

Министерство образования и науки РФ
Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского

С.В. Лебедева

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА: ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Профессионально-ориентированное учебно-методическое пособие

Саратов, 2012

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р
Л 33

*Рекомендовано к печати
кафедрой математики и методики её преподавания
Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского*

Рецензент:

В.И.Игошин доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры геометрии Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского

Л 33

Лебедева С.В. Элементарная математика: введение:
Учебно-методическое пособие / С.В.Лебедева – Саратов, 2011. – 92 с. – (Профессиональная подготовка учителя математики).

Серийное оформление С.В. Лебедевой

Модуль «Введение» – первый в структуре дисциплины «Элементарная математика». Его цель – обобщение и систематизация имеющихся знаний в области элементарной математики с точки зрения информационного моделирования, в контексте профессиональной подготовки – пропедевтика курса «Методика обучения и воспитания (математика).

Пособие состоит из десяти взаимосвязанных разделов: 1.Понятие задачи, 2.Множество, 3.Конечные множества. Сюжетные комбинаторные задачи. Графический метод решения комбинаторных задач, 4.Бесконечные множества. Числовые множества. Множества натуральных и неотрицательных чисел, 5.Числовые последовательности, 6.Делимость. Свойства делимости, 7.Расширение понятия числа. Рациональные числа. Отношения и пропорции. Проценты, 8.Иррациональные числа. Логарифмы. Арифметика действительных чисел, 9.Систематические числа, 10.Информационное моделирование сюжетных задач, – каждое из которых представлено краткой теоретической справкой и системой задач. Система задач представлена пятью группами: тестовые задания, математические алгоритмизованные, математические эвристические, практические и творческие задания.

Пособие ориентировано, прежде всего, на самостоятельное изучение модуля «Введение», самоконтроль и самооценку результатов, для чего в пособии предусмотрена рейтинговая система оценки достижений студентов.

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р

© С.В. Лебедева, 2011

Введение

Пособие содержит 580 задач контролирующего характера, рассчитанных на самостоятельное решение студентами первого курса, как на аудиторных занятиях, так и во внеаудиторной работе.

Система задач представлена пятью группами: тестовые задания (128 задач), задачи I уровня сложности – математические алгоритмизованные (190 задач), задачи II уровня сложности – математические эвристические (150 задач), задачи III уровня сложности – практические (79 задач) и творческие задания (33 задачи).

Тестовые задания имеют четыре варианта ответа, среди которых находится один верный. В ряде заданий предполагается запись в пустой строке своего варианта ответа. Тестовые задания выполняются непосредственно в Пособии.

Задачи I уровня сложности можно считать тренировочными, так как их выполнение требует знания соответствующего теоретического материала и известных алгоритмов решения.

Задачи II уровня сложности требуют умелого сочетания ряда известных алгоритмов решения, а иногда и нестандартного подхода к задаче.

Задачи III уровня сложности требуют сформированности ряда компонентов информационной культуры, главным из которых можно считать умения, связанные с информационным (в том числе математическим) моделированием. Процесс оформления решения данного вида задач должен включать описание всех этапов информационного моделирования.

Задачи I-III уровней сложности выполняются в отдельной тетради и сдаются для проверки преподавателю в сроки, установленные деканатом (до проведения зачёта).

Выполненное творческое задание представляет собой мультимедийный гипертекстовый документ и сдаётся на CD-диске.

Каждая задача имеет свой «вес» – v . Вес тестового задания – 10 баллов, вес задачи I уровня – 20 баллов, II уровня – 30 баллов, III уровня – 40 баллов, вес творческого задания – 100 баллов.

Для получения зачёта по дисциплине «Элементарная математика: Введение» студенту достаточно пройти тест по каждой теме с результатом не менее 70% верных ответов и набрать 1000 баллов за решение задач, причём каждая тема должна быть «представлена» не менее, чем 100 баллами.

За каждое правильно решённое задание студент получает максимальное количество баллов v только в том случае, если он единственный из группы выполняет это задание. В противном случае максимальное количество баллов v за правильно решённое задание, делится на количество решающих N , и каждый получает за это задание v/N баллов.

Задачи, решённые на аудиторных занятиях под руководством преподавателя, оцениваются в 1 балл.

В качестве методической поддержки обучающихся в Пособии предусмотрен теоретический материал и образцы рассуждения и оформления некоторых типов задач, предваряющие систему заданий по каждой теме курса.

Ещё один вид деятельности студентов – разработка опорных сигналов конспектов (ОСК) по материалу лекций – способствует формированию упорядоченных и систематизированных знаний, умений сравнивать, обобщать и систематизировать учебный материал по определенным признакам.

Творческая контрольная работа «Концепции современной математики» позволяет изучить углубленно определённые темы курса.

Задание 1. Прочитайте книгу *Стюарт Я. Концепции современной математики*. – Минск, 1980.

Задание 2. Изложите содержание одной из глав книги для учащихся средней школы:



Глава 1. Математика в целом.

Глава 2. Движение без перемещения.

Глава 3. Кратчайшие пути в высшей арифметике.

Глава 4. Язык множеств.

Глава 5. Что такое функция?

Глава 6. Основы абстрактной алгебры.

Глава 7. Симметрия: понятие группы.

Глава 8. Аксиоматика.

Глава 9. Счет. Понятие о бесконечном.

Глава 10. Топология.

Глава 11. Умный в гору не пойдет.

Глава 12. Топологические инварианты.

Глава 13. Алгебраическая топология.

Глава 14. В гиперпространство.

Глава 15. Линейная алгебра.

Глава 16. Вещественный анализ.

Глава 17. Теория вероятностей.

Глава 18. Компьютеры и их применение.

Глава 19. Применения современной математики.

Глава 20. Основания математики.

Задание 3. Составьте перечень вопросов по материалу главы (возможно, эти вопросы будут включены в программу экзамена).

Задание 4. Изучите материалы [сайта летней школы «Современная математика»](#). Насколько концепции, изложенные Стюартом, созвучны Программам летней школы за последние 10 лет?

Задание 5. Составьте список источников (с аннотацией к каждому источнику), рекомендуемых для более детального изучения выбранной Вами темы.

Срок сдачи работы – XVII неделя I семестра.

При разработке пособия были использованы материалы дипломных работ (выполненных под руководством автора данного пособия) выпускников СГУ им. Н.Г.Чернышевского, обучавшихся по специальности «математика с дополнительной специальностью информатика»:

- Пояркова Т.А. Системы счисления в курсе углубленного изучения математики: дипломная работа. – Саратов, 2005.

- Мохнаткина К.В. Последовательности в школьном курсе математики: дипломная работа. – Саратов, 2006.

- Петрова Т.Г. Элементы теории множеств в школьном курсе математики: дипломная работа. – Саратов, 2007.

- Клушева Ж.С. Элементы комбинаторики в курсе математики в условиях малокомплектной средней школы (интегрированный курс): дипломная работа. – Саратов, 2007.

- Харьковская С.С. Информационные модели сюжетных задач: дипломная работа. – Саратов, 2008.

I. Понятие задачи

Под *задачей* будем понимать импликацию $Y \Rightarrow T$, при условии, что логическое значение *требования* T всегда истинно: $\lambda(T)=1$, а *условие* Y представлено конъюнкцией данных y_i : $Y = y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n$, где возможен случай $y_i = y_{i_1} \vee y_{i_2} \vee \dots \vee y_{i_n}$. Кроме того, между условием Y и требованием T существует функциональная взаимосвязь, позволяющая провести решение задачи, то есть $T=f(Y)$.

Из вышеперечисленных *свойств* задачи следует, что задача

- (1) может иметь решение (случай $1 \rightarrow 1$, то есть $y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n = 1$, что означает следующее: $\lambda(y_i)=1$ или $y_i \neq \neg y_j$ для любых i и j из множества $1, 2, \dots, n$);
- (2) может не иметь решений (случай $0 \rightarrow 1$, то есть $y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n = 0$, что означает следующее: $\lambda(y_i)=0$ или $y_i = \neg y_j$ для любых i и j из множества $1, 2, \dots, n$).

С точки зрения информационного моделирования, *задача* – информационная модель некоторой ситуации.

Компоненты задачи (Y, T) можно также считать отдельными информационными моделями.

В зависимости от типа этих моделей можно разбить все задачи на два класса: символизированные и текстовые задачи (схема 1).

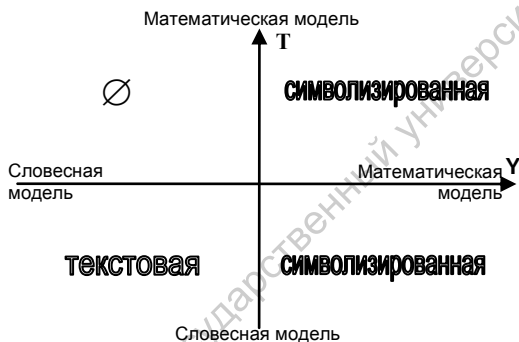


Схема 1. Классификация задач по способу представления ее компонентов

Итак, мы определили класс задач, называемый *текстовыми задачами*: условие Y и требование T – информационные (вербальные) словесные модели.

Проведем классификацию текстовых задач по характеру объектов и отношений (по принадлежности к области знаний), получим текстовые задачи: (1) математические, (2) прикладные, (3) сюжетные (схема 2).

Приведем примеры задач каждого вида:

1) символизированная математическая задача:

- Решить уравнение $(x+1) \cdot (x+5) \cdot (x+9) \cdot \dots \cdot (x+157) = 3200$.
- $(x+1) \cdot (x+5) \cdot (x+9) \cdot \dots \cdot (x+157) = 3200$; $x = ?$

2) текстовая математическая задача: Между числами 6 и 17 вставьте четыре числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали арифметическую прогрессию.

3) сюжетная задача: Из деревни на станцию выехал грузовик, а через 30 минут из деревни в том же направлении выехал легковой автомобиль, который догнал грузовик в 30 км от станции. После прибытия на станцию легковой автомобиль сразу же повернул назад и встретил грузовик в 6 км

от станции. Сколько времени понадобилось легковому автомобилю, чтобы догнать грузовик?

4) прикладная задача: Масса медного шара равна 6 кг, а объем его – 2 дм³. Определите сплошной этот шар или полый. Плотность меди равна 8900 г/м³.

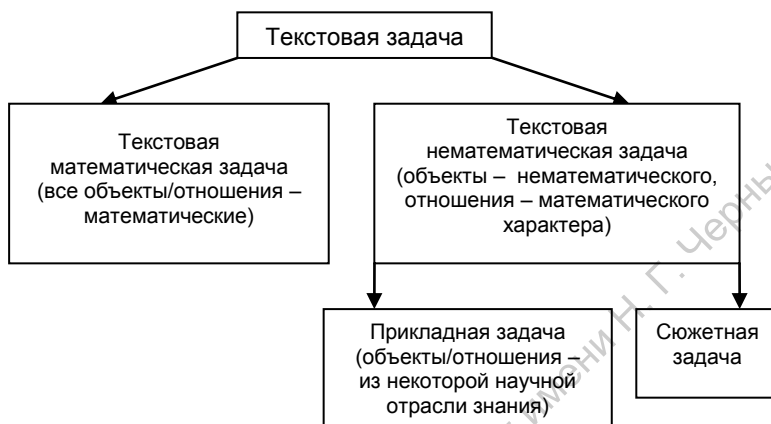


Схема 2. Классификация текстовых задач

Итак, под *сюжетной задачей* будем понимать текстовую нематематическую задачу.

С точки зрения информационного похода, *сюжетная задача* – словесная модель некоторой ситуации. Как любая модель сюжетная задача не является абсолютной копией своего оригинала, она лишь отражает некоторые его качества и свойства, наиболее существенные для выбранной цели исследования. При создании модели всегда присутствуют определенные допущения и гипотезы.

Процесс решения сюжетной задачи – многократное алгоритмическое по способу реализации информационное моделирование.

Решение сюжетной задачи – результат информационного моделирования, адекватный поставленному в задаче требованию.

Ответ сюжетной задачи – сформулированное на языке задачи решение.

Тестовые задания (по 10 баллов)

1. Ответом задачи: *Вычислить $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = a$* – является утверждение

а) $\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$

в) $\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$, если $a \neq 3$

б) $\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$, если $a \neq -3$

г) $\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$, если $a \neq \pm 3$

2. Решением задачи: *Доказать, что ни при каком целом n число $N = n^2 + 1$ не делится на 3*, – является следующая цепочка рассуждений

а) При $n = 1$ число $N = 2$ не делится на 3. При $n = 2$ число $N = 5$ не делится на 3. При $n = 3$ число $N = 10$ не делится на 3. Продолжая рассуждать аналогично, придём к выводу, что ни при каком целом n число $N = n^2 + 1$ не делится на 3.

б) Чтобы число N делилось на 3 необходимо, чтобы оно было представимо в виде $N = 3m$, где m – целое. Тогда $3m = n^2 + 1$, или $3m - 1 = n^2$. Путём перебора убеждаемся, что квадрат натурального числа не представим в виде $3m - 1$: $n = 1, m = 1/3$; $n = 2, m = 5/3$; $n = 3, m = 10/3$; $n = 4, m = 17/3$; ...

в) Целое число n при делении на 3 может дать в остатке лишь числа 0, 1 или 2, то есть может иметь вид $3k$, $3k + 1$ или $3k + 2$. При $n = 3k$, число $N = 9k^2 + 1$ – не делится на 3. При $n = 3k + 1$, число $N = 9k^2 + 6k + 2$ – не делится на 3. При $n = 3k + 2$, число $N = 9k^2 + 12k + 5$ – не делится на 3. Таким образом, ни при каком целом n число $N = n^2 + 1$ не делится на 3.

г) Поскольку равносильное данному равенство $N - 1 = n^2$ выполняется только при $N = 5; 10; 17; 26$ и т.д., проверим эти числа на делимость на 3. Итак, $5 = 3 + 2$, $10 = 9 + 1$, $17 = 15 + 2$, $26 = 24 + 2$, ..., то есть число N имеет вид $N = 3m + 1$ или $N = 3m + 2$, следовательно ни при каком целом n число $N = n^2 + 1$ не делится на 3.

3. Наиболее «перспективным» способом решения системы уравнений с

$$\text{двумя неизвестными} \begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \frac{2y^2}{1+y^2} = x \end{cases} \text{ является}$$

а) подбор решений: очевидно, что пары чисел $(0; 0)$ и $(1; 1)$ являются решениями системы;

$$\text{б) применение свойств пропорции: } \begin{cases} \frac{1+x^2}{2x^2} = \frac{1}{y}, \\ \frac{1+y^2}{2y^2} = \frac{1}{x} \end{cases}; \text{ замена переменных и}$$

дальнейшие алгебраические преобразования;

в) применение равносильных преобразований, приводящих сначала к

$$\text{совокупности} \begin{cases} x=0, y=0, \\ \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}, \\ \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \end{cases}; \text{ а затем к окончательному решению: } (0; 0) \text{ и } (1; 1).$$

$$\text{г) подстановка: } \frac{2\left(\frac{2y^2}{1+y^2}\right)^2}{1+\left(\frac{2y^2}{1+y^2}\right)^2} = y \text{ и дальнейшие преобразования.}$$

4. Более простым равносильным неравенством, приводящим к решению неравенства $\log_{100} x^2 + \log_{10}^2 x < 2$, является

а) $\lg^2 x + \lg x - 2 < 0$;

в) $\lg^2 x < \lg 100 - \lg x$;

б) $-2 < \lg x < 1$;

г) $(\lg x + 2) \cdot (\lg x - 1) < 0$.

5. Метод доказательства неравенства $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$

а) сравнение каждого слагаемого левой части с большей аликвотной дробью:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2 - 1};$$

б) метод математической индукции;

в) нахождение суммы дробей, стоящей в левой части неравенства и сравнение её с $\frac{1}{4}$;

г) геометрический метод доказательства.

6. Велосипедист от озера до деревни ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно – со скоростью 10 км/ч. Сколько времени ушло у него на дорогу от озера до деревни, если на весь путь туда и обратно велосипедист затратил 1 час? Пусть x – время (в часах), затраченное на дорогу от озера до деревни. Какая математическая модель соответствует (адекватна) тексту задачи?

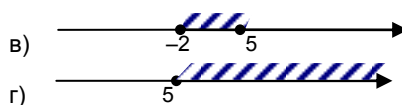
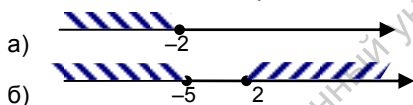
а) $15 \cdot x = 10 \cdot (1 - x)$;

в) $15 \cdot x + 10 \cdot (1 - x) = 1$;

б) $\frac{15}{x} + \frac{10}{1-x} = 1$;

г) $15 \cdot (1 - x) = 10 \cdot x$.

7. На каком рисунке изображена адекватная графическая модель системы неравенств $\begin{cases} 3x + 6 > 0 \\ 10 - 2x > 0 \end{cases}$?



8. Какая структурная модель не адекватна тексту задачи: Я купил 100 фунтов шерсти за 7 гульденов. Что стоят 29 фунтов?

а)		
Ц	К	С
	100ф	7г
?	29ф	(?)

в)		
Ц	К	С
1) 0,07	100	7
2) $x/29$	29	x

б)				
Ф	×	Г	:	Ф
100		7		29

г) $\downarrow 100 \text{ ф} - 7 \text{ г} \quad \uparrow$
 $29 \text{ ф} - ? \text{ г}$

9. Творческое задание (100 баллов). Проведите классификацию символизированных задач последовательно по различным основаниям.

II. Множество

Математическим понятием, отражающим объединение некоторых объектов, предметов или понятий в одну единую совокупность является понятие множества. Это понятие не определяется, подобно понятиям точки, числа, и является первичным.

Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его элементами. Все множества можно записывать с помощью заглавных букв латинского алфавита: A – множество квадратов; B – множество чисел и т.д.

Элементы множества можно записать с помощью маленьких букв: x является элементом множества A . Это можно записать так: $x \in A$ (читают: x есть элемент множества A , или x принадлежит A , или x содержится в A , или A содержит x). Если объект x не является элементом множества A , то это записывают так: $x \notin A$ (читается: x не есть элемент множества A , или x не принадлежит A , или x не содержится в A).

Например, если множество B – множество натуральных чисел, то $2 \in B$, $-7 \notin B$, и т.д.

Множество можно иногда задавать перечислением его элементов. Если множество задано списком, то названия всех элементов множества записывают в фигурные скобки, разделяя запятой. Например, если множество C состоит из трех элементов: 1, 9 и -4 , то это записывают так: $C = \{1, 9; -4\}$.

Множество считается заданным, если указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают ни какие другие объекты. Такое свойство называют *характеристическим свойством* множества. Например: множество $\{2, 4\}$ может быть задано следующим образом:

- а) множество четных чисел, удовлетворяющих неравенству $1 < x < 5$;
- б) множество корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Задание множества его характеристическим свойством записывают и в геометрии. Например, биссектриса угла есть геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри этого угла и равноудаленных от его сторон.

Множество элементов обладающих характеристическим свойством записывают так: $A = \{x: -3 \leq x \leq 4\}$. Запись означает, что множество A состоит из всех чисел x , удовлетворяющих неравенству $-3 \leq x \leq 4$.

Пустым называется множество не содержащее ни одного элемента; оно обозначается символом $\emptyset$.

Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$.

Пересечение множеств A и B есть множество, которое состоит из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B .

Обозначается операция пересечения: $A \cap B$.

Например, для $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{2; 3; 4; 5\}$, $A \cap B = \{2; 3\}$.

Множества называются *непересекающимися*, если у них нет общих элементов, то есть их пересечение пусто.

Пусть $C = \{6; 7; 8\}$, тогда $A \cap C = C \cap B = \emptyset$.

Если заданы два множества, то можно образовать новое множество, включив в него, во-первых, элементы первого множества и, во-вторых, элементы второго множества, не совпадающие с элементами первого.

Объединение множеств A и B представляет собой множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B .

Обозначается операция объединения: $A \cup B$. Для наших множеств A и B , $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A , то говорят, что B – подмножество A , и пишут $B \subseteq A$.

$A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

II.1

Множество U называют *универсальным*, если все рассматриваемые нами множества A_i ($i=1 \div n$) являются его подмножествами: $A_i \subseteq U$.

Каждое непустое множество имеет, по крайней мере, два подмножества: пустое множество $\emptyset$ и само множество A . Таким образом, пустое множество является подмножеством любого множества. Подмножество подмножества само является подмножеством, то есть если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

Разностью двух множеств A и B называется такое множество, в которое входят все элементы из множества A , не принадлежащие множеству B . Разность множеств A и B обозначают $A \setminus B$.

$A \setminus B = \emptyset$, когда $A = B$.

II.2

В случае, когда $B \subseteq A$, разность $A \setminus B$ называют дополнением множества B в множестве A и обозначают B' . Справедливо равенство: $B \cap B' = \emptyset$. Чаще всего $A = U$.

Перечислим несколько свойств дополнения.

$$\emptyset' = U.$$

II.3

$$U' = \emptyset.$$

II.4

$$A'' = A$$

II.5

Симметрической разностью (суммой) $A+B$ двух множеств A и B называется множество, являющееся объединением двух разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Когда берутся дополнения множеств, отношения включения между ними меняются на противоположные: если $B \subseteq A$, то $A' \subseteq B'$.

Множество, элементы которого можно пересчитать называется *конечным* множеством. Конечное множество можно задавать двумя способами: (1) указанием на некоторое свойство, которому удовлетворяют его элементы; (2) перечислением его элементов.

Множество, элементы которого невозможно пересчитать называется *бесконечным*.

Пустое множество считается конечным.

Подмножество конечного множества само конечно.

Если множество B содержит бесконечное подмножество, то B бесконечно.

Пересечение/объединение двух конечных множеств есть тоже конечное множество.

Для операций над множествами справедливы следующие свойства:

$$A \cup A' = U \quad \text{II.12}$$

$$A \cap A' = \emptyset \quad \text{II.13}$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{II.14}$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{II.15}$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{II.16}$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{II.17}$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad \text{II.18}$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad \text{II.19}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{II.20}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{II.21}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{II.22}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{II.23}$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$A' \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$$

II.24

$$A \setminus B = A \cap B'$$

$$A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$$

$$A + \emptyset = A$$

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$A \cup B = U, A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A' = B$$

II.25

II.27

II.28

II.29

II.30

II.31

II.32

II.33

Пусть даны два множества A и B ; выберем элементы $a \in A$ и $b \in B$. Пара (a, b) называется *упорядоченной*, если указано, какой элемент является первым, а какой – вторым.

Упорядоченные пары (a, b) и (c, d) называются равными, тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество $M \times N$ всевозможных упорядоченных пар (a, b) и (c, d) , таких, что $a \in A$ и $b \in B$.

Возможные соответствия между двумя различными множествами представлены в следующей таблице.

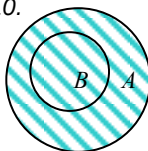
Таблица 1		
Описание	Иллюстрация	Название
Каждому элементу множества Y соответствует более одного элемента множества X		сюръекция
Каждому элементу множества Y соответствует не более одного элемента множества X		инъекция
Каждому элементу множества Y соответствует строго один элемент множества X ; каждому элементу множества X соответствует строго один элемент множества Y		сюръекция } биекция инъекция } (взаимно-однозначное соответствие)
Каждому элементу множества X соответствует более одного элемента множества Y		Названия не имеет, в математике не рассматривается из-за неоднозначности определения

Соответствие между элементами множеств A и B определяет *отображение* множества A в множество B (иногда вместо отображения говорят об *унитарной операции*).

Если существует взаимно-однозначное отображение A в B , то множество A называется эквивалентным множеству B .

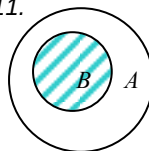
Тестовые задания (по 10 баллов). Укажите информационную знаковую модель, соответствующую диаграмме:

10.



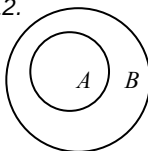
- а) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$
- б) $A \cup B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$
- в) $A \cup B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$
- г) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

11.



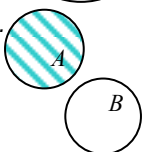
- а) $A \cap B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$
- б) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$
- в) $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$
- г) $A \cap B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

12.



- а) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$
- б) $B \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$
- в) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A$
- г) $B \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A$

13.



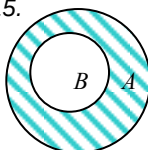
- а) $A \setminus B = B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
- б) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
- в) $B \setminus A = B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
- г) $B \setminus A = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

14.



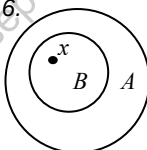
- а) $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$
- б) $A + B = (A \cap B) \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$
- в) $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow A \cup B \subseteq A, A \cap B \subseteq A$
- г) $A + B = (A \cap B) \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow A \cup B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$

15.



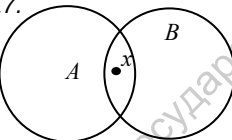
- а) $A + B = A \setminus B \Leftrightarrow A \subseteq B$
- б) $A + B = A \setminus B \Leftrightarrow B \subseteq A$
- в) $A + B = B \setminus A \Leftrightarrow A \subseteq B$
- г) $A + B = B \setminus A \Leftrightarrow B \subseteq A$

16.



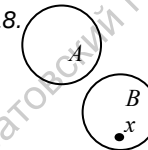
- а) $x \in A \cap B, x \notin A \cup B$
- б) $x \in A \setminus B$
- в) $x \in A + B$
- г) $x \in A \cap B, x \in A \cup B$

17.



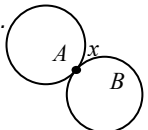
- а) $x \in A \cap B, x \notin A \cup B$
- б) $x \in A \cup B, x \notin A \cap B$
- в) $x \notin (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- г) $x \in A \cup (A \cap B), x \notin A \cap (A \cup B)$

18.



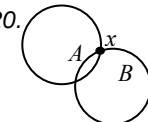
- а) $x \in B \setminus A$
- б) $x \in A \setminus B$
- в) $x \in A \cup (A \cap B)$
- г) $x \in A \cap B$

19.



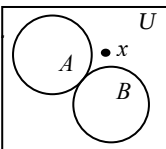
- а) $x \in B \setminus A$
- б) $x \in A \setminus B$
- в) $x \in A + B$
- г) $x \in A \cap B$

20.

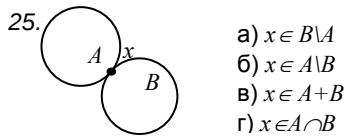
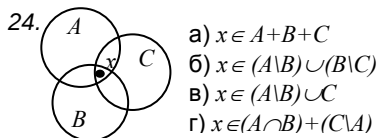
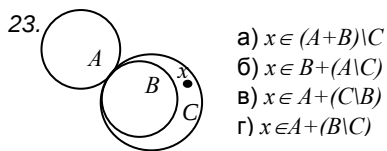
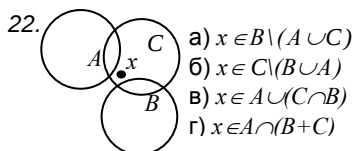


- а) $x \in A \cap B$
- б) $x \in A \setminus B$
- в) $x \notin A \cup (A \cap B)$
- г) $x \in B \setminus A$

21.



- а) $x \in B \setminus A$
- б) $x \in A \cap B'$
- в) $x \in A + B$
- г) $x \in A' \cap B'$



Задачи I уровня (по 20 баллов). Для иллюстрации операций над множествами используют диаграммы Эйлера-Венна, где каждое множество обозначается кругом, универсальное множество – прямоугольником, а результат операции – штриховкой. Проиллюстрируйте следующие свойства операций над множествами, рассмотрев три случая (если условие задачи не предусматривает другого):

26. $A+B=B+A$

27. $(A+B)+C=A+(B+C)$

28. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

29. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

30. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

31. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Задачи I уровня (по 20 баллов). Даны множества: A – множество чётных чисел, B – множество чисел кратных 3, C – множество чисел кратных 5. Проиллюстрируйте на множествах A , B и C с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие свойства:

32. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

33. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Задачи I уровня (по 20 баллов). Диаграммы Эйлера-Венна в силу замкнутости фигур, используемых для иллюстрации не совсем удобны для проведения операций объединения и пересечения подмножеств множества N , поэтому обратимся к графическому способу представления информации о числовых множествах.

Договоримся пересечение и промежуточное объединение числовых множеств отмечать на одной числовой прямой (числовом луче для N), а результирующее объединение представлять двумя разными числовыми прямыми (лучами). Будем также для разных множеств использовать разноцветное выделение элементов. Если какой-либо элемент n (например, 5) принадлежит пересечению множеств, то он на чертеже будет обозначаться ⑤. Кроме того элементы пересекаемых множеств будем подписывать «сверху» от числовой прямой для одного из множеств, и «снизу» от числовой прямой – для другого множества. Если один и тот же элемент подписан «сверху» и «снизу», то он принадлежит пересечению «верхнего» и «нижнего» множеств, и обозначается ⑤. Элементы объединяемых множеств подписываем (в одну строку) или «сверху» или «снизу» от числовой прямой. На рисунке 1 проиллюстрировано множество $F = (A \cap B) \cup (C \cap D)$, где A – множество чисел кратных 3, B – множество чисел кратных 4, C – множество чисел кратных 5, D – множество чётных чисел.

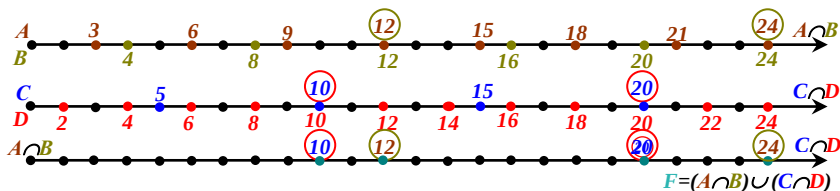


Рис 1. Иллюстрация множества $F = (A \cap B) \cup (C \cap D)$

С учётом «договорённости» проиллюстрируйте следующие множества/свойства множеств:

34. $A \cap (D \cup C) = (A \cap D) \cup (A \cap C)$

35. $F = (A \cap C \cap D) \cup B$

36. $F = A \cap B \cap D$

37. $F = (B \cap C \cap D) \cup A$

38. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

39. $F = (A \cap B \cap D) \cup C$

Задачи I уровня (по 20 баллов). Выберем в качестве универсального – множество N натуральных чисел; A – множество чётных чисел, B – множество чисел кратных 3, C – множество чисел кратных 5, D – множество чисел кратных 7, E – множество чисел кратных 11. Проиллюстрируйте следующие множества:

40. $F = (C' \cap B) \cup D$

41. $F = (D \cup B) \cap E'$

42. $F = (C \cup B) \cap D$

43. $F = (D \cap B) \cup E'$

Задачи I уровня (по 20 баллов). A – множество чётных чисел, B – множество чисел кратных 6, C – множество чисел кратных 9. Проиллюстрируйте следующие множества /свойства множеств:

44. $F = A + B$; $A + B = B + A$

45. $F = A + C + B$; $(A + B) + C = A + (B + C)$

Задачи III уровня (по 40 баллов). Можно выделить несколько возможных аспектов обращения к свойствам и операциям над множествами при решении сюжетных задач.

Первая возможность связана с операцией сложения (симметрическая разность) множеств, позволяющей решать типовые задачи содержания аналогичного следующей.

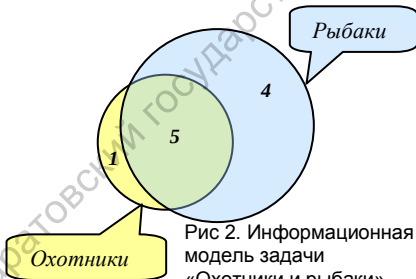


Рис 2. Информационная модель задачи «Охотники и рыбаки»

Охотники и рыбаки.

Собрались 6 охотников и 9 рыбаков, а всего 10 человек. Как это может быть? Решение. Поскольку число человек меньше суммарного количества представителей промысловых профессий, то разность между этими величинами определяет количество человек занимающихся одновременно и охотой и рыбалкой. Следовательно (ответ), в числе

собравшихся 1 охотник, 4 рыбака и 5 человек, занимающихся одновременно и охотой и рыбалкой (Рис.2).

Решите задачи, проиллюстрируйте их, используя диаграммы Эйлера-Венна (см. Рис. 2).

2	3	2
3		3
2	3	2

46. **Девичья хитрость.** Золотошвея, взяв 20 девушек в учение, разместила их в 8 комнатах своего дома так, как показано на рисунке. По вечерам золотошвея обходила дом и проверяла, чтобы в комнатах на каждой стороне его было по 7 девушек.

Однажды к девушкам в гости приехали 4 подружки и, заговорившись, остались у них ночевать, причём все 24 девушки разместились в комнатах так, что вечером золотошвея насчитала в комнатах на каждой стороне дома опять по 7 девушек. На следующий день 4 девушки пошли провожать своих четырёх подруг и дома не ночевали. Оставшиеся 16 девушек разместились так, что опять вечером золотошвея насчитала в комнатах с каждой стороны дома по 7 девушек. Как размещались девушки по комнатам в двух последних случаях?

47. **Расстановка стульев.** Нужно расставить 7 стульев у четырёх стен комнаты так, чтобы у каждой стены было их поровну. Как это сделать? Как изменится решение задачи в случае расстановки 17 стульев в пятиугольной комнате?

48. **Подписка на газеты и журналы.** Каждая семья, живущая в нашем доме, выписывает или газету, или журнал, или то и другое вместе. 75 семей выписывают газету, а 27 семей выписывают журнал и лишь 13 семей выписывают и журнал, и газету. Сколько семей живет в нашем доме?

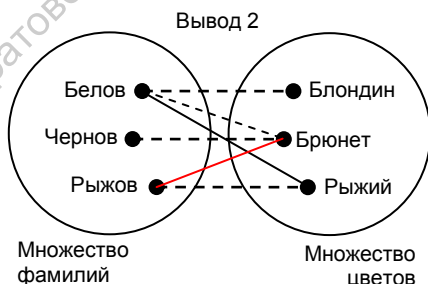
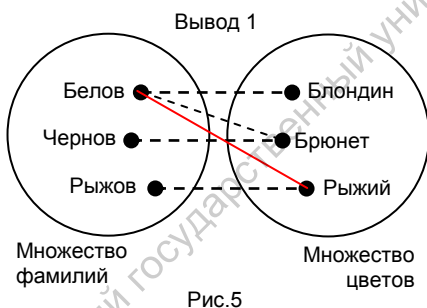
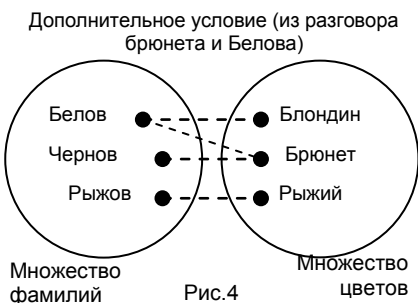
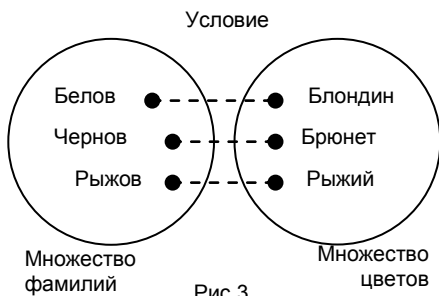
49. **О любви к фруктам.** В одном классе 25 учеников. Из них 7 любят груши, 11 – черешню. Двое любят груши и черешню; 6 – груши и яблоки; 5 – яблоки и черешню. Но есть в классе два ученика, которые любят все и четверо таких, что не любят фруктов вообще. Сколько учеников этого класса любят яблоки?

50. **О знании иностранных языков.** Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 – испанский, 75 – немецкий. Все владеют, по крайней мере, одним иностранным языком. Среди них нет таких, которые знают два иностранных языка, но есть владеющие тремя иностранными языками. Сколько человек из этих 100 знают 3 языка?

51. **Сложная задача.** Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате количество мальчиков, решавших задачу, оказалось равно количеству девочек, ее не решивших. Кого в классе больше – решивших задачу или девочек?

52. **На прогулке.** Сколько человек участвовало в прогулке, если известно, что 16 из них взяли с собой бутерброды с ветчиной, 24 – с колбасой, 15 – с сыром, 11 – бутерброды с ветчиной и бутерброды с колбасой, 8 – бутерброды с ветчиной и бутерброды с сыром, 12 – бутерброды с колбасой и бутерброды с сыром, 6 – бутерброды всех трех видов, а 5 – вместо бутербродов взяли с собой пирожки?

Задачи III уровня (по 40 баллов).



Можно выделить несколько возможных аспектов обращения к свойствам и операциям над множествами при решении сюжетных задач. Первая возможность (описана выше) связана с операцией сложения (симметрическая разность) множеств, вторая – с отношениями между множествами, определяющими один из способов решения логических задач аналогичных следующей: **Встреча.** Встретились Белов, Чернов и Рыков. Один из них был блондин, другой – брюнет, третий – рыжий. Брюнет сказал Белову: «Ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из них, если брюнеты всегда говорят правду?

Решение логических задач аналогичных данной связано с рассмотрением нескольких конечных множеств с одинаковым числом элементов, между которыми требуется установить соответствие.

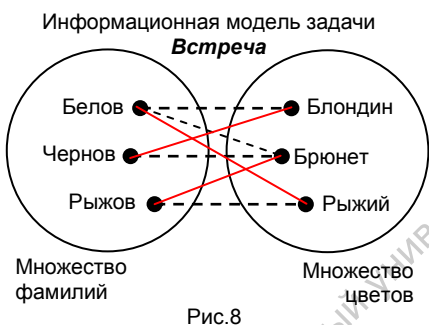
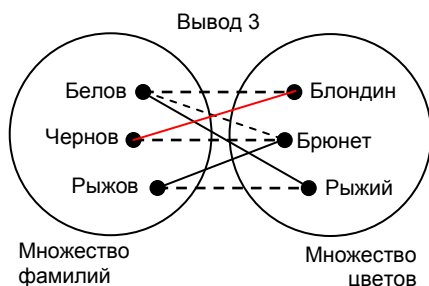
Договоримся элементы множеств изображать точками плоскости. Если по условию задачи между двумя элементами этих множеств есть соответствие, то будем соединять такие элементы сплошной линией. Если же между двумя элементами множеств соответствия нет, то будем соединять их пунктирной линией. При наличии биекции каждый элемент одного из множеств будет соединяться сплошной линией только с одним элементом другого множества, а с остальными элементами он будет соединяться пунктирными линиями.

Решение. Цепочка (Рис.3-8) рассуждений с использованием соотношений между множествами.

Ответ. Белов – рыжий, Чернов – блондин, Рыков – брюнет.

Логические задачи достаточно интересны и очень полезны для развития математических способностей. Они вырабатывают умение устанавливать связи между объектами, наблюдательность, настойчивость.

Решите следующие задачи, иллюстрируя каждый этап решения; постройте информационную модель задачи.



53. Призёры. Эдик, Вася, Андрей и Миша заняли первые четыре места в соревнованиях, причем ни на одно призовое место не было двух претендентов. На вопрос, какие они заняли места, мальчики честно ответили: 1) Андрей - «Я не был последним»; 2) Вася - «Я занял второе место»; 3) Эдик — «Я занял ни первое и ни третье место». Какие места заняли мальчики?

54. Кто с кем катался? Четыре подружки пришли на каток, каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре партнер выше своей партнерши и никто не катается со своей сестрой. Самый высокий из компании – Алеша Иванов, следующий по росту – Андрей

Лебедев, затем Люся Лебедева, Сережа Евсеев, Оля Евсеева, Дима Крылов, Инна Крылова и Аня Иванова. Кто с кем катался?

55. Клоуны. Три клоуна Бим, Бом и Бам вышли на арену в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же трех цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бома ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зеленых туфлях, но в рубашке другого цвета. Как были одеты клоуны?

56. Про щенков. Три друга – Алеша, Сергей и Денис – купили щенков разной породы: щенка ротвейлера, щенка колли и щенка овчарки. Известно, что: щенок Алеши темнее по окрасу, чем ротвейлер, Лесси и Гриф; щенок Сергея старше Грифа, ротвейлера и овчарки; Джек и ротвейлер всегда гуляют вместе. У кого какой породы щенок? Назовите клички щенков.

57. Карнавальные костюмы. У трех подружек – Ксюши, Насти и Оли – новогодние карнавальные костюмы белого, синего и фиолетового цветов, и шапочки тех же цветов. У Насти цвет костюма и шапочки совпали, у Ксюши ни костюм, ни шапочка не были фиолетового цвета, а Оля была в белой шапочке, но цвет костюма у нее не был белым. Как были одеты девочки?

58. **Друзья.** Три друга – Алеша, Боря и Володя – учатся в различных школах (№ 577, 141 и 164) Санкт-Петербурга. Все они живут на различных проспектах (Энтузиастов, Наставников, Косыгина). Причем один из них любит математику, второй – биологию, а третий – химию. Известно, что: (1) Алеша не живет на проспекте Энтузиастов, а Борис не живет на проспекте Наставников; (2) мальчик, живущий на проспекте Энтузиастов, не учится в школе № 164; (3) мальчик, живущий на проспекте Наставников, учится в школе № 577 и любит математику; (4) Володя учится в школе № 164; (5) ученик школы № 141 не любит химию. В какой школе учится каждый из друзей, на каком проспекте он живет и какой предмет любит?

59. **Кто взял книгу?** Библиотека, о которой пойдет речь, не столь уж велика: просто Саше вздумалось навести порядок в своих книгах. Так и есть! Пяти книг не хватает: томика Марка Твена, энциклопедии профессора Зарецкого, сборника сказок Андерсена, рассказов Бианки и сборника стихов Пушкина. Саша смутно помнил, что кому-то давал эти книги. Но кому? После многократных попыток Саше удалось вспомнить следующее: (1) к нему заходили только Андрей, Федя, Ира, Катя и Валя; никому другому он книг не давал; (2) он всегда строго придерживался правила давать друзьям только по одной книге, причем новую книгу давал только после того, как ему возвращали предыдущую; (3) Федя как-то раз брал у него энциклопедию профессора Зарецкого, но давно возвратил, так что взять эту книгу вторично Федя не мог; (4) у Андрея две литературные привязанности: стихи Пушкина и рассказы Марка Твена (книги других авторов Андрей взять не мог); (5) Катя отдает предпочтение рассказам о животных; (6) Ира читает только сказки и книги о компьютерах (поэтому она могла взять энциклопедию профессора Зарецкого); (7) Валя неизменный почитатель поэзии (остальных книг для нее просто не существует). Какую книгу взял каждый из детей?

60. **Как прошёл вечер?** (1) Андрей отправился на концерт. (2) Боря провел вечер с Ольгой. (3) Женя так и не встретил Розу. (4) Полина побывала в кино. (5) Роза посмотрела спектакль в театре. Неизвестно, где именно были Дима и Серафима, но известно, что каждый юноша из этой компании был в театре, на выставке или в кино с одной из девушек – Ольгой, Розой, Полиной и Серафимой. (6) Какая-то пара посетила художественную выставку.

61. **Творческое задание (100 баллов).** Разработайте один из способов информационного моделирования логических сюжетных задач, например, взяв за основу структурные модели (таблицы или графы), знаковые математические модели или компьютерные модели (в среде электронных таблиц).

62. **Творческое задание (100 баллов).** Внимательно прочитайте следующие задачи и ответы к ним.

1. *На воду сели три воробья, один из них улетел. Сколько воробьёв осталось?* / Один и остался, остальные утонули: воробьи не сидят на воде.

2. На грядке сидят 6 воробьёв, к ним прилетели ещё 4. Кот подкрался и схватил одного воробья. Сколько осталось воробьёв на грядке? / Нисколько, так как остальные воробьи улетели.¹

3. Раз, два, три, четыре, пять.

Кошка учится считать.

Потихоньку, понемножку

Прибавляет к мышке кошку.

Получается ответ: «Кошка – есть, а мышки – нет!»²

4. Однажды, точнее, когда-то и где-то

С голодным Котом повстречалась Котлета.

Котлета, представьте, всплеснула руками:

– Ах, как же я счастлива встретиться с Вами!

Кот лишь улыбнулся ей вместо ответа –

И сразу куда-то исчезла Котлета.³

5. Я сажаю в клетку пару животных, затем ещё одну пару; сколько животных будет в клетке? / Ответ зависит от породы животных: может случиться, что один зверь пожрёт другого; нужно также знать, должно ли производить учет немедленно или через год, в течение которого животные могут издохнуть или дать приплод.

Что объединяет предложенные занимательные задачи? Возможны ли действия над множествами объектов, описанных в задачах? Почему? Сформулируйте возникшую проблему. Постарайтесь её решить.

63. Творческое задание (100 баллов). Сформулируйте в общем виде задачу **Расстановка стульев** (задача 47). Предложите алгоритм решения задач данного типа, основанный на арифметических действиях над числами (деление с остатком). Проверьте правильность алгоритма для разного числа стульев, расставляемых в n -угольных комнатах. Разработайте (в качестве иллюстраций) наглядно-образные модели.

64. Творческое задание (100 баллов). Выясните суть понятия «кардинальные числа». Какие математические проблемы связаны с данным понятием? Сформулируйте их. Приведите ряд примеров использования кардинальных чисел в контексте темы, описывающей данный раздел.

¹ Волина В.В. Праздник числа. – М.: АСТ-ПРЕСС, 1996. – С.26

² В.Берестов. Считалочка/Литература и фантазия. – М.: Провсещение, 1994. – С.79

³ Б.Заходер. Странное происшествие/Литература и фантазия. – М.: Провсещение, 1994. – С.170

III. Конечные множества. Сюжетные комбинаторные задачи. Графический метод решения комбинаторных задач

В математике и её приложениях часто приходится иметь дело с различного рода множествами и подмножествами: устанавливать связь между их элементами, определять число множеств или их подмножеств, обладающих заданным свойством. Такие задачи приходится рассматривать при определении наиболее выгодных коммуникаций внутри города, при организации автоматической телефонной связи, работы морских портов, при выявлении связей внутри сложных молекул, генетического кода, а также в лингвистике, в автоматической системе управления, значит в теории вероятностей, и в математической статистике со всеми их многочисленными приложениями.

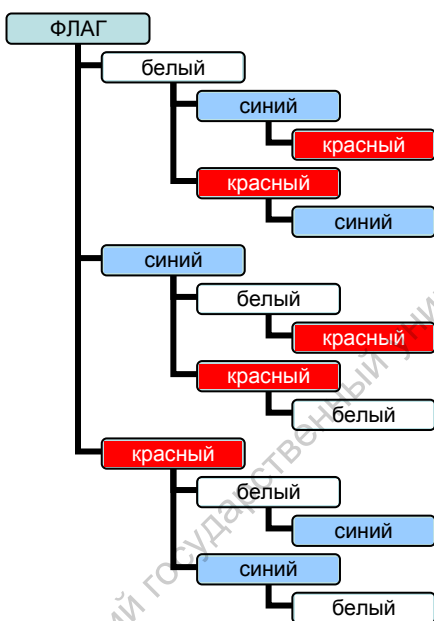


Схема 3. Организационная диаграмма задачи **Флаги государства**

Раздел математики, изучающий комбинаторные соединения (размещения, перестановки и сочетания, а также их всевозможные комбинации) и связанные с ними задачи выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного множества, в соответствии с заданными правилами, называется *комбинаторикой*.

Сюжетные комбинаторные задачи – задачи выбора и расположения элементов некоторого конечного множества предметов или явлений в соответствии с заданными правилами, а также задачи о количестве таких выборов.

Поскольку сюжетные комбинаторные задачи описывают некоторые конечные множества, то одним из методов их решения является метод исчерпывающих проб, известный более как «метод перебора». Перебор всегда осуществляется по какому-либо признаку (свойству) объектов и

напрямую связан с операцией классификацией объектов. Сложность комбинаторных задач заключается в том, что при их решении должна быть выбрана такая система конструктивного перебора, которая давала бы полную уверенность в том, что рассмотрены все возможные случаи (без повтора комбинаций). Наиболее перспективными являются два способа – таблица и граф-схема (дерево вариантов).

Проиллюстрируем на примере задачи **Флаги государств**. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трёх горизонтальных полос равной ширины, разных цветов – белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг? Решение-I. Будем выстраивать горизонтальную граф-схему на основе организационной диаграммы (Схема 3).

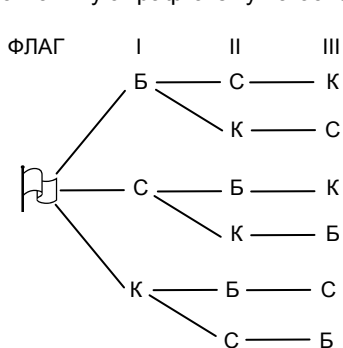


Рис.9 Информационная модель – граф-схема задачи **Флаги государств**

Первая колонка (первый уровень граф-схемы) фиксирует одно из условий задачи: наличие разрабатываемого объекта – флаг. Вторая колонка (второй уровень граф-схемы) описывает возможные цветовые варианты (Б – белый, С – синий, К – красный) для первой полосы флага и поэтому обозначена римской цифрой I. Третья колонка (третий уровень граф-схемы) описывает возможные цветовые варианты для второй полосы флага, обозначена римской цифрой II. Последняя колонка (четвёртый уровень граф-схемы) описывает возможные цветовые варианты для

третьей полосы флага, обозначена цифрой III. Количество вариантов в последней колонке даёт ответ на вопрос задачи. Решение-II. Составим таблицу «В I-м – количество – всего».

Таблица 2 Информационная табличная модель задачи Флаги государств				
Флаг	Количество цветовых вариантов в полосе			Всего вариантов (ответ)
	I	II	III	
1	3	2	1	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Рассуждения. Первая полоса может быть одного из трёх возможных цветов: либо белого, либо синего, либо красного. Всего 3 варианта. Вторая полоса для каждого цветового варианта первой

может быть двух цветов, третья полоса для каждой из имеющихся ситуаций может быть только одного цвета. Итак, количество цветовых вариантов для флага: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Ответ. Шесть стран.

Тестовые задания (по 10 баллов).

65. В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд. Разыгрывается три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось указать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос?

- а) 16! б) 16^3 в) $16 \cdot 15 \cdot 14$ г) _____

66. В группе 16 студентов. Сколькими способами можно назначать двух дежурных?

- а) 16! б) $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16$ в) $16 \cdot 15$ г) _____

67. В группе 16 студентов. Сколькими способами можно выбрать 14 человек для осеннего красса?

- а) $16!$ б) $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16$ в) $16 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 3$ г) _____

68. За столом пять мест. Сколькими способами можно рассадить пятерых гостей?

- а) 5 б) 5^2 в) $5!$ г) 5^5

69. Из ведра, в котором находится 27 роз, выбирают букет из семи роз. Сколькими способами может быть выбран букет?

- а) $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 7!$ в) 27^7
б) $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ г) $27!$

70. Число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга равно

- а) 8 б) 8^2 в) $8!$ г) 8^8

71. Сколькими способами в игре «Спортлото» можно набрать 6 номеров из 49?

- а) 49^6 в) $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$
б) $49!$ г) _____

72. У Лены есть восемь различных красок. Она собирается написать ими слова «Новый год». Сколькими способами она может это сделать, если собирается каждую букву раскрашивать одним цветом и все восемь букв должны быть разными по цвету?

- а) 8 б) 8^2 в) $8!$ г) 8^8

73. У одного человека есть 11 книг по математике, у другого 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по три книги для обмена?

- а) $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ в) $11 \cdot 10 \cdot 9 + 15 \cdot 14 \cdot 13$
б) $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$ г) $11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 35$

74. У ювелира есть пять изумрудов, восемь алмазов и семь топазов. Сколькими способами он может сделать браслет, включив в него по три камня каждого вида?

- а) $10 \cdot 56 \cdot 35$ в) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$
б) $10 + 56 + 35$ г) $5 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5$

Задачи III уровня (по 40 баллов).

75. Для того чтобы совершить какую-либо операцию через банкомат необходимо знать pin-код имеющейся на руках банковской карты. Pin-код представляет собой некоторое четырёхзначное число (здесь, 0056 – тоже число), состоящее из цифр десятичной системы счисления, то есть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Сколько неудачных попыток активации карты через банкомат может быть сделано человеком, не знающим pin-кода банковской карты?

76. Трое ребят делят между собой 10 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми (то есть, если нас интересует, сколько яблок получит каждый, но не то, какие именно яблоки ему достанутся)?

77. Известно, что при составлении команд многоместных космических кораблей возникает вопрос о психологической совместимости участников космического путешествия. Даже вполне подходящие порознь люди могут

оказаться непригодными для длительного совместного путешествия. Предположим, что надо составить команду космического корабля из трёх человек: командира, инженера и врача. На место командира есть четыре кандидата a_1, a_2, a_3, a_4 ; на место инженера – три кандидата b_1, b_2, b_3 ; на место врача – три кандидата c_1, c_2, c_3 . Проведённая проверка показала, что командир a_1 психологически совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_2 и c_3 ; командир a_2 с инженерами b_1 и b_2 и всеми врачами, командир a_3 – с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1, c_3 ; командир a_4 – со всеми инженерами и врачом c_2 . Кроме того, инженер b_1 психологически несовместим с врачом c_3 ; инженер b_2 – с врачом c_1 и инженер b_3 – с врачом c_2 . Сколькими способами при этих условиях может быть составлена команда космического корабля?

78. Сколькими способами можно вывести на арену 5 львов и 4 тигров, при условии, чтобы два тигра не шли друг за другом?

79. В кондитерском отделе продаются пирожные 4 сортов: наполеоны, эклеры, песочные, слоёные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

80. Необходимо разослать 7 различных фотографий, используя для этого 2 различных конверта. Сколькими способами можно это сделать?

81. В группе 20 студентов. Профессор решил каждому студенту задавать по одному из 25 каверзных вопросов. Сколько есть возможностей провести опрос в группе?

82. Творческое задание (100 баллов). Составить Программу (алгоритм) решения сюжетной комбинаторной задачи. Проиллюстрируйте работу Программы на серии примеров.

83. Творческое задание (100 баллов). Выясните суть понятия «фигурные числа». Какие математические проблемы связаны с данным понятием? Сформулируйте их. Приведите ряд примеров использования фигурных чисел в контексте темы, описывающей данный раздел.

84. Творческое задание (100 баллов). Составьте цепочку из десяти сюжетных комбинаторных задач, решение каждой из которых опирается на результат предыдущей.

		1	6	7	8		4	
5	3	4	9	1			8	
		8	3			9	1	2
6	4			8		3	2	5
3			4	6	9			8
8	1	7		5			6	9
4	5	6			7	2		
	8			2	4	6	9	7
	7		1	3	6	8		

Рис.10. Игровое поле Судoku

85. Творческое задание (100 баллов).

Выясните суть понятия «комбинаторная лингвистика». Какие математические и литературные проблемы связаны с данным понятием? Сформулируйте их. Приведите ряд примеров.

86. Творческое задание (100 баллов).

В чём суть логической игры «судoku»? Какое отношение имеет комбинаторика к этой игре? Опишите способы создания игрового поля (Рис.10) и стратегию данной игры. Приведите ряд примеров.

IV. Бесконечные множества. Числовые множества.

Множества натуральных и неотрицательных целых чисел

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов, или просто *число*.

Число (натуральное) – это свойство конечного множества, и в процессе счета мы как раз устанавливаем количество элементов множества. Когда математики всерьез задумались над вопросом, что же такое число, они, прежде всего, обнаружили этот факт. Кроме того, им стало ясно и другое: легче установить, совпадают или нет два числа, чем сказать, каковы они.

Если ребенок видит две чашки, каждую со своим блюдом, то наступит день, когда он поймет, что и блюдце тоже два. Если у нас семеро гостей, а стульев всего шесть, – кто-то останется без стула. Если администратор театра видит, что каждое кресло занято одним зрителем, он понимает, что зрителей ровно столько, сколько мест в зале, и для этого ему не надо знать само количество мест.

Это означает, что понятие «равные числа» не связано с понятием «число» (несмотря на причуды языка). Подобным же образом, приложив, друг к другу два куска веревки, можно установить, что они имеют одинаковую длину, так никогда и, не узнав, чему она равна, или при помощи равноплечих весов убедиться, что два тела имеют одинаковую массу.

Во всех этих случаях легче сказать, обладают или нет два данных объекта общим свойством, чем объяснить в общем виде, что это за свойство. Все, что требуется, – придумать способ сравнения объектов по отношению к этому (пока не определенному) свойству.

Метод сравнения длин или масс выбрать нетрудно, а как сравнивать числа?

Два множества имеют равное число элементов и называются *равночисленными* тогда и только тогда, когда между ними существует биекция.

Разобьем множество на классы равночисленных: два множества отнесем к одному классу тогда и только тогда, когда они равночисленны.

Каждый класс можно задать, указав один из его членов. Например, класс, содержащий множество $\{a, b, c, d, e\}$, включает в себя любое равночисленное с ним множество, а таковыми являются те и только те множества, которые состоят из пяти элементов. В этом смысле число 5 будет задано, если (1) задано некоторое множество и сказано, что оно состоит из 5 элементов; (2) сказано, что любое множество, равночисленное с заданным, тоже состоит из 5 элементов.

Итак, каждому множеству отвечает нечто, называемое числом, причем двум множествам отвечает одно и то же число тогда и только тогда, когда они равночисленны.

Существование чисел можно принять за аксиому. А дальше можно построить всю арифметику. Сначала определим несколько чисел: 0 отвечает пустому множеству $\emptyset$, 1 отвечает множеству $\{x\}$, 2 отвечает множеству $\{x, y\}$, 3 отвечает множеству $\{x, y, z\}$, 4 отвечает множеству $\{x, y, z, w\}$, ...

Конечно, все $x, y, z, w, \dots$ выбираются различными.

Затем введем сложение и умножение чисел. Возьмем два числа m и n . Найдем отвечающие им множества M и N (соответственно), причем такие, которые не пересекаются. Образует объединение $M \cup N$. Ему отвечает какое-то число. Это число и будем, по определению, считать суммой $m + n$ (Рис.11).

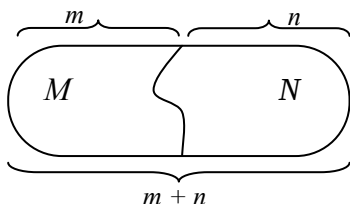


Рис.11

Во-вторых, сложение должно быть «корректно определено». Взяв другие множества M' и N' отвечающие числам m и n , придём ли мы к тому же результату? Если нет, то наше определение бесполезно. Что же это за сложение, если одним способом получается $2 + 2 = 4$, а другим $2 + 2 = 5$?

Допустим, что выбраны другие множества M' и N' , которые не пересекаются и отвечают числам m и n . Тогда M и M' отвечают одному и тому же числу, и, значит, существует биекция $f: M \rightarrow M'$. По той же причине существует биекция $g: N \rightarrow N'$. Тогда можно построить биекцию $h: M \cup N \rightarrow M' \cup N'$.

если положить
$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in M, \\ g(x) \text{ при } x \in N. \end{cases}$$

Теперь у нас достаточно информации, чтобы доказать знаменитую теорему: $2 + 2 = 4$.

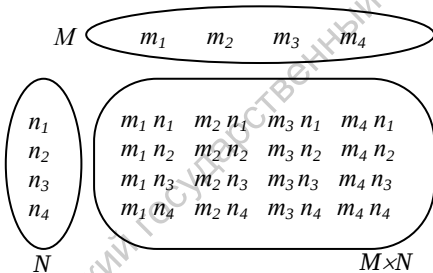


Рис.12

Найдём непересекающиеся множества M и N , каждое из которых отвечает числу 2. По определению, можно взять $M = \{x, y\}$. В качестве N возьмем множество $\{a, b\}$, где x, y, a, b различны. Существует биекция $f: M \rightarrow N$, при которой $f(x) = a, f(y) = b$, так что M и N равночисленны. Значит, N тоже отвечает числу 2.

Образует объединение $M \cup N = \{x, y, a, b\}$.

Существует биекция между этим множеством и множеством $\{x, y, z, w\}$, определенная формулами $g(x) = x, g(y) = y, g(a) = z, g(b) = w$.

Множество $\{x, y, z, w\}$ по определению, отвечает числу 4, значит, и $M \cup N$ отвечает числу 4. По определению сложения, $2 + 2 = 4$.

Для определения умножения чисел m и n , возьмем соответствующие множества M и N , построим их (декартово) произведение $M \times N$ и отвечающее ему число будем, по определению, считать произведением $m \cdot n$.

При этом справедливо равенство
$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ штук}}$$

IV.1

При таком подходе можно доказать законы арифметики, по крайней мере для натуральных чисел (а из них уже можно вывести эти законы для отрицательных целых, для рациональных и для действительных чисел). Возьмем, например, дистрибутивный (распределительный) закон умножения: $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.

Пусть множества M, N, P отвечают числам m, n, p причем M и N не пересекаются. Тогда $(m+n) \cdot p$ отвечает множеству $(M \cup N) \times P$, а $m \cdot p + n \cdot p$ – множеству $(M \times P) \cup (N \times P)$. Эти множества совпадают: первое состоит из всех упорядоченных пар (x, y) , где $x \in M$ или $x \in N$, а $y \in P$; второе состоит из всех упорядоченных пар (x, y) , где $x \in M$ и $y \in P$ или $x \in N$ и $y \in P$.

Раз эти множества совпадают, то между ними существует биекция. Следовательно, они равночисленны, отвечающие им числа равны, и распределительный закон доказан¹.

Аналогично доказываются другие законы арифметики натуральных чисел:

$$\text{IV.2. } a + b = b + a$$

$$\text{IV.3. } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\text{IV.4. } a \cdot b = b \cdot a$$

$$\text{IV.5. } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$\text{IV.6. } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Однако, производя действия над числами, неуместно обращаться каждый раз к соответствующим конечным множествам. Будем рассматривать числа в качестве самостоятельного математического объекта, для чего объединим все числа в новое множество N , которое косвенно определим следующей системой аксиом (система аксиом Пеано) и будем называть *множеством натуральных чисел*.

- 1) Единица есть натуральное число.
- 2) Для любого натурального числа существует одно и только одно непосредственно следующее за ним натуральное число.
- 3) Любое натуральное число непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом.
- 4) Единица не следует ни за каким натуральным числом.
- 5) Если какое-нибудь утверждение верно для единицы, и если всякий раз, когда оно верно для какого-нибудь натурального числа, оно верно и для непосредственно следующего за ним числа, то это утверждение верно для любого натурального числа.

На основе системы аксиом Пеано может быть построена арифметика натуральных чисел, то есть, определены все известные понятия арифметики (например, числа 2, 3, 4 и т.д., сложение чисел, вычитание и пр.) и доказаны все теоремы арифметики (например, законы сложения, умножения и пр.).

Последняя аксиома системы Пеано носит название *аксиомы математической индукции* и лежит в основе одного из методов доказательства математических утверждений, связанных с натуральным

¹ Приведённый в данном разделе материал основан на содержании статьи Яна Стюарта «Счёт, понятие о бесконечном»/ Концепции современной математики. – Минск: Высшая школа, 1980. – С.162 – 171.

рядом, позволяющих сделать общее заключение на основании частных. Как и аксиома, метод именуется *методом математической индукции*.

Применение метода математической индукции (ММИ) сводится:

1. К проверке высказанного утверждения для $n = 1$.
2. К предположению, что утверждение верно для $n = k$.
3. К доказательству теоремы, что из предположения справедливости утверждения для $n = k$ следует справедливость утверждения и для $n = k+1$.

Иногда пункт 1. рассматривается не с $n = 1$, а с какого-нибудь другого утверждения для $n = n_0$, например, при доказательстве неравенства $2^n > n^2$ пришлось бы начинать с $n = 5$. Однако это не умоляет общность метода, так как всегда можно положить $n = m + 4$ (в общем случае $n = m + (n_0 - 1)$) и рассматривать процесс доказательства утверждения $2^{m+4} > (m+4)^2$, начиная с $n = 1$.

Очень важно уметь представлять натуральное число различными способами:

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1} = \\ &= \overline{a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1} = \\ &= \overline{a_k \overline{a_{k-1} \dots a_2} \cdot 10 + a_1} = \\ &= \overline{a_k a_{k-1} \dots a_3 \cdot 100 + a_2 a_1} = \dots \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Отношение порядка на множестве натуральных чисел определяется на основе закона трихотомии и ряда определений.

Закон трихотомии: для любых двух натуральных чисел a и b выполняется одно и только одно из трёх соотношений, где c – некоторое натуральное число:

$$1^*. a = b \qquad 2^*. a = b + c \qquad 3^*. b = a + c$$

В соответствии с этим законом, для любых двух натуральных чисел a и b выполняется одно и только одно из трёх соотношений порядка, где c – некоторое натуральное число:

$$1^*) a = b, \qquad 2^*) \text{ число } a \text{ больше числа } b: a > b, \text{ если } a = b + c, \qquad (IV.8)$$

$$3^*) \text{ число } a \text{ меньше числа } b: a < b, \text{ если } b = a + c. \qquad (IV.9)$$

Отношение порядка обладает рядом свойств:

$$\begin{array}{ll} IV.10. a = b \Leftrightarrow a + c = b + c & IV.11. a = b, x = y \Rightarrow a + x = b + y \\ IV.12. a < b \Leftrightarrow a + c < b + c & IV.13. a < b, x < y \Rightarrow a + x < b + y \\ IV.14. a > b \Leftrightarrow a + c > b + c & IV.15. a > b, x > y \Rightarrow a + x > b + y \\ IV.16. a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c & IV.17. a = b, x = y \Rightarrow a \cdot x = b \cdot y \\ IV.18. a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c & IV.19. a < b, x < y \Rightarrow a \cdot x < b \cdot y \\ IV.20. a > b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c & IV.21. a > b, x > y \Rightarrow a \cdot x > b \cdot y \end{array}$$

Напомним, что результат сложения двух натуральных чисел называется их *суммой*, а сами числа, участвующие в сложении – *слагаемыми*; результат умножения двух чисел называется *произведением*, а числа, участвующие в умножении – *множителями*. Определив возведение числа a в степень n как произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad (IV.22)$$

назовём результат возведения n штук числа a степень – *степенью*, число, возводимое в степень (число, повторяющееся сомножителем) – *основанием степени*, другое (число, указывающее количество сомножителей) – *показателем степени*.

Для натуральных чисел a, b, m, n справедливы следующие свойства (соответственно IV.23 – IV.25):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}; \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

На множестве натуральных чисел можно рассмотреть арифметические действия, обратные сложению, умножению и возведению в степень.

Назовём арифметическое действие, обратное сложению – *вычитанием*: $a - b = x$, а его результат x – *разностью чисел a и b* при условии: $a = b + x$. Компоненты вычитания называются соответственно: a – уменьшаемое и b – вычитаемое.

Назовём арифметическое действие, обратное умножению – *делением*: $a : b = y$, а его результат y – *частным чисел a и b* при условии: $a = b \cdot y$. Компоненты деления называются соответственно: a – делимое и b – делитель.

Назовём арифметическое действие, обратное возведению в степень – *извлечением корня из числа*: $\sqrt[n]{a} = z$, а его результат z – *арифметическим корнем из числа a* при условии: $a = z^n$. Компоненты извлечения корня называются соответственно: a – подкоренное число и n – показатель корня.

Остаётся определить операцию (арифметическое действие) нахождения показателя степени по известному основанию и результату возведения в степень. *Логарифмом* числа b по основанию a называется показатель степени, в который надо возвести число a , чтобы получить число b :

$$w = \log_a b \text{ при условии: } a^w = b.$$

Если к некоторому числу a применить последовательно прямое и обратное арифметическое действие, то число останется без изменения:

$$\begin{aligned} IV.26. (a+b)-b &= a & IV.28. (a \cdot b):b &= a & IV.30. (\sqrt[n]{a})^n &= a \\ IV.27. (a-b)+b &= a & IV.29. (a:b) \cdot b &= a & IV.31. \sqrt[n]{a^n} &= a & IV.32. n^{\log_n a} &= a \end{aligned}$$

Приём последовательного применения прямого и обратного арифметических действий часто используют при упрощении выражений.

С учётом введённых определений сформулируем ряд новых свойств.

$$\begin{aligned} IV.33. a \cdot (b-c) &= a \cdot b - a \cdot c & IV.39. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[m \cdot n]{a} \\ IV.34. a^m : a^n &= a^{m-n} & IV.40. \log_n(a \cdot b) &= \log_n a + \log_n b \\ IV.35. (a:b)^n &= a^n : b^n & IV.41. \log_n(a:b) &= \log_n a - \log_n b \\ IV.36. \sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & IV.42. \log_n a^m &= m \cdot \log_n a \\ IV.37. \sqrt[n]{a:b} &= \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} & IV.43. \log_n a &= (\log_n b) \cdot (\log_b a) \\ IV.38. (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m} & IV.44. \log_n a &= (\log_m a) : (\log_m n) \end{aligned}$$

На множестве $\mathbb{N}$ определены (имеют смысл для любых двух натуральных чисел) операции сложения, умножения и возведения в степень. Остальные

арифметические операции над натуральными числами без введения чисел другой природы возможны не всегда. Например, нахождение разности двух равных чисел, приводит нас к необходимости введения нового числа, не являющегося натуральным, которое назовём нулём:

$$a - a = 0 \quad (IV.45)$$

Ноль в объединении с множеством N образует новое множество *неотрицательных целых чисел*.

Введение нуля приводит к появлению новых свойств:

$$IV.46. a + 0 = a$$

$$IV.47. a - 0 = a$$

$$IV.48. a \cdot 0 = 0$$

$$IV.49. 0 : a = 0$$

$$IV.50. 0^n = 0$$

$$IV.51. \sqrt[n]{0} = 0$$

$$IV.52^*. a^0 = 1$$

$$IV.53. \log_n 1 = 0$$

Определяя противоположные числа, как числа, удовлетворяющие свойству:

$$a + (-a) = 0 \quad (IV.54)$$

расширим числа до множества Z целых чисел: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

На множестве Z определены (имеют смысл для любых двух натуральных числе) операции сложения, вычитания, умножения и возведения в степень. Следовательно, $N \subset Z$.

Следующее расширение до множества Q рациональных чисел позволяет проводить операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Следовательно, $N \subset Z \subset Q$. А значит, любое целое число n можно представить в виде дроби со

знаменателем 1: $n = \frac{n}{1}$.

Следующая таблица (таблица 3) даёт представление о расширении понятия числа и содержит условия возможности выполнения действий на множестве N ($a, b, c, n, r \in N$), а схема 4 является наглядно-образной моделью данного процесса.

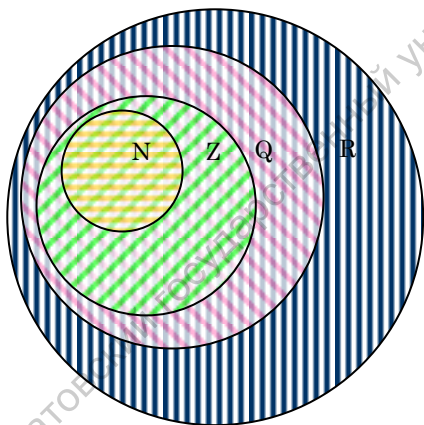


Схема 4. Соотношение между основными числовыми множествами

* Определение степени с нулевым показателем.

Таблица 3

Расширение понятия числа

№	Действие	Условие	Результат	Введение чисел новой природы; новые числовые множества	Пример
1	Вычитание $a-b$	$a > b$	$(a-b) \in \mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$27-3=18$ $18 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$
2		$a = b$	$a-b = a-a = 0$	Нуль; $\{0\}$	$27-27=0$ $0 \in \mathbb{Z}$
3		$a < b$	$a-b = -(b-a)$ целое отрицательное число	Целые отрицательные числа; $\mathbb{Z}_-$	$3-27=-18$ $-18 \in \mathbb{Z}_-$ $-18 \in \mathbb{Z}$
4	Деление	$a < b$	$a : b = \frac{a}{b}$ обыкновенная правильная дробь	Обыкновенные дроби	$3:27 = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ $\frac{1}{9} \in \mathbb{Q}_+$
5		нацело	$a : b = b \cdot n : b = n$ $\Leftrightarrow$ $a \in M \cdot b$	$\mathbb{N}$	$27:3=9$ $9 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}_+$
6		$a : b$ с остатком	$a : b = n$ (осм. r) деление с остатком $a : b = \frac{a}{b} = n \frac{r}{b}$, где $\frac{a}{b} =$ обыкновенная неправильная дробь, $n \frac{r}{b} =$ смешанное число	Обыкновенные дроби	$27:2=13$ (осм1) $27 : 2 = 13 \frac{1}{2}$ $13 \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}_+$
7	Извлечение корня $\sqrt[q]{b}$	$b = c^{n \cdot a}$	$\sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{c^{n \cdot a}} = c^n$	$\mathbb{N}$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ $3 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}_+$ $3 \in \mathbb{R}_+$
8		$b \neq c^{n \cdot a}$	$\sqrt[q]{b}$	Иррациональные числа $\mathbb{I}_+$	$\sqrt[27]{3}$ $\sqrt[27]{3} \in \mathbb{I}_+, \mathbb{R}_+$
9	Нахождение показателя степени n	$a : b = a_1$ $a_1 : b = a_2$ $a_2 : b = a_3$ $\vdots$ $a_{n-1} : b = 1$	$n = \log_b a$	$\mathbb{N}$	$27:3:3:3=1$ $\log_3 27 = 3$ $3 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}_+$ $3 \in \mathbb{R}_+$
10		в противном случае	$\log_b a$	Алиquotные дроби Логарифмы; трансцендентные числа	$\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$ $\log_2 27 \in \mathbb{R}_+$

Тестовые задания (по 10 баллов).

87. Значение выражения $\sqrt{2x+1}$ при $x = -\frac{4}{9}$ равно

- а) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ б) 1 в) $\frac{1}{3}$ г) не имеет смысла

88. Для $0 < a < 1$ справедливо утверждение

- а) $a^2 < a^3$ б) $a^2 > a^3$ в) $a^2 = a^3$ г) для сравнения не хватает данных

89. Между числами $\sqrt{15}$ и $\sqrt{35}$ заключены следующие целые числа

- а) 16, 17, ..., 34 б) 3, 4 и 5 в) 4, 5 и 6 г) 4 и 5

90. Значение выражения $(m^{-6})^{-2}m^{-14}$ при $m = \frac{1}{4}$ равно

- а) -16 б) $-\frac{1}{16}$ в) $\frac{1}{16}$ г) 16

91. О натуральных числах a, b, c известно: $a > b > c$. Какое из следующих чисел отрицательно?

- а) $a^2 - b^2$ б) $ab - cb$ в) $bc - c^2$ г) $ac - ab$

92. Значение выражения $2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ равно

- а) 60 б) 30 в) 12 г) $10\sqrt{6}$

93. Для $x > y > z$ справедливо неравенство

- а) $x - y > z$ б) $y > x + z$ в) $z - x > y$ г) $z > y - x$

94. Произведение $4 \cdot 2^n$ можно представить в виде степени

- а) 2^{2n} б) 2^{n+2} в) 4^{n+2} г) 8^n

95. Число 2^{5-a} равно

- а) $2^5 - a$ б) $2^5 - 2^a$ в) $2^5 \cdot 2^a$ г) $2^5 : 2^a$

96. Из чисел $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ выберите все те, при которых число $10x + 1$ больше числа $8x - 2$.

- а) $-3, -2$ б) $-3, -2, -1$ в) $-1, 0, 1, 2, 3$ г) $0, 1, 2, 3$

97. Число $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$ равно

- а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

Задачи I уровня (по 20 баллов). Доказать, что при каждом натуральном n справедливо равенство:

98. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

99. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}$

100. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

101. $2^2 + 6^2 + 10^2 + \dots + (4n-2)^2 = \frac{4n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}$

$$102. 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

$$103. 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1)$$

$$104. 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n+1) = n \cdot (n+1)^2$$

$$105. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \right)$$

$$106. \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot (2n+1)}$$

$$107. \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{4n(4n+4)} = \frac{1}{16} - \frac{1}{16(n+1)}$$

$$108. \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$109. \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

$$110. \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{(6n-5) \cdot (6n+1)} = \frac{n}{6n+1}$$

$$111. 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4}$$

Задачи I уровня (по 20 баллов). Доказать утверждение для натуральных чисел:

$$112. \text{ Если } n \geq 5, \text{ то } 2^n > n^2.$$

$$113. \text{ Если } n \geq 10, \text{ то } 2^n > n^3.$$

$$114. a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$$

$$115. a^2 + 2ab + 3b^2 + 2a + 6b + 3 > 0.$$

$$116. a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 > 0.$$

$$117. (a+b)^n < 2^n (a^n + b^n).$$

Задачи II уровня (по 30 баллов). Проверить равенство:

$$118. 2 \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+n) = 2^{n+1} (2n-1)!$$

$$119. 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

$$120. 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + (n-1) \cdot n^2 = \frac{n \cdot (n^2 - 1) \cdot (3n+2)}{12}$$

$$121. 2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n \cdot (2n^2 + 9n + 1)}{6}$$

$$122. \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

$$123. \frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{7}{8 \cdot 15} + \frac{7}{15 \cdot 22} + \dots + \frac{7}{(7n-6) \cdot (7n+1)} = 1 - \frac{1}{7n+1}$$

$$124. 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \dots + (n+1) \cdot n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (3n+1)}{12}$$

$$125. (-1)^j \cdot (2n-1) + \dots + 11 - 9 + 7 - 5 + 3 - 1 = (-1)^j \cdot n$$

Задачи II уровня (по 30 баллов). Найти сумму:

$$126. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

$$127. \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$$

$$128. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$$

$$129. \frac{4}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{4}{(n+3) \cdot (n+4)}$$

$$130. \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)}$$

$$131. 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

$$132. 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2$$

Задачи III уровня (по 40 баллов). Решить задачу.

133. Из города А в город В в 6 ч утра выехал грузовой автомобиль. Шесть часов спустя из города В в город А по той же дороге выехал ему навстречу легковой автомобиль. Автомобили движутся с постоянными скоростями. По предварительной договоренности они одновременно приехали в поселок С, расположенный на дороге между А и В. Разгрузка и оформление документов длились 5 часов. Затем грузовой и легковой автомобили продолжили каждый свой путь. Легковой и грузовой автомобили прибыли соответственно в города А и В одновременно в 23 ч того же дня. Найдите время прибытия автомобилей в населенный пункт С.

134. На кусте роз каждое утро, начиная с понедельника, расцветают пять бутонов. Каждое утро садовник срезает три из них. Из скольких роз будет состоять букет, если в ближайшее воскресенье садовник срежет все розы?

135. Турист, находящийся в спортивном лагере, должен успеть к поезду на железнодорожную станцию. Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на 30 мин, а если на мопеде со скоростью 40 км/ч, то придет за 2 ч до отхода поезда. Чему равно расстояние от лагеря до станции?

136. Турист добирался до места слета на велосипеде, на лодке, а затем пешком. Если бы путь на велосипеде занял у него в 3 раза меньше времени, на лодке – в 6 раз меньше, а пешком – в 4 раза меньше, то на всю дорогу у него ушло бы 2 ч. Если бы на велосипеде он также ехал в 3 раза меньше времени, на лодке – в 1,5 раза меньше. А пешком – в 2 раза меньше, то добрался бы до места слета за 3 ч. Сколько времени занял у него весь путь?

137. Из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению реки одновременно начинают движение соответственно плот и лодка. В тот же момент из пункта В навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к

лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

138. Лесхоз планировал заготовить за несколько дней 216 новогодних елей. Первые три дня лесхоз выполнял установленную ежедневную норму, а потом стал заготавливать на 2 ели в день больше. Поэтому уже за 1 день до срока было заготовлено 232 ели. Сколько елей ежедневно заготавливал лесхоз в первые три дня работы?

139. Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции потребовалась 21 железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченное на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех трёх насосов равна 7 цистернам в сутки.

140. Студент затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 10 раз дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, а книга – в 5 раз дешевле, то та же покупка стоила бы 400 рублей. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил бы в 2 раза дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, а книга – в 3 раза дешевле, то студент заплатил бы 1200 рублей. Сколько стоит покупка, и за что было уплачено больше: за портфель или авторучку?

141. Фермер арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60\$ в день, производительность его в мягком грунте 250 м^3 в день, в твёрдом грунте – 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50\$ в день, производительность его в мягком грунте 180 м^3 в день, в твёрдом грунте – 100 м^3 в день. Первый работал несколько полных дней и вырыл 720 м^3 . Второй за несколько полных дней вырыл 330 м^3 . Сколько дней работал каждый экскаватор, если фермер заплатил за аренду не более 300\$.

Задачи III уровня (по 40 баллов). Арифметический метод решения сюжетных задач – адекватная задаче последовательность арифметических действий (при этом все арифметические операции при решении задачи проводятся над конкретными числами и основой рассуждения является знание смысла арифметических действий), описывающих ту или иную ситуацию/действие задачи – знаком вам с начальной школы. Используя этот метод, решите следующие задачи.

142. Одного человека спросили: «Сколько вам лет?» Он ответил так: «10 лет тому назад я был в 4 раза старше сына, а через 10 лет я буду лишь вдвое старше его». Сколько лет этому человеку?

143. Два поезда выехали в разное время навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми 588 км. Первый поезд проходил в час 48 км, а второй поезд проходил в час 63 км. На сколько часов один из них выехал раньше другого?

144. Воспитательница детского сада рассчитала, что если давать каждому ребенку по 6 слив, то останутся 38 слив. Если же раздавать по 8 слив, то одному ребенку слив не достанется. Сколько было детей и сколько слив?

145. Творческое задание (100 баллов).

Вам необходимо освоить еще один метод решения сюжетных задач – компьютерное моделирование в электронных таблицах.

Преимуществом этого метода является возможность работы с тремя основными классами моделей: материальными (компьютерными), информационными (знаковыми и наглядно-образными) и мысленными (воображаемыми). Причем компьютерному моделированию в электронных таблицах предшествует информационное, в том числе и математическое, моделирование.

Рассмотрим метод моделирования в электронных таблицах подробнее¹.

Объекты и процессы, описанные в сюжетных задачах, можно выразить математическими формулами, связывающими их параметры. Эти формулы составляют математическую модель сюжетной задачи. По формулам можно сделать расчеты с различными значениями параметров и получить количественные характеристики модели. Расчеты, в свою очередь, позволяют сделать выводы и обобщить их. Среда электронных таблиц – это инструмент, который виртуозно и быстро выполняет трудоемкую работу по расчету и пересчету количественных характеристик исследуемого объекта или процесса.

Моделирование сюжетных задач в электронных таблицах проводится по общей схеме, которая выделяет четыре основных этапа: постановка задачи, разработка модели, компьютерный эксперимент и анализ результатов. Рассмотрим особенности проведения моделирования в среде электронных таблиц по каждому этапу.

I этап. Постановка задачи. Сюжетная задача с точки зрения компьютерного моделирования является наиболее простой: в ней четко поставлена цель и определены параметры (которые известны – данные условия, и которые надо найти – требования), поэтому постановка задачи осуществляется самим фактом существования данной задачи.

На этом этапе ученикам необходимо воспринять информацию задачи и, что главнее, «принять» задачу, то есть «захотеть ее решить».

Следует заметить, что при моделировании в электронных таблицах учитываются только параметры, которые имеют количественные характеристики, и взаимосвязи, которые можно описать формулами. Формализацию проводят в виде поиска ответов на вопросы, уточняющих общее описание задачи.

Как правило, сюжетная задача сформулирована в упрощенном виде и в ней четко поставлены цели и определены параметры модели, которые надо

¹ Информатика. 7-9 класс [Текст]: Практикум-задачник по моделированию. Базовый курс / Н.В.Макарова, Г.С.Николайчук /Под ред.Н.В. Макаровой. – СПб.: Питер, 2007.

учесть. Тогда первый этап моделирования опускается как уже осуществленный. В противном случае проводится работа по формализации задачи (например, задачи в стихах).

II этап. Разработка модели. Этап разработки модели начинается с построения информационной модели в различных знаковых формах, которые на завершающей стадии воплощаются в компьютерную модель.

Информационная модель в табличной форме детально описывает объекты.

Иногда полезно дополнить представление об объекте и другими знаковыми формами: схемой, чертежом, формулами, – если это способствует лучшему пониманию задачи.

Во многих исследованиях используется прием *уточнения моделей*. Первоначально моделируется один элементарный объект с минимальным набором входных параметров. Постепенно модель уточняется введением некоторых из отброшенных ранее характеристик.

При исследовании количественных характеристик объекта необходимым шагом является составление *математической модели*, которое заключается в выводе математических формул, связывающих параметры модели.

На основе составленных информационной и математической моделей составляется *компьютерная модель*. Компьютерная модель непосредственно связана с прикладной программой, с помощью которой будет производиться моделирование. В нашем случае это электронные таблицы. При составлении расчетных таблиц надо четко выделить три основные области данных: исходные данные (ячейки таблицы для них желательно выделить цветом), промежуточные расчеты, результаты (выделены цветом шрифта). Исходные данные вводятся «вручную». Промежуточные расчеты и результаты проводятся по формулам, составленным на основе математической модели и записанным по правилам электронных таблиц. В формулах, как правило, используются абсолютные ссылки на исходные данные и относительные ссылки на промежуточные расчетные данные.

	A	B	C	D	E
1		За 1 ч	кол-во час	Объем	Введите данные условия задачи в жёлтые ячейки
2	I	6 1/3	6	38	
3	II	6 2/5	15	96	
4	III	5	7	35	
5	I	6 1/3	75	475	
6	II	6 2/5	75	480	
7	III	5	75	375	
8	I,II,III	17 11/15	75	1330	
9					

Рис.13 Компьютерная модель задачи: Одна мельница может смолоть 38 ц пшеницы за 6 ч., другая – 96 ц за 15 ч., третья – 35 ц за 7 ч. Как распределить 133 т пшеницы между мельницами, чтобы они мололи зерно в течение одного и того же времени?

III этап. Компьютерный эксперимент. После составления компьютерной модели проводятся тестирование и серия экспериментов согласно намеченному плану.

План эксперимента должен четко отражать последовательность работы с моделью.

Первым пунктом такого плана всегда является *тестирование* модели. Тестирование в электронных таблицах начинается с проверки правильности введения данных и формул.

Для проверки правильности алгоритма построения модели используется тестовый набор исходных данных, для которых известен или заранее определен другими способами конечный результат.

Например, если используются при моделировании расчетные формулы, то надо подобрать несколько вариантов исходных данных и просчитать их «вручную». Это будет результат, полученный другим способом. Затем, когда модель построена, проводится тестирование на тех же вариантах.

В плане должен быть предусмотрен эксперимент или серия экспериментов, удовлетворяющих целям моделирования.

Каждый эксперимент должен сопровождаться осмыслением результатов, которые станут основой анализа результатов моделирования.

используя статус, составив анализ результатов моделирования:							G Введите данные условия задачи в жёлтые ячейки
	A	B	C	D	E	F	
1		$v, v1 < v2$	t		S		
2	Николай	60	4	12	240	960	
3	Андрей	80					
4		20	Отвсем.		960		

Рис.14 Компьютерная модель задачи: Николай и Андрей живут в одном доме. Николай вышел из дома и направился к школе. Через 4 минуты после него из дома вышел Андрей и догнал своего товарища у школы. Найдите расстояние от дома до школы, если Николай шёл со скоростью 60 м/мин, а скорость Андрея 80 м/мин.

Расчётные формулы для данной (Рис. 13) компьютерной модели:

B4 := B3-B2

E2 := B2*C2

D2 := E2/B4

F2 := B3*D2

D4 := ЕСЛИ(B2<B3;F2;"Решений нет")

IV этап. Анализ результатов моделирования. Заключительным этапом моделирования является анализ модели. По полученным расчетным данным проверяется, насколько расчеты отвечают нашему представлению и целям моделирования. Важным качеством исследователя является умение увидеть в числах реальный объект или процесс.

Разработайте компьютерную модель одной из задач 133-144.

V. Числовые последовательности

Зафиксируем в таблице «Последовательности» основные характеристики некоторых последовательностей.

В таблице приняты следующие обозначения для последовательностей:

- (a_n) арифметическая прогрессия и её частные случаи
 - (b_n) последовательность натуральных чисел,
 - (c_n) последовательность четных чисел,
 - (d_n) последовательность нечетных чисел;
- (h_n) последовательность квадратов натуральных чисел;
- (j_n) последовательность кубов натуральных чисел;
- геометрические прогрессии со знаменателем q :
 - (k_n) для $q > 1$
 - (l_n) для $|q| < 1$;
 - (m_n) геометрическая прогрессия с чередованием знаков;
- (r_n) последовательность аликвотных дробей;
- (s_n) последовательность квадратов аликвотных дробей;
- (t_n) последовательность арифметических корней натуральных чисел;
- (v_n) последовательность арифметических корней натуральных чисел с чередованием знаков;
- (u_n) последовательность Фибоначчи: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$;
- (z_n) последовательность Фарея порядка m , определяемая следующим образом: последовательность рациональных чисел вида $\frac{\alpha}{\beta}$ (где $\frac{\alpha}{\beta}$ несократимая дробь, причем $0 \leq \alpha \leq \beta \leq m, m \in \mathbb{N}$), расположенных в порядке возрастания.

Вопросительным знаком в таблице отмечены требования творческих заданий.

Последовательности					Таблица 4
	Рекуррентная Формула	Формула n-го члена	Характеристическое свойство	Свойство членов равноудаленных от «концов» последователь- ности	Формула суммы первых n членов
(a_n)	$a_{n+1} = a_n + c, c \neq 0$	$a_n = a_1 + (n-1)c$	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
(b_n)	$b_1 = 1,$ $b_{n+1} = b_n + 1$	$b_n = n$			$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
(c_n)	$c_1 = 2$ $c_{n+1} = c_n + 2$	$c_n = 2n$			$S_n = \frac{2a_1 + c(n-1)}{2} \cdot n$
(d_n)	$d_1 = 1$ $d_{n+1} = d_n + 2$	$d_n = 2n + 1$			$S_n = n \cdot (n+1)$
(h_n)	$h_{n+1} = h_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$	$h_n = n^2$	$4h_n = (\sqrt{h_{n-1}} + \sqrt{h_{n+1}})^2$	$\sqrt{h_1} + \sqrt{h_n} = \sqrt{h_2} + \sqrt{h_{n-1}}$	$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$
(j_n)	$j_{n+1} = j_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$	$j_n = n^3$	$8j_n = (\sqrt[3]{j_{n-1}} + \sqrt[3]{j_{n+1}})^3$	$\sqrt[3]{j_1} + \sqrt[3]{j_n} = \sqrt[3]{j_2} + \sqrt[3]{j_{n-1}} = \dots$	$S_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$
(k_n)	$k_{n+1} = k_n \cdot q, q > 1$	$k_n = k_1 \cdot q^{n-1},$ $k_1 \neq 0$	$k_n^2 = k_{n-1} \cdot k_{n+1} \Leftrightarrow$ $k_n = \sqrt{k_{n-1} \cdot k_{n+1}}$	$k_1 \cdot k_n = k_2 \cdot k_{n-1} = \dots$	$S_n = \frac{k_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$
(l_n)	$l_{n+1} = l_n \cdot q, q < 1$	$l_n = l_1 \cdot q^{n-1},$ $l_1 \neq 0$	$l_n^2 = l_{n-1} \cdot l_{n+1}$	$l_1 \cdot l_n = l_2 \cdot l_{n-1} = \dots$	$S_n = \frac{l_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$
(m_n)	$m_{n+1} = m_n \cdot q,$ $q < -1$	$m_n = m_1 \cdot q^{n-1},$ $m_1 \neq 0$	$m_n^2 = m_{n-1} \cdot m_{n+1}$	$ m_1 \cdot m_n = m_2 \cdot m_{n-1} = \dots$	$S_n = \frac{m_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$
(r_n)	$r_{n+1} = \frac{n \cdot r_n}{n+1}$	$r_n = \frac{1}{n}$	$r_n = \frac{2r_{n-1} \cdot r_{n+1}}{r_{n-1} + r_{n+1}}$	$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_{n-1}} = \dots$	?
(s_n)	$s_{n+1} = \frac{s_n \cdot n^2}{n+1}$	$s_n = \frac{1}{n^2}$	?	$\sqrt{\frac{1}{s_1}} + \sqrt{\frac{1}{s_n}} = \sqrt{\frac{1}{s_2}} + \sqrt{\frac{1}{s_{n-1}}}$	?
(t_n)	$t_{n+1} = \sqrt{t_n^2 + 1}$	$t_n = \sqrt{n}$	?	?	?
(v_n)	$v_{n+1} = (-1)^{n+1} \sqrt{v_n^2 + 1}$	$v_n = (-1)^n \sqrt{n}$	?	?	?
(u_n)	$u_1 = u_2 = 1$ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$	?	$u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$	?	$S_n = u_{n+2} - u_2$
(z_n)	?	?	?	$(z^n):$ $z_1 + z_n = z_2 + z_{n-1} = \dots = 1$	?

Тестовые задания (по 10 баллов).

146. Если в арифметической прогрессии первый и десятый члены соответственно равны 30 и 12, то сумма двенадцати первых членов равна

- а) 228 б) 226 в) 210 г) 180

147. В геометрической прогрессии $b_1=64$, $q=-1/2$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен утверно?

- а) $b_2 < b_3$ б) $b_3 > b_4$ в) $b_4 > b_6$ г) $b_5 > b_7$

148. Членом арифметической прогрессии 3; 6; 9; 12; ... является число

- а) 83 б) 95 в) 100 г) 102

149. Арифметической прогрессией является последовательность

- а) натуральных степеней числа 2;
б) натуральных чисел, кратных 7;
в) квадратов натуральных чисел;
г) чисел, обратных натуральным.

150. Геометрической прогрессией является последовательность

- а) натуральных степеней числа 3;
б) натуральных чисел, кратных 3;
в) кубов натуральных чисел;
г) чисел, противоположных натуральным.

151. Формулой n -ого члена геометрической прогрессии, заданной условиями: $b_1=3$, $b_{n+1}=2 \cdot b_n$, – является

- а) $b_n = 3 \cdot 2n$ в) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
б) $b_n = 3 \cdot 2^n$ г) $b_n = 3 \cdot 2(n-1)$

152. Последовательность задана формулой $c_n = n^2 - 1$. Какое из указанных чисел является членом этой последовательности?

- а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

153. Из арифметических прогрессий число (-10) содержит последовательность

- а) $a_n = 2n + 10$ в) $a_n = -4n - 8$
б) $a_n = -3n$ г) $a_n = -3n + 2$

154. Из геометрических прогрессий число 9 содержит последовательность

- а) $b_n = -3^n$ в) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
б) $b_n = 3^n$ г) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

155. Среди членов последовательности заданной формулой

$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ нет числа

- а) $1/2$ б) $1/4$ в) $1/5$ г) $1/6$

156. Среди членов последовательности заданной формулой $a_1=1, a_2=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ нет числа

- а) 21 б) 235 в) 610 г) 987

157. Последовательность 1, 2, 3, ... не может быть задана следующим образом

- а) $a_1=1, a_n=2a_{n-2}+1$ в) $a_1=1, a_n=a_{n-1}+1$
б) $a_1=1, a_2=2, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ г) $a_{3n-2}=1, a_{3n-1}=2, a_{3n}=3$

Задачи I уровня (по 20 баллов).

158. Найти натуральное число x , если $1+7+13+\dots+x=280$, где слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

159. В геометрической прогрессии три члена. Их сумма равна 19, а сумма их квадратов равна 133. Найти члены прогрессии.

160. Сколько членов геометрической прогрессии нужно сложить, чтобы получить сумму 3069, если $a_1+a_5=51$ и $a_2+a_6=102$?

161. Найти последовательность из четырёх чисел, первые три из которых образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую прогрессию; сумма крайних чисел последовательности равна 66, а сумма средних её чисел – 60.

162. Про арифметическую прогрессию известно, что $a_3=5, a_2+a_6=18$. Найти число, обратное сумме первых десяти членов прогрессии.

163. Укажите наиболее близкий к нулю член арифметической прогрессии 22,7; 21,4; ...

164. Существует ли арифметическая прогрессия, в которой $a_6=14, a_{10}=20, a_{16}=28$?

165. Про арифметическую прогрессию известно, что $a_5+a_9=40$. Найдите $a_3+a_7+a_{11}$.

166. Найти сумму натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 150.

167. Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 250, которые не делятся на 7.

168. Найти сумму натуральных чисел с тридцатого по сороковой включительно, если $a_n=3n+5$.

169. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 27,5, а сумма следующих пяти её членов равна 90. Найти сумму членов этой последовательности с одиннадцатого по семнадцатый включительно.

170. Существует ли геометрическая прогрессия, в которой $a_2=-6, a_5=48, a_7=192$?

171. Между числами 2 и 18 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

172. Найти сумму первых 25 совпадающих членов двух арифметических прогрессий: 3,8,13,... и 4,11,18,...

173. Найти сумму всех чётных трёхзначных чисел, кратных 3, но не кратных 5.

174. Сколько существует натуральных четырёхзначных чисел, которые делятся только на одно из чисел 4 или 5?

175. Найти сумму всех натуральных чисел, которые не превосходят 200, которые при делении на 5 дают в остатке 4.

176. Сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равно 3069?

Задачи II уровня (по 30 баллов).

177. Вычислить $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

178. Вычислить $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$.

179. Вычислить $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 100 \cdot 2^{99}$.

180. Вычислить $I + II + III + IIII + \dots + \underbrace{II\dots I}_{n \text{ цифр}}$.

181. Найти сумму $\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-3}{n} + \dots + \frac{1}{n}$.

182. Вычислить $\frac{1+2+4+8+\dots+2^{11}}{3+12+\dots+32}$.

183. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых 13 членов к сумме последних 13 членов равно $\frac{1}{2}$, а отношение суммы всех членов без первых трёх к сумме членов без последних трёх равно $\frac{4}{3}$.

184. Между числами 1 и 256 вставить три числа так, чтобы все пять чисел составили геометрическую прогрессию. Между теми же числами вставить четыре числа так, чтобы все шесть чисел составили арифметическую прогрессию. Найти сумму семи найденных чисел.

185. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй её член в частном получится 5, а при делении тринадцатого члена этой прогрессии на её шестой член получится: в неполном частном – 2, в остатке – 5. Найти сумму двадцати членов этой прогрессии.

186. Найти трёхзначное число, если известно, что его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего данного на 400 – арифметическую прогрессию.

187. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию.

188. Найти трёхзначное число, если известно, что его цифры образуют геометрическую прогрессию, а при вычитании из этого числа 792 получается новое число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если же из цифры, выражающей число сотен вычесть 4, а остальные цифры оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

189. Найти четырёхзначное число, если известно, что оно делится на 225, а его первые три цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

190. Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 , такие, что $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Числа $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$ образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1 = b_1, a_2 = b_2$.

191. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Чему равен знаменатель данной геометрической прогрессии, если известно, что по модулю он не превосходит 1.

192. Три различных числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a+b, b+c, c+a$ образуют арифметическую прогрессию. Чему равен знаменатель данной геометрической прогрессии?

193. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 9. На втором месте – сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1, то есть 10: $9^2=81, 8+1+1+1=10$. На третьем месте – 2, полученная следующим образом: $10^2=100, 1+0+0+1=2$ и т.д. Какое число стоит на 2008 месте?

Задачи III уровня (по 40 баллов).

194. Три брата, числа лет которых образуют геометрическую прогрессию, делят между собой некоторую сумму денег пропорционально возрасту. Если бы ту же сумму денег они разделили пропорционально возрасту через три года, то младший брат получил бы на 1050 рублей больше, а средний на 150 рублей больше, чем теперь. Сколько лет каждому из братьев, если известно, что разница в возрасте между старшим и младшим равна 15 годам?

195. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а в каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

196. Алеша, Боря, и Вася покупали блокноты и карандаши. Алеша купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря – 6 карандашей и блокнот, Вася – 3 карандаша и блокнот. Сколько стоит блокнот, если известно, что карандаш стоит 3 рубля, а суммы денег, потраченные Алешей, Борей и Васей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию?

197. Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количество рыб, пойманных Колей, Петей и Мишей, образует в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на 2 рыбы меньше, а Ваня на 12 меньше, чем на самом деле, то количества рыб, пойманных Колей, Мишей и Ваней образовали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на 18 рыб меньше Вани?

198. Средний рост трех студентов равняется 1 м 78 см, причем рост каждого из них не менее 1 м 72 см. Какой максимально возможный рост любого из этих студентов?

199. В 21 кучу разложили 200 орехов. Докажите, что существуют две кучи, в которых орехов поровну.

200. Творческое задание (100 баллов). Проведите исследование последовательности Фарея – заполните ячейки последней строки таблицы 4, отмеченные знаком «?».

Последовательность Фарея порядка m , определяется как последовательность рациональных чисел вида $\frac{\alpha}{\beta}$ (где $\frac{\alpha}{\beta}$ несократимая дробь, причем $0 \leq \alpha \leq \beta \leq m, m \in \mathbb{N}$), расположенных в порядке возрастания.

Составьте последовательность Фарея 8-го порядка; какие при этом трудности вы испытали? Составьте последовательность Фарея 1-го порядка и 2-го порядка; какую закономерность при этом вы заметили? Продолжайте составление последовательностей 3, 4, ..., 7-го порядков; как вы при этом будете действовать?

Сравните последовательности Фарея порядка $m < 8$.

Постройте графики функций, описывающие последовательности Фарея порядка $m < 8$ в системе координат ZON.

Докажите (опровергните) следующие гипотезы относительно свойств последовательности Фарея:

1. Если $z_n = \alpha_n / \beta_n$ и $z_{n+1} = \alpha_{n+1} / \beta_{n+1}$, то выполняется равенство

$$\beta_n \cdot \alpha_{n+1} - \alpha_n \cdot \beta_{n+1} = 1.$$

2. Между членами $z_n = \alpha_n / \beta_n$ и $z_{n+1} = \alpha_{n+1} / \beta_{n+1}$ последовательности Фарея порядка $m-1$ расположено число z^m последовательности Фарея порядка m :

$$z^m = (\alpha_n + \alpha_{n+1}) / (\beta_n + \beta_{n+1}).$$

3. Члены последовательности Фарея порядка m симметричны относительно числа $\frac{1}{2}$, при этом выполняется равенство $z_1 + z_n = z_2 + z_{n-2} = \dots = 1$.

4. Первые m чисел ($m > 0$) последовательности Фарея $m+1$ порядка образуют последовательность аликвотных дробей, записанную в порядке возрастания.

5. График (в системе координат ZON) приближается к прямым $n = 0, n = 1$.

6. Графики симметрично расположенные относительно прямой $z_n = \frac{1}{2}$ сужаются к прямой $z_n = \frac{1}{3}$ и $z_n = \frac{2}{3}$ соответственно.

7. Последовательность Фарея описывает множество рациональных чисел.

8. Последовательность Фарея эквивалентна множеству натуральных чисел.

201. Творческое задание (100 баллов). Проведите исследование последовательностей (r_n) и (s_n) – заполните соответствующие ячейки таблицы 4, отмеченные знаком «?».

202. Творческое задание (100 баллов). Проведите исследование последовательностей (t_n) и (v_n) – заполните соответствующие ячейки таблицы 4, отмеченные знаком «?».

203. Творческое задание (100 баллов). Проведите исследование последовательности Фибоначчи по следующему плану (I-VI).

I. К последовательности чисел Фибоначчи приводит решение следующей задачи: «Сколько пар кроликов может произойти от одной пары в течение года, если а) каждая пара каждый месяц порождает новую пару, которая со второго месяца становится производителем, и б) кролики не дохнут?».

Данная последовательность имеет вид: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Докажите по индукции следующее свойство последовательности Фибоначчи:

$$u_{n+m} = u_{n-1} \cdot u_m + u_n \cdot u_{m+1} \quad (*)$$

II. Последовательность Фибоначчи обладает следующими свойствами:

1. $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$;

2. $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$;

3. $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1}$;

4. Если n делиться на m , то и u_n делиться на u_m .

5. Каково бы ни было целое число m , среди первых m^2-1 чисел Фибоначчи найдется хотя бы одно, делящееся на m .

6. Соседние числа Фибоначчи взаимно просты.

Докажите эти свойства. В случае затруднения воспользуйтесь следующими указаниями:

1. Воспользуйтесь формулой (*), равенством $m=n$ и формулой $n+1$ члена последовательности Фибоначчи для доказательства первого свойства.

2. Второе свойство доказывается аналогично первому (полагая $m=2n$).

3. Третье свойство доказывается по индукции. При доказательстве индуктивного перехода используют приём прибавления обеих частям исходного равенства одного и того же числа. В нашем случае это число $u_n \cdot u_{n+1}$.

4. Пусть n делиться на m , тогда справедливо следующее равенство $n = m \cdot k$. Проведите доказательство индукцией по k .

5. Следует ли из формулировки теоремы указания на то, какое именно число Фибоначчи делиться на m ? Можно ли сказать, что в сформулированном утверждении говорится о том, что первое число Фибоначчи делящееся на m не должно быть особенно большим? Используя рассуждения по индукции, проверьте выполнимость утверждения для $m=2 \div 6$. Выпишите остатки от деления. Выявите закономерность. Результат обобщите.

6. Доказать утверждение методом от противного.

III. Используя рекуррентную формулу, продолжите последовательность Фибоначчи «влево»: запишите первые 7 чисел.

IV. Определите (U_n) – последовательность Фибоначчи в случае $n \in \mathbb{Z}$. Перечислите некоторые свойства последовательности (U_n) .

V. Запишите формулу нахождения n -го ($n < 0$) члена последовательности Фибоначчи (U_n) с использованием последовательности (u_n) .

VI. Выведите формулу для вычисления суммы n ($n < 0$) чисел Фибоначчи.

VII. Проверить равенства (под символом $S_{-3;3}$ следует понимать сумму чисел последовательности Фибоначчи от U_{-3} до U_3 включительно):

A) $S_{-6} = -4$.

Б) $S_{-5} = 4$.

В) $S_{-3;3} = 6$.

Г) $S_{-3} = S_3$

Д) $S_{-3} + S_3 = 3 + 3$

Е) $S_{-3} + S_3 = S_{-3}$

204. Творческое задание (100 баллов). Исследуйте последовательность, заданную формулой n -го члена: $K_n = \frac{1}{2^n}$. В чём её особенность? Как она связана с числами Канвея? Что вам известно об этих числах?

205. Творческое задание (100 баллов). Осуществите подборку историко-математического материала (старинных задач) по теме «Числовые последовательности». Опишите методы решения задач.

206. Творческое задание (100 баллов). Чем уникальна последовательность простых чисел? Как бы вы описали эту последовательность на языке теории множеств? На алгебраическом языке? Перечислите некоторые свойства последовательности простых чисел.

VI. Делимость. Свойства делимости

Число n делится на число m , обозначают $n \mid m$, если найдётся такое число x , что $n = m \cdot x$.

В зависимости от количества делителей число n , все натуральные числа можно разделить на три класса (таблица 5).

Натуральные числа										Таблица 5	
1	Простые числа					Составные числа					
Единственный делитель – 1	$p = 1 \cdot p$ два делителя					$s = 1 \cdot a \cdot b$ более двух делителей					
	Решето Эратосфена										Основная теорема арифметики: $S = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ (VI.1) где $p_1, p_2, \dots, p_n$ – простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – целые неотрицательные числа (VI.1) – каноническая запись натурального числа
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	11	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	21	2	2	2	2	2	2	2	2	0	
	31	3	3	3	3	3	3	3	3	0	
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	

Основная теорема арифметики: всякое натуральное число можно единственным образом представить в виде произведения степеней простых множителей.

Основные свойства делимости (теоремы о делимости)			Таблица 6
№	Условие	Заключение	
	Если $a, b, c, d, k, m, n \in \mathbb{N}$ и ...	то...	
1	$a \mid Mb$	$a \mid kMb$	VI.2
2	$a \mid Mk, b \mid Mk$	$(a \pm b) \mid Mk$	VI.3
3	$a \mid Mc, b \mid Md$	$ab \mid Mcd$	VI.4
4	$a \mid Mb$	$a^k \mid Mb^k$	VI.5
5	$a \mid Mb, b \mid Mc$	$a \mid Mc$	VI.6
6	$a \mid Mk, b \mid Mk$	$ab \mid Mk^2$	VI.7
7	$a \mid Mb, c \mid Mb$	$a \mid Mb$ или $a \mid Mc$	VI.8
8	$a \mid bMm, \text{НОД}(a, m) = 1$	$b \mid Mm$	VI.9
9	$a \mid Mm, a \mid Mn, \text{НОД}(m, n) = 1$	$a \mid Mmn$	VI.10
10	$(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k) \mid Mk$		VI.11
11	$(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k) \mid Mk!$		VI.12

Общим делителем нескольких чисел называется число, служащее делителем для каждого из них. Наибольший из общих делителей обозначается $\text{НОД}(n_1, n_2, \dots, n_k)$ и определяется двумя основными способами. Первый – с использованием разложения на простые множители натуральных чисел, чей НОД необходимо найти (таблица 7). Второй – алгоритм Евклида (таблица 8). Опишем каждый из способов.

Нахождение НОД двух чисел методом разложения на множители		Таблица 7
Правило нахождения	Пример	
1. Даны числа a и b	1804 и 328	
2. Записать числа a и b в каноническом виде	$1804=2^2 \cdot 11 \cdot 41$ и $328=2^3 \cdot 41$	
3. Выписать все общие простые множители, входящие в каноническую запись каждого из чисел a и b	2 и 41	
4. Возвести каждый из выписанных простых множителей в наименьшую степень, с которой этот множитель входит в каноническую запись чисел a и b	2^2 и 41	
5. Произведение полученных степеней даст $\text{НОД}(a, b)$	$\text{НОД}(a, b) = 2^2 \cdot 41 = 164$	

Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то числа a и b называют **взаимно простыми**.

С понятием взаимно простых чисел связаны некоторые свойства делимости натуральных чисел (см. табл. 6, свойства 8 и 9).

Нахождение НОД двух чисел по алгоритму Евклида		Таблица 8
Правило нахождения	Пример	
1. Даны числа a и b , $a > b$	1804 и 328	
2. Представить большее из чисел в виде $a = q \cdot b + r$, где q – неполное частное, а r – остаток от деления a на b	$1804 = 5 \cdot 328 + 164$	
3. Представить в виде $b = q_1 \cdot r + r_1$; $r = q_2 \cdot r_1 + r_2$; ...; $r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + r_{n+1}$	$328 = 2 \cdot 164 + 0$	
$r_n = q_{n+2} \cdot r_{n+1} + 0$	$r_n = q_{n+2} \cdot r_{n+1} + 1$	
$\text{НОД}(a, b) = r_{n+1}$	$\text{НОД}(a, b) = 1$	$\text{НОД}(a, b) = 164$

Наименьшее натуральное число, которое делится нацело на a и b называется **наименьшим общим кратным** и обозначается $\text{НОК}(a, b)$.

Нахождение НОК двух чисел методом разложения на множители		Таблица 9
Правило нахождения	Пример	
1. Даны числа a и b	1804 и 328	
2. Записать числа a и b в каноническом виде	$1804=2^2 \cdot 11 \cdot 41$ и $328=2^3 \cdot 41$	
3. Выписать все общие простые множители, входящие в каноническую запись хотя бы одного из чисел a или b	2 , 11 и 41	
4. Возвести каждый из выписанных простых множителей в наибольшую степень, с которой этот множитель входит в каноническую запись чисел a или b	2^3 , 11 и 41	
5. Произведение полученных степеней даст $\text{НОК}(a, b)$	$\text{НОК}(a, b) = 2^3 \cdot 11 \cdot 41 = 3608$	

Сформулируем некоторые полезные теоремы.

Основные свойства НОД и НОК			Таблица 10
1	$\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}(\text{НОД}(a, b), c)$		VI.13
2	$\text{НОК}(a, b, c) = \text{НОК}(\text{НОК}(a, b), c)$		VI.14
3	$\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = a \cdot b$		VI.15
4	$\text{НОД}(ac, bc) = c \cdot \text{НОД}(a, b)$		VI.16
5	$\text{НОК}(ac, bc) = c \cdot \text{НОК}(a, b)$		VI.17
6	$\text{НОД}(a, a+1, a+2) = 1$		VI.18
7	$\text{НОД}(2a, 2a+2) = 2$		VI.19

Тестовые задания (по 10 баллов).

207. Сумма всех двузначных чисел оканчивается цифрой

- а) 0; б) 2; в) 5; г) ____

208. Сумма всех трёхзначных чисел оканчивается цифрой

- а) 0; б) 2; в) 5; г) ____

209. Число 15 в 5 раз больше своего наименьшего делителя, отличного от 1. Сколько всего натуральных чисел обладают таким же свойством?

- а) одно; б) два; в) более двух; г) ∞ .

210. Сколько простых чисел p обладают следующим свойством: p представимо в виде суммы простых чисел и p представимо в виде разности простых чисел?

- а) одно; б) два; в) более двух; г) ∞ .

211. Дробь $\frac{93790101}{95543187}$ сократима и равна

- а) не сократима; б) $\frac{17}{19}$; в) $\frac{107}{109}$; г) ____.

212. Дробь $\frac{2205901}{2767003}$ сократима и равна

- а) не сократима; б) $\frac{411}{503}$; в) $\frac{5501}{6903}$; г) ____.

213. Дробь $\frac{5025763}{15094237}$ сократима и равна

- а) не сократима; б) $\frac{1301}{3907}$; в) $\frac{1839}{5527}$; г) ____.

214. Решением системы уравнений $\begin{cases} m+n=20 \\ \text{НОД}(mn)=5 \end{cases}$ на множестве

натуральных чисел являются пары чисел (m, n)

- а) $\emptyset$; б) $(5; 15), (15; 5)$;
в) $(5; 15), (10; 10), (15; 5)$; г) $(0; 20), (5; 15), (10; 10), (15; 5), (20; 0)$.

215. Сколько решений на множестве натуральных чисел имеет система

уравнений $\begin{cases} m \cdot n = 12 \\ \text{НОД}(mn) = 1 \end{cases}$?

- а) $\emptyset$; б) 2; в) 4; г) 6.

216. Сумма остатков от деления числа 126 450 747 на 2, 3, 4, 5, 9, 10 и 25 равна

- а) 35; б) 38; в) 47; г) ____

217. Частное от деления НОК чисел 6300 и 990 на их НОД равно

- а) 77; б) 154; в) 385; г) 770.

218. Сколько целых чисел k обращают дробь $\frac{15k^2 + 14k - 1}{5k - 2}$ в целое число?

- а) $\emptyset$; б) одно; в) два; г) четыре.

219. Какое из следующих чисел нечётно, если известно, что a – чётно, а b – нечётно?

- а) ab б) $2(a+b)$ в) $a+b$ г) $a+b+1$

220. Какое из следующих чисел чётно, если известно, что a – чётно, а b – нечётно?

- а) ab б) $3(a+b)$ в) $a+b$ г) $(a+1)+b$

221. Произведение $122 \cdot 85$ делится на

- а) 4 б) 25 в) 9 г) 10

Задачи I уровня (по 20 баллов). Докажите, что при каждом натуральном n

222. число $n^3 + 11n$ делится на 6; 223. число $4^n + 15n - 1$ кратно 9;

224. число $6^{2n-1} + 1$ кратно 7; 225. число $n^5 - n$ делится на 30.

Задачи I уровня (по 20 баллов). Найдите числа, удовлетворяющие условию делимости.

226. $\overline{56x3y} \mid 16$; 227. $\overline{135xy} \mid 15$; 228. $\overline{55xy55} \mid 13$;

229. $\overline{xy12yx} \mid 12$; 230. $\overline{x2y2z} \mid 15$; 231. $\overline{ххххх} \mid 11$;

232. $\overline{7x0x7} \mid 17$; 233. $\overline{x12345x} \mid 18$; 234. $\overline{2009yz} \mid 1007$.

Задачи I уровня (по 20 баллов). Докажите, что следующие числа являются составными:

235. $\overline{123456789}$ 236. $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 91 - 111$;

237. $\overline{123456}^{123456} - 11$; 238. $2^{33} + 1$;

239. $10^{2009} + 8$; 240. $4^{105} + 5^{105}$;

241. $\overline{xyz}$, где $x, y, z \in \{1, 4\}$; 242. $13^{25} + 17^{89} + 2^{71}$;

243. $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 83 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 70$; 244. $(6789^5 + 6)^{18} - 1$;

245. $7^{40} - 19$; 246. $2^{3^{2009}} - 1$.

Задачи II уровня (по 30 баллов). Докажите следующие утверждения.

247. Сумма кубов любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

248. Любая натуральная степень числа 15 при делении на 7 даёт в остатке 1.

249. Для любых натуральных x , число $x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$ делится на 8640.

250. Число $\frac{(3n)!}{6^n \cdot n!}$ – натуральное для любого натурального n .

251. Если составное натуральное число n больше четырёх, то $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \mid n$.

252. Ни при каком натуральном n число $1 + 2 + 3 + \dots + n$ не может заканчиваться ни одной из цифр 2, 4, 7, 9.

253. Произведение трёх последовательных натуральных чисел, среднее из которых совпадает с кубом натурального числа, делится на 504.

254. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел при делении на 4 даёт в остатке 1.

255. Если n – чётно, то число $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ – целое.

256. $\sqrt{\underbrace{11111\dots 1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{22\dots 2}_{n \text{ цифр}}} = \underbrace{33\dots 3}_{n \text{ цифр}}$

257. Если натуральное число взаимно-просто с числом 6, то $(n^2 - 1)M24$.

258. Если p – простое число большее 3, то $(n^2 - 1)M24$.

259. $\overline{abcabc}$ делится на 7, на 11, на 13.

260. Все числа вида $2^{2^n} + 1$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) оканчиваются цифрой 7.

261. Все числа вида $2^{4^n} - 5$ ($n \in \mathbb{N}$) оканчиваются цифрой 1.

262. Не существует простого числа p , для которого числа $p+5$ и $p+10$ простые.

263. Для двух натуральных чисел, одно из которых есть разность квадратов нечётных чисел, а другое – сумма квадратов этих чисел, число 4 не является общим делителем.

264. Любое число при делении как на 3, так и на 9 даёт тот же остаток, что и сумма его цифр.

265. Любое составное число s имеет простой делитель, не превосходящий $\sqrt{s}$.

266. Если число c не делится на $\text{НОД}(a, b)$, то уравнение $ax + by = c$ ($a, b, c \neq 0$) не имеет решения в целых числах.

267. Всякое трёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами, делится на 37.

268. Не существует таких натуральных чисел m и n , что $m^2 - n^2 = 30$.

269. При каждом натуральном n число $\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4}$ является натуральным.

270. Если $2^n - 1$ – простое число, то и число n – тоже простое.

271. При делении натурального числа a на натуральное число b в частном получается c и в остатке d . Могут ли все числа a, b, c, d быть нечётными? Докажите или опровергните.

272. Остаток от деления простого числа (большее 30) на 30 есть простое число или единица.

273. Сумма всех семизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, в записи которых каждая цифра участвует только один раз, делится на 9.

274. Если число не делится на 7, то его куб, увеличенный или уменьшенный на 1, делится на 7.

275. Среди любых 30 последовательных натуральных чисел найдётся такое, у которого сумма цифр делится на 11.

276. Если a, b, c – нечётные числа, то $\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+c}{2}; \frac{b+c}{2}\right)$.

Задачи II уровня (по 30 баллов). Найдите

277. **Простые делители** числа 1 000 027.

278. **Число** такое, что, если из него вычесть 7, результат умножить на 7, то получится тот же результат, как если бы мы вычли из этого же числа 11 и результат умножили на 11.

279. **Число**, которое при делении на него чисел 1108, 1453, 1844 и 2281 давало бы один и тот же остаток.

280. **Девятизначное число**, все цифры которого различаются между собой и не содержат нуля, и квадратный корень из которого имеет вид $\overline{ababc}$, где $\overline{ab} = c^3$.

281. **Все варианты представления числа 316** в виде суммы двух слагаемых, одно из которых делится на 13, а другое – на 11.

282. **Цифры**, которые следует вписать вместо * в числе $\overline{30*0*03}$, чтобы получить число, делящееся на 13.

283. **Число** $\overline{aabb}$, такое, что $\overline{aabb} = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

284. **Натуральные n** , при которых $(n^4 + 4)$ – простое число.

285. **Количество чисел** $\overline{5*383*8*2*936*5*8*203*9*3*76}$ делящихся на 396, в записи которых цифры, обозначенные *, не повторяются.

286. **Натуральные n и m** , разность квадратов которых равна 21.

287. **Двузначное число**, произведение цифр которого, сложенное с 12, даёт это же число.

288. **Двузначное число**, сумма квадратов цифр которого равна 10. Если из этого числа вычесть 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

289. **Двузначное число** такое, что если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7, в остатке 6. Если же искомое двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке число, равное сумме цифр искомого числа.

290. **Двузначное число**, которое в 4 раза больше суммы его цифр.

291. **Два трёхзначных числа**, записанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке. Сумма искомых чисел равна 1252, сумма их квадратов – 84, а сумма цифр каждого из чисел равна 14.

292. **Числа $\overline{he}$ и $\overline{she}$** такие, что $\overline{he}^2 = \overline{she}$.

293. **Четырёхзначное число $\overline{клоп}$** такое, что $9 \cdot \overline{клоп} = \overline{полк}$.

294. **Цифры** удовлетворяющие равенству: $\overline{ab} \cdot \overline{ba} = \overline{cdc}$.

295. **Что больше:** сумма цифр всех десятизначных чисел или сумма цифр всех одиннадцатизначных чисел, делящихся на пять.

296. **Ответ на вопрос:** может ли произведение четырёх последовательных натуральных чисел быть равным 11880?

297. **Значение числового выражения**
$$\sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \dots}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots}}$$

298. **Пару чисел**, не удовлетворяющую условию $187x - 104y = 41$ из следующего перечня: (3;5), (107;192), (211;379), (314;565), (419;753), не подставляя непосредственно указанные значения в формулу.

299. **Теорему**, справедливую для любого натурального числа, за исключением чисел 5; 23; 304.

300. **Что больше:** $\frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$ или $\frac{10^{11} + 1}{10^{12} + 1}$.

301. **Значение числового выражения**

$$(2+1) \cdot (2^2+1) \cdot (2^4+1) \cdot (2^8+1) \cdot (2^{16}+1) \cdot (2^{32}+1).$$

302. **Все простые числа n и m** , для которых $m^2 - 2n^2 = 1$.

303. **Два натуральных числа**, сумма которых равна 168, наибольший общий делитель – 24.

304. **Наименьшее натуральное число**, которое после умножения на два станет квадратом, а после умножения на три – кубом натурального числа.

305. **Трёхзначное число** кратное 5 и такое, что если это число умножить на цифру его единиц, то результат будет больше суммы его цифр на 548.

306. **Все целые числа n и m** , удовлетворяющие условию $m \cdot n = n + 2m$.

307. **Целые числа a и b** такие, что их сумма равна 1244. Если к числу a приписать справа цифру 3, а в числе b отбросить последнюю цифру 2, то полученные числа будут равны.

308. **Целые x** , при которых $(x^2 - 71)M(7x + 55)$.

Задачи III уровня (по 40 баллов). Решите задачи.

309. В типографии набирали строку с умножением вида $\overline{abc} \cdot \overline{bca} \cdot \overline{cab}$, но набор рассыпался, и цифры произведения перемешались. В результате произведение было напечатано в виде 234 235 286. Известно, что $a > b > c$, и что в разряде единиц напечатана верная цифра 6. восстановите истинное значение произведения.

310. Вы пришли в магазин и хотите купить 8 одинаковых авторучек, несколько карандашей по 4 рубля, линейку за 9 рублей, две общие тетради по 18 рублей и 12 тонких тетрадей. Продавец подсчитал общую стоимость товаров и попросил вас уплатить в кассу 527 рублей. Как, по-вашему, не ошибся ли продавец?

311. На станцию привезли 420 тонн угля в вагонах вместимостью по 15 тонн, 20 тонн и 26 тонн. Сколько и каких вагонов было использовано, если всего было 27 вагонов?

312. У отца спросили, сколько лет его двум сыновьям. Ответ был таков: если к произведению этих трёх искомым (целых) чисел прибавить сумму этих чисел, то будет 14. Сколько лет сыновьям?

313. Сколько лет капитану, сколько у него детей, и какова длина его судна, если произведение этих трёх искомым (целых) чисел равно 32118, и известно, что (1) длина судна выражается в метрах и более 1 метра; (2) у капитана есть несколько сыновей (более 1); (3) капитану больше лет, чем он имеет детей, но ста лет ему еще нет?

314. «Сколько у вас детей, и какого возраста?» – спросил однажды гость у учителя математики? «У меня три мальчика», – ответил учитель. – «Произведение чисел их лет равно 72, а сумма этих чисел равна номеру нашего дома». Гость вышел на улицу, посмотрел на номер, вернулся и сказал: «Задача не определена!» «Да, вы правы, – сказал учитель, – но я всё-таки надеюсь, что старший из моих сыновей пойдёт по моим стопам». Сколько лет каждому из детей учителя?

315. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка – в 2 раза дешевле, а книга – в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 800 рублей. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, а книга – в 3 раза дешевле, то школьник уплатил бы за покупку 1200 рублей. Сколько стоит покупка, и за что было уплачено больше: за портфель или авторучку?

316. Сумма, равная 53 копейкам, составлена из монет по 3 и 5 копеек, общее количество которых менее 15. Если в этом наборе монеты по 3 копейки заменить на монеты в 5 копеек, а монеты по 5 копеек – на монеты по 3 копейки, то полученная в результате сумма уменьшится по сравнению с первоначальной, но не более, чем в полтора раза. Сколько монет достоинством в 3 копейки было в наборе?

317. В комнате несколько четырёхногих стульев и трёхногих табуретов. Когда на всех стульях и табуретах сидит по человеку, в комнате всего 39 ног. Сколько в комнате стульев и сколько табуретов?

318. Найти прямоугольный треугольник, стороны которого выражались бы натуральными числами, причём все девять цифр, участвующих в записи сторон – различны.

319. Творческое задание (100 баллов). Обобщение теоремы делимости чисел Фибоначчи: u_n делится на u_m тогда и только тогда, когда n делится на m .

I. Докажите данное утверждение.

II. Сформулируйте признаки делимости чисел Фибоначчи на 2, на 4, на 5, на 7, на 13.

III. Докажите признаки делимости чисел Фибоначчи:

- Число Фибоначчи чётно тогда и только тогда, когда его номер делится на 3.
- Число Фибоначчи делится на 4 тогда и только тогда, когда его номер делится на 6.
- Число Фибоначчи делится на 5 тогда и только тогда, когда его номер делится на 5.

- Число Фибоначчи делится на 7 тогда и только тогда, когда его номер делится на 8.
- Число Фибоначчи делится на 13 тогда и только тогда, когда его номер делится на 7.

III. Докажите следующие факты:

- Нет нечетных чисел Фибоначчи делящихся на 17.
- Нет нечетных чисел Фибоначчи делящихся на 9.
- Нет четных чисел Фибоначчи делящихся на 11.

320. Творческое задание (100 баллов). Что вы знаете о великом учёном древности Диофанте Александрийском? О диофантовых уравнениях первой и второй степени? Какое отношение имеют эти уравнения к теории делимости?

Решите следующие задачи Диофанта (на множестве $\mathbb{N}$, в крайнем случае – на $\mathbb{Q}$) в общем виде и для конкретных чисел.

I. Заданное число разложить на два числа, имеющие данную разность. (Пусть заданное число будет 100, а разность 40. Определить эти числа.)

Решение Диофанта. Положим, что меньшее число x , тогда большее будет $x+40$: взятые вместе они дадут $2x+40$. Заданное число – 100. Следовательно, 100 равно $2x+40$. из подобных вычитаем подобные: из 100 вычитаем 40, в остатке будет $2x$, равное 60. тогда каждое x равно 30. наименьшее число будет 30, а большее 70. Доказательство очевидно.

II. Предложенное число разложить на два таких числа, чтобы заданные их неодинаковые части при сложении образовали заданное число. (Разложить число 100 на два числа так, чтобы $\frac{1}{3}$ первого числа и $\frac{1}{5}$ второго числа, сложенные вместе давали 30).

III. Найти три таких числа, чтобы они, сложенные попарно, равнялись трём данным числам. Необходимо, чтобы полусумма трёх данных чисел была больше каждого из них.

IV. Найти два таких числа, чтобы их сумма и произведение равнялись заданным числам. Нужно, чтобы квадрат полусуммы искомых отличался от их произведения на квадрат.

V. Заданный квадрат разложить на два квадрата.

VI. Данное число, являющееся суммой двух квадратов, разбить на два других квадрата.

VII. К двум заданным числам прибавить одно и то же число, такое, чтобы каждое сделалось квадратом.

Решение Диофанта. Пусть данные числа будут 2 и 3; прибавляем к каждому x . Тогда $x+2$ и $x+3$ будут квадратами; мы имеем здесь так называемое двойное равенство; приравняются же они следующим образом. Зная разность, ищи два таких числа, чтобы их произведение давало эту разность, например 4 и $\frac{1}{4}$. Тогда или половина разности этих чисел, умноженная на себя, будет равна меньшему, или половина суммы, умноженная на себя, будет равна большему.

Но половина разности, умноженная на себя, будет $\frac{225}{64}$; это равняется $x+2$, и x получается $\frac{97}{64}$.

Половина же суммы, умноженная на себя, будет $\frac{289}{64}$; это равняется большему, то есть $x+3$; и x получается опять $\frac{97}{64}$. таким образом, число, которое нужно прибавлять, будет $\frac{97}{64}$. Оно, очевидно, удовлетворяет условию задачи.

VII. Расширение понятия числа. Рациональные числа. Отношения и пропорции. Проценты

Определим *несократимую* дробь $\frac{a}{b}$, как такую, у которой $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Всякую дробь $\frac{A}{B}$, $B \neq 0$ можно записать в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$,

сократив числитель и знаменатель дроби $\frac{A}{B}$ на $\text{НОД}(A, B)$:

$$\frac{A}{B} = \frac{a \cdot \text{НОД}(A, B)}{b \cdot \text{НОД}(A, B)} = \frac{a}{b}, \text{ где } \text{НОД}(a, b) = 1. \quad (\text{VII.1})$$

Наименьшее общее кратное двух и более дробей является общим знаменателем этих дробей и используется в частности для нахождения суммы дробей:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{НОК}(b, d)}{b}}{\text{НОК}(b, d)} + \frac{c \cdot \frac{\text{НОК}(b, d)}{d}}{\text{НОК}(b, d)} = \frac{a \cdot \frac{\text{НОК}(b, d)}{b} + c \cdot \frac{\text{НОК}(b, d)}{d}}{\text{НОК}(b, d)}, \quad (\text{VII.2})$$

их разности и сравнения дробей.

Арифметика обыкновенных дробей сводится к действиям над целыми числами*, поэтому подробно останавливаться на этом вопросе нет интереса.

Обратимся к той практической стороне теории обыкновенных дробей.

Отношением называют частное от деления одного числа на другое:

$a : b = c$ или $\frac{a}{b} = c$, где a – предыдущий член отношения, b – последующий член отношения, c – отношение.

Отношение показывает, во сколько раз a больше/меньше, чем b , или же, какую часть числа b составляет число a .

Два равных отношения образуют *пропорцию*: $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где a, d – крайние члены пропорции, b, c – средние члены пропорции.

Основное свойство дроби (VII.3): $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$, – есть ни что иное как пропорция.

Перечислим основные свойства пропорции

* Например, для того, чтобы перемножить две обыкновенные дроби необходимо (1) перемножить их числители – целые числа, (2) перемножить их знаменатели – натуральные числа, (3) записать новую дробь с числителем равным произведению

числителей и знаменателем равным произведению знаменателей: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Таблица 11			
Основные свойства пропорции			
1	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $b \cdot d \neq 0$	$\Leftrightarrow$	$a \cdot d = b \cdot c$ VII. 4
2			$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ или $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, или $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ VII. 5
3			$a = \frac{b \cdot c}{d}$ или $b = \frac{a \cdot d}{c}$, или $c = \frac{a \cdot d}{b}$, или $d = \frac{b \cdot c}{a}$ VII. 6
4			$\begin{cases} c = k \cdot a, \\ d = k \cdot b, \\ k - \text{любое число.} \end{cases}$ VII. 7
5			$\frac{x \cdot a + y \cdot b}{m \cdot a + n \cdot b} = \frac{x \cdot c + y \cdot d}{m \cdot c + n \cdot d}$, $(m \cdot a + n \cdot b) \cdot (m \cdot c + n \cdot d) \neq 0$ VII. 8

Пропорция, у которой средние члены равны, называется *непрерывной*. Средний член непрерывной пропорции есть среднее геометрическое крайних членов: $a:b=b:c \Rightarrow b=\sqrt{a \cdot c}$. (VII. 9)

Вычисления с обыкновенными дробями становятся очень громоздкими, если знаменатели их сколько-нибудь велики. Главное затруднение – приведение дробей к общему знаменателю – следствие того, что знаменатели могут быть любыми числами, в выборе которых нет никакой системы.

Систематизируем выбор знаменателей обыкновенных дробей, разбивая единицу на 10 долей (десятые), десятую долю – на 10 долей (сотые), и т.д. и получая, таким образом, *десятичные дроби*:

$$\overline{a, a_1 a_2 \dots a_n} = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n}. \quad (\text{VII. } 10)$$

Преимущество десятичных дробей перед обыкновенными состоит в том, что они основаны на той же системе, на которой построены счёт и запись целых чисел. Благодаря этому и запись, и правила действий с десятичными дробями по существу те же, что и для целых чисел.

Определим *рациональное число* как обыкновенную дробь $\frac{n}{m}$, где $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, и опишем способы представления рациональных чисел в виде десятичных дробей.

(1) Рациональные числа вида $\frac{n}{2^x \cdot 5^y}$, где $x > y$, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

представимы в виде конечных десятичных дробей $\frac{n}{2^x \cdot 5^y} = \frac{n \cdot 5^{x-y}}{2^x \cdot 2^y \cdot 5^{x-y}} = \frac{5^{x-y} \cdot n}{10^x}$.

(2) Рациональные числа вида $\frac{n}{2^x \cdot 5^y}$, где $x < y$, $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $y \in \mathbb{N}$,

представимы в виде конечных десятичных дробей $\frac{n}{2^x \cdot 5^y} = \frac{n \cdot 2^{y-x}}{2^x \cdot 2^{y-x} \cdot 5^y} = \frac{2^{y-x} \cdot n}{10^y}$.

(3) Рациональные числа вида $\frac{n}{m}$, где $m \neq 2^x \cdot 5^y$, $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $y \in \{0, 1, 2, \dots\}$, представимы в виде бесконечных десятичных дробей, называемых *периодическими*. Чтобы получить десятичную запись таких рациональных чисел необходимо провести деление n на m до получения повторяющейся упорядоченной группы цифр, называемой *периодом*. Результат записывают в виде $\overline{a_0 a_1 a_2 \dots a_m (b_1 b_2 \dots b_n)}$, где a_0 – число – целая часть, неполное частное от деления n на m , $(b_1 b_2 \dots b_n)$ – период.

Правила обращения десятичных дробей в обыкновенные дроби	
Конечная дробь $\overline{a, a_1 a_2 \dots a_n}$	Бесконечная периодическая дробь $\overline{a, a_1 a_2 \dots a_m (b_1 b_2 \dots b_n)}$
1. Воспользоваться формулой перевода	
$\overline{a, a_1 a_2 \dots a_n} = a + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{10^n}$ (VII. 11)	$\overline{a, a_1 a_2 \dots a_m (b_1 b_2 \dots b_n)} = a + \frac{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n - a_1 a_2 \dots a_m}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ цифр}} \cdot 10^m}$ (VII. 12)
2. Упростить полученное числовое выражение, сократив, по возможности, обыкновенную дробь, входящую в состав суммы	
3. Результат записать в виде смешанного числа ($a \neq 0$) или правильной дроби ($a = 0$)*	

Определим *процент* как сотую часть числа и будем обозначать количество процентов знаком %. Если данное число принять за 1, то 1% составляет 0,01 часть этого числа. Таким образом, количество процентов можно выразить в виде десятичной дроби $a\% = \frac{a}{100}$.

Тестовые задания (по 10 баллов).

321. В 2008 году один профессор сказал: «Мне было $\frac{n}{11}$ лет, когда шёл n^2 год» в каком году родился профессор?

- а) 1932 б) 1936 в) 1940 г) 1947

322. Найти два числа, сумма которых равна 73,571. Если первое слагаемое увеличить в 5 раз, а второе слагаемое – в 3 раза, то новая сумма окажется равной 277,313.

- а) 28,271 и 45,3 б) 28,3 и 45,271 в) 28,371 и 45,2 г) 25,371 и 48,2

323. Какая дробь больше $\frac{4}{13}$, но меньше $\frac{5}{13}$?

- а) $\frac{3}{20}$ б) $\frac{7}{20}$ в) $\frac{9}{20}$ г) $\frac{11}{20}$

324. Неизвестный член пропорции

$$\frac{15,2 \cdot 0,25 - 48,51 : 14,7}{x} = \frac{\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2 \frac{1}{2} \right) \cdot 1 \frac{1}{5}}{3,2 + 0,8(5,5 - 3 \frac{1}{4})} \quad \text{равен}$$

- а) $\frac{1}{11}$ б) 25 в) 110 г) 275

* см. табл.3

325. Сумма $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 17}$ равна

- а) $\frac{57}{209440}$ б) $\frac{6}{6545}$ в) $\frac{3}{12320}$ г) $\frac{5}{34}$

326. Пусть $a + \frac{1}{a} = 3$, тогда $a^2 + \frac{1}{a^2}$ равна

- а) 7 б) 8 в) 9 г) 11

327. Пусть $a - \frac{1}{a} = \frac{2}{3}$, тогда $\frac{a^{12} + 1}{a^6}$ равна

- а) $-18\frac{179}{729}$ б) $\frac{64}{729}$ в) $7\frac{199}{729}$ г) $14\frac{442}{729}$

328. Пусть $\frac{4b+a}{5a-7b} = 2$, тогда $\frac{4a-5b}{3a+b}$ равна

- а) $-1,2$ б) $-\frac{1}{42}$ в) $\frac{1}{6}$ г) $\frac{3}{7}$

329. Число сначала увеличили на 20%, а затем результат уменьшили на 20%. Как изменилось число?

- а) не изменится; б) уменьшится на 4%; в) увеличится на 4%; г) _____

330. Число сначала уменьшили на 20%, а затем результат увеличили на 20%. Как изменилось число?

- а) не изменится; б) уменьшится на 4%; в) увеличится на 4%; г) _____

331. Сколько процентов от числа 3 составляет разность между ним и 3% числа 20?

- а) 20% б) 40%; в) 60%; г) 80%

332. 18% от числа 10 равны 15% некоторого числа. Это число

- а) $\frac{1}{12}$ б) 1,2 в) 3 г) 12

333. После увеличения числа на 17% получили 108,81. Исходное число равно

- а) $6\frac{681}{1700}$ б) 93 в) 100 г) $640\frac{1}{17}$

334. Если 90% числа равны $(9\sqrt[3]{32} - 2\sqrt[3]{500}) : \sqrt[3]{4}$, то это число

- а) $8\frac{2}{9}$ б) $8\frac{5}{9}$ в) $8\frac{7}{9}$ г) $8\frac{8}{9}$

335. Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Как изменится дробь, если числитель уменьшить на 16%, а знаменатель увеличить на 40%?

- а) уменьшится на 34% б) увеличится на 34%
в) уменьшится на 40% г) увеличится на 16%

336. Для того, чтобы получить дробь $\frac{a+c}{b+d}$ между дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ следует

поставить знак

- а) плюс б) минус в) умножения г) ____

337. Однозначное число увеличили на 10. Если теперь полученное число увеличить на столько же процентов, как и в первый раз, то получится 72. Найдите исходное число.

- а) 2 б) 4 в) 6 г) 8

338. Число a больше числа b на 50%. На сколько процентов число b меньше числа a ?

- а) на 25% б) на $33\frac{1}{3}\%$ в) на 50% г) на $66\frac{2}{3}\%$

339. Число увеличили в 10 раз. На сколько процентов произошло увеличение?

- а) на 100% б) на 900% в) на 1000% г) на 1100%

Задачи I уровня (по 20 баллов).

340. Представить $\frac{1}{7}$ в десятичной записи.

341. Представить $\frac{1}{49}$ в десятичной записи.

342. Представить 0,(714285) в виде обыкновенной несократимой дроби.

343. Представить 0,412(5) в виде обыкновенной несократимой дроби.

344. Представить 3,3(45) в виде обыкновенной несократимой дроби.

345. Сравнить числа $0,(06504)+0,(2)$ и $\frac{107}{369}$.

Задачи I уровня (по 20 баллов). Вычислить

$$346. 0,(2)+0,(37)+0,(73)-0,(487); \quad 347. \frac{\left(\frac{2}{3}+0,(3)\right):0,25}{0,12(3); 0,0925} + 12,5 \cdot 0,32;$$

$$348. \frac{0,175 + \frac{3}{5} + 0,725 + 0,42(6) + 0,12(3)}{0,128 - 6,25 - (0,0345; 0,12)}; \quad 349. \frac{0,8(5) + 0,17(1)}{0,8(5) - 0,17(1)} + \frac{0,8(3) + 0,1(6)}{0,8(3) - 0,1(6)};$$

$$350. \frac{(0,625 + 2,708(3)) \cdot 2,5}{(1,3 + 0,7(6) + 0,(36)) \cdot \frac{110}{401}}; \quad 351. 0,(2) \cdot 0,(3) \cdot 0,(4) \cdot 0,(5) \cdot 0,(6) \cdot 0,(7);$$

$$352. \frac{\left(3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2}\right) + \left(1\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4}\right) \cdot 2\frac{1}{2} + \left(1\frac{1}{7} - \frac{23}{49}\right) : \frac{22}{147}}{\left(2 : 3\frac{1}{5}\right) + \left(3\frac{1}{4} : 13\right) : \frac{2}{3} - \left(2\frac{5}{18} - \frac{17}{36}\right) \cdot \frac{18}{65}}$$

Задачи I уровня (по 20 баллов). Найти

353. Двенадцать процентов от числа $\frac{10a}{53} + \frac{b}{3}$, при условии

$$a = \frac{14 - \left(49\frac{1}{3} : 16 - 14 : 8\frac{1}{6}\right) \cdot 7}{1\frac{17}{18} \cdot \left(1\frac{59}{70} + \frac{37}{42} + 2\frac{19}{30}\right) - 10}, \quad b = \frac{\left(\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{225}\right) \cdot 9 + 0,16\right) : \left(\frac{1}{3} - 0,3\right)}{(5 - 1,1409 : 0,3) : \left(4,2 : 0,12 - 0,21 \cdot \frac{2}{3}\right)} : \frac{1}{114}.$$

354. Число, если 5% его равны $\frac{2\frac{11}{25} - 0,84 \cdot \left(6\frac{8}{9} : 2\frac{7}{12} - \frac{5}{12} \cdot 4\frac{4}{35}\right)}{7,605 : 7\frac{1}{2} + 3,086}$.

355. Сколько процентов составляет число a от числа b , если $a = (0,8 \cdot 7 + 0,8^2) \cdot \left(1,25 \cdot 7 - \frac{4}{5} \cdot 1,25\right) + 31,64$, $b = \frac{(11,81 + 8,19) \cdot 0,02}{9 : 11,25}$..

Задачи II уровня (по 30 баллов). Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то

356. $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$	357. $\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$	358. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
359. $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$	360. $\frac{a+b}{b-a} = \frac{c+d}{d-c}$	361. $\frac{a+2b}{2a+b} = \frac{c+2d}{2c+d}$
362. $\frac{a+b}{2a-b} = \frac{c+d}{2c-d}$	363. $\frac{a-b}{a+2b} = \frac{c-d}{c+2d}$	364. $\frac{2a-b}{a-b} = \frac{2c-d}{c-d}$

Задачи II уровня (по 30 баллов). Докажите следующие утверждения:

365. Если $a \geq b$ и $\frac{a-b}{a+b}$ – несократимая дробь, то и $\frac{a}{b}$ несократима.

366. Любое положительное рациональное число представимо конечной суммой различных аликвотных дробей, например, $2\frac{17}{60} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

367. На множестве натуральных чисел выполняется тождество $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

368. $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$.

Задачи II уровня (по 30 баллов). Найдите

369. Три аликвотные дроби, дающие в сумме $1\frac{1}{12}$.

370. Натуральное число, входящее в пропорцию $\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3} = \frac{199}{242}$.

371. Число, которое надо вычесть из знаменателя и прибавить к числителю дроби $\frac{14157}{117843}$, чтобы после сокращения получить $1\frac{1}{5}$.

372. Дробь $\frac{a}{b}$, такую, что $\frac{a}{b} = 0,(\overline{xyyazt})$.

373. Дробь $\frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{N}$, которая увеличится в три раза, если её числитель возвести в куб, а к знаменателю прибавить 3.

374. Число $A = \overline{15\dots\dots}$, обладающее следующим свойством: если A умножить на 5, то результат можно получить, просто передвинув цифры 15 на правый конец, то есть в итоге получается число вида $\overline{\dots\dots 15}$.

Задачи III уровня (по 40 баллов). Решите задачу.

375. Двенадцать человек несут по 12 хлебов. Каждый мужчина несёт по 2 хлеба, женщина – по половине хлеба, ребёнок – по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин, детей?

376. Что быстрее: проехать весь путь на велосипеде или две третьих пути на мотоцикле, который движется в три раза быстрее, чем велосипед, а оставшуюся часть пути преодолеть пешком, что втрое медленнее, чем ехать на велосипеде?

377. В жаркий день 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 часов. Сколько косцов за 3 часа выпьют такой же бочонок кваса?

378. Лошадь съедает воз сена за месяц, коза – за два месяца, овца – за три. За какое время лошадь, коза и овца вместе съедят такой же воз сена?

379. Сколько пресной воды нужно добавить к 4 кг морской воды, чтобы уменьшить содержание соли в ней в 2,5 раза?

380. Объём вещества A составляет половину суммы объёмов веществ B и C , а объём вещества B составляет $\frac{1}{5}$ суммы объёмов веществ A и C . Найти отношение объёма вещества C к сумме объёмов веществ A и B .

381. Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди равно 1:2, а во втором 2:3. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго, то в получившемся слитке окажется столько золота, сколько было в первом меди; а если $\frac{2}{3}$ первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

382. В каких пропорциях нужно смешать 50%-ый раствор и 70%-ый раствор кислоты, чтобы получить 65%-ый раствор кислоты?

383. Сбербанк перечисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Сколько будет на счету вкладчика, внесшего сумму в 60000 рублей через год?

384. Цену товара снизили на 30 %, а затем новую цену повысили на 30 %. Как изменилась цена товара?

385. Цена товара была повышена на 12%. На сколько процентов надо снизить новую цену, чтобы получить первоначальную?

386. На сколько процентов снизилась производительность труда, если для выполнения плана пришлось увеличить рабочий день с 7 ч до 8 ч?

387. На первом поле 65% площади засеяно овсом. На втором поле овсом занято 45% площади. Известно, что на первом и втором полях вместе под овсом занято 53% общей площади. Какую часть всей засеянной площади составляет первое поле?

388. После двух последовательных снижений объема производства выпуск продукции сократился в два раза. Определить процент сокращения производства.

389. Морская вода содержит 5 % соли по массе. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%?

390. Сбербанк перечисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

391. От двух кусков сплава с массами 3 кг и 2 кг и с концентрацией меди 0,6 и 0,8 отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего концентрация меди в обоих сплавах стала одинаковой. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

392. Имеются два сплава золота и серебра, в одном массы этих металлов находятся в отношении 2:3, в другом – в отношении 3:7. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

393. Гонщик-мотоциклист подсчитал, что при увеличении скорости на 10% он пройдёт круг по кольцевой дороге за 15 мин. На сколько процентов он должен увеличить скорость, чтобы пройти круг за 12 мин?

394. Абрикосы при сушке теряют 60% своей массы. Сколько процентов воды содержат абрикосы, если в сушёных абрикосах 25% воды?

395. Свежие грибы содержат 90% воды, а сушёные – 12%. Сколько получится сушёных грибов из 88 кг свежих?

396. Пчёлы, перерабатывая цветочный нектар в мёд, освобождают его от значительной части воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчёлам для получения 1 кг мёда, если нектар содержит 70% воды, а полученный из него мёд – 17% воды?

397. Из 38 тонн сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после переработки получается 30 тонн сырья первого сорта. Каков процент примесей в сырье первого сорта?

398. Заработная плата некоторых категорий служащих повышалась два раза, причем процент повышения во второй раз был в 2 раза больше, чем в первый раз. Определить, на сколько процентов повышалась заработная плата каждый раз, если до первого повышения зарплата была 7000 рублей, а после второго повышения составила 9240 рубля.

399. Для выпечки пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для выпечки ржаного хлеба взято на 10 кг муки больше, а именно столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько взято той и другой муки, если выпечено всего 112,5 кг хлеба?

400. Число студентов курса, успешно сдавших все зачеты, заключено в пределах 96,8% до 97,2% от общего числа студентов. Найти минимальное число студентов, которое может быть на таком курсе.

401. Творческое задание (100 баллов). Задачи №№375-400 относят к категории сюжетных задач на изменение величин, выраженное в числах/процентах. Проведите классификацию задач №№375-400 на соответствие той или иной алгебраической модели.

Разработайте информационные табличные модели двух-трёх классов задач данной категории. Проверьте построенные модели на универсальность.

Найдите (или сформулируйте самостоятельно) задачу, не относящуюся к рассматриваемым вами классам задач.

402. Творческое задание (100 баллов). Проанализируйте следующие равенства, аналоги которых изучались в Древнем Египте, о чём можно судить по сохранившемуся с тех времён кожаному свитку*:

$$\bar{3} + \bar{6} = \bar{2}, \quad \bar{2} + \bar{3} + \bar{6} = 1, \quad \bar{2} + \bar{6} = \bar{3}, \quad \bar{3} + \bar{6} = \bar{2} + \bar{3}, \quad \bar{2} + \bar{3} = \bar{6} + 1.$$

Эти равенства в свитке употреблялись без всяких указаний, и поэтому можно считать, что они являлись правилами счёта, которые знал наизусть каждый вычислитель в Древнем Египте.

Переведите эти правила на современный математический язык.

Перечисленные формулы далее использовались египтянами, по-видимому, следующим образом: каждое из пяти соотношений делилось на 2, на 3, на 4 и т.д. Прodelайте эти действия, продолжив, таким образом, данный ряд формул.

Сформулируйте обобщающие выводы.

403. Творческое задание (100 баллов). Исторически долгое время математические знания передавались из поколения в поколение в виде списка задач практического содержания вместе с их решениями. Одновременно с этим и обучение математике велось по образцам: ученики, подражая учителю, решали задачи на определенное «правило».

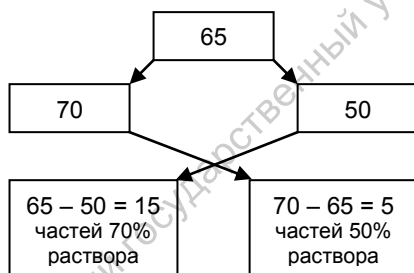


Схема 5. Старинная информационная модель задачи №382 – «правило» – способ решения

На схеме 5 представлен старинный способ решения задачи №382. Сравните старинный и современные способы решения этой задачи. Решите подобные задачи, используя старинный способ. Обоснуйте факт получения верного ответа.

В современной литературе информационные модели не адекватные поставленной задаче, но дающие возможность получения верного ответа на поставленный в задаче вопрос носят название

фальшивого правила.

Приведите примеры других фальшивых правил и математически обоснуйте возможность их применения к решению конкретного типа задач.

* Хранится в Британском музее Лондона.

VIII. Иррациональные числа. Логарифмы. Арифметика действительных чисел

Введём понятие *иррационального числа* как такого, которое не представимо в виде конечной или бесконечной периодической дроби (другими словами, которое представимо в виде бесконечной непериодической дроби).

Среди иррациональных чисел особо выделяют радикалы (рациональные степени рациональных чисел) и логарифмы рациональных чисел по рациональному основанию. Объединение рациональных и иррациональных чисел образует множество *действительных чисел*. Всевозможные комбинации рациональных и иррациональных чисел, исключая числа, полученные извлечением корня чётной степени из отрицательного числа, также являются действительными числами, а числа-«исключения» образуют новое числовое множество, вновь расширяя понятие числа.

Перечислим новые свойства (с учётом условия «исключения») указанных чисел, определяемых расширением числового множества до $\mathbb{R}$ ($a, b, m, n \in \mathbb{R}$).

$$\text{VIII.1. } a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a > 0;$$

$$\text{VIII.2. } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0;$$

$$\text{VIII.3. } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{m+n}};$$

$$\text{VIII.4. } \sqrt[m]{a^m} = \sqrt[n]{a};$$

$$\text{VIII.5. } \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$\text{VIII.6. } \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a;$$

$$\text{VIII.7. } \sqrt[n]{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0;$$

$$\text{VIII.8. } \sqrt[n]{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1;$$

$$\text{VIII.9. } \log_n ab = \log_n |a| + \log_n |b|, \quad a \cdot b > 0;$$

$$\text{VIII.10. } \log_n \frac{a}{b} = \log_n |a| - \log_n |b|, \quad \frac{a}{b} > 0;$$

$$\text{VIII.11. } \log_{n^\alpha} m^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_n m, \quad m > 0;$$

$$\text{VIII.12. } \log_{n^\alpha} m^{2\beta} = \frac{2\beta}{\alpha} \log_n |m|;$$

Тестовые задания (по 10 баллов).

404. Если $\sqrt{37-n} - \sqrt{15-n} = 2$, то $\sqrt{37-n} + \sqrt{15-n}$ равна

а) 5

б) 8

в) 11

г) 14

405. Выражение $\log_{\frac{1}{7}} \frac{49}{7-2\sqrt{6}} + \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{\sqrt{6}-1}$ равно

а) -4

б) -3

в) -2

г) 2

406. Укажите все номера рациональных чисел

(1) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5}$; (2) $\left(\sqrt[3]{7-\sqrt[3]{7}}\right)^0$; (3) $\sqrt[5]{32\sqrt{2}}$; (4) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} - \sqrt{5}$; (5) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\log_2 8}$.

а) 1, 2, 3

б) 1, 2, 4

в) 1, 2, 5

г) 1, 3, 4

д) 1, 3, 5

е) 1, 4, 5

ж) 2, 3, 4

з) 2, 3, 5

и) 2, 4, 5

к) 3, 4, 5

407. Укажите все номера целых чисел

(1) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} + 4\sqrt{3}$; (2) $\left(\sqrt[7]{7+\sqrt[7]{7}}\right)^0$; (3) $125^{\frac{4}{3}}$; (4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2}$; (5) $\sqrt[4]{9\sqrt{3}} : 3^{\frac{1}{6}}$.

а) 1, 2, 3

б) 1, 2, 4

в) 1, 2, 5

г) 1, 3, 4

д) 1, 3, 5

е) 1, 4, 5

ж) 2, 3, 4

з) 2, 3, 5

и) 2, 4, 5

к) 3, 4, 5

408. Выражение $\left(0,25^{\log_2 3} + \frac{17}{9}\right)^{\log_2 17}$ равно

- а) 9 б) 17 в) 35 г) 54

409. Выражение $\log_{\sqrt[5]{5}} \frac{125}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$ равно

- а) 9; б) $9 - 3\log_5 \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$; в) $1 + \log_5 (\sqrt{2} + \sqrt{3})$; г) 27.

410. Пусть числа α и β – иррациональны, γ – рационально. Какие из следующих чисел: (1) $\alpha + \beta$, (2) $\alpha \cdot \beta$, (3) $\alpha + \gamma$, (4) $\alpha \cdot \gamma$, – могут принимать рациональные значения? Выберите номер ответа на поставленный вопрос.

- а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 1, 2
е) 1, 3 ж) 1, 4 з) 2, 3 и) 2, 4 к) 3, 4
л) 1, 2, 3 м) 1, 2, 4 н) 1, 3, 4 о) 2, 3, 4 п) 1, 2, 3, 4

411. Пусть числа α и β – иррациональны, γ – рационально. Какие из следующих чисел: (1) $\sqrt{\alpha}$, (2) $\sqrt{\gamma}$, (3) $\sqrt{\alpha + \beta}$, (4) $\sqrt{\alpha + \gamma}$, – могут принимать рациональные значения? Выберите номер ответа на поставленный вопрос.

- а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 1, 2
е) 1, 3 ж) 1, 4 з) 2, 3 и) 2, 4 к) 3, 4
л) 1, 2, 3 м) 1, 2, 4 н) 1, 3, 4 о) 2, 3, 4 п) 1, 2, 3, 4

412. В результате какого действия над числом $\sqrt[3]{2\log_{15} 3}$ получится рациональное число?

- а) возведение числа в третью степень;
б) увеличение подкоренного выражения на $2\log_{15} 75$;
в) деления подкоренного выражения на $\log_{15} 3$;
г) умножение подкоренного выражения на $\log_3 15^4$.

413. Для того, чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{a}}}}$ необходимо

- а) дважды возвести дробь во вторую степень;
б) умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{a}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$;
в) умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{a}}}$;
г) умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{a}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

414. Между какими числами расположено число $\sqrt[3]{2\log_{15}3}$?

- а) $-\sqrt[3]{2}$ и 1 б) $-\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ в) 0 и $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ г) 1 и $\sqrt[3]{2}$

415. Пусть $\alpha = \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$, $\beta = \frac{\log_3 24}{\log_6 2}$, тогда

- а) $3 = \alpha + \beta$ б) $3 = \alpha - \beta$ в) $3 = \beta - \alpha$
 г) $3 = \alpha \cdot \beta$ д) $3 = \alpha : \beta$ е) $3 = \beta : \alpha$

Задачи I уровня (по 20 баллов). Найти значение выражения

416. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; 417. $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{11} 10 \cdot \log_{12} 11$;
 418. $2^{\sqrt{\log_3 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$; 419. $7^{\log_3 5} + 3^{\log_3 7} - 5^{\log_3 7} - 7^{\log_5 3}$;
 420. $\left(7\sqrt{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \log_{9\sqrt{3}} 125}$; 421. $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{81} \cdot \sqrt[3]{512} \cdot \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt{162}}{6561 \cdot \sqrt[3]{729} \cdot \sqrt{31250}}} \cdot \sqrt[3]{54 \cdot 500\sqrt{2}} \cdot \sqrt{25}$;
 422. $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$; 423. $\left(\sqrt[4]{7 + \sqrt{48}} - \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt[4]{7 + \sqrt{48}}$;
 424. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{243}\right)^3} - \frac{\log_4 19}{3\log_4 27}$; 425. $5^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}}$;
 426. $\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$; 427. $\frac{48}{\sqrt[3]{9 - \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{24 - \sqrt[3]{243}} + \sqrt[3]{375}}$;

Задачи I уровня (по 20 баллов). Не пользуясь таблицами, определить, что больше

428. $\log_4 2$ или $\log_{0,625} 0,25$; 429. $\log_{\log_4 2} \frac{1}{2}$ или 1.
 430. $\log_4 60$ или $\log_3 30$. 431. $\log_3 25$ или $\log_2 11$.

Задачи I уровня (по 20 баллов). Докажите

432. $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$. 433. $\frac{\left(\sqrt{\sqrt{20} - 4} + \sqrt{\sqrt{20} + 4}\right)^2}{\sqrt{(4 - \sqrt{20})^2}} = 3\sqrt{20} + 14$.

Задачи I уровня (по 20 баллов). Прологарифмируйте выражение по основанию 3 ($a > 0, b > 0$).

434. $\left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}}$; 435. $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2}$; 436. $9a^4 \cdot \sqrt[5]{b}$; 437. $\frac{a^2}{27b^7}$.

Задачи I уровня (по 20 баллов). Докажите

438. $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$; 439. $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$; 440. $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$.

Задачи I уровня (по 20 баллов). Освободитесь от иррациональности в знаменателе

441. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}};$

442. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}};$

443. $\frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}}.$

Задачи II уровня (по 30 баллов). Докажите

444. Число $\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26} - \text{целое.}$

445. Число $\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} - \text{рациональное.}$

446. Число $(2 + \sqrt{3})^{128} - \text{иррациональное.}$

447. Если $\alpha = \log_{12} 18$, $\beta = \log_{24} 54$, то $\alpha \cdot \beta + 5(\alpha - \beta) = 1$.

448. $\log_3 5 \cdot \log_2 28 \cdot \log_{\frac{1}{5}} 4 < -6.$

449. Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

Задачи II уровня (по 30 баллов). Найти

450. $(a^\alpha)^{-\beta \cdot \log_a N} N^{-\gamma}$

451. $a^{\frac{\log_b \log_b N}{\log_a b}}$

452. $\frac{a - \sqrt{a} - 2}{2 - a}$

453. $\frac{a - 2\sqrt{a} - 3}{3 - \sqrt{a}}$

454. $\log_{25} 24$, если $\alpha = \log_6 15$ и $\beta = \log_{12} 18$.

455. Сумму $S_n = 1 + 2\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^2 + \dots + n(\sqrt{2})^{n-1}$.

456. Между какими соседними целыми числами заключено значение выражения $\frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{21} + \sqrt{19}}$.

457. Сумму первых двенадцати членов геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = \sqrt[3]{2} - 1$ и $b_3 = (\sqrt[3]{2} - 1) \cdot \sqrt[3]{4}$.

458. Какое из чисел больше (не используя калькулятор) $\sqrt{2008200820} + \sqrt{200820082}$ или $2\sqrt{200820082}$?

459. Справедливо ли тождество $4^{\frac{\log a}{2}} + 2^{\frac{\log a}{2}} = (a+1) \cdot a^2$.

460. Творческое задание (100 баллов). О каких числах-«исключениях» идёт речь в краткой теоретической справке к данному разделу? Что вы знаете об этих числах, об арифметических действиях над ними? Приведите примеры.

IX. Систематические числа

Запись числа в десятичной системе счисления настолько привычна для нас, что, говоря о числе, мы обычно представляем его в этой форме.

В системе счисления с основанием 10 запись числа $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ означает число

$$N_{10} = a_n 10^{n-1} + \dots + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1, \quad (X.1)$$

где коэффициенты чисел $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ могут принимать значения из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, причём $a_n \neq 0$.

Системой счисления назовём совокупность приёмов представления и обозначения натуральных чисел. При этом сами числа называют *систематическими*.

Системы счисления в зависимости от того, меняется ли значение цифры от её местоположения в числе, делятся на два больших класса: позиционные и непозиционные системы счисления.

Система счисления называется *позиционной* если значение каждой цифры в записи числа зависит от того места n , которое эта цифра занимает.

Говорят, что число N *записано в системе счисления с натуральным основанием q* (в q -ичной системе счисления), если оно представимо в виде:

$$N_q = k_n q^{n-1} + \dots + k_3 q^2 + k_2 q + k_1, \quad (X.2)$$

где k принимает значение из некоторого множества, состоящего из q символов, и $k, q \in \mathbb{N}$. Такая запись числа называется *систематической записью числа по основанию q* .

Все такие системы счисления строятся по одному общему правилу*.

1. Рассматривается алфавит $A = \{\}$. Натуральным числом называется любое непустое слово в алфавите A .

2. Выбирается некоторое число q – основание системы счисления.

3. Выбирается алфавит из q символов, называемых цифрами:
 $S = \{s_i, 1 \leq i \leq q\}$.

4. Одним из символов фиксируется нулевой элемент.

5. Другим символам придаются значения по следующей схеме: $\underbrace{|\dots|}_{i \text{ штук}} \rightarrow s_i$

6. Каждое число N представляется в виде (X.2), где $k_i \in S$.

7. Далее, такое число сокращённо записывается в виде $(k_n k_{n-1} \dots k_2 k_1)_q$.

Если основание системы счисления $q < 10$, то за «алфавит» принято принимать числа из следующей последовательности натуральных чисел $0, 1, 2, \dots, 9$, сохраняя за каждой цифрой её десятичное значение. Если основание системы счисления $q > 10$, то за «алфавит» принято принимать цифры из следующей последовательности натуральных чисел: $0, 1, 2, \dots, 9$, (по прежнему, сохраняя за каждой цифрой её десятичное значение), дополняя их

* Приведённые ниже множества N и A – это множества натуральных чисел, записанных в десятичной и унарной системах счисления соответственно

прописными буквами латинского алфавита по следующему правилу: символу A соответствует десятичное число 10, символу B – 11, C – 12, D – 13, E – 14 и т.д.

Система счисления с натуральным основанием q позиционна. При позиционной записи значение каждой цифры зависит от того места n , которое эта цифра занимает.

Система счисления называется *аддитивной непозиционной*, если число в ней представлено в виде числового выражения, в котором используется операция сложения.

Все такие системы счисления строятся по одному общему правилу:

1. Рассматривается алфавит $A = \{\}$. Натуральным числом называется любое непустое слово в алфавите A .

2. Выбирается алфавит из i символов, называемых ключевыми числами или цифрами: $S = \{s_i\}$, i – любое.

3. Ключевым числам придаются значения по следующей схеме: $\underbrace{|\dots|}_{i \text{ штук}} \rightarrow s_i$

4. Устанавливается отношение: $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < \dots$

5. Каждое число N представляется в виде суммы:

если $s_1 < N < s_2$, то $N = \Sigma(s_1)$;

если $s_2 < N < s_3$, то $N = \Sigma(s_2) + \Sigma(s_1)$, при этом $s_1 \leq \Sigma(s_1) < s_2$ или $\Sigma(s_1) = 0$;

если $s_3 < N < s_4$, то $N = \Sigma(s_3) + \Sigma(s_2) + \Sigma(s_1)$, при этом $s_1 \leq \Sigma(s_1) < s_2$, $s_2 \leq \Sigma(s_2) < s_3$ или $\Sigma(s_1) \cdot \Sigma(s_2) = 0$;

и т.д.

6. Далее из суммы отбрасываются знаки сложения, и число сокращенно записывается в виде $(s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1)$.

Приведем пример: в качестве алфавита ключевых чисел рассмотрим цифры римской непозиционной системы счисления, то есть цифры $\{I, V, X, L, C, D, M\}$. Ключевым числам придадим значения по следующей схеме: $|\rightarrow I$, $||| \rightarrow V$, $\underbrace{|\dots|}_{10 \text{ штук}} \rightarrow X$, $\underbrace{|\dots|}_{50 \text{ штук}} \rightarrow L$, $\underbrace{|\dots|}_{100 \text{ штук}} \rightarrow C$, $\underbrace{|\dots|}_{500 \text{ штук}} \rightarrow D$, $\underbrace{|\dots|}_{1000 \text{ штук}} \rightarrow M$.

Устанавливаем отношение: $I < V < X < L < C < D < M$.

Остальные числа представляются в виде суммы ключевых чисел, например, $X + I + I$, затем число записывается без знаков сложения, то есть XII .

Система счисления называется *мультипликативной непозиционной*, если число в ней соответствует числовому выражению, в котором используются операции сложения и умножения.

Число $(2873)_{10}$ в мультипликативной системе счисления, алфавит ключевых чисел которой представлен цифрами римской нумерации $\{I, V, X, L, C, D, M\}$, записывается в виде $D3CL2X3I$, так как получено следующим образом: $D + 3 \cdot C + L + 2 \cdot X + 3 \cdot I$.

По мере расширения понятия числа расширяется понятие системы счисления, причём это расширение идёт в двух направлениях.

1. Расширение алфавита за счёт включения в него знаков арифметических действий и знаков функций. Это расширение напрямую связано с расширением понятия числа: рассматриваются отрицательные, дробные (рациональные), иррациональные и т.д. систематические числа.

Всякое рациональное число представимо в q -ичной системе счисления единственным образом в виде конечной суммы

$$R = \frac{N}{M} = \frac{k_1}{q} + \frac{k_2}{q^2} + \dots + \frac{k_{s-1}}{q^{s-1}} + \frac{k_s}{q^s}, \quad (\text{X.3})$$

где $0 \leq N < M$, N и M – взаимно простые числа, $k_i < q$, $i = 1 \div s$.

Число вида (X.3) называют *конечной систематической q -ичной дробью* и обозначают $(0, k_1 k_2 \dots k_s)_q$.

Бесконечной правильной q -ичной дробью называется сумма

$$R = \frac{k_1}{q} + \frac{k_2}{q^2} + \dots + \frac{k_n}{q^n} + \dots, \quad (\text{X.4})$$

где q – основание системы счисления и $k_n < q$.

Бесконечная систематическая дробь называется *чисто периодической систематической дробью с периодом длины l* , если для любого k имеет место равенство: $k_{n+l} = k_n$, причем, l – наименьшее из чисел, удовлетворяющих этому равенству, – и обозначается $(0, (k_1 k_2 \dots k_l))_q$.

Бесконечная систематическая дробь называется *смешанной периодической систематической дробью с периодом длины l* , если существует такое число m , что для любого $n > m$, такое что $k_{n+l} = k_n$, причем, l – наименьшее из чисел, удовлетворяющих этому равенству, – и обозначается $(0, a_1 a_2 \dots a_m (k_1 k_2 \dots k_l))_q$.

Поскольку все системы счисления описывают объекты одной и той же природы, а именно действительные числа, то в этих системах счисления справедливы те же определения, законы и правила арифметических действий, что и в привычной для нас десятичной системе (см. разделы IV-VIII).

Практически все процедуры действия с числами, записанными в различных системах счисления, включают этап перевода чисел из одной системы счисления в другую, более «удобную».

Рассмотрим подробнее процесс перевода чисел из одной позиционной системы счисления в другую.

Обычно из всех систем счисления одна считается «своей», а другие «чужими» системами счисления. Например, человеку трудно свыкнуться с тем, что запись числа в десятичной системе счисления, это не само число, а всего лишь некоторый текст, который мы привыкли отождествлять с числом.

В связи с этим возможны три задачи, которые мы сформулируем в форме вопросов:

- 1) Как перевести число из «своей» системы счисления в «чужую»?
- 2) Как перевести число из «чужой» системы счисления в «свою»?
- 3) Как перевести число из «чужой» системы счисления в другую, более «удобную»? «Удобство» основания системы счисления зачастую связано с постановкой конкретной практической задачи.

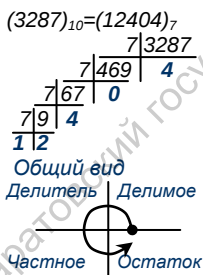


Рис.15. Способ «от младших к старшим разрядам» перевода чисел из одной системы счисления в другую

Пусть число N записано в m -ичной системе. Это значит, что оно представлено в виде:

$$N_m = b_k m^{k-1} + \dots + b_3 m^2 + b_2 m + b_1.$$

Записать это число в какой-либо другой системе счисления, скажем в q -ичной, значит найти коэффициенты (для определенности, $k_1, k_2, \dots, k_n$) в q -ичной систематической записи числа N , каждый из которых является какой-либо цифрой от 0 до $q-1$ включительно.

Существуют два способа перевода чисел, подходящих для перевода в систему счисления с меньшим основанием. Первый – «от младших разрядов к старшим» – заключается в следующем:

- Разделим число N_m на q получим остаток k_n и частное q_1 (все арифметические действия выполняются в m -ичной системе счисления).
- Затем разделим частное q_1 на q , получим остаток k_{n-1} и частное q_2 .
- Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не получим частное $q_n = k_1$, меньшее q и остаток k_2 .
- В результате получим все цифры $k_1, k_2, \dots, k_n$, входящие в q -ичное представление числа.

Второй способ – «от старших разрядов к младшим» – заключается в следующем. Пусть дано N_m , переведем это число в q -ичную систему счисления. Для этого:

$$(180)_{10} = (20200)_3$$

Степени 3:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243$$

$$\begin{array}{r} 180 \overline{) 81} \\ 162 \quad 2 \\ \underline{18} \quad 27 \\ \underline{0} \quad 0 \\ 18 \quad 9 \\ \underline{18} \quad 2 \\ \underline{0} \quad 3 \\ \underline{0} \quad 0 \\ 0 \quad 1 \\ \underline{0} \quad 0 \end{array}$$

Рис. 16. Способ «от старших к младшим разрядам» перевода чисел из одной системы счисления в другую

- Составим таблицу «ключевых» чисел – степеней q : $1, q, q^2, q^3, \dots, q^x < N_m < q^{x+1}$.

- Делим N_m на q^x . Частное от деления – первая цифра искомого числа – k_1 . Остаток – R_1 .

- $R_1 : q^{x-1}$. Находим следующую цифру искомого числа – k_2 – частное от деления. Определяем остаток R_2 .

- И так далее

- $R_{x-1} : q$. Находим предпоследнюю цифру искомого числа – k_{n-1} – частное от деления. Определяем остаток R_x .

- $R_x : 1 = k_n$.

- В результате получим все цифры $k_1, k_2, \dots, k_n$, входящие в q -ичное представление числа.

В случае перевода целого числа в систему счисления с большим основанием q , необходимо, в первую очередь определить её алфавит, затем перевести данное число в десятичную систему счисления, воспользовавшись формулой (X.2), составить таблицы сложения и умножения

однозначных чисел в q -ичной системе счисления,

+	S_1	S_2	...	S_q
S_1				
S_2				
...				
S_q				

×	S_1	S_2	...	S_q
S_1				
S_2				
...				
S_q				

применить один из описанных выше способов для перевода числа из десятичной системы счисления в q -ичную, используя составленные таблицы.

Для перевода систематической q -ичной дроби в десятичную систему счисления можно, как и в случае целых чисел, воспользоваться представлением (X.3) систематической дроби в виде суммы.

$$(378,8359375)_{10} = (572,654)_8$$

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 378} \\ 8 \overline{) 47} \\ 5 \overline{) 7} \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \overline{) 378} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 0,8359375 \\ \hline 6,6875000 \\ \times 0,6875 \\ \hline 5,5000 \\ \times 0,5 \\ \hline 4,0 \end{array}$$

Рис.17. Перевод смешанного числа из десятичной системы счисления в восьмеричную

Для перевода десятичной в q -ичную дробь поступают следующим образом:

- Умножим данную десятичную дробь на q : целая часть полученного числа – первая цифра после запятой систематической q -ичной дроби.
- Дробную часть полученного при умножении числа умножаем на q : целая часть полученного числа – вторая цифра после запятой систематической q -ичной дроби.
- И так далее...

Этот процесс может быть как конечным (на каком-то этапе в результате умножения получается целое число) или бесконечным.

Если число – смешанное, то целую и дробную часть переводят в q -ичную систему счисления отдельно (см. Рис.17)

2. Расширение основания системы счисления.

Потребности человечества в расширении возможностей электронно-вычислительной техники привели к необходимости рассматривать системы счисления с наперед заданными свойствами. Так возникли нега-позиционные системы счисления, системы счисления с комплексными основаниями и др.

Тестовые задания (по 10 баллов).

461. Выберите запись, не являющуюся 7-ричной записью некоторого числа

- а) 210 б) 432 в) 654 г) 876

462. Выберите запись, не являющуюся аддитивной непозиционной записью некоторого числа

- а) XCIV б) LXXXIII в) CLXV г) CVII

463. Какое из чисел не равно $(27)_{10}$?

- а) $(1000)_3$ б) $(102)_5$ в) $(33)_9$ г) $(1B)_{16}$

464. Какое из чисел равно $(2577)_{10}$?

- а) $(10010010001)_2$ б) $(220101)_4$ в) $(5533)_6$ г) $(5201)_8$

465. Какая запись числа $(49)_{10}$ не верна?

- а) XXXXVIII б) XLIX в) IL г) 4XV4I

466. Какая запись числа $(5707)_{10}$ верна?

- а) 11D2C7I б) 5MD2CV2I в) 5M7C7I г) 57C7I

467. Какое из чисел больше $(3D2)_{16}$?

- а) $(2D2)_{16}$ б) $(3C2)_{16}$ в) $(3D1)_{16}$ г) $(3D3)_{16}$

468. Какое из чисел меньше $(323)_5$?
- а) $(10022)_3$ б) $(153)_7$ в) $(106)_9$ г) $(80)_{11}$
469. Найдите равную данной $(0,564)_8$ систематическую дробь
- а) $(0,1011100)_2$ б) $(0,2323)_4$ в) $(0,4205343)_6$ г) $(0,726562)_{10}$
470. Найдите не равную данной $(0,333)_4$ систематическую дробь
- а) $(0,111111)_2$ б) $(0,552343)_6$ в) $(0,77)_8$ г) $(0,984376)_{10}$
471. В какой системе счисления верно равенство $35+40=115$?
- а) в шестеричной, в) в восьмеричной,
б) в семеричной, г) в девятеричной.
472. В какой системе счисления верно равенство $425-342=63$?
- а) в шестеричной, в) в восьмеричной,
б) в семеричной, г) в девятеричной.
473. В какой системе счисления верно равенство $216 \cdot 3=654$?
- а) в шестеричной, в) в восьмеричной,
б) в семеричной, г) в девятеричной.
474. В какой системе счисления верно равенство $1520:12=123$?
- а) в шестеричной, в) в восьмеричной,
б) в семеричной г) в девятеричной.
475. Найдите значение q , если $236_q=1240_5$?
- а) 7 б) 8 в) 9 г) 10

Задачи I уровня (по 20 баллов). Процедуры сложения и умножения состоят из цепочки следующих действий: (1) Выбирается «удобная» q -ичная система счисления. (2) Данные числа N_r, M_t переводятся в q -ичную систему счисления. (3) В выбранной системе счисления составляются таблицы сложения и умножения однозначных чисел. (4) При сложении или умножении многозначные числа подписываются одно под другим с соблюдением правила соответствия разрядов – «столбиком». (5) Действия производятся с использованием таблиц и правила соответствия. (6) Ответ записывают в соответствии с требованием задачи.

Вычитание и деление определяются, как действия, обратные к сложению и умножению. Процедуры вычитания и деления проводятся с использованием таблиц и правила соответствия. В случае сложения, вычитания, умножения и деления положительных и отрицательных чисел пользуются известными правилами арифметики.

Найти значение выражения в соответствующих системах счисления.

- | | |
|---|---|
| 476. $3240_6 + 4023_6$ | 477. $23265_8 - 4761_8$ |
| 478. $2431_5 + 1302_5$ | 479. $4705_{11} - 4761_{11}$ |
| 480. $11011_2 \cdot 1001_2$ | 481. $120101_3 : 102_3$ |
| 482. $120321_4 \cdot 31_4$ | 483. $150335_7 : 23_7$ |
| 484. $120111_3 : 102_3 + 201_3 \cdot 12_3$ | 485. $(76_8 \cdot 64_8 - 55_8 \cdot 37_8) \cdot 44_8$ |
| 486. $1_4 + 2_4 + 3_4 + 10_4 + \dots + 33333_4$ | 487. $2_4 + 10_4 + 20_4 + 100_4 + \dots + 200000_4$ |
| 488. $425_6 \cdot 54_6 - 531_6 \cdot 43_6$ | 489. $(135_9 : 5_9 - (3/5)_9 - 55_9) : 7_9$ |
| 490. $(12340_5)^2 - (4321_5)^2$ | 491. $(265_7)^3 + (402_7)^3$ |

Найти значение выражения и запишите результат в удобной для вас системе счисления.

$$492. 3240_6 + 110221_3$$

$$494. 11011_2 \cdot 2103012_4$$

$$496. 1_2 + 10_3 + 100_4 + 1000_5 + 10000_6$$

$$498. 10_2 + 10_3 + 10_4 + 10_5 + 10_6 + 10_7 + 10_8$$

$$493. 23265_8 - 321131_4$$

$$495. 551_9 : 102_3$$

$$497. 100_2 \cdot 100_3 \cdot 100_4 \cdot 100_5 \cdot 100_6 \cdot 100_7 \cdot 100_8$$

$$499. 100000_{16} : 10000_8 : 1000_4 \cdot 100_2$$

Переведите числа в восьмеричную систему счисления.

$$500. (101011000,01)_2$$

$$502. (3210,031)_4$$

$$504. (555,13)_6$$

$$501. (52130,03125)_{10}$$

$$503. (AB,16)_{12}$$

$$505. (101,CD1)_{16}$$

Задачи I уровня (по 20 баллов).

Вспомните алгоритм извлечения квадратного корня из натурального числа, используя рисунок 18:

(1) Разобьём число на группы по две, начиная слева.

(2) Для старшей группы, образующей число 27, подберём такое число, чтобы его квадрат наибольшим не превосходящим числа 27 – это 5 – первая цифра квадратного корня.

Рис. 18. Процедура извлечения квадратного корня

(3) Из старшей группы вычтем квадрат первой цифры корня, то есть 25. К полученной разности припишем справа следующую группу цифр, получим 298.

(4) Первую цифру квадратного корня умножим на 2, получим $5 \cdot 2 = 10$. Найдём x – вторую цифру квадратного корня, такую, что $\overline{10x} \cdot x \leq 298$, причём произведение в записанном неравенстве – наибольшее из возможных: $102 \cdot 2 = 204$.

(5) Произведём вычитание столбиком: $298 - 204 = 94$. К полученной разности припишем справа следующую группу цифр, получим 9441.

(6) Число, образованное найденными цифрами квадратного корня умножим на 2, получим $52 \cdot 2 = 104$. Найдём y – третью цифру квадратного корня, такую, что $\overline{104y} \cdot y \leq 9441$, причём произведение в записанном неравенстве – наибольшее из возможных: $1049 \cdot 9 = 9441$.

(7) Поскольку разность между $1049 \cdot 9$ и 9441 равна нулю, то корень из числа 279841 – целое число 529.

Осуществите процедуру извлечения квадратного корня из числа

$$506. 904401$$

$$507. 5612161$$

$$508. 927369$$

$$509. 61653904$$

$$510. 1234321$$

$$511. 42528266,6769$$

Осуществите процедуру извлечения квадратного корня из систематического числа (аналогично соответствующей процедуре в десятичной системе счисления)

$$512. (111110000001)_2$$

$$513. (12110000)_3$$

$$514. (1312101)_4$$

$$515. (220234)_5$$

$$516. (133013)_6$$

$$517. (62052)_7$$

Задачи II уровня (по 30 баллов). В разделе VI «Делимость. Свойства делимости» были рассмотрены свойства делимости натуральных чисел, которые применимы в любой системе счисления. А вот признаки делимости, сформулированные для десятичной системы счисления, и известные Вам из школьного курса математики, в систему счисления с произвольным натуральным основанием перенести нельзя, так как эти признаки связаны с представлением чисел именно в десятичной системе.

Для каждой позиционной системы счисления можно сформулировать свои признаки делимости на то или иное число.

518. Сформулируйте определение чётного и нечётного чисел в двоичной системе счисления. Сформулируйте признаки делимости на 2 и основание системы счисления в троичной системе счисления.

519. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3 и основание системы счисления в четверичной системе счисления.

520. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 7 и основание системы счисления в восьмеричной системе счисления.

521. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и основание системы счисления в двенадцатеричной системе счисления.

522. Число $A = (3630)_p$ делится на 7. Чему равно p , и какова десятичная запись этого числа, если известно, что $p \leq 12$?

523. Число записанное в десятичной системе счисления оканчивается цифрой 5. Будет ли это число кратно 5, если его записать в системе счисления с основанием 3?

524. Сколько существует четырёхзначных чисел, записанных в восьмеричной системе счисления, делящихся на 2 и 7, запись которых начинается с 32?

525. Найдите все четырёхзначные числа вида $(\overline{a23b})_6$, кратные $(\overline{30})_6$.

526. Докажите, что разность чисел $(\overline{abcd})_q$ и $(\overline{dcba})_q$, где $q \in \mathbb{N}$, кратна числу $q-1$.

527. Докажите, что если в некоторой q -ичной системе счисления записано число, и в этом числе произвольно переставить цифры и вычислить разность между исходным и полученным числом, то разность будет кратна числу $q-1$.

528. Доказать, что делимость $(\overline{abc})_q + (\overline{cba})_q$ на q не зависит от средней цифры.

529. Докажите, что всякая конечная восьмеричная дробь при переводе в десятичную систему счисления останется конечной. Верно ли обратное?

530. Известно, что $(\overline{ab})_p = (\overline{ba})_q$ и $p, q \in \mathbb{N}$. Выразите p через q . Найдите p и q из равенства $43_p = 34_q$. Сколько решений имеет задача?

531. Найдите $\text{НОД}(100100_2; 10100_2)$ и $\text{НОК}(100100_2; 10100_2)$.

532. Творческое задание (100 баллов). Системы счисления, основание которых есть число целое отрицательное, называют *нега-позиционными системами счисления*: $N_{-q} = k_n(-q)^{n-1} + \dots + k_3(-q)^2 + k_2(-q) + k_1$.

Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности нега-позиционных систем счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Укажите важное достоинство нега-позиционных систем счисления. Приведите примеры.

533. Творческое задание (100 баллов). Системы счисления, основание которых есть комплексное число, называют *мнимо-позиционными системами счисления*: $N_{qi} = k_n(qi)^{n-1} + \dots + k_3(qi)^2 + k_2(qi) + k_1$.

Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности мнимо-позиционных систем счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Укажите важное достоинство мнимо-позиционных систем счисления. Приведите примеры.

534. Творческое задание (100 баллов). Системой счисления Канвея называется такая запись числа, при которой, начиная с некоторой «цифры» числа m , все остальные «цифры» соответствуют последовательности чисел вида $\frac{1}{2^n}$. Число R , записанное в системе Канвея соответствует сумме:

$$R = (-1)^{k_0} \cdot N + (-1)^{k_0} + (-1)^{k_1} \cdot \frac{1}{2} + (-1)^{k_2} \cdot \frac{1}{4} + (-1)^{k_3} \cdot \frac{1}{8} + (-1)^{k_4} \cdot \frac{1}{16} + (-1)^{k_5} \cdot \frac{1}{32} + \dots,$$

где $k_i \in \{0, 1\}$.

Такие системы счисления строятся по правилу:

1. Рассматривается алфавит $A = \{\uparrow, \downarrow\}$.
2. Если нужно записать положительное число, то его запись начинают с n символов $\uparrow$, где n соответствует целой части данного числа R .
3. Если нужно записать отрицательное число, то его запись начинают с n символов $\downarrow$, где n соответствует целой части данного числа $(-1)^{k_0} N$.
4. Если целая часть числа равно нулю, то $N=0$.
5. Дробная часть числа начинается с того же символа, которым была записана целая часть $(-1)^{k_0}$.
6. Все последующие символы соответствуют последовательности чисел вида $\frac{1}{2^n}$. Выбор символа $\uparrow$ или $\downarrow$ зависит от необходимости сложения ($\uparrow$) или вычитания ($\downarrow$) последующего члена последовательности.

Если $\left(-\frac{1}{2^n}\right)$, то используют символ $\downarrow$. Если $\frac{1}{2^n}$, то используют символ $\uparrow$.

7. Выражение (X.3) заменяется соответствующим набором символов $\uparrow\downarrow$.

Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности системы счисления Канвея и основные процедуры выполнения арифметических действий. Выявите достоинства системы Канвея. Приведите примеры.

535. Творческое задание (100 баллов). В рассмотренных выше позиционных системах счисления значение единицы любого разряда, кроме первого, равнялся значению предшествующего разряда, умноженного на

основание системы счисления q . Можно представить себе ещё один вариант записи чисел – так называемые, смешанные системы счисления.

Под *базисом системы счисления* понимают последовательность чисел $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$, каждое из которых задаёт значение соответствующего разряда.

Так, базисом десятичной системы счисления являются числа $1, 10, 100, \dots, 10^{n-1}$, двоичной системы счисления – $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$. Таким образом, числа базиса таких систем счисления образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным основанию системы счисления.

Помимо этого, можно рассматривать системы счисления, базис которых – любая наперёд заданная последовательность.

Чётной системой счисления называют систему счисления с базисом $1, 2, 4, 6, \dots, 2(n-1)$.

Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности чётной системы счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Выявите достоинства чётной системы счисления. Приведите примеры.

536. Творческое задание (100 баллов). Системой счисления Фибоначчи называют систему счисления с базисом $1, 2, 3, 5, 8, \dots, q_{n-2} + q_{n-1}$. Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности системы счисления Фибоначчи и основные процедуры выполнения арифметических действий. Приведите примеры.

537. Творческое задание (100 баллов). Можно расширить понятие системы счисления, рассматривая системы счисления, значения цифр которых придаются не только числами натурального ряда, но противоположным к ним числами. Такие системы счисления называются *уравновешенными*. Рассмотрите систему счисления с основанием $q=5$ и цифрами $\{\tilde{1}, 0, 1, 2, 3\}$, где $\tilde{1} = -1$. Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности данной системы счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Приведите примеры.

538. Творческое задание (100 баллов). Наибольший интерес представляют уравновешенные системы счисления с нечётным симметричным основанием. Примером таких систем счисления может служить троичная система счисления с симметричным основанием $\{\tilde{1}, 0, 1\}$, где $\tilde{1} = -1$. Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности данной системы счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Выявите достоинства системы. Приведите примеры.

539. Творческое задание (100 баллов). Исследуйте факториальную систему счисления, базис которой составлении из факториалов чисел натурального ряда: $1!, 2!, 3!, \dots$. Как бы выглядели счёты для осуществления арифметических действий в факториальной системе счисления?

Х. Информационное моделирование сюжетных задач

Информация имеет функциональное значение в жизни человека. Потребность в информации предваряет всякую другую потребность и всякое действие. Информация имеет непосредственное значение в ориентации человека в окружающем материальном мире. Мы постигаем действительность только через наши модели (Т.А.Ван Дейк). Эти модели и есть наше понимание действительности, которую мы «реконструируем для того, чтобы справиться с ней»¹.

С понятием *информации* тесно связано понятие *информационной модели* и *информационного моделирования*.

В современном (информационном) обществе принцип информационного моделирования наряду с другими информационными принципами играет определяющую роль.

Принцип информационного моделирования гласит: научное познание осуществляется посредством моделирования; основные модели – описание объектов или процессов на некотором языке – *информационные модели*, которые играют решающую роль в общении и практической деятельности.

Принцип информационного моделирования непосредственно связан с основным тезисом формализации (*основной тезис формализации* указывает на принципиальную возможность разделения объекта и его обозначения и тесно связан с так называемым треугольником Фреге, в котором обрисована связь трёх основных понятий: объекта, знака и концепта). Причины, по которым «рабочее» понятие модели, например математической модели, приобретает характер информационного принципа, заключены в универсальном характере понятия информационной модели. В этом смысле математическая модель является одним из видов информационных моделей.

Следствиями принципа информационного моделирования являются: (1) признание наличия трёх классов моделей – материальные, информационные и воображаемые модели; (2) приобретение информационными моделями статуса самостоятельных объектов, способных оказывать значительное влияние на мировосприятие и поступки людей².

Под *умением информационного моделирования* понимают совокупность действий и операций субъекта с информацией об объекте:

- по восприятию (определять цель моделирования; осуществлять выбор объекта моделирования; системно анализировать объект);
- выражению (выбор формы представления модели; формализация);
- оценке (анализ полученной модели на непротиворечивость; адекватности объекту и цели моделирования).

¹ Ван Дейк Т.А. Язык. Познание. Коммуникация [Текст] / Т.А.Ван Дейк. - М.: Прогресс, 1989. – С.12

² Бешенков С.А., Ракитина Е.А., Шутикова М.И. Гуманитарная информатика: от технологий и моделей к информационным принципам // Информатика и образование, 2008, №2. – С.3

```

graph TD
    A[Оригинал/прототип  
Объект, процесс, явление] --> B[Моделирование]
    B --> C[Модель  
Искусственно созданный объект, дающий упрощенное представление о реальном объекте, процессе или явлении, отражающий существенные стороны изучаемого объекта с точки зрения цели моделирования]
    C --> D[Способ представления]
    D --> E[Материальные]
    D --> F[Нематериальные  
Абстрактные/идеальные]
    E --> G[Предметные  
Реальное воплощение]
    E --> H[Компьютерные  
Виртуальное воплощение]
    F --> I[Информационные]
    F --> J[Вообразимые  
Мысленные/интуитивные]
    I --> K[Знаковые/символические  
На языке описаний]
    I --> L[Наглядные/образные  
На языке представлений]
    K --> M[Вербальные  
На естественном разговорном языке]
    K --> N[Невербальные  
На формальном языке]
    M --> O[Устные]
    M --> P[Письменные]
    O --> Q[Математические]
    O --> R[Нематематические]
    P --> S[Математические]
    P --> T[Нематематические]
    N --> U[Область знаний]
    U --> V[Математические]
    U --> W[Нематематические]
    V --> X[Способ реализации]
    X --> Y[Алгоритмические]
    X --> Z[Неалгоритмические]
    L --> AA[Фактор времени]
    AA --> AB[Динамические]
    AA --> AC[Статические]
    AC --> AD[Иконические]
    AD --> AE[Структурные]
    AD --> AF[Графические]
    AE --> AG[Таблицы]
    AE --> AH[Графы]
    AE --> AI[Схемы]
    AE --> AJ[Чертежи]
    AE --> AK[Эскизы]
    AE --> AL[Рисунки]
    AF --> AM[Математические]
    AF --> AN[Нематематические]
    AG --> AO[Математические]
    AG --> AP[Нематематические]
    AH --> AQ[Математические]
    AH --> AR[Нематематические]
    AI --> AS[Математические]
    AI --> AT[Нематематические]
    AJ --> AU[Математические]
    AJ --> AV[Нематематические]
    AK --> AW[Математические]
    AK --> AX[Нематематические]
    AL --> AY[Математические]
    AL --> AZ[Нематематические]
  
```

Схема 6. Классификация моделей

В данном пособии различные информационные модели были представлены на рисунках 1,2,8,9,13-17, схеме 3, в таблице 2; построение некоторых моделей описано в ряде задач, например в задачах 320, 402, 403, а также в комментариях к решению типовых сюжетных задач из разделов II, III, VI и VII.

На примере решения задач на движение проиллюстрируем возможности информационного моделирования.

Решение задачи на движение требует последовательного построения несколько различных информационных моделей: наглядно-образных графических (чертеж, схема, граф) и структурных (таблица), а также формальных знаковых математических (арифметические выражения, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств).

Наглядно-образная графическая модель позволяет лучше понять взаимосвязи и отношения, описанные в условии задачи, структурная модель (таблица) – определить наиболее удобный способ решения, знаковая математическая модель строится с целью получения ответа на поставленный вопрос.

Одной из особенностей задач на движение является то, что всякая такая задача требует обязательного анализа. Без предварительного анализа трудно определить, какой метод, и какая соответствующая знаковая математическая модель являются наиболее подходящими для решения данной задачи.

Перечислим основные требования, предъявляемые к схемам (наглядно-образным графическим моделям), составляемым по условию задач на движение: (1) при движении по прямой расстояние принято обозначать отрезком; (2) равные расстояния обозначаются равными отрезками; (3) для обозначения суммы пройденных расстояний используются фигурные скобки; (4) если в задаче описываются две (и более) ситуации, строятся две (и более) схемы; (5) если в задаче описывается движение в одном направлении двух объектов, желательно разделять информацию об этих объектах, располагая ее в различных полуплоскостях относительно прямой, содержащей отрезок (модель пройденного пути); (6) место (пункт отправления, встречи, прибытия) обозначают либо точкой на отрезке и соответствующей буквой, либо черточкой, либо флажком; (7) время, затраченное на тот или иной отрезок пути, отмечается, как правило, над флажком, в случае, если объекты были в пути одинаковое количество времени или над каждым отрезком пути непосредственно, если участники движения затратили разное по количеству время на преодоление пути; (8) стоянку можно обозначать выколотой точкой, под которой обозначается время, отведенное на стоянку; (9) направление движения указывают стрелками; (10) движение вслед изображается с использованием двух координатных лучей, располагающихся друг под другом; (11) в задачах на движение по течению (против течения) реки расстояние желательно обозначать наклонной линией, при этом «вниз» по наклонной обозначается движение по течению реки и «вверх» – против течения. Потребность в использовании наклонной определяется необходимостью сконцентрировать внимание обучаемых на изменении скорости объекта (имеющего собственную скорость) при его движении по реке. Кроме того, данный приём позволяет вести пропедевтическую работу по изучению основ векторной алгебры: если обозначить собственную скорость транспортного

средства $\bar{v}$, скорость течения $\bar{v}_t$, то скорость объекта по течению определяется векторной суммой $\bar{v} + \bar{v}_t$, а против течения – разностью векторов $\bar{v} - \bar{v}_t$; поскольку векторы коллинеарные, то $|\bar{v} + \bar{v}_t| = |\bar{v}| + |\bar{v}_t|$ и $|\bar{v} - \bar{v}_t| = |\bar{v}| - |\bar{v}_t|$.

При решении задач на движение схемы выполняют ориентировочную роль, поскольку дают возможность одновременно «видеть» все связи между данными. Лучшему и быстрому осознанию сути явления, зафиксированного в схеме, помогает уменьшение количества перекодировок, которые потребуется делать при сопоставлении схемы с реальной ситуацией. Поэтому применяемая схема должна быть разумно сокращенной и упрощенной по сравнению с реальным явлением и в то же время наиболее естественной для конкретной задачи.

Графическая модель позволяет перейти к построению другой информационной наглядно-образной структурной модели – таблице. Целесообразно строить две таблицы: в первой – размещать информацию на языке задачи, во второй – ту же информацию представлять на алгебраическом языке.

Обратимся к объекту нашего исследования – задачам на движение. Таблица, являющаяся информационной моделью этого типа задач инвариантна по форме: состоит из четырёх столбцов. В первом содержится информация об объектах движения, во втором указывается скорость движения рассматриваемых объектов, в третьем – время движения, в четвёртом – пройденный путь (расстояние).

Сформулируем требования к составлению таблиц первого рода, то есть содержащих информацию на языке задачи: (1) количество строк зависит от количества участников движения и количества ситуаций; (2) при необходимости можно использовать сложные таблицы, содержащие объединённые ячейки и (или) «разбитые» ячейки; (3) если рядом стоящие ячейки столбца содержат одинаковую информацию, то они подлежат объединению, если эти ячейки разделены и не содержат явной числовой информации – их равенство обозначают соединяющим отрезком с точками на обоих концах $\bullet \text{---} \bullet$; (4) если ячейки столбца содержат информацию, связанную некоторым отношением, то существующую зависимость обозначают отрезком с точкой на одном конце (зависимое значение) и стрелкой на другом конце (независимое значение) $\bullet \text{---} \rightarrow$ и подписывают условие зависимости, например, «? на 2 м б.» или «? в 2 раза м.»; (5) разность двух числовых значений, размещённых в смежных ячейках столбца, обозначают дугой со стрелками на двух концах $\leftarrow \text{---} \rightarrow$, сумму двух числовых значений, размещённых в смежных ячейках столбца, обозначают фигурной скобкой $\{ \text{---} \}$; (6) в ячейке содержится либо число, либо вопрос, либо вопрос и условие зависимости, главный вопрос (требование) задачи обводится в овал (?).

Требования к составлению таблиц второго рода, содержащих информацию на алгебраическом языке следующие: (1) форма таблицы второго рода полностью соответствует форме таблицы первого рода, поэтому способ решения задачи с использованием таблиц первого и второго рода назовём *решением задачи с использованием таблицы наложений*;

(2) числовые величины переносятся из таблицы первого рода без каких-либо изменений; (3) неизвестные величины записываются в виде арифметических действий или алгебраических выражений с переменной в соответствии с условиями зависимости и основной функциональной зависимостью ($s = v \cdot t$); (4) наличие и количество переменных определяется наличием или отсутствием условий зависимости; (5) если информация в ячейке получена двумя способами, то осуществляется разбиение ячейки по диагонали; на основе информации таких ячеек составляется уравнение; (6) знаки суммы и разности двух величин (двусторонняя стрелка и фигурная скобка) в таблице первого рода предполагают трансформацию соответствующих ячеек таблицы второго рода; (7) единицы измерений величин не указываются; (8) возможно в правом верхнем углу указать ограничения, накладываемые на неизвестные величины; (9) возможно в левом верхнем углу указывать порядок (этап) заполнения таблицы (например, 1), 2) и т.д.); (10) при необходимости перевода единиц измерения величин, представленных в таблице первого рода разными наименованиями (например, $v = 15 \text{ км/ч}$, $t = 20 \text{ мин}$, $s = \text{на } 500 \text{ м м.}$), в ячейки таблицы второго рода переносится равная исходной величина соответствующего наименования (например, $v = 15 \text{ км/ч}$, $t = \frac{1}{3} \text{ ч}$, $s = ? \text{ на } 0,5 \text{ км м.}$), если зависимость указана в процентном отношении, ее переводят в десятичную дробь (например, «на 30% б.» в таблице первого рода обращается в «в 1,3 раза б.» в таблице второго рода); (11) следует выделить, например цветом или штриховкой, ячейку, содержащую информацию с требованием задачи.

Решение задач с использованием таблицы наложений проиллюстрируем на конкретном примере **Задачи о мотоциклисте**. Из пункта А выехал велосипедист. Одновременно из пункта В, отстоящем от А на расстоянии 20 км, выехал мотоциклист. Скорость велосипедиста 12 км/ч, мотоциклиста – 16 км/ч. На каком расстоянии от пункта А мотоциклист догонит велосипедиста?

В задаче рассматриваются два объекта, что предполагает наличие трёх строк таблицы первого рода: «Характеристики движения» (участники/ситуации – скорость – время – расстояние), «Велосипедист», «Мотоциклист». Составляется таблица 3×4. Поскольку время в пути одинаково для двоих участников движения, то следует объединить соответствующие ячейки столбца «Время» (Табл.13).

Затем в таблицу (Табл.14) вносятся два числовых значения: скорости – 12 км/ч и 16 км/ч, то есть указываются, какие из выделенных величин известны, и расставляются знаки вопроса вместо всех остальных величин (указываются неизвестные величины).

Таблица 13 Первый шаг построения табличной модели I рода			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В			
М			

Таблица 14 Второй шаг построения табличной модели I рода			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12 км/ч	?	?
М	16 км/ч		?

Далее определяется зависимость между неизвестными величинами, что дополняет таблицу соотношением между пройденными расстояниями (Табл.15). Можно выявить зависимость и между известными величинами, что

дополнит таблицу соотношением между скоростями и определит ещё один способ решения задачи (Табл.16). Выделяется главное требование (вопрос) задачи. Этим заканчивается этап анализа условия задачи.

Таблица 15 Третий шаг построения табличной модели I рода			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12 км/ч	?	на 20 км $\bar{b}$
М	16 км/ч		

Таблица 16 Четвёртый шаг построения табличной модели I рода			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12 км/ч	?	?
М	16 км/ч		

По содержанию таблицы первого рода составляется таблица второго рода: Цветом выделяется ячейка с требованием задачи, одним из трех возможных способов выбирается одно из неизвестных (обозначается буквой x), все остальные неизвестные величины выражаются через x (Табл.17-19). При этом возникает ситуация, когда информация в некоторой ячейке получена двумя способами (осуществляется разбиение ячейки по диагонали). На основе информации разбитой по диагонали ячейки составляется уравнение. Кроме того, возможен арифметический способ решения (Табл.20).

Таблица 17 Табличная модель II рода Вариант I			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12	x	$12x$
М	16		$16x$

Таблица 18 Табличная модель II рода Вариант II			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12	$x:12$	x
М	16		$x+20$

Таблица 19 Табличная модель II рода Вариант III			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12	$(x-20):12$	$x-20$
М	16		x

Таблица 20 Табличная модель II рода Вариант IV			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12	$20:4=5$	$12 \cdot 5=60$
М	16		

Итак, по результатам составления табличной модели *Задачи о мотоциклисте* возможно составление соответствующей знаковой математической модели данной задачи:

- 1) $12x+20=16x$, $x=5$, $12x=60$.
- 2) $x:12=(x+20):16$, $12(x+20)=16x$, $4x=240$, $x=60$.
- 3) $(x-20):12=x:16$, $12x=16(x-20)$, $4x=320$, $x=80$; $80-20=60$.
- 4) $16-12=4(\text{км/ч})$ – скорость сближения; $20:4=5(\text{ч})$ – понадобится М, чтобы «покрыть» разницу в 20 км; $12 \cdot 5=60(\text{км})$ – расстояние от А до встречи М и В.
- 5) $12 \cdot (20:(16-12))=60$.

На примере этой задачи можно сформулировать в явном виде и в дальнейшем исследовать проблему рациональности выбора неизвестных, для чего необходимо сравнение всех способов решения задачи (то есть наглядно-образных моделей (графическую и табличную), математической модели и тем решением, которое осуществляется в рамках составленной математической модели).

Тестовые задания (по 10 баллов)

540. В двух библиотеках было одинаковое количество книг. Через год в первой библиотеке число книг увеличилось на 50%, а во второй – в полтора раза. В какой библиотеке книг стало больше?

а) В первой библиотеке.

б) Во второй библиотеке.

в) Книг стало поровну.

г) Задача неопределена.

541. Лыжник от озера до деревни шёл со скоростью 15 км/ч, а обратно – со скоростью 12 км/ч. Сколько времени ушло у него на обратную дорогу, если на весь путь туда и обратно лыжник затратил 3 часа?

Пусть x – время на обратную дорогу. Какое из уравнений является математической моделью задачи?

а) $15(3 - x) = 12x$

б) $\frac{15}{x} + \frac{12}{3-x} = 3$

в) $15x + 12(3 - x) = 3$

г) $15x = 12(3 - x)$

542. При покупке стиральной машины стоимостью 6500 рублей покупатель предъявил вырезанную из газеты рекламу, дающую право на 5% скидку. Сколько он заплатит за машину?

а) 325 рублей

б) 3250 рублей

в) 6175 рублей

г) 6495 рублей

543. На первый курс института может быть принято 180 человек. Число поданных заявлений составило 120% от количества мест на курсе. Сколько заявлений было подано?

а) 36

б) 150

в) 216

г) 300

544. В классе 25 учащихся. При посадке деревьев в школьном саду каждая девочка посадила по 2 дерева, а каждый мальчик по 3 дерева. Всего было посажено 63 дерева. Сколько в классе девочек и сколько мальчиков?

Пусть в классе x девочек и y мальчиков. Какая система уравнений является математической моделью задачи?

а) $\begin{cases} x + y = 25 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 63 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 25 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 63 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 25 \\ 3x + 2y = 63 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x + 3y = 63 \end{cases}$

545. Андрей старше Олега на 4 года, а Олег старше Бориса в полтора раза. Вместе им 36 лет. Сколько лет Борису?

а) 16

б) 12

в) 8

г) 6

546. На пост спикера парламента претендовали два кандидата. В голосовании приняли участие 252 депутата. Голоса между кандидатами распределились в отношении 2 : 7. Сколько голосов получил проигравший?

а) 280

б) 196

в) 128

г) 56

547. В книге 84 страницы. Во второй день каникул Саша прочитал в 2 раза больше страниц, чем в первый, а в третий – на 4 меньше, чем во второй. Сколько страниц прочитал Саша в каждый из этих дней?

Пусть x – количество страниц, прочитанных в первый день. Какое из уравнений является математической моделью задачи?

а) $x + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2} - 4) = 84$

б) $x + 2x + (2x - 4) = 84$

в) $x + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2} + 4) = 84$

г) $x + 2x + (2x + 4) = 84$

548. В танцевальной студии число девочек относится к числу мальчиков как 6:5. Сколько пар, в каждую из которых входят мальчик и девочка, могут одновременно танцевать, если всего в студии занимается 66 человек?

- а) 36 б) 33 в) 30 г) 11

549. В две большие и три маленькие коробки помещается 38 карандашей, а в три большие и две маленькие коробки – 42 карандаша. Сколько карандашей в большой и маленькой коробках вместе?

- а) 40 б) 30 в) 19 г) 16

Задачи-упражнения (по 20 баллов). Дана задача. Проанализируйте и укажите, какими методами можно ее решить. Какой метод является для данной задачи наиболее рациональным? Почему?

Пример такого анализа проиллюстрируем на **Задаче про упаковку**. Два автомата разной производительности при одновременном включении упаковывают дневную норму коробок с соком за 12 часов. Если первый автомат будет включен 2 часа, а второй – 3 часа, то будет упаковано только 20% всех коробок. За какое время может упаковать дневную норму коробок каждый автомат, работая в отдельности? Решение. Анализ данной задачи следует начинать с определения типа, к которому она относится. Это, так называемая, задача «на работу». Задачи этого вида имеют следующую структуру: *Производительность – время – объем работы.*

Таким образом, величины, указанные в задаче, связаны следующей формулой: *Производительность · время = объем работы.*

Делаем вывод: задача решается либо по действиям, либо с помощью составления уравнения. Поскольку в условии задачи описано несколько ситуаций, решение задачи, возможно, потребует построения *системы уравнений*.

550. Из турбазы в одном направлении выходят три туриста с интервалом в 30 минут. Первый идет со скоростью 5 км/ч, второй – 4 км/ч. Третий турист догоняет второго, а еще через 4 часа догоняет первого. Найдите скорость третьего туриста.

551. Незадолго до выборов социологический опрос показал, что 60% избирателей уже решили, за кого из двух кандидатов они будут голосовать. При этом 55% из них решили голосовать за кандидата А. Какой процент из тех, кто еще не определил своего избранника, должен голосовать за кандидата А, чтобы за него проголосовала, по крайней мере, половина избирателей?

552. Бригада косцов в первый день скосила половину луга и еще 2 га, а во второй день – четверть оставшейся части и последние 6 га. Найти площадь луга.

553. В очередь в буфет стоят Вика, Соня, Боря, Денис и Алла. Вика стоит впереди Сони, но после Аллы; Борис и Алла не стоят рядом; Денис не находится рядом ни с Аллой, ни с Викторией, ни с Борей. В каком порядке стоят дети?

554. В купе вагона один против другого стоят два дивана, на каждом из которых по четыре места. Из восьми пассажиров трое желают сидеть лицом в направлении движения поезда, два – спиной. Сколькими способами могут разместиться пассажиры, с учетом их пожеланий?

Задачи-упражнения (по 20 баллов). Составить схему/чертеж к следующим задачам. В качестве образца рассмотрите схему к задаче **Кто раньше?** Велосипедист и всадник выехали из деревни на турбазу разными дорогами. Всадник ехал по дороге, которая была короче на 9 км, но со скоростью на 3 км/ч меньшей, чем велосипедист. Велосипедист ехал 3 часа со скоростью 18 км/ч. Кто из них раньше придет на турбазу?

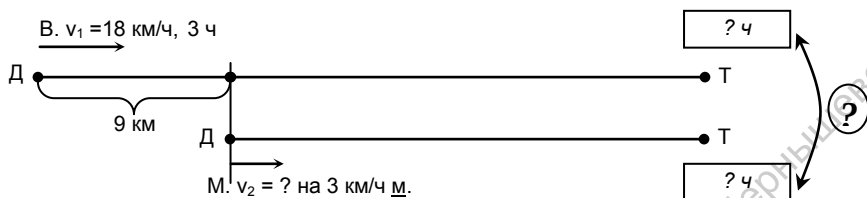


Рис.18 Наглядно-образная графическая модель – схема – задачи **Кто раньше?**

555. Из города А в город В, расстояние между которыми равно 300 км, выехал автобус. Через 20 минут навстречу ему из В в А выехал автомобиль и через 2 часа после выезда встретил автобус. С какой скоростью ехал автомобиль, если известно, что она была на 20 км/ч больше скорости автобуса?

556. Из пунктов А и В, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от пункта А. Найдите скорость каждого, если известно, что пешеход, вышедший из А, шел со скоростью, на 1 км/ч большей, чем другой пешеход, и сделал в пути 30-минутную остановку.

557. Лодка может проплыть 15 км по течению реки и еще 6 км против течения за то же время, за какое плот может проплыть 5 км по этой реке. Найдите скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки 8 км/ч.

558. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 8 км, одновременно вышли два лыжника. Скорость одного из них на 4 км/ч меньше скорости другого. Лыжник, который первым прибыл в В, сразу же повернул обратно и встретил другого лыжника через 45 минут после выхода из А. На каком расстоянии от пункта В произошла встреча?

559. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми 5 км. Через 30 мин туристы встретились и, не останавливаясь, продолжили путь с той же скоростью. Первый прибыл в пункт В на 25 минут позже, чем второй в пункт А. Определите скорость каждого туриста.

560. Один автомобиль проходит в минуту на 200 м больше, чем другой, поэтому, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 10 секунд меньше. Сколько километров в час проходит каждый автомобиль?

561. Плот проплывает путь из А в В за 12 часов, а моторная лодка – за 3 часа. За какое время моторная лодка преодолит такое же расстояние в стоячей воде?

Задачи-упражнения (по 20 баллов). Сформулируйте задачу по её информационной табличной модели.

562.	Таблица 21				
	v		t		S
	по течению	лодки8 км/ч течения2 км/ч } ?	? } 5 ч		⓪ ●
	остановка		3 ч		—
	против течения	лодки8 км/ч течения2 км/ч } ?	? } 5 ч		? ●

563.	Таблица 22		
	v	t	S
	B	15 км/ч	? на 30 мин б.
	M	40 км/ч	? на 2 ч м.
Время отхода		?	-

564.	Таблица 23		
	II	I	III
	B	? в 3 р м	? в 3 р м
	Л	? в 6 р м	? в 1,5 р м
	П	? в 4 р м	? в 2 р м
	Всего	2	3

565.	Таблица 24				
	Участники процесса	Производительность бригады		Время работы	Объем работы
		Один комбайн	Кол-во комбайнов		
	I бригада	?	?	?	1
	II бригада		?	?	
	один комбайн		-	?	1
	I бригада		?	?	1/2
	II бригада		?	?	1/2

566.	Таблица 25					
	I		II		I+II	
	масса	%	масса	%	масса	%
Неизменное вещество	⁴⁾ $0,2x$	20%	⁵⁾ $0,5y$	50%	$0,2x+0,5y$ ⁶⁾	30%
Вода					$0,3(x+y)$ ⁷⁾	
всего	¹⁾ x	100%	²⁾ y	100%	$x+y$ ³⁾	100%

в ? раз

567.

Таблица 26					
Я Б Л О К И					
СВЕЖИЕ			СУШЁНЫЕ		
	в %	масса		в %	
неизменн. вещ-во	¹⁾ 20%	⁴⁾ 0,2	⁵⁾ 0,2	²⁾ 80%	
вода	80%	³⁾ 0,8	⁶⁾ 0,05	20 %	
ВСЕГО	100%	1	⁷⁾ 0,25	100%	
$\begin{array}{c} \text{На ?} \quad \text{м. (в \%)} \\ \text{8) } 1 - 0,25 = 0,75 = 75\%. \end{array}$					

568.

Таблица 27						
I		II		I + II		
	в %	масса	в %	масса	в %	масса
кислота	75%	³⁾ 0,75x	15 %	⁶⁾ 4,5	50%	⁷⁾ 0,75x + 4,5
вода	¹⁾ 25%	²⁾ 0,25x	⁴⁾ 85%	⁵⁾ 25,5	50%	⁸⁾ 0,25x + 25,5
ВСЕГО	100%	x	100%	30 z	100%	x + 30

Задачи II уровня (по 30 баллов). В работах известных методистов и простых учителей математики предлагаются различные методы и способы решения сюжетных задач. Исследуйте предложенные методы и способы решения на рациональность. Решите задачи с использованием табличных моделей.

569. Из пункта А в пункт В одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Найдите расстояние между пунктами А и В [А.В.Шевкин «Решайте задачи проще!»¹⁾.

Решение. Пусть половина расстояния АВ равна x км, тогда требуется найти $2x$. По смыслу задачи $x > 15$. Когда первый прошел половину пути – x км, второй прошел $(2x - 24)$ км. Так как скорости постоянны, а время движения одинаково, то отношение скоростей первого и второго пешеходов равно

$\frac{x}{2x - 24}$. Когда же второй пешеход прошел половину пути – x км, первый

прошел $(2x - 15)$ км. И в этом случае скорости постоянны, а время движения одинаково, поэтому отношение скоростей первого и второго пешеходов равно

$\frac{2x - 15}{x}$. Одно и то же отношение скоростей мы выразили двумя дробями,

составим уравнение: $\frac{x}{2x - 24} = \frac{2x - 15}{x}$. Это уравнение имеет единственный

корень $x = 20$ больший 15, поэтому расстояние $(2x)$ между пунктами А и В равно 40 км. Ответ: 40 км.

¹⁾ Математика. Школа. Будущее [Электронный ресурс]: Сайт учителя математики А.В.Шевкина / Шевкин А.В. – Москва, 2008. – Режим доступа: <http://www.shevkina.ru>.

570. Два поезда, выйдя одновременно из разных городов, встретились через 20 ч. За какое время каждый из поездов проходит расстояние между этими городами, если одному из них требуется для этого на 9 ч больше, чем другому. [А.В.Шевкин, статья «Решайте задачи проще!»¹].

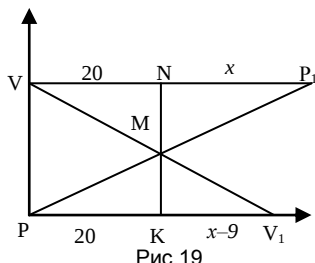


Рис. 19

Решение. Пусть первый поезд был в пути x ч после встречи, тогда второй поезд был в пути $(x-9)$ ч после встречи. Построим (Рис.19) схематически графики движения этих поездов: PP_1 и VV_1 соответственно. Моменту их встречи соответствует точка M графиков. Из условия задачи следует, что $NP_1=x$, $KV_1=x-9$, требуется найти $x+20$ и $x-9+20=x+11$. Из подобия двух пар

треугольников VMN и V_1MK , MPK и MP_1N получим пропорции: $x:20=MN:MK$ и $MN:MK=20:(x-9)$, откуда $x:20=20:(x-9)$. Это уравнение имеет единственный положительный корень $x=25$, поэтому первый поезд проходит расстояние между этими городами за $25+20=45$ ч, а второй – за $25+11=36$ ч.
Ответ: 45 ч и 36 ч.

571. Брат вышел из дома на 5 минут позже сестры вслед за ней, но шел в полтора раза быстрее, чем она. Через сколько минут после выхода брат догонит сестру? [Р.Г.Зиятдинов, учебное пособие «Решение текстовых задач»²].

Решение. До встречи брат и сестра прошли одно и то же расстояние, но сестра затратила на это на 5 минут больше, чем брат. Так как скорость брата в 1,5 раза больше скорости сестры, то сестра шла в 1,5 раза дольше, а разность скоростей (то есть скорость их сближения) составляет $1,5-1=0,5$ (раза), что соответствует 5 минутам. Имеем

$$\begin{array}{l} 0,5 \text{ раза} - 5 \text{ мин} \\ \downarrow \\ 1 \text{ раз} - x \text{ мин} \end{array}$$

Находим x из пропорции: $x=5 \cdot 1:0,5=10$ (мин).

Брат догонит сестру через 10 минут.

По-другому имеем

$$\begin{array}{l} 0,5 \text{ раза} - 5 \text{ мин} \\ \downarrow \\ 1,5 \text{ раза} - y \text{ мин} \end{array}$$

Находим y из пропорции: $y=5 \cdot 1,5:0,5=15$ (мин). Сестра затратила на весь путь 15 минут. Тогда брат затратил на весь путь $15-5=10$ (мин).

Ответ: через 10 минут.

572. Расстояние между двумя станциями А и В пассажирский поезд проходит на 45 мин быстрее, чем товарный. Определить расстояние между этими станциями, если известно, что скорость движения пассажирского поезда равна 48 км/ч, а товарного 36 км/ч. [Е.Ф.Фефилова, учебное пособие «Теория

¹ Математика. Школа. Будущее [Электронный ресурс]: Сайт учителя математики А.В.Шевкина / Шевкин А.В. – Москва, 2008. – Режим доступа: <http://www.shevkin.ru>.

² Зиятдинов Р.Г. Решение текстовых задач [Текст]: Учебное пособие / Р.Г.Зиятдинов. – Тверь: Твер.гос.ун-т, 2002. – С.63-64

и методика обучения математике: систематизация знаний и умений по решению сюжетных задач»^{1]}

Решение. Предположим, что расстояние между двумя станциями равно 144 км ($144 = \text{НОК}(48, 36)$). Тогда получаем: (1) $144 : 48 = 3(\text{ч})$. (2) $144 : 36 = 4(\text{ч})$. (3) $4 - 3 = 1(\text{ч})$, а по условию разность составляет $45 \text{ мин} = \frac{3}{4} \text{ ч}$. Отсюда получаем отношение $1 : \frac{3}{4} = 144 : x$; $x = 108$. **Ответ:** 108 км.

573. Пароход по течению реки прошел путь между двумя пристанями 360 км и вернулся обратно. Собственная скорость парохода 18 км/час, а скорость течения реки — 2 км/час. Сколько времени затратил пароход на весь путь туда и обратно? [Л.М.Фридман, учебное пособие «Сюжетные задачи по математике»^{2]}.

Решение. В задаче заданы следующие значения величин: (1) расстояние между пристанями (360 км); (2) собственная скорость парохода (18 км/ч); (3) скорость течения реки (2 км/ч); (4) фактическая скорость парохода по течению реки (неизвестное значение); (5) скорость парохода против течения реки (неизвестное); (6) время движения парохода по течению реки (неизвестное); (7) время движения парохода против течения реки (неизвестное); (8) общее время, затраченное пароходом на путь туда и обратно (искомое). Эти восемь значений величин связаны между собой следующими соотношениями: 1-е, 4-е и 6-е значения связаны соотношением зависимости между расстоянием, временем движения и скоростью; 1-е, 5-е и 7-е значения связаны таким же соотношением зависимости; 2-е, 3-е и 4-е значения связаны соотношением сложения частей в целое; 2-е, 3-е и 5-е значения связаны соотношением вычитания от целого его части; 6-е, 7-е и 8-е значения связаны соотношением сложения частей в целое.

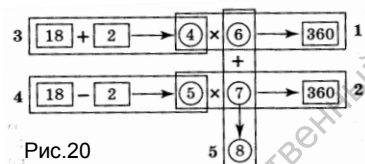


Рис.20

Обратите внимание на то, что некоторые значения величин входят в качестве членов в несколько соотношений. Так, 1-е значение входит в 1-е и во 2-е соотношения; 2-е значение входит в 3-е и 4-е соотношения и т.д.

Это будет нагляднее, если построить структурную модель этой задачи – рис.20.

Итак, $360 : (18 + 2) + 360 : (18 - 2) = 40,5(\text{ч})$. **Ответ:** 40,5 ч.

$S = 360 \text{ км/ч}$ $v_n = 60 \text{ км/ч}$ $t_n = 6 \text{ ч}$

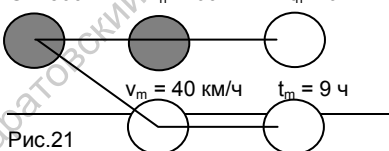


Рис.21

574. Путь от одной станции до другой товарный поезд прошел за 9 часов, а пассажирский за 6 часов. Найдите скорость пассажирского поезда, если скорость

¹ Фефилова Е.Ф. Теория и методика обучения математике: систематизация знаний и умений по решению сюжетных задач [Текст]: Учебное пособие / Е.Ф.Фефилова. – Архангельск: Поморский университет, 2004. – С.55.

² Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике. История, теория. Методика [Текст]: Учебн. пособие для учителей и студентов педвузов и колледжей / Л.М.Фридман. – М.: Школьная Пресса, 2002 – (Библиотека журнала «Математика в школе», вып.15). – С. 113-114]

товарного поезда равна 40 км/ч. [Л.Н.Харламова, элективный курс «Решение задач с помощью графов»¹].

Решение. Построим сетевой граф (Рис.21), на основании которого произведём вычисления: (1) $40 \cdot 9 = 360$, (2) $360 : 6 = 60$. Ответ: 60 км/ч.

Задачи III уровня (по 40 баллов). Решите задачи.

575. Дорожки в зоопарке образуют равносторонний треугольник, в котором проведены средние линии. Из клетки сбежала обезьянка. Её ловят два сторожа. Смогут ли они поймать обезьянку, если все трое будут бегать только по дорожкам, скорость обезьянки и скорости сторожей равны и они видят друг друга?

576. По окружности в одном направлении на равных расстояниях курсируют n поездов. На этой дороге в вершинах правильного треугольника расположены станции А, В и С (обозначенные по направлению движения). Ира входит на станцию А и одновременно Лёша входит на станцию В, чтобы уехать на ближайших поездах. Известно, что если они входят на станции в тот момент, когда машинист Рома проезжает лес, то Ира сядет в поезд раньше Лёши, а в остальных случаях Лёша — раньше Иры или одновременно с ней. Какая часть дороги проходит по лесу?

577. По шоссе мимо наблюдателя проехали "Москвич", "Запорожец" и двигавшаяся им навстречу "Нива". Известно, что когда с наблюдателем поравнялся "Москвич", то он был равноудален от "Запорожца" и "Нивы", а когда с наблюдателем поравнялась "Нива", то она была равноудалена от "Москвича" и "Запорожца". Докажите, что "Запорожец" в момент проезда мимо наблюдателя был равноудален от "Нивы" и "Москвича". (Скорости автомашин считаем постоянными. В рассматриваемые моменты равноудаленные машины находились по разные стороны от наблюдателя.)

578. В центре квадратного пруда плавает ученик. Внезапно к вершине квадрата подошел учитель. Учитель не умеет плавать, но ходит в 4 раза быстрее, чем ученик плавает. Ученик бежит быстрее. Сможет ли он убежать?

Творческое задание (100 баллов)

579. В чём различие информационных табличных моделей², описывающих задачи №562-565, от табличных моделей, описывающих задачи №566-568? Сформулируйте требования к составлению второго типа моделей. Какой класс задач они описывают?

580. Разработайте структуру информационной табличной модели, описывающей какой-либо класс геометрических задач «на вычисление длин, площадей, объемов».

¹ Программа элективного курса по математике «Решение задач с помощью графов» для 8-9 классов в рамках предпрофильной подготовки [Текст] / Под редакцией Л.Н.Харламовой. – Волгоград: Учитель, 2007.

² Происхождению этих информационных моделей автор данного Пособия обязана своей дочери Василине, которой до определённого времени никак не удавалось самостоятельно решать сюжетные задачи, и которая поневоле стала соавтором информационных табличных моделей, описанных в данном разделе

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
I. Понятие задачи	5
II. Множество	9
III. Конечные множества. Сюжетные комбинаторные задачи. Графический метод решения комбинаторных задач	20
IV. Бесконечные множества. Числовые множества. Множества натуральных и неотрицательных целых чисел	24
V. Числовые последовательности	38
VI. Делимость. Свойства делимости	46
VII. Расширение понятия числа. Рациональные числа. Отношения и пропорции. Проценты	55
VIII. Иррациональные числа. Логарифмы. Арифметика действительных чисел	64
IX. Систематические числа	68
X. Информационное моделирование сюжетных задач	78