

Министерство образования и науки РФ
Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского
Кафедра математики и методики её преподавания

С.В. Лебедева

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА:
Часть 4
Элементы комбинаторики, теории вероятностей и
математической статистики

Учебно-методическое пособие

Саратов, 2012

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р
Л 33

*Рекомендовано к печати
кафедрой математики и методики её преподавания
Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского*

Рецензент:

В.И.Игошин доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры геометрии Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского

Л 33

Лебедева С.В. Элементарная математика: Часть 4. Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики: Практико-ориентированное учебное пособие / С.В.Лебедева – Саратов, 2012. – 51 с.

Серийное оформление *С.В. Лебедевой*

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р

© С.В. Лебедева, 2012

Введение

Пособие содержит 315 задач контролирующего характера, рассчитанных на самостоятельное решение студентами второго курса, как на аудиторных занятиях, так и во внеаудиторной работе.

Система задач представлена пятью группами:

тестовые задания (162 задачи),

задачи I уровня сложности – математические алгоритмические (76 задач),

задачи II уровня сложности – математические эвристические (47 задач),

задачи III уровня сложности – практические (10 задач) и

творческие задания (24 задачи).

Тестовые задания имеют несколько вариантов ответа, среди которых находится один верный. Тестовые задания выполняются непосредственно в Пособии.

Задачи I уровня сложности можно считать тренировочными, так как их выполнение требует знания соответствующего теоретического материала и известных алгоритмов решения.

Задачи II уровня сложности требуют умелого сочетания ряда известных алгоритмов решения, а иногда и нестандартного подхода к задаче.

Задачи III уровня сложности требуют сформированности ряда компонентов информационной культуры, главным из которых можно считать умения, связанные с информационным (в том числе математическим) моделированием. Процесс оформления решения данного вида задач должен включать описание всех этапов информационного моделирования.

Задачи I-III уровней сложности выполняются в отдельной тетради и сдаются для проверки преподавателю до проведения зачёта.

Выполненное творческое задание представляет собой мультимедийный гипертекстовый документ и сдаётся на CD-диске.

Каждая задача имеет свой «вес» – V . Вес тестового задания – 10 баллов, вес задачи I уровня – 20 баллов, II уровня – 30 баллов, III уровня – 40 баллов, вес творческого задания – 100 баллов.

Для получения зачёта по дисциплине «Элементарная математика: элементы комбинаторики и теории вероятностей» студенту достаточно правильно выполнить 70% тестовых заданий (по каждой теме) и набрать дополнительно 500 баллов.

За каждое правильно решённое задание I-III уровня студент получает максимальное количество баллов V только в том случае, если он единственный из группы включает это задание в свою контрольную работу. В противном случае максимальное количество баллов V за правильно решённое задание, делится на количество решающих N , и каждый получает за это задание V/N баллов.

Задачи, решённые на аудиторных занятиях под руководством преподавателя, оцениваются в 1 балл.

В качестве методической поддержки обучающихся в Пособии предусмотрен теоретический материал и образцы рассуждения и оформления некоторых типов задач, предваряющие систему задач по каждой теме курса.

Рабочей программой предусмотрена контрольная работа «Элементы математической статистики».

Задание 1. После группировки данных эксперимента получилась такая таблица их распределения.

Варианта	-3	0	4	5	9	11	12	15	20
Кратность варианты	12	9	1	64	34	56	7	8	9
Частота варианты									
Частота варианты в %									

(а) Определите объём выборки.

(б) Найдите наиболее часто встретившуюся варианту.

(в) Заполните таблицу.

(г) Найдите сумму чисел в III и IV строках.

(д) Постройте многоугольник процентных частот.

(е) Постройте гистограммы распределения кратностей и частот

(ж) Какова частота множества всех чётных по величине вариант? Всех нечётных по порядку возрастания вариант?

(з) Приблизительно постройте круговое распределение частот.

(и) Определите моду, размах, среднее арифметическое выборки и укажите все эти характеристики на графике.

Задание 2. Какое место отводится статьям по математической статистике в периодических изданиях (изучите, например, материалы журнала «Математика в школе», сайта ИД «1 сентября»: фестиваль «Открытый урок» и др. издания), посвященных методике обучения математике? Соберите данные, проведите статистическую обработку полученных результатов.

Задание 3. Каково место математической статистики в рамках стохастической линии (включает помимо элементов математической статистики, теорию вероятностей и комбинаторику) школьного курса математики? Проведите (по материалам периодических изданий, посвященных методике обучения математике) сравнительный анализ и статистическую обработку полученных результатов.

Задание 4. Приведите (с решением) типичные для школьного курса математики задания по математической статистике.

Задание контрольной работы для внеаудиторного выполнения выдаётся в начале изучения модуля. Срок выполнения работы – 5 недель.

I. Правила комбинаторики

Правило нахождения числа элементов объединения n непересекающихся конечных множеств называют *правилом суммы*, которое на языке комбинаторики звучит следующим образом:

Если объект a_1 можно выбрать x_1 способом,

объект a_2 можно выбрать x_2 способом,

объект a_n можно выбрать x_n способом,

то объект (a_1 или a_2 или ... или a_n) можно выбрать $\sum_n x_n$ способом.

Правило нахождения числа элементов объединения двух пересекающихся конечных множеств называют *правилом перекрытия*, которое на языке комбинаторики звучит следующим образом:

Пусть $n(A)$ – число выборов объекта a из множества A ,

$n(B)$ – число выборов объекта b из множества B ,

$n(A \cap B)$ – число выборов объекта из множества $A \cap B$,

тогда $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ – число выборов объекта из объединения двух пересекающихся конечных множеств.

Правило нахождения числа элементов декартова произведения n конечных множеств называют *правилом произведения*, которое на языке комбинаторики звучит следующим образом:

Если объект a_1 можно выбрать x_1 способом,

объект a_2 можно выбрать x_2 способом,

объект a_n можно выбрать x_n способом,

то упорядоченную n -ку $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ можно выбрать $\prod_n x_n$ способом.

Тестовые задания (по 10 баллов)

1. В урне – разноцветные шары пронумерованные от 1 до 25 включительно. Пятая часть из них синего цвета, остальные – белые. Сколько есть способов выбора синего шара?

а) 5 в) 20 г) 100

2. В урне – разноцветные шары пронумерованные от 1 до 25 включительно. Пятая часть из них синего цвета, остальные – белые. Сколько есть способов выбора белого шара?

а) 5 в) 25 г) 100

3. В урне – разноцветные шары пронумерованные от 1 до 25 включительно. Пятая часть из них синего цвета, остальные – белые. Сколькими способами можно выбрать шар?

а) 5 в) 25 г) 100

4. В урне – разноцветные шары пронумерованные от 1 до 25 включительно. Пятая часть из них синего цвета, остальные – белые. Сколько есть способов выбора шара с двузначным номером?

- а) 10 б) 15 в) 16 г) 25

5. В урне – разноцветные шары пронумерованные от 1 до 25 включительно. Пятая часть из них синего цвета, остальные – белые. Сколько есть способов выбора пары разноцветных шаров?

- а) 5 б) 20 в) 25 г) 100

6. В урне – разноцветные шары пронумерованные от 1 до 25 включительно. Пятая часть из них синего цвета, остальные – белые. Сколько есть способов выбора пары шаров, один из которых – с однозначным номером, а другой – с двузначным?

- а) 25 б) 100 в) 144 г) 150

7. Сколько существует чисел вида $\overline{abcba}$?

- а) 900 б) 1000 в) 81000 г) 100000

8. Сколько существует чисел вида $\overline{ababc}$?

- а) 900 б) 1000 в) 81000 г) 100000

9. Сколько существует чисел вида $\overline{aaabc}$?

- а) 900 б) 1000 в) 81000 г) 100000

10. Сколько существует чисел вида $\overline{abcde}$?

- а) 900 б) 1000 в) 90000 г) 100000

11. Сколько существует чисел вида $\overline{ab5bc}$?

- а) 900 б) 1000 в) 9000 г) 10000

12. Сколько существует чисел вида $\overline{7babc}$?

- а) 900 б) 1000 в) 9000 г) 10000

13. Сколько существует чисел вида $\overline{abab9}$?

- а) 90 б) 900 в) 8100 г) 10000

14. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8?

- а) 15 б) 100 в) 125 г) 3125

15. Сколько существует сумм двузначного и однозначного числа, составленных с помощью цифр 0, 2, 4, 6, 8?

- а) 15 б) 24 в) 80 г) 100

16. Сколькими способами можно выбрать цифру из алфавита шестнадцатеричной системы счисления?

- а) 1 б) 9 в) 10 г) 16

17. Сколькими способами можно составить двузначное число в шестнадцатеричной системе счисления?

- а) 16 б) 32 в) 90 г) 240

18. Сколькими способами можно выбрать цифру из алфавита шестеричной системы счисления?

- а) 1 б) 6 в) 9 г) 10

19. Сколькими способами можно составить трёхзначное число в шестеричной системе счисления?

- а) 18 б) 180 в) 216 г) 900

20. Сколькими способами можно выбрать цифру из алфавита четверичной системы счисления $\{0, 1, 2, 3\}$ и двенадцатеричной системы счисления $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C\}$?

- а) 1 б) 4 в) 12 г) 16

21. Сколькими способами можно выбрать цифру из алфавита четверичной системы счисления $\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ и двенадцатеричной системы счисления $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C\}$?

- а) 1 б) 4 в) 12 г) 16

22. Творческое задание (100 баллов). Комбинаторика – раздел математики, в котором изучают вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. С такими вопросами люди столкнулись ещё в глубокой древности. Несколько тысячелетий назад в Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов, в которых заданные числа располагались так, что их сумма по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям была одной и той же. Исследуйте историю этого вопроса. Приведите примеры таких квадратов и опишите процедуру их составления.

23. Творческое задание (100 баллов). В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел. Что вам известно о фигурных числах? Какие математические задачи решаются в рамках этой теории? Приведите примеры.

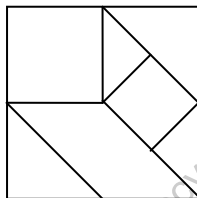


Рис.1

24. Творческое задание (100 баллов). В Древней Греции изучали фигуры, которые можно составить из частей особым образом разрезанного квадрата. Сейчас это популярная игра, развивающая соображение и смекалку. Как называется эта игра? Приведите не менее 100 возможных узнаваемых фигур, составленных частей квадрата (Рис.1).

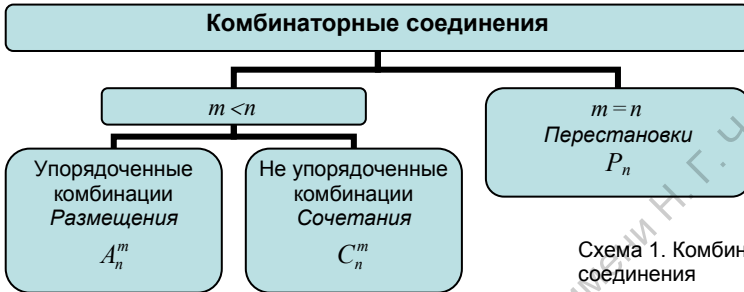
25. Творческое задание (100 баллов).

Комбинаторные задачи возникали и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. что вам известно об истории возникновения и решении следующих задач. (1) обойти конём все поля доски, посетив каждое из них по одному разу. (2) Сколькими способами можно расставить на доске восемь ладей? Сформулируйте и приведите решения аналогичных задач, составленных для других шахматных фигур, первый класс задач при этом можно усилить дополнительным условием замкнутости маршрутов.

II. Комбинаторные соединения

Общим именем *комбинаторные соединения* принято называть три типа комбинаций $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, составляемых из некоторого числа n ($m \leq n$) различных элементов.

Проведём последовательно дихотомическую классификацию комбинаторных соединений.



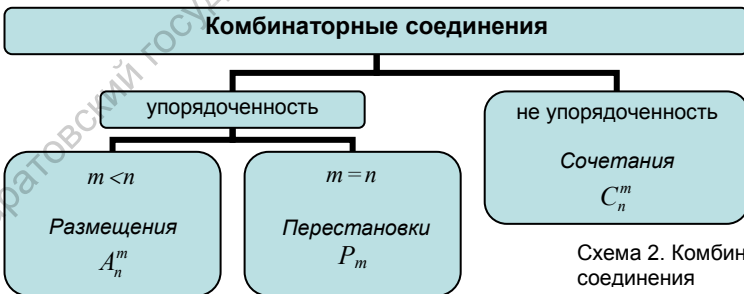
Соединения, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком, каждое из которых содержит m элементов, взятых из n различных элементов ($m < n$), называются *размещениями из n элементов по m* .

Соединения, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом, каждое из которых содержит m элементов, взятых из n различных элементов ($m < n$), называются *сочетаниями из n элементов по m* .

Соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых в определённом порядке, называются *перестановками из n элементов*.

Обозначения комбинаторных соединений даны в схеме 1.

Если поменять очерёдность оснований классификации, то классификационная схема примет вид схемы 2.



Для большей наглядности составим двухмерную модель классифицирования комбинаторных соединений (схема 3) и алгебраическую модель:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m \quad (I).$$



Схема 3. Комбинаторные соединения

Тестовые задания (по 10 баллов). Для того, чтобы успешно решать текстовые комбинаторные задачи необходимо уметь определять, о каких комбинаторных соединениях идёт речь в конкретной задаче.

Определите вид комбинаторного соединения.

26. Сколько всего семизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

27. Сколько всего шестизначных чётных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 5, 7 и 9, если в каждом из этих чисел ни одна цифра не повторяется?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

28. Сколькими способами шесть книг разных авторов можно поставить на полке в один ряд?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

29. Сколькими способами читатель может выбрать три книги из шести имеющихся?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

30. В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд. Разыгрывается три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось указать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

31. В группе 20 студентов. Профессор решил каждому студенту задавать по одному из 25 каверзных вопросов. Сколько есть возможностей провести опрос в группе?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

32. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно назначать двух дежурных. б) выбрать 28 человек для осеннего кросса.

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

33. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать 28 человек для осеннего кросса.

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

34. Сколько пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 и 5 так, чтобы последней была цифра 4, а первой 3?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

35. В 5 классе девять предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть шесть разных уроков?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

36. В колоде 36 карт. Раздаются три карты. Сколькими способами это можно сделать?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

37. В профком избраны пять человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

38. В прошлые века процветала генуэзская лотерея, сохранившаяся в некоторых странах и поныне. Участники этой лотереи покупали билеты, на которых стояло число от 1 до 90. Можно было купить и билеты, на которых было сразу 2, 3, 4 и 5 чисел. В день розыгрыша лотереи из мешка, содержащего жетоны с числами от 1 до 90, вынимали пять жетонов. Выигрывали те, у которых все номера на билетах были среди вынутых. Если участник лотереи покупал билет с одним числом, то он получал при выигрыше в 15 раз больше стоимости билета; если с двумя числами (амбо), то в 270 раз больше, если с тремя числами (терн) – в 5500 раз больше, если с четырьмя числами (катерн) – в 75000 раз больше, а если с пятью числами (квин) – в 1000000 раз больше, чем стоил билет. Сколько «счастливых» билетов при игре, когда участник купил билет с одним числом?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

39. В сборную по футболу входит 15 футболистов, один из которых вратарь. Сколькими способами тренер может выбрать команду для участия в матче?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

40. В турнире по шахматам каждый участник сыграл с каждым по одной партии, всего было сыграно 36 партий. Определите число участников турнира.

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

41. Сколько пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 и 5 так, чтобы первой была цифра 2, а второй 3?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

42. В цехе работают восемь токарей. Сколькими способами можно поручить трём из них изготовление трёх различных видов деталей (по одному виду на каждого)?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

43. В чемпионате по футболу участвуют десять команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

44. Дама сдавала в багаж семь предметов. Все они оказались украденными, но два каких-либо (по её выбору) ей согласились поискать. Сколько у неё у неё есть возможностей выбрать два любимых предмета?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

45. За столом пять мест. Сколькими способами можно рассадить пятерых гостей?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

46. Из 17 учеников 8 класса и 13 учеников 9 класса выбирают команду в количестве шести человек (четыре ученика от 8 класса и два ученика от 9 класса). Сколькими способами это можно сделать?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

47. Из ведра, в котором находится 27 роз, выбирают букет из семи роз. Сколькими способами может быть выбран букет?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

48. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из четырёх человек для участия в эстафете на 100+200+400+800 (м). Сколькими способами это можно сделать?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

49. Имеется 10 книг, среди которых восемь книг разных авторов и двухтомник С.А.Есенина. Сколько вариантов расстановки книг на полке?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

50. Из десяти различных книг выбирают четыре для посылки. Сколькими способами это можно сделать?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

51. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули десять карт. Сколькими разными способами это можно сделать?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

52. Имеется 10 книг, среди которых семь книг разных авторов и трёхтомник восьмого автора. Сколько вариантов расстановки книг на полке, при условии, что три тома восьмого автора должны стоять рядом в порядке: I том, II том, III том?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

53. На вечер пришли десять одиннадцатиклассников, девять десятиклассников и восемь девятиклассников. Сколькими способами из них можно составить команду из шести человек (по два человека от каждого класса)?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

54. Сколькими способами можно переставить друг с другом цифры 1, 2, 3 и 4?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

55. Рота состоит из трёх офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

56. Сколькими различными способами можно распределить между шестью лицами две различные путёвки в санаторий?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

57. Сколькими способами в игре «Спортлото» можно набрать шесть номеров из 49?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

58. Сколькими способами можно выбрать пять делегатов из участников конференции, на которой присутствуют 15 человек?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

58. Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы А, В, С, D, Е и F?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

60. Сколькими способами можно посадить за круглый стол пять мужчин и пять женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

61. Сколькими способами можно поставить восемь шашек на чёрные поля доски?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

62. Сколькими способами можно опустить пять писем в 11 почтовых ящиков, если в каждый ящик опускается не более одного письма?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

63. Сколькими способами можно поставить на черные поля 12 белых и 12 чёрных шашек?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

64. Сколькими способами можно присудить шести лицам три одинаковые премии?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

65. Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на который поставлено 12 приборов?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

66. Сколькими способами можно распределить две одинаковые путёвки между пятью лицами?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

67. Сколькими способами можно составить команду из четырёх человек для участия в соревнованиях по бегу, если имеется семь бегунов?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

68. Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди семи учащихся группы в течение семи дней?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

69. Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что ни одна из них не повторяется?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

70. Сколько пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 и 5 так, чтобы последней была цифра 4?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

71. Сколько существует четырёхзначных номеров с неповторяющимися цифрами и не содержащими цифры 0, 5 и 8?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

72. В колоде 54 карты. Раздаются три карты. Сколькими способами это можно сделать?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

73. У Лены есть восемь различных красок. Она хочет написать ими слова «Новый год». Сколькими способами она может это сделать, если собирается каждую букву раскрашивать одним цветом и все восемь букв должны быть разными по цвету?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

74. У одного человека есть 11 книг по математике, у другого 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по три книги для обмена?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

75. У ювелира есть пять изумрудов, восемь алмазов и семь топазов. Сколькими способами он может сделать браслет, включив в него два изумруда, три алмаза и два топаза, если все камни одинаковы по форме и размеру?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

76. Остап Бендер размышляет, за каким стулом (они расположены в разных местах) из 12 отправиться сначала, за каким потом и т.д. Сколько тут есть возможностей?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

77. Сколькими способами можно выбрать президиум председателя и секретаря, если на собрании присутствует 78 человек?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

78. Сколькими способами можно составить дозор из трёх солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

- а) размещение б) сочетание в) перестановка

79. Творческое задание (100 баллов). Первые работы по комбинаторике выполнены в XVI веке итальянскими учёными Дж.Кардано, Н.Тартальей и Г.Галилеем.

Какие задачи, связанные с комбинаторикой, решали эти учёные? В чём суть их работ?

80. Творческое задание (100 баллов). Комбинаторика становится наукой лишь в XVII веке, когда возникла теория вероятностей. Чтобы решать теоретико-вероятностные задачи, нужно было уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям.

После первых работ, выполненных в XVI веке итальянскими учёными Дж.Кардано, Н.Тартальей и Г.Галилеем, такие задачи изучали французские математики Б.Паскаль и П.Ферма.

Охарактеризуйте вклад этих учёных в развитие комбинаторики.

III. Задачи о числе комбинаторных соединений

Задача о числе размещений: сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m различных элементов из n возможных?

Количество всех таких способов обозначают A_n^m .

Выведем формулу для нахождения A_n^m , используя индукцию.

$A_n^1 = n$ (на одно место можно поместить один из n возможных элементов).

Так как один элемент мы уже использовали, у нас для дальнейшего размещения осталось $n-1$ элементов.

$A_n^2 = n(n-1)$ (на второе место можно поместить один из $n-1$ оставшихся элементов; на первые два места, по правилу произведения, можно разместить $n \cdot (n-1)$ элемент). Так как два элемента мы уже использовали, у нас для дальнейшего размещения осталось $n-2$ элементов.

$A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ (на третье место можно поместить один из $n-2$ оставшихся элементов; на первые три места, по правилу произведения, можно разместить $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ элемента). Так как три элемента мы уже использовали, у нас для дальнейшего размещения осталось $n-3$ элементов.

Рассуждая аналогично, получаем формулу для нахождения A_n^m .

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-(m-1)) \quad (\text{II})$$

Задача о числе перестановок: сколькими способами можно переставить n различных элементов по n различным местам?

Количество всех таких способов обозначают P_n .

$P_1 = 1$ (переставить один элемент можно одним способом).

$P_2 = 2 \cdot 1$ (переставить два элемента, по правилу произведения, можно $2 \cdot 1$ способами).

$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ (переставить три элемента, по правилу произведения, можно $3 \cdot 2 \cdot 1$ способами).

Рассуждая аналогично, получаем формулу для нахождения P_n .

$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots 1 \quad (\text{III})$$

Часто формулу для подсчёта числа перестановок записывают так:

$$P_n = n! \quad (\text{IV})$$

Легко можно установить связь между числом размещений и числом перестановок:

$$A_n^n = P_n \quad (\text{V})$$

$$A_n^m = \frac{P_n}{(n-m)!} \quad (\text{VI})$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (\text{VII})$$

Задача о числе сочетаний: сколькими способами можно выбрать m из n различных элементов?

Количество всех таких способов обозначают C_n^m и вычисляют руководствуясь определениями комбинаторных соединений (I) и формулами

$$(II)-(VII): \quad C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad (VIII)$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} \quad (IX)$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(m-1))}{m!} \quad (X)$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (XI)$$

Тестовые задания (по 10 баллов).

81. У жителей планеты АХО в алфавите три буквы: А, О, Х. Слова в языке состоят не более чем из трех букв (буква в слове может повторяться, но две одинаковые буквы не могут стоять рядом). Какое наибольшее количество слов может быть в словаре жителей этой планеты?

- а) 21 б) 27 в) 39 г) 93

82. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?

- а) 4 б) 16 в) 24 г) 256

83. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

- а) 7 б) 12 в) 24 г) 81

84. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в олимпиаде?

- а) 21 б) 42 в) 49 г) 50400

85. Сколько существует выражений, тождественно равных произведению $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ по ассоциативному закону умножения?

- а) 4 б) 16 в) 119 г) 120

86. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 5, 7 (без их повторения).

- а) 8 б) 24 в) 56 г) 120

87. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц забега?

- а) 16 б) 24 в) 64 г) 336

88. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третьим?

- а) 2730 б) 910 в) 455 г) 45

89. Сколько существует перестановок букв слова "конус", в котором буквы к, о, н стоят рядом?

- а) 6 б) 10 в) 36 г) 120

91. Учащимся дали список из 10 книг. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

- а) 60 б) 210 в) 210 г) 17700

92. На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные места 2 фотографии?

- а) 6 б) 12 в) 15 г) 30

93. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если заведующий должен ехать в командировку?

- а) 210 б) 252 в) 330 г) 462

94. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если заведующий должен остаться?

- а) 210 б) 252 в) 330 г) 462

95. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если заведующий должен остаться?

- а) 55 б) 110 в) 165 г) 220

Задачи I уровня (по 20 баллов). Найти значение выражения

96. $A_6^2 + A_6^4$

97. $C_{25}^{22} - C_{15}^{13} + 3C_{10}^7$

98. $\frac{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} - \frac{A_{17}^{10} + A_{17}^9}{A_{17}^8}$

99. $\frac{A_3^3 - A_5^2}{P_2} - \frac{P_5}{P_2}$

100. $\left(\frac{P_5}{A_5^4} + \frac{P_4}{A_5^3} + \frac{P_3}{A_5^2} + \frac{P_2}{A_5^1} \right) \cdot A_5^2$

101. $\frac{C_{21}^4}{C_{19}^3 + C_{19}^4 + C_{20}^3}$

102. $C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1 + C_3^1 C_2^0$

103. $P_1 A_2^1 + P_2 A_3^2 + P_3 A_4^3 + P_4 A_5^4 - P_1 P_2 P_3 P_4$

104. $\frac{\frac{1}{3} C_6^2 - \frac{1}{28} C_8^3 + \frac{1}{65} C_{15}^3}{P_3 A_5^3}$

105. $\frac{1 + C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{1 + C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \frac{A_3^2}{P_2}$

Задачи I уровня (по 20 баллов). Решить

106. $A_n^2 = 12$

107. $A_n^3 + 3A_n^2 = 0,5P_n$

108. $C_n^{n-2} + 2n = 9$

109. $55A_{n+1}^2 = 12C_{n+3}^{n-1}$

110. $A_{n-1}^2 - C_n^1 = 79$

111. $C_n^5 < C_n^3$

112. $C_{13}^{n+2} < C_{13}^n$

113. $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leq 100$

114. $C_{n+5}^4 - \frac{143P_{n+5}}{96P_{n+3}} < 0$

115. $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$

Задачи II уровня (по 30 баллов). Доказать

116. $A_{n+m}^{n+2} + A_{n+m}^{n+1} = m^2 \cdot A_{n+m}^n$ 117. $A_{n-1}^m + m \cdot A_{n-1}^{m-1} = A_n^m$
118. $C_n^m = C_n^{n-m}$ 119. $C_n^m = C_{m-1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m+1}^{m-1} + \dots + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1}$
120. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ 121. $P_m \cdot A_{n+1}^2 \cdot A_{n+3}^2 \cdot A_{n+5}^2 = m! \cdot n! \cdot A_{n+5}^5$
122. $m \cdot C_n^m = n \cdot C_{n-1}^{m-1}$ 123. $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}$
124. $C_n^m = C_{n+1}^m - C_{n+1}^{m-1}$ 125. $C_n^m + 3C_n^{m+1} + 3C_n^{m+2} + C_n^{m+3} = C_{n+3}^{m+3}$
126. $C_{n+1}^{m+1} = \frac{n+1}{m+1} C_n^m$ 127. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$

Задачи III уровня (по 40 баллов).

128. Сколько есть способов заполнить карточки лотереи «Спортлото: 6 из 49»? Пусть участники лотереи заполнили карточки таким образом, что нет двух одинаковых вариантов заполнения. Сколько из участников отгадают все 6 номеров, 5 номеров, 4 номера, 3 номера, 2 номера, 1 номер?

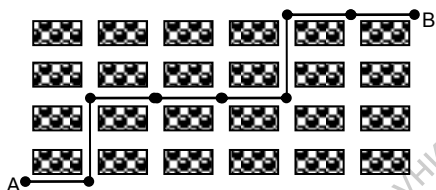


Рис. 2

Путник хочет попасть из пункта А в пункт В кратчайшим путем, то есть двигаясь все время или «слева направо», или «снизу вверх». Сколькими путями он может добраться из А в В?

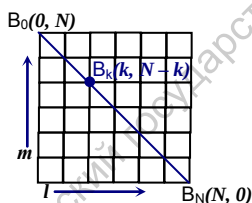


Рис. 3

пунктов?

131. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И.С.Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов? Решите

ту же задачу, если, кроме того, в магазине есть 3 тома, содержащие романы «Рудин» и «Отцы и дети», и 5 томов, содержащих все три романа.

132. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, немецкого, английского, французского, итальянского, на любой другой из этих пяти языков. На сколько больше словарей придется издать, если число различных языков равно 10?

133. На железнодорожной станции имеется n светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов при помощи этих светофоров, если каждый светофор имеет три состояния: горит либо зеленый, либо желтый, либо красный свет. Решите ту же задачу, если допускаются всевозможные комбинации огней каждого светофора (например, горят зеленый и красный огни всех светофоров).

134. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

135. Имеется n абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить три пары абонентов?

136. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

137. Компания па 7 юношей и 10 девушек танцует. Сколько имеется вариантов участия девушек в танце, в котором танцуют все юноши? Сколько имеется вариантов, если учитывать лишь то, какие девушки остались неприглашёнными? Ответьте на те же вопросы, если относительно двух девушек можно с уверенностью сказать, что они будут приглашены на танец.

138. Творческое задание (100 баллов). Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий философ и математик Г.Лейбниц, опубликовавший в 1666 году работу «Об искусстве комбинаторики», где впервые появляется сам термин «комбинаторный». Какие приложения комбинаторики описывал двадцатилетний Готфрид Лейбниц в своей работе?

139. Творческое задание (100 баллов). В 1713 году была опубликована книга «Искусство предположений» Якоба Бернулли, в которой указывались формулы для числа размещений из n элементов по m , выводились выражения для степенных сумм и ... что ещё?

140. Творческое задание (100 баллов). Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат одному из величайших математиков XVIII века Леонарду Эйлеру. Основная часть научной работы Эйлера посвящена математическому анализу, но размышлял он и о задачах, которые, казалось бы, не заслуживали его внимания, – о том, можно ли обойти мосты в Кенигсберге (ныне Калининграде) так, чтобы не побывать дважды на одном и том же мосту, можно ли поставить 36 офицеров из 6 разных полков так, чтобы в каждой шеренге и каждой колонне было по одному офицеру каждого воинского звания из каждого полка, сколькими способами можно разбить данное число на слагаемые и т.д. Какие решения предлагал великий математики для этих задач?

IV. Комбинаторные соединения с повторениями

Задача о числе размещений с повторениями: сколькими способами можно разместить по m различным местам любые m элементов, выбранных из n различных элементов, с повторениями каждого из них любое число раз, но не более m ?

Количество всех таких способов обозначают $A_n^m(n)$.

Выведем формулу для нахождения $A_n^m(n)$, используя индукцию по m .

$A_n^1(n) = n = n^1$ (на одно место можно поместить один из n возможных элементов).

$A_n^2(n) = n \cdot n = n^2$ (на второе место также можно поместить один из n элементов; на первые два места, по правилу произведения, можно разместить $n \cdot n$ элементов).

$A_n^3(n) = n \cdot n \cdot n = n^3$ (на третье место можно поместить один из n возможных элементов; на первые три места, по правилу произведения, можно разместить $n \cdot n \cdot n$ элементов).

Рассуждая аналогично, получаем формулу для нахождения $A_n^m(n)$:

$$A_n^m(n) = n^m \quad (\text{XII})$$

Задача о числе перестановок с повторениями: сколькими способами можно переставить n элементов m различных типов каждого типа соответственно по $n_1, n_2, \dots, n_m$ одинаковых элементов, расположенных на n различных местах?

Количество всех таких способов обозначают $P_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Выведем формулу для нахождения $P_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$, исключив из общего числа перестановок P_n все возможные перестановки каждого из m различных типов, поскольку их элементы не различимы:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!} \quad (\text{XIII})$$

Задача о числе сочетаний с повторениями: сколькими способами можно выбрать m элементов из $m \cdot n$ элементов (m одинаковых элементов из n различных типов элементов)?

Количество всех таких способов обозначают $C_n^m(n)$, и оно может быть вычислено по формуле:

$$C_n^m(n) = \frac{(m+n-1)!}{m! \cdot (n-1)!} = C_{m+n-1}^m \quad (\text{XIV})$$

Тестовые задания (по 10 баллов). Определите вид комбинаторного соединения, описанного в задачах.

141. Каждый телефонный номер состоит из семи цифр. Сколько всего телефонных номеров, не содержащих других цифр, кроме 1, 3, 5, 7?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

142. Сколькими способами можно расположить в ряд две зелёные и четыре красные лампочки?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

143. Лифт, в котором находится восемь пассажиров, останавливается на шести этажах. Пассажиры выходят группами по одному, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти, если на каждом этаже может войти только одна группа пассажиров, при этом порядок выхода пассажиров одной группы не имеет значения?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

144. Сколькими способами можно выбрать четыре монеты из четырёх рублёвых монет и четырёх двухрублёвых монет?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

145. Сколькими способами можно разместить восемь пассажиров в три вагона?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

146. В кондитерской имеется пять разных сортов пирожных. Сколькими способами можно выбрать набор из четырёх пирожных?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

147. Сколькими способами можно распределить семь молодых специалистов в области образования по трём райцентрам, которым соответственно нужны один, два и четыре специалиста?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

148. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «комбинаторика», чтобы получились всевозможные различные наборы букв?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

149. Сколькими способами можно упаковать девять различных книг в трёх бандеролях соответственно по две, три и четыре книги в каждой бандероли?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

150. Сколько всего чисел можно составить из цифр 9, 8, 7, 6, 5, в каждом из которых цифры расположены в неубывающем порядке?

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| а) размещение с повторениями | б) перестановка с повторениями | в) сочетание с повторениями |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

151. Сколько десятизначных чисел можно записать в двоичной системе счисления?

а) размещение с повторениями

б) перестановка с повторениями

в) сочетание с повторениями

152. Сколько всего семизначных чисел, у каждого из которых цифра 6 встречается три раза, а цифра 5 – четыре раза?

А) размещение с повторениями

б) перестановка с повторениями

в) сочетание с повторениями

153. Сколько будет костей домино, если использовать в их образовании все цифры десятичной системы счисления?

а) размещение с повторениями

б) перестановка с повторениями

в) сочетание с повторениями

154. Десять человек надо разбить на три группы, соответственно по 2, 3 и 5 человек в группе. Сколькими способами это можно сделать?

А) размещение с повторениями

б) перестановка с повторениями

в) сочетание с повторениями

155. Задачи I уровня (по 20 баллов). Решите задачи 141-154*.

156. Творческое задание (100 баллов). Комбинаторика находит приложения во многих областях науки: в биологии, химии, механике, экономике. Приведите примеры применения комбинаторики в перечисленных областях знания.

157. Творческое задание (100 баллов). Что Вам известно о проблеме раскрашивания карты в четыре цвета?

158. Творческое задание (100 баллов). Что Вам известно о головоломке Эрне Рубика? Сформулируйте задачи, связанные с этой головоломкой. Приведите алгоритмы решения поставленных задач.

159. Творческое задание (100 баллов). Какое отношение к комбинаторике имеет теория графов?

160. Творческое задание (100 баллов). Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных размышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали все более и более сложные шифры, а секретные службы других государств пытались эти шифры разгадать. Одним из простейших шифров была «тарабарская грамота», в которой буквы заменялись другими по определенным правилам. Однако такие шифры легко разгадывались по характерным сочетаниям букв. Поэтому стали применять шифры, основанные на комбинаторных принципах, например, на различных перестановках букв, заменах букв с использованием ключевых слов и т.д. Приведите примеры таких шифров.

* За каждую решённую задачу Вы получите 20 баллов. Задачи следует помечать двойной нумерацией, например, 155-141, 155-142 и т.д.

В. Бином Ньютона

Бином Ньютона – название формулы, выражающей степень двучлена в виде суммы одночленов: для каждого натурального n и любых a и b

справедливо равенство
$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m \quad (XV)$$

Для удобства равенство часто записывают в «развёрнутом» виде (XVI):

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

При $n=1$ получаем известное тождество: $a+b = a+b$.

При $n=2$ получаем формулу квадрата суммы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

При $n=3$ получаем формулу куба суммы: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Биномиальные коэффициенты – коэффициенты C_n^m в разложении бинома – образуют так называемый треугольник Паскаля.

n	C_n^m														
0	1														
1					1					1					
2						1									
3				1			3			3	1				
4					1			6			4	1			
5			1			5			10			5	1		
6		1		6			15			20		15		6	1
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	1		C_n^1		C_n^2		...		...		C_n^{n-2}		C_n^{n-1}		1

Перечислим наиболее важные свойства разложения бинома.

1. Количество всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома.

2. Сумма показателей степеней a и b каждого члена разложения равна показателю степени бинома, то есть n .

3. Общий член разложения имеет вид $T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m$, где $m=0, 1, \dots, n$.

4. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой (симметричны).

5. Каждый биномиальный коэффициент C_n^m в разложении бинома, начиная со второго, равен предшествующему C_n^{m-1} , умноженному на $\frac{n-(m-1)}{m}$.

6. Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n :

$$2^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \quad (XVII).$$

7. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на нечётных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на чётных местах, и равна 2^{n-1} .

Тестовые задания (по 10 баллов).

161. Тринадцатый член разложения бинома $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{15}$ равен

- а) $\sqrt[3]{3} \cdot 6720$ б) 20160 в) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt{2} \cdot 6720$ г) 87360

162. Пятый член разложения бинома $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^{12}$ равен

- а) $\frac{88a^2}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{44}{9}$ в) $55a^2$ г) $\frac{143a^2}{\sqrt{3a}}$

163. Седьмой член разложения бинома $\left(a^2\sqrt{a} + \frac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^9$ равен

- а) $36 \cdot \sqrt[3]{a}$ б) $84a^3 \cdot \sqrt{a}$ в) $36a^{14} \cdot \sqrt[6]{a}$ г) $84a^{13}$

164. Значение выражения $(\sqrt{6} + \sqrt{12})^4$ равно

- а) 180 б) $144\sqrt{6}$ в) $720\sqrt{12}$ г) $612 + 432\sqrt{2}$

165. Значение выражения $(\sqrt{12} - \sqrt{2})^6$ равно

- а) 1720 б) $960\sqrt{6}$ в) $6776 - 2736\sqrt{6}$ г) $2736\sqrt{6} - 6776$

166. В биномиальном разложении $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{12}$ коэффициент при a^8 равен

- а) 12 б) 66 в) 220 г) 495

167. В биномиальном разложении $\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^{12}$ коэффициент при a^4 равен

- а) $-\frac{55}{9}$ б) $\frac{55}{9}$ в) -495 г) 495

168. В биномиальном разложении $\left(\frac{a}{3} + \frac{\sqrt{3}}{a}\right)^8$ член не содержащий a равен

- а) $\frac{70}{9}$ б) $\frac{70}{3}$ в) 56 г) 70

169. В биномиальном разложении $\left(2a + \frac{1}{a}\right)^{10}$ член не содержащий a равен

- а) 32 б) 252 в) 504 г) 8064

170. В биномиальном разложении $\left(a + \frac{2}{a}\right)^{10}$ член не содержащий a равен

- а) 32 б) 252 в) 504 г) 8064

Задачи I уровня (по 20 баллов).

171. Найти шестой член разложения $(1-2x)^{21}$.
172. Найти пятый член разложения $(\sqrt{z}+z)^{10}$.
173. Найти сумму второго и предпоследнего членов разложения $(\sqrt{3}+\sqrt{24})^7$.
174. Найти два средних члена разложения $(a^3+ab)^{21}$.
175. Найти сумму двух средних членов разложения $(a^3+ab)^{31}$.
176. Разложить бином $(a-\sqrt{2})^6$ и упростить.
177. Разложить бином $\frac{1}{27}(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6$ и упростить.
178. Найти номер члена разложения бинома $\left(\frac{1}{z^3}+z\right)^{16}$, не содержащего z .
179. Найти коэффициент в разложении бинома $\left(\frac{1}{x^3}+x^2\right)^{14}$, при x^3 .
180. Найти коэффициент в разложении бинома $\left(\frac{1}{y^2}+\sqrt{y}\right)^9$, при y^2 .

Задачи II уровня (по 30 баллов).

181. Найти номер наибольшего члена разложения $(1+0,001)^{1000}$.
182. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$?
183. Найти число x , если известно, что третий член разложения $(x+x^{lg x})^5$ по формуле Ньютона равен 10^6 .
184. Пусть $(x-2)^{100}=a_0+a_1 \cdot x+a_2 \cdot x^2+\dots+a_{100} \cdot x^{100}$. Найти $\sum_{i=0}^{100} a_i$.
185. Пусть $(1+2x+3x^2)^{10}=a_0+a_1 \cdot x+a_2 \cdot x^2+\dots+a_{20} \cdot x^{20}$. Найти a^4 .
186. Найти шестой член разложения бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$, если отношение биномиального коэффициента четвёртого члена к биномиальному коэффициенту третьего члена равно $10/3$.
187. Найти сумму биномиальных коэффициентов членов, стоящих на чётных местах в разложении бинома $(x+y)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена на 9 больше биномиального коэффициента второго члена.

188. Найти четвёртый член разложения бинома $\left(x^2\sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^n$, если

биномиальный коэффициент третьего члена равен 36.

189. Сколько членов разложения бинома $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{5})^{24}$ являются целыми числами?

190. В разложении бинома $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2^4\sqrt{x}}\right)^n$ первые три коэффициента

образуют арифметическую прогрессию. Найти все его члены, в каждом из которых показатель степени основания x есть некоторое натуральное число.

191. Творческое задание (100 баллов). В 1664-1665 гг. И.Ньютон установил, что формула (XVI) обобщается на случай рациональных показателей, но при этом получается сумма из бесконечного множества слагаемых. Что вам об этом известно? Какое отношение к разложению бинома имеет формула нахождения суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$1 + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \text{ для } |x| < 1?$$

192. Творческое задание (100 баллов). Как связаны между собой последовательность Фибоначчи и треугольник Паскаля?

193. Творческое задание (100 баллов). Какая связь между треугольными числами и треугольником Паскаля?

194. Творческое задание (100 баллов). Какая связь между пирамидальными числами и треугольником Паскаля?

195. Творческое задание (100 баллов). Для применений в теории вероятностей особенно важны асимптотические формулы для чисел треугольника Паскаля, то есть приближённые оценки этих чисел при больших n . Что вы знаете о истории открытия этих формул?

VI. События. Алгебра событий

Теория вероятностей – наука о вычислении вероятностей случайных событий. Основные объекты изучения теории вероятностей: (1) случайное событие и его вероятность; (2) случайные величины и их функция распределения; (3) случайный процесс и его вероятностная характеристика.

Мы будем обозначать события заглавными латинскими буквами и заключать их описание в фигурные скобки, например:

$A = \{\text{в следующем году первый снег в Москве выпадет в воскресенье}\};$

$B = \{\text{свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом вниз}\};$

$C = \{\text{при бросании кубика выпадет шестерка}\};$

$D = \{\text{при бросании кубика выпадет четное число очков}\};$

$E = \{\text{в следующем году снег в Москве вообще не выпадет}\};$

$F = \{\text{при бросании кубика выпадет семерка}\};$

$G = \{\text{в следующем году в Москве выпадет снег}\};$

$H = \{\text{при бросании кубика выпадет число очков, меньшее 7}\}$

Событие называется *детерминированным*, если в результате опыта оно происходит или не происходит наверняка. В детерминированном случае мы точно знаем, что данная причина приведет к единственному, вполне определенному следствию.

Событие называется *случайным*, если в результате опыта мы не можем заранее предсказать – произойдет событие или нет. При этом предполагается, что опыт можно повторять неограниченное число раз при неизменных условиях.

События, исход которых нельзя предсказать, но и невозможно повторять многократно, называются *неопределенными*.

События A и B называются *несовместными*, если появление одного исключает появление другого.

Событие B *следует* из события A , если событие B происходит всегда, когда произошло событие A . Это обозначается тем же символом, что и подмножество: $A \subset B$.

Будем говорить о равенстве двух событий A и B , если из A следует B и из B следует A .

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти никогда при данных условиях. Обозначается невозможное событие знаком $\emptyset$.

Событие называется *достоверным*, если оно происходит всегда при данных условиях.

Невозможные и достоверные события встречаются в жизни сравнительно редко. Поэтому можно сказать, что живем мы в мире случайных событий. Чтобы доказать, что данное событие – случайное нужно привести пример такой ситуации, или, как говорят математики, такого исхода, когда событие происходит пример такого исхода, когда оно не происходит.

Так, например, событие D – случайное, потому что оно происходит, когда на кубике выпадает четверка и не происходит, когда на кубике выпадает пятерка.

При бросании кубика может выпасть от одно шести очков, поэтому событие F – невозможное, а событие H – достоверное.

В теории вероятностей принято все недетерминированные события называть случайными, а невозможные и достоверные рассматривать как их специальные разновидности.

Пусть случайный эксперимент проводится n раз, и событие A произошло m раз. Тогда говорят, что m – *абсолютная частота* события A , а *относительная частота* события A есть

$$n(A)=m/n \quad (VI.1)$$

Частота события связана с его вероятностью. Относительную частоту называют еще *эмпирической вероятностью* потому, что по частоте события мы оцениваем возможность его появления в будущем.

Для любого случайного события A эмпирическая вероятность $P_n(A)$ лежит в пределах: $0 \leq P_n(A) \leq 1$, где n – количество случайных экспериментов. (VI.2)

Суммой двух событий A и B называется событие $A+B$, состоящее в том, что произошло событие A или событие B . В данном случае «или» означает, что произошло событие A , или событие B или оба этих события одновременно.

Сложение событий удовлетворяет коммутативному и ассоциативному законам:

$$A+B=B+A \quad (VI.3)$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad (VI.4)$$

Произведением двух событий A и B называется событие, состоящее в том, что события A и B произошли одновременно. Умножение событий так же, как и сложение, коммутативно и ассоциативно:

$$AB=BA \quad (VI.5)$$

$$A(BC)=(AB)C \quad (VI.6)$$

Справедливо следующее свойство: из события AB следуют событие A и событие B .

Для несовместных событий A и B : $AB=\emptyset$.

Сложение и умножение событий удовлетворяют двум дистрибутивным законам:

$$A(B+C)=AB+AC \quad (VI.7)$$

$$(A+B)(A+C)=A(A+B+C)+BC=A+BC \quad (VI.8)$$

Если события несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (VI.9)$$

Если события несовместны, то вероятность произведения событий равна произведению вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad (VI.10)$$

Разностью событий A и B называется событие $A-B$, состоящее в том, что произошло событие A и не произошло событие B .

Событие $\bar{A}$ называется *противоположным* событию A , если оно состоит в том, что не произошло событие A .

События называется *равновозможным*, если ни одно из них не происходит чаще других.

Будем называть *элементарным исходом* любой из равновозможных исходов испытания. Элементарные исходы (1) не представимы в виде суммы двух других, (2) попарно несовместны, (3) никакие другие исходы в результате опыта произойти не могут.

События образуют полный набор, если они несовместны, а их сумма есть достоверное событие. *Полный набор исходов* называют также пространством элементарных исходов и обозначают обычно буквой Ω .

Тестовые задания (по 10 баллов). Определите, о каких событиях идёт речь в следующих задачах?

196. Какова вероятность того, что на телефонную станцию за 5 минут поступят 10 вызовов?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

197. Какова вероятность того, что на экзамене по элементарной математике вы получите отметку «отлично»?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

198. Какова вероятность того, что из фруктовой корзины, содержащей яблоки, апельсины и груши, вынимают грушу?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

199. Какова вероятность того, что из корзины, содержащей яблоки, апельсины и груши, вынимают фрукт?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

200. Какова вероятность того, что из корзины, содержащей яблоки, апельсины и груши, вынимают лимон?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

201. Какова вероятность того, что сумма цифр в шестизначном номере поездного билета равна 1?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

202. Какова вероятность того, что сумма цифр в шестизначном номере проездного билета равна 10?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

203. Какова вероятность того, что сумма цифр в шестизначном номере проездного билета равна 100?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

204. Какова вероятность того, что из 10 купленных на базаре бананов один неспелый?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

205. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + 2x + 1 = 0$ не имеет решений?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

206. Какова вероятность того, что уравнение $2x+1=0$ имеет рациональное решение?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

207. Какова вероятность того, что наугад выбранный из коробки (где хранятся карандаши красного, оранжевого, жёлтого, зелёного, синего, коричневого и чёрного цветов) карандаш – красного цвета?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

208. Какова вероятность того, что наугад выбранные из коробки (где хранятся карандаши красного, оранжевого, жёлтого, зелёного, синего, коричневого и чёрного цветов) карандаши – красного и синего цветов?

- а) достоверное; б) случайное;
- в) невозможное; г) неопределённое.

209. Бросаем два кубика. Какие из следующих событий случайные?

$A = \{\text{на кубиках выпало одинаковое число очков}\};$

$B = \{\text{сумма очков на кубиках не превосходит } 12\};$

$C = \{\text{сумма очков на кубиках равна } 11\};$

$D = \{\text{произведение очков на кубиках равно } 11\};$

- а) A б) B в) C г) D

210. Бросаем два кубика. Какие из следующих событий невозможные?

$A = \{\text{на кубиках выпало одинаковое число очков}\};$

$B = \{\text{сумма очков на кубиках не превосходит } 12\};$

$C = \{\text{сумма очков на кубиках равна } 11\};$

$D = \{\text{произведение очков на кубиках равно } 11\};$

- а) A б) B в) C г) D

211. Бросаем два кубика. Какие из следующих событий достоверные?

$A = \{\text{на кубиках выпало одинаковое число очков}\};$

$B = \{\text{сумма очков на кубиках не превосходит } 12\};$

$C = \{\text{сумма очков на кубиках равна } 11\};$

$D = \{\text{произведение очков на кубиках равно } 11\};$

- а) A б) B в) C г) D

212. Для рисования из коробки наугад (где хранятся карандаши красного, оранжевого, жёлтого, зелёного, синего, коричневого и чёрного цветов) берутся карандаши; какова вероятность того, что сначала взяли карандаш красного, а затем карандаш синего цвета?

- а) сложение событий; б) произведение событий.

213. Какова вероятность того, что два выбранных наугад карандаша из коробки (где хранятся карандаши красного, оранжевого, жёлтого, зелёного, синего, коричневого и чёрного цветов) красного или синего цвета?

- а) сложение событий; б) произведение событий.

214. Какова вероятность того, что задуманное двузначное число делится на 3 или делится на 2?

- а) сложение событий; б) произведение событий.

215. Какова вероятность того, что первое из задуманных двузначных чисел делится на 2, а второе – делится на 5?

- а) сложение событий; б) произведение событий.

216. Для рисования из коробки наугад (где хранятся карандаши красного, оранжевого, жёлтого, зелёного, синего, коричневого и чёрного цветов) берутся карандаши; какова вероятность того, что сначала взяли карандаш зелёного, а затем карандаш синего цвета?

- а) несовместные события; б) совместные события.

217. Какова вероятность того, что задуманное двузначное число делится на 2 или на 10?

- а) несовместные события; б) совместные события.

218. Какова вероятность того, что задуманное двузначное число делится на 3 или является простым?

- а) несовместные события; б) совместные события.

219. В группе учатся 10 юношей и 20 девушек. Какие из следующих событий являются для такой группы случайными, если

$A = \{B \text{ в группе есть два человека, родившихся в разные месяцы}\};$

$B = \{B \text{ в группе есть два человека, родившихся в одном месяце}\};$

$C = \{B \text{ в группе есть два юноши, родившихся в одном месяце}\};$

$D = \{B \text{ в группе есть две девушки, родившиеся в одном месяце}\};$

$E = \{\text{Все юноши родились в разные месяцы}\};$

$F = \{\text{Все девушки родились в разные месяцы}\};$

$G = \{\text{Есть юноша и девушка, родившиеся в одном месяце}\};$

$H = \{\text{Есть юноша и девушка, родившиеся в разные месяцы}\}.$

- а) CE б) $A+B$ в) FA г) $D-F$

220. В группе учатся 10 юношей и 20 девушек. Какие из следующих событий являются для такой группы невозможными, если

$A := \{ \text{в группе есть два человека, родившихся в разные месяцы};$

$B := \{ \text{в группе есть два человека, родившихся в одном месяце};$

$C := \{ \text{в группе есть два юноши, родившихся в одном месяце};$

$D := \{ \text{в группе есть две девушки, родившиеся в одном месяце};$

$E := \{ \text{все юноши родились в разные месяцы};$

$F := \{ \text{все девушки родились в разные месяцы};$

$G := \{ \text{есть юноша и девушка, родившиеся в одном месяце};$

$H := \{ \text{есть юноша и девушка, родившиеся в разные месяцы}\}.$

- а) $E+C$ б) $H+G$ в) AF г) $D+B$

221. В партии из 1000 деталей. ОТК обнаружил 12 нестандартных деталей. Какова относительная частота появления нестандартных деталей?

- а) 12 б) 1,2 в) 0,12 г) 0,012

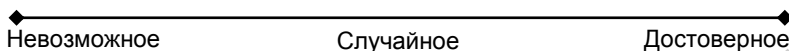
221. Для лотереи отпечатали 1500 билетов, из которых 120 выигрышных. Какова эмпирическая вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?

- а) 12,5 б) 8 в) 0,8 г) 0,08

Задачи / уровня (по 20 баллов).

222. Попробуем расположить на специальной вероятностной шкале события А-Н, приведенные в теоретическом материале к разделу к разделу.

Чем больше у случайного события шансов произойти, тем оно более вероятно и тем правее его следует расположить на вероятностной шкале; чем меньше шансов – тем левее. Если два события, на наш взгляд, имеют равные шансы, будем располагать их в одном и том же месте шкалы друг над другом.



Начнем с события $D = \{\text{при бросании кубика выпадет четное число очков}\}$. Когда мы бросаем кубик, каждая из шести граней имеет равные шансы оказаться верхней. Четное число очков – на трех гранях кубика, на трех других – нечетное. Значит, ровно половина шансов (три из шести) за то, что событие D произойдет, и ровно половина (три из шести) за то, что оно не произойдет. Поэтому мы расположили событие D в середине шкалы.



У события $C = \{\text{при бросании кубика выпадет шестерка}\}$ только один шанс из шести, а у события D – три шанса из шести. Поэтому C менее вероятно и расположено на шкале левее события D .

Продолжайте располагать события на вероятностной шкале.

223. Вова хочет вытянуть наугад одну карту из колоды с 36-ю картами. Маша, Саша, Гриша и Наташа предсказали следующее:

Маша. $M = \{\text{Это будет король}\}$.

Саша. $S = \{\text{Это будет пиковая дама}\}$.

Гриша. $G = \{\text{Эта карта будет красной масти}\}$.

Наташа. $N = \{\text{Эта карта будет пиковой масти}\}$.

224. Что вероятнее: $A = \{\text{получить шестерку при подбрасывании кубика}\}$ или $B = \{\text{вытянуть шестерку из перетасованной колоды карт}\}$?

225. Попробуйте на основе нашего опыта общения по телефону сравнить между собой степень вероятности следующих событий: $A = \{\text{вам никто не позвонит с 5 до 6 утра}\}$; $B = \{\text{вам кто-нибудь позвонит с 5 до 6 утра}\}$; $C = \{\text{вам кто-нибудь позвонит с 18 до 21}\}$; $D = \{\text{вам никто не позвонит с 18 до 21}\}$.

226. Проведем 50 экспериментов по подбрасыванию кубика. Итоги экспериментов будем заносить в таблицу. После чего вычислим абсолютную и относительную частоту каждого исхода. В первом столбце таблицы перечислены все возможные исходы. Во втором столбце производилась регистрация исходов. В третьем и четвертом – подсчет частот.

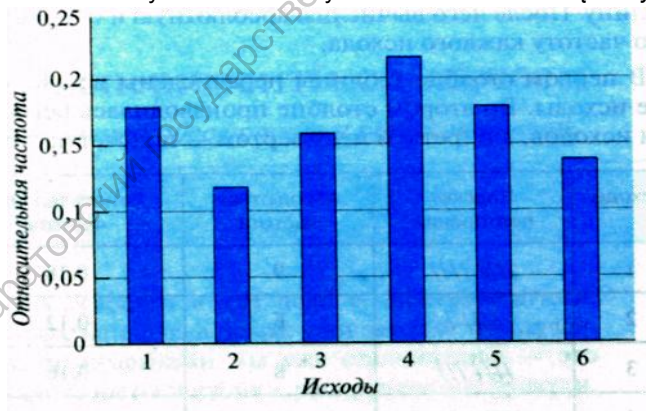
Таблица к задаче 266			
Исходы	Подсчет повторений	Абсолютная частота	Относительная частота
1	***** ****	9	0,18
2	***** *	6	0,12
3	***** ***	8	0,16
4	***** ***** *	11	0,22
5	***** ****	9	0,18
6	***** **	7	0,14
		50	1

Полученная таблица обладает некоторыми замечательными свойствами, которые сохраняются независимо от результатов проведенных экспериментов: (1) сумма абсолютных частот в ней равна числу экспериментов (в нашем случае – 50); (2) сумма относительных частот равна 1.

Проверка этих свойств поможет вам избежать ошибок при заполнении аналогичных таблиц.

По результатам таблицы можно построить гистограмму (от греческих слов *histos* – столб и *gramma* – запись), на которой каждая из частот изображается в виде столбика соответствующей высоты. Гистограмма относительных частот для рассмотренного примера построена на рисунке.

227. По результатам экспериментов задачи 226 найдите абсолютную и относительную частоты случайных событий: $A=\{\text{на кубике выпало четное число очков}\}$; $B=\{\text{на кубике выпало нечетное число очков}\}$; $C=\{\text{на кубике выпало число очков больше трех}\}$.



Обратите внимание, что теперь речь идет о частоте событий, а не исходов.

Таблица к задаче 228	
Исходы	Абсолютная частота
1	26
2	25
3	19
4	27
5	25
6	28

228. Провели серию испытаний по подбрасыванию кубика. Полученные результаты представлены в таблице. Найдите относительную частоту каждого исхода. Постройте гистограмму.

229. Провели серию из 300 экспериментов по подбрасыванию кубика. Полученные результаты представлены в

таблице. Найдите абсолютную частоту каждого исхода. Постройте гистограмму.

Таблица к задаче 229	
Исходы	Относительная частота
1	0,1533
2	0,1933
3	0,16
4	0,1533
5	0,1467
6	0,1933

230. Творческое задание (100 баллов).

Первые задачи теории вероятностей были рассмотрены Л. Пачоли, Д. Кардано, Н. Тарталья, Б. Паскалем, П. Ферма, Х. Гюйгенсом. Одна из известных задач теории вероятностей именуется как Парадокс Монти Холла; её решение, на первый взгляд, противоречит здравому смыслу. Сформулируйте эту задачу в любом удобном

для Вас виде. Приведите решение этой задачи.

В качестве самостоятельной научной дисциплины теория вероятностей стала оформляться в работах Я. Бернулли, А. Муавра, П. Лапласа, С. Пуассона, Её последующее развитие связано с именами П.Л. Чебышева, А.А. Маркова, А.М. Ляпунова, А.Я. Хинчина, С.Н. Бернштейна, А.Н. Колмогорова, А.М. Яглома и других. Что Вам известно о вкладе этих учёных в развитие теории вероятностей?

VII. Вероятность. Определение вероятности

Вероятностью $P(A)$ события называется отношение числа благоприятных исходов $m(A)$ к общему числу несовместных равновозможных исходов N (VII.1):

$$P(A) = \frac{m(A)}{N}$$

Свойства вероятности:

(1) Для любого случайного события A : $0 \leq P(A) \leq 1$ (VII.2)

(2) Пусть события A и B несовместны, тогда $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (VII.3)

(3) Если события независимы, то: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ (VII.4)

Тестовые задания (по 10 баллов).

231. Подбрасываем кубик, грани которого пронумерованы числами от 1 до 6. Какова вероятность, что выпадет четное число?

- а) 1/6 б) 1/3 в) 1/2 г) 1

232. Подбрасываем кубик, грани которого пронумерованы числами от 1 до 6. Какова вероятность того, что при первом броске выпадет 3, а при втором – 4?

- а) 1/36 б) 1/6 в) 1/3 г) 1/2

233. Подбрасываем кубик, грани которого пронумерованы числами от 1 до 6. Какова вероятность того, что выпадет 3 или 4?

- а) 1/36 б) 1/6 в) 1/3 г) 1/2

234. Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вынули из нее одну карту. Какова вероятность того. Что вынули карту красной масти?

- а) 1/36 б) 1/18 в) 1/3 г) 1/2

235. Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вынули из нее одну карту. Какова вероятность того. Что вынули карту трефовой масти ?

- а) 1/36 б) 1/18 в) 1/9 г) 1/4

236. Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вынули из нее одну карту. Какова вероятность того. Что вынули карту пик красную масти ?

- а) 0 б) 1/2 в) 1/9 г) 1

237. Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вынули из нее одну карту. Какова вероятность того. Что вынули даму ?

- а) 1/36 б) 1/18 в) 1/9 г) 1/4

238. Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вынули из нее одну карту. Какова вероятность того. Что вынули даму крестовой масти ?

- а) 1/36 б) 1/18 в) 1/9 г) 1/2

239. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в 3 места.

- а) 1/8 б) 1/10 в) 3/10 г) 8/9

240. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

а) $1/18$

б) $2/18$

в) $2/15$

г) $1/15$

Задачи I уровня (по 20 баллов).

241. В корзине 15 шаров. Из них 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вытащить 3 белых шара? Какова вероятность вытащить 3 черных шара?

242. Из колоды в 36 карт вытаскиваем 4. Какова вероятность, что среди них 2 короля?

243. Стрелок стреляет по мишени 4 раза. Вероятность попадания в одном выстреле 0,8. Считаем, что у него хорошие нервы – каждый следующий выстрел не зависит от предыдущего. Какова вероятность, что он промахнется ровно 1 раз?

244. **Ошибка Даламбера.** Какова вероятность, что подброшенные вверх две правильные монеты упадут на одну и ту же сторону? Решение, предложенное Даламбером. Опыт имеет три равновероятных исхода: (1) обе монеты упали на «орла»; (2) обе монеты упали на «решку»; (3) одна из монет упала на «орла», другая на «решку». Из них благоприятными для нашего события будут 2 исхода, поэтому искомая вероятность равна $2/3$.

Приведите правильное решение.

Задачи I уровня (по 20 баллов). Для каждого из следующих событий найдите число всех равновероятных исходов, число благоприятных исходов и вероятность.

245. В урне 15 белых и 25 черных шаров. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?

246. Из русского алфавита случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется гласной?

247. Из слова **СОБЫТИЕ** случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется гласной?

248. Из 365 дней 2009 года случайно выбирается один. Какова вероятность, что он будет средой, если известно, что 2009 год начинается в четверг?

Задачи I уровня (по 20 баллов). Определите вероятность следующих событий.

249. $A = \{\text{при бросании монеты выпал «орел»}\};$

250. $B = \{\text{при бросании кубика выпала тройка}\};$

251. $C = \{\text{при бросании кубика выпало четное число}\};$

252. $D = \{\text{из колоды карт вытянули туза}\};$

253. $E = \{\text{из колоды карт вытянули шестерку}\};$

254. $F = \{\text{из колоды карт вытянули не туза}\}.$

255. Творческое задание (100 баллов). Что вам известно о работе Пьера Симона Лапласа «Опыт философии теории вероятностей»?

VIII. Вероятность суммы и произведения событий

Даны два совместных события A и B . Подсчитаем вероятность их суммы: $m(A)$ – число исходов, благоприятных только событию A , $m(B)$ – число исходов, благоприятных только событию B , $m(AB)$ – число исходов, благоприятных событию A и событию B . Тогда сумме совместных событий благоприятно $m(A)+m(B)+m(AB)$ исходов и вероятность суммы совместных событий равна

$$P(A+B) = \frac{m(A)+m(B)+m(AB)}{N}, \text{ где } N - \text{общее число исходов. С другой}$$

$$\text{стороны } P(A) = \frac{m(A)+m(AB)}{N}, \quad P(B) = \frac{m(B)+m(AB)}{N}, \quad \text{следовательно}$$

$$P(A)+P(B) = \frac{m(A)+m(B)+2m(AB)}{N}.$$

$$\text{Замечаем, что: } \frac{m(A)+m(B)+m(AB)}{N} = \frac{m(A)+m(B)+2m(AB)}{N} - \frac{m(AB)}{N}$$

$$\text{или } P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \quad (\text{VIII.1})$$

$$\text{или } P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A) \cdot P(B) \quad (\text{VIII.2})$$

Обобщим утверждение на любое количество совместных событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \quad (\text{VIII.3})$$

или

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C) \quad (\text{VIII.4})$$

Пусть известно, что в результате эксперимента произошло событие B . Зная это, мы хотим подсчитать вероятность некоторого события A . Такую вероятность (при условии, что произошло событие B) называют *условной вероятностью* события A и обозначают $P(A|B)$. Число исходов, благоприятных

$$B \text{ обозначим через } m(B). \text{ Условная вероятность равна } P(A|B) = \frac{m(AB)}{m(B)} \quad (\text{VIII.5})$$

или (если разделить числитель и знаменатель на общее число исходов N)

$$P(A|B) = \frac{m(AB)/N}{m(B)/N} = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (\text{VIII.6})$$

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A)P_A(B)$ (VIII.7)

Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляют в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n) \quad (\text{VIII.8})$$

где $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ – вероятность события A_n , вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ наступили.

Свойства условной вероятности (VIII.9):

(1) $P(A|A)=1$

(2) Если $B \subset A$, то $P(A|B)=1$.

(3) Для любого события B с ненулевой вероятностью $P(\Omega|B)=1$, $P(0|B)=0$.

(4) Если события B_1 и B_2 несовместны, то $P(A|(B_1+B_2))=P(A|B_1)+P(A|B_2)$.

Теорема умножения: $P(AB)=P(A|B)P(B)$. (VIII.10)

Говорят, что событие A не зависит от события B , если $P(A|B)=P(A)$.

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением, вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$:

$$\overline{A_n} = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_{n-1}}) \quad (\text{VIII.11})$$

Тестовые задания (по 10 баллов).

256. Два стрелка независимо стреляют по мишени. Первый попадает с вероятностью 0.8, второй 0.7. Какова вероятность, что попадет хотя бы один?

- а) 0,56 б) 0,75 в) 0,94 г) 1,5

257. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события: $A=\{\text{выпадение герба на первой монете}\}$; $D=\{\text{выпадение хотя бы одного герба}\}$; $E=\{\text{выпадение хотя бы одной цифры}\}$; $F=\{\text{выпадение герба на второй монете}\}$. Определить, условную и безусловную вероятность событий A и E .

- а) $P(E)=3/4$, б) $P(E)=1/2$, в) $P(E)=3/4$, г) $P(E)=1/2$,
 $P(E|A)=1/2$ $P(E|A)=1/2$ $P(E|A)=3/4$ $P(E|A)=3/4$

258. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события: $A=\{\text{выпадение герба на первой монете}\}$; $D=\{\text{выпадение хотя бы одного герба}\}$; $E=\{\text{выпадение хотя бы одной цифры}\}$; $F=\{\text{выпадение герба на второй монете}\}$. Определить, условную и безусловную вероятность событий A и F .

- а) $P(A)=3/4$, б) $P(A)=1/2$, в) $P(A)=3/4$, г) $P(A)=1/2$,
 $P(A|F)=1/2$ $P(A|F)=1/2$ $P(A|F)=3/4$ $P(A|F)=3/4$

259. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события: $A=\{\text{выпадение герба на первой монете}\}$; $D=\{\text{выпадение хотя бы одного герба}\}$; $E=\{\text{выпадение хотя бы одной цифры}\}$; $F=\{\text{выпадение герба на второй монете}\}$. Определить, условную и безусловную вероятность событий D и E .

- а) $P(D)=3/4$, б) $P(D)=1/2$, в) $P(D)=3/4$, г) $P(D)=2/3$,
 $P(D|E)=2/3$ $P(D|E)=1/2$ $P(D|E)=3/4$ $P(D|E)=3/4$

260. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события: $A=\{\text{выпадение герба на первой монете}\}$; $D=\{\text{выпадение хотя бы одного герба}\}$; $E=\{\text{выпадение хотя бы одной цифры}\}$; $F=\{\text{выпадение герба на второй монете}\}$. Определить, условную и безусловную вероятность событий D и F .

- а) $P(D)=1/2$, б) $P(D)=1/2$, в) $P(D)=3/4$, г) $P(D)=3/4$,
 $P(D|F)=3/4$ $P(D|F)=1/2$ $P(D|F)=3/4$ $P(D|F)=1$

261. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета? 0,02.

- а) 0,000075 б) 0,019925 в) 0,02 г) 0,75

262. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

- а) 0,037 б) 0,04 в) 0,07 г) 0,09

263. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная.

- а) 16/45 б) 28/45 в) 4/5 г) 44/45

264. В ящике 10 фруктов, среди которых 2 манго. Найти вероятность того, что среди наудачу отобранных 6 фруктов окажется не более одного манго.

- а) 1/10 б) 1/5 в) 2/3 г) 3/4

265. У мальчика в коробке имеется 3 пирамидки и 7 кубиков. Мальчик взял из коробки одну игрушку, а затем – вторую. Найти вероятность того, что первая из взятых игрушек – пирамидка, а вторая – кубик.

- а) 1/10 б) 1/5 в) 2/3 г) 3/4

266. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором – черный и при третьем – синий.

- а) 1/60 б) 5/144 в) 1/22 г) 47/60

267. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

- а) 1/4 б) 1/2 в) 1/3 г) 3/4

Задачи II уровня (по 30 баллов). Решите задачи.

268. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность того, что только одно отделение получит газеты вовремя. 0,032

269. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием. 0,316

270. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле. 0,8

271. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор. 0,14

272. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

Решение. Пусть $A = \{\text{хотя бы один из трёх учебников окажется в переплёте}\}$. Требование: хотя бы один из трех взятых учебников в переплете – будет осуществлено, если произойдет любое из следующих трех несовместных событий: $B = \{\text{один учебник в переплете}\}$, $C = \{\text{два учебника в переплете}\}$, $D = \{\text{три учебника в переплете}\}$.

Интересующее нас событие A можно представить в виде суммы событий: $A = B + C + D$. По теореме сложения, $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$.

Найдем вероятности событий B , C и D и получим $P(A)$:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}, \quad P(D) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

$$P(A) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91}$$

273. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

274. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

275. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

276. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

277. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать только один элемент.

278. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать только два элемента.

279. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать все три элемента.

280. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится не более чем в трех ящиках.

281. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится не менее чем в двух ящиках.

282. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

283. В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

284. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

285. В мешочке содержится 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если извлеченный кубик не возвращается в мешочек.

286. В мешочке содержится 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если извлеченный кубик возвращается в мешочек.

287. По статистическим данным ремонтной мастерской, в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 – для смены резца; 3 – из-за неисправности привода; 2 – из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

288. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $P_1 = 0,8$; $P_2 = 0,7$; $P_3 = 0,9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

289. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

290. Творческое задание (100 баллов). Швейцарский математик Я.Бернулли обнаружил фундаментальный факт теории вероятностей, получивший название закона больших чисел в форме Бернулли. В чём суть открытия Я.Бернулли?

IX. Элементы математической статистики

Математическая статистика – наука, изучающая методы обработки результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся: (а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и др.; (б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Очень часто требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Иногда проводят сплошное обследование, то есть обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N=1000$, а объем выборки $n=100$.

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли: выборка должна

правильно представлять пропорции генеральной совокупности, то есть должна быть репрезентативной (представительной).

Выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается; в предельном случае, когда рассматривается бесконечная генеральная совокупность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.

На практике применяются различные способы отбора. Принципиально эти способы можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся: а) простой случайный бесповторный отбор; б) простой случайный повторный отбор.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся: а) типический отбор; б) механический отбор; в) серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности. Осуществить простой отбор можно различными способами. Например, для извлечения n объектов из генеральной совокупности объема N поступают так: выписывают номера от 1 до N на карточках, которые тщательно перемешивают, и наугад вынимают одну карточку; объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточку возвращают в пачку и процесс повторяют, то есть карточки перемешивают, наугад вынимают одну из них и т. д. Так поступают n раз; в итоге получают простую случайную повторную выборку объема n .

Если извлеченные карточки не возвращать в пачку, то выборка является *простой случайной бесповторной*.

При большом объеме генеральной совокупности описанный процесс оказывается очень трудоемким. В этом случае пользуются готовыми таблицами «случайных чисел», в которых числа расположены в случайном порядке. Для того чтобы отобрать, например, 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают подряд 50 чисел; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами.

Если бы оказалось, что случайное число таблицы превышает число N , то такое случайное число пропускают. При осуществлении бесповторной выборки случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, если детали изготавливают на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности. Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект. Например, если нужно отобрать 20% объектов, то отбирают каждый пятый объект; если требуется отобрать 5% объектов, то отбирают каждый двадцатый объект, и т. д.

Механический отбор не всегда может обеспечить репрезентативности выборки. Например, если отбирают каждый двадцатый обтачиваемый валик, причем сразу же после отбора производят замену резца, то отобранными окажутся все валики, обточенные затупленными резцами. В таком случае следует устранить совпадение ритма отбора с ритмом замены резца, для чего надо отбирать, скажем, каждый десятый валик из двадцати обточенных.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию. Например, если изделия изготавливаются большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков.

Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

На практике часто применяется *комбинированный* отбор, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, ..., x_k – n_k раз и $\sum_i n_i = n$ – объем выборки.

Наблюдаемые значения x_i – называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – *вариационным рядом*. Числа

наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ –

относительными частотами.

*Статистическим распределением** выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

* Заметим, что в теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Тестовые задания (по 10 баллов). Укажите способ отбора выборки из генеральной совокупности объектов.

291. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала 7 школ из 50 имеющих и будет оценивать качество знаний каждого учащегося выбранных школ.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

292. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала по 10 семиклассников каждой из 50 школ города.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

293. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала из базы данных 100 семиклассников, обучающихся в различных (их 50) школах города.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

294. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала по одному семикласснику с каждой из 50 школ города.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

295. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия отбирает из базы данных каждого пятого семиклассника города N.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

296. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала первые 8 школ города (из 50 имеющих) и будет оценивать качество знаний каждого учащегося выбранных школ.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

297. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала случайным образом 200 семиклассников из базы данных учащихся города.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

298. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике каждая школа города предоставила список из 5 семиклассников.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

299. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала 5 «проблемных» школ города (из 50 имеющих) и будет оценивать качество знаний каждого семиклассника выбранной школ.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

300. В городе N для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала по одному семикласснику из алфавитного списка таким образом, что фамилия первого начиналась на букву А, второго – на букву Б, третьего – на букву В, и т.д. Таким образом выбранными оказались 22 семиклассника, живущих в городе N.

а) типический	б) механический	в) серийный	г) простой случайный
---------------	-----------------	-------------	----------------------

Задачи I уровня (по 20 баллов).

301. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия города N выбрала 7 школ из 50 имеющихся и оценила качество знаний каждого учащегося выбранных школ. Получены следующие результаты:

СОШ №3: 5, 5, 5, 4, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 3, 5, 5, 4, 5, 3, 4, 5, 3.

COШ №9: 5, 4, 4, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 3, 3.

COШ №13: 5, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4.

COШ №27: 4, 4, 4, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 3.

COШ №34: 5, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 5, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 3.

COШ №41: 5, 4, 3, 3, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 5, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 5, 4, 3, 5, 3, 3, 5.

СОШ №46: 5, 4, 4, 5, 4, 4, 4, 4, 5, 3, 4, 4, 5, 4, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 5, 5, 4, 4, 3, 3.

Решение. Объем выборки $n=15$. Упорядочим элементы выборки по величине – получим вариационные ряды по каждой школе:

COШ №3:

[illegible]

COШ №13: 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

[illegible]

COШ №34: 3. 3. 3. 3. 3. 3. 3. 3. 3. 4. 5.

COШ №41: 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

COШ №46: 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

Варианты, частоты, объём выборки и соответствующие статистические ряды (табличная форма) и относительные частоты по каждой школе города:

COШ №3: $x_1=2, n_1=1$; $x_2=3, n_2=9$; $x_3=4, n_3=13$; $x_4=5, n_4=10$. $n=33$.

x_i	2	3	4	5
n_i	1	9	13	10

$$W_1=1/33; \quad W_2=9/33; \quad W_3=13/33; \quad W_4=10/33.$$

Проверка. $1/33 + 9/33 + 13/33 + 10/33 = 1$

COШ №9: $x_1=2, n_1=2; x_2=3, n_2=15; x_3=4, n_3=11; x_4=5, n_4=3. n=31.$

x_i	2	3	4	5
n_j	2	15	11	3

$$W_1=2/31; \quad W_2=15/31; \quad W_3=11/31; \quad W_4=3/31.$$

Проверка. $2/31 + 15/31 + 11/31 + 3/31 = 1$

СОШ №13: $x_1=2, n_1=0$; $x_2=3, n_2=3$; $x_3=4, n_3=17$; $x_4=5, n_4=6$. $n=26$.

x_i	2	3	4	5
n_i	0	3	17	6

$$W_1=0; \quad W_2=3/26; \quad W_3=17/26; \quad W_4=6/26.$$

Проверка. $3/26 + 17/26 + 6/26 = 1$

COШ №27: $x_1=2, n_1=0; x_2=3, n_2=14; x_3=4, n_3=16; x_4=5, n_4=1. n=31.$

x_i	2	3	4	5
n_i	0	14	16	1

$$W_1=0; \quad W_2=14/31; \quad W_3=16/31; \quad W_4=1/31.$$

Проверка. $14/33 + 16/33 + 1/33 = 1$

COШ №34: $x_1=2, n_1=0$; $x_2=3, n_2=9$; $x_3=4, n_3=18$; $x_4=5, n_4=1$. $n=28$.

x_i	2	3	4	5
n_i	0	9	18	1

$$W_1=0; \quad W_2=9/28; \quad W_3=18/28; \quad W_4=1/28.$$

Проверка. $9/28 + 18/28 + 1/28 = 1$

COШ №41: $x_1=2, n_1=0$; $x_2=3, n_2=14$; $x_3=4, n_3=8$; $x_4=5, n_4=9$. $n=31$.

x_i	2	3	4	5
n_i	0	14	8	9

$$W_1=0; \quad W_2=14/31; \quad W_3=8/31; \quad W_4=9/31.$$

Проверка. $14/31 + 8/31 + 9/31 = 1$

COШ №46: $x_1=2, n_1=0$; $x_2=3, n_2=5$; $x_3=4, n_3=18$; $x_4=5, n_4=7$. $n=30$.

x_i	2	3	4	5
n_i	0	5	18	7

$$W_1=0; \quad W_2=5/30; \quad W_3=18/30; \quad W_4=7/30.$$

Проверка. $5/30 + 18/30 + 7/30 = 1$

Варианты, частоты, объём выборки, статистический ряд (табличная форма) и относительная частота, характеризующие качество знаний учащихся 7 класса по математике: $x_1=2, n_1=3$; $x_2=3, n_2=69$; $x_3=4, n_3=101$; $x_4=5, n_4=37$. $n=210$.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	69	101	37

Проверка. $3+69+101+37=33+31+26+31+28+31+30$.

$W_1=1/70$; $W_2=23/70$; $W_3=101/210$; $W_4=37/210$.

$W_1=1,3\%$; $W_2=32,9\%$; $W_3=48,1\%$; $W_4=17,7\%$.

Вывод. Математику на отлично знает 17,7% семиклассников, на хорошо – 48,1%, на удовлетворительно – 32,9%, неудовлетворительные знания показали 1,3% учащихся седьмых классов.

302. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала по 10 семиклассников каждой из 50 школ города. Получены следующие результаты:

Школа №	Порядковые номера учащихся									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	5	4	5	5	4	5	4	4	5
2	3	4	4	4	5	4	4	4	3	4
3	3	3	4	4	4	4	5	4	5	5
4	4	5	4	5	5	5	3	4	3	4
5	4	4	4	4	3	3	5	4	4	5
6	4	5	4	5	5	4	4	3	3	4
7	4	5	4	3	4	5	4	3	4	5
8	4	4	4	5	4	4	5	3	4	3
9	3	4	4	4	5	5	4	5	4	5
10	4	3	4	3	4	4	5	4	3	4
11	4	4	4	4	4	5	5	4	4	5
12	3	3	3	3	4	4	3	4	3	5
13	5	4	5	4	5	5	4	5	4	3
14	3	4	3	4	4	4	5	4	5	4
15	5	5	5	4	3	4	3	3	4	4
16	4	4	4	5	4	3	4	4	5	4
17	4	4	4	5	4	3	4	4	4	4
18	3	2	3	4	4	3	4	3	4	5
19	2	3	3	3	3	4	4	3	3	4
20	4	4	4	5	3	4	5	3	4	5
21	5	5	5	5	4	5	4	4	5	4
22	4	5	4	3	4	4	5	4	5	4
23	3	4	4	5	4	4	5	3	3	4
24	4	4	5	4	4	3	4	5	4	3
25	4	5	4	5	4	3	4	3	4	5

Школа №	Порядковые номера учащихся									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
26	3	5	4	5	5	4	5	4	4	5
27	4	4	4	4	5	4	4	4	3	4
28	3	3	4	4	4	4	5	4	5	5
29	5	5	4	4	5	4	5	4	3	4
30	4	4	3	3	4	4	4	5	5	3
31	5	4	3	4	5	4	3	4	4	5
32	4	5	3	4	3	3	4	5	4	4
33	5	4	5	4	4	5	4	4	5	3
34	4	4	4	3	3	4	4	3	4	5
35	3	3	4	3	4	5	4	4	5	4
36	5	3	5	3	4	3	5	4	4	5
37	4	4	5	5	4	4	5	4	3	4
38	5	3	4	4	3	3	4	4	5	4
39	3	5	3	4	3	4	5	4	4	5
40	5	4	5	5	3	4	3	4	3	4
41	3	4	5	4	5	4	4	5	3	4
42	4	4	4	5	4	3	3	4	5	3
43	4	4	3	4	4	3	4	5	5	3
44	4	5	4	4	5	3	4	3	5	3
45	4	4	5	4	5	5	4	4	5	3
46	4	3	4	4	5	4	3	3	4	3
47	4	5	4	4	5	4	3	4	5	5
48	3	4	3	3	4	5	3	4	3	4
49	5	4	3	4	5	3	4	5	4	3
50	4	5	3	4	3	5	4	3	4	3

303. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала из базы данных 100 семиклассников, обучающихся в различных (их 50) школах города. Получены следующие результаты:

3	4	5	4	3	4	3	4	4	4	5	4	4	5	5	3	3	4	3	4
5	4	5	4	4	5	3	2	4	5	4	3	2	3	3	3	3	4	4	4
5	5	5	4	5	4	3	3	3	4	4	5	4	3	4	5	5	4	4	4
4	4	5	4	5	4	4	3	3	4	5	4	4	4	4	4	5	4	5	4
5	4	3	4	3	4	3	3	2	3	4	5	4	3	4	5	4	5	4	3

304. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала по одному семикласснику с каждой из 50 школ города.

Получены следующие результаты: 4, 4, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 4, 5, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 5, 4, 5, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 3, 3, 4, 3, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 5, 3, 3, 3, 5, 4, 5, 4, 4, 4, 3.

305. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия отбирает из базы данных каждого пятого семиклассника города N. Получены следующие результаты

3	4	5	4	3	4	3	4	4	4	5	4	4	5	5	3	3	4	3	4
5	4	5	5	4	5	3	2	4	5	4	3	2	3	3	3	4	4	4	4
5	5	5	4	5	4	5	3	3	4	4	5	4	4	4	5	5	4	4	4
5	4	3	4	3	4	3	3	2	3	4	5	4	3	4	5	4	5	4	3
4	3	5	5	4	4	3	4	4	4	5	4	4	5	3	3	4	3	4	4
5	4	5	4	4	3	4	4	4	5	4	4	2	3	3	3	4	4	4	4
5	5	5	4	5	4	3	3	3	4	4	5	4	4	4	5	5	4	4	5
3	5	4	4	5	4	3	3	3	4	4	5	4	3	4	5	5	3	4	4
4	3	5	4	2	4	4	3	4	4	3	5	4	4	5	3	5	4	4	4
5	4	3	5	3	4	3	3	3	3	4	3	3	3	4	5	4	5	4	3

306. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала первые 8 школ города (из 50 имеющихся) и оценила качество знаний каждого учащегося выбранных школ. Получены следующие результаты.

СОШ №1: 3, 4, 3, 4, 3, 5, 4, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 3, 5, 5, 4.

СОШ №2: 5, 5, 4, 4, 4, 5, 4, 4, 3, 4, 3, 5, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 3.

СОШ №3: 5, 5, 5, 4, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 3, 5, 5, 4, 5, 3, 4, 5, 3.

СОШ №4: 4, 3, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 5, 4, 5, 4, 3, 3, 4, 3, 5, 4, 4, 5, 5, 4, 5, 3, 4, 5.

СОШ №5: 3, 5, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 5.

СОШ №6: 5, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 3, 5.

СОШ №7: 4, 5, 4, 4, 4, 5, 4, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 5, 4, 2, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 3, 5, 5, 4.

СОШ №8: 5, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 5, 4, 5, 5, 5, 4, 5, 3, 4, 5, 3.

307. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала случайным образом 200 семиклассников из базы данных учащихся города. Получены следующие результаты.

3	4	5	4	3	4	3	4	4	4	5	4	4	5	5	3	3	4	3	4
2	4	5	5	4	5	3	2	4	5	4	3	2	3	3	3	4	4	4	4
3	4	5	4	5	4	5	3	3	4	4	5	4	4	4	5	5	4	4	4
4	3	4	5	4	4	3	3	2	3	4	5	4	3	4	5	4	5	4	3
5	4	4	4	3	4	5	4	4	4	5	4	4	5	5	3	3	4	3	4
5	4	3	4	5	5	4	4	4	5	4	4	2	3	3	3	4	4	4	4
4	4	5	5	5	4	5	5	3	3	4	5	4	4	4	5	5	4	4	5
4	2	3	3	3	3	4	3	3	4	3	5	4	3	4	5	5	3	4	4
5	5	4	5	3	2	4	5	4	3	2	4	4	4	5	3	5	4	4	4
3	4	5	4	3	4	3	4	4	4	5	4	4	3	4	5	4	5	4	3

308. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике каждая школа города предоставила список из 5 семиклассников. Получены следующие результаты.

СОШ №1: 5, 5, 5, 5, 5.

СОШ №2: 5, 3, 5, 5, 5.

СОШ №3: 4, 5, 5, 5, 5.

СОШ №4: 5, 5, 5, 4, 5.

СОШ №5: 5, 5, 5, 5, 5.

СОШ №6: 5, 5, 4, 5, 5.

СОШ №7: 3, 4, 5, 4, 5.

СОШ №8: 5, 5, 4, 5, 5.

СОШ №9: 4, 5, 5, 5, 5.

СОШ №10: 5, 5, 5, 5, 5.

СОШ №11: 3, 5, 5, 5, 5.

СОШ №12: 5, 5, 5, 5, 4.

СОШ №13: 5, 4, 5, 5, 5.

СОШ №14: 3, 4, 5, 5, 5.

СОШ №15: 5, 5, 5, 4, 5.

СОШ №16: 5, 5, 5, 4, 5.

СОШ №17: 5, 4, 5, 3, 5.

СОШ №18: 5, 5, 3, 5, 4.

СОШ №19: 5, 4, 5, 5, 5.

СОШ №20: 3, 4, 5, 5, 5.

СОШ №21: 5, 4, 5, 5, 5.

СОШ №22: 5, 5, 5, 4, 5.

СОШ №23: 5, 5, 5, 5, 5.

СОШ №24: 5, 5, 5, 5, 4. СОШ №25: 5, 4, 5, 5, 5. СОШ №26: 4, 4, 5, 5, 5.
 СОШ №27: 4, 5, 5, 5, 5. СОШ №28: 5, 5, 5, 4, 5. СОШ №29: 5, 4, 5, 4, 5.
 СОШ №30: 5, 3, 3, 5, 4. СОШ №31: 5, 5, 5, 4, 5. СОШ №32: 5, 4, 5, 5, 5.
 СОШ №33: 5, 4, 5, 5, 5. СОШ №34: 5, 5, 5, 4, 5. СОШ №35: 5, 5, 5, 5, 4.
 СОШ №36: 5, 5, 5, 5, 4. СОШ №37: 5, 4, 5, 5, 5. СОШ №38: 4, 4, 5, 5, 5.
 СОШ №39: 4, 5, 5, 5, 5. СОШ №40: 4, 5, 5, 4, 5. СОШ №41: 5, 4, 5, 4, 5.
 СОШ №42: 5, 4, 3, 5, 4. СОШ №43: 5, 5, 5, 4, 5. СОШ №44: 5, 4, 5, 5, 5.
 СОШ №45: 5, 4, 5, 4, 5. СОШ №46: 5, 4, 5, 4, 5. СОШ №47: 3, 5, 5, 5, 4.
 СОШ №48: 5, 3, 5, 5, 4. СОШ №49: 5, 5, 5, 4, 5. СОШ №50: 5, 5, 5, 5, 5.

309. Для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала 5 «проблемных» школ города (из 50 имеющихся) и будет оценивать качество знаний каждого семиклассника выбранной школ. Получены следующие результаты.

Школа А: 3, 4, 3, 4, 3, 5, 4, 2, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 3.

Школа Б: 3, 3, 3, 4, 3, 5, 4, 2, 4, 5, 5, 3, 4, 5, 4, , 4, 4, 3, 3, 3, 4, 3, 3.

Школа В: 3, 3, 4, 4, 2, 5, 3, 2, 3, 5, 3, 4, 4, 5, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 3.

Школа Г: 3, 5, 3, 4, 3, 5, 2, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 5, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 5, 3.

Школа Д: 3, 4, 4, 4, 3, 5, 4, 2, 4, 4, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 3, 4, 4, 3.

310. В городе N для оценки качества знаний учащихся 7 класса по математике комиссия выбрала по одному семикласснику из алфавитного списка таким образом, что фамилия первого начиналась на букву А, второго – на букву Б, третьего – на букву В, и т.д. Таким образом выбранными оказались 22 семиклассника, которые показали следующие результаты: 3, 4, 5, 4, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 3, 4, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 4, 5, 3.

Задачи II уровня (по 30 баллов). Проанализируйте результаты эксперимента. Сформулируйте соответствующие выводы.

311. Для определения оптимального времени на выполнение теста по математике, состоящего из 10 заданий провели эксперимент, результаты которого отражены в таблице.

№ задания теста	Время выполнения учащимися задания (в мин.)																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	2	4	5	5	8	10	6	8	6	12	6	8	15	9	7	5	8	9	12	10
II	3	7	5	6	8	11	7	8	6	11	6	9	19	10	7	5	7	9	11	11
III	3	7	5	5	8	11	6	8	6	10	7	8	18	9	8	5	8	9	12	10
IV	3	5	5	6	9	12	6	8	7	12	6	9	19	8	7	5	7	10	14	11
V	4	6	5	7	9	12	9	8	7	14	7	8	17	10	8	5	9	10	14	11
VI	3	5	7	6	8	11	7	8	8	13	6	8	16	11	9	4	9	9	13	10
VII	4	6	5	5	7	15	10	8	7	14	8	9	17	11	9	5	8	10	12	15
VIII	5	7	5	6	8	13	10	9	9	15	8	10	-	12	9	5	9	10	-	15
IX	3	8	8	8	8	11	7	9	8	14	8	9	19	9	8	5	8	9	13	11
X	4	7	5	7	9	12	8	8	7	12	7	8	-	10	9	5	9	10	14	10

312. Учитель, проверяя знания учащихся по теме, предложил им выполнить контрольную работу, состоящую из 6 заданий сначала, непосредственно после изучения темы, а затем, спустя 2 месяца после её изучения. Результаты этого эксперимента отражены в таблице.

№	Отметка учащихся (по 5-балльной шкале)																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Результаты контрольной работы, проведённой сразу после изучения темы																					
I	5	5	5	5	4	4	5	5	5	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
II	5	5	5	4	4	4	4	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
III	5	5	5	5	4	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	4
IV	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	4	4	5	5	5	4
V	5	4	4	4	3	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	4	4	5	5	4
VI*	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	4	5	5	5	4
Результаты контрольной работы, проведённой два месяца спустя после изучения темы																					
I	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	3	5	4	4	5	5	5	5	5	5	5
II	5	5	5	4	4	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
III	5	5	4	4	4	5	5	5	4	4	3	4	4	3	4	5	4	5	5	5	5
IV	5	4	4	4	3	4	4	4	4	3	3	3	4	3	4	4	4	5	5	5	4
V	5	4	4	4	3	4	4	3	4	3	3	3	3	3	3	4	4	5	5	4	4
VI*	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	4	4	3

313. Учитель, решил выяснить уровень интереса к своему предмету учащихся класса, в котором он был классным руководителем. На протяжении 7 лет он вёл обследование. Результаты этого эксперимента отражены в таблице.

год	Уровень интереса учащихся (по 10-балльной шкале)																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Результаты контрольной работы, проведённой сразу после изучения темы																					
2002	7	10	10	9	7	7	10	10	10	10	10	10	10	10	7	7	9	10	10	10	10
2003	7	9	10	9	7	7	10	10	10	10	10	10	10	10	7	7	8	10	10	10	10
2004	8	9	9	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	10	10	10	9
2005	8	8	9	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	10	10	10	9
2006	9	8	8	7	7	7	7	7	7	5	5	5	5	5	6	6	6	10	10	10	9
2007	9	7	9	6	7	7	7	7	7	6	6	6	5	5	3	3	3	10	9	9	5
2008	10	7	8	5	7	7	5	5	5	5	5	5	5	5	3	3	3	10	9	9	5

314. Творческое задание (100 баллов). Объясните разницу в результатах обследования качества знаний учащихся 7 классов по математике, полученных путём различных способов отбора объектов исследования (задания №№ 301-310). Какой результат на ваш взгляд наиболее точно отражает положение дел? Ответ поясните.

315. Творческое задание (100 баллов). Математическая статистика возникла в XVII веке и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX – начало XX в.) обязано, в первую очередь, П.Л.Чебышеву, А.А.Маркову, А.М.Ляпунову, а также К.Гауссу, А.Кетле, Ф.Гальтону, К.Пирсону и др.

В XX в. наиболее существенный вклад в математическую статистику был сделан советскими математиками (В.И.Романовский, Е.Е.Слуцкий, А.Н.Колмогоров, Н.В.Смирнов), а также английскими (Стьюден, Р.Фишер, Э.Пирсон) и американскими (Ю.Нейман, А.Вальд) учеными.

Охарактеризуйте вклад каждого из названных учёных в развитие математической статистики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	1
I. Правила комбинаторики	5
II. Комбинаторные соединения	8
III. Задачи о числе комбинаторных соединений	14
IV. Комбинаторные соединения с повторениями	19
V. Бином Ньютона	22
VI. События. Алгебра событий	26
VII. Вероятность. Определение вероятности	34
VIII. Вероятность суммы и произведения событий	36
IX. Элементы математической статистики	41

Учебно-методическое пособие

Светлана Владимировна Лебедева

Элементарная математика.

Часть 4.

Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики

Работа издана в авторской редакции