delta\mu \neq 0$ является решением задачи Коши

$$\frac{dz}{dx} = A_1(x,\mu,\Delta\mu)z + A_2(x,\mu,\Delta\mu), \tag{2.38}$$

$$z(x_0) = 0. \tag{2.39}$$

Далее, так как правая часть в (2.38) удовлетворяет всем условиям теоремы о непрерывной зависимости от параметров, то задача Коши (2.38)–(2.39) имеет единственное решение $\tilde{z}(x,\mu,\Delta\mu)$, которое непрерывно по совокупности переменных. В частности, у $\tilde{z}$ существует предел при $\Delta\mu \to 0$. В силу единственности решения задачи Коши $\tilde{z}(x,\mu,\Delta\mu) \equiv \frac{\tilde{\Delta} y}{\Delta\mu}$ при $\Delta\mu \neq 0$. А потому у функции $\frac{\tilde{\Delta} y}{\Delta\mu}$ существует предел при $\Delta\mu \to 0$. Таким образом, доказано существование $\tilde{y}'_\mu(x,\mu)$, причем $\tilde{y}'_\mu(x,\mu)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d}{dx}(y'_\mu) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}y'_\mu + \frac{\partial f}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial y}{\partial\mu}\big|_{x=x_0} = 0.$$

Учитывая теорему о непрерывной зависимости решения от параметров, заключаем, что $y'_\mu(x,\mu)$ — непрерывная функция по совокупности переменных x и μ. □

2.4.3. Непрерывная зависимость решения от начальных условий

Обозначим через Π_{n+1} параллелепипед

$$\Pi_{n+1} = \left\{(x, y_1, \ldots, y_n) \middle| |x - x_0| \leq a;\ |y_k - y_k^0| \leq b\right\},$$

a и b — данные положительные числа.

Рассмотрим, далее, нормальную систему дифференциальных уравнений

$$y'_k = f_k(x, y_1, \ldots, y_n), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.40}$$

Теорема 2.13 (о непрерывной зависимости решения от начальных условий). *Предположим, что функции* $\{f_k(x, y_1, \ldots, y_n)\}_{k=1}^n$ *удовлетворяют в* Π_{n+1} *условиям теоремы* 2.3. *Тогда решение* $\{\tilde{y}_k(x, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)\}_{k=1}^n$ *задачи Коши для системы* (2.40) *с начальными условиями*

$$y_k(x^*) = y_k^*, \tag{2.41}$$

где

$$|x^* - x_0| \le \omega, \quad 0 < \omega < \frac{b}{4}, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \tag{2.42}$$

$$|y_k^* - y_k^0| \le \frac{b}{2}, \tag{2.43}$$

определено на отрезке

$$|x - x_0| \le \frac{h}{2} - \omega, \tag{2.44}$$

причем функции $y_k(x, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ *являются непрерывными функциями на множестве* (2.42)–(2.44).

Доказательство. Произведем замену независимой переменной x и искомых функций $\{y_k\}_{k=1}^n$, положив $t = x - x^*$, $z_k(t, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*) = y_k(t + x, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*) - y_k^*$. Очевидно, что для того, чтобы система функций $\{y_k(x, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)\}_{k=1}^n$ являлась решением задачи Коши (2.40)–(2.41), необходимо и достаточно, чтобы функции $\{z_k(t, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)\}_{k=1}^n$ образовывали решение задачи Коши

$$\frac{dz_k}{dt} = F_k(t, z_1, \ldots, z_n, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*), \tag{2.45}$$

$$z_k(0) = 0, \tag{2.46}$$

где $F_k(t, z_1, \ldots, z_n, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*) = f_k(t + x^*, z_1 + y_1^*, \ldots, z_n + y_n^*)$.

Учитывая выполненные замены, заключаем, что функции F_k удовлетворяют условию Липшица по переменным $z_1, \ldots, z_n$ на множестве:

$$|t + x^* - x_0| \le a, \tag{2.47}$$

$$|z_k + y_k^* - y_k^0| \le b, \tag{2.48}$$

Рассмотрим задачу (2.45)–(2.46) при дополнительных предположениях $|t| \le a/2$, $|z_k| \le b/2$. Учитывая (2.42) и (2.43), из теоремы 2.3, заключаем, что у этой задачи решение существует на отрезке $|t| \leq h/2$, при условии, что

$$|x^* - x_0| \leq \frac{a}{2}, \quad |y_k^* - y_k^0| \leq \frac{b}{2}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.49}$$

Причем в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров функции $z_k(t, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ являются непрерывными на рассматриваемом множестве.

Вернемся теперь к функциям $y_k(x, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*) = z_k(x - x^*, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*) + y_k^*$. Они образуют решение задачи Коши (2.40)–(2.41). Из условий (2.49) следует, что они определены как функции переменной x на отрезке $|x - x^*| \leq \dfrac{h}{2}$. Последнее неравенство будет выполнено, если предполагать, что $|x - x_0| \leq \dfrac{h}{2} - \omega$, а $|x^* - x_0| \leq \omega$. Действительно, в этом случае

$$|x - x^*| \leq |x - x_0| + |x_0 - x^*| \leq \frac{h}{2} - \omega + \omega = \frac{h}{2}.$$

Учитывая связь между y_k и z_k, заключаем, что функции $\{y_k(x, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)\}_{k=1}^n$ являются непрерывными на множестве (2.42)–(2.44).

3. Линейные дифференциальные уравнения

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \qquad (3.1)$$

где $a_k(x)$, $f(x)$ — заданные функции, определенные на некотором фиксированном отрезке $[a, b]$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что данные функции являются непрерывными на этом отрезке.

Для произвольной функции $y(x)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывные производные до n-го порядка включительно, обозначим через $l(y)$ следующее выражение

$$l(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y,$$

которое назовем *дифференциальным оператором* n-го *порядка*.

Очевидно, уравнение (3.1) можно записать в виде $l(y) = f(x)$.

Так как уравнение (3.1) является частным случаем системы (2.13), то задача Коши для (3.1) состоит в нахождении такого решения, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \qquad (3.2)$$

где x_0 — произвольная точка из $[a, b]$, y_0, y_0', $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ — произвольные заданные числа.

Задача Коши (3.1)–(3.2) эквивалентна задаче Коши для линейной нормальной системы дифференциальных уравнений, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Задача Коши* (3.1)–(3.2) *при любых начальных условиях имеет единственное решение, определенное на всем отрезке* $[a, b]$.

Отметим ряд простейших свойств оператора $l(y)$:

1) $l(y_1 + y_2) = l(y_1) + l(y_2)$,

2) $l(cy) = c\,l(y)$, $c = \text{const}$,

3) $l(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\,l(y_1) + c_2\,l(y_2)$, где c_1, c_2 — константы.

Доказательство. Докажем свойство 1). Имеем

$$l(y_1 + y_2) = (y_1(x) + y_2(x))^{(n)} + a_1(x)(y_1(x) + y_2(x))^{(n-1)} + \cdots +$$
$$+ a_n(x)(y_1(x) + y_2(x)) = y_1^{(n)}(x) + y_2^{(n)}(x) + a_1(x)(y_1^{(n-1)}(x)+$$
$$+ y_2^{(n-1)}(x)) + \cdots + a_n(x)(y_1(x) + y_2(x)).$$

Группируя отдельно слагаемые, содержащие $y_1(x)$ и $y_2(x)$, получим требуемое. Столь же просто доказывается и свойство 2). Свойство 3) является, очевидно, следствием 1) и 2). □

Заметим, что свойства 1) и 3) легко переносятся на случай произвольного числа слагаемых.

3.1. Линейные однородные уравнения n-го порядка

В дальнейшем важную роль будет играть уравнение

$$l(y) = 0, \tag{3.3}$$

которое называется *линейным однородным дифференциальным уравнением* n *— го порядка*, соответствующим неоднородному уравнению (3.1).

Из свойства 3) оператора $l(y)$ следует справедливость следующих утверждений.

Теорема 3.2. *Если функции* $\{y_k(x)\}_{k=1}^m$ *являются решениями уравнения* (3.3)*, то для любых констант* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *функция* $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k y_k(x)$ *также является решением* (3.3).

Теорема 3.3. *Пусть функции* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *являются решениями уравнений* (3.1) *и* (3.3) *соответственно. Тогда функция* $y_1(x) + y_2(x)$ *есть решение* (3.1).

Теорема 3.4. *Предположим, что функции* $a_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, *вещественны. Тогда, если* $y(x) = u(x) + i\,v(x)$, *где* $u(x)$, $v(x)$ *— вещественные функции, является решением* (3.3)*, то и* $u(x)$, $v(x)$ *— решения* (3.3).

Доказательство. Имеем $l(u(x) + i\,v(x)) = l(u(x)) + i\,l(v(x)) \equiv 0$. Так как $l(u(x))$ и $l(v(x))$ — вещественны, то $l(u(x)) \equiv 0$, $l(v(x)) \equiv 0$. □

Определение 3.1. Система непрерывных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^m$, $x \in [a, b]$, называется *линейно независимой* на отрезке $[a, b]$, если тождество $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(x) \equiv 0$, c_k — константы, $x \in [a, b]$, справедливо лишь при условии, что все c_k, $k = 1, \dots, m$, равны нулю. В противном случае система называется *линейно зависимой*.

Другими словами, линейная зависимость системы функций означает, что существует набор констант $\{c_k^0\}_{k=1}^m$, среди которых имеются отличные от нуля(т. е. $\sum\limits_{k=1}^{m} |c_k^0| > 0$), такой что для всех $x \in [a, b]$ справедливо тождество $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k^0 \varphi_k(x) \equiv 0$.

Рассмотрим, например, функции 1, $\sin^2 x$, $\cos 2x$. Убедимся, что эта система линейно зависима на отрезке $[0, 2\pi]$. Для этого заметим, что $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Но тогда при $c_1^0 = -1$, $c_2^0 = 2$, $c_3^0 = 1$ имеем: $-1 + 2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x \equiv 0$ при любых x.

Определение 3.2. Пусть функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, тогда определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ или *вронскианом*.

Теорема 3.5. *Определитель Вронского линейно зависимой системы функций равен нулю при любых* $x \in [a, b]$.

Доказательство. Из определения линейной зависимости следует, что существует набор $\{c_k^0\}_{k=1}^n$ такой, что $c_1^0\varphi_1(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x) \equiv 0$, причем $\sum\limits_{k=1}^{n} \left|c_k^0\right| > 0$. Не теряя общности, можно считать, что $c_1^0 \neq 0$. Более того, будем считать, что $c_1^0 = 1$, так как в противном случае достаточно разделить обе части тождества на c_1^0. Итак,

$$\varphi_1(x) + c_2^0\varphi_2(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x) \equiv 0.$$

Отсюда

$$\varphi_1^{(m)}(x) + c_2^0\varphi_2^{(m)}(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n^{(m)}(x) \equiv 0 \qquad (3.4)$$

при $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Преобразуем вронскиан $W(x)$ следующим образом: к первому столбцу прибавим второй столбец, умноженный на c_2^0, третий — умноженный на c_3^0 и т. д., наконец, n-й столбец, умноженный на c_n^0. В результате, учитывая (3.4), получим определитель, у которого первый столбец является нулевым. А так как указанное преобразование не меняет величины определителя, то приходим к выводу, что $W(x) \equiv 0$. $\square$

Укажем теперь, критерий линейной независимости системы для случая, когда в качестве функций берутся решения уравнения (3.3).

Теорема 3.6. *Для того, чтобы система* $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ *решений уравнения* (3.3) *была линейно независимой на* $[a,b]$, *необходимо, чтобы её определитель Вронского был отличен от нуля при всех* x *из этого отрезка, и достаточно, чтобы* $W(x) \neq 0$ *хотя бы в одной точке* $[a,b]$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ — линейно независимая система решений уравнения (3.3). Предположим, что существует $x_0 \in [a,b]$, такое что $W(x_0) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

Следовательно, столбцы этого определителя линейно зависимы, и поэтому существуют $\{c_k^0\}_{k=1}^n$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^n \left|c_k^0\right| > 0$ и

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^n c_k^0 y_k(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{k=1}^n c_k^0 y_k^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Рассмотрим функцию $y(x) = \sum\limits_{k=1}^n c_k^0 y_k(x)$. Очевидно, что $y(x)$ является решением задачи Коши для уравнения (3.3) с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Но у задачи (3.3), (3.7) имеется решение $\tilde{y}(x) \equiv 0$(которое называется тривиальным решением). В силу единственности решения задачи Коши приходим к выводу, что $\sum\limits_{k=1}^n c_k^0 y_k(x) \equiv 0$ при любых $x \in [a,b]$. А это означает, что система $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ линейно зависима. Получили противоречие.

Достаточность. Предположим противное, т. е. что система $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ является линейно зависимой. Но тогда в силу теоремы 3.2 её вронскиан тождественно равен нулю. Получили противоречие. $\square$

Замечание Требование в теореме 3.6, чтобы функции $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ являлись решениями уравнения (3.3), существенно, о чем свидетельствует следующий пример. Пусть $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = |x|^3$, $x \in [-1, 1]$. Нетрудно убедиться, что эти функции линейно независимы, в то же время их определитель Вронского при $x \in [-1, 1]$ равен нулю.

Определение 3.3. Линейно независимая система $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ решений (3.3) называется *фундаментальной системой решений.*

Теорема 3.7. *У всякого уравнения $l(y) = 0$ существует фундаментальная система решений.*

Доказательство. Выберем числа $a_{j\,k}$, $j, k = 1, \ldots, n$, так чтобы $\Delta = \det(a_{jk})_{j,k=1}^n \neq 0$, например, $a_{jk} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера.

Рассмотрим n задач Коши для уравнения (3.3) с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0) = a_{1k}, \\ y'(x_0) = a_{2k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{nk}, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Обозначим через $y_k(x)$ решение задачи Коши (3.3), (3.8). Убедимся, что система $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ является фундаментальной. Для этого достаточно заметить, что её определитель Вронского при $x = x_0$ равен Δ, и, следовательно, отличен от нуля. $\square$

Теорема 3.8. *Предположим, что уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

и

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_n(x)y = 0, \quad x \in [a, b],$$

имеют общую фундаментальную систему решений. Тогда

$$a_k(x) = b_k(x), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Обозначим через $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ фундаментальную систему решений данных уравнений. Имеем

$$\tilde{y}_k^{(n)}(x) + a_1(x)\tilde{y}_k^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)\tilde{y}_k(x) \equiv 0$$

и

$$\tilde{y}_k^{(n)}(x) + b_1(x)\tilde{y}_k^{(n-1)}(x) + \cdots + b_n(x)\tilde{y}_k(x) \equiv 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Вычитая из первого тождества второе, приходим к системе

$$\begin{cases} [a_1(x) - b_1(x)]\tilde{y}_1^{(n-1)}(x) + [a_2(x) - b_2(x)]\tilde{y}_1^{(n-2)}(x) + \cdots + \\ \qquad\qquad + [a_n(x) - b_n(x)]\tilde{y}_1(x) \equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [a_1(x) - b_1(x)]\tilde{y}_n^{(n-1)}(x) + [a_2(x) - b_2(x)]\tilde{y}_n^{(n-2)}(x) + \cdots + \\ \qquad\qquad + [a_n(x) - b_n(x)]\tilde{y}_n(x) \equiv 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

$x \in [a, b]$. Пусть x — произвольное, но фиксированное число из отрезка $[a, b]$. Рассмотрим линейную алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных $\{u_k\}_{k=1}^n$

$$\begin{cases} \tilde{y}_1^{(n-1)}(x)u_1 + \tilde{y}_1^{(n-2)}(x)u_2 + \cdots + \tilde{y}_1(x)u_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{y}_n^{(n-1)}(x)u_1 + \tilde{y}_n^{(n-2)}(x)u_2 + \cdots + \tilde{y}_n(x)u_n = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Тождества (3.9) означают, что решением (3.10) являются числа $\{a_k(x) - b_k(x)\}_{k=1}^n$. Но определителем системы (3.10) является определитель

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \tilde{y}_1^{(n-1)}(x) & \tilde{y}_1^{(n-2)}(x) & \ldots & \tilde{y}_1(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \tilde{y}_n^{(n-1)}(x) & \tilde{y}_n^{(n-2)}(x) & \ldots & \tilde{y}_n(x) \end{vmatrix},$$

который с точностью до знака совпадает с вронскианом системы $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$. Следовательно, $\Delta(x) \neq 0$. Отсюда следует, что система (3.10) имеет только тривиальное решение, т.е. $a_k(x) - b_k(x) = 0$ при любом $x \in [a, b]$. Что и требовалось доказать. □

Теорема 3.9. *Предположим, что система функций* $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ *удовлетворяет следующим условиям:* 1) *функции* $y_k(x)$ *непрерывны на* $[a, b]$ *вместе со своими производными до порядка* n *включительно;* 2) *при любых* $x \in [a, b]$ *вронскиан* $W(x)$ *этой системы отличен от нуля. Тогда существует единственное уравнение вида* $l(y) = 0$, *для которого функции* $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ *образуют фундаментальную систему решений.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.11)$$

Раскладывая определитель в (3.11) по элементам последнего столбца, убеждаемся, что левая часть этого уравнения имеет вид $l(y)$. Поэтому остается убедиться, что функции $y_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, являются решениями (3.11). Но это очевидно, так как при подстановке в (3.11) $y_k(x)$ получается определитель, в котором k-й столбец совпадает с $(n+1)$-м. Единственность искомого уравнения следует из теоремы 3.8. □

Лемма 3.1. *Пусть*

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

где $a_{kj}(x)$, $k, j = 1, 2, \dots, n$, непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции. Тогда

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} a_{11}'(x) & \dots & a_{1n}'(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}'(x) & \dots & a_{2n}'(x) \\ a_{31}(x) & \dots & a_{3n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1,1}(x) & \dots & a_{n-1,n}(x) \\ a_{n1}'(x) & \dots & a_{nn}'(x) \end{vmatrix}. \qquad (3.12)$$

Доказательство. По определению

$$\Delta(x) = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_n=1 \\ j_k \neq j_m}} (-1)^{\alpha(j_1,\dots,j_n)} a_{1j_1}(x) \cdot a_{2j_2}(x) \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}(x),$$

где $\alpha(j_1,\ldots,j_n)$ — число инверсий в перестановке $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$. Поэтому

$$\Delta'(x)=\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n=1\\ j_k\neq j_m}}^{n}(-1)^{\alpha(j_1,\ldots,j_n)}a'_{1j_1}(x)a_{2j_2}(x)\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}(x)+\cdots+$$
$$+\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n=1\\ j_k\neq j_m}}^{n}(-1)^{\alpha(j_1,\ldots,j_n)}a_{1j_1}(x)\cdot\ldots\cdot a_{n-1,j_{n-1}}(x)a'_{nj_n}(x).$$

Отсюда следует формула (3.12). □

Теорема 3.10. *Пусть* $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ *— произвольная система решений уравнения* (3.3), *а* $W(x)$ *— вронскиан этой системы. Тогда для любого* $x_0\in[a,b]$ *справедлива формула Остроградского – Лиувилля*

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a_1(t)\,dt}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой для вычисления производной определителя

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x)\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x)\end{vmatrix}.$$

Очевидно, что все слагаемые в правой части этого равенства за исключением, быть может, последнего равны нулю. Преобразуем n-ю строку в последнем определителе, учитывая, что

$$y_k^{(n)}(x)\equiv -a_1(x)y_k^{(n-1)}(x)-\ldots-a_n(x)y_k(x),\quad k=1,\ldots,n.$$

В результате получим

$$W'(x)=-\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\begin{vmatrix} y_1'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(n-j)}(x) & \cdots & y_n^{(n-j)}(x)\end{vmatrix}=-a_1(x)W(x),$$

так как при $j=1,\ldots,n-1$ определители равны нулю.

Таким образом, приходим к выводу, что $W(x)$ удовлетворяет уравнению $W'=-a_1(x)W$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, приходим к (3.13). □

3.2. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка

Рассмотрим уравнение (3.1).

Определение 3.4. Функция $y(x, c_1, \ldots, c_n)$ называется *общим решением* уравнения (3.1), если 1) при любых значениях констант c_1, c_2, …, c_n она является решением (3.1); 2) для любого решения $\tilde{y}(x)$ существуют c_1^0, c_2^0, …, c_n^0 такие, что $y(x, c_1^0, \ldots, c_n^0) \equiv \tilde{y}(x)$.

Теорема 3.11. *Общее решение уравнения* (3.1) *имеет вид*

$$y(x, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + y_ч(x), \tag{3.14}$$

где $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ *— произвольная фундаментальная система решений уравнения* (3.3), *а* $y_ч(x)$ *— любое фиксированное решение* (3.1).

Доказательство. Наличие свойства 1) очевидно. Пусть $\tilde{y}(x)$ решение уравнения (3.1). Укажем способ выбора $\{c_k^0\}_{k=1}^n$, при котором $y(x,\ c_{_1}^0, \ldots, c_{_n}^0) \equiv \tilde{y}(x)$. С этой целью воспользуемся теоремой 3.1, согласно которой два решения уравнения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям задачи Коши, совпадают.

Поэтому потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) + y_ч(x_0) = \tilde{y}(x_0), \\ c_1 y_1'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) + y_ч'(x_0) = \tilde{y}'(x_0), \\ c_1 y_{_1}^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_{_n}^{(n-1)}(x_0) + y_ч^{(n-1)}(x_0) = \tilde{y}^{(n-1)}(x_0), \end{cases} \tag{3.15}$$

где x_0 — произвольная фиксированная точка отрезка $[a, b]$.

Система (3.15) является линейной алгебраической системой относительно неизвестных $\{c_k\}_{k=1}^n$. Определителем этой системы является определитель Вронского фундаментальной системы $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$, подсчитанный в точке x_0, а потому отличный от нуля. Следовательно, система (3.15) имеет единственное решение $\{c_k^0\}_{k=1}^n$, которое является искомым. □

Для сокращения записи, общие решения уравнений (3.1) и (3.3) будем обозначать $y_{он}$ и $y_{оо}$ соответственно. Очевидно, что справедливы утверждения.

Следствие 3.1. *Общее решение уравнения* (3.3) *имеет вид*

$$y_{оо} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x), \tag{3.16}$$

где $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ *— фундаментальная система решений* (3.3).

Следствие 3.2. *Общее решение уравнения* (3.1) *имеет вид*

$$y_{он} = y_{оо} + y_ч(x). \tag{3.17}$$

Формула (3.14) показывает, что вопрос интегрирования уравнения (3.1) сводится к решению двух задач: 1) нахождению фундаментальной системы решений (3.3); 2) построению частного решения (3.1).

Покажем, что если первая задача решена, то решение второй задачи сводится к решению алгебраической системы, причём последнее всегда существует.

В следующей теореме излагается метод нахождения частного решения $y_ч$, который называется *методом вариации произвольных постоянных* или *методом Лагранжа.*

Теорема 3.12. *Пусть* $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ *— фундаментальная система решений* (3.3), *а* $W(x)$ *— её определитель Вронского. Тогда уравнение* (3.1) *имеет частное решение, допускающее представление*

$$y_ч(x) = \sum_{k=1}^n \int \frac{W_k(x)}{W(x)} f(x)dx \cdot y_k(x), \tag{3.18}$$

где $W_k(x)$ *— алгебраическое дополнение элемента* $W(x)$, *стоящего в* n*-й строке и* k*-ом столбце.*

Доказательство. Будем искать решение $y_ч(x)$ в виде

$$y_ч(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k(x), \tag{3.19}$$

где функции $\{c_k(x)\}_{k=1}^n$ подлежат определению.

Вычислим производные $y_ч(x)$. Имеем

$$y'_ч(x) = \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k(x) + \sum_{k=1}^n c_k(x) y'_k(x).$$

Потребуем, чтобы имело место равенство

$$\sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k(x) = 0 \tag{3.20}$$

При выполнении (3.20), формула для $y'_ч(x)$ примет вид

$$y'_ч(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y'_k(x).$$

Поступая аналогично, находим

$$y''_ч(x) = \sum_{k=1}^{n} c'_k(x)y'_k(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x)y''_k(x).$$

Потребуем, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(x)y'_k(x) = 0. \tag{3.21}$$

Тогда $y''_ч(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)y''_k(x)$.

Продолжая указанный процесс, подчиняем $c_k(x)$ условиям

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(x)y_k^{(m)}(x) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots n-2. \tag{3.22}$$

При этом формулы для производных $y_ч(x)$ будут иметь вид

$$y_ч^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)y_k^{(m)}(x), \quad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.23}$$

Теперь вычислим $y_ч^{(n)}(x)$ и подставим полученные представления для производных в уравнение (3.1). В результате приходим к уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x)y_k^{(n)}(x) +$$
$$+a_1(x)\sum_{k=1}^{n} c_k(x)y_k^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\sum_{k=1}^{n} c_k(x)y_k(x) = f(x).$$

Преобразуем левую часть следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x)[y_k^{(n)}(x) + a_1(x)y_k^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y_k(x)].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть $l(y_k)$, и, следовательно, равно нулю. Таким образом, последнее уравнение принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(x)y_k^{(n-1)}(x) = f(x). \tag{3.24}$$

Для определения $\{c_k'(x)\}_{k=1}^n$ приходим к системе (3.22), (3.24). Определителем этой системы является вронскиан фундаментальной системы, который отличен от нуля. Поэтому, применяя формулы Крамера, получим

$$c_k'(x) = \frac{1}{W(x)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_{k-1}(x) & 0 & y_{k+1}(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_{k-1}^{(n-2)}(x) & 0 & y_{k+1}^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{k-1}^{(n-1)}(x) & f(x) & y_{k+1}^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по элементам k-го столбца, в результате приходим к представлению

$$c_k'(x) = \frac{W_k(x)}{W(x)} f(x), \quad k = 1, \dots, n,$$

где $W_k(x)$ — алгебраическое дополнение элемента определителя Вронского, стоящего в n-ой строке и k-ом столбце. Отсюда

$$c_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)} f(x) dx + c_k^0, \quad k = 1, \dots, n,$$

где c_k^0 — произвольные константы. Возвращаясь к формуле (3.19), находим все решения (3.1).

Пусть, например, $c_k^0 = 0$, тогда соответствующее частное решение будет иметь вид

$$y_ч(x) = \sum_{k=1}^n \int \frac{W_k(x)}{W(x)} f(x) dx \cdot y_k(x). \qquad \square$$

3.3. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \tag{3.25}$$

где $a_k = \text{const}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $a_0 \neq 0$.

Сначала изучим соответствующее однородное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \tag{3.26}$$

Для построения фундаментальной системы решений уравнения (3.26) воспользуемся методом Эйлера, суть которого состоит в отыскании решений в виде $x^m e^{\lambda x}$, где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, λ — некоторые числа, вообще говоря, комплексные.

Определение 3.5. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Функцией $e^{\lambda x}$ называется функция

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{3.27}$$

Очевидно, что при $\beta \neq 0$ функция $e^{\lambda x}$ является комплекснозначной. Если же $\beta = 0$, то данное определение совпадает с понятием экспоненты с вещественным показателем. Отметим так же, что из (3.27) следует, что $\left|e^{\lambda x}\right| = e^{Re\lambda x}$, и поэтому $e^{\lambda x} \neq 0$ при любых x.

Определение 3.6. Пусть $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — вещественнозначные функции. *Производной m-ого порядка* $f(x)$, $m \in \mathbb{N}$, называется функция $f^{(m)}(x) = u^{(m)}(x) + iv^{(m)}(x)$.

Теорема 3.13. *Справедлива формула*

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}. \tag{3.28}$$

Доказательство. Из (3.27) имеем

$$(e^{\lambda x})' = (e^{\alpha x}\cos\beta x)' + i(e^{\alpha x}\sin\beta x)' = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x +$$
$$+ i\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + i\beta e^{\alpha x}\cos\beta x = (\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x)e^{\alpha x} =$$
$$= [(\alpha + i\beta)\cos\beta x + i(\alpha + i\beta)\sin\beta x]e^{\alpha x} = \lambda e^{\lambda x}. \quad \square$$

Обозначим через $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Этот многочлен называется характеристическим многочленом для уравнения (3.26).

Лемма 3.2. *Имеет место тождество*

$$l(e^{\lambda x}) \equiv p(\lambda)e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Справедливость (3.29) очевидно следует из формулы $(e^{\lambda x})^{(m)} = \lambda^m e^{\lambda x}, m \in \mathbb{N}$, являющейся простым следствием (3.28).

Из леммы 3.2. вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.14. *Для того чтобы функция $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ являлась решением* (3.26), *необходимо и достаточно, чтобы λ_0 было корнем $p(\lambda)$.*

Напомним понятие кратного корня.

Определение 3.7. Число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется *корнем многочлена* $p(\lambda)$ кратности m, $(m \in \mathbb{N})$, если $p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = \ldots = p^{(m-1)}(\lambda_0) = 0$, $p^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$.

Основная теорема алгебры. *Пусть $p(\lambda)$ — многочлен степени n, $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ — его всевозможные различные корни, имеющие кратности n_k соответственно, тогда $\sum\limits_{k=1}^{m} n_k = n$.*

Обозначим $\ell(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y$, $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$, $\ell_1(y) = na_0 y^{(n-1)} + (n-1)a_1 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}$, $p_1(\lambda) = na_0\lambda^{n-1} + (n-1)a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$. Очевидно, что $p_1(\lambda) = p'(\lambda)$.

Лемма 3.3. Для любой функции $y(x)$, имеющей непрерывную производную n-го порядка, справедлива формула

$$\ell(x\,y) = \ell_1(y) + x\ell(y). \tag{3.30}$$

Для доказательства (3.30) достаточно воспользоваться равенством

$$(xy(x))^{(k)} = ky^{(k-1)}(x) + xy^{(k)}(x).$$

Лемма 3.4. При $m = 0, 1, \ldots$ имеет место тождество

$$\ell(x^m e^{\lambda x}) = \left(\sum_{j=0}^{m} C_m^j p^{(j)}(\lambda) x^{m-j}\right) e^{\lambda x}. \tag{3.31}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $m = 0$ имеем $\ell(e^{\lambda x}) = p(\lambda)e^{\lambda x}$, и, следовательно, утверждение справедливо. Предположим теперь, что формула (3.31) имеет место для произвольного $\ell(y)$ и докажем, что

$$\ell(x^{m+1} e^{\lambda x}) = \left(\sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j p^{(j)}(\lambda) x^{m+1-j}\right) e^{\lambda x}. \tag{3.32}$$

Из формулы (3.30) следует, что $\ell(x^{m+1}e^{\lambda x}) = \ell_1(x^m e^{\lambda x}) + x\ell(x^m e^{\lambda x})$. Поэтому, учитывая индукционное предположение, получим

$$\ell(x^{m+1} e^{\lambda x}) = \left(\sum_{j=0}^{m} C_m^j p^{(j+1)}(\lambda) x^{m-j} + \sum_{j=0}^{m} C_m^j p^{(j)}(\lambda) x^{m+1-j}\right) e^{\lambda x}.$$

Преобразуем получившееся выражение, выделив по одному слагаемому в каждой сумме.

$$\ell(x^{m+1}e^{\lambda x}) = \left(C_m^m p^{(m+1)}(\lambda) + \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j p^{(j+1)}(\lambda) x^{m-j} + C_m^0 p(\lambda) x^{m+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} C_m^j p^{(j)}(\lambda) x^{m+1-j} \right) e^{\lambda x} = \left(C_m^0 p(\lambda) x^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} C_m^{j-1} p^{(j)}(\lambda) x^{m+1-j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} C_m^j p^{(j)}(\lambda) x^{m+1-j} + C_m^m p^{(m+1)}(\lambda) \right) e^{\lambda x} = \left(C_{m+1}^0 p(\lambda) x^{m+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} (C_m^{j-1} + C_m^j) p^{(j)}(\lambda) x^{m+1-j} + C_{m+1}^{m+1} p^{(m+1)}(\lambda) \right) e^{\lambda x} =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j p^{(j)}(\lambda) x^{m+1-j} \right) e^{\lambda x} \quad \square$$

Следствие 3.3. Пусть λ_0 – корень $p(\lambda)$ кратности k. Тогда функции $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ являются решениями уравнения $\ell(y) = 0$.

Справедливость этого утверждения следует из формулы (3.31) при $\lambda = \lambda_0$, так как для $m = 0, 1, \ldots, k-1$ ее правая часть равна нулю.

Приведём теперь примеры конкретных линейно независимых систем функций, которые будут играть важную роль в дальнейшем.

Лемма 3.5. *Система функций* $\{x^k\}_{k=0}^m, m = 0, 1, \ldots$ *линейно независима на любом отрезке.*

Доказательство. Воспользуемся методом от противного, т. е. предположим, что система $\{x^k\}_{k=0}^m$ линейно зависима. По определению это означает, что существуют константы c_0, c_1, ..., c_m, среди которых есть отличные от нуля, такие что $c_0 \cdot 1 + c_1 x + \ldots + c_m x^m \equiv 0$ при любых $x \in [a, b]$, что противоречит основной теореме алгебры. $\square$

Лемма 3.6. *Система функций* $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \neq \lambda_j$ *при* $k \neq j$, *линейно независима на любом отрезке.*

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $m = 1$ тождество $c_1 e^{\lambda_1 x} \equiv 0$ возможно лишь при $c_1 = 0$. Предположим теперь, что система из $m-1$ экспоненты линейно независима на $[a, b]$, и докажем, что тогда и система из m экспонент линейно независима.

Предположим противное, т. е. что система $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^m$ линейно зависима, и, следовательно, существует набор констант $c_1, \ldots, c_m$, среди которых есть отличные от нуля, такой что

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_m e^{\lambda_m x} \equiv 0. \qquad (3.33)$$

Пусть, для определённости, $c_1 \neq 0$. Умножим обе части (3.33) на $e^{-\lambda_m x}$, а затем получившееся тождество продифференцируем. В результате получим

$$(\lambda_1 - \lambda_m)c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} + \ldots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)c_{m-1}e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x} \equiv 0,$$

но так как $(\lambda_1 - \lambda_m) \neq 0$, то последнее тождество означает, что система экспонент $\{e^{(\lambda_k - \lambda_m)x}\}_{k=1}^{m-1}$ линейно зависима, что противоречит индукционному предположению. $\square$

Лемма 3.7. *Система функций*

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, \; xe^{\lambda_1 x}, \ldots, \; x^{k_1}e^{\lambda_1 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\lambda_m x}, \; xe^{\lambda_m x}, \ldots, \; x^{k_m}e^{\lambda_m x}, \end{cases} \tag{3.34}$$

где $m \in \mathbb{N}$, k_1, k_2, ..., k_m — произвольные целые неотрицательные числа, линейно независима на любом отрезке.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по числу экспонент. При $m = 1$ система функций $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, ..., $x^{k_1}e^{\lambda_1 x}\ldots$ линейно независима в силу леммы 3.5. Предположим, что система функций вида (3.34), порождённая $(m-1)$-ой экспонентой, линейно независима. Докажем, что тогда и система (3.34) линейно независима. Предположим противное. В этом случае существует $\{c_k\}_{k=1}^{n_0}$, $\sum\limits_{k=1}^{n_0}|c_k| > 0$, $n_0 = \sum\limits_{j=1}^{m} k_j + m$, такая что линейная комбинация этих функций с коэффициентами $\{c_k\}_{k=1}^{n_0}$ тождественно равна нулю. Следовательно,

$$p_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + p_m(x)e^{\lambda_m x} \equiv 0, \tag{3.35}$$

где $p_k(x)$ — алгебраические многочлены, среди которых есть отличный от тождественного нуля. Пусть это $p_1(x)$. Обозначим степень $p_k(x)$ через σ_k. Умножим обе части (3.35) на $e^{-\lambda_m x}$

$$p_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} + \ldots + p_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x} + p_m(x) \equiv 0, \tag{3.36}$$

Далее, $(p_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x})' = [p_1'(x) + (\lambda_1 - \lambda_m)p_1(x)]e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x}$.

Очевидно, что степень многочлена, стоящего в квадратных скобках, равна степени $p_1(x)$, и, следовательно, его старший коэффициент отличен от нуля.

Продифференцируем (3.36) $\sigma_m + 1$ раз. В результате, получим $\tilde{p}_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} + \ldots + \tilde{p}_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x} \equiv 0$, где $\tilde{p}_k(x)$ — некоторые алгебраические многочлены, причем $\tilde{p}_1(x) \not\equiv 0$.

Последнее тождество означает, что система функций вида (3.34), порожденная $(m-1)$-ой экспонентой, линейно зависима. А это противоречит индукционному предположению. □

Займемся теперь построением фундаментальной системы решений уравнения (3.26).

Вид фундаментальной системы решений этого уравнения зависит от свойств корней $p(\lambda)$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Предположим, что $p(\lambda)$ имеет n различных вещественных корней $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$. Убедимся, что в качестве фундаментальной системы можно взять $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^n$. В самом деле, из теоремы 3.14 следует, что функции $e^{\lambda_k x}$ являются решениями (3.26), причем в силу леммы 3.6 они линейно независимы.

Случай 2. Пусть, по-прежнему, $p(\lambda)$ имеет n различных корней, но среди них имеются комплексные.

Как и в случае 1 в качестве фундаментальной системы решений можно взять $\{\ e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^n$. Заметим, что решения, отвечающие невещественным λ_k, являются комплекснозначными функциями. Иногда удобнее иметь дело с фундаментальной системой, состоящей из вещественных функций. Укажем способ построения такой системы при дополнительном предположении, что коэффициенты a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, уравнения (3.26) вещественны.

Известно, что в этом случае, если, например, $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\beta_1 \neq 0$ является корнем $p(\lambda)$, то и $\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1$ есть корень характеристического многочлена. Пусть $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. Из теоремы 3.4 следует, что функции $\tilde{y}_1(x) = \operatorname{Re} y_1(x) = e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x$ и $\tilde{y}_2(x) = \operatorname{Im} y_1(x) = e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x$ также являются решениями (3.26). Таким образом, каждой паре комплексно сопряженных корней $p(\lambda\,)$ соответствует два вещественных решения уравнения (3.26). В результате указанной процедуры будет получена система вещественных решений $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ (здесь решения $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$ при λ_k вещественном переобозначены через $\tilde{y}_k(x)$). Остается убедиться, что построенная система является линейно независимой. Для этого достаточно воспользоваться следующим известным фактом.

Теорема 3.15. *Пусть даны системы функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^n$ и $\{\tilde{f}_k(x)\}_{k=1}^n$, причем первая система линейно независима. Тогда, если любая $f_k(x)$ является линейной комбинацией функций второй системы, то последняя также линейно независима.*

Случай 3. Предположим, что многочлен $p(\lambda)$ имеет m различных корней $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$, имеющих кратности $\{n_k\}_{k=1}^m$. Рассмотрим функции

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\lambda_m x},\ xe^{\lambda_m x},\ \ldots,\ x^{n_m-1}e^{\lambda_m x}. \end{gathered}$$

В силу основной теоремы алгебры в этой системе n функций. В то же время, из следствия 3.3 следует, что каждая из этих функций является решением уравнения (3.26). Наконец, учитывая лемму 3.7, заключаем, что рассматриваемая система является фундаментальной системой решений (3.26). Заметим, что в случае вещественных коэффициентов a_k и наличия невещественных корней у $p(\lambda)$ с помощью процедуры, описанной выше, можно построить фундаментальную систему решений, состоящую из вещественных функций.

В заключение этого раздела рассмотрим *метод неопределенных коэффициентов*, позволяющий найти частное решение уравнения (3.25) в случае, когда $f(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}$, где $Q_m(x)$ — многочлен степени m, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Лемма 3.8. *Справедливо следующее равенство*

$$\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{j=0}^{\nu} a_{\nu j} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{\nu=j}^{m} a_{\nu j}, \tag{3.37}$$

где $a_{\nu j}$ — заданные числа.

Доказательство. Обозначим левую часть в (3.37) через S. Запишем S подробно:

$$S = a_{00} + (a_{10} + a_{11}) + (a_{20} + a_{21} + a_{22}) + \cdots + +(a_{m0} + a_{m1} + \cdots + a_{mm}).$$

Перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$S = (a_{00}+a_{10}+\cdots+a_{m0})+(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1})+(a_{22}+\cdots+a_{m2})+\cdots+a_{mm}.$$

Полученное представление совпадает с правой частью (3.37). $\square$

Теорема 3.16. *Предположим, что α является корнем $p(\lambda)$ кратности n_0, тогда уравнение*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = Q_m(x)e^{\alpha x} \tag{3.38}$$

имеет частное решение вида

$$y_ч(x) = x^{n_0} R_m(x) e^{\alpha x}, \tag{3.39}$$

где $R_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$.

Доказательство. Укажем способ выбора коэффициентов b_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, при котором правая часть в (3.39) представляет собой решение (3.38). С этой целью обозначим $Q_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} d_k x^k$, а затем подставим $y_ч(x)$ в (3.38). Имеем, учитывая лемму 3.4,

$$\ell(y_ч) = \ell\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^{k+n_0} e^{\alpha x}\right) = \sum_{k=0}^{m} b_k \ell(x^{k+n_0} e^{\alpha x}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\sum_{\nu=0}^{k+n_0} C_{k+n_0}^{\nu} p^{(\nu)}(\alpha) x^{k+n_0-\nu} e^{\alpha x}\right).$$

Но так как $p(\alpha) = p'(\alpha) = \ldots = p^{(n_0-1)}(\alpha) = 0$, то

$$\ell(y_ч) = \left(\sum_{k=0}^{m} b_k \sum_{\nu=n_0}^{k+n_0} C_{k+n_0}^{\nu} p^{(\nu)}(\alpha) x^{k+n_0-\nu}\right) e^{\alpha x}.$$

Выполним во внутренней сумме замену индекса суммирования, положив $k + n_0 - \nu = j$. В результате получим

$$\ell(y_ч) = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^{m} b_k \sum_{j=n_0}^{k} C_{k+n_0}^{k+n_0-j} p^{(k+n_0-j)}(\alpha) x^j.$$

Воспользуемся (3.37):

$$\ell(y_ч) = e^{\alpha x} \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{k=j}^{m} b_k C_{k+n_0}^{k+n_0-j} p^{(k+n_0-j)}(\alpha)\right) x^j.$$

Следовательно, для того чтобы правая часть (3.39) являлась решением (3.38), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{k=j}^{m} b_k C_{k+n_0}^{k+n_0-j} p^{(k+n_0-j)}(\alpha)\right) x^j \equiv \sum_{j=0}^{m} d_j x^j,$$

которое равносильно равенству коэффициентов, стоящих при одинаковых степенях x, т. е.

$$\sum_{k=j}^{m} b_k C_{k+n_0}^{k+n_0-j} p^{(k+n_0-j)}(\alpha) = d_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m. \qquad (3.40)$$

Уравнения (3.40) представляют систему линейных уравнений относительно неизвестных $\{b_k\}_{k=0}^{m}$. Покажем, что система (3.40) имеет единственное решение. При $j = m$ уравнение (3.40) имеет вид $b_m c_{k+n_0}^{n_0} p^{(n_0)}(\alpha) = d_m$. Но так как по условию $p^{(n_0)}(\alpha) \neq 0$, то из последнего уравнения можно найти b_m. Полагая $j = m-1, m-2, \ldots, 0$, последовательно находим $b_{m-1}, b_{m-2}, \ldots, b_0$. $\square$

Замечание Возможности применения метода неопределенных коэффициентов иногда можно расширить, если воспользоваться следующим очевидным утверждением.

Теорема 3.17. *Предположим, что* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)$, *где* $f_k(x)$ *— заданные функции, тогда уравнение* $l(y) = f(x)$ *имеет частное решение вида* $y_ч(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} y_{чk}(x)$, *где* $y_{чk}(x)$ *— решение уравнения* $l(y) = f_k(x)$.

3.4. Уравнения Эйлера

Уравнения Эйлера — это линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами специального вида, которые с помощью простой замены переменной приводятся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Определение 3.8. *Уравнением Эйлера n-го порядка* называется уравнение

$$b_0(ax+b)^n y^{(n)} + b_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_n y = f(x), \qquad (3.41)$$

где $a, b, b_0, \ldots, b_n$ — числа, $b_0 \neq 0$, $a \neq 0$.

Если в уравнении (3.41) сделать замену переменной $ax + b = t$, то для новой неизвестной функции $z(t) = y(\frac{t-b}{a})$ справедливы формулы

$$z'(t) = \frac{1}{a} y'(x), \ldots, z^{(n)}(t) = \frac{1}{a^n} y^{(n)}(x), \text{ где } x = \frac{t-b}{a}.$$

На основании этих формул уравнение (3.41) примет вид

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (3.42)$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — числа, $a_0 \neq 0$. Таким образом, не уменьшая общности, можно изучать уравнение (3.42).

Теорема 3.18. *Уравнение*

$$x^n y^{(n)} = 0, \; x > 0, \; n \geq 1, \qquad (3.43)$$

заменой $x = e^t$, $-\infty < t < \infty$, приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$z^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} z' = 0, \tag{3.44}$$

причем характеристическим уравнением у (3.44) *будет уравнение*

$$\lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 1) = 0. \tag{3.45}$$

Доказательство. Будем рассуждать по индукции. При $n = 1$ имеем

$$xy' = xz' \frac{dt}{dx} = xz'(\ln x)' = z'.$$

Предположим теперь, что

$$x^{n-1} y^{(n-1)} = z^{(n-1)} + b_1 z^{(n-2)} + \ldots + b_{n-2} z',$$

и рассмотрим

$$x^n y^{(n)} = x^n \left((x^{n-1} y^{(n-1)}) \frac{1}{x^{n-1}} \right)' =$$
$$= x^n \left[\frac{d}{dx} (x^{n-1} y^{(n-1)}) x^{1-n} + x^{n-1} y^{(n-1)} (1-n) x^{-n} \right] =$$
$$= x \frac{d}{dx} \left(z^{(n-1)} + b_1 z^{(n-2)} + \ldots + b_{n-2} z' \right) +$$
$$+ (1-n) \left(z^{(n-1)} + b_1 z^{(n-2)} + \ldots + b_{n-2} z' \right) =$$
$$= x \left(z^{(n)} \frac{1}{x} + b_1 z^{(n-1)} \frac{1}{x} + \ldots + b_{n-2} z'' \frac{1}{x} \right) +$$
$$+ (1-n) \left(z^{(n-1)} + \ldots + b_{n-2} z' \right) = z^{(n)} + (b_1 + 1 - n) z^{(n-1)} + \ldots + (1-n) b_{n-2} z'$$

Таким образом, формула (3.44) доказана.

Покажем теперь, что характеристическим уравнением для уравнения (3.44) будет (3.45). Предположим, что функция $e^{\lambda_1 t}$ есть решение уравнения (3.44), т. е. λ_1 — корень характеристического уравнения (3.44). Но тогда, выполнив обратную замену $t = \ln x$, получаем, что x^{λ_1} — решение уравнения (3.43), и, поскольку $(x^{\lambda_1})^{(n)} = \lambda_1(\lambda_1 - 1) \ldots (\lambda_1 - (n-1)) x^{\lambda_1 - n}$, должно выполняться тождество

$$\lambda_1(\lambda_1 - 1) \ldots (\lambda_1 - n + 1) x^{\lambda_1} \equiv 0.$$

Следовательно, λ_1 — корень уравнения (3.45). Рассуждая в обратном порядке, получаем, что корни уравнения (3.45) и характеристического уравнения совпадают. Лемма доказана. □

Следствие *Если в уравнении* (3.42) *в предположении, что* $x > 0$, *выполнить замену* $x = e^t$, $-\infty < t < \infty$, *то относительно новой неизвестной функции* $z(t) = y(e^t)$ *получится линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическим уравнением которого будет уравнение*

$$\sum_{k=2}^{n} a_{n-k}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{3.46}$$

Замечание. Если в уравнении (3.42) $x < 0$, то надо сделать замену $x = -e^t$, $-\infty < t < \infty$, характеристическое уравнение (3.46) при этом не изменится.

Пример. Решить уравнение

$$x^2y'' + xy' - y = x^2,\ x > 0. \tag{3.47}$$

Решение. Сделаем замену $x = e^t$. Выразим производные неизвестной функции $y(x)$ через производные новой неизвестной функции $z(t) = y(e^t)$:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}z(\ln x) = z'(t)\frac{1}{x};$$

$$y''(x) = z''(t)\frac{1}{x^2} - z'(t)\frac{1}{x^2}.$$

После подстановки этих формул в уравнение получим уравнение

$$z'' - z = e^{2t}. \tag{3.48}$$

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0$ являются $\lambda_{1,2} = \pm 1$, а функция $\frac{1}{3}e^{2t}$ является частным решением уравнения (3.48). Следовательно, общее решение уравнения (3.48) имеет вид

$$z(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}.$$

Выполнив обратную замену $t = \ln x$, получим общее решение уравнения (3.47)

$$y(x) = C_1x + C_2\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2.$$

3.5. Метод степенных рядов

В данном разделе изучается вопрос о представлении решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{3.49}$$

в виде степенного ряда.

Напомним некоторые факты, связанные со свойствами степенных рядов. Не теряя общности, будем считать, что все рассмотрения ведутся в окрестности точки $x_0 = 0$, так как случай произвольного x_0 сводится к указанному с помощью замены $t = x - x_0$. Итак, пусть имеется ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{3.50}$$

Из курса математического анализа известны следующие результаты.

Теорема 3.19. *Радиус сходимости R степенного ряда* (3.50) *определяется по формуле*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}. \tag{3.51}$$

Теорема 3.20. *Пусть радиус сходимости R ряда* (3.50) *положителен, тогда при $x \in (-R, R)$ сумма $f(x)$ этого ряда имеет производные любого порядка, которые могут быть получены путем почленного дифференцирования ряда* (3.50). *Возникающие при этом ряды имеют тот же радиус сходимости.*

Теорема 3.21. *Если $f(x)$ — сумма ряда* (3.50), *то* $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Теорема 3.22. *Пусть* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, *причем ряды сходятся в интервале* $(-R_0, R_0)$. *Тогда* $f(x)g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, *где* $c_k = \sum\limits_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}$, *и последний ряд сходится на том же интервале.*

В дальнейшем потребуется следующее утверждение.

Теорема 3.23. *Для того, чтобы ряд* (3.50) *имел радиус сходимости , удовлетворяющий неравенству $R \geq R_0$, где R_0 — заданное положительное число, необходимо и достаточно, чтобы* *для любого* $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < R_0)$ *существовало* M_ε*, такое что для всех* "k"*справедливо неравенство*

$$|a_k| \le \frac{M_\varepsilon}{(R_0-\varepsilon)^k}. \qquad (3.52)$$

Доказательство. *Необходимость.* Из (3.51) и определения верхнего предела последовательности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < R_0)$ существует n_0, такое что при $k > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[k]{|a_k|} \le \frac{1}{R-\varepsilon}$, и, следовательно, $\sqrt[k]{|a_k|} \le \frac{1}{R_0-\varepsilon}$. Отсюда

$$|a_k| \le \frac{1}{(R_0-\varepsilon)^k}. \qquad (3.53)$$

Выберем M_ε так, чтобы при $k \le n_0$ выполнялось неравенство

$$|a_k| \le \frac{M_\varepsilon}{(R_0-\varepsilon)^k}. \qquad (3.54)$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $M_\varepsilon \ge 1$, то неравенство (3.54) с учетом (3.53) будет справедливо для всех "k".

Достаточность. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < R_0)$ существует M_ε, такое что выполняется (3.52). Но тогда $\sqrt[k]{|a_k|} \le \frac{\sqrt[k]{M_\varepsilon}}{R_0-\varepsilon}$. Отсюда заключаем, что $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \le \frac{1}{R_0-\varepsilon}\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{M_\varepsilon} = \frac{1}{R_0-\varepsilon}$, т. е. $\frac{1}{R} \le$ $\le \frac{1}{R_0-\varepsilon}$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим требуемое. □

Теорема 3.24. *Предположим, что функции* $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ *разлагаются в степенные ряды, сходящиеся в интервале* $I = (-R_0, R_0)$*, тогда всякое решение уравнения* (3.49) *на этом интервале представимо в виде степенного ряда.*

Доказательство. Так как всякое решение (3.49) однозначно определяется условиями задачи Коши, то достаточно убедиться, что решение задачи Коши с произвольными условиями

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_0', \end{cases} \qquad (3.55)$$

представимо на I степенным рядом. Будем рассуждать по необходимости. Предположим, что

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \qquad (3.56)$$

является решением задачи Коши (3.49), (3.55). Но тогда из теоремы 3.21 следует, что

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = y_0'. \tag{3.57}$$

Далее из теоремы 3.20 следует, что $y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}$. Выполним замену индекса суммирования по формуле $m = k - 1$, тогда получим

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{m+1}x^m. \tag{3.58}$$

Поступая аналогично, находим

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m. \tag{3.59}$$

Обозначим $p(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m x^m$; $q(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} q_m x^m$; $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m x^m$. Подставим (3.56), (3.58), (3.59) в уравнение (3.49):

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m + \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \cdot \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{m+1}x^m +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m.$$

Отсюда, учитывая теорему 3.22, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m + \sum_{m=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{m}(m-k+1)p_k a_{m-k+1})x^m +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{m} q_k a_{m-k})x^m = \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m.$$

Приравнивая коэффициенты при x^m в левой и правой частях, заключаем, что

$$(m+2)(m+1)a_{m+2} + \sum_{k=0}^{m}(m-k+1)p_k a_{m-k+1} + \sum_{k=0}^{m} q_k a_{m-k} = f_m.$$

И, следовательно, для коэффициентов справедливы рекуррентные формулы

$$a_{m+2} = \frac{1}{(m+2)(m+1)} \left[-\sum_{k=0}^{m} (m-k+1) p_k a_{m-k+1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{m} q_k a_{m-k} + f_m \right], \quad (3.60)$$

$m = 0, 1, \ldots$, где $a_0 = y_0$; $a_1 = y_0'$.

Теперь покажем, что ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m x^m$, в котором коэффициенты a_m определены по формулам (3.60), имеет радиус сходимости $R \geq R_0$. Учитывая теорему 3.23, достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует M_ε, такое что для всех "m"выполняется неравенство

$$|a_{m+2}| \leq \frac{M_\varepsilon}{(R_0 - 2\varepsilon)^{m+2}}. \quad (3.61)$$

Для этого воспользуемся методом математической индукции.

В силу этой же теоремы существует $M_0 = M_0(\varepsilon)$, такое что имеют место неравенства

$$|p_k| \leq \frac{M_0}{(R_0 - \varepsilon)^k}; \quad |q_k| \leq \frac{M_0}{(R_0 - \varepsilon)^k}; \quad |f_k| \leq \frac{M_0}{(R_0 - \varepsilon)^k}.$$

Из формулы (3.60) следует, что

$$|a_{m+2}| \leq \frac{1}{(m+2)(m+1)} \left(\sum_{k=0}^{m} (m-k+1) |p_k| \, |a_{m-k+1}| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{m} |q_k| \, |a_{m-k}| + |f_m| \right) \leq \frac{1}{(m+2)} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{M_0}{(R_0 - \varepsilon)^k} \, |a_{m-k+1}| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{m} \frac{M_0}{(R_0 - \varepsilon)^k} \, |a_{m-k}| + \frac{M_0}{(R_0 - \varepsilon)^m} \right). \quad (3.62)$$

Очевидно, что для любого фиксированного n_0 за счет выбора M_ε можно считать, что неравенство (3.61) выполняется при всех $m \leq n_0$. Число n_0 будет указано позднее. Итак, докажем справедливость (3.61) в предположении, что для a_k с номерами $0, 1, \ldots, m+1$ оно выполняется. Имеем из (3.62):

$$|a_{m+2}| \leq \frac{1}{(m+2)} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{M_0\, M_\varepsilon}{(R_0-\varepsilon)^k (R_0-2\varepsilon)^{m-k+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_0\, M_\varepsilon}{(R_0-\varepsilon)^k (R_0-2\varepsilon)^{m-k}} + \frac{M_0}{(R_0-\varepsilon)^m} \right) = \frac{M_\varepsilon}{(R_0-2\varepsilon)^{m+2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(m+2)} \left[(R_0-2\varepsilon) M_0 \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{R_0-2\varepsilon}{R_0-\varepsilon} \right)^k + M_0 \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{R_0-2\varepsilon}{R_0-\varepsilon} \right)^k + \right.$$

$$\left. + \frac{M_0}{M_\varepsilon} (R_0-2\varepsilon)^2 \left(\frac{R_0-2\varepsilon}{R_0-\varepsilon} \right)^m \right] \leq \frac{M_\varepsilon}{(R_0-2\varepsilon)^{m+2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(m+2)} [(R_0-2\varepsilon) M_0 \cdot S_\varepsilon + M_0 S_\varepsilon + (R_0-2\varepsilon)^2],$$

где $S_\varepsilon = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R_0-2\varepsilon}{R_0-\varepsilon} \right)^k$, и предполагается, что $M_0 \leq M_\varepsilon$.

Будем считать, что n_0 выбрано настолько большим, что выражение в квадратных скобках не превосходит $n_0 + 2$. Тогда при $m \geq n_0$ будет выполняться неравенство (3.61), а потому сумма ряда (3.56) действительно является решением задачи Коши. □

Заметим, что теорема 3.24 легко переносится на случай уравнения произвольного порядка.

3.6. Метод обобщенных степенных рядов

Метод обобщенных степенных рядов является несложной модификацией рассмотренного ранее метода степенных рядов. Продемонстрируем этот метод на примере интегрирования следующего дифференциального уравнения Бесселя (уравнения цилиндрических функций), играющего важную роль в математической физике,

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0, \quad x > 0, \tag{3.63}$$

где ν — числовой параметр, который может принимать произвольные значения. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\nu > 0 \quad \text{и} \quad \nu \neq 1, 2, \ldots. \tag{3.64}$$

Приведем вначале некоторые вспомогательные сведения из математического анализа.

Определение 3.9. *Гамма-функцией* $\Gamma(x)$ называется функция, определяемая следующим образом

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \tag{3.65}$$

Нетрудно видеть, что интеграл в (3.65) сходится абсолютно.

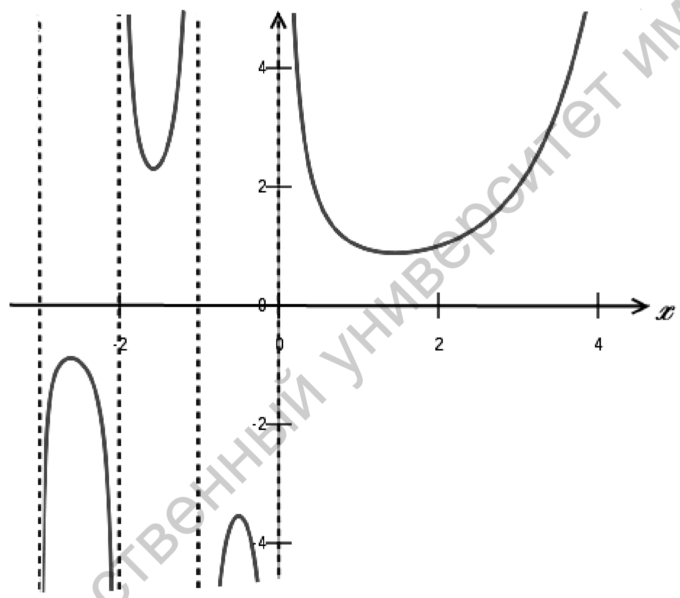
Одним из основных свойств $\Gamma(x)$ является свойство

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x). \tag{3.66}$$

Перепишем его в виде

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1). \tag{3.67}$$

Правая часть этого равенства имеет смысл при $-1 < x < 0$. Это позволяется определить $\Gamma(x)$ на интервале $(-1, 0)$. Затем, рассматривая (3.67) при $-2 < x < -1$, можно продолжить $\Gamma(x)$ на $(-2, -1)$. И т. д. В результате $\Gamma(x)$ будет определена при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме точек $0, -1, -2, \ldots$. Эта функция хорошо изучена и ее график имеет вид



Из свойства (3.66), в частности, следует, что

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma(n+1) = (n+1)!,$$
$$\Gamma(n+\nu+1) = (n+\nu)(n+\nu-1)\dots(\nu+1)\Gamma(\nu+1). \tag{3.68}$$

Определение 3.10. *Обобщенным степенным рядом* (относительно точки 0) называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha},$$

где $\alpha, a_0, a_1, \dots$ — числа, причем $\alpha \neq 0, 1, 2, \dots$.

Вернемся к уравнению (3.63). Коэффициенты при y' и y не удовлетворяют условиям теоремы 3.24. Но можно попытаться найти решения уравнения Бесселя в виде обобщенного степенного ряда.

Теорема 3.25. *У уравнения* (3.63) *существует фундаментальная система решений, представимых в виде обобщенных степенных рядов.*

Доказательство. Итак, ищем решение уравнения (3.63) в виде

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

предполагая, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой окрестности нуля. Используя свойства степенных рядов, находим, что

$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n;$$

$$y''(x) = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2\alpha x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n +$$
$$+ x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

Подставим эти формулы в (3.63) и разделим обе части получившегося тождества на $x^{\alpha-2}$:

$$\alpha(\alpha-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2\alpha x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n +$$
$$+ \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Приведем в левой части подобные члены, т. е. запишем это тождество в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0.$$

Отсюда следует, что $b_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Вычисляя непосредственно $b_0, b_1, b_2, \ldots$, получим

$$\begin{gathered}
(\alpha^2 - \nu^2)a_0 = 0;\\
(\alpha+1)^2 a_1 - \nu^2 a_1 = 0;\\
((\alpha+n)^2 - \nu^2)a_n + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \ldots .
\end{gathered} \tag{3.69}$$

Предположим, что $\alpha = \nu$. В этом случае из формул (3.69) имеем

$$\begin{aligned}
&a_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;\\
&a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 2(\nu+1)};\\
&a_4 = \frac{a_0}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 1 \cdot 2(\nu+1)(\nu+2)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} \cdot n!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3.70}$$

В этих формулах в качестве a_0 можно брать любое число, отличное от нуля. Полагая $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}$ и учитывая свойство (3.68), формулу (3.70) можно записать в виде

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \cdot \frac{1}{2^{2n+\nu}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.71}$$

Таким образом, мы нашли все коэффициенты обобщенного степенного ряда. Следовательно, функция

$$y_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

будет решением уравнения (3.63), если ряд справа сходится.

Докажем сходимость этого ряда, промажорировав его сходящимся рядом. Оценим n-й член ряда

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right| \le c\,\frac{y^n}{n!},$$

где $c = \min\limits_{0<x<\infty} \Gamma(x)$, $y = \frac{x^2}{4}$.

Следовательно, наш ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c\,\frac{y^n}{n!} = = c\,e^y$.

Мы рассмотрели случай $\alpha = \nu$. Аналогично рассматривается случай $\alpha = -\nu$, в котором приходим к другому решению уравнения (3.63)

$$y_2(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Убедимся, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя, т. е. докажем их линейную независимость на любом интервале $0 < x < a < \infty$. Пусть c_1, c_2 – числа, такие, что

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0.$$

Устремляя в этом тождестве $x \to 0+$ и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0+} y_1(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0+} y_2(x) = \infty$, получаем, что $c_2 = 0$ и, следовательно, $c_1 = 0$. Теорема доказана. □

Замечание 1. Как следует из доказательства, общее решение уравнения Бесселя (3.63) имеет вид

$$y(x) = c_1 \mathfrak{I}_\nu(x) + c_2 \mathfrak{I}_{-\nu}(x),$$

где

$$\mathfrak{I}_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu},$$

$$\mathfrak{I}_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

Функции $\mathfrak{I}_\nu(x)$ и $\mathfrak{I}_{-\nu}(x)$ называются функциями Бесселя первого рода.

Замечание 2. Рассмотрим частный случай $\nu = \frac{1}{2}$. В этом случае функции $y_1(x) = \sqrt{x}\,\frac{\sin x}{x}$ и $y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x$ являются решениями уравнения (3.63), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой их в уравнение. Из математического анализа хорошо известно, что функции $\frac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ раскладываются в степенные ряды. Тогда из доказательства теоремы следует, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ отличаются от $\mathfrak{I}_{\frac{1}{2}}(x)$ и $\mathfrak{I}_{-\frac{1}{2}}(x)$ только выбором первого коэффициента a_0, т. е. они отличаются друг от друга постоянным множителем. Используя свойства гамма-функции можно показать, что

$$\mathfrak{I}_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad \mathfrak{I}_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

В этом разделе более подробно изучаются уравнения вида

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \quad a < x < b, \tag{4.1}$$

где a, b, c, f — заданные непрерывные функции на интервале (a, b).

Будем предполагать, что коэффициент $a(x)$ нигде не обращается в 0. В этом случае, после деления обеих частей уравнения (4.1) на $a(x)$, оно примет вид

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{4.2}$$

Как известно из общей теории линейных дифференциальных уравнения, если известны два линейно независимых решения (фундаментальная система решений) соответствующего однородного уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.3}$$

то с помощью метода вариации произвольных постоянных можно найти общее решение уравнения (4.2). К сожалению, не существует формулы решения уравнения (4.3) в общем случае. Тем не менее, большое количество уравнений вида (4.3) удается решить, преобразовав их к более простым уравнениям. Рассмотрим простейшие методы преобразования уравнений второго порядка.

4.1. Линейная замена неизвестной функции

Выполним в уравнении (4.3) следующую замену

$$y(x) = u(x)z(x), \tag{4.4}$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция, а функция $u(x)$ будет выбрана ниже. После такой подстановки, учитывая, что $y' = u'z + uz'$ и $y'' = u''z + 2u'z' + uz''$, относительно функции $z(x)$ получим уравнение

$$u(x)z'' + (2u'(x) + p(x)u(x))z' + (u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x))z = 0. \tag{4.5}$$

Выберем $u(x)$ так, чтобы коэффициент при z' в уравнении (4.5) обратился в 0, т. е. возьмем в качестве $u(x)$ решение уравнения

$$2u' + p(x)u = 0.$$

Это уравнение легко решается (например, как уравнение с разделяющимися переменными). В качестве решения можно выбрать

$$u(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(t)d(t)\right), \tag{4.6}$$

где $x_0 \in (a, b)$. При таком выборе $u(x)$ обе части уравнения (4.5) можно разделить на $u(x)$ и оно примет вид

$$z'' + Q(x)z = 0, \tag{4.7}$$

где $Q(x) = -\frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) + q(x)$.

Уравнение (4.7) проще уравнения (4.3) в том смысле, что в нем отсутствует первая производная. Если уравнение (4.7) поддается решению и $z(x)$ – его решение, то формула (4.4) дает решение уравнения (4.3).

Замечание. Для применимости данного метода, очевидно, надо потребовать, чтобы коэффициент $p(x)$ в уравнении (4.3) был непрерывно дифференцируемым. Тогда коэффициент $Q(x)$ в уравнении (4.7) будет непрерывным.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение Бесселя (3.63) при $\nu = \frac{1}{2}$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0, \quad x > 0. \tag{4.8}$$

Полагаем в формуле (4.6) $x_0 = 1$ и получаем, что $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Выполняем в (4.8) замену

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}z(x). \tag{4.9}$$

Уравнение (4.7) в нашем случае имеет вид

$$z'' + z = 0.$$

Общим решением этого уравнения, очевидно, будет $z(x) = C_1\cos x + {} + C_2\sin x$. Следовательно, в силу (4.9) общим решением уравнения (4.8) является

$$y(x) = C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

4.2. Замена независимой переменной

Одним из основных методов упрощения дифференциальных уравнений является замена переменной. Перейдем в уравнении (4.3) к новой независимой переменной t по формуле

$$t = \varphi(x), \quad a < x < b, \tag{4.10}$$

где $\varphi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $\varphi'(x) > 0$. В этом случае существует обратная функция

$$x = \psi(t), \quad \varphi(a+0) < t < \varphi(b-0),$$

где $\psi(t)$ — тоже дважды непрерывно дифференцируемая. При такой замене неизвестная функция $y(x)$ перейдет в новую неизвестную функцию $z(t) = y(\psi(t))$, при этом имеет место соотношение

$$y(x) = z(\varphi(x)), \quad a < x < b.$$

Из этого соотношения найдем связь между производными функций $y(x)$ и $z(t)$:

$$y'(x) = z'(t)\varphi'(x);$$
$$y''(x) = z''(t)\varphi'^2(x) + z'(t)\varphi''(x).$$

Подставив эти формулы в (4.3), получим уравнение относительно z, а именно,

$$\varphi'^2(x)z'' + [\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x)]\, z' + q(x)z = 0, \tag{4.11}$$

где $x = \psi(t)$.

Выберем $\varphi(x)$ так, чтобы коэффициент при z' в (4.11) обратился в 0, т. е. решим относительно φ уравнение

$$\varphi'' + p(x)\varphi' = 0.$$

Относительно φ' — это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, из которого имеем

$$\varphi'(x) = \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right), \quad x_0 \in (a,b),$$

откуда находим

$$\varphi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{s} p(\tau)d\tau\right) ds + C. \tag{4.12}$$

Таким образом, для функции $z(t)$ получаем уравнение

$$z'' + Q(t)z = 0, \qquad (4.13)$$

где $Q(t) = \exp\left(2\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right) \cdot q(\psi(t))$, $\psi(t)$ – функция, обратная к $\varphi(x)$, определяемой формулой (4.12).

Уравнение (4.13) проще уравнения (4.3) в том смысле, что в нем отсутствует первая производная. Если мы сможем найти решение $z(t)$ уравнения (4.13), то $y(x) = z(\varphi(x))$ будет решением уравнения (4.3).

Замечание. В отличие от предыдущего метода в данном методе не требуется дифференцируемость коэффициента $p(x)$ в уравнении (4.3). Однако в методе замены переменной нужно искать функцию, обратную к функции $\varphi(x)$.

Пример 4.2. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0, \quad x > 0. \qquad (4.14)$$

Найдем по формуле (4.12), положив $x_0 = 1$, $C = -2$, функцию

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}, \quad x > 0.$$

Обратной функцией будет

$$\psi(t) = \frac{1}{4t^2}, \quad t > 0.$$

Делаем замену $x = \frac{1}{4t^2}$ и относительно функции $z(t) = y\left(\frac{1}{4t^2}\right)$ в силу (4.13) получаем уравнение

$$z'' - z = 0,$$

общим решением которого будет

$$z(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}.$$

Выполнив обратную замену $t = 2\sqrt{x}$, находим общее решение исходного уравнения (4.14)

$$y(x) = c_1e^{2\sqrt{x}} + C_2e^{-2\sqrt{x}}.$$

4.3. Интегрирование с помощью частного решения

Иногда удается подобрать какое-нибудь простое частное решение уравнения (4.3). Знание хотя бы одного частного решения позволяет найти все решения уравнения (4.3). Изложим этот метод.

Пусть $y(x)$ — произвольное решение уравнения (4.3), а $y_1(x)$ — известное частное решение этого уравнения, которое нигде не обращается в ноль на интервале (a, b). Воспользуемся известной формулой Остроградского-Лиувилля

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1(x) & y'(x) \end{vmatrix} = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}, \tag{4.15}$$

где $W(x)$ — определитель Вронского, $x_0 \in (a, b)$.

Обозначим $W(x_0) = C_1$, и запишем (4.15) в виде

$$y_1(x)y' - y_1'(x)y = C_1 \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt\right) \tag{4.16}$$

и будем рассматривать соотношение (4.16) как дифференциальное уравнение относительно $y(x)$. Очевидно, любое решение уравнения (4.3) является решением уравнения (4.16) при соответствующем выборе константы C_1. Нетрудно убедиться, что любое решение уравнения (4.16) при любом C_1 будет решением и уравнения (4.3). Таким образом, множество всех решений (4.16) (при всевозможных C_1) совпадает с множеством решений уравнения (4.3).

Для нахождения общего решения уравнения (4.16) поступим следующим образом. Разделим обе части (4.16) на $y_1^2(x)$, после чего его можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right) = C_1 \frac{\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt\right)}{y_1^2(x)}.$$

Отсюда получаем, что

$$y(x) = y_1(x)\left[C_1 \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2(s)} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt\right) ds + C_2\right], \tag{4.17}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Формула (4.17) дает общее решение уравнения (4.3) при известном частном решении $y_1(x)$.

Замечание. Из формулы (4.17) следует, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x) = y_1(x) \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt\right)}{y_1^2(s)} ds$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (4.3).

4.4. Теория Штурма

В теории Штурма исследуется колеблемость решений линейных уравнений.

В качестве объекта исследования ограничимся рассмотрением линейных однородных дифференциальных уравнений (4.3). В разделах 4.1 и 4.2 было показано, что такие уравнения можно преобразовать к уравнению, в котором нет первой производной. Поэтому будем изучать уравнение вида

$$y'' + q(x)y = 0, \quad a < x < b, \tag{4.18}$$

где $q(x)$ — непрерывная функция.

Лемма 4.1. *Пусть $y_0(x)$ — нетривиальное решение уравнения (4.18) и $y_0(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$. Тогда $y_0'(x_0) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $y_0'(x_0) = 0$. В этом случае $y(x)$ является решением задачи Коши для уравнения (4.18) с начальными условиями $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$. Задача Коши имеет единственное решение, которым, очевидно, является $y_0(x) \equiv 0$, а это противоречит условию леммы.□

Лемма 4.2. *Пусть $y_0(x)$ — нетривиальное решение уравнения (4.18). Тогда на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ число нулей функции $y_0(x)$ конечно.*

Доказательство. Предположим противное: $y_0(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и все $x_k \in [\alpha, \beta]$. По теореме Больцана-Вейерштрасса у этой последовательности нулей существует сходящаяся подпоследовательность. Не уменьшая общности, предположим, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Очевидно, $x_0 \in [\alpha, \beta]$. По непрерывности $y_0(x_0) = 0$. Теперь рассмотрим

$$y_0'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{y_0(x_k) - y_0(x_0)}{x_k - x_0} = 0,$$

а этого не может быть по лемме 4.1. Лемма доказана.□

Определение. Нетривиальное решение уравнения (4.18) называется *колеблющимся* на отрезке $[\alpha, \beta]$, если оно обращается в ноль хотя бы в двух точках этого отрезка.

Теорема 4.1. *Если $q(x) \leq 0$, то любое нетривиальное решение уравнения* (4.18) *имеет не более одного нуля, т. е. является неколеблющемся.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ — произвольное нетривиальное решение уравнения (4.18). Предположим, что x_1, x_2 – нули $y(x)$. В силу леммы 4.2 можно считать, что для всех $x \in (x_1, x_2)$ $y(x) \neq 0$, например, $y(x) > 0$. Из леммы 4.1 следует, что в этом случае

$$y'(x_2) < 0 < y'(x_1). \tag{4.19}$$

С другой стороны, в рассматриваемом случае на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняется неравенство

$$y''(x) = -q(x)y(x) \geq 0,$$

из которого следует, что функция $y'(x)$ на этом отрезке не убывает, а это противоречит неравенству (4.19). Теорема доказана.$\square$

Теорема 4.2 (теорема Штурма). *Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения* (4.18), *x_1 и x_2 — последовательные нули функции $y_1(x)$. Тогда в интервале (x_1, x_2) лежит ровно один ноль функции $y_2(x)$.*

Доказательство. По формуле Остроградского-Лиувилля для вронскиана $W(x)$ функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеем

$$W(x) \equiv W(x_1)e^{-\int\limits_{x_1}^{x} 0dt} = C,$$

причем $C \neq 0$, так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. По определению вронскиана

$$W(x_i) = y_1(x_i)y_2'(x_i) - y_1'(x_i)y_2(x_i), \quad i = 1, 2.$$

Следовательно,

$$-y_1'(x_i)y_2(x_i) = C.$$

Отсюда заключаем, что $y_2(x_i) \neq 0$ и

$$y_2(x_i) = -\frac{C}{y_1'(x_i)}. \tag{4.20}$$

Между x_1 и x_2 нет других нулей функции $y_1(x)$, поэтому $y_1'(x_1)$ и $y_1'(x_2)$ имеют разные знаки и в силу (4.20) $y_2(x_1)$ и $y_2(x_2)$ тоже имеют разные знаки. На основании этого делаем вывод, что существует $x_0 \in (x_1, x_2)$, в которой $y_2(x_0) = 0$.

Докажем, что x_0 — единственный ноль функции $y_2(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Если бы у функции $y_2(x)$ был ещё один ноль $\overline{x_0} \in (x_1, x_2)$, то по первой части доказательства между x_0 и $\overline{x_0}$ лежал бы ещё один ноль функции $y_1(x)$, а этого не может быть, так как x_1, x_2 – последовательные нули функции $y_1(x)$. Теорема доказана.□

Теорема 4.3 (теорема сравнения).*Пусть* $y(x)$ *— ненулевое решение уравнения*

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{4.21}$$

$z(x)$ *— ненулевое решение уравнения*

$$z'' + Q(x)z = 0, \tag{4.22}$$

где $a < x < b$, $q(x)$, $Q(x)$ *— непрерывны и* $q(x) \leq Q(x)$. *Предположим, что* x_1, x_2 *— два последовательных нуля функции* $y(x)$ *и на отрезке* $[x_1, x_2]$ $q(x) \not\equiv Q(x)$. *Тогда существует* $x_0 \in (x_1, x_2)$, *в которой* $z(x_0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай $y(x) > 0$, $x_1 < x < x_2$. Тогда в силу леммы 4.1 $y'(x_1) > 0$ и $y'(x_2) < 0$. Предположим, что $z(x) \neq 0$ на интервале (x_1, x_2), например, $z(x) > 0$ (случай $z(x) < 0$ рассматривается аналогично).

По условию

$$y''(x) + q(x)y(x) \equiv 0, \quad z''(x) + Q(x)z(x) \equiv 0.$$

Умножим первое тождество на $z(x)$, второе на $y(x)$ и вычтем из первого второе. В результате получим тождество

$$y''(x)z(x) - z''(x)y(x) + (q(x) - Q(x))y(x)z(x) \equiv 0,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(y'(x)z(x) - z'(x)y(x)\right) + (q(x) - Q(x))y(x)z(x) \equiv 0.$$

Проинтегрировав обе части этого тождества от x_1 до x_2, получим равенство

$$y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1) + \int\limits_{x_1}^{x_2} [q(t) - Q(t)]y(t)z(t)dt = 0,$$

а этого не может быть, так как первые два слагаемых не положительны, а интеграл строго меньше нуля. Полученное противоречие доказывает теорему.□

Замечание. Если $q(x) \equiv Q(x)$ на $[x_1, x_2]$, то возможны два случая. В первом случае $y(x)$ и $z(x)$ линейно зависимы на $[x_1, x_2]$ и в этом случае x_1, x_2 — последовательные нули $z(x)$. Во втором случае $y(x)$ и $z(x)$ линейно независимые и тогда по теореме Штурма существует $x_0 \in (x_1, x_2)$, в котором $z(x_0) = 0$.

Теорема 4.4. *Рассмотрим уравнение*

$$y'' + q(x)y = 0, \quad a < x < b, \tag{4.23}$$

при условии, что существуют числа m и M, такие что

$$0 < m \leq q(x) \leq M. \tag{4.24}$$

Пусть $y(x)$ — нетривиальное решение уравнения (4.23) и x_1, x_2 — его последовательные нули. Тогда

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}. \tag{4.25}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$z'' + Mz = 0.$$

Очевидно, $z(x) = \sin(\sqrt{M}(x - x_1))$ является решением этого уравнения. Имеем, что $q(x) \leq M$ и $z(x_1) = y(x_1) = 0$. Тогда по теореме сравнения и замечанию к ней следующий ноль $z(x)$ не может лежать правее x_2. Учитывая, что расстояние между любыми соседними нулями $z(x)$ равно $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$, можно сделать вывод, что

$$x_2 - x_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}.$$

Таким образом, левая часть неравенства (4.25) доказана.

Правую часть неравенства (4.25) докажем от противного. Пусть строго между x_1 и x_2 можно вставить отрезок длины $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$, т. е. предположим, что $x_2 - x_1 > \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Для любого отрезка длины $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ можно подобрать решение уравнения $u'' + mu = 0$ так, что концы этого отрезка будут последовательными нулями этого решения. На этом отрезке решение $y(x)$ уравнения (4.23) с не меньшим чем m коэффициентом $q(x)$

не имеет нулей. Это противоречит теореме 4.3. Следовательно, отрезок длины $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ вставить строго между x_1 и x_2 нельзя, т. е. $x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Теорема доказана. $\square$

Теперь используя полученные результаты, выполним качественное исследование решений уравнения Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \quad x > 0, \tag{4.26}$$

где ν — положительный параметр, $\nu \neq 1, 2, \ldots$. В подразделе 3.6, применив метод обобщенных степенных рядов, мы нашли два линейно независимых решения уравнения Бесселя

$$\mathfrak{I}_{\pm\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\Gamma(n \pm \nu + 1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{4.27}$$

Формулы (4.27) позволяют выяснить поведение решений в окрестности $x = 0$, а именно,

$$\lim_{x \to 0+} \mathfrak{I}_\nu(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0+} \mathfrak{I}_{-\nu}(x) = \pm\infty.$$

Однако из формул (4.27) не видно, как ведут себя решения при $x \to \infty$. Займемся исследованием этого вопроса.

Преобразуем уравнение (4.26) к уравнению, не содержащему первую производную, с помощью замены

$$y(x) = u(x) z(x),$$

которая была рассмотрена в подразделе 4.1. Функцию $u(x)$ найдем по формуле (4.6) и в результате получим

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} z(x). \tag{4.28}$$

После такой замены уравнение (4.26) приводится к уравнению (4.7), которое в нашем случае имеет вид

$$z'' + \left(1 + \frac{\alpha}{x^2}\right) z = 0, \quad x > 0, \tag{4.29}$$

где $\alpha = \frac{1}{4} - \nu^2$. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$q(x) = 1 + \frac{\alpha}{x^2}.$$

Очевидно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$, такое что

$$1 - \varepsilon \le q(x) \le 1 + \varepsilon, \quad x > A. \tag{4.30}$$

По теореме 4.4 ($m = 1 - \varepsilon$, $M = 1 + \varepsilon$) при $x > A$ расстояние h между соседними нулями любого нетривиального решения $z(x)$ уравнения (4.29) удовлетворяет неравенству

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} \le h \le \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}. \tag{4.31}$$

Из формулы (4.28) следует, что нули $y(x)$ совпадают с нулями $z(x)$. Поэтому любое нетривиальное решение уравнения (4.26) имеет бесконечное множество нулей, расстояние между которыми стремится к π при $x \to \infty$.

Для полноты картины докажем еще одну лемму.

Лемма 4.3. *Решения уравнения* (4.29) *ограничены при* $x \to \infty$.

Доказательство. Запишем уравнение в виде

$$z'' + z = -\frac{\alpha}{x^2} z. \tag{4.32}$$

Теперь рассмотрим вспомогательное уравнение

$$v'' + v = f(x). \tag{4.33}$$

Фундаментальной системой соответствующего однородного уравнения является система $\{\sin x, \cos x\}$, с помощью которой методом вариации произвольных постоянных можно получить общее решение уравнения (4.33) в виде

$$v(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \int\limits_1^x \sin(x-t) f(t) dt, \tag{4.34}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пусть теперь $z(x)$ — произвольное решение уравнения (4.32). Положив $f(x) = -\frac{\alpha}{x^2} z(x)$, на основании формулы (4.34) можно утверждать, что существуют числа C_1^0 и C_2^0 , такие что

$$z(x) = C_1^0 \cos x + C_2^0 \sin x - \alpha \int\limits_1^x \frac{1}{t^2} \sin(x-t) z(t) dt, \tag{4.35}$$

Из этой формулы следует, что

$$|z(x)| \le C + |\alpha| \int\limits_1^x \frac{1}{t^2} |z(t)| dt, \quad x \ge 1,$$

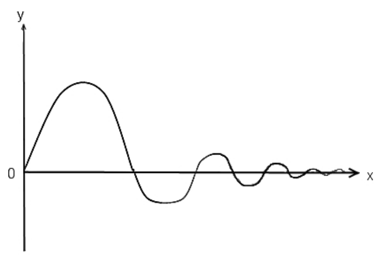
где $C = |C_1^0| + |C_2^0|$. Отсюда, применяя неравенство Беллмана, получаем оценку

$$|z(x)| \le C e^{|\alpha| \int\limits_1^x \frac{1}{t^2} dt} \le C e^{|\alpha| \int\limits_1^\infty \frac{1}{t^2} dt} = C e^{|\alpha|}.$$

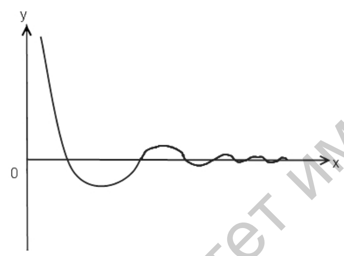
Таким образом, любое решение уравнения (4.29) является ограниченным на $[1, \infty)$. Лемма доказана. $\square$

Из леммы 4.3 и формулы (4.28) следует, что любое решение уравнения Бесселя при $x \to \infty$ стремится к 0.

Подводя итог нашего исследования, можно сказать, что качественная картинка (график) любого нетривиального решения уравнения Бесселя (4.29) имеет вид



или



(около нуля знак решения может быть и отрицательным).

Литература

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.:МЦНМО, 2012.

2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.:Наука, 1967.

3. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.:Высшая школа, 1963.

4. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенныых дифференциальных уравнений. – М.:Изд-во МГУ, 1984.

5. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.:Наука, 1974.

6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.:КомКнига/УРСС, 2006

7. Тихонов А. Н., Васильева А. Г. Дифференциальные уравнения. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

8. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравненийю. – М.:КомКнига, 2010.

9. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.:Либроком, 2011.