

Министерство образования и науки Российской Федерации
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет
Кафедра математики и методики её преподавания

Лебедева С.В.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Практикум по общей методике

Учебно-методическое пособие

*для студентов, обучающихся по направлению подготовки
050100 – Педагогическое образование (Профиль подготовки –
Математическое образование)*

Саратов, 2012

*Рекомендовано к печати
кафедрой математики и методики её преподавания
Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского*

Л 33 **Лебедева С.В. Методика обучения математике. Практикум по общей методике:** Учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 050100 – Педагогическое образование (профиль подготовки – Математическое образование) / С.В.Лебедева – Саратов, 2012. – 170 с.

© С.В. Лебедева, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ..... 5

Тема 1. Стандарт школьного образования по математике. Содержание школьного образования по математике	5
Тема 2. Урок как основная форма обучения математике: актуализация знаний	9
Тема 3. Урок как основная форма обучения математике: изучение нового материала.....	11
Тема 4. Урок как основная форма обучения математике: закрепление изученного материала	13
Тема 5. Урок как основная форма обучения математике: повторение, обобщение и систематизация материала	18
Тема 6. Урок как основная форма обучения математике: контроль знаний....	20
Тема 7. Урок как основная форма обучения математике: коррекция знаний и умений учащихся.....	25
Тема 8. Организация самостоятельной работы при обучении математике.....	30
Лабораторный практикум. Организация самостоятельной работы при обучении математике	35
Тема 9. Организация проверки и оценки результатов обучения математике..	36
Лабораторный практикум. Организация проверки, контроля и оценки результатов обучения математике	37
Тема 10. Методические аспекты использования ИКТ в реализации информационно-деятельностного подхода в обучении математике и активизации познавательной деятельности учащихся	40
Тема 11. Особенности обучения математике в 5-6 классах: арифметика	44
Тема 12. Особенности обучения математике в 5-6 классах: наглядная геометрия.....	46
Тема 13. Особенности обучения математике в 5-6 классах: стохастическая линия	50
Тема 14. Интеграционные связи математики	53
Тема 15. Методика изучения элементов математической логики. Интеграционные взаимосвязи математики и информатики при изучении элементов логики.....	54
Тема 16. Элементы теории множеств в курсе математики и информатики.....	56
Тема 17. Методика изучения комбинаторики и теории вероятностей	57
Тема 18. Информационное моделирование задач.....	60
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	61

Приложение 1. Лебедева С.В. Методические условия эффективности урока математики: проблема выбора оптимальных форм работы с учащимися.	61
Приложение 2. Груденов Я.И. Организация самостоятельной работы.....	66
Приложение 3. Схема анализа текстов методического содержания.....	69
Приложение 4. Гусев В.А. Активность и самостоятельность учащихся.....	70
Приложение 5. Информационно-коммуникационная образовательная среда	74

Приложение 6. Лебедева С.В., Худайбергенова М.Ч. О проблемах использования ИКТ при обучении школьников математике	75
Приложение 7. Лебедева С.В., Мухангалиева Г.Н. Активизация самостоятельной работы учащихся посредством включения в содержание обучения историко-математического материала	80
Приложение 8. Гладкова А.В. Использование практической направленности и межпредметных связей на уроках математики	85
Приложение 9. Капитонова Т.А., Игнатова Ю.А. Логические задачи как средство развития познавательной самостоятельности учащихся 5-6 классов.....	88
Приложение 10. Элементы теории множеств в курсе алгебры основной школы.....	95
Приложение 11. Изучение элементов комбинаторики учащимися основной школы.....	111
Приложение 12. Котова Н.В., Непомнящая Е.А. О проблемах изучения элементов комбинаторики и теории вероятностей в общеобразовательной школе.....	117
Приложение 13. Исследовательская работа. Покупка пирожных.....	120
Приложение 14. Лебедева С.В., Харькова С.С. Задачи на движение в школьном курсе математики	124
Приложение 15. Пилипенко В.В., Лебедева С.В. Информационные модели задач «на проценты»	134
Приложение 16. Зубарева И.И. Ещё раз о процентах.....	148
Приложение 17. Баврин Г. И., Метод моделирования как элемент содержания обучения	156
Приложение 18. Лебедева С.В., Пилипенко В.В. Моделирование задач на движение в условиях интеграции физики, математики, информатики	159
Приложение 19. Вариант 0 зачётной работы.....	165
Приложение 20. Образец оформления заданий.....	167

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. Стандарт школьного образования по математике. Содержание школьного образования по математике

I. Предваряющее задание.

1. Иметь в распоряжении материалы номера журнала «Вестник образования России», в котором опубликован федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) к использованию в образовательном процессе в образовательных учреждениях, реализующих образовательные программы общего образования и имеющих государственную аккредитацию, на текущий учебный год.
2. Ознакомиться с федеральным перечнем учебников по математике, рекомендованных (допущенных) Минобрнауки России к использованию в общеобразовательных учреждениях на текущий учебный год.
3. Выбрать из федерального перечня учебник для дальнейшего анализа. Познакомиться со структурой и содержанием учебника.
4. Иметь в распоряжении авторскую программу обучения математике.
5. Сформировать мнение по вопросу: «Стоит ли учителю математики использовать в учебном процессе учебник, рекомендованный (допущенный) Минобрнауки России? Или же учитель должен разработать собственный образовательный ресурс по своему предмету?».

II. Повторение материала по теме «Носители содержания образования» – тест – 5 минут.

Задание 1. Сопоставьте термин определению соответствующего понятия.

	Термин	Определение	
1	Базисный учебный план	документ, регламентирующий профессиональную деятельность учителя-предметника, гарантирующий выполнение цели и задач обучения и предохраняющий учащихся от перегрузок – включает перечень тем, задачи их изучения, количество отводимых на темы часов, определение типа урока, межпредметные связи, методическое обеспечение	А
2	Дидактическая система учителя	издание, излагающее основы научных знаний по определённому учебному предмету в строгом соответствии с целями обучения и другими параметрами, установленными соответствующими нормативными документами и требованиями дидактики	Б
3	Качество образования	логика изучения основных идей с указанием последовательности тем, вопросов и общей дозировки времени на их изучение	В
4	Календарно-тематический план	документ, определяющий структуру содержания образования, соотношение обязательной части основной образовательной программы и части, формируемой участниками образовательного процесса (инвариантную и вариативную); определяющий максимально допустимую нагрузку при 5- и 6-дневной учебной недели по классам, а также количество недельных часов для финансирования	Г
5	Общественный договор в области образования	нормативный документ, очерчивающий круг основных знаний, умений и навыков, подлежащих усвоению учащимися по каждому отдельно взятому учебному предмету	Д

6	Образовательный стандарт	совокупность документов и дидактических материалов, с помощью которых учитель осуществляет обучение, развитие и воспитание детей на уроках и внеклассных занятиях	Е
7	Примерная учебная программа	комплексная характеристика, отражающая диапазон и уровень образовательных услуг, предоставляемых населению (различного возраста, пола, физического и психического состояния) системой начального, общего, профессионального и дополнительного образования в соответствии с интересами личности, общества и государства	Ж
8	Учебная программа	выявленные и согласованные социально-образовательные требования, предъявляемые к образованию семьей, обществом и государством, выражающие солидарную ответственность за результаты образования	З
9	Учебник	совокупность требований обязательных при реализации основных образовательных программ начального общего, основного общего, среднего (полного) общего, начального профессионального, среднего профессионального и высшего профессионального образования образовательными учреждениями, имеющими государственную аккредитацию	И
10		нормативный документ, имеющий ориентирующий характер, в котором определяются цели изучения предмета на каждой ступени обучения, особенности содержания, перечень изучаемого материала, примерное тематическое планирование с определением основных видов деятельности школьников; планируемые результаты освоения дисциплины, рекомендации по материально-техническому оснащению учебного процесса	К



III. Практическая работа (15 минут + 15 минут).

Задание 2. По материалам номера журнала «Вестник образования России» ответить на следующие вопросы.

1. Перечислите рубрики журнала.
2. Каким вопросам посвящены статьи каждой рубрики?
3. Какая статья, на ваш взгляд, наиболее актуальна? Поясните почему. Прокомментируйте содержание статьи.

Задание 3. По содержанию авторской программы ответить на следующие вопросы.

1. Сформулировать концепцию учебной программы.
2. Перечислить все достоинства программы.
3. Указать, на какой контингент учащихся программа ориентирована в большей степени.
4. Перечислить основные виды и приёмы учебной деятельности, на которые опирается автор программы.
5. Указать методический инструментарий программы.

IV. Лабораторная работа (30 минут).

Задание 4. Заполнить таблицу

Учебник Мордкович А.Г. Алгебра. 8 кл.: В двух частях. Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2003						
Раздел / глава	Главы / параграфы	Параграфы / пункты	Новизна учебного материала	Материал учебника		
				«пригодный» для составления школьной лекции	для самостоятельного изучения учащимися по учебнику	который возможно изучать в игровой форме
1. Алгебраические дроби	1. Основные понятия		новый	+	+	
	2. Основное свойство алгебраической дроби		преимущественно новый: аналогия с темой «Обыкновенные дроби»		++	+
	3. Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями				++	+
	4. Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями				++	+
	5. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраических дробей в степень				++	
	6. Преобразование рациональных выражений			+		
	7. Первые представления о решении рациональных уравнений					
2. Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$						

V. Семинар-беседа «Стоит ли учителю математики использовать в учебном процессе учебник, рекомендованный Минобрнауки России? Или же учитель должен сам разработать образовательный ресурс по предмету?» (25 минут)

VI. Внеаудиторное задание.

(1) Провести логико-дидактический анализ учебника математики.

(2) Провести логико-дидактический анализ печатного учебного пособия по математике.

(3) Конспектирование статьи *Кузнецов А.А., Зенкина С.В. Учебник в составе новой информационно-коммуникационной образовательной среды / Информатика и образование, 2009, №6, с.3-1.1*

(4) Выписать должностные обязанности, знания и требования к квалификации той категории педагогических работников, на которую Вы профессионально ориентированы в первую очередь. Используйте для этого *Единый квалификационный справочник должностей руководителей, специалистов и служащих (ЕКС)* – приложение к Приказу Министерства здравоохранения и социального развития Российской Федерации (Минздравсоцразвития России) от 26 августа 2010 г. N 761н г. Москва «Об утверждении Единого квалификационного справочника должностей руководителей, специалистов и служащих, раздел «Квалификационные характеристики должностей работников образования»».

Основные составляющие компетентности педагогических работников (извлечение из ЕКС):

Профессиональная компетентность – качество действий работника, обеспечивающих эффективное решение профессионально-педагогических проблем и типичных профессиональных задач, возникающих в реальных ситуациях педагогической деятельности, с использованием жизненного опыта, имеющейся квалификации, общепризнанных ценностей; владение современными образовательными технологиями, технологиями педагогической диагностики (опросов, индивидуальных и групповых интервью), психолого-педагогической коррекции, снятия стрессов и т.п., методическими приемами, педагогическими средствами и их постоянное совершенствование; использование методических идей, новой литературы и иных источников информации в области компетенции и методик преподавания для построения современных занятий с обучающимися (воспитанниками, детьми), осуществление оценочно-ценностной рефлексии.

Информационная компетентность – качество действий работника, обеспечивающих эффективный поиск, структурирование информации, ее адаптацию к особенностям педагогического процесса и дидактическим требованиям, формулировку учебной проблемы различными информационно-коммуникативными способами, квалифицированную работу с различными информационными ресурсами, профессиональными инструментами, готовыми программно-методическими комплексами, позволяющими проектировать решение педагогических проблем и практических задач, использование автоматизированных рабочих мест учителя в образовательном процессе; регулярная самостоятельная познавательная деятельность, готовность к ведению дистанционной образовательной деятельности, использование компьютерных и мультимедийных технологий, цифровых образовательных ресурсов в образовательном процессе, ведение школьной документации на электронных носителях.

Коммуникативная компетентность – качество действий работника, обеспечивающих эффективное конструирование прямой и обратной связи с другим человеком; установление контакта с обучающимися (воспитанниками, детьми) разного возраста, родителями (лицами, их замещающими), коллегами по работе; умение вырабатывать стратегию, тактику и технику взаимодействий с людьми, организовывать их совместную деятельность для достижения определенных социально значимых целей; умение убеждать, аргументировать свою позицию; владение ораторским искусством, грамотностью устной и письменной речи, публичным представлением результатов своей работы, отбором адекватных форм и методов презентации.

Правовая компетентность – качество действий работника, обеспечивающих эффективное использование в профессиональной деятельности законодательных и иных нормативных правовых документов органов власти для решения соответствующих профессиональных задач.

Тема 2. Урок как основная форма обучения математике: актуализация знаний

I. Предваряющее задание. Разработать модель урока актуализации знаний по теме «Делители и кратные»

II. Повторение материала по теме «Технология проблемного обучения» – тест – 10 минут: сопоставьте термин определению соответствующего понятия.

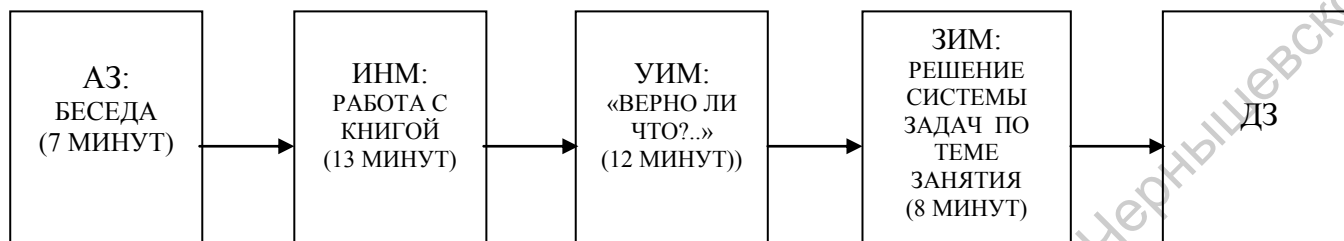
	Термин	Определение	
1	Контекстное обучение	активное развивающее обучение, основанное на организации поисковой деятельности обучаемых, на выявлении и разрешении ими реальных жизненных или учебных противоречий	А
2	Обстановка	обучение, в основе которого лежит выявление противоречия устранимого путем теоретических умозаключений или практико-ориентированных действий	Б
3	Проблема	обучение, при котором используется система дидактических методов активизации познавательной деятельности, направленная на развитие у обучающегося творческой активности и познавательного интереса, понимания диалектического процесса познания; совершенствование структуры мыслительной деятельности; развитие навыков анализа, синтеза, обобщения в процессе разрешения проблем	В
4	Проблемная ситуация	осознание субъектом невозможности разрешить трудности и противоречия, возникшие в данной ситуации, средствами наличного знания и опыта	Г
5	Проблемное обучение	постановка проблемы, общие или конкретные способы разрешения проблемы, контроль, оценка, коррекция – этапы решения учебных задач	Д
6	Ситуация	процесс приобретения человеком новых знаний, умений и навыков или изменения старых в ходе решения учебных задач	Е
7	Традиционное обучение	психологическая модель условий порождения мышления на основе ситуативно возникающей познавательной потребности	Ж
8	Учебная деятельность	соотношение обстоятельств и условий, в которых разворачивается деятельность человека или группы, содержащее противоречие и не имеющее однозначного решения	З
9	Учебная задача	творческая задача, направленная на выработку исследовательских умений учащихся, уже решенная учеными, но новая для учащихся	И
10	Учебная проблема	цель, которую надлежит достигнуть ученику в определенных условиях учебного процесса	К
11	Учебные действия	характеристика определенного психологического состояния, возникающего в процессе выполнения задания, для которого нет готовых средств и которое требует усвоения новых знаний о предмете, способах или условиях выполнения задания	Л

III. Практическая работа – групповая работа – 35 минут.
Проектирование урока актуализации знаний (АЗ) по теме «Делители и кратные».

IV. Защита проектов – 45 минут.

V. Внеаудиторное задание.

(1) Структурирование уроков по теме «Обыкновенные дроби» (5 класс):
Образец:



(2) Изучить методику групповых и коллективных способов обучения. Предложить сценарий урока по теме «Обыкновенные дроби» (5 класс) с использованием описанных методик.

Сущность группового обучения состоит в следующем. На групповых занятиях происходит взаимодействие между педагогом и учащимися и между учащимися, академические знания помогают учащимся выявить главные жизненные ценности.

Коллективным способом обучения является такая его организация, при которой обучение осуществляется путем общения в динамических парах, когда каждый учит каждого.

Особенности методики КСО в сравнении с ГСО (по В.К. Дьяченко)	
ГСО	КСО
Организационные	
четкость, упорядоченность, говорит один, общение учащихся отсутствует, молчание, постоянное рабочее место	отсутствует, говорят все, общаются все, рабочий шум, смена
Дидактические	
обучает педагог-профессионал, весь материал – сразу и для всех, мало самостоятельности, сотрудничество отсутствует, усвоение и применение разнесены	обучают ученики разные темпы и материал полная самостоятельность сотрудничество – основа обучения максимально приближены
Развивающие	
ученик – объект, уравниловка, усреднение способности детей, систематический характер обучения. не учатся выступать, не умеют объяснять	ученик – субъект + объект, в соответствии с индивидуальными особенностями, спонтанный характер, учатся выступать, рассуждают, доказывают, развивают педагогические способности
Воспитательные	
каждый работает на себя, отношения – неколлективистские	на себя и на других, отношения ответственной зависимости (коллективистские)

(3) Проанализировать материалы статьи (сайт ИД «1 сентября», 2011-12 уч.год), посвящённой актуализации знаний на уроках математики.

Тема 3. Урок как основная форма обучения математике: изучение нового материала

I. Предваряющее задание. (1) Проанализировать содержание темы (главы учебника) «Обыкновенные дроби» (6 класс): выявить новый, преимущественно новый, преимущественно знакомый учебный материал. Результаты анализа оформить в таблицу. (2) Подобрать для анализа несколько математических сказок.

«Обыкновенные дроби» (6 класс)			
Математика: Учебник для 6 кл. общеобразоват. учреждений/ Н.Я.Виленкин, В.И.Жохов, А.С.Чесноков, С.И.Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1998			
§1. Делимость чисел			
Раздел	Учебный материал		
	новый	преимущественно новый	преимущественно знакомый
1. Делители и кратные	+		
2. Признаки делимости на 10, на 5 и на 2	+		
3. Признаки делимости на 9 и на 3			
4.			

Разработать модель (второй по счёту) урока изучения нового материала по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс).

Разработать модель (первого по счёту) урока изучения преимущественно нового материала по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс).

Разработать модель (первого по счёту) урока изучения преимущественно знакомого материала по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс).

II. Обсуждение выбора уроков для моделирования (10 минут).

III. Конспектирование (15 минут) статьи Лебедева С.В. Методические условия эффективности урока математики: проблема выбор оптимальных форм работы с учащимися. // Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки / Межвуз. Сб. научн. тр. – Саратов: Издательство «Научная книга», 2003, – с.27-31. (см. Приложение 1).

IV. Творческая работа – написать эссе[☞] по одной из проблем, заявленных в статье Методические условия эффективности урока математики: проблема выбор оптимальных форм работы с учащимися – 20 минут. По завершении обменяться работами для последующего рецензирования (внеаудиторное задание).

V. Практическая работа – 20 минут.

Задание 1. Провести сравнительный анализ математических сказок. Сформулировать требования, предъявляемые к математической сказке – форме изучения материала.

[☞] Пять лучших эссе будут опубликованы в очередном сборнике научно-методических работ «Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки»

«Создание сказок – один из самых интересных для детей видов поэтического творчества. Вместе с тем это важное средство для умственного развития...

Если мне удавалось добиться, что ребенок, в развитии мышления которого встречались серьезные затруднения, придумал сказку, связал в своем воображении несколько предметов окружающего мира – значит можно сказать с уверенностью, что ребенок научился мыслить».

(В.А. Сухомлинский)

Сказка – жанр литературного творчества. Слово «сказка» предполагает, что о нём узнают, «что это такое» и узнают, «для чего» она, сказка, нужна. Сказка целевым назначением нужна для подсознательного или сознательного обучения ребёнка в семье правилам и цели жизни, необходимости защиты своего «ареала» и достойного отношения к другим общинам.

«Какими элементами нужно дополнить множество, тащившее репку, чтобы получилось множество, вытащившее репку?» Эту и немало других математических сказок сочинили для ребят 7-9 лет Ю. Макарычев, К. Нешков и А. Пышкало. Их совместный труд – «Математика в начальных классах» под редакцией вице-президента Академии педагогических наук А. Маркушевича – выпускает издательство «Просвещение».

Для возбуждения интереса к математике, для развития творческого мышления необходимо создание детьми математических сказок, которые являются одной из форм развития математического творчества. Работа по созданию математических сказок должна идти параллельно с теми или иными формами специального обучения, содержательно дополняя его. Сочинение математических сказок не является заменой обучения. Создание математических сказок предполагает не только умение фантазировать на математические темы, но и умение владеть грамотной речью, а также уверенное владение математическими понятиями. Сочинение математических сказок – занятие, которое увлекает детей различного возраста, однако в средних классах возрастают не только возможности, но и трудности: как лучше построить сюжетную линию, чтобы не нарушить целостности сказки и не прийти в противоречие с математическими понятиями. Самостоятельно придуманная сказка с применением в сюжетной линии математических понятий позволяет прочнее и полнее запомнить эти понятия. Предлагая сочинить математическую сказку, ставится задача развития математического творчества, умения выражать свои мысли логично и последовательно. Обычно работа по формированию умения сочинять математические сказки начинается с чтения одной из замечательных математических сказок Феликса Кривила. Потом предлагается желающим придумать свою математическую сказку, пояснив, что ценность работы будет заключаться в том, чтобы в сюжетную линию сказки были, например, включены свойства чисел или геометрических фигур. Написать математическую сказку берутся многие, но не все и не у каждого получается удачно. Учащимся необходимо напомнить структуру сказки, несмотря на то, что это они уже изучали на уроках литературы.

Задание 2. Проектирование урока изучения нового материала по теме «Обыкновенные дроби».

VI. Защита проектов – 25 минут.

VII. Внеаудиторное задание.

(1) Дать рецензию на эссе сокурсника *Методические условия эффективности урока математики: проблема ...* 

(2) Разработать сценарий урока изучения преимущественно знакомого учебного материала по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс).

(3) Разработать демонстрационный материал к уроку.

(4) Разработать математическую сказку по теме «Обыкновенные дроби».

(5) Проанализировать материалы статьи (сайт ИД «1 сентября», 2011-2012 уч.год), посвящённой ИНМ на уроках математики.

 Пять лучших эссе будут опубликованы в очередном сборнике научно-методических работ «Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки»

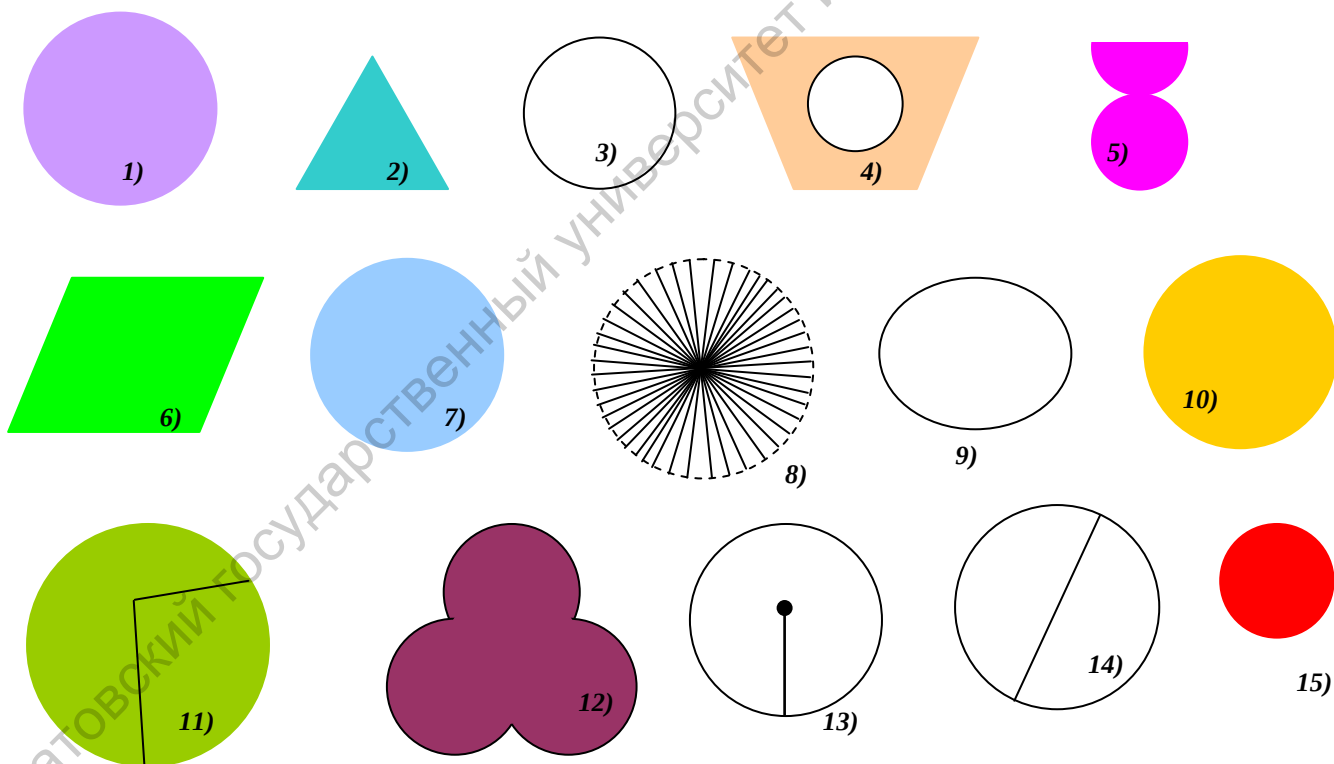
Тема 4. Урок как основная форма обучения математике: закрепление изученного материала

I. Предваряющее задание. Разработать модель урока (1) закрепления нового материала, (2) закрепления преимущественно нового материала, (3) закрепления преимущественно знакомого материала. Уроки ЗИМ должны соответствовать разработанным ранее урокам ИНМ.

II. Самостоятельная работа (10 минут). Изучить новый материал

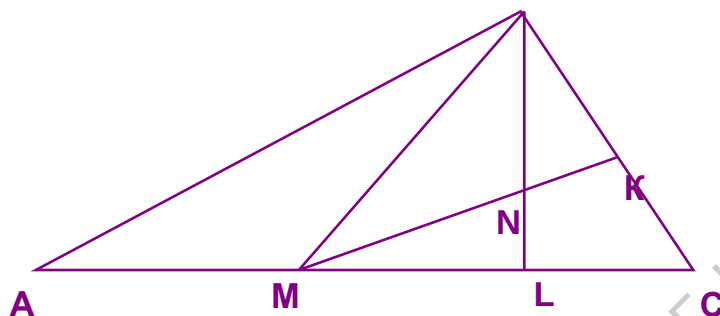
Упражнения на распознавание. Алгоритм составления: (1) выбрать понятие, (2) из определения выделить все признаки понятия (провести его логико-дидактический анализ), (3) каждый признак в определении заменить поочередно на его отрицание, и к изменённому таким образом предложению составить пример (контрпример для объекта, подводимого под понятие), (4) контрпримеры чередовать с примерами, удовлетворяющими определению данного понятия, (5) сформулировать задание к упражнению.

Пример 1. Тема «Окружность и круг». Задание: выпишите номера тех рисунков, на которых изображены а) окружность, б) круг.



Упражнения на выделение. Алгоритм составления: (1) выбрать понятие (свойство, метод), (2) «накладывая» визуальное представление данного понятия (свойства, метода) несколько раз «на себя же», получить некую совокупность, (3) сформулировать задание.

Пример 1. Тема «Треугольник». Задание: сколько (и какие – перечислить) треугольников изображено на рисунке?



Пример 2. Тема «Пропорции». Задание: решить старинную задачу: в жаркий день 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 часов. Нужно узнать, сколько косцов за 3 часа выпьют такой же бочонок кваса. Указание к задаче: «разбить» данную задачу на элементарные задачи, сводимые к составлению и решению пропорций. Решение.

И элементарная задача	II элементарная задача	III элементарная задача
для 6 косцов	для неизвестного количества косцов	за сутки (24 часа)
1 бочонок – за 8 часов ? бочонков – за 24 часа	1 бочонок – за 3 часа ? бочонков – за 24 часа	3 бочонка – 6 косцов 8 бочонков – ? косцов
3 бочонка выпивают 6 косцов за сутки	8 бочонков выпивают косцы, количество которых нужно найти, за сутки	Итак, 16 косцов за 3 часа выпьют бочонок кваса

Пример 3. Тема «Сложная функция». Задание: показать, как были составлены сложные функции: 1) $y = |\sin(x - \pi/7) + 8| + 1/x$,

2) $y = |(x - 5)^2 + 3|x| - 4|$,

3) $y = \frac{5}{\log_3 x + |x - 3|} - 1$.

Упражнения на классифицирование. Задание (процедура выполнения): 1) рассматривая объекты верхней строки, находим их общий признак(и), 2) отмечаем в нижней строке тот объект, который также обладает этим признаком, а никакие другие два объекта им не обладает.

$$a + b = b + a$$

$$3 + 1 = 5 \cdot 2$$

$$5 \cdot x = 10$$

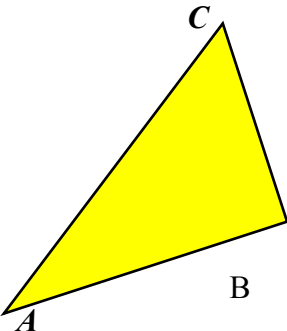
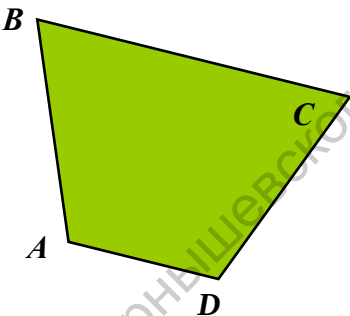
$$7 + 8 = 3 \cdot 5$$

$$a + b > c$$

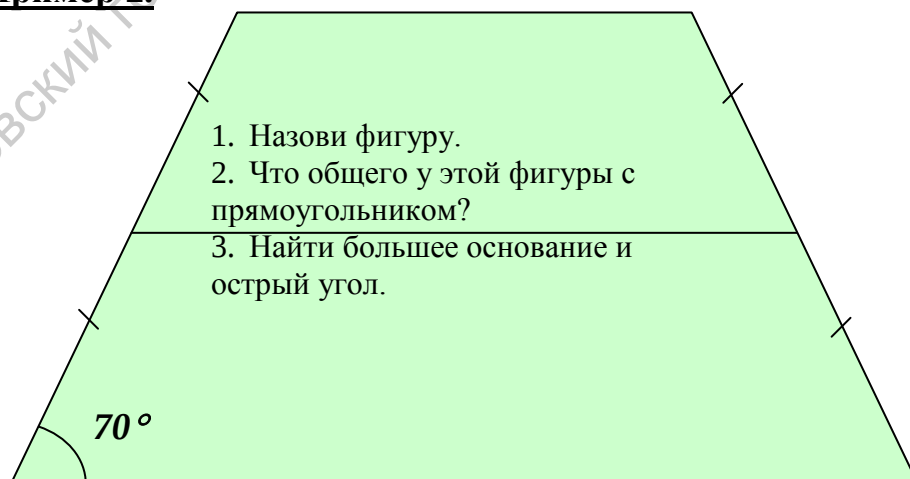
$$7 \cdot a + 3 \cdot b$$

Упражнения на сравнение.

Пример 1. Задание: заполнить таблицу.

Характеристики	Чертёж фигуры	
		
Количество		
• вершин,		
• сторон,		
• углов		
Сумма углов		
Формула		
• для периметра		
• для площади		
Наличие вписанной и описанной окружности		
Правильная форма		
Наличие «замечательных точек»		
Средняя линия		
Высоты		
Биссектрисы углов		

Пример 2.



Подведение под понятие.

Тема «Формулы» (5 класс). Определение: запись какого-нибудь правила с помощью букв называют ФОРМУЛОЙ.

Верно ли, что

- **правило:** имя прилагательное изменяется по падежам и всегда стоит в том же падеже, что и существительное, с которым оно связано по смыслу, – записано с помощью букв (русского алфавита), значит, это и есть формула;¹
- любой закон можно записать формулой;
- всякая формула – это запись какого-нибудь закона или правила;
- $a + b + c$ – это формула;
- $5 \cdot 3 = 7 + 8$ – это формула;
- $18 + a = a + 18$ – это формула;
- $s = v \cdot t$ – это формула;
- $s = v \cdot t$, где s – путь, который некто преодолел за t часов, двигаясь со скоростью v – это формула;
- $P = 4a$ – формула периметра прямоугольника;
- $a + b > a$, где a, b – натуральные числа – это формула;
- $24 = 4 \cdot v$ – это формула.

III. Практическая работа (35 минут). Составление упражнений на усвоение нового материала по теме «Обыкновенные дроби».

IV. Лабораторная работа №2 (20 минут). Провести [классификацию задач](#) по теме «Умножение и деление натуральных чисел» (Математика: Учеб. для 5 кл. сред. шк./Н.Я.Виленкин, В.И.Жохов, А.С.Чесноков, С.И.Шварцбурд. – М., 1995-2005).

394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413
414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433
434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453
454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473
474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493
494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513
514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533

¹ **Замечание.** После этого вопроса следует уточнить формулировку: запись какого-нибудь закона с помощью букв (латинского или греческого алфавита), чисел и знаков-символов математических действий называется формулой.

534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553

554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573

574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593

594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613

614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633

634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653

654	655

V. Практическая групповая работа – 25 минут. Проектирование уроков ЗИМ по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс).

VI. Внеаудиторное задание.

(1) Разработать печатные и электронные средства обучения к урокам ЗИМ.

(2) Проанализировать материалы статьи (сайт ИД «1 сентября», 2011-12 уч.год), посвященной ЗИМ на уроках математики.

(3) Разработать технологическую карту развития общих способностей на уроках закрепления материала по теме «Масштаб».

(4) Выяснить, насколько система задач по математике для учащихся начальной школы отличается от системы задач для учащихся средней школы.

Учитывая специфику курса математики в начальных классах, можно выделить виды заданий, в основе которых лежит*:

- запоминание таблицы арифметических действий;
- владение вычислительными приемами;
- связь определенного понятия с тем или иным арифметическим действием;
- непосредственное применение нужного правила;
- выделение различного и сходного;
- выделение какой-либо закономерности на основе наблюдений;
- косвенное применение того или иного правила;
- выяснение причинно-следственных связей.

* Истомина Н. Б. Активизация учащихся на уроках математики в начальных классах: Пособие для учителя . – М.: Просвещение, 1985. – с. 6

Тема 5. Урок как основная форма обучения математике: повторение, обобщение и систематизация материала

I. Предваряющее задание. Разработать модель урока (1) повторения материала, (2) обобщения и систематизации материала темы «Обыкновенные дроби». Провести сравнительный анализ моделей.

II. Самостоятельная работа (10 минут). Изучить новый материал

Математический диктант (МД) – одна из форм обобщающего и базового повторения – по существу является формой контроля знаний, умений и навыков, но именно этой форме контроля в большей степени присущи основные элементы повторения: вспоминание и обобщение. В ходе проведения математического диктанта ученики выполняют задания, диктуемые учителем, одно за другим.

Виды МД:

- (1) предваряющий (форма базового повторения)
- (2) результативный (форма обобщающего повторения и текущего контроля).

Типы МД:

1. Тип Т (text) – математический диктант теоретического содержания или проверяющий сформированность основных умений и навыков (счёт, знание формул, тождественные преобразования и т.п.)
2. Тип D (drawing) – математический диктант по геометрическому материалу на «построение».
3. Тип T-D (text-drawing) – математический диктант смешанного типа.

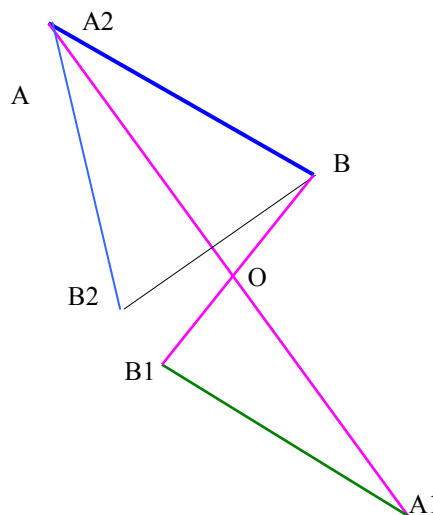
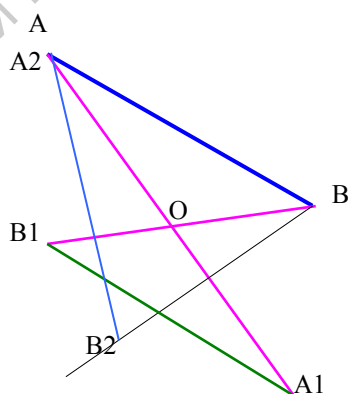
Математический диктант по теме “Осевая и центральная симметрии на плоскости”

(mun D)

1. Отметьте точку O .
2. Изобразите отрезок AB так, чтобы точка O не принадлежала отрезку прямой AB .
3. Постройте точку A_1 – образ точки A при симметрии относительно точки O .
4. Постройте точку B_1 – образ точки B при симметрии относительно точки O .
5. Соедините точки A_1B_1 отрезком.
6. Постройте отрезок A_2B_2 образ отрезка AB при симметрии относительно прямой AA_1 .

(mun T)

7. Определите фигуру ABA_1B_1 .
8. Определите фигуру A_2BB_2 .
9. Определите фигуру BB_1B_2 .



Требования к МД:

- (1) время, отводимое на математический диктант ≈ 10 минут;
- (2) все задания должны «идейно» быть связаны между собой; в идеале, математический диктант – система задач, опирающаяся одна на другую (СОЗ);
- (3) средний, умеренный темп работы;
- (4) необходимо предусмотреть «быстроту» проверки и самопроверки: математический Т-диктант можно проверить непосредственно после его написания; D-диктант проверяется сразу же после его проведения с использованием ТСО: правильный результат – рисунок нужной конфигурации – визуализуется и для удобства восприятия медленно поворачивается по/против часовой стрелке с тем, чтобы каждый ученик узнал «свой» чертёж; Т-D-диктант сдаётся на проверку учителю, а результаты проверки и анализ ошибок проводятся на следующем уроке.
- (5) если основная цель МД – повторение, то во время его проведения возможны (со стороны учителя) фразы, активизирующие мыслительную деятельность учащихся и даже напрямую помогающие вспомнить или связать какие-либо факты. (Например, к п.6.: «Вспомните определение осевой симметрии»; к п.7.: «Вспомните все фигуры, обладающие свойствами, которые отражены в ходе построения, и выберите из них только ту, которая удовлетворяет **всеми** зафиксированными построением свойствами»; к п.9.: «обозначьте пару точек, принадлежащих вашей фигуре и присутствующих на чертеже. Исследуйте получившийся отрезок.»);

III. Практическая работа (35 минут). Составление математических диктантов различных видов и типов по теме «Обыкновенные дроби».

IV. Практическая работа – групповая работа – 25 минут. Проектирование уроков ПОМ по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс).

V. Защита проектов – 20 минут.

VI. Внеаудиторное задание.

- (1) Разработать печатные и электронные средства обучения к урокам ПОМ.
- (2) Проанализировать материалы статьи (сайт ИД «1 сентября», 2011-12 уч.год), посвящённой повторению материала в игровой форме (математическое соревнование или урок-путешествие математического содержания).
- (3) Разработать сценарий математического соревнования для учащихся 8/9 класса (дидактическая цель – повторение материала темы/раздела)
- (4) Разработать сценарий урока-путешествия для учащихся 7 класса (дидактическая цель – повторение материала темы/раздела).

Тема 6. Урок как основная форма обучения математике: контроль знаний

I. Предваряющее задание. Разработать модель урока контроля знаний и умений учащихся по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс).

II. Лабораторная работа (15 минут) – Оценка степени обученности учащихся

В основу контроля над результативностью образовательного процесса можно положить пять последовательных показателей выявления его итогов – пять показателей степени обученности. Используя пятибалльную оценочную шкалу, оцените каждый из предлагаемых в таблице показателей степеней обученности учащихся.

№	Название показателя степени обученности	Характеристика показателя степени обученности	Показатель	Оценка
1	Уровень знакомства (распознавания, различения) – возможность только узнавания в дальнейшем, процесс восстановления запечатлённого в памяти мысленного образа предмета в результате повторного воздействия этого предмета на человека. 4%	Учащийся отличает данный объект, процесс, явление или какое-либо действие от их аналогов (в случае предъявления их в готовом виде), показывая формальное знакомство с данным объектом, процессом и т.д. Самостоятельно представить объект, процесс и т.д. учащийся не может. Дать пояснения (например, провести сравнительный анализ с предложенным аналогом), а тем более применить на практике знания об объекте, процессе и т.д. ученик не может. На вопросы учителя учащийся даёт только односложные ответы, в которых порой заметна попытка «угадать» правильный ответ.	P1	
2	Уровень запоминания характеризует количество усвоенной информации 12%	Учащийся может пересказать содержание определённого текста, правила, воспроизвести формулировку того или иного закона. Учащийся отвечает на вопросы только репродуктивного плана и часто только при их определённой последовательности, отражающей логику построения текста учебника, пособия, конспекта, рассказа учителя и пр.	P2	
3	Уровень понимания – процесс нахождения существенных признаков и связей исследуемых предметов и явлений и вычленение их из массы несущественного, случайного на основе анализа и синтеза, применения правил логического умозаключения и установления сходства и различия причин, вызвавших появление данных объектов и их развития. 20%	Учащийся при формулировке утверждения, может привести примеры, поясняющие её суть, записать утверждение символически, аргументировать свои рассуждения по поводу приведённого утверждения. Ответы ученика на вопросы учителя показывают, что сущность понятия, процесса, явления ученику понятна, а не просто формально закреплена в сознании как какое-то определённое количество информации.	P3	

№	Название показателя степени обученности	Характеристика показателя степени обученности	Показатель	Оценка
4	Уровень простейших (элементарных) умений и навыков 28%	Учащийся показывает умение применять на практике полученные им теоретические знания в простейших (алгоритмизованных) заданиях: решает типовые, стандартные задачи с использованием усвоенных законов и правил, вскрывает легко обнаруживаемые причинно-следственные связи при разборе теоретического материала и умеет определённые несложные теоретические положения связать с практикой. При ответе учащийся способен составить и реализовать план решения элементарной задачи, обосновать любой шаг решения.	<i>P4</i>	
5	Уровень переноса знаний – положительное влияние ранее усвоенного знания на овладение новым, способность к обобщению 36%	Учащийся умеет творчески применять полученные теоретические познания на практике в новой, нестандартной ситуации, «переносить» в неё изученные и усвоенные ранее понятия, законы и закономерности. Учащийся даёт ответ на любой вопрос, решает любую задачу, которые могут быть ему предложены в соответствии с программными требованиями на данном этапе обучения, конструирует новые способы деятельности и находит часто новые, оригинальные подходы к решению поставленной перед ним задачи.	<i>P5</i>	
Общая степень обученности 100%				

Подсчитайте результат (уровень требований педагога) по следующей формуле:

$$R = \frac{2}{P_1} + \frac{2}{P_2} + \frac{3}{P_3} + \frac{4}{P_4} + \frac{5}{P_5}$$

Определите свойственный Вам уровень требований. $R = \underline{\hspace{2cm}}$.

При $R = 5$ – первый (высший) уровень требований – следствие эффективной учебно-воспитательной деятельности; при $4,5 \leq R < 5$ – второй (средний) уровень требований; при $R < 4,5$ – третий (низший) уровень требований – показатель невысокой эффективности учебно-воспитательной деятельности при условии, что на этом уровне выставлены итоговые оценки (так как выставление текущих оценок на этом уровне обусловлено рядом объективных факторов и при эффективной учебной деятельности).

Если Вы работаете на высшем уровне требований, то степень обученности учащихся $\mathcal{E}_{\Phi 1}$ (фактическая эффективность учебной деятельности преподавателя на высшем уровне) рассчитывается по формуле

$$CO = \mathcal{E}_{\Phi 1} = \frac{K_5 + 0,64K_4 + 0,36K_3}{N}$$

где K_5 – количество обучаемых в данной группе (у данного преподавателя, по данному учебному предмету), имеющих итоговую оценку «5» – «отлично» (на данном уровне требований), K_4 – количество обучаемых в данной группе (у данного преподавателя, по данному учебному предмету), имеющих итоговую оценку «4» – «хорошо» (на данном уровне требований), K_3 – количество обучаемых в данной группе (у данного преподавателя, по данному учебному

предмету), имеющих итоговую оценку «3» – «удовлетворительно» (на данном уровне требований), N – общее количество обучаемых аттестованных (то есть получивших оценки) в данной группе (у данного преподавателя, по данному учебному предмету).

На втором (среднем) уровне требований показатель $CO = \mathcal{E}_{\Phi_2}$ определяется по формуле

$$CO = \mathcal{E}_{\Phi_2} = \frac{0,64K_5 + 0,36K_4 + 0,16K_3}{N}$$

с учётом явления сдвига требований в сторону его снижения. Работа на втором уровне определяет максимальный выход группы обучаемых, в среднем только на уровень алгоритмизованных умений и навыков.

На низшем уровне требований показатель $CO = \mathcal{E}_{\Phi_3}$ определяется по формуле

$$CO = \mathcal{E}_{\Phi_3} = \frac{0,36K_5 + 0,16K_4 + 0,04K_3}{N}$$

Работа на этом уровне требований предопределяет максимальный выход группы учащихся в среднем только на уровень понимания.

Изначально уровень требований преподавателя определяется средним уровнем обученности учащихся того или иного класса по предмету (и поэтому может быть низким вследствие объективных причин). Какое-то время педагог может работать на низшем уровне требований, но не имеет права оставаться на нём и работать из года в год. Задача учителя постепенно, по мере развития учащихся, повышать уровень требования, переходя от третьего уровня ко второму, а от второго – к первому.

Обоснуйте выявленный по данной методике уровень Ваших требований к учащимся _____

III. Изучение нового материала (15 минут): диагностическая карта как форма содержательной оценки знаний и умений.

Важным звеном обучения в школе является объективная содержательная оценка усвоения учащимися изучаемого материала. По балльной отметке трудно дать ответы на такие важные вопросы, как:

- а. что учащимися хорошо усвоено?
- б. что усвоено плохо?
- с. что вообще не усвоено?

А ведь ответы на указанные вопросы значимы при организации индивидуальной работы, особенно с учащимися V, VII, X классов, обучающихся в разных школах, по разным программам и учебникам, которая может быть развивающей, опережающей для «сильных» учеников и коррекционной для «слабых».

Структура диагностических карт (ДК) такова: первый столбец – номера по порядку (по классному журналу), второй – фамилия и имя ученика, в остальных столбцах указываются знания, умения и навыки, которые

проверяются по изученной теме. Проверка усвоения темы может быть проведена в форме теста, проверочной или контрольной работы, устного опроса и зачёта. Соответственно составляется ДК, в которую вносятся параметры, по которым можно оценить усвоение темы.

В последнем столбце по четырех балльной шкале выставляется отметка учащимся за выполненную работу контролирующего характера. Эта отметка заносится учителем в классный журнал. ДК по изучаемой теме заполняется учителем в процессе устного опроса или проверки письменных заданий.

На следующем после проверочной работы уроке сведения, занесённые в ДК, сообщаются учащимся с помощью проектора или на стенде Экран успеваемости. Далее учащиеся самостоятельно, а при необходимости с помощью товарищей или учителя, а также с помощью родителей, при выполнении домашних заданий ликвидируют пробелы в знаниях. Им предлагаются индивидуальные карточки с заданиями, которые они обязаны выполнить. Задания в карточках соответствуют тем заданиям, которые были предложены на работе контролирующего характера, причём по каждому параметру. Индивидуальные работы проверяет учитель (в старших классах – ассистенты учителя). При правильном выполнении индивидуальных заданий в ДК заносится отметка на один балл выше, чем полученная за работу контролирующего характера.

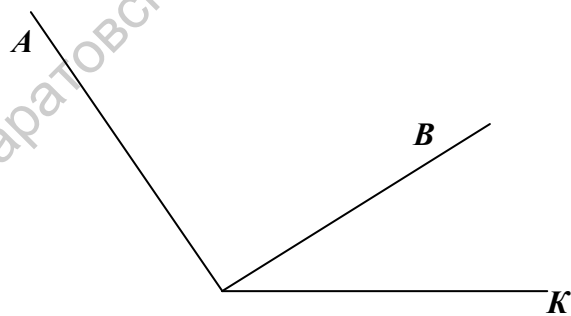
На вводном уроке по новой теме учитель разъясняет содержание очередной ДК, ориентирует учащихся на знания и умения, которые обязаны усвоить учащиеся по изучаемой теме и которые будут оцениваться учителем. Тем самым учитель формирует у учащихся конкретную и сознательную устремлённость.

На основе сведений, занесённых в ДК, составляются индивидуальные итоговые контрольные работы (за четверть, полугодие, год).

Учителя математики замечают, что введение ДК повышает качество знаний (а значит и успеваемость по предмету); кроме того, у учащихся формируется осознанный содержательный подход к планированию и оценке своей самостоятельной учебной деятельности.

ДК по темам, варианты работ контролирующего характера, индивидуальные карточки с коррекционными заданиями хранятся в кабинете математики, что даёт возможность совершенствовать указанные средства ежегодно.

Пример 1. Проверочная работа по теме «Измерение и построение углов»



1. Запишите все углы, изображённые на рисунке. Измерьте угол AOB .
2. Постройте угол DEM , равный 80° и угол COE , равный 150° .
3. Луч OC разделил прямой угол DOA на два угла DOC и COA . Угол DOC равен 32° . чему равен угол COA ?
4. В треугольнике ABC сторона AB равна 12 см, а сторона BC в два раза длиннее стороны AB . Найти длину стороны AC , если периметр треугольника ABC равен 54 см.

Диагностическая карта по теме «Измерение и построение углов с помощью транспорта»														
№	Ф.И. ученика	Умение обозначать углы	Умение измерять углы	Умение строить углы заданной величины:		Умение делать чертёж по условию задачи	Умение выполнять действия над углами	Умение записывать величины углов	Умение обозначать углы	Нахождение периметра треугольника	Умение находить сторону, если она в n раз больше другой	Умение находить сторону, если она в n раз меньше другой	Умение вычислять сторону треугольника, если известны две другие	Отметка
				острый	тупой									
1														

IV. Практическая работа (15 минут). Составление по содержанию проверочной работы соответствующей ей ДК.

Проверочная работа по теме «Периметр и площадь прямоугольника»

1. Найдите значение выражения: а) $43 \cdot 42 - 41^2$; б) $(12 + 18^2) : 12$.
2. Найдите периметр и площадь прямоугольник, одна сторона которого 12 м, а другая в 4 раза больше.
3. Выразите в квадратных сантиметрах: 15 дм^2 ; 4 м^2 ; $14\,000 \text{ мм}^2$.
4. Площадь земельного участка прямоугольной формы равна 32 га. Найдите ширину этого участка, если его длина равна 640 м.
5. Ширина прямоугольника 25 см. На сколько сантиметров увеличится площадь этого прямоугольника, если его длину увеличить с 30 см до 35 см?

№	Ф.И. ученика												Отметка
1													

V. Практическая работа (45 минут).

Задание 1. Составление тестов, контрольных вопросов и текстов проверочных работ по теме «Обыкновенные дроби».

Задание 2. Проектирование урока контроля знаний и умений учащихся по теме «Обыкновенные дроби» с использованием активных/интерактивных методов обучения и разработанных (задание 1) средств обучения.

VI. Внеаудиторное задание.

- (1) Разработать печатные и электронные средства контроля по теме «Обыкновенные дроби».
- (2) Проанализировать материалы статьи (сайт ИД «1 сентября», 2011-12 уч.год), посвящённой контролю на уроках математики.
- (3) Охарактеризовать проверку домашнего задания с точки зрения контроля за усвоением изучаемого материала.

Тема 7. Урок как основная форма обучения математике: коррекция знаний и умений учащихся

I. Предваряющее задание. Разработать модель урока коррекции знаний и умений учащихся по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс). Какова при этом роль диагностических карт? карт анализа контрольных работ?

II. Изучение нового материала (15 минут) – Система упражнений, предназначенная для коррекции знаний учащихся.

Предлагаемая система упражнений предназначена для работы по коррекции знаний и представляет собой раздаточный материал, скомпонованный по разделам.

Раздел I. КАК УСТРОЕНА ЗАДАЧА

В любой задаче имеются как известные (данные) величины, так и неизвестные. Данные величины находятся между собой и неизвестными величинами в определённых отношениях (связях).

Известные и неизвестные величины, а также отношения между ними, которые представлены в задаче, составляют её условие.

В тексте, как правило, можно выявить только несколько неизвестных величин. Указание в тексте на то, какое именно неизвестное является искомым, составляет требование задачи. Требование может быть сформулировано не только в виде вопроса, но и в форме указания что-либо определить, найти, построить, доказать, вычислить, исследовать и т.д.

В следующих задачах выделите условия и требование.

Задача 1. В двух школах вместе 856 учащихся. В одной из них на 46 учеников больше, чем в другой. Сколько учащихся в каждой школе?

Условия:

- 1) _____
- 2) _____

Требование: _____

Задача 2. Найдите длину окружности радиуса 4 см.

Условия:

- 1) _____
- 2) _____

Требование: _____

Задача 3. Дан четырёхугольник ABCD. Докажите, что его диагонали будут перпендикулярными, если $AB = BC$, и $AD = DC$.

Условия:

- 1) _____
- 2) _____

Требование: _____

Условие и требование могут располагаться в разном порядке.

Например, если У – условие, а Т – требование, то структурная схема может быть следующей: У – Т, Т – У, У – Т – У.

К задачам 1-3 составьте структурные схемы. Результаты занесите в таблицу.

Структурная схема		
Задачи 1	Задачи 2	Задачи 3

Задача 4. Вычислите площадь прямоугольника, если его длина равна 12 см, а ширина – 6 см.

1. Составьте структурную схему задачи. _____
2. Переформулируйте задачу таким образом, чтобы условие и требование располагались в следующем порядке:

а) У – Т _____

б) У – Т – У _____

Сформулируйте задачу по условию и требованию.

Задача 5. _____

Условия: (1) прямоугольный участок; (2) ширина участка втрое меньше его длины; (3) длина забора вокруг участка равна 920 м. Требование: Вычислить площадь участка.

Найдите в учебнике три задачи, имеющие различный порядок расположения условия и требования. Для каждой из них запишите структурную схему. Результаты оформите в таблицу.

Структурная схема		
Задачи №	Задачи №	Задачи №

Раздел II. КРАТКАЯ ЗАПИСЬ ЗАДАЧИ

Задача 6. Выручка трёх отделов супермаркета за день составила 341 390 рублей. Выручка первого отдела была 123 640 рублей, второго отдела – на 18 240 рублей меньше. Какова выручка третьего отдела?

1. Составьте краткую словесную запись задачи.
2. Запишите задачу в (вертикальную) таблицу.

отдел	выручка
ИТОГО	

Задача 7. Из двух городов А и В навстречу друг другу вышли одновременно два поезда и встретились через 7 часов. Определите расстояние между станциями, если скорость одного поезда 50 км/ч, а другого – 45 км/ч.

1. Составьте структурную схему задачи. _____
2. Сделайте рисунок-чертёж к данной задаче



А

В

Задача 8. Два ученика решали задачи. Первый ученик решил в два раза больше задач, чем второй. Сколько задач решил каждый ученик, если первый ученик решил на 3 задачи больше, чем второй?

1. Составьте структурную схему задачи. _____
2. Сделайте геометрический чертёж к данной задаче, используя в качестве геометрических фигур отрезки.

I



II

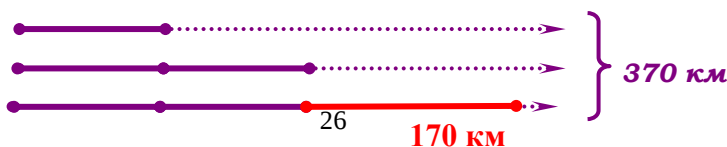


Составьте задачу по геометрическому чертежу (геометрической модели)

На лодке

На машине

Поездом



Задача 9.

По краткой словесной записи придумайте текст задачи.

I день – (?) страниц
 II день – (?), на 12 страниц б.
 III день – (?), на 5 страниц м.

105 страниц

Задача 10.

- Составьте структурную схему составленной вами текстовой задачи.
- Сделайте геометрический чертёж к данной задаче, используя в качестве геометрических фигур отрезки

I
 II
 III

- Запишите задачу в (вертикальную) таблицу.

день	количество страниц	
	с использованием символов	на алгебраическом языке
всего		

- Используя таблицу или чертёж, составьте уравнение алгебраическую модель задачи.

Задача 11. Купили два килограмма конфет, три килограмма печенья и торт. За всю покупку заплатили 628 руб. Какова цена печенья, если конфеты стоят 87 руб/кг, а торт стоит 250 руб.

- Составьте структурную схему задачи.
- Запишите задачу в горизонтальную таблицу.

продукты	цена	количество	стоимость

- Составьте алгебраическую модель задачи.
- Сделайте геометрический чертёж к данной задаче, используя в качестве геометрических фигур прямоугольники.
- Какой из чертежей не является геометрической моделью задачи?



Чертёж 1

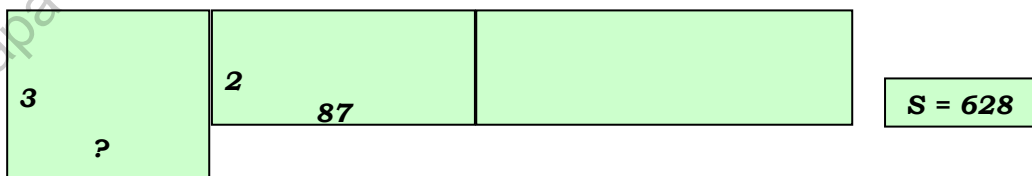


Чертёж 2

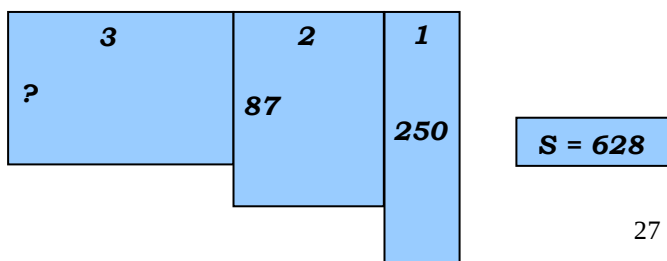


Чертёж 3

III. Анализ методического материала (15 минут): Проанализируйте изученный вами новый материал. По каким критериям вы проводили анализ?

IV. Практическая работа № 1 (15 минут). Составление тестов, контрольных вопросов и текстов проверочных работ по теме «Обыкновенные дроби».

V. Практическая работа № 2 (групповая – 3 группы, 25 минут). Проектирование уроков КОРЗ по теме «Сложение и вычитание обыкновенных дробей» (6 класс).

Вариант 1 контрольной работы

№1. (1 балл) Найдите такое число x , чтобы равенство было верным $\frac{12}{x} = \frac{3}{4}$.

А) $x=14$; Б) $x=4$; В) $x=16$; Г) $x=24$.

№2. (1 балл) Сравните дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{7}$.

А) $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$; Б) $\frac{3}{5} < \frac{3}{7}$; В) $\frac{3}{5} = \frac{3}{7}$; Г) сравнить невозможно.

№3. (1 балл) Приведите дроби к общему знаменателю $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{6}$.

А) $\frac{1}{6}$ и $\frac{4}{6}$; Б) $\frac{1}{6}$ и $\frac{3}{6}$; В) $\frac{2}{8}$ и $\frac{6}{8}$; Г) $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{4}$.

№4. (2 балла) Сравните дроби: а) $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{11}$; б) $3\frac{3}{5}$ и $\frac{12}{13}$.

№5. (3 балла) Решите уравнение $\frac{4}{17} - (x - \frac{5}{51}) = \frac{1}{6}$.

№6. (4 балла) Периметр треугольника равен 13 дм. Длина первой и второй сторон равна $10\frac{1}{3}$ дм, а второй и третьей – $9\frac{3}{14}$ дм. Вычислите длину каждой из сторон треугольника.

– Анализ контрольной работы по теме «Сложение и вычитание обыкновенных дробей» показал, что все учащиеся справились с заданиями 1-5, а задание 6 не решал никто. Каким, в этом случае, будет урок коррекции знаний?

– Анализ контрольной работы по теме «Сложение и вычитание обыкновенных дробей» показал, что все учащиеся справились с заданиями 1-4, в задании 5 многие допустили ошибки, связанные с преобразованием уравнения, в задании 6 ученики не сумели построить адекватные математические модели задачи и предоставили неверные решения. Каким, в этом случае, будет урок коррекции знаний?

– Анализ контрольной работы по теме «Сложение и вычитание обыкновенных дробей» показал, что все учащиеся справились с заданиями 1-4, несколько учеников допустили ошибки, связанные с преобразованием уравнения из задания 5, а при решении задания 6 почти все ученики привели такое решение:

$P_{ABC} = 13$ дм. $AB + BC = 10\frac{1}{3}$ дм, $BC + AC = 9\frac{3}{14}$ дм. $AB + BC + AC = 13$ дм. $10\frac{1}{3}$ дм + $AC = 13$ дм. $AC = 13 - 10\frac{1}{3}$ (дм). $AC = 2\frac{2}{3}$ (дм). Одна ученица довела

решение задачи до конца: $BC + 2\frac{2}{3} \text{ дм} = 9\frac{3}{14} \text{ дм}$. $BC = 9\frac{3}{14} - 2\frac{2}{3} \text{ (дм)}$.
 $BC = 9\frac{9}{42} - 2\frac{28}{42} \text{ (дм)}$. $BC = 8\frac{51}{42} - 2\frac{28}{42} \text{ (дм)}$. $BC = 6\frac{23}{42} \text{ (дм)}$. $AB + 6\frac{23}{42} \text{ дм} = 10\frac{1}{3}$
 дм . $AB = 10\frac{1}{3} - 6\frac{23}{42} \text{ (дм)}$.

$AB = 10\frac{14}{42} - 6\frac{23}{42} \text{ (дм)}$. $AB = 9\frac{56}{42} - 6\frac{23}{42} \text{ (дм)}$. $AB = 3\frac{33}{42} \text{ (дм)} = 3\frac{11}{14} \text{ (дм)}$. Каким,
 в этом случае, будет урок коррекции знаний?

VI. Защита проектов – 20 минут.

VII. Внеаудиторное задание.

(1) Разработать печатные и электронные средства коррекции знания по теме «Обыкновенные дроби».

(2) Проанализировать материалы статьи (сайт ИД «1 сентября», 2011-12 уч.год), посвящённой коррекции знаний и умений на уроках математики.

(3) Охарактеризовать структуру и содержание контрольной работы (по 1 варианту) по теме «Сложение и вычитание обыкновенных дробей».

(4) Анализ контрольной работы по теме «Сложение и вычитание обыкновенных дробей» показал, что все учащиеся справились с заданиями 1-3, в 4 задании учащиеся пытались сравнить дроби, не прибегая к приёму приведения к общему знаменателю, а сравнивая каждое из данных чисел с $\frac{1}{2}$ или с 1 ($\frac{3}{7}$ ближе к $\frac{1}{2}$, чем $\frac{4}{11}$, поэтому $\frac{3}{7} > \frac{4}{11}$; $3\frac{3}{5}$ больше 1, а $\frac{12}{13}$ меньше 1, поэтому $3\frac{3}{5} > \frac{12}{13}$), в задании 5 многие допустили ошибки, связанные с преобразованием уравнения, с заданием 6 ученики не справились, но почти все начали решение правильно ($P_{ABC} = 13 \text{ дм}$. $AB + BC = 10\frac{1}{3} \text{ дм}$, $BC + AC = 9\frac{3}{14} \text{ дм}$).
 Каким, в этом случае, будет урок коррекции знаний?

(5) Опишите возможности дидактической игры как средства коррекции математических знаний и умений.

Игра дидактическая – специально созданная игра, выполняющая определенную дидактическую задачу, скрытую от ребенка в игровой ситуации за игровыми действиями.

Тема 8. Организация самостоятельной работы при обучении математике

I. Предваряющее задание. (1) Поставьте вопросы к необоснованным, на ваш взгляд, утверждениям автора статьи Груденов Я.И. *Организация самостоятельной работы /Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. – М.; Просвещение, 1990. – с.178-180.*(см. Приложение 2) относительно организации самостоятельной работы.

Образец. «Самостоятельная работа является необходимым этапом изучения любой темы. Как правило, она проводится после коллективного решения задач новой темы и обязательно предшествует контрольной работе по этой теме».

1. Почему «этапом», если СР – форма организации учебного процесса?
2. Почему «как правило» и «обязательно»?

Указание. Распечатайте материал (двусторонняя печать) статьи и вписывайте свои вопросы на пустых страницах брошюры.

(2) Подберите содержание для средств обучения (раздаточного и иллюстративно-демонстрационного материала) необходимых для организации аудиторной самостоятельной работы по математике по теме «Рациональные числа» (6 класс).

II. Повторение обобщение и систематизация материала по теме «Самостоятельная работа учащихся» – тест – 20 минут.

Задание 1. Сопоставьте цели самостоятельной работы целям/функциям обучения математике.

	ЦЕЛЬ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ		ГРУППА ЦЕЛЕЙ ОБУЧЕНИЯ	
1	Выработка умений и навыков учебной деятельности		дидактические	Д
2	Качественное усвоение учебного материала			
3	Развитие информационной культуры учащихся		развивающие	Р
4	Формирование готовности к самообразованию			
5	Формирование познавательных способностей учащихся и интереса к изучаемому материалу;		воспитательные	В
6	Формирование самостоятельности как качества личности			

Задание 2. Назовите 10 преимуществ самостоятельной работы учащихся перед другими видами учебной деятельности.

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____
7. _____
8. _____
9. _____
10. _____

Задание 3. Соотнесите конкретные мотивы самостоятельной учебной работы школьников с уровнем (6 уровней) развития учебной мотивации.

Уровень учебной мотивации	Мотивация самостоятельной работы
1. Отрицательное отношение к учению.	
2. Нейтральное отношение к учению.	
3. Положительное, но аморфное, ситуативное отношение к учению.	
4. Положительное отношение к учению.	
5. Активное, творческое отношение к учению.	
6. Личностное, ответственное, активное отношение к учению.	

Задание 4. Охарактеризуйте все компоненты самостоятельной учебной работы школьников.

III. Практическая работа – 25 минут.

Задание 1. Ознакомьтесь со структурой, принципом построения и содержанием раздаточного материала, относящегося к типу расширяющихся заданий. Разработайте аналогичный материал по теме «Рациональные числа» (6 класс).

Поработайте с числами 3045, 76114 и 15801

- 1) сравните их попарно,
- 2) запишите в виде цепочки неравенств со знаком «меньше», а затем, со знаком «больше»,
- 3) сложите эти числа,
- 4) произведите вычитание (в каких случаях это возможно?),
- 5) найдите произведение этих чисел,
- 6) произведите деление с остатком (в каких случаях это возможно?),
- 7) составьте всевозможные числовые выражения, используя все данные числа по одному разу и знаки действий умножения, деления, сложения, вычитания,
- 8) найдите значения составленных числовых выражений (если это возможно),
- 9) составьте всевозможные уравнения, используя все данные числа по одному разу и знаки действий умножения, деления, сложения, вычитания,
- 10) решите не менее трёх составленных вами уравнений,
- 11) составьте сюжетную задачу с использованием только данных чисел,
- 12) составьте сюжетную задачу с использованием некоторых из данных чисел,
- 13) составьте сюжетную задачу с использованием данных чисел и ещё хотя бы одного числа,
- 14) составьте задачу таким образом, чтобы одно из чисел было её решением,
- 15) какие из этих чисел делятся на 2, 3, 4, 5, 6, 9?
- 16) припишите к каждому из чисел справа одну цифру так, чтобы вновь получившееся число делилось на 15; всегда ли это возможно?
- 17) припишите к каждому из чисел слева одну цифру так, чтобы вновь получившееся число делилось на 15; всегда ли это возможно?
- 18) найдите НОД этих чисел,
- 19) найдите НОК этих чисел,
- 20) составьте из данных чисел всевозможные дроби, приведите эти дроби к правильному несократимому виду,
- 21) найдите среднее арифметическое этих чисел,
- 22) составьте круговую диаграмму,
- 23) сколько процентов составляет первое число от второго?
- 24) сколько процентов составляет первое число от третьего?
- 25) уменьшите второе число на такое число процентов, которое составляет первое число от третьего,
- 26) придумай своё задание.

Задание 2. Опишите процедуры: (а) организации самостоятельной аудиторной работы по выполнению расширяющегося задания и (б) оценивания результатов выполнения расширяющегося задания.

Задание 3. Разработайте содержание обучающего теста по теме «Рациональные числа» (6 класс).

IV. Лабораторная работа – 25 минут – анализ текста (см. Приложение 3) исследовательской работы.

Исследовательская работа для учащихся 5 класса

Тема «Сумма однозначных чисел»

Цель работы. Вычислив сумму однозначных чисел, применить полученный результат к решению других задач.

Оборудование. Текст исследовательской работы, карточки с однозначными числами, таблица со схемой «паучок».

Ход работы

1. Вычислите сумму чисел $1+2+3+4+5+6+7+8+9$, производя операцию сложения последовательно. Результат занесите в таблицу

№	Способ вычисления	Результат
1	Последовательное сложение чисел	
2	Группировка слагаемых	
3	Прибавление нуля и последующая группировка	

2. Вычислите предложенную сумму, используя способ группировки слагаемых. Каким образом лучше

сгруппировать числа? Результат занесите в таблицу

3. Вычислите предложенную сумму, прибавив к ней число «0» (запишите его крайним слева слагаемым) и применив к полученной сумме способ группировки слагаемых. Результат занесите в таблицу.

4. Сделайте вывод относительно более рационального способа вычисления суммы последовательных чисел.

5. Попробуйте, используя рациональный способ вычисления суммы последовательных чисел найти следующие суммы: $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20=$

$$21+22+23+24+25+26+27+28+29=$$

$$5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25=$$

$$5+9+13+17+21+25+29+33+37+41+45+49+53+57+61=$$

$$11+2+13+4+15+6+17+8+19+10+21+12=$$

6. Ответьте на вопрос: помог ли вам рациональный способ быстрее, проще и безошибочно вычислить предложенные суммы? Если «нет», то быть может, вы неправильно определили рациональный способ? В этом случае обратитесь ещё раз к началу работы (пп.1-4).

7. Решите следующую задачу. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков больше цифры единиц? В процессе рассуждения заполняйте таблицу.

Искомые числа		Количество чисел	Решение.
1-й десяток			<u>Ответ.</u>
2-й десяток			
3-й десяток			

8. Ответьте на вопрос: связаны ли каким-нибудь образом задачи из п.1 и п.7? Обоснуйте эту связь.

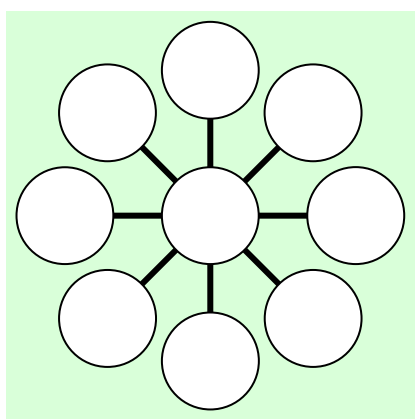
9. Решите задачу. Сколько существует целых (положительных) чисел, меньших 100, цифры которых идут в возрастающем порядке?

Указание. Составьте табличную модель, адекватную данной задаче.

Решение.

Ответ.

Связаны ли каким-нибудь образом задачи из п.1 и п.9? Обоснуйте эту связь.



10. Решите задачу. Даны числа от 1 до 9. Расставьте их в кружочках так, чтобы сумма трёх чисел вдоль каждой линии была равна 15.

Указание. (1) Используйте карточки с однозначными числами и таблицу со схемой «паучок» для поиска решения.

(2) Определите, прежде всего, какое число должно быть в центре.

(3) Решите задачу тремя методами.

I метод – метод исчерпывающих проб – основан на представлении числа 15 в виде суммы трёх однозначных чисел всеми возможными способами, например, $9+1+5$, $9+2+4$, $9+3+3$, $8+1+6$, ...

Решение.

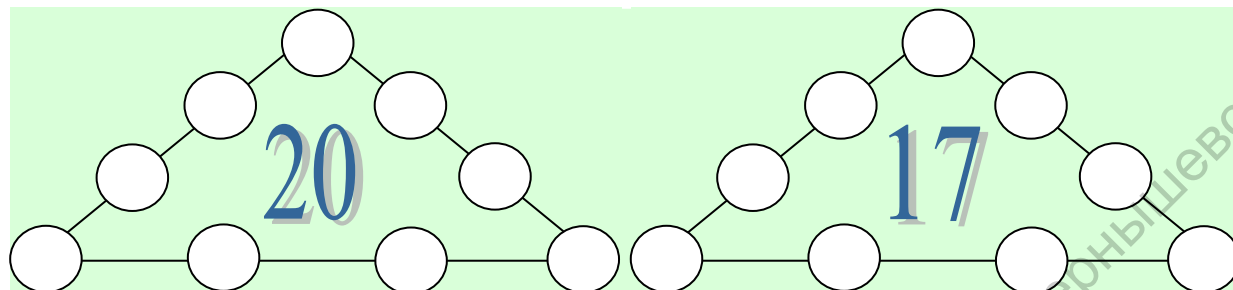
II метод – арифметический – основан на действиях с числами, в первую очередь на результате, полученном в п.1 работы и на указании (2) к данной задаче.

Решение.

III метод – математического моделирования – подразумевает составление уравнения по тексту задачи.

Решение.

(4) Как связано решение данной задачи со способом группировки слагаемых для вычисления суммы чисел от 1 до 9? _____



11. Расставьте числа от 1 до 9 в кружочках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне равнялась 20.

12. Расставьте числа от 1 до 9 в кружочках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне равнялась 17.

13. Сделайте вывод относительно связи между математическими задачами. _____

14. Задача. Как рассадить 45 кроликов в 9 клеток так, чтобы во всех клетках было разное количество кроликов?

V. Практическая работа – 20 минут – разработка текста исследовательской работы по теме «Рациональные числа» (6 класс).

VI. Внеаудиторное задание.

(1) Обменяйтесь проблемными вопросами по статье Груденов Я.И. *Организация самостоятельной работы*. Напишите эссе по одной из выявленных проблем.

(2) Законспектируйте статью Гусев В.А. *Активность и самостоятельность учащихся // Психолого-педагогические основы обучения математике*. – М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия». – 2003. – с.90-92 (см. Приложение 4).

(3) Приведите пример самостоятельной работы творческого характера по математике для учащихся 6 класса.

(4) Изучите материалы статей: Веселова Н.Н. *Построение заданий на развитие у младших школьников учебной деятельности // Начальная школа плюс до и после, 2002, № 7, С. 22-25.*, Демидова Т.Е., Тонких А.П. *Рациональные вычисления в курсе математики начальных классов // Начальная школа плюс до и после, 2001, № 7, С.15-22.* и Коростелёва О.А. *Методика работы над уравнениями в начальной школе // Начальная школа плюс до и после, 2001, № 2, С.36-42.* По материалам статей, учитывая специфику преподавания математики в начальной школе, разработайте текст исследовательской работы для учащихся 4 класса.

☞ Лучшие работы будут опубликованы в очередном сборнике научно-методических работ «Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки»

Лабораторный практикум. Организация самостоятельной работы при обучении математике

I. Самостоятельное изучение нового материала (индивидуально-групповая работа с последующей взаимопроверкой результатов) – 45 минут.

Задание 1. Законспектируйте статью *Коротяев Б.И. Методы и процедуры познавательной деятельности. // Учение – процесс творческий. – М.: Просвещение, 1989. – С.32-65.*

Задание 2. Составьте перечень вопросов **полностью** отражающих содержание статьи.

Задание 3 (I группа). Приведите пример *процедуры свёрнутого описания* (аналог таблицы на стр.40) каких-либо математических объектов (не менее трёх логически связанных между собой).

Задание 4 (II группа). Приведите пример *процедуры развёрнутого описания* (аналог таблицы на стр.42) тех же математических объектов, что в предыдущем задании.

Задание 5 (III группа). Приведите пример *процедуры объяснения математических явлений/закономерностей* посредством выявления связей и отношений (см. таблицу на стр.46).

Задание 6 (IV группа). Приведите пример *процедуры преобразования* на материале одной темы ШКМ.

II. Практическая работа – 45 минут.

Задание 1. Ознакомьтесь со структурой, принципом построения и содержанием раздаточного материала. Разработайте аналогичный материал по какой-либо теме курса геометрии основной школы.

Задание 2. Как можно использовать предложенные средства обучения в организации самостоятельной работы учащихся на уроке? На каком уровне самостоятельности при этом будут работать учащиеся? Какие развивающие задачи реализуются в ходе такой самостоятельной работы?

III. Внеаудиторное задание. Дополните текст лекции «Организация самостоятельной работы при обучении математике», используя материал статьи *Фефилова Е.Ф., Овчинникова Р.П. Самостоятельная работа учащихся // Лабораторные работы по теории и методике обучения математике (геометрия). / Е.Ф.Фефилова, Р.П. Овчинникова. – Архангельск: Поморский университет, 2005. – С.145-155.*

Тема 9. Организация проверки и оценки результатов обучения математике

I. Предваряющее задание. (1) Изучите статью *Казиев В.М., Казиева Б.В., Казиев К.В. Правила практического педагогического тестирования // Информатика и образование, 2009, №6, с.77-87* (2) Подберите содержание для разработки средств проверки и оценки результатов обучения по теме «Рациональные числа» (6 класс).

II. Компьютерное тестирование по теме «Правила практического педагогического тестирования» – 10 минут.

III. Практическая работа – 45 минут.

Задание. Составьте тесты четырёх уровней (по В.П.Беспалько) для оценки результатов усвоения знаний по теме «Рациональные числа» (6 класс).

IV. Лабораторная работа – 35 минут – анализ содержания Сборника заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе с последующим составлением тренировочного варианта экзаменационной работы.

V. Внеаудиторное задание. (1) Составьте карту достижений по теме «Рациональные числа» (6 класс). (2) Выявить достоинства и недостатки зачёта в деле оценивания результатов обучения по математике.

«Зачёт как форма организации обучения проводится для проверки качества усвоения учащимися отдельных разделов учебной программы, сформированности умений и навыков.

Зачёты обычно проводятся по разделам курса. К ним учащиеся готовятся с самых первых уроков по данному разделу. Чтобы облегчить учащимся работу, в математическом кабинете вывешивается перечень теоретических и практических вопросов, выносимых на зачёт. Для оказания в помощи в проведении зачётного занятия иногда привлекаются учащиеся, наиболее успешно осваивающие математику. Для этого специально их готовят: проверяются знания, объясняются обязанности на занятии.

Основные компоненты зачётного урока: уровневая дифференциация заданий, оценочная деятельность учителя, диагностика результата, коррекция знаний и умений.

Чаще всего зачёт принимается по билетам, включающим основные теоретические вопросы и типовые задания темы. Индивидуальный опрос может сочетаться с коллективными самостоятельными работами по вариантам. Итоговая оценка выставляется на основе анализа результатов всех заданий и с учётом мнения консультантов»*.

(3) Разработайте необходимые методические материалы для проведения зачёта по теме «Основные геометрические фигуры» (геометрия-7) с указанием способа оценивания результатов изучения материала данной темы.

(4) Изучите материалы статьи *Матвеева О.Б., Матвеева Н.А. Тестовый контроль знаний учащихся на примере проверки усвоения темы «Порядок выполнения арифметических действий в числовых выражениях» // Начальная школа плюс до и после, 2003, № 7, С.1-4.*

* Фефилова, Е.Ф. Лабораторные работы по теории и методике обучения математике (геометрия): учебное пособие / Е.Ф.Фефилова, Р.П.Овчинникова; Примоский гос.ун-т им. М.В.Ломоносова. – Архангельск: Приморский университет, 2005. – с.218

Лабораторный практикум. Организация проверки, контроля и оценки результатов обучения математике

I. Практическая работа – 45 минут.

Задание 1. Сопоставьте задачи контроля видам проверки.

Задачи контроля		Виды проверки	
1	Установление готовности учащихся к восприятию и усвоению нового учебного материала	Текущая	Тк
2	Выявление причин затруднений и ошибок		
3	Определение эффективности организационных методов и средств обучения	Тематическая	Тм
4	Оценка степени обученности учащихся		
5	Оценка уровня самостоятельности	Периодическая	П
6	Определение уровня развития психологических новообразований		
7	Определение степени сплочённости коллектива	Итоговая (заключительная)	И
8	Выявление уровня обязательной подготовки по предмету		

Задание 2. Заполните таблицу.

Требования, предъявляемые к содержанию и организации контроля	
принципы	сущность
Целенаправленности	
Объективности	
Всесторонности	
Систематичности	
Дифференцированности	
Индивидуальности	
Открытости	
Вариативности	

Задание 3. Какие нарушения (методические и педагогические ошибки), связанные с контролем и оценкой учащихся, зафиксированы в следующих педагогических ситуациях?

Педагогическая ситуация		Нарушения	
1	Учащиеся плохо написали контрольную работу. Учитель на классном часе (а затем, и на родительском собрании) стыдил учеников (и их родителей) за недостаточный уровень подготовки к контрольной работе: «О контрольной работе было известно за неделю. Неужели нельзя было дома найти и прорешать аналогичные задания (а родителям проследить за этим) и таким образом подготовиться?! Как не стыдно подводить школу в самый ответственный момент?!»	Неправильное понимание функций контроля	А
		Переоценивание роли контроля/проверки в учебном процессе	Б
		Превращение проверки в самоцель	В
		Использование однообразных методов и форм проверки и оценки знаний	Г
		Субъективизм оценивании и выставлении отметок	Д
		Отсутствие чётких обоснованных критериев оценки	Е
2	На каждом уроке математики учитель проводит фронтальный опрос и выставляет учащимся отметки в журнал, руководствуясь следующими положениями: «2» – ученик не отвечал или отвечал неправильно; «3» – ученик ответил мене двух раз или дал менее чем половину неверных ответов; «4» – ученик ответил три раза и все ответы верные или ученик ответил более трёх раз но один раз ошибся; «5» – ученик отвечал более трёх раз и ни разу не ошибся. При этом количество вопросов таково, что не позволяет каждому ученику ответить даже три раза. Учитель объясняет это тем, что подобный приём позволяет развивать и поддерживать инициативность учащихся, дух соревновательности и высокий темп работы на уроке.	Неправильное понимание функций контроля	А
		Переоценивание роли контроля/проверки в учебном процессе	Б
		Превращение проверки в самоцель	В
		Использование однообразных методов и форм проверки и оценки знаний	Г
		Субъективизм оценивании и выставлении отметок	Д
		Отсутствие чётких обоснованных критериев оценки	Е
3	Процесс обучения математике организован так, что все уроки «работают» на итоговую аттестацию за курс основной школы: учащиеся решают «на оценку» одни и те же задачи из Сборника итоговой аттестации. Задачи на 2 балла служат основой для составления тестов, которые учитель регулярно проводит; задачи на 4 балла составляют базу для письменной контрольной работы; решения задач на 6 баллов заучиваются и проверяются в начале каждого урока (письменная проверочная работа)	Неправильное понимание функций контроля	А
		Переоценивание роли контроля/проверки в учебном процессе	Б
		Превращение проверки в самоцель	В
		Использование однообразных методов и форм проверки и оценки знаний	Г
		Субъективизм оценивании и выставлении отметок	Д
		Отсутствие чётких обоснованных критериев оценки	Е
4	Учитель, чтобы «наладить дисциплину в классе», даёт ученикам проверочную работу (на весь урок), включив в неё все задания, предназначенные для классной работы	Отсутствие чётких обоснованных критериев оценки	Е

5	Учитель вызвал к доске трёх учеников решать типовые задания (№1342): а, б, в. Ученик, решавший задание (а), работал медленно: долго читал и записывал условие задачи, о чём-то сосредоточенно думал, – всё это вынуждало учителя постоянно задавать наводящие вопросы, давать указания, подгонять («Пиши быстрее!») и понукать («Ну, что там у тебя?..») ученика. Ученик, решавший задание (б), в это время работал «без помощи учителя», но постоянно оглядывался на одноклассников, которые давали ему разнообразные советы, подсказки и прямые указания, что и как писать. Ученик часто исправлял решение, допустил опisku, логика его решения не всегда отличалась строгостью. Ученик, решавший задание (в), работал самостоятельно, его решение было оформлено аккуратно, математические преобразования были тождественны, но ученик допустил арифметическую ошибку, на наличие которой ему указал учитель. Ошибка была обнаружена и исправлена учеником самостоятельно. Все учащиеся в итоге получили правильный ответ. Учитель выставил следующие оценки: (а) – «3», (б) – «4», (в) – «5»		Неправильное понимание функций контроля	А
			Переоценивание роли контроля/проверки в учебном процессе	Б
			Превращение проверки в самоцель	В
			Использование однообразных методов и форм проверки и оценки знаний	Г
			Субъективизм оценивании и выставлении отметок	Д
			Отсутствие чётких обоснованных критериев оценки	Е
6	Оценивая контрольную работу, учитель ориентируется только на конечный результат решения задач: совпадает с ответом – задача решена правильно, не совпадает – задача не решена		Неправильное понимание функций контроля	А
7	Учитель выставляет четвертные оценки по результатам ответов у доски и текущим контрольным работам		Переоценивание роли контроля/проверки в учебном процессе	Б
8	Ученица пришла на урок математики после болезни. В это время проводилась контрольная работа, которую девочка (до этого стабильно получавшая за контрольные «4» и «5») написала на «3». Эту оценку учительница выставила в журнал, не разрешив переписать работу. Всё это стало причиной конфликта, в который были втянуты, помимо учителя и ученицы, родители, классный руководитель и администрация школы.		Превращение проверки в самоцель	В
			Использование однообразных методов и форм проверки и оценки знаний	Г
			Субъективизм оценивании и выставлении отметок	Д
			Отсутствие чётких обоснованных критериев оценки	Е

Задание 4. Опишите педагогическую ситуацию из вашей школьной практики, связанную с контролем и оценкой по математике. _____

Тема 10. Методические аспекты использования ИКТ в реализации информационно-деятельностного подхода в обучении математике и активизации познавательной деятельности учащихся

I. Предваряющее задание. (1) Изучите статью Джаджа В.П. *Мультимедийная модель и интерактивная доска*. (2) Выбрать наиболее показательные материалы с сайта ИД «1 сентября» по использованию ИКТ в реализации информационно-деятельностного подхода в обучении математике и активизации познавательной деятельности учащихся различных возрастных групп (НШ, 5-6 кл., 7-9 кл., 10-11 кл) и определить их специфику этих материалов. (3) Уметь изложить материал по теме «Информационно-коммуникативная образовательная среда», используя схему (Приложение 5).

II. Повторение материала по теме «Методические аспекты использования ИКТ» – тест – 25 минут.

Задание 1. Сопоставьте термин определению соответствующего понятия.

Задание 2. Впишите (под номерами 24-Ш, 25-Щ) термины и соответствующие им определения из той же предметной области.

	ТЕРМИН	ОПРЕДЕЛЕНИЕ	
1	Информационная деятельность	деятельность, направленная на осуществление процесса передачи-приема информации, представленной в любом виде при реализации обратной связи, развитых средств ведения интерактивного диалога при обеспечении возможности сбора, обработки, продуцирования, архивирования, передачи, транслирования информации	А
2	Информационная деятельность студентов	деятельность, основанная на информационном взаимодействии между источником информации и ее получателем, направленная на достижение каких-либо целей, посредством информационных процессов	Б
3	Информационная культура	достигнутый уровень организации информационных процессов, степень удовлетворенности людей в информационном общении, уровень эффективности создания, сбора, хранения, переработки, передачи, представления и использования информации, обеспечивающей целостное видение мира, предвидение последствий принимаемых решений	В
4	Информационная образовательная среда	информационная система (программная реализация) комплексного назначения, обеспечивающая посредством единой компьютерной программы, без обращения к бумажным носителям информации, реализацию дидактических возможностей средств ИКТ во всех звеньях дидактического цикла процесса обучения, а также его непрерывность и полноту, предоставляющая теоретический материал, организующая тренировочную учебную деятельность и контроль уровня знаний, информационно-поисковую деятельность, математическое и имитационное моделирование с компьютерной визуализацией и сервисные функции	Г
5	Информационное взаимодействие	компонент образовательного электронного издания, функционирующего на базе средств ИКТ, являющийся аналогом традиционного тестирования	Д
6	Информационно-коммуникационная предметная среда	любое взаимодействие объектов, приводящее к изменению количества информации хотя бы одного из них	Е
7	Информационно-коммуникационная среда	обучающая программа, автоматически изменяющая ход обучения в зависимости от индивидуальных психофизиологических характеристик (скорость реакции, утомление и т.п.) обучающегося	Ж

8	Информационно-коммуникационные технологии	обучающая программа, в которой выдача очередной дозы учебной информации, наводящих или дополнительных вопросов, подсказок, помогающих раскрыть и уточнить смысл поставленного вопроса находится в зависимости от количества и характера ошибок, допущенных обучаемым, а также от начального уровня его знаний	З
9	Информационный процесс	обучающая программа, в которой последовательность учебных кадров определяется заранее и не зависит от действий обучаемого во время занятия	И
10	Информационный ресурс	прикладная программа, предназначенная для организации и поддержки учебного диалога пользователя с компьютером в целях предоставления учебной информации и помощи в обучении с учётом индивидуальных возможностей и предпочтений обучаемого	К
11	Математическая информационная система	программное средство, в котором отражается некоторая предметная область, в той или иной мере реализуется технология ее изучения, обеспечиваются условия для осуществления различных видов учебной	Л
12	Педагогическое программное средство	программные, программно-аппаратные и технические средства и устройства, функционирующие на базе микропроцессорной, вычислительной техники, а также современных средств и систем транслирования информации, информационного обмена, обеспечивающие операции по сбору, продуцированию, накоплению, хранению, обработке, передаче информации и возможность доступа к информационным ресурсам локальных и глобальных компьютерных сетей	М
13	Программа обучающая	программный продукт, обеспечивающий возможность: выполнения построений на экране математических объектов, графиков функций, диаграмм, описывающих динамику изучаемых закономерностей; создания экранных изображений геометрических объектов и их динамического представления; автоматизации вычислительной информационно-поисковой деятельности	Н
14	Программа обучающая адаптивная	процесс активного взаимодействия между получателем и источником информации, организованный с помощью информационно-коммуникативных технологий и направленный на достижение учебно-профессиональных целей посредством информационных процессов	О
15	Программа обучающая линейная	системы методов и способов осуществления информационных процессов с помощью компьютера	П
16	Программа обучающая разветвлённая	сложная система, аккумулирующая интеллектуальные, культурные, программно-методические, организационные и технические ресурсы и обеспечивающая возможности продуктивной познавательной деятельности обучаемых	Р
17	Программное средство учебного назначения	совокупность всей получаемой и накапливаемой информации в процессе развития науки, культуры, образования, практической деятельности людей и функционирования специальных устройств, используемых в общественном производстве и управлении	С
18	Средства ИКТ	совокупность последовательных действий, производимых над информацией для получения какого-либо результата	Т
19	Средства информатизации и коммуникации образовательного назначения	совокупность условий, обеспечивающих осуществление деятельности пользователя с информационным ресурсом (в том числе распределенным информационным ресурсом), с помощью интерактивных средств ИКТ и взаимодействующих с ним как с субъектом информационного общения и личностью	У

20	Электронное методическое пособие	совокупность условий, способствующих возникновению и развитию процессов учебного информационного взаимодействия между обучаемым(и), преподавателем и средствами ИКТ, формированию познавательной активности обучаемого, при условии наполнения компонентов среды предметным содержанием; а также обеспечивающих осуществление деятельности с информационным ресурсом некоторой предметной области с помощью интерактивных средств ИКТ; информационное взаимодействие между пользователями с помощью интерактивных ИКТ, взаимодействующих с пользователем как с субъектом информационного общения и личностью; интерактивное информационное взаимодействие между пользователем и объектами предметной среды, отображающей закономерности и особенности соответствующей предметной области (или областей)	Ф
21	Электронное тестирование	совокупность элементарных порций учебного материала по данной дисциплине, предъявляемых обучаемому на экране компьютера в интерактивном режиме, в зависимости от его действий с автоматизированной обучающей системой	Х
22	Электронный учебник	средства информационных и коммуникационных технологий, используемые вместе с учебно-методическими, нормативно-техническими и организационно-инструктивными материалами, обеспечивающими реализацию оптимальной технологии их педагогического использования	Ц
23	?	форма обобщения и передачи педагогического опыта, формирования и распространения новых моделей образовательной деятельности, реализованная на базе средств ИКТ	Ч
24			Ш
25			Щ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

III. Отчёт о проделанном задании к занятию – 20 минут – презентация материалов с сайта ИД «1 сентября» по использованию ИКТ в реализации информационно-деятельностного подхода в обучении математике и активизации познавательной деятельности учащихся различных возрастных групп (НШ, 5-6 кл., 7-9 кл., 10-11 кл.).

IV. Лабораторная (групповая – 4 группы) работа – 25 минут – исследование возможности использования ИКТ в реализации информационно-деятельностного подхода в обучении математике и активизации познавательной деятельности учащихся различных возрастных групп на основе анализа материалов ИД «1 сентября».

V. Обобщение результатов лабораторной работы – семинар – формулировка обобщающих выводов – 20 минут.

VI. Внеаудиторное задание.

(1) Дополнить и визуализировать содержание статьи *Лебедева С.В., Худайбергенова М.Ч. О проблемах использования ИКТ при обучении школьников математике / Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научно-методических трудов: Выпуск 7. – Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – с.63-67* (см. Приложение 6).

(2) Изучите материалы статьи *Сафонов В.И. Использование информационных технологий при обучении математике на всех ступенях среднего образования // Начальная школа плюс до и после, 2008, №1, С.1-4.* По материалам статьи разработайте опорный сигнал.

(3) Составьте библиографическое пособие (список статей) по теме занятия (не менее 15 источников).

(4) Разработайте цифровой образовательный ресурс по математике. Опишите методику его использования.

Тема 11. Особенности обучения математике в 5-6 классах: арифметика

I. Предваряющее задание. (1) Разработать содержание серии уроков изучения какой-либо темы курса арифметики 5-6 классов. (2) Сформировать мнение по проблеме выделения курса Арифметики в отдельную дисциплину: достоинства и недостатки концепции. (3) Выписать наиболее сложные, наиболее важные для дальнейшего изучения математики вопросы/темы курса арифметики, установить их взаимосвязь, результаты представить в виде схемы.



II. Семинар-беседа «Выделения курса Арифметики в отдельную дисциплину: достоинства и недостатки концепции» – 25 минут.

Основная идея. Изучение арифметического материала начинается с систематизации и развития знаний о натуральных числах. При этом формирование теоретических знаний сочетается с развитием вычислительной культуры, которая актуальна и при наличии вычислительной техники, в частности обучением простейшим приемам прикидки и оценки результатов вычислений. В связи с рассмотрением свойств арифметических действий специальное внимание уделяется преобразованиям числовых выражений, выполняемых с целью рационализации вычислений. Таким образом, учащиеся на доступном материале знакомятся с идеей перехода от одного выражения к другому, ему равному, что в последующем послужит основой при овладении преобразованием буквенных выражений.

Изучение натуральных чисел включает в себя знакомство с элементарными понятиями теории делимости. Соответствующий материал учебника, помимо того что он знакомит с некоторыми базовыми понятиями, необходимыми для дальнейшего изучения математики, предоставляет богатые возможности для постановки и решения исследовательских задач, понятных и интересных учащимся этого возраста.

Другой крупный блок в содержании арифметической линии – это обыкновенные дроби. В отличие от ряда существующих учебников, этот курс дает обыкновенные дроби в полном объеме, предусмотренном стандартом, уже в 5 классе, а рассмотрение десятичных отнесено к 6 классу. Таким образом, рассмотрение обыкновенных дробей предшествует изучению десятичных дробей, что целесообразно с точки зрения логики развертывания числовой линии: правила действий с десятичными дробями можно будет обосновать уже известными алгоритмами выполнения действий с обыкновенными дробями.

В 6 классе представления учащихся об обыкновенных дробях развиваются, осваиваются новые вычислительные алгоритмы, рассматриваются приемы решения задач на дроби. В начале курса происходит знакомство с понятием процента, которое далее развивается в теме «Отношения и проценты». При обучении решению задач на проценты учащиеся овладевают разнообразными способами рассуждения, при этом они имеют возможность выбора приема и могут пользоваться тем, который кажется им более удобным. Изучение дробей и процентов опирается на предметно-практическую деятельность, на геометрическое моделирование. Широко используются рисунки и чертежи, помогающие разобраться в соответствующих задачах и увидеть путь решения.

При обучении решению текстовых задач в 5-6 классах преимущественно используются арифметические (логические) приемы решения. Помимо текстовых задач, решаемых при отработке вычислительных умений, рассматриваются определенные их виды: задачи на движение, на части, на уравнивание, на совместную работу. Такое выделение методически оправданно. Так, способ решения задач на части является одним из общих способов рассуждений, которым учащимся полезно владеть. Задачи на движение и задачи на совместную работу составляют значительный пласт текстовых задач, решаемых в школьной математике.

Особенностью изучения положительных и отрицательных чисел в 6 классе является то, что они рассматриваются в два прохода. В начале изучения темы выделяется фрагмент «Целые числа», в котором принят содержательный подход к изложению материала; знания

формируются на полуинтуитивном уровне. Это позволяет на доступном уровне познакомить учащихся практически со всеми основными понятиями темы, в том числе с правилами знаков при выполнении арифметических действий. Последующее изучение рациональных чисел оказывается уже вторым проходом всех принципиальных вопросов, что облегчает восприятие материала и способствует прочности приобретаемых навыков.

Курс 5-6 классов освобожден от чрезмерной алгебраизации. Буквенная символика широко используется прежде всего для обозначения чисел, записи общих утверждений и предложений! В курс 6 класса включена специальная тема «Выражения, формулы, уравнения», в которой рассматриваются применение букв для записи математических выражений и предложений, составление буквенных выражений и уравнений по условию задач, проводится содержательная работа с формулами².

III. Практическая работа – 30 минут.

Задание 1. Структурируйте уроки по выбранной вами теме.

Задание 2. Составьте план-конспект урока ИНМ. Какие средства наглядности требуются для проведения этого урока?

IV. Практическая работа – 35 минут – создание средств обучения: учебных презентаций, разработанных в среде PowerPoint.

V. Внеаудиторное задание. (1) Решите следующие задачи.

1. Число $15 = 3 \cdot 5$ в 5 раз больше своего наименьшего делителя, отличного от 1. Сколько всего натуральных чисел обладают таким же свойством?
А. одно; Б. два; В. три; Г. ∞
2. Сколько простых чисел обладает следующими свойствами: (1) простое число p равно сумме двух простых чисел и (2) простое число p равно разности двух простых чисел.
А. одно; Б. два; В. три; Г. ∞
3. У скольких чётных натуральных чисел количество натуральных делителей (включая 1 и само число) равно 5?
А. таких чисел нет; Б. у одного; В. более, чем у одного; Г. ∞
4. Чётное натуральное число n имеет ровно пять натуральных делителей (включая 1 и n). Сколько делителей имеет число $10n$?
5. Сколько цифр содержит запись наименьшего натурального числа, которое делится на 225 и записывается (в десятичной системе счисления) только нулями и единицами?
6. Сколько можно найти различных целых чисел, у которых самый большой делитель (не считая самого числа) равен 91?
7. Сколько имеется натуральных чисел n таких, что $2012 : n$ (ост.32)?
8. Сколькими нулями оканчивается произведение первых 2012 простых чисел?
9. Даны числа 2, 6, 12, 20, 30, 42, ... Укажите закономерность их записи и найдите число, стоящее на 2012 месте.
10. Сколько имеется четырёхзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?
11. Докажите, что из любых трёх целых чисел можно найти два, сумма которых делится на 2.

(2) По решению одной из задач разработайте в среде PowerPoint учебную презентацию.

(3) Как авторы (Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева Л.О. Рослова, С.Б. Суворова) УМК «Математика. Арифметика. Геометрия. 5-6 класс» подходят к проблеме обучения решению текстовых задач? Выпишите общие методические положения.

² Математика. Арифметика. Геометрия. 5 класс. Пособие для учителей / Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева Л. О. Рослова, С. Б. Суворова – (http://www.prosv.ru/ebooks/Kuznecova_Matematika_5kl/index.html)

Тема 12. Особенности обучения математике в 5-6 классах: наглядная геометрия

I. Предваряющее задание. (1) Разработать содержание серии уроков изучения какой-либо темы курса геометрии 5-6 классов. (2) Сформировать мнение по проблеме выделения курса Наглядной геометрии (<http://festival.1september.ru/articles/210876/>) в отдельную дисциплину: достоинства и недостатки концепции. (3) Выписать наиболее сложные, наиболее важные для дальнейшего изучения математики вопросы/темы курса наглядной геометрии, установить их взаимосвязь, результаты представить в виде схемы.

II. Семинар-беседа «Выделения курса Наглядной геометрии в отдельную дисциплину: достоинства и недостатки концепции» – 25 минут.

III. Лабораторная работа – 20 минут – анализ плана-конспекта урока по теме «Окружность» (Л.Крымова, г. Барнаул).

Цели урока:

- знакомство с новой геометрической фигурой – окружностью;
- изучение элементов окружности (центр, радиус, диаметр, хорда);
- закрепление умения правильно формулировать определения;
- развитие пространственного мышления, воображения;
- знакомство с историей возникновения математических понятий;
- приобретение навыков исследовательской работы.

Ход урока

1. Страна кругов

Вокруг нас много круглых предметов. Попробуйте ответить на вопрос: «Что случится, если в один прекрасный момент исчезнут все круги?»

Казалось бы – пусть всё станет квадратным. Разве нельзя прожить без круглых труб, а к квадратным колёсам можно привыкнуть. Оказывается, что это не так.

Круглых предметов вокруг нас очень много. Вспомните, как вы раньше рисовали окружность: брали какой-нибудь круглый предмет и просто обводили его. Но представьте себе, что надо нарисовать 10 разных окружностей. Нельзя же брать 10 разных тарелок. Какой выход?

Для построения окружности существует специальный инструмент – циркуль. Слово «циркуль» в переводе с латинского означает «круг».

Продолжим наше путешествие по стране Геометрия. Мы попали в новое государство – Кругляндию.

В середине острова стоит остроконечная башня, а от неё расходятся прямые улицы. Все они ведут к морю. Чтобы жители не упали в воду, вся территория обнесена красным канатом. Нарисуйте у себя в тетрадах этот остров с помощью циркуля.

Каждый раз, когда мы чертим окружность, останется точка от иглки циркуля. Слово «центр» произошло от латинского слова «центриум» – палка с заострённым концом, которой погоняли быков; позднее оно стало означать заострённую ножку циркуля, а потом и точку, которую оставляет циркуль на листе бумаги.

Улиц в городе много, но по какой идти, чтобы быстрее добраться от моря к башне? Проведите несколько дорог на чертеже вашего города. Измерьте их длины. Сделайте вывод. // Все дороги имеют одинаковую длину.

У этих дорог-отрезков есть название – радиус. Сформулируем определение радиуса. // Радиус – это отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности.

Колесо – одно из великих достижений человечества, которое было изобретено в 4 веке до н.э. на Древнем Востоке. «Радиус» переводится как «спица колеса».

А как вы думаете, для чего была нужна геометрия в этом изобретении? Где расположена ось колеса?

Пройдёмся по нашему городу. Его жители очень любят играть в кегли. Смысл игры заключается в том, чтобы шаром сбить кегли, стоящие по кругу. Выигрывает тот, кто сбивает кеглю, стоящую дальше других.

Начертите в тетрадах окружность. Нарисуйте шар и кегли, измерьте расстояние от шара до кеглей. Отметьте самое большое расстояние – это отрезок, проходящий через центр и соединяющий две точки окружности. Называется этот отрезок – диаметр. Диаметр (в переводе с греческого) – отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через центр.

Как связаны между собой радиус и диаметр? Из скольких радиусов состоит диаметр?

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой.

Окружность – удивительно гармоничная фигура; древние греки считали её самой совершенной. Совершенство окружности – в расположении всех её точек на одинаковом расстоянии от центра. Именно поэтому окружность – единственная кривая, которая может «скользить сама по себе», вращаясь вокруг центра.

Основное свойство окружности даёт ответ на вопросы, почему для её вычерчивания используют циркуль и почему колёса делают круглыми, а, например, не квадратными или треугольными. Подумайте и вы над этими вопросами.

В своей речи я употребила слова окружность и круг. Это одно и то же или нет?

Чем отличается круг от окружности?

Окружность – линия, все точки которой расположены на одинаковом расстоянии от центра. Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью.

У круга есть одна подруга,

Знакома всем её наружность:

Она идёт по краю круга

И называется – окружность.

2. Работа с определениями по карточкам

Поработаем с определениями новых геометрических понятий. На карточках написано начало определений, а на отдельных листочках – их продолжения. Найдите для каждого определения его продолжение.

Окружность – замкнутая линия без самопересечения...	все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от центра
Круг – это часть плоскости...	ограниченная окружностью
Радиус – это отрезок...	соединяющий центр окружности с любой точкой на окружности
Диаметр – это отрезок, соединяющий...	две точки окружности и проходящий через центр
Хорда – это отрезок, соединяющий...	две точки окружности
Диаметр – это хорда...	проходящая через центр

3. Работа с рисунками по карточкам

Повторив определения новых геометрических понятий, поработаем самостоятельно. Для каждого из понятий подберите соответствующий ему рисунок.

<i>Я хочу проверить себя!</i>	
Окружность	
Круг	
Радиус	
Хорда	
Диаметр	
Центр	
Оценка	

Геометрия изучает форму и взаимное расположение фигур в пространстве. Посмотрите вокруг: мы живём в мире трёх измерений. Что это значит?

Окружность и круг – это пространственные тела или плоские фигуры?

В какое геометрическое тело превратится окружность, если попадает в пространство?

4. Сечение шара

Наиболее близок по форме к шару арбуз. Мы с вами сейчас проведём небольшой эксперимент. Возьмите нож и разрежьте арбуз, который есть у вас. Что у вас получилось в сечении? // Круг

Задание на дом. Тела вращения. Сечения тел вращения.

- Какие тела вращения вы знаете?

Это конус и цилиндр. Проведите дома эксперимент и определите, что получится в сечении этих геометрических тел; заполните таблицу.

Сечения конуса и цилиндра				
Проведите дома эксперимент и зарисуйте сечения геометрических тел. Вам есть подсказка (сколько клеточек в таблице, столько и различных сечений вы должны получить).				
Конус				
Цилиндр				
Исследование провёл _____ Класс _____ Оценка _____				

- Отметьте в тетради точку О. Постройте две окружности с центром в этой точке: одну радиусом 3 см, другую – радиусом 2 см. закрасьте цветным карандашом область, расположенную между этими окружностями. Как бы вы назвали получившуюся фигуру?

IV. Самостоятельное изучение нового материала – 20 минут – материал статьи Гусев В.А. *Выявление параметров математических способностей учащихся с помощью занимательных задач геометрического характера* / Гусев В.А. *Психолого-педагогические основы обучения математике.* – М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2003. – с.312-343

V. Практическая работа – 25 минут.

Задание 1. Приведите графическое решение задачи 5 из статьи Гусева В.А. Что вы можете сказать о схеме рассуждения, ходе решения и оценке выполнения задания?

Задание 2. Проверьте решение задачи 7, данное в тексте статьи и приведите решение задачи 7и для случаев разбиения на 9-17 треугольников.

Задание 3. Решите задачи 10-12.

Задание 4. Составьте/подберите задачи предназначенные для выявления параметров математических способностей учащихся 5-6 классов. Опишите методику определения параметров (схема рассуждений, ход решения, оценка выполнения задания, рейтинг).

При отборе задач, предназначенных для выявления параметров математических способностей учащихся основной школы, можно руководствоваться следующими требованиями:

- задачи должны иметь занимательный характер, быть доступными учащимся, по возможности, опирающимися на программный материал, отличаться от обычных задач, имеющих в учебниках математики;
- операции, заложенные в структуре решения задачи, должны соответствовать природе диагностируемых параметров математических способностей учащихся;
- задачи должны быть сгруппированы по типам рассуждений.

VI. Внеаудиторное задание.

(1) Подберите историко-математический материал геометрического содержания для изучения учащимися 5-6 классов. Какие исследовательские задания можно составить по подобранному вами материалу? Приведите пример такого задания, снабдив его иллюстративным материалом, разработанным в среде PowerPoint.

(2) Изучите материал статьи *Белошистая А.В. Наглядная геометрия как средство развития мышления младшего школьника. // Начальная школа плюс до и после. 2002, № 01, С.34-47.*

(3) Разработайте серию упражнений геометрического содержания для учащихся начальной школы по аналогии с опубликованными в статье *Филиппова С.А. Использование геометрического материала в начальной школе. // Начальная школа плюс до и после, 2010, № 5, С.1-3.*

(4) Проверьте на практике основные положения статьи *Пономарёва Е.И. Приобщение к прекрасному при обучении математике с использованием конструктивных сред. // Начальная школа плюс до и после, 2010, № 12, С.71-74.*

Тема 13. Особенности обучения математике в 5-6 классах: стохастическая линия

I. Предваряющее задание. (1) Выбрать наиболее показательные методические материалы по реализации стохастической линии в 5-6 классах с сайта ИД «1 сентября», определить их специфику.

II. Практическая работа – 15 минут – анализ текста исследовательской работы.

Тема «Разнообразие погоды»

Цель: математическими методами определить, сколькими способами могут на одной неделе чередоваться дни с разной погодой.

Ход работы.

Выбрать (используя таблицу 1) одну из характеристик погоды.

Таблица 1

Характеристика	Условные обозначения		Состояния	
	да	нет	да	нет
облачность			пасмурно	ясно
осадки			с осадками	без осадков
ветер			ветрено	штиль

Описать два состояния погоды в соответствии с выбранной характеристикой погоды (используя таблицу 1).

Сформулируйте гипотезу (ответьте на вопрос) о количестве недель с различным чередованием погоды. _____

Докажите или опровергните гипотезу, для чего подсчитайте точно, сколько различных комбинаций возможно при выбранных вами условиях, то есть сколькими способами могут на одной неделе чередоваться дни с разной погодой. Рассуждайте следующим образом:

В понедельник может быть одна из двух возможных ситуаций:

либо _____,

либо _____.

Во вторник для каждой ситуации понедельника может быть

либо _____,

либо _____.

то есть количество ситуаций удваивается и их становится $2 \cdot 2 = 4$.

В среду для каждой ситуации вторника может быть либо _____, либо _____, то есть количество ситуаций снова удваивается и становится равным $4 \cdot 2 = 8$.

И так далее...

Результаты рассуждений занесите в таблицу 2.

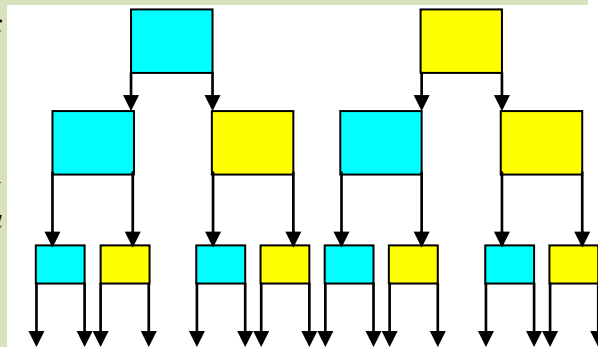


Таблица 2

День недели		Количество ситуаций		
название	по порядку	процесс	всего	в виде степени
понедельник	1	$1 + 1 = 2$	2	2^1
вторник	2	$2 \cdot 2 = 4$	4	
среда	3	$4 \cdot 2 = 8$		
четверг	4			
пятница				

Сделайте вывод относительно того, сколькими способами могут на одной неделе чередоваться дни с разной погодой. _____

Ответьте на вопросы.

А. Сколько всего недель с различным порядком следования _____ и _____ дней? _____

Б. Сколько дней должно пройти, чтобы повторилось одно из бывших прежде сочетаний? _____

В. Если для того, чтобы повторилось одно из бывших прежде сочетаний должно пройти _____ дней, то значит ли это, что повторение не произойдет раньше указанного срока? _____

Г. Может ли случиться, что после указанного срока повторения не произойдет? _____

Д. Могут ли в течение двух лет все недели по погоде быть не похожими между собой? Ответ обоснуйте. _____

Е. Могут ли в течение трех лет все недели по погоде быть не похожими между собой? Ответ обоснуйте. _____

Ж. Как изменится решение задачи, если необходимо узнать число чередований погоды за декаду (10 дней)? _____

З. Как изменится решение задачи, если количество ситуаций увеличится на 1? Например, облачность будет характеризоваться тремя состояниями:

ясно () , облачно () , пасмурно () .

III. Обобщение результатов предваряющего задания – семинар – формулировка обобщающих выводов – 30 минут.

IV. Практическая работа (25 минут): разработать тексты исследовательских работ по содержанию следующих задач:

1. Трое ребят делят между собой 10 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми (то есть, если нас интересуют лишь, сколько яблок получит каждый, но не те, какие именно яблоки ему достанутся)?

2. Для того, чтобы совершить какую-либо операцию через банкомат необходимо знать pin-код имеющейся на руках банковской карты. Pin-код представляет собой некоторое четырёхзначное число (здесь, 0056 – тоже число), состоящее из цифр десятичной системы счисления, то есть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Сколько неудачных попыток активации карты через банкомат может быть сделано человеком, не знающим pin-кода банковской карты?

3. Сколькими способами можно вывести на арену 5 львов и 4 тигров, при условии, чтобы два тигра не шли друг за другом.

4. В кондитерском отделе продаются пирожные 4 сортов: наполеоны, эклеры, песочные слоёные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

V. Коллективное обсуждение цифрового образовательного ресурса по математике – обучающего теста по комбинаторике / теории вероятностей – 20 минут – с последующей разработкой обучающих тестов по теме занятия.

VI. Внеаудиторное задание.

(1) Анализ статьи *Смирнова Л.Ф. Формирование у учащихся комбинаторного и вероятно-статического стилей мышления.* – (<http://festival.1september.ru/articles/211711/>).

(2) Опишите влияние изучения элементов стохастики на мышление младшего школьника (по материалам серии статей *Демидова Т.Е, Козлова С.А, Рубин А.Г, Тонких А.П.* Элементы стохастики в начальной школе. / Начальная школа плюс до и после – № 05, 2005, с. 69-73; № 06, 2005, с. 69-73; № 07, 2005, с. 69-73).

(3) Разработать фрагмент урока изучения нового материала по теме *Элементы стохастики, комбинаторика, теория вероятностей* с опорой на учебник *Зубарева И.И, Мордкович А.Г. Математика 5 (6)* с использованием ЭОР.

(4) Разработайте систему упражнений на усвоение понятий: размещение, перестановка, сочетание.

(5) Разработайте ЦОР по теме занятия.

(6) Опишите опыт учителя математики (нашего региона) по изучению материала стохастической линии в 5-6 классах.

(7) Составьте аннотированный библиографический список по теме занятия.

Тема 14. Интеграционные связи математики

I. Предваряющее задание. (1) Выбрать наиболее показательные методические материалы по реализации интеграционных связей математики с сайта ИД «1 сентября», определить их специфику. (2) Изучите материал статьи *Панишева О.В. Использование межпредметных аналогий и ассоциаций в преподавании математики в гуманитарном классе. // Начальная школа плюс до и после, 2009, № 04, С.38-44.* (3) Изучение материала статьи *Лебедева С.В., Мухангалиева Г.Н. Активизация самостоятельной работы учащихся посредством включения в содержание обучения историко-математического материала / Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научных трудов: Выпуск 4. – Саратов: Научная книга, 2005. – с.29-33 (см. Приложение 7).*

II. Практическая работа – 15 минут – анализ методических материалов из текста статьи *Гладкова А.В. Использование практической направленности и межпредметных связей на уроках математики (см. Приложение 8).*

III. Обобщение результатов предваряющего задания – семинар – формулировка обобщающих выводов – 30 минут.

IV. Практическая работа – 25 минут.

Задание 1. Разработайте модель интегрированного урока (математика +) для учащихся 5-6 классов.

Задание 2. Разработайте модель интегрированного урока (математика + информатика).

Задание 3. Разработайте модель интегрированного урока (физика + математика).

V. Коллективное обсуждение предложенных моделей – 20 минут – с последующей разработкой проектов соответствующих уроков.

VI. Внеаудиторное задание.

(1) Разработать визитную карточку проекта, реализующего принцип интеграции в обучении.

(2) Анализ статьи *Оськина О.Л. Экспедиция в математическое государство Аль-Джебру. (<http://festival.1september.ru/articles/411321/>).*

(3) Какова специфика интегрированных уроков (математика +) в начальной школе (по материалам статьи *Ворошилова Н.Н, Золотухина С.И. Интегрированный урок математики и информатики во 2-м классе. // Начальная школа плюс до и после, 2008, № 07, С.37-40*)?

(4) Проанализируйте сценарий внеклассного мероприятия, реализующего принцип интеграции в обучении.

Тема 15. Методика изучения элементов математической логики.
Интеграционные взаимосвязи математики и информатики при изучении
элементов логики

I. Предваряющее задание. (1) Как изучение элементов логики отражено в ФГОС общего (начального, основного и среднего (полного)) образования? (2) Разработать содержание урока, на котором – основной деятельностью учащихся является доказательство математических утверждений. (3) Прочитать книгу *Никольская И.Л., Семёнов Е.Е. Учимся рассуждать и доказывать: Кн. для учащихся 6-10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989.* Письменно ответить на вопрос: как можно использовать содержание книги на уроках математики для повышения логической культуры учащихся? (4) Разработать модель бинарного урока (математика + информатика) по изучению элементов математической логики.

II. Обобщение результатов предваряющего задания – семинар – формулировка обобщающих выводов – 25 минут.

III. Лабораторно-практическая индивидуальная работа – 20 минут.

Задание 1. Провести логико-математический анализ утверждения: Если сумма цифр числа n делится на 3, то само число n делится на 3. Результат анализа оформить в виде таблицы.

$(\forall n \in N) (\text{сумма цифр числа } n \text{ делится на } 3) \Rightarrow (\text{число } n \text{ делится на } 3)$	
Структура утверждения	Разъяснительная часть:
	Условие: Заключение :
Утверждение простое / сложное, так как	

Ответить на вопросы.

- 1) Что такое теорема, утверждение?
- 2) Чем отличается утверждение от теоремы?
- 3) Что такое разъяснительная часть, условие, заключение утверждения?
- 4) В каких формах могут быть сформулированы утверждения?
- 5) Как выделить условие и заключение утверждения?
- 6) Может ли сложная теорема иметь одновременно несколько условий и несколько заключений?
- 7) Приведите пример сложной теоремы.
- 8) Сформулируйте утверждение обратное данному:

$(\forall n \in N) (\text{сумма цифр числа } n \text{ делится на } 3) \Rightarrow (\text{число } n \text{ делится на } 3)$

Что для этого нужно сделать?

9) Будет ли сформулированное утверждение теоремой? Почему? Всегда ли обратное утверждение будет теоремой? Пояснить. Привести примеры.

10) Как получить утверждение, противоположное данному?

11) Сформулируйте утверждение, противоположное данному:

$(\forall n \in N) (\text{сумма цифр числа } n \text{ делится на } 3) \Rightarrow (\text{число } n \text{ делится на } 3)$

12) Будет ли сформулированное утверждение теоремой? Почему? Всегда ли противоположное утверждение будет теоремой? Пояснить. Привести примеры.

13) Как получить утверждение, обратное противоположному?

14) Сформулируйте утверждение, обратное противоположному для утверждения:

$(\forall n \in N) (\text{сумма цифр числа } n \text{ делится на } 3) \Rightarrow (\text{число } n \text{ делится на } 3)$

15) Будет ли сформулированное утверждение теоремой? Почему? Всегда ли утверждение обратное противоположному будет теоремой? Пояснить. Привести примеры.

16) На основании рассмотренных примеров сделайте вывод о взаимосвязи между прямым, обратным, противоположным и обратным противоположному утверждениями. Какие из них одновременно являются теоремами?

Задание 2. Сформулируйте и доказите теорему для $n=4$.

$(\forall n \in N) (\text{сумма цифр числа } n \text{ делится на } 3) \Rightarrow (\text{число } n \text{ делится на } 3)$ и обратную противоположной.

Задание 3. Оформите доказательство теоремы в виде: (1) словесного описания-рассуждения, (2) таблицы, (3) схемы.

IV. Лабораторно-практическая групповая работа – 20 минут.

Задание 1. Изучите методические материалы для учителя информатики по изучению с учащимися элементов математической логики.

Задание 2. Разработайте сценарий бинарного урока (математика + информатика) по изучению элементов математической логики на основе разработанной (в ходе выполнения предварительного задания) модели.

Задание 3. Какие средства обучения необходимы вам для проведения этого урока? Опишите их.

V. Творческий отчёт групп о поделанной работе – 20 минут.

VI. Внеаудиторное задание.

(1) Сформулируйте определение логической задачи. Проведите классификацию логических задач, встречающихся в учебно-методической литературе (например, в книге *Байнф Ж.-К. Логические задачи: Пер.с франц./ Перевод Сударева Ю.Н., Под редакцией и с послесл. И.М.Яглома. – М.: Мир, 1983*).

(2) Дайте рецензию на статью *Т.А.Капитонова, Ю.А.Игнатова Логические задачи как средство развития познавательной самостоятельности учащихся 5-6 классов* (см. Приложение 9).

(3) Придумайте три вопроса по теме занятия и задайте их автору книг по математической логике и теории алгоритмов доктору педагогических наук профессору В.И.Игошину; вопросы, ответы и комментарии к ним предоставьте в письменном или цифровом виде.

(4) Как автор статьи *Гажук Н.И. Формирование элементов логической и алгоритмической грамотности // Начальная школа плюс до и после, 2011, № 07, С.30-33.* предлагает формировать логическую и алгоритмическую грамотность учащихся начальной школы?

Тема 16. Элементы теории множеств в курсе математики и информатики

I. Предваряющее задание. (1) Разработать содержание урока алгебры, на котором учащиеся используют знания основных положений теории множеств, используя материал книги *Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах.* – М.: МЦНМО, 2005. (2) Прочитать учебный материал (см. Приложение 10). (3) Разработать модель бинарного урока (математика + информатика) по изучению элементов теории множеств.

II. Обобщение результатов предваряющего задания – семинар – формулировка обобщающих выводов – 25 минут.

III. Практическая работа – 20 минут.

Задание 1. Проведите анализ уроков на предмет преемственности в изучении материала:

«Множество. Элемент множества. Взаимное расположение множеств» (первый урок – 3 класс – <http://festival.1september.ru/articles/500828/>).

«Пересечение и объединение множеств» (второй урок – 7/8 класс – <http://festival.1september.ru/articles/550092/>).

IV. Лабораторная групповая работа – 20 минут.

Задание 1. Изучите методические материалы для учителя информатики по изучению с учащимися элементов теории множеств.

Задание 2. Разработайте сценарий бинарного урока (математика + информатика) по изучению элементов теории множеств на основе разработанной (в ходе выполнения предварительного задания) модели.

Задание 3. Какие средства обучения необходимы вам для проведения этого урока? Опишите их.

V. Творческий отчёт групп о поделанной работе – 20 минут.

Внеаудиторное задание.

(1) Проанализируйте программу элективного курса предпрофильной подготовки «Элементы теории множеств» – (<http://festival.1september.ru/articles/411488/>). Что бы вы изменили в содержании и организационных формах курса?

(2) Используя возможности PowerPoint, разработайте игру «Теория множеств» по форме аналогичную телешоу «Своя игра».

(3) Изучите материал статьи *Баракина Т.В. Возможности изучения элементов логики на уроках математики и информатики в начальной школе // Начальная школа плюс до и после, 2009, № 4, С.1-5.*

(4) Изучите учебное пособие *Пензов Ю.Е. Элементы математической логики и теории множеств.* – Саратов, 1968. Что Вам известно об авторе этого пособия? Оцените сложность излагаемого в пособии учебного материала. Можно ли адаптировать изложенный в пособии материал по теории множеств для элективного курса предпрофильной / профильной подготовки учащихся?

Тема 17. Методика изучения комбинаторики и теории вероятностей

I. Предваряющее задание. (1) Подготовить содержание исследовательской работы по теме. (2) Прочитать учебный материал (см. Приложение 11) и статью *Котова Н.В., Непомнящая Е.А. О проблемах изучения элементов комбинаторики и теории вероятностей в общеобразовательной школе* (см. Приложение 12). Сформировать мнение по проблемам изучения комбинаторики и теории вероятностей в ШКМ.

II. Изучение нового материала с полным анализом текстов исследовательских работ (групповая работа – 7 групп) – 20 минут.

Содержание тем «Комбинаторные задачи и их решение» (I-IV классы) и «Элементы комбинаторики» (V-IX классы) рассчитано на то, что в рамках коллективного способа изучения будет изучаться один раз в четыре года и один раз в пять лет соответственно. Возникает естественный вопрос: как учащиеся, изучавшие тему по разработанной методике будут обращаться к ней в дальнейшем: нельзя же допустить «одноразовости», при которой какой-либо вопрос школьного курса математики будет затронут лишь единожды?

Выявленную проблему сформулируем следующим образом: как организовать дальнейшее изучение математического материала комбинаторного содержания, если первое обращение к нему и всестороннее изучение проходило в рамках коллективного способа обучения?

Предлагаем решить данную проблему ежегодным включением в процесс обучения так называемых **уроков одной задачи** (А.А.Окунев) комбинаторного содержания, согласно следующей таблице.

Организация изучения элементов комбинаторики в условиях малокомплектной школы с использованием технологии коллективных способов обучения (в первые 5 лет)									
класс этап	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I		1	2	3		4	5	6	7
II			1	2	3		4	5 – 6	7
III				1	2	3		4 – 5	6 – 7
IV					1	2	3		4 – 7
V						1 – 3	4 – 5	6	7
VI							1 – 3	4 – 5	6 – 7
VII								1 – 3	4 – 7
VIII									1 – 7
IX									

Из таблицы видно, что необходимо разработать, по крайней мере, семь уроков одной задачи.

Та часть таблицы, которая занимает пять последних строк, отражает учебный процесс только на момент внедрения разрабатываемой технологии (то есть, характерен только в первые 5 лет). Через 5 лет с момента внедрения технологии, комбинаторика будет изучаться в соответствии с содержанием следующей таблицы.

Организация изучения элементов комбинаторики в условиях малокомплектной школы с использованием технологии коллективных способов обучения									
класс этап	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I		1	2	3	4		5	6	7
II			1	2	3	4		5 – 6	7
III				1	2	3	4-5		6 – 7
IV					1-2	3-4	5-6	7	

Урок одной задачи

Урок одной задачи был выделен в особую форму организации процесса обучения математики и описан Анатолием Арсеньевичем Окуневым в книге для учителя «Спасибо за урок, дети!».

«Чаще всего урок состоит из изложения теории и решения нескольких иллюстрирующих её задач. – Пишет А.А.Окунев. – Сама задача, приёмы её решения, и анализ условия нечасто бывают объектом особого внимания учеников.

Учат же решать задачи, формируют навык исследовательской работы уроки, на которых ученик является активным участником поиска решения, испытывает при этом и радость открытий, и горечь поражений, когда выбранный путь заводит в тупик.

Урок такого типа как бы завершает некоторый этап обучения решению задач, поэтому его лучше провести в тот момент, когда ученикам усвоены необходимые понятия и разобран ряд частных приёмов решения задач. Внимание на этом уроке концентрируется в основном на анализе приёмов, которыми решается задача. Поэтому, чтобы не тратить силы на знакомство с условием нескольких задач, достаточно рассмотреть решение только одной задачи, интересной по содержанию, богатой идеями, имеющей несколько способов решения».

Выделим основные характеристические особенности **урока одной задачи**.

1. На уроке решается одна единственная задача.
2. Цель урока двуединая: (1) направить деятельность школьников на исследование связей между данными задачи; (2) отработать умение делать логический вывод из полученных результатов.
3. Основная форма деятельности учащихся – исследовательская работа, включающая обязательно этап анализа условия и решения задачи.
4. Решение задачи несколькими способами.
5. Предваряющее домашнее задание по решению задачи; предварительная запись желающих рассказать на уроке решение выбранного ими этапа задачи.

Все занятия спланируем и оформим в виде исследовательских работ. Тематика занятий определяется согласно следующей таблице.

№	Тема	Содержание
1	Разнообразие погоды	Размещения с повторениями, правило произведения, степень с натуральным показателем
2	Рассылка фотографий	Комбинаторные разбиения; размещения с повторениями; правило произведения; степень с натуральным показателем
3	Банковская карта: секретный код	Комбинаторные разбиения; размещения с повторениями; правило произведения; степень с натуральным показателем
4	Команда космического корабля	Комбинаторные задачи с ограничениями; правило произведения; дерево вариантов
5	Как поделить фрукты?	Комбинаторные разбиения; перестановки с повторениями; сумма n членов арифметической прогрессии
6	Львы и тигры	Комбинаторные задачи с ограничениями; перестановки, размещения; правило произведения
7	Покупка пирожных	Сочетания с повторениями; перестановки с повторениями

III. Семинар «Проблемы изучения комбинаторики и теории вероятностей в ШКМ» – 25 минут.

IV. Анализ содержания элективного курса по математике для учащихся 9 класса «Элементы статистики, комбинаторики и теории вероятности» – (<http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/elektivnyi-kurs-po-matematike-dlya-uchashchikhsya-9-klassa-elementy-statistik>) – **15 минут.**

Сегодняшний стандарт школьного математического образования ограничивается понятиями и методами описательной статистики, которая занимается первичной обработкой статистической информации: представлением её в виде удобно читаемых таблиц, изображением на диаграммах и вычислением наиболее показательных числовых характеристик. Более тонкими исследованиями – оценкой неизвестных параметров, проверкой гипотез, изучением статистических связей и зависимостей – занимается математическая статистика, изучение которой не входит сегодня в программу общеобразовательной школы.

V. Практическая работа – 15 минут – разработка текста исследовательской работы.

VI. Лабораторная групповая работа – 15 минут – разработка модели компьютерной презентации исследовательской работы.

VII. Внеаудиторное задание.

(1) Анализ статьи Мелехина М. И. *Интеграция стохастической линии в школьный курс алгебры.* (<http://festival.1september.ru/articles/412870/>).

(2) Разработать фрагмент урока изучения нового материала (7-9 класс) по теме *Элементы стохастики, комбинаторика, теория вероятностей* с использованием ЦОР.

(3) Прочитайте пособие Е.А. Бунимович, В.А. Булычёв. *Вероятность и статистика в курсе математики общеобразовательной школы: лекции 5-8.* – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2005. – 116 с.

(4) Разработать систему задач по теме «Методы описательной статистики» для учащихся 9-11 классов.

(5) Разработать диагностическую карту по содержанию исследовательской работы «Покупка пирожных» (см. Приложение 13).

Тема 18. Информационное моделирование задач

I. Предваряющее задание. (1) Классифицируйте текстовые задачи из сборника государственной итоговой аттестации в 9 классе. (2) Решите по одной задаче каждого класса, оцененной в 6 баллов. Какие трудности вы испытали при решении? (3) Прочитать статьи: *Лебедева С.В., Харьковская С.С. Задачи на движение в школьном курсе математики* (см. Приложение 14), *Лебедева С.В., Пилипенко В.В. Информационные модели задач на проценты* (см. Приложение 15), *Зубарева И.И. Ещё раз о процентах* (см. Приложение 16), *Баврин Г. И., Метод моделирования как элемент содержания обучения* (см. Приложение 17). В чём отличие информационного подхода к решению сюжетных задач от подхода традиционного. Перечислите 10 отличий. Результаты занесите в таблицу.

Параметр сравнения	Традиционный подход	Информационный подход

II. Семинар «Информационное моделирование текстовых задач как элемент содержания обучения» – 30 минут.

III. Практическая работа – 30 минут.

Задание 1. Составьте информационные модели к решённым вами задачам из Сборника заданий для итоговой аттестации.

Задание 2. Составьте информационные модели к текстовым задачам из Сборника заданий для подготовки к ЕГЭ.

Задание 3. Предложите решение проблемы, заявленной в статье *Лебедева С.В., Пилипенко В.В. Моделирование задач на движение в условиях интеграции физики, математики, информатики Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научно-методических трудов: Выпуск 7. – Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – с.47-52* (см. Приложение 18).

IV. Лабораторная работа – 30 минут – анализ электронного ресурса с последующей разработкой аналогичных компьютерных моделей задач в среде электронных таблиц (Microsoft Excel).

V. Внеаудиторное задание.

(1) Разработайте компьютерные модели некоторых типов сюжетных задач школьного курса математики.

(2) Составьте методические рекомендации к использованию компьютерных моделей текстовых задач в процессе обучения

(3) Изучите материалы методического семинара Белошистой А.В по вопросам обучения решению задач: *Начальная школа плюс до и после*, 2002, №11, С. 64-67; 2003: № 01, С.66-71; № 04, С.13-22, № 07, С.35-38; № 11, С.50-55; № 12, С.52-56.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Лебедева С.В.

Методические условия эффективности урока математики: проблема выбора оптимальных форм работы с учащимися.

(Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки / Межвуз. Сб. научн. тр. – Саратов: Научная книга, 2003, – С.27-31).

Проблема выбора учителем наиболее оптимальных форм работы с учащимися на уроке по-прежнему одна из самых актуальных.

Несовершенство понятийного аппарата современной методики обучения математике зачастую дезорганизует учителей, невольно заставляя их действовать по старинке, в рамках так называемого традиционного урока, цели, структура и возможности которого чрезвычайно ограничены.

Проанализируем структуру такого урока и традиционные для такой структуры формы работы с точки зрения их достоинств и недостатков – схема 1, где ИНМ – изучение нового материала, ЗИМ – закрепление изученного материала, КУМ – контроль за усвоением материала.

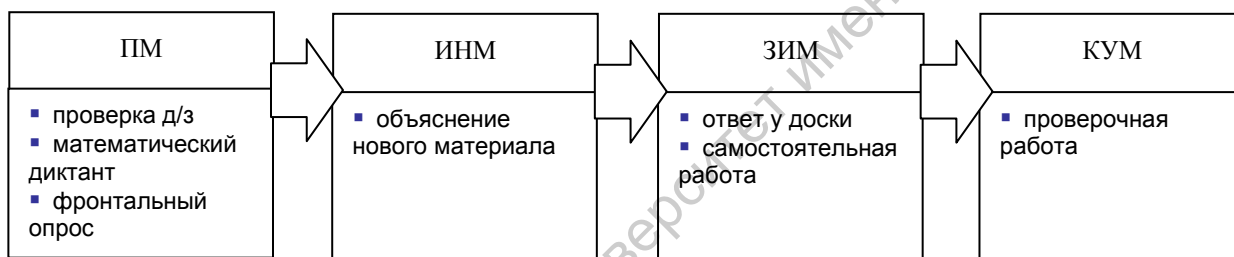


Схема 1. Структура традиционного урока

Достоинство можно указать лишь одно – минимальная подготовка учителя к урокам, что дает реальную возможность уделить больше внимания проверке домашнего задания (осуществляя таким образом постоянный контроль за усвоением материала) и индивидуальной работе с сильными и/или слабыми учащимися класса.

Зато недостатков у традиционного урока великое множество. Укажем лишь те, которые сводят на нет весь учебный процесс: (1) Однообразная структура урока и связанная с этим однообразная деятельность учащихся. (2) Отсутствие мотивированных целевых установок, и, как следствие, отсутствие интереса к изучаемой теме и предмету в целом. (3) Невозможность в рамках структуры организовать возникновение полноценных положительных и необходимых отрицательных эмоций (так называемый эмоциональный фон) способствует ослаблению воспитательного и интеллектуального воздействия на формирующуюся личность ребенка. (4) Ограниченное число приемов мыслительной деятельности учащихся не позволяет считать эту деятельность активной, в результате чего ослабляется внимание, затрудняется восприятие и усвоение нового материала, забывание доминирует над процессом запоминания материала, возникают пробелы в знаниях и умениях. (5) Структура и формы работы традиционного урока не позволяют учителю целенаправленно работать с классом над систематизацией учебного материала, лишая таким образом

учащихся необходимой практики упорядочения фактов и явлений окружающей нас действительности (одного из важнейших способов формирования мировоззрения). (6) Традиционный урок не дает учащимся какого-либо опыта в ведении исследовательской работы, что в свою очередь тормозит развитие интеллекта и ограничивает формирование и развитие творческих способностей детей.

Желая избавиться хотя бы от некоторых недостатков традиционного урока, учителя все чаще и чаще включают в учебный процесс некоторые новые формы работы: лекции, лабораторные работы, зачеты, беседы; вводят сказочных персонажей, элементы историзма и занимательности, работу по ОСК (опорным сигналам-конспектам), работу в парах, тестирование и пр., руководствуясь зачастую исключительно желанием разнообразить деятельность учащихся на уроке и сделать урок более интересным.

Но в рамках традиционной структуры, да еще без знания особенностей новых форм подобная полиформизация вряд ли будет эффективнее традиционного урока, а в некоторых случаях принесет больше вреда, чем пользы.

Как помочь учителю выбрать из огромного количества новых форм работы наиболее оптимальные, спланировать на их основе урок и грамотно провести его?

В первую очередь необходимо четко (и желательно, однозначно) определить все новые формы работы и откорректировать определения традиционных форм работы так, чтобы формулировки содержали максимум информации о каждой форме и в обязательном порядке отражали следующее: характер изучаемого материала, доминирующую функцию обучения, деятельность учителя и учащихся в ходе работы.

Определим подобным образом все формы работы, используемые при изучении нового материала.

ЛЕКЦИЯ – ограниченное по времени эмоциональное изложение учителем преимущественно нового максимального систематизированного теоретического материала, который учащиеся, вслед за учителем, фиксируют заявленным (оговоренным) предварительно способом (например, в виде схемы, плана, конспекта и т.д.).

ОБЪЯСНЕНИЕ МАТЕРИАЛА учебника – подробное, детальное разъяснение учителем наиболее сложного нового теоретического материала, изложенного в учебном пособии.

ОБРАЗЕЦ ОТВЕТА при решении задач прикладного и практического характера (включая доказательство отдельных теорем, исследование свойств и пр.) данным учителем – одна из форм работы с ярко выраженной развивающей функцией – призван обучать школьников связному рассказу, грамотному оформлению решения и развивать их алгоритмическую культуру.

РАССКАЗ – непродолжительное эмоциональное повествование на основе необязательного к усвоению, вспомогательного или дополнительного учебного материала имеющее целью, главным образом, заинтересовать учащихся, создать особый эмоциональный настрой, атмосферу сотрудничества.

СКАЗКА – эмоциональная форма изучения преимущественно знакомого материала, обладающая мощным воспитательным воздействием, призванная вызывать эмпатические переживания, и на их фоне формировать и развивать интеллектуальные способности ребенка.

ДЕМОНСТРАЦИЯ МОДЕЛЕЙ – изучение нового материала пропедевтического характера с использованием большого числа средств наглядности и с обязательным привлечением к процессу преподавания «проблемных» учащихся – оказывает воспитательный эффект в плане корректировки личности учащихся и межличностных отношений в детском коллективе.

БЕСЕДА – диалог учителя с учащимися (или с классным коллективом) по ходу изучения преимущественно знакомого (катехизическая беседа) или преимущественно нового (эвристическая беседа) учебного материала; охватывает все этапы работы над материалом (активизация знаний, изучение, усвоение и закрепление нового материала, (непрерывное) повторение ранее изученного, систематизация знаний, контроль за усвоением и коррекция знаний), и поэтому позволяет в некоторой степени контролировать деятельность учащихся.

РАБОТА С КНИГОЙ – самостоятельное изучение учащимися преимущественно нового учебного материала по различным учебным пособиям – многофункциональная и наиболее продуктивная ф.р.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА – форма работы по изучению некоторых дополнительных и полезных свойств уже известных объектов, взаимосвязей между изучающимися объектами и решению задач прикладного характера; предполагает четкое целеполагание, развернутую инструкцию работы, наличие выводов, полную (частичную) самостоятельность в выполнении; одна из форм исследовательского метода обучения, напрямую связанного практически со всеми методами научного познания и поэтому наиболее эффективного с точки зрения развивающих целей обучения.

На основе анализа этих определений можно сделать следующие выводы:

- (1) На выбор формы работы в первую очередь оказывает влияние характер изучаемого материала и цели урока (являющиеся отражением целей обучения).
- (2) Невозможно добиться высоких результатов обучения, используя только какую-нибудь одну из форм.
- (3) В рамках одного урока (ИНМ) могут сочетаться следующие формы: рассказ – образец ответа, рассказ – объяснение материала, рассказ – работа с книгой, исследовательская работа – работа с книгой.
- (4) Выбор той или иной формы обуславливает новую структуру урока ИНМ.

Рассмотрим основные структуры уроков ИНМ на базе каждой из девяти перечисленных выше форм.

I. [БАЗОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ] – ИНМ (лекция) – УИМ – ЗИМ.

II. [БАЗОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ] – ПИМ (объяснение материала) – ЗИМ – [КУМ].

III. ИНМ (рассказ +) – [УИМ] – ЗИМ – [КУМ].

IV. ИНМ (сказка) – ЦЕЛЕВОЙ ИТОГ УРОКА.

V. ИНМ (демонстрация моделей) – ЗИМ.

VI. ИНМ (беседа) – ЗИМ – [КУМ].

VII. ИНМ (работа с книгой) – ЗИМ – [КУМ].

VIII. [ПОВТОРЕНИЕ] – ИНМ (исследовательская работа) – [ПОМ].

(В квадратных скобках – [...] – выделены необязательные этапы урока; плюс предусматривает включение сочетающихся с рассказом форм работы; сокращения УИМ и ПОМ означают «усвоение изученного материала» и «повторение и обобщение материала» соответственно).

Покажем, как учителю на основе структуры урока и определения соответствующей формы работы спланировать ИНМ (на примере структуры 1):

[БАЗОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ] – ИНМ (лекция) – УИМ – [ЗИМ].

Ведущий этап урока – ИНМ в форме лекции. Все остальные составляющие урока напрямую зависят от него.

Итак, у нас есть некоторый теоретический материал, который мы хотим изложить в лекционной форме. Для этого:

1. По определению, мы должны проследить, чтобы доля нового в этом материале преобладала над уже известным, при необходимости дополнив имеющийся лекционный материал новыми сведениями теоретического характера.

2. Далее, мы систематизируем и структурируем материал лекции, записываем текст.

3. Фиксируем «чистое» время $t_{\text{ч}}$ необходимое для простого чтения текста лекции.

4. В зависимости от $t_{\text{ч}}$, планируем способ фиксации материала учениками: чем больше $t_{\text{ч}}$, тем меньше времени должно занимать ведение записей (см. таблицу 1).

Таблица 1 Зависимость способа фиксации учениками материала лекции от времени, необходимого для чтения текста лекции				
$t_{\text{ч}}$	до 12 мин	12-17 мин	17-23 мин	более 23 мин
способ фиксации содержания лекции	конспект	план-конспект ОСК (опорный сигнал-конспект)	ОСК ОС (опорный сигнал) схема	схема (в т.ч. классификационная) план (в т.ч. развёрнутый)
$t_{\text{ИНМ}}$	до 30 мин для урока продолжительностью в 40 мин			

5. В тексте-лекции, с учетом способа фиксации учениками нового материала и в соответствии с требованием эмоциональности изложения, отмечаем условными знаками речевые интонации, паузы, необходимые повторения и пр. В результате подобных дополнений продолжительность лекции $t_{\text{ИНМ}}$ не должна превышать 30 мин.

6. С учетом $t_{\text{ИНМ}}$ планируем базовое повторение, цель которого вспомнить необходимые для восприятия и более глубокого понимания нового материала математические факты. Если $t_{\text{ИНМ}} < 26$ мин, то базовое повторение проводят на уроке непосредственно перед изучением нового материала (в форме фронтального опроса). Если $t_{\text{ИНМ}} = 26 \div 30$ мин, то базовое повторение включают в домашнюю работу к нашему уроку.

7. В соответствии с содержанием материала, согласно структуре 1, планируем и разрабатываем на все оставшееся до конца урока время систему упражнений на усвоение изученного материала.

8. Планируем резерв – задачи на закрепление материала.

9. В комментариях к домашнему заданию (д/з) (не забываем зарезервировать для него 1-2 минуты) указываем (в соответствии с целями обучения) способ работы с записями лекции. Например: «Выучить определения...», «Уметь доказывать свойства...», «Уметь изложить материал лекции по ОСК», «Заполнить схему, включив в нее определения, взятые из учебника», «По развернутому плану лекции составить ее структуру в виде граф-схемы», «Ответить на вопросы...» и пр.

10. Так как учитель систематизировал лекционный материал без участия учеников, и объем этого материала значителен, то на первых порах усваиваться такой материал будет неохотно, не полностью и непрочно, и поэтому работу над усвоением необходимо продолжить на следующем уроке, а затем уже переходить к решению системы задач на закрепление материала.

В ходе подобной работы мы не только корректируем исходную структуру 1:

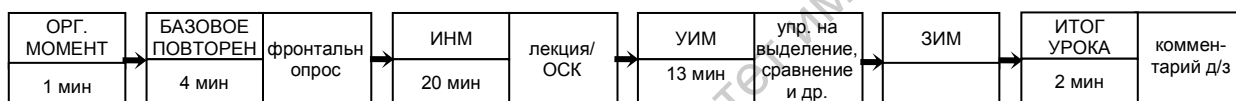


Схема 2. Структура 1а урока ИНМ



Схема 3. Структура 1б урока ИНМ

но и намечаем план/структуру следующего урока: УИМ – ЗИМ – КУМ.

Учитель, овладев умением использовать определения форм работы для планирования уроков ИНМ, решает, таким образом, проблему выбора оптимальной формы работы на этапе ИНМ. Но, остаются другие, не менее важные проблемы:

1. В каком соотношении должны находиться формы работы (то есть какую из форм использовать чаще, какую реже, и от чего это зависит)?
2. От чего зависит выбор форм работы на этапах УИМ, ЗИМ, ПОМ, КУМ, ИКЗУ (итоговый контроль знаний и умений)?
3. Как сочетаются формы работы различных этапов?
4. Как распределить время урока между различными формами работы?
5. Как зависит (и зависит ли вообще) структура и формы работы каждого последующего урока от предыдущих?

Чем основательнее будут решаться перечисленные выше и другие, связанные с ними, проблемы, тем более продуктивным будет процесс обучения математике.

Груденов Я.И.

Организация самостоятельной работы

(Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. – М.; Просвещение, 1990. – с.178-180)

Самостоятельная работа является необходимым этапом изучения любой темы. Как правило, она проводится после коллективного решения задач новой темы и обязательно предшествует контрольной работе по этой теме.

При проведении самостоятельной работы учитель сталкивается со следующими затруднениями:

1. Учащиеся заканчивают работу не одновременно. Поэтому целесообразно заранее включать дополнительное задание для тех, кто работает быстрее.

2. Трудно подобрать задание, одинаково посильное всем учащимся. Если выполняется ряд простых однотипных упражнений, например, на умножение и деление дробей, то здесь посильность задания регулируется его объемом. Труднее подобрать, например, геометрические задачи, одинаково посильные для всех. В этом случае хорошо помогает уже упомянутый прием сочетания устных и письменных упражнений (см. § 34). Сначала решают несколько задач устно, а затем некоторые из них включаются в самостоятельную или в контрольную работу.

3. Трудно организовать проверку самостоятельной работы. Иногда учитель собирает и проверяет тетради всех учащихся. Это хорошая форма проверки, но она не всегда осуществима. Поэтому используются и другие приемы. Среди них – некоторые явно неудачные. Например, сначала выполняют самостоятельную работу, а к концу ее один из учащихся записывает решение задачи на доске для последующей проверки. Это приводит к лишней трате времени.

Гораздо лучше получается, когда один-два ученика записывают решения задач на вращающейся доске. К концу самостоятельной работы доски поворачиваются и классу предлагается проверить решения задач. Еще лучше эта же форма получается при наличии кодоскопа.

Некоторые учителя при отсутствии вращающейся доски и кодоскопа используют другой вариант проверки. Класс пишет самостоятельную работу, один-два ученика молча решают эти же задачи на доске.

Списывание сводится к минимуму следующим предупреждением: «Кто хочет, может сверяться с записями на доске по ходу решения, но лучше после него. Проверьте свои Возможности». После самостоятельной будет дана контрольная работа с подобными упражнениями.

Отметим ряд типичных недостатков, наблюдаемых, к сожалению, на многих уроках.

Некоторые учителя сами мешают спокойной и сосредоточенной работе учащихся, неоднократно прерывают ее всякими указаниями, репликами, замечаниями.

Заметив ошибку в тетрадях одного-двух учеников, учитель отрывает весь класс от работы и дает соответствующее указание всем ученикам, чтобы не повторили ошибку. Это лучше делать до или после самостоятельной работы.

Увидев, что отдельные ученики закончили работу и сидят без дела, учитель громко объявляет новое очередное задание. Это задание следует предусмотрительно давать до самостоятельной работы.

Объясняя одному ученику, учитель говорит слишком громко, тем самым мешая работе всего класса.

Все ученики сосредоточенно работают, и в напряженной тишине время от времени раздается громкий стук каблуков при ходьбе учителя по классу.

Иногда учитель слишком долго дает объяснение одному ученику, не замечая, что три-четыре ученика все это время держат поднятые руки и просят его помощи. Это неправильно. Надо ориентироваться на весь класс, а не на отдельного ученика. Учителю следует как можно чаще окидывать взглядом класс и спешить туда, где его помощь более необходима. Если поднимают руки сразу два-три ученика, можно кивнуть им, сейчас, мол, подойду. Ученики, удостоверившись, что учитель заметил их, обычно успокаиваются и продолжают свою работу.

Рассмотрим один из приемов проведения самостоятельной работы с использованием микрокалькуляторов. Этот прием удобно применять при изучении действий с положительными и отрицательными числами, с десятичными дробями и в других случаях.

После введения нового правила, допустим, сложения положительных и отрицательных чисел проводится коллективная работа компактным методом (см. § 25). Затем переходят к самостоятельной работе. И здесь учитель сталкивается с рядом затруднений.

Во-первых, применяя новое правило, учащиеся на первых порах ещё не уверены в правильности выполняемых действий и часто обращаются к учителю с просьбой проконтролировать результаты, а он не всегда успевает сделать это.

Во-вторых, когда классу предлагают проверить самостоятельную работу, например, по демонстрируемым на экране ответам, то многие учащиеся в лучшем случае ограничиваются исправлением ошибок, не вникая в их сущность. Это объясняется тем, что после выполнения всех упражнений самостоятельной работы учащимся трудно переключать свои мысли и возвращаться к рассуждениям, проведенным при выполнении предыдущих упражнений.

Чтобы устранить эти затруднения, некоторые учителя стараются включать в самостоятельную работу минимальное число упражнений, иногда – всего одно-два упражнения. Это уже лучше, но при этом темп работы несколько замедляется, так как часть учащихся какое-то время остается незагруженной.

Использование микрокалькуляторов позволяет устранить эти затруднения. В этом случае при проведении самостоятельной работы предлагается действовать по следующему плану: сначала выполнить очередное упражнение по правилу, затем сразу проконтролировать полученный результат

с помощью микрокалькулятора и, лишь после этого, приступить к следующему упражнению. Как при этом обеспечить последовательность выполняемых действий каждым учеником именно в указанном порядке (сначала решать по правилу, а затем сразу проверять каждый результат с помощью микрокалькулятора)? Для пунктуального соблюдения всеми учащимися такой последовательности действий класс предупреждается, что после самостоятельной работы будет предлагаться кратковременная контрольная работа. На ней подобные упражнения надо будет решать только по правилу, при выключенных микрокалькуляторах.

После неоднократного чередования самостоятельных и контрольных работ учащиеся убеждаются в том, что главная цель урока – научиться применять изучаемое правило, что микрокалькуляторы только помогают проконтролировать получаемые результаты, помогают быстрее обнаруживать, анализировать и предупреждать ошибки. В результате во время самостоятельной работы учащиеся все усилия сосредоточивают на выполнении упражнений по правилам и при их изучении начинают смотреть на микрокалькулятор только как на вспомогательное средство, помогающее усвоению изучаемого материала и успешному выполнению последующих контрольных работ.

Схема анализа текстов методического содержания
(сценариев, планов-конспектов уроков и внеурочных материалов, текстов
самостоятельных работ, исследовательских работ и т.п.)

1. Соответствие темы и цели
2. Соответствие цели и уровня развития учащихся
3. Проигрывание учебной ситуации, по ходу которого делаются выводы относительно:
 - необходимости и достаточности оборудования
 - корректности формулировок заданий
 - наличия и уместности указаний
 - наличия и количества форм результативности (схем, таблиц, заготовок под графики, рисунки, диаграммы и пр.)
 - наличия и количества обобщающих выводов
 - наличия и количества развивающих вопросов и заданий
 - наличия и уместности иллюстративного материала
 - времени, отведенного на выполнение
 - указаний по оцениванию результатов
4. Коррекция текста

Гусев В.А.

Активность и самостоятельность учащихся

(Психолого-педагогические основы обучения математике. – М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия». – 2003. – с.90-105.

(в извлечениях)

Понятие «активность» очень сложное. В науке оно трактуется по-разному. Одни отождествляют активность с деятельностью, другие считают активность результатом деятельности, третьи утверждают, что активность – более широкое понятие, чем деятельность, и т. п.

Г.И.Щукина, например, саму деятельность определяет через активность: «Деятельность – это основная форма проявления активности человека, его социального назначения... В деятельности человек выступает как субъект, как активный носитель своей социальной сущности, как творец, как деятель... Человек, изменяя природу, изменяет свою собственную природу меру своей активности, которую он привносит в деятельность, обогащая ее своим сознанием, переживаниями, вдохновением, внутренними побуждениями. Изменение, преобразование, формирование человека вне его активной деятельности осуществлять бесперспективно»³.

Активность как качество личности иногда рассматривают как внимательность, расположенность, живое соучастие в общем процессе, быстрое реагирование на изменение обстоятельств деятельности. Это лишь некоторые реакции личности на определенные виды деятельности, которые стимулируют ее активность.

Но когда деятельность человека может быть активной? Отвечая на этот вопрос, В.И.Загвязинский пишет так: «Она должна быть в такой мере сложной, чтобы представлять определенную, преодолимую при мобилизации познавательных сил и опыта человека трудность. Иными словами, осваиваемые в чем-то новые действия и операции должны находиться «в зоне ближайшего развития» (Л.С.Выготский) человека»⁴.

Обучение математике доказывает, что активность есть отношение ученика к учению, к той деятельности, которую ему предлагают выполнять. Важно, чтобы эта деятельность была не просто посильна для каждого, она должна находиться в зоне ближайшего развития обучаемого. Ученик должен испытывать потребность мобилизации своих познавательных сил и опыта для преодоления возникающих трудностей.

Встречается также термин познавательная активность – ценное личностное качество школьника, которое интенсивно формируется в школьные годы. Проявления его в каждом последующем возрасте шире, богаче, оно оказывает влияние на продуктивность обучения и учения, на активизацию всей учебной деятельности. Ценность урока чаще всего определяют через активность учащихся.

³ Щукина Г.И. Роль деятельности в учебном процессе. – М.: Просвещение, 1986.

⁴ Загвязинский В.И. Педагогическое творчество учителя. – М.: Педагогика, 1987.

Познавательную активность можно считать подготовительной ступенью самостоятельности.

Мы видим, что общее представление о понятии активности личности весьма расплывчато, но наша основная задача активизировать математическую деятельность ученика, а через это влиять на общую активность учащихся.

Самостоятельность связана с инициативой, с поиском различных путей решения учебно-познавательных задач без участия взрослых. От становления самостоятельности с ранних лет зависит активность ребенка, его ориентировки в окружающей действительности.

«Я сам» – великолепное стремление уже младшего школьника, которое нужно поддерживать. Тем более необходимо формировать учебно-познавательную самостоятельность в школах при решении самых различных учебных задач на различном предметном содержании, в самых разнообразных ситуациях процесса обучения. Понимание школьником своих возможностей происходит при активном включении в самостоятельную деятельность. Это позволяет ему ставить перед собой новые цели, осуществлять саморегуляцию.

Самостоятельная работа – одна из форм учебной деятельности учащихся. В педагогической литературе даются разные определения ее сущности. Одни авторы за основу берут описание способов руководства действиями учащихся, содержание выполняемых заданий и их значение для воспитания личности учащегося; другие к движущим силам и основным признакам самостоятельных действий относят собственные побуждения учащегося и осознание их смысла, цели работы; третьи – отсутствие педагогического руководства; четвертые – внесение учащимся в выполняемую работу чего-то нового по отношению к воспроизводимому образцу; пятые – проявление максимума активности, творчества, самостоятельного суждения, инициативы и т. д.

Различен подход к понятию самостоятельной работы и с точки зрения способа ее организации. В последние годы термин «самостоятельная работа» употребляется большинством современных исследователей то как понятие метода обучения, то как форма организации деятельности учащихся, то как вид познавательной деятельности ученика. Иногда самостоятельная работа рассматривается как средство, с помощью которого учитель вовлекает учащихся в самостоятельную познавательную и практическую деятельность, целенаправленно организует и управляет этой деятельностью с учетом различных уровней развития учащихся.

В методике обучения предмету, в том числе и в методике преподавания математики, мы вдруг начинаем в 5, 6 и более старших классах снова формировать самостоятельность: желание самостоятельно читать учебную книгу, самостоятельно решать задачу и т. д. Это совершенно неестественно. Видимо, мы сами (родители, школа, окружение) что-то не то делали с ребенком, про которого Г.Клаус пишет так: «Уже к концу первого года у всех здоровых детей начинает проявляться неукротимое стремление действовать самому («Хочу сам!»). Оно есть проявление, достойное всяческой поддержки, готовности к действию. Эта готовность толкает ребенка на приобретение собственного опыта, в том числе и горького, посредством изучения последовательно раздвигает горизонт представлений о мире.

Стремление к самостоятельности принадлежит к числу фундаментальных мотивов Homo sapiens. Мотив этот побуждает человека к «деланию себя», к испытанию себя, к открытию себя. Ограничение свободы действия тяготит даже двухлетнего ребенка, и он стремится всячески обойти налагаемые запреты»⁵.

Возникает печальное соображение: мы или не знаем, как учить, или знаем, но не умеем. Ведь сколько сил затрачивается с первых дней рождения ребенка, чтобы привить ему самостоятельность, а результат в большинстве своем нулевой. Например, о значительной части школьников 7-8 классов учителя говорят, что они ничего не умеют, да и не хотят ничего делать самостоятельно.

Одной из причин такой ситуации является отсутствие индивидуального подхода к самостоятельности вообще и к мотивам самостоятельности в частности. Кроме того, за последние годы сузились и сами формы самостоятельных работ, снизился уровень их творческого характера.

В значительной степени отсутствие умений самостоятельной деятельности объясняется недоработками действующих учебников, где за учеников думают, делают выводы, решают, строят, выдвигают гипотезы и т. д.

Возникает задача – выявить эффективные формы самостоятельной работы при обучении математике и помочь учащимся в этой работе. При решении этих задач на первый план выходит понимание сущности самостоятельной математической деятельности учащихся. Практика обучения математике показывает, что на уроке и дома есть много видов самостоятельной работы: выполнение домашнего задания, решение задачи в классе, деятельность, которая непосредственно называется «самостоятельная работа», и т. д. Таким образом, дело не в том, что при обучении математике нет возможности самостоятельно работать, вопрос гораздо глубже – как научить учащихся работать самостоятельно, каковы механизмы этой работы?

Хорошо известна классификация самостоятельной деятельности учащихся: репродуктивная, частично-поисковая и творческая. Так вот, первая задача учителя математики – владеть этими видами самостоятельной деятельности, уметь управлять ими. Часто в исследованиях, связанных с организацией самостоятельной работы учащихся при обучении математике, пишут об отказе от ее репродуктивного уровня. Это верно только в одной части – нельзя всю самостоятельную деятельность сводить к репродуктивной, необходимо внедрять самостоятельную работу творческого характера. Однако при этом следует помнить об индивидуальных особенностях учащихся, а также учитывать высказывание Г.Клауса о том, что в одинаковой степени невозможен как абсолютно нетворческий, так и абсолютно творческий труд»³.

Поэтому мы всегда будем сталкиваться с трудностями при решении вопроса о включении данного конкретного вида деятельности в разряд творческой. Рассмотрим это положение подробнее. Попытаемся ответить на вопросы: что такое самостоятельная работа творческого характера и чем она отличается от обычной работы? При этом важно понимать, как в самостоятельной работе должны сочетаться репродуктивный и творческий характеры.

⁵ Клаус Г. Введение в дифференциальную психологию. – М.: Педагогика, 1987.

... Путь к творчеству индивидуален. Вместе с тем все учащиеся в процессе изучения математики должны ощутить ее творческий характер, познакомиться в процессе обучения математике с некоторыми умениями и навыками творческой деятельности, которые им будут нужны в их дальнейшей жизни и деятельности. Для решения этой сложной задачи преподавание математики должно быть построено так, чтобы ученик чаще искал новые комбинации, преобразовывая вещи, явления, процессы действительности, искал неизвестные связи между объектами.

Прекрасным способом приобщения к творческой деятельности при обучении математике является самостоятельная работа во всех ее видах и проявлениях. Весьма принципиальным в этом отношении является высказывание академика П.Л. Капицы о том, что самостоятельность является одним из самых основных качеств творческой личности, так как воспитание творческих способностей в человеке основывается на развитии самостоятельного мышления.

Совместно с С.Мадраимовым⁶ мы, анализируя параметры самостоятельной деятельности учащихся и содержание понятия «творческая деятельность», выделили следующие признаки, которые могут характеризовать самостоятельную работу творческого характера.

1. Самостоятельная работа творческого характера характеризуется тем, что в ней учащийся, опираясь на имеющиеся знания, теоретический и практический опыт, на интуицию и воображение, в результате активных действий создает нечто новое для себя.

2. Самостоятельная работа будет иметь творческий характер (особенно при изучении математики), если в ней реализуется собственный замысел учащегося, в результате чего ставятся и решаются задачи, выделяются новые нестандартные методы их решения.

3. Отличительной чертой самостоятельной работы творческого характера является то, что учащиеся при ее решении должны сами найти способ (или несколько способов) решения, уметь применять знания в новых, нестандартных ситуациях.

4. Самостоятельная работа творческого характера позволяет учащимся освободиться в процессе учебной работы от готовых образцов, шаблонов, сложившихся установок, придает этой учебной деятельности гибкий поисковый и проблемный характер.

Перечислим некоторые практические рекомендации, предъявляемые к самостоятельной работе творческого характера. (1) Организация на уроке (вне урока) самостоятельной работы творческого характера должна соответствовать основным целям и задачам обучения. (2) Самостоятельная работа творческого характера должна сочетаться с другими видами самостоятельной работы. (3) Отличительной и главной чертой самостоятельной работы творческого характера является то, что уровень новизны, степени сложности и строгости изучаемого материала должны носить дифференцированный характер. (4) Самостоятельная работа творческого характера может быть разной длительности по времени.

⁶ Мадраимов С. Самостоятельная работа творческого характера при изучении математики в средней школе. – Дис.канд.пед.наук. – М., 1985

Информационно-коммуникационная образовательная среда



Лебедева С.В., Худайбергенова М.Ч.

О проблемах использования ИКТ при обучении школьников математике
(Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научно-методических трудов: Выпуск 7. – Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – с.63-67).

Использование новых информационных технологий в деятельности практикующих учителей математики идёт по двум основным направлениям. Первое можно условно назвать замещением средств коммуникации, а второе дополнением средств коммуникации.

Под замещением средств коммуникации будем понимать процесс использования средств ИКТ вместо традиционных средств обучения: компьютерная презентация вместо традиционных средств наглядности; электронные учебные пособия вместо лекций, рассказов, традиционного объяснения материала; компьютерные средства проверки и оценки знаний вместо фронтальных опросов, математических диктантов, ответов у доски с комментарием, проверочных и контрольных работ, устных зачётов и других форм контроля; автоматизированные обучающие системы вместо традиционных самостоятельных работ различных видов.

Под дополнением средств коммуникации будем понимать процесс использования средств ИКТ дополнительно к традиционным средствам обучения: компьютерная презентация в качестве дополнительного средства наглядности; электронные учебные пособия – в дополнение к лекциям, рассказам, объяснению нового сложного материала; компьютерные средства проверки и оценки знаний – в качестве одной их форм контроля; автоматизированные обучающие системы – в качестве домашнего электронного репетитора и т.д.

И замещение, и дополнение средств коммуникации имеют явные достоинства и недостатки. Достоинством считается усиление положительной учебной мотивации школьников вплоть до уровня личностного, ответственного, активного отношения к учению, совершенствования способов сотрудничества в учебно-познавательной деятельности. Но вряд ли использование в учебном процессе новых информационных технологий можно считать здоровьесберегающим (явный недостаток). Кроме того, отмеченное выше достоинство – из серии педагогических мифов: мотивы, формируемые при использовании новых информационных технологий, правильнее было бы отнести к уровню нейтральных (нейтральное отношение к учению; неустойчивый интерес к внешним результатам учения; переживание скуки и неуверенности в себе) или положительно аморфных (ситуативное отношение к учению; широкий познавательный мотив в виде интереса к результату учения и к отметке учителя; широкие нерасчлененные социальные мотивы ответственности; общая неустойчивость мотивов).

К неявным, скрытым недостаткам новых информационных технологий в обучении можно отнести их плохую методическую совместимость с традиционными формами обучения школьников математике.

Как показывает практика, та же компьютерная презентация чаще всего является отвлекающим фактором, позволяющим ученикам во время урока устроить незапланированную перемену, отдохнуть и пообщаться с друзьями. Во избежание этого, учителя заставляют школьников переписывать содержание слайдов, а если учесть, что слайды – конспекты школьных учебников, то пользы от такого применения компьютерной презентации – никакой, а вред – очевиден. Кроме того, большая часть разработанных учителями презентаций не соответствует требованиям, предъявляемым к учебной презентации. Нами были просмотрены 50 учебных презентаций, размещённых на сайтах ИД «1 Сентября» и «Uroki.net», из которых только 4 удовлетворяют всем требованиям.

Другая «любимая игрушка» учителей – интерактивная доска, которая используется в качестве замещения средств коммуникации. Ощувив единожды достоинства интерактивной доски, учителя весь процесс обучения математике ориентируют на использование данного технического средства, пренебрегая тем фактом, что полноценное усвоение математических знаний предполагает формирование таких познавательных действий, которые составляют специфические математические приёмы. Поясним на примере. Пусть ученику шестого класса требуется найти сумму дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Для этого ему придётся выполнить (по большей части, мысленно) четыре действия и сопроводить их соответствующими математическими записями.

Выполняемое действие	Математический приём	Математическое знание
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$	Приведение дробей к общему знаменателю	Арифметика обыкновенных дробей: для того, чтобы найти сумму дробей с разными знаменателями необходимо (1) привести дроби к общему знаменателю и (2) найти сумму дробей с общим знаменателем
$=$	Нахождение общего знаменателя: (1) НОД(2,3)=1, следовательно, знаменатели – взаимно простые числа (2) общий знаменатель $2 \cdot 3 = 6$	Чтобы найти общий знаменатель дробей, необходимо (1) выяснить являются ли знаменатели взаимно простыми числами; (2) если знаменатели – взаимно-простые числа, то общий знаменатель двух дробей – наименьший и равен произведению знаменателей данных дробей
$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} =$	Приведение дроби к новому знаменателю: $\frac{1}{2} = \frac{x}{6}$; $6:2=3$; $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ $\frac{1}{3} = \frac{y}{6}$; $6:3=2$; $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$	Основное свойство дроби. При умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же число, значение дроби не изменится. Приведение дроби к новому знаменателю: для того, чтобы привести дробь $\frac{x}{y}$ к знаменателю z необходимо (1) найти частное $z:y=c$, (2) умножить и числитель и знаменатель данной дроби на c , при этом, в числителе новой дроби получим xc , а в знаменателе – z , то есть $\frac{x}{y} = \frac{xc}{z}$
$= \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$	Сложение дробей с одинаковым знаменателем	Арифметика обыкновенных дробей: для того, чтобы найти сумму дробей с общим знаменателем, необходимо числители дробей сложить, а знаменатель оставить прежним

Для формирования навыка сложения обыкновенных дробей и овладения соответствующими специфическими математическими приёмами ученику

придётся многократно проделывать одни и те же действия. Нужны ли при этом ученику средства ИКТ?.. Несмотря на очевидность ответа, многие учителя организуют процесс формирования математических умений и навыков с использованием интерактивной доски по следующему сценарию.

1. Приводится образец решения типового задания (компьютерная презентация или видеоролик).

2. Организуется последовательное решение по образцу в среднем четырёх типовых упражнений на интерактивной доске.

3. Ученикам предлагается тест на усвоение – серия (≈ 24) типовых упражнений с выбором одного правильного ответа из четырёх предложенных, например, $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \dots$ (а) $\frac{5}{7}$, (б) $\frac{5}{12}$, (в) $\frac{17}{12}$, (г) $\frac{6}{17}$.

4. Ученикам предлагается серия (≈ 12) типовых упражнений, например, $\frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \dots$, и задание «Записать ответ».

5. Даются примеры (3-5) использования нового знания/умения/навыка при решении текстовых задач, уравнений, неравенств и т.п. (компьютерная презентация или видеоролик).

Задача на движение

Автомашина движется со скоростью $\frac{3}{4}$ км/мин. Какой путь пройдет автомашина за 5 мин; за 10 мин?



Слайд 1

Задача на движение

Автомашина движется со скоростью $\frac{3}{4}$ км/мин. Какой путь пройдет автомашина за 5 мин; за 10 мин?



Решение:

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3+3+3+3+3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} \text{ (км)}$

2) $\frac{15}{4} + \frac{15}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} \text{ (км)}$

3) $\frac{15}{4} = 3,75 \text{ (км)}, \frac{30}{4} = 7,5 \text{ (км)}$

Ответ: 3,75 (км) и 7,5 (км)

Слайд 2

6. Ученикам предлагается решить текстовые задачи, уравнения, неравенства, аналогичные рассмотренным (по 2 на каждое рассмотренное в п.5 задание). При этом условие и основные этапы решения, не относящиеся к формируемому умению/навыку, моделируются учителем и выводятся (компьютерная презентация) для всеобщего ознакомления. Например, при решении задачи «Автомашина движется со скоростью $\frac{3}{4}$ км/мин. Какой путь пройдет автомашина за 5 мин; за 10 мин?» учащимся демонстрируется слайд 1. Далее выясняется способ решения, который позже также демонстрируется (Слайд 2).

7. Выполняется (фронтальная работа) интерактивное упражнение, например, «Расположить в порядке возрастания дроби $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ и $\frac{3}{7}$ ».

8. Ученикам предлагается серия (≈ 14) типовых примеров, и задание «Найти ошибку в вычислениях».

9. Следующая серия типовых упражнений – на сопоставление (их тоже 24 – по количеству детей в классе): два столбика числовых выражений; выражение из первого столбца соединяется линией с равным ему выражением второго столбца.

10. Нахождение значения числовых выражений (три задачи), например, $\left(\left(\frac{2}{3} + \frac{6}{7}\right) + \frac{10}{21}\right) \cdot 3,5 + \left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5}\right) \cdot 20 : 3$. Количество действий во всех задачах данного вида – 24.

11. Занимательные задачи (резерв) даются классу для обсуждения и последующего решения (компьютерная презентация или видеоролик).

Таким образом, за урок решается 96 (и более) типовых упражнений, алгоритмизованных задач первого и второго уровней сложности – реализуется основная задача применения ИК-технологий: оперирование большими объёмами информации.

Каждый ученик, по крайней мере, четырежды выходит к доске, поэтому работа учащихся организуется «по цепочке». Учитель не вызывает учеников к доске, а указывает ученика, который первым начинает самостоятельное решение упражнений у доски, все остальные учащиеся выходят к доске по очереди; чаще всего очерёдность связана с занимаемым в классе местом за партой.

Работа «по цепочке» и вся деятельность учащихся на уроке требует от них постоянного внимания к информации, появляющейся на интерактивной доске, что не позволяет сконцентрироваться на фиксации результатов в тетради. И при всём разнообразии заданий, учащиеся, по сути, выполняют одни и те же действия: знакомятся с условием задачи, применяют правило, находят ответ, но это совсем не те действия и приёмы, которые мы указали в качестве обязательных в таблице 1.

Без сомнения с самого начала урока посредством ИК-технологий мыслительная деятельность учеников активизируется, и проходит на пике активности в течение всего урока. Вместе с тем, если на следующих уроках ученик (1) не будет решать задачи в соответствующем для него темпе; (2) задумываться над неочевидными математическими преобразованиями; (3) записывать решение в тетрадь и таким образом «видеть, как появляется, выходит из-под пера» его решение, то можно с уверенностью констатировать полный провал такого феерического урока, какой был описан выше.

Поэтому, если учитель проводит уроки только подобной конструкции, то ему не стоит удивляться, что контрольную работу по теме лишь немногие учащиеся напишут на положительную отметку, и в дальнейшем будут допускать ошибки в действиях и рассуждениях.

Следующее, с успехом внедряемое в учебный процесс, «новшество» – компьютерное тестирование знаний, умений и навыков по предмету – подвергается наименьшей критике, поскольку является дополнением средств коммуникации. Здесь на первое место выходит собственно процесс организации тестирования учащихся и связанные с ним проблемы: где и когда проводить тестирование, как оценивать деятельность учащихся, что делать в случае, если контрольную работу ученик пишет стабильно на 5/4, а тестирование по той же теме проходит также стабильно на 3/2; а если контрольную работу ученик пишет на 3/2, а тестирование проходит на 5/4; если

успевающий ученик не укладывается в отведённое на тестирование время, и т.п.?

Ещё одно популярное средство активизации познавательной деятельности – работа с ресурсами Интернет. К сожалению, математика предоставляет немного возможностей обратиться ученикам к Интернет-ресурсам: доклад по истории математики, энциклопедические словари, демонстрационные версии контрольно-измерительных материалов, интернет-тестирование, сборники задач по различным разделам математики, лекционный материал по алгебре, геометрии, началам анализа, архив фестиваля исследовательских и творческих работ учащихся «Портфолио» и кое-что ещё не поражают воображения, а иногда по качеству значительно уступают печатным аналогам.

Наиболее перспективным для учащихся является участие в различных математических конкурсах, организуемых специальными службами при высших учебных заведениях, издательствах и т.п. Но всё это для детей с высоким уровнем развития математических способностей. Средний же ученик ищет в Интернет «учителя, репетитора и консультанта в одном лице». Получаемая им информация ничем практически не отличается от той, которая размещается в учебниках, математических энциклопедиях, справочных пособиях, решебниках.

Учитывая это, не стоит ученику выдавать задание «Подготовить доклад на тему...». Доклад будет скачан, распечатан и выдан на проверку. Учителю остаётся в очередной раз «проверить» известный учебный материал или же разбираться в тонкостях высшей математики, которую успел подзабыть, и выставлять ученику отметку... Пять, четыре, три, два?... Возникающие на этом фоне межличностные конфликты должны воспрепятствовать учителю формулировать столь общие и бесполезные задания.

Гораздо лучше выдавать серию расширяющихся заданий, например, по теме «Обыкновенные дроби»:

1. Проанализируйте следующие равенства, аналоги которых изучались в Древнем Египте, о чём можно судить по сохранившемуся с тех времён кожаному свитку (Хранится в Британском музее Лондона):

$$\bar{3}+\bar{6}=\bar{2}, \bar{2}+\bar{3}+\bar{6}=\bar{1}, \bar{2}+\bar{6}=\bar{3}, \bar{3}+\bar{6}=\bar{2}+\bar{3}, \bar{2}+\bar{3}=\bar{6}+\bar{1}.$$

Эти равенства в свитке употреблялись без всяких указаний, и поэтому можно считать, что они являлись правилами счёта, которые знал наизусть каждый вычислитель в Древнем Египте.

2. Переведите эти правила на современный математический язык.

3. Перечисленные формулы далее использовались египтянами, по-видимому, следующим образом: каждое из пяти соотношений делилось на 2, на 3, на 4 и т.д. Прodelайте эти действия, продолжив, таким образом, данный ряд формул.

4. Сформулируйте обобщающие выводы.

В этой статье мы рассмотрели лишь некоторые проблемы применения ИКТ-технологий в процессе обучения математике школьников. Но даже те немногие проблемы, которые мы обозначили, требуют от учителя серьёзного научного подхода к информатизации учебного процесса.

Лебедева С.В., Мухангалиева Г.Н.

Активизация самостоятельной работы учащихся посредством включения в содержание обучения историко-математического материала

(Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научных трудов: Выпуск 4. – Саратов: Научная книга, 2005. – с.29-33)

Ориентированность современных технологий обучения, прежде всего, на развитие учащихся, требует интеграции (полной или частичной) разнообразных отраслей знания. Примером полной интеграции может служить курс обществознания. Частичная интеграция осуществляется путём установления межпредметных связей. Для естественнонаучных дисциплин наиболее приемлемой считается внутренняя интеграция, либо интеграция каждой из них с историей возникновения и развития соответствующей науки. При этом, интеграцией учебной дисциплины с историей возникновения и развития соответствующей науки можно считать только такое их сочетание, при котором исторический материал подчёркивает, а ещё лучше, усиливает все образовательные функции изучаемой дисциплины. Поэтому наиболее часто встречающаяся форма включения в учебный процесс исторического материала, а именно, изложение биографий учёных по плану:

фамилия, имя, отчество – годы жизни – основные открытия и изобретения, наименее удачна, в силу своей малой эффективности. Другая форма знакомства учащихся с историей науки – составление реферата с последующим чтением доклада по теме реферата, – также не является эффективной по целому ряду причин. Во-первых, более или менее глубоко с историей вопроса знакомится только тот ученик, который получил задание составить реферат по заданной теме, остальные учащиеся во время доклада, как правило, не проявляют должной познавательной активности. Во-вторых, учитель достаточно редко даёт возможность ученику во время урока сделать доклад, основной аргумент при этом: мало (жаль) времени. Все это приводит к тому, что у школьников исчезает желание не только выступать с докладами, но и готовить рефераты, и даже читать какую-то ни было литературу по истории науки. Не оценённая по достоинству деятельность (и её результаты) снижает мотивационную основу учения (обучения соответствующему школьному предмету) и может в конечном итоге привести к равнодушию или, что еще хуже, полнейшему отращению к учению.

При обучении математике можно наблюдать три вида интеграции с историей математики. Первый вид, обозначим его условно «математика + история математики», характеризуется доминированием математического содержания над соответствующим историческим; схема, определяющая сценарий урока выглядит следующим образом:

- С учётом (на основе) историко-математического материала создаётся проблемная ситуация.
- В ходе беседы выдвигаются различные гипотезы по разрешению проблемы.

- Гипотезы комментируются в историческом контексте, отвергаются тупиковые версии, выбирается правдоподобная гипотеза.
- По ходу работы с правдоподобной гипотезой изучается соответствующий математический материал.
- Материал закрепляется на различных видах упражнений.

Так можно изучать большинство тем школьного курса математики. Но есть такой материал, значимый и необходимый учащимся, математическую суть которого в условиях средней школе изложить невозможно в первую очередь из-за высокого уровня абстракции материала и низкого уровня сформированности теоретического мышления школьников. Речь идёт об аксиоматическом построении математики (и в частности, об аксиоматическом методе). Материал данной темы излагают только в историческом аспекте. В этом случае можно говорить об интеграции второго вида **«история математики $\supseteq$ математика»**.

Третий вид интеграции **«(этимология и история языка + история математики) $\subset$ математика»** становится всё более популярным в наши дни, так как позволяет без особого труда возбудить познавательную активность учащихся. Суть рассматриваемой интеграции заключается в попытках разобраться вместе с учащимися в следующем вопросе: кто впервые придумал то или иное понятие и зачем? Достоинством данного вида интеграции является органичность включения исторического материала в контекст урока, ведь нет ничего естественнее детских вопросов: «Почему косинус назван именно *косинусом*, а не как-то иначе?», «Откуда взялось слово *пирамида*?», «Кто и зачем придумал *транспортёр*?», «Как появилось слово *окружность*?» «Что означает слово *интеграл*?» и т.д. Ответы на эти и подобные вопросы не просто оживляют урок, делая его интересным и запоминающимся, но и представляют изучаемую науку живой и современной, развивают мышление и культуру мышления учащихся, побуждают к поиску и анализу нужной информации, вызывают желание не только выслушать ответ на уже поставленный вопрос, но и самому увидеть проблему, сформулировать её в форме вопроса и постараться найти ответ. Последнее особенно ценно, так как, по сути, является прообразом творческой деятельности. Более того, грамотно организованная работа со словом формирует культуру речи и значительно расширяет кругозор учащегося, поскольку слово, возникающее и живущее в определённой языковой среде, также непосредственно связано с историей культуры народа, которому принадлежит язык, с историей цивилизации. Ещё одним достоинством интеграции данного вида является то, что включение в содержание урока историко-математического материала не занимает много времени и, что ещё важнее, позволяет удерживать внимание учащихся на изучаемом объекте, а не переключает его (как зачастую бывает при чтении доклада по историко-математической тематике) на факты, мало относящиеся к теме урока. Главная проблема интеграции рассматриваемого вида заключается в том, что возникать она может спонтанно, не считаясь с планами учителя. Для этого достаточно какому-нибудь ученику задать подходящий вопрос. Игнорировать поставленный ребёнком вопрос в рамках изучаемого

программного материала учитель не имеет права. Отсылать школьников слишком часто к справочникам и словарям – показать незнание преподаваемого предмета. Единственный выход таков: если учитель строит процесс обучения математике на основе интеграции вида «(этимология + история математики) $\subset$ математика», он должен знать этимологию и историю возникновения всех понятий школьного курса математики.

Можно изучать историко-математический материал в рамках других учебных предметов. Наиболее удачными для этого мы считаем курс *истории* и предмет *информатики и ИКТ*. В профильных математических классах целесообразно вопросами этимологии математических терминов заниматься на уроках *русского языка (и литературы)*. Рассмотрим обозначенные интеграции.

Урок в рамках интеграции **«история + естественные и точные науки»** желательно проводить в конце изучения темы, посвященной культурному наследию той или иной цивилизации (научным достижениям народа на изучаемом этапе его развития). Предварительно учащимся предлагается изучить достижения учёных данной страны и эпохи в различных областях знания (математика, химия, физика, биология, медицина и пр.). В зависимости от интересов, учащиеся разбиваются на группы, каждая из которых занимается определённой отраслью знания. Нас интересует деятельность учащихся, выбравших для своего исследования математику, и деятельность учителя математики, который вместе с этими учащимися образует единую творческую группу, которую условно можно назвать *«Математика»*. Учитель математики в группе выступает не только организатором и инициатором творческой деятельности учеников по изучению истории математики и связанными с ней математическим материалом, но и рядовым исполнителем тех проектов, которые будут реализованы в ходе подготовки и поведения урока. На уроке истории (в рамках рассматриваемой интеграции) учитель математики может отчёт своей творческой группы предварить обзорным сообщением о развитии математического знания на данном историческом этапе. Уже вслед за этим учащиеся творческой группы *«Математика»* выступают с краткими сообщениями о математических проблемах, задачах, открытиях и изобретениях, выдающихся деятелях науки, демонстрируют разнообразие специфических техник (например, решения задачи), инструментов, моделей и пр. Наиболее интересен такой урок истории, в ходе которого ученики получают возможность познакомиться с деятельностью того или иного учёного в различных областях человеческого знания. Примером может служить урок истории в 5 классе, посвящённый знаниям древних греков в V-IV веках до н.э. Здесь разные творческие группы будут упоминать имя греческого учёного Аристотеля, известного ранее ученикам по высказываниям относительно «проверки прав гражданина» (тема «Возвышение Афин в V веке до н.э. и расцвет демократии»). Сочинения Аристотеля (логический свод «Органон», трактат по философии «Метафизика», рукописи «Физика», «О возникновении животных», «О душе», «Этика», «Политика», «Риторика», «Поэтика») охватывают все отрасли знания той эпохи. Творческая группа математиков будет рассказывать, например, об Аристотеле – математике, размышляющем о

несоизмеримости диагонали и стороны квадрата, изучающем количество, множество, бесконечность и непрерывность, основоположнике классической логики, создателе силлогистики и теории доказательного знания: «Доказательством же я называю силлогизм, который дает знания».

Уроки в рамках интеграции **«информатики и ИКТ + естественные и точные науки»** представляют собой разработку проекта (6-7 уроков) и демонстрацию результатов проектной деятельности учащихся (защита проекта), которая направлена на самореализацию творческого потенциала школьников, обучение навыкам самообразования, развитие творческой и исследовательской инициативы, внедрение сетевых технологий в учебный процесс и обучение навыкам систематизации и структуризации информации. Задание для проекта может быть общим для всех учащихся. Интересной для этого представляется тема «Философия математики», которая к тому же реализует интеграцию **«математика + философия»**. Известно, что проектная деятельность является одной из высших форм самостоятельности учащихся, подчас недоступной контролю со стороны учителей. И если для учителя информатики главное – оценить функциональность, эстетичность, новизну, технологичность и другие стороны проекта с точки зрения информационной культуры учащихся, то основная цель учителя математики – довести до сознания учащихся мысль о том, что главная задача философии математики заключается в упорядочении или переосмыслении всей той хаотической массы математических знаний, которая накоплена в течение столетий. Для достижения указанной цели учителю математики необходимо обратиться к материалам (содержанию) разработанных проектов хотя бы ещё один раз и организовать в рамках нестандартного урока (например, пресс-конференции) беседу по осмыслению изложенного в проектах материала.

Нестандартные уроки (с их необычностью, новизной и демократичностью межличностного общения учителя и учащихся, разнообразием ролевых функций и общей положительной аурой) дают возможность учителю максимально активизировать познавательную самостоятельность учащихся. Мы выделяем два пути активизации самостоятельности учащихся. Первый путь – включение учащегося в деятельность по решению специально разработанной системы заданий, позволяющей формировать и развивать основные умения, составляющие основу творческой деятельности. Второй путь активизации познавательной самостоятельности – изменение по ходу деятельности ролевых функций учащегося, создание таких ситуаций, которые обязывают проявлять инициативу и творчество.

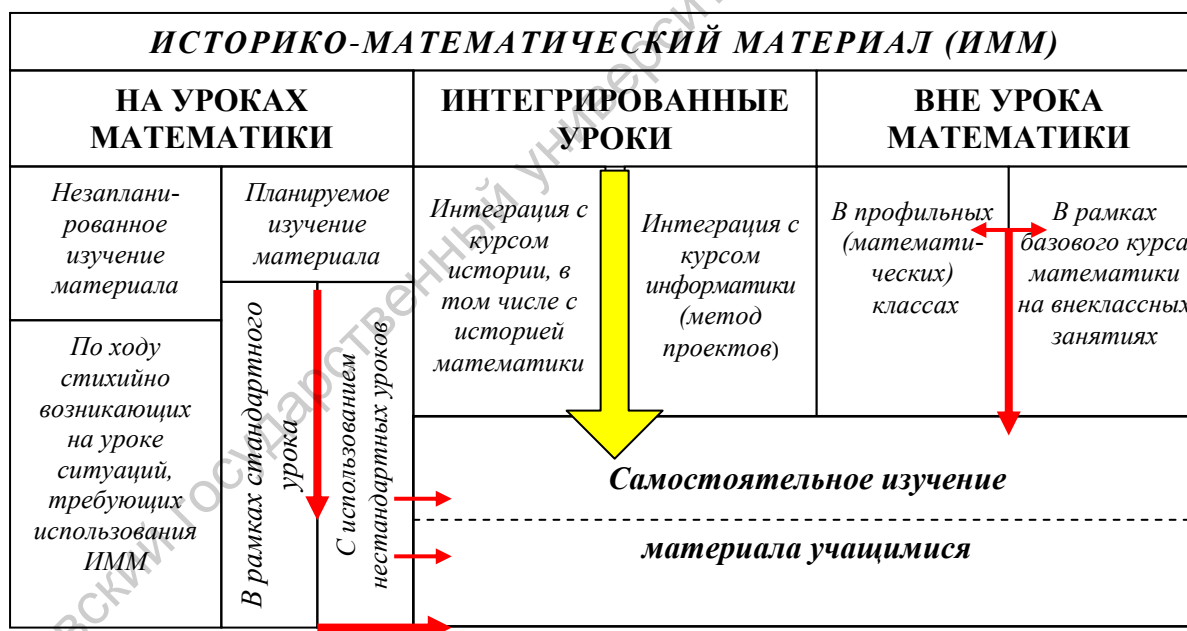
Историко-математический материал позволяет использовать любую форму из того многообразия нестандартных уроков, структуры которых разработаны методистами и учителями математики. Перечислим лишь некоторые из них [2]:

- уроки с изменёнными способами организации (урок-лекция, лекция-парадокс, защита знаний, урок вдвоём),
- уроки, опирающиеся на фантазию (урок творчества, урок-сочинение, творческий отчёт, рассказ об учёных, урок-бенефис),

- уроки, имитирующие какие-либо занятия или виды работ (заочная экскурсия, путешествие в прошлое, история изобретения, «Как нам это записать?», урок-лаборатория, «Проведём эксперимент?»),
- уроки с игровой состязательной основой,
- уроки, предусматривающие трансформацию стандартных способов организации (парный опрос, экспресс-опрос, урок-семинар, общественный смотр знаний, итоговое собеседование, конференция).

В 5-9 классах историко-математический материал может быть включён в содержание занятий математического кружка или изучаться на факультативных занятиях. В профильных математических классах возможен элективный курс по истории математики. В этих случаях мотивационная основа изучения историко-математического материала позволяет организовать обучение на более высоком научном уровне, последовательно и систематично, а значит более эффективно. Уровень самостоятельности учащихся при этом определяется не степенью сложности задания, данного учителем, а исключительно интересом, инициативностью и, в конечном итоге, уровнем развития творческих способностей.

Итак, включение ИММ в содержание школьного курса математики и связанную с этим самостоятельную деятельность учащихся можно представить следующей схемой.



Литература

1. Белобородова С.В. История математики на первых уроках тригонометрии // Математика в школе, 1999, № 3, с.59-64
2. Кульневич С.В., Лакоценина Т.П. Не совсем обычный урок: Практическое пособие для учителей и классных руководителей, студентов средних и высших педагогических учебных заведений, слушателей ИПК. – Ростов-на-Дону: «Учитель», 2001
3. Рыбников К.А. История математики: Учебник. – М.: Изд-во МГУ, 1994.

Гладкова А.В.

Использование практической направленности и межпредметных связей на уроках математики

[\(http://festival.1september.ru/articles/212296/\)](http://festival.1september.ru/articles/212296/)

В программе по математике указано, что математика, давно став языком науки и техники, в настоящее время всё шире проникает в повседневную жизнь и обиходный язык, всё более внедряется в традиционно далёкие от неё области. Поэтому считаю важным вопросом осуществление межпредметных связей, что способствует формированию у школьников обобщённых знаний о важнейших явлениях объективного мира, выработки единого целостного научного мировоззрения, созданию общей естественнонаучной картины мира. Известно, что прочность и практическая значимость приобретённых знаний во многом зависит от того, на сколько они применяются не только в той области, где эти знания приобретены, но и в других ситуациях.

Психологами давно доказано, что взаимосвязанное, логическое изучение учебных предметов наиболее благоприятно для лучшего усвоения учебного материала, повышения интереса учащихся к изучаемым предметам, для развития их мыслительных способностей.

На своих уроках я стараюсь показать, что знания математики необходимы во всех областях, а также знания других предметов можно использовать в математике. В 5-6 классах в задачах использую материал природоохранительного характера. Например в 5 классе при изучении темы “Деление” урок начинаю так: «На земном шаре обитают птицы – безошибочные составители прогноза погоды на лето. Если вы правильно решите примеры, записанные на доске, то вы узнаете одну из них».

450:18; 315:15; 420:28; 360:8; 2100:15; 600:25; 425:25; 490:14.

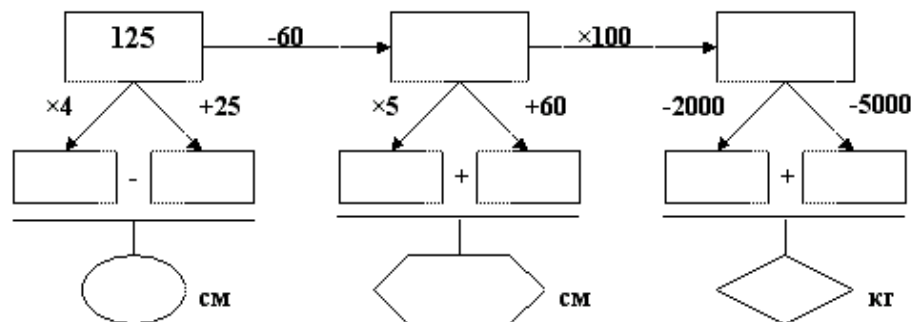
35	12	25	24	45	21	140	15
О	Г	Ф	Н	М	Л	И	А

«Замените частные буквами и вы узнаете такую птицу. Фламинго из песка строят гнёзда в форме усеченного конуса, в верхнем основании делают углубления, в которые откладывают яйца. Высота гнезда зависит от того, каким будет лето: сухим или дождливым. Если лето ожидается дождливым, то гнёзда строятся высокими, чтобы их не могла затопить вода, если – засушливое, то более низкими».

Использование на своих уроках информации по другим предметам позволяет мне осуществлять межпредметные связи, воспитывать у учащихся любознательность, стремление познавать новое, расширять их кругозор. Поэтому подобные фрагменты я включаю во многие уроки. Приведу ещё один пример – начало урока в 5 классе. Считаю, что удачно выбранный вид деятельности в начале урока, как правило, позволяет учителю владеть вниманием ребят на протяжении всего урока. Поэтому особое внимание уделяю организации начала урока, стремлюсь разнообразить формы и виды деятельности учащихся, начать урок нетрадиционно, используя межпредметные связи.

Например, начинаю урок стихами: *«Всех прошу посторониться, разевай пошире рот, – для таких – мала страница, нужен целый разворот.»*

Спрашиваю: «Знаете, ребята, о ком эти стихи?» Показываю картину со слонем и ввожу информацию: самое крупное наземное животное – африканский слон. Узнайте высоту и длину тела (в сантиметрах) и массу слона (в килограммах).



Выполните действия по этой схеме (через графопроектор проецирую на экран схему):

Так как это задание давала при изучении единиц

измерения массы, длины, то даю задание: выразить высоту и длину тела слона в метрах и сантиметрах.

Ребята 5-6 классов очень любят животных и птиц, поэтому на многих уроках я использую информацию о природе и животном мире. Иногда весь урок посвящаю животным и природе. Так, на городской семинар я давала открытый урок в 5 классе «Действия с обыкновенными дробями» – урок-путешествие по Амурской области.

В 6 классе начинается курс географии, и я применяю знания учащихся по этой науке на своих уроках в темах: «Масштаб», «Графики». Так, при изучении темы «Масштаб» мы работаем по географической карте России, выполняя практическую работу: «Определить расстояние от Благовещенска, до Москвы на местности, измерив его на карте». По темам «Диаграммы» и «Графики» разработали и провели интегрированные уроки, на которых ребята выполняли практические задания и получали оценки и по географии и по математике. Интерес учащихся на этих уроках был высокий.

Более всего связь математики видна с физикой. Хотя учащиеся 5-6 классов не изучают ещё физику, но в математике мы уже решаем физические задачи на движение. Начиная с 7 класса, связь математики и физики наблюдается повсеместно. Практически, усвоение физики без знания математики не возможно. Поэтому в курсе математики необходима система задач, которые готовят учащихся к применению математических знаний на уроках физики. Важное место в этой системе занимают задачи, в которых от учащихся требуется применить свои знания о различных функциях. Первая группа таких задач связана с необходимостью, уметь получить информацию о физическом процессе, исходя из его математической модели (формулы, графики). Для этого учащиеся должны уметь распознавать вид зависимости по её аналитическому выражению, сопоставить формулу и физическую ситуацию, в которой она рассматривается и, наконец, исследовать функцию по её формуле или графику.

Вторая группа задач связана с тем, что в курсе физики находят применение два основных вида функциональных математических моделей – формулы и графики. Поэтому учащиеся должны уметь находить параметры зависимости

по её графику и сравнивать параметры функций по соответствующим графикам, определять неизвестный элемент одной из моделей, исходя из рассмотрения другой.

Например, по заданному графику зависимости $S = at^2/2$ надо найти параметр a . Систематическое решение задач указанных групп помогает учащимся преодолеть барьер между курсами физики и математики. При изучении функций $y = kx$ ($k \neq 0$) и $y = k/x$ ($x \neq 0$), я предлагаю такие упражнения:

1. Записать формулой:

А) переменная S пропорциональна переменной t ;

Б) переменная E обратно пропорциональна переменной R и т.д.

2. По данной формуле определите вид зависимости между переменными величинами и коэффициент пропорциональности

$$a = F / m, \text{ если } m = \text{const},$$

$$m = \rho V, \text{ если } \rho = \text{const},$$

$$I = U / R, \text{ если } U = \text{const} \text{ и т.д.}$$

3. В сосуд наливают жидкость. В какой зависимости находится масса налитой жидкости от её объёма? В какой зависимости находится высота столба жидкости в сосуде от объёма жидкости?

Для решения этих задач провожу практические и лабораторные работы, подбираю задачи из курса физики, биологии, химии. Тем самым я показываю, что любые формулы, теоремы, зависимости - это не набор цифр, придуманных людьми, а лишь физические, биологические, химические законы, выраженные языком математики.

При изучении в старших классах понятия производной функции, провожу урок, на котором рассказываю о практическом применении производной в физике, астрономии, технике, биологии. С учащимися записываем ряд задач на вычисление скорости, ускорения, времени, силы тока. При решении уравнений колебательного движения тела и заряда на уроках физики, ученики уверенно находят производную, грамотно решают задачи, которые теперь не вызывают у них затруднений.

Математика проникает во все области науки, важна её практическая направленность, обусловленная тем, что её предметом изучения являются фундаментальные структуры реального мира, пространственные формы и количественные отношения от простейших до самых сложных. Считаю важной для себя задачей не только изучить теоретические вопросы курса математики, но прежде всего показать их практическое применение. Опыт работы показывает, что часто ученику легче решить задачу аналитически, чем применить свои знания на практике, при решении конкретных физических задач. Так, ученики быстро вычисляют площади прямоугольника и треугольника по известным размерам, но затрудняются выполнить это же задание при помощи модели фигуры. Поэтому уже много лет я провожу на своих уроках практические, лабораторные и исследовательские работы, разработанные мною.

Капитонова Т.А., Игнатова Ю.А.

Логические задачи как средство развития познавательной самостоятельности учащихся 5-6 классов

(Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научных трудов: Выпуск 4. – Саратов: Научная книга, 2005. – с.34-39)

Одной из отличительных черт гуманистического подхода в образовании является особое внимание к индивидуальности человека, четкая ориентация на сознательное развитие самостоятельного критического мышления. Такой подход рассматривается в педагогике как альтернативный традиционному, основанному главным образом на усвоении готовых знаний и их воспроизведении [1].

Главный недостаток традиционной системы обучения состоит в том, что учителя реализуют чаще всего лишь одну функцию знаний – информационную, оставляя в стороне другие функции: развивающую и деятельностную.

Отношение обучения и развития представляет «самый центральный и основной вопрос, без которого проблемы педагогической психологии не могут быть не только правильно решены, но даже поставлены»[2].

Традиционная система школьного образования построена по единому принципу: познание нового осуществляется как освоение образца качественно нового знания, данного учителем с помощью различных средств, в том числе и учебника.

Известно, что в структуре деятельности можно выделить три связанных элемента: (1) умение ставить цель (целеполагание); (2) умение реализовывать цель (исполнительная часть); (3) умение оценить результат (контроль, оценка).

Сегодня в школьной практике наиболее просто реализуется только второе звено – исполнительная часть, так как она наиболее доступна учителю с любым стажем работы. Для развития самостоятельной познавательной деятельности учащихся необходимо смещение акцента в деятельности учителя с объяснительно-иллюстративного на личностно-ориентированный, эвристический.

Когда учитель на уроке объясняет учебный материал, его нередко почти никто не слушает, так как это не всегда интересно учащимся. Важно так организовать учебную работу, чтобы ученику пришлось действовать самому, чтобы он самостоятельно экспериментировал, исследовал, выбирал и классифицировал. Естественно в этой ситуации он будет задавать учителю вопросы, которые его заинтересовали. Необходимо распределять деятельность таким образом, чтобы каждый ученик был занят.

Отдельные аспекты общей проблемы познавательной самостоятельности постоянно интересовали философов и педагогов. Но только в XX веке появились попытки создания целостных теорий, направленных на формирование познавательной самостоятельности учащихся. Все оказалось возможным только в рамках развивающего обучения.

Процессы обучения и воспитания не сами по себе непосредственно развивают ребенка, а лишь тогда, когда они имеют деятельностные формы и обладают соответствующим содержанием. Между обучением и развитием ребенка всегда стоит его деятельность.

В наше время деятельностный подход интенсивно разрабатывается в самых разных отраслях науки: в философии, психологии, педагогике, методике преподавания конкретных дисциплин.

Деятельностный подход к обучению реализуется в различных теориях, созданных и создающихся в настоящее время. Отметим такие из них, как теория проблемного обучения; теория поэтапного формирования умственных действий, созданная П.Я.Гальпериным; теория учебной деятельности, разработанная Д.Б.Элькониним и В.В.Давыдовым. Рассмотрим подробнее последнюю теорию [3].

Согласно этой теории усвоение школьниками тех или иных знаний в форме учебной деятельности всегда начинается с творческого преобразования усваиваемого им материала. Своеобразие учебной деятельности состоит в том, что в процессе ее осуществления школьник усваивает теоретические знания. Их содержанием является происхождение, становление и развитие какого-либо предмета. Если же мы наблюдаем в школе усвоение ребенком таких знаний, которые уже заранее четко сформулированы и даются ему учителем в «готовом виде», и в содержании которых отсутствуют моменты происхождения и развития изучаемого предмета, то можно твердо сказать, что в данном случае ребенок учебной деятельности не выполняет. При этом он усваивает с помощью иллюстраций и объяснений, предлагаемых учителем, те или иные эмпирические знания. К сожалению, в обычной школе дети чаще всего усваивают именно такие знания. Поэтому полноценной учебной деятельностью в обычной школе обладает сравнительно небольшое количество детей.

Учебная деятельность состоит из таких компонентов, как учебные потребности, мотивы, задачи, действия и операции. У детей, приходящих в первый класс, целостной ее структуры еще, конечно, нет. Она формулируется у некоторой части детей в течение нескольких лет школьной жизни, особенно интенсивно в начальных классах. В младшем школьном возрасте учебная деятельность является основной и ведущей среди других видов детской деятельности. Ее выполнение младшими школьниками определяет развитие у них главных психических новообразований, и прежде всего основ теоретического мышления, нацеленного на раскрытие закономерностей развития предметов.

Чтобы у младших школьников, а затем и у школьников 5-6 классов формировалась полноценная учебная деятельность, они должны систематически решать учебные задачи. Главная особенность учебной задачи состоит в том, что при ее решении школьник ищет и находит общий способ подхода ко многим конкретно-частным задачам определенного класса, которые в последующем решаются школьником как бы «с хода» и сразу правильно.

Учебная задача решается посредством системы учебных действий. Первым из них является преобразование проблемной ситуации, входящей в такую

задачу. Это действие нацелено на поиск такого генетически исходного отношения предметных условий ситуации, которое служит всеобщей основой последующего решения всего многообразия частных задач. Другие учебные действия позволяют школьникам моделировать и изучать это исходное отношение, выделять его в частных условиях, контролировать и оценивать процесс решения учебной задачи. Главным методом школьного обучения должен стать метод введения детей в ситуацию учебных задач и организацию учебных действий, то есть метод решения школьниками учебных задач [3].

Важное место среди учебных задач должно принадлежать логическим задачам.

Логические задачи являются оптимальным средством развития творческого мышления и эвристической деятельности учащихся. Процесс решения логических задач схож с процессом решения настоящих творческих задач в науке и технике и повторяет все этапы творческого мышления.

При решении логических задач используется ряд эвристических приемов [5].

Прием конкретизации задачи. Данный прием состоит в нахождении частных случаев общей задачи путем введения дополнительных видовых свойств явлений. Рассмотрим прием конкретизации на примере задачи, содержащей ложные высказывания.

Задача 1. Четыре одноклассницы Маша, Даша, Оля и Поля участвовали в лыжных соревнованиях и заняли четыре первых места. На вопрос, кто какое место занял, они дали три разных ответа:

Ольга заняла первое место, Даша – второе.

Ольга на втором месте, а Полина – на третьем.

Маша на втором месте, Полина на четвертом.

При этом они признали, что одна часть каждого ответа верна, а другая нет.

Решение. Пусть первая часть первого ответа – истина, а вторая – ложь.

Исходя из этого, запишем истинные или ложные высказывания в таблицу.

Истина	Ложь
Ольга – I	Даша – II
Полина – III	Ольга – II
Маша – II	Полина – IV

Теперь легко увидеть, что в правом столбце таблицы оказалось два противоречивых высказывания: Даша и Ольга не могут одновременно занимать второе место. Значит хотя бы одно из этих высказываний ложное.

Никаких противоречий нет в левом столбце. Это позволяет получить решение: в левой колонке отражены истинные места, а Даше осталось четвертое место.

Это решение не полное. Предположим, что первая часть первого ответа неверна. Это значит, что верно следующее предположение:

Ольга заняла не первое место, а Даша – второе. Тогда ложна первая часть второго ответа, а значит, истиной является то, что Полина – на третьем месте. Тогда из третьего ответа получится, что Маша на втором месте, как и Даша. А это противоречит условию задачи.

Ответ: Ольга – I, Маша – II, Полина – III, Даша – IV.

Приемы моделирования. Моделирование с помощью графов рассмотрим на примере задачи.

Задача 2. Оля, Лена, Катя и Маша решили вместе встретить Новый год. У каждой из них есть любимый напиток, и все они любят эстраду. Оля и Лена не любят «Пепси». Оля также не любит «Спрайт». Той девочке, которая любит «Пепси», не нравится Алсу. Наоборот, Кате Алсу очень нравится. Катя не любит вишневый сок. Оля разделяет ее вкус. Той девочке, которая любит «Фанту», не нравится Рикки Мартин. Маша против зарубежной эстрады ничего не имеет, но сама предпочитает группу «Иванушки». Четвертой девочке нравится Децл.

Определить предпочтение каждой из подруг.

Решение. Выпишем условия задачи в следующем порядке.

Оля и Лена не любят «Пепси».

Оля не любит «Спрайт».

Катя не любит вишневый сок.

Оля не любит вишневый сок.

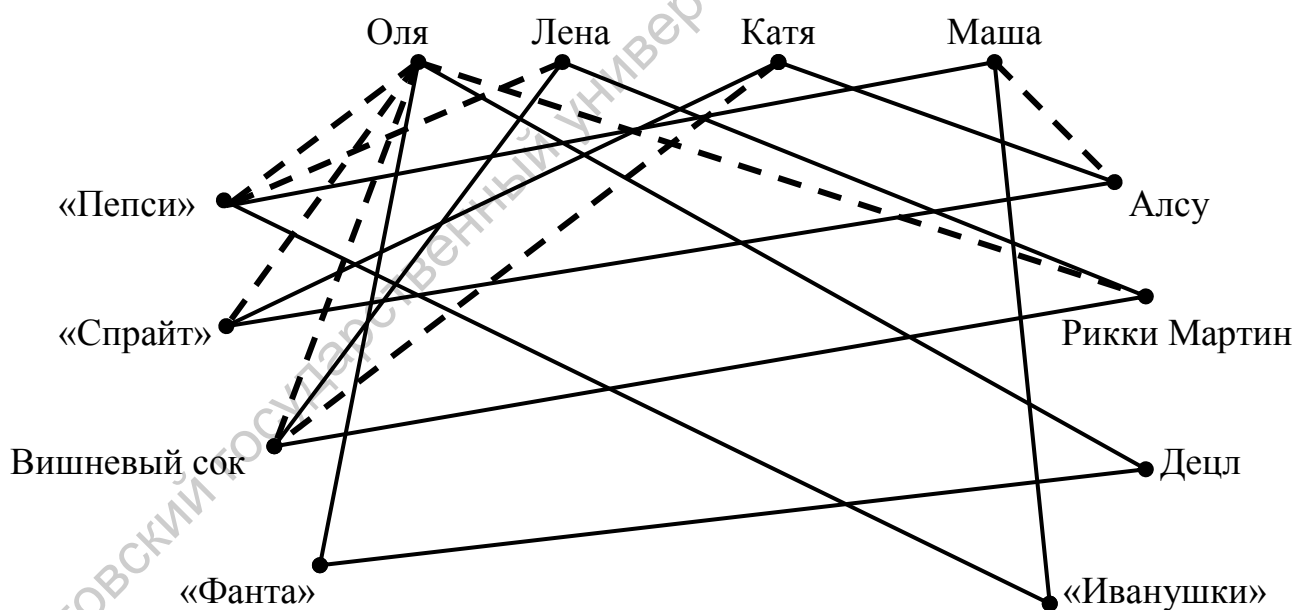
Той девочке, которая любит «Пепси», не нравится Алсу.

Кате нравится Алсу.

Той девочке, которая любит «Фанту», не нравится Рикки Мартин.

Маша предпочитает «Иванушек».

Четвертой девочке нравится Децл.



В зависимости от условий задачи точки соединяли сплошной линией, если имеет место соответствие между данными элементами, или пунктирной линией, если соответствия нет.

Ответ: Оле нравятся «Фанта» и Децл, Лене – вишневый сок и Рикки Мартин, Кате нравится «Спрайт» и Алсу, а Маше – «Пепси» и группа «Иванушки».

Моделирование с помощью рисунка продемонстрируем на примере решения следующей задачи.

Задача 3. В очереди в школьный буфет стоят Вика, Соня, Боря, Денис и Алла. Вика стоит впереди Сони, но после Аллы; Боря и Алла не стоят рядом; Денис не находится рядом ни с Аллой, ни с Викой, ни с Борей. В каком порядке стоят ребята?

Решение. Выпишем условия в следующем порядке.

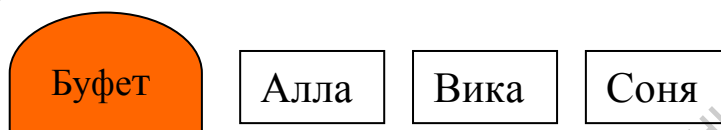
Вика стоит впереди Сони, но после Аллы.

Боря и Алла не стоят рядом.

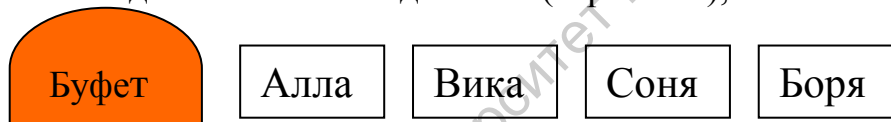
Денис не находится рядом ни с Аллой, ни с Викой, ни с Борей.

Изобразим буфет и ребят стоящих в очереди некоторыми геометрическими фигурами, например, прямоугольниками.

Из первого условия следует, что девочки стоят в таком порядке: Алла, Вика, Соня.



Проанализируем второе условие. Поскольку Боря и Алла не стоят рядом, то Боря может находиться либо позади Сони (вариант 1),



либо между Викторией и Соней (вариант 2).



Существует возможность того, что Боря стоит впереди Аллы, тогда кто-то должен стоять между ними. Это может быть только Денис (вариант 3).



Проанализируем третье условие, из которого следует, что Денис стоит с краю, позади Сони и, следовательно, вариант 3 не подходит. Приходится выбирать среди вариантов 1 и 2. Значит, Алла стоит первой. Так как Борис и Денис не могут стоять рядом, то Боря может стоять только между Викторией и Соней.

Итак, дети стоят в следующем порядке: Алла, Вика, Боря, Соня, Денис.



Ответ. Дети стоят в следующем порядке: Алла, Вика, Боря, Соня, Денис.

Перечисленные приёмы моделирования отвечают принципу наглядности в обучении, и являются, по сути, визуализацией процесса решения.

Все перечисленные выше приёмы могут и должны быть сформированы у учащихся 5-6 классов на уроках математики.

Ряд эвристических приёмов можно сформировать у учащихся не только по ходу решения, но и в процессе конструирования логических задач. Алгоритм конструирования, предложенный М.В. Шнейдерманом [6] предписывает:

- 1) определить содержание текста задачи;
- 2) составить полную информацию о сюжете;
- 3) сконструировать условие задачи с помощью исключения (или искажения) части данных;
- 4) формулировать текст задачи;
- 5) проверить возможность решения с помощью рассуждений;
- 6) если получился единственный непротиворечивый ответ (совпадающий с пунктом (2), то задача считается составленной (задание по составлению логической задачи выполнено);

7) иначе, корректируем условие задачи и возвращаемся к пункту 5.

Проиллюстрируем работу по конструированию задачи на примере.

Объекты: три сына: Роман, Фёдор, Кирилл.

Исходная информация: Фёдор получил двойку.

Лишаем информацию очевидности, делаем её логически противоречивой.

Роман: «Двойку получил Кирилл». Кирилл: «Двойку получил Фёдор», Фёдор: «Двойку получил Роман».

Формулируем текст задачи: Мама пришла с работы, а Роман ей и говорит: «Кирилл получил двойку». На что Кирилл возразил: «Двойку получил Фёдор», а Фёдор сказал «Нет, двойку получил Роман!». Как маме узнать, кто из мальчиков получил двойку, если один из сыновей говорит правду, а двое других солгали.

Попробуем решить задачу. Рассмотрев все возможные варианты, нетрудно установить, что решение найти невозможно.

	Роман	Фёдор	Кирилл	Результат	
1	правда	ложь	ложь	«Кирилл получил двойку»	Выбрать решение из трёх равновозможных вариантов нельзя.
2	ложь	правда	ложь	«Роман получил двойку»	
3	ложь	ложь	правда	«Фёдор получил двойку»	

Корректируем условие задачи. Уточняем информацию. Допускаем, что лгут все, изменяем ответ Кирилла: «Двойку получил не Фёдор». Проверяем.

	Ответ	Результат			
		Роман	Фёдор	Кирилл	Вывод
1	Кирилл получил двойку	правда	ложь	правда	Противоречит условию: лгут все.
2	Роман получил двойку	ложь	правда	правда	Не соответствует условию: лгут все.
3	Фёдор получил двойку	ложь	ложь	ложь	Соответствует всем данным условиям

Таким образом, составлена следующая задача: Мама пришла с работы, а Фёдор ей и говорит: «Мама, а Роман получил двойку!». На что Роман возразил: «Кирилл получил двойку». Как маме узнать, кто из мальчиков получил двойку, если Кирилл ей сообщил, что Фёдор двойки не получал, но она знает, что все сыновья говорят неправду?

При организации работы по конструированию логических задач целесообразно опираться на жизненный познавательный опыт учащихся. Дети часто наполняют задачи психологическим подтекстом и пережитыми жизненными ситуациями. Некоторые задачи могут стать поводом для бесед, что расширяет воспитательные возможности для учителя.

Литература

1. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: учебное пособие./ Под ред.Е.С.Полат.- М.: Издательский центр «Академия», 2001, с.16.
2. *Выготский Л.С.* Педагогические технологии./ Под ред. В.В. Давыдова,- М.: Педагогика, 1991,с.37.
3. Деятельностный подход в психологии: проблемы и перспективы. М.: АПН СССР, 1990. С.37-39.
4. *Капитонова Т.А.* Познавательная самостоятельность младших школьников на уроках математики. Саратов: Изд-во Саратовского педагогического института, 1998.
5. *Заесёнок В.П.* Эвристические приемы решения логических задач./ Математика в школе. 2005. № 3. С.29-33.
6. *Шнейдерман М.В.* Метод конструирования логических задач. / Математика в школе. 1998, № 3, С.23-25.

Элементы теории множеств в курсе алгебры основной школы

В неявном виде некоторые понятия теории множеств появляются в таких разделах школьного курса алгебры, как алгебраические уравнения и неравенства, функции и их графики.

1. Функции как отображения множеств

Современный традиционный подход к определению функции в средней школе, к сожалению, не содержит теоретико-множественной основы! В то же время, в случае, когда изучение элементов теории множеств начинается с начальной школы, в курсе алгебры основной школы необходимо рассмотреть взаимосвязь между понятиями *множество* и *функция*.

В случае нетрадиционного для общеобразовательной школы (теоретико-множественного) подхода к изучению алгебры, функция вводится, как отображение множеств.

В случае обучения алгебре по традиционным программам и учебникам, материал темы «Функция как отображение множеств» может стать содержанием (или составной частью) некоторого элективного курса в рамках предпрофильной дифференциации.

В элементарной математике мы встречаемся с разными объектами, которые называют словом «функция»: логарифмическая функция, тригонометрическая функция, показательная функция. Эти объекты характеризуются одним общим свойством: для каждого числа x функция принимает некоторое определенное значение, а именно $\log_2 x$, $\sin x$, 2^x и т. д.

По традиции x называют *переменной* (или *аргументом*), и функция сопоставляет каждому значению переменной x некоторое значение y . Если функция обозначается каким-то символом, например f , то мы пишем $y = f(x)$.

Если под f понимается логарифмическая функция, то $y = \log_2 x$, если f — функция синус, то $y = \sin x$.

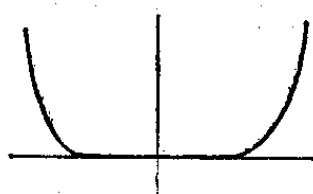
Ни x , ни y не являются функциями, и очень трудно точно сказать, что они собой представляют. Не является функцией и $f(x)$, ибо это есть *значение* функции в x . Функция — это f . «Переменные» x и y существуют только затем, чтобы сообщить нам, что делает f . Так, например, функция «возведения в квадрат» принимает значение x^2 для любого заданного значения x . Это обстоятельство можно кратко выразить формулой $y = x^2$, однако если нам заранее не скажут, то мы не будем знать, что это за формула — определение функции или уравнение, которое нужно решить.

Большинство функций в школьной математике выражаются какой-нибудь формулой: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$ или, посложнее: $y = 7x^4 + \frac{\sin x}{1+x}$.

Некоторые формулы могут не иметь смысла для некоторых значений переменной x . Так, $1/x$ не определено при $x = 0$, $\log_2 x$ не определен при $x \leq 0$, а $\operatorname{tg} x$ не определен при значениях x , равных нечетным кратным $\pi/2$. Для более сложной формулы условия, при которых она не имеет смысла, могут оказаться более сложными.

Например, выражение $\frac{\log(x^2 - 1)}{x^2 - 5x + 6}$ не определено, когда $1 \leq x \leq 1$, или $x = 2$, или $x = 3$.

К тому же есть много полезных функций, которые нелегко задать формулами. (И тут возникает еще вопрос: какими формулами? Скажем, для функции «синус» пришлось придумать специальный символ $\sin$.) Широко применяются в математике такие функции, как, например, «целая часть x », обозначаемая $[x]$: $[x]$ = наибольшее целое не превосходящее x , или функция, изображенная на рисунке:



$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{при } x < -1, \\ 0 & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } 1 < x. \end{cases}$$

Значения x , при которых функция определена, образуют подмножество D множества R действительных чисел. Это подмножество называется *областью определения* функции f ; оно сообщает нам, к каким значениям x можно применять функцию f .

Из всех свойств, общих приведенным выше примерам функций, выделим одно, особенно важное: *каждому элементу x области определения функции f сопоставлено единственное значение $f(x)$.*

Кроме области определения, с каждой функцией связано еще одно множество E – *область значений*. Оно состоит из всех значений, которые функция принимает на элементах своей области определения. Так, область значений функции синус состоит из всех действительных чисел от (-1) до $(+1)$, а областью значений функции «возведения в квадрат» является множество всех неотрицательных действительных чисел.

Часто необходимо знать не точную область значений функции, а куда попадают эти значения, то есть, уметь назвать какое-нибудь удобное множество T , в котором они все содержатся. В таком случае мы будем говорить, что f есть функция из области определения D в множество T .

Итак, понятие функции состоит из трех неотъемлемых частей:

- 1) области определения D ;
- 2) множества T , содержащего область значений E ;
- 3) правила, которое для *каждого* $x \in D$ задает *единственный* элемент $f(x) \in E$ (а значит и $f(x) \in T$).

Важно, что $f(x)$ определено *однозначно*, так что с ним не связано никакой неопределенности. Взятие квадратного корня не определяет функции, пока не сказано, какой берется корень – положительный или отрицательный. Важно также, что $f(x)$ определено для *каждого* x из D . Знание области определения говорит нам о том, где безопасно применять функцию f . В то же время необязательно знать точную область значений f , часто ее трудно описать, а мы хотим пользоваться функцией f , не занимаясь подобными проблемами. Поэтому нам предоставлена возможность выбирать T любым удобным способом.

Осталось еще одно слово в пункте 3 определения функции, которое требует пояснения: «правило». Пока будем считать, что «правило» – это некий

способ получить $f(x)$ для заданного конкретного x . К этому нужно добавить следующее: достаточно, чтобы $f(x)$ в принципе можно было вычислить по x . Практически такое вычисление может оказаться невыполнимым: либо слишком трудоемким, требующим слишком много времени, либо связанным с решением какой-то очень трудной задачи.

До сих пор область определения и область значений были у нас множествами действительных чисел. Однако понятие функции в смысле условий 1, 2 и 3 определения пригодно для любых *множеств* D и E . Более того, правила, предусмотренные в пункте 3, совершенно естественно проявляются во многих ситуациях, когда D или E не являются множествами действительных чисел. Это замечание весьма важно для всего последующего, поэтому приведём несколько примеров.

1. Пусть D – множество всех окружностей, а T – множество действительных чисел. Для каждой окружности x положим $f(x)$ = радиус x .

2. Пусть D – множество положительных целых чисел, а T включает в себя все множества, составленные из простых чисел. Для любого $x \in D$ положим $f(x)$ = множество простых делителей x .

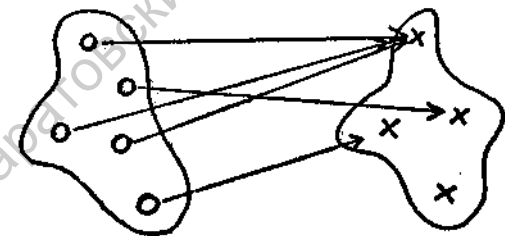
3. Пусть D – некоторое множество на плоскости, а T – вся плоскость (подразумевается множество R^2). Для $x \in D$ положим $f(x)$ = точка, лежащая на 5 см вправо от x .

4. Пусть D – множество всех функций, а T – множество всех множеств. Для любой функции x положим $f(x)$ = область определения x .

Современное понятие функции сформулировано так, что оно подходит ко всем этим примерам. Отныне *функцией* будем считать все, что удовлетворяет условиям 1, 2 и 3, где D и E (или T) могут быть множествами вполне общего вида. Наши прежние функции относились к специальному типу функций действительного переменного – их области определения и значений принадлежат множеству действительных чисел.

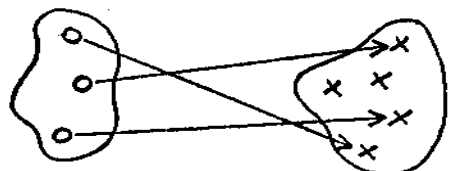
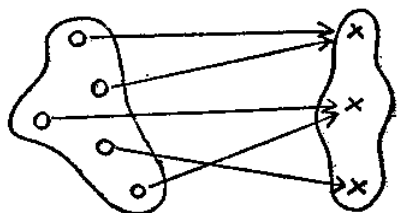
В связи с такой «всеохватностью» понятие функции служит серьезным претендентом на роль самого важного понятия в современной математике. По мере нашего продвижения вперед понятие функции будет снова и снова появляться перед нами в своих разнообразных обликах, поэтому стоит остановиться на некоторых относящихся к функциям общих понятиях.

Если область определения и область значений функции не являются подмножествами R , то график такой функции нарисовать невозможно. Да и вообще график не слишком помогает при работе с нашим обобщенным понятием функции. Лучше представлять себе функции так, как показано на рисунке. Стрелки на рисунке соответствуют правилу, задающему $f(x)$.



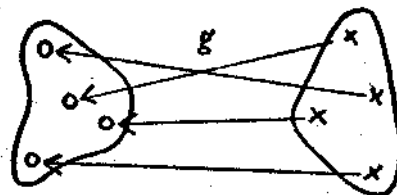
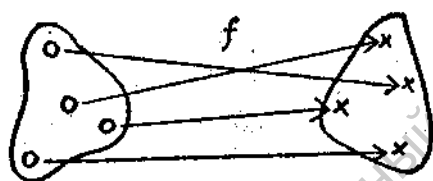
Общепринятое обозначение, отражающее тот факт, что f – функция из D в T , таково: $f : D \rightarrow T$, и здесь стрелка используется в том же качестве. На рисунке мы видим, что в T есть элемент, на который не указывает ни одна стрелка. Это свидетельствует о том, что область значений f не заполняет все T .

Если область значений f совпадает с T , то говорят, что f – функция из D на T . Такую функцию называют также *сюръективной* (или *сюръекцией*). На рисунке в таком случае к каждому элементу T ведет хотя бы одна стрелка.



При этом к некоторым элементам T могут вести несколько стрелок. Если же к любому элементу T ведет не более одной стрелки, то f называется *инъективной* (или *инъекцией*). Инъективные функции не обязательно сюръективны (стрелки ведут не ко всем элементам T , как на рисунке).

Если функция $f: D \rightarrow T$ одновременно инъективна и сюръективна, то стрелки соединяют по два элемента D и T . При этом выполняются следующие условия. Никакие два элемента из D не соединяются с одним и тем же элементом T , ибо f инъективна. Никакие два элемента из T не соединяются с одним и тем же элементом D по условию 3 определения функции (из-за требования единственности). Каждый элемент из D попадает в такую пару, поскольку D – область определения. Наконец, каждый элемент из T тоже участвует в одной из пар, ибо f сюръективна. Хотя это и не очевидно из наших обозначений, роли D и T совершенно одинаковы, и если повернуть все стрелки вспять, получится другая функция $g: T \rightarrow D$, которая тоже инъективна и сюръективна.



Функции, допускающие такое обращение, играют большую роль в математике. Их называют *биекциями* или *взаимно однозначными соответствиями*.

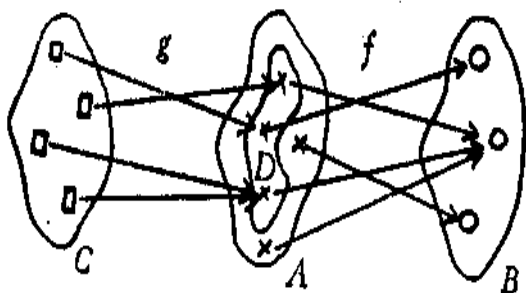
Ничто не мешает нам попробовать повернуть все стрелки обратно и в том случае, когда f не биективна. Однако при этом функция не получится. Если f не инъективна, то от некоторого элемента из T начнутся две стрелки, и «обращенная» функция не будет однозначно определенной, если же f не сюръективна, то в T найдутся элементы, в которых она вообще не определена.

Возьмем две функции f и g и попробуем определить функцию $f \circ g$. Назовём $f \circ g$ сложной функцией или композицией функций: $f \circ g = f(g(x))$.

Эта формула имеет смысл, если выполняются следующие условия: во-первых, необходимо, чтобы было определено $g(x)$, x должно лежать в области определения g ; во-вторых, чтобы можно было образовать $f(g(x))$, $g(x)$ должно лежать в области определения f .

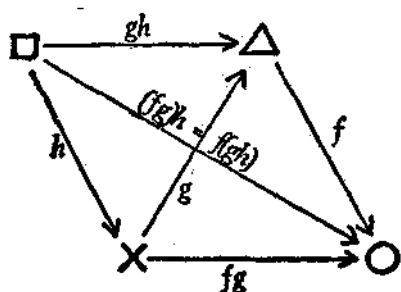
Допустим, что $f: A \rightarrow B$ и $g: C \rightarrow D$. В силу первого условия самое большее, на что можно надеяться, – это что $f \circ g$ имеет область определения C .

Чтобы $f \circ g$ была определена на всем C , для всех $x \in C$ должно выполняться второе условие.



Иными словами, область значений D функции g должна лежать в области определения A функции f . Если это так, то $f \circ g$, определенная написанной выше формулой, будет функцией из C в B как показано на рисунке.

Итак, функция $f \circ g$ реализует идею: «применяй g , затем применяй f ». Если у нас есть три функции f , g и h и их области определения и области значений нужным образом соответствуют друг другу, мы можем применять по порядку все три: сначала h , затем g , затем f . При этом можно двумя способами комбинировать их в пары: применить h , а затем $f \circ g$ либо применить $g \circ h$ и затем f , что соответствует выражениям



$$(f \circ g) \circ h \text{ и } f \circ (g \circ h).$$

К счастью, результат не зависит от выбранного способа. Проверьте это самостоятельно, используя приведенный рисунок.

Будем говорить, что операция композиции функций удовлетворяет переместительному закону.

Итак, f , g и h можно комбинировать, при условии что их области определения и области значений нужным образом соответствуют друг другу. Легко понять, что это означает: область значений h должна быть подмножеством области определения g , а область значений g – подмножеством области определения f : $E(h) \subseteq D(g)$, $E(g) \subseteq D(f)$.

Итак, в рамках темы «Функция как отображения множеств» учащиеся должны осознать и уяснить следующие положения:

- 1) Функция определена на некотором множестве.
- 2) Она принимает значения в некотором множестве.
- 3) Она задана, если известно правило, позволяющее найти ее значение на каждом элементе, причем единственным образом.
- 4) Биекции, или взаимно однозначные соответствия, – это те и только те функции, для которых существуют обратные.

2. О множествах, задаваемых уравнениями, неравенствами и их системами

Положение точки на координатной плоскости вполне определено, если известны обе ее координаты. Но что можно сказать о точке, если известна только одна из ее координат? Например, где на координатной плоскости расположены все точки, абсцисса которых равна 1, т. е. какое множество точек на плоскости задается уравнением $x = 1$? Очевидно, сюда входят все точки, у которых, первая координата – единица, а вторая – любое число. Геометрически это точки прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку 1 на оси Ox . Аналогично уравнением $y = -3$ задается множество всех точек прямой,

параллельной оси абсцисс и проходящей через точку -3 на оси Oy (здесь x – любое, а $y = -3$).

Легко сообразить, что уравнениями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ мы задаем прямые, параллельные осям координат. В частности, $x = 0$ – уравнение оси Oy и $y = 0$ – уравнение оси Ox .

Теперь рассмотрим примеры некоторых соотношений между координатами, заданных в виде одного уравнения с двумя переменными x и y . Решением такого уравнения называется пара чисел (x_0, y_0) , при подстановке которых в уравнение получается тождество. Геометрически каждому решению (x_0, y_0) уравнения с двумя переменными соответствует точка координатной плоскости $M(x_0, y_0)$. Будем рассматривать множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению.

Пусть, например, дано уравнение $y = x$. Им задается множество точек, имеющих две равные координаты. Все они лежат на биссектрисе I и III координатных углов.

Уравнением $x + y = 0$ задается множество точек биссектрисы II и IV координатных углов.

Сформулируем проблему: всегда ли уравнение вида $ax + by = c$ задает прямую линию. В качестве упражнения полезно рассмотреть различные комбинации особых значений коэффициентов a и b (изобразите геометрически множество решений для каждого случая):

1) $a \neq 0, b \neq 0, c$ – любое.

2) $a = 0, b \neq 0, c$ – любое.

3) $a \neq 0, b = 0, c$ – любое.

4) $a = 0, b = 0, c \neq 0$.

5) $a = b = c = 0$.

Приведем примеры еще некоторых множеств точек плоскости, задаваемых уравнением с двумя переменными:

$y = x^2$ – парабола;

$xy = -1$ – гипербола;

$x^2 + y^2 = 1$ – окружность с центром в начале координат и радиусом 1;

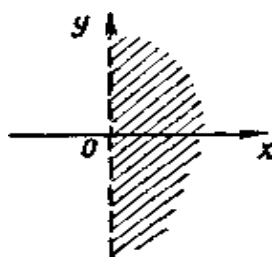
$x^2 + y^2 = 0$ – это уравнение задаст единственную точку — начало координат;

$x^2 + (y^2 - 1) = 0$ – множество из двух точек $(0, 1)$ и $(0, -1)$

$x^2 + y^2 = -3$ – множество точек плоскости, задаваемых этим уравнением, пусто.

В этих примерах одно уравнение с двумя неизвестными задает: (1) линию, (2) одну или несколько точек, (3) пустое множество.

Теперь займемся такими соотношениями между координатами, которые являются аналитическим заданием некоторой области плоскости.



Начнем с задания полуплоскости. Мы знаем, что уравнение $x = 0$ определяет множество точек оси ординат. Если же рассмотреть множество точек, абсцисса которых положительна, а ордината – любое число (множество определяется неравенством $x > 0$), то получим правую полуплоскость.

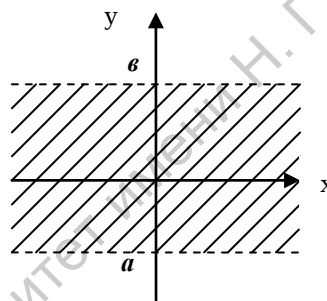
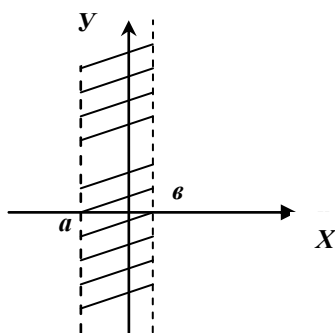
Неравенством $x < 0$ определяется левая полуплоскость. Верхняя и нижняя полуплоскости задаются соответственно неравенствами $y > 0$ и $y < 0$.

Если бы мы хотели задать правую полуплоскость таким образом, чтобы в рассматриваемое множество входили и точки оси y , нужно было бы рассмотреть неравенство $x \geq 0$. В этом случае на чертеже мы будем изображать ось ординат сплошной линией. В предыдущем примере ($x > 0$) следовало изобразить ось ординат штриховой линией.

Для усвоения и закрепления данного материала полезны следующая система упражнений: *Построить множества точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам:*

- а) $x < 3$, б) $y \geq -4$, в) $x < -5$,
 г) $0 < x < 1$ д) $-2 < y < 3$, е) $y < -3, y \geq 4$,

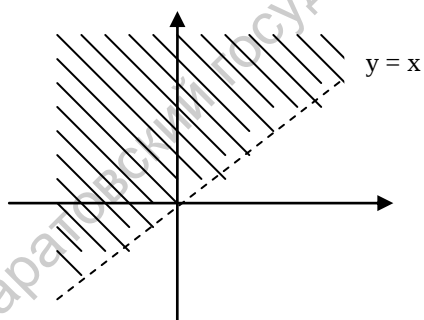
Неравенства вида $a < x < b$ или $a < y < b$ задают некоторую открытую полосу.



Вернемся еще раз к уравнению $y = x$. Точка $M(2; 2)$ принадлежит множеству точек, задаваемому этим уравнением. Точки, абсцисса которых равна двум, а ордината больше двух, будут лежать на прямой $x = 2$ выше точки M . Вообще, для каждого произвольно взятого x_0 мы будем выбирать те точки плоскости, у которых вторая координата больше x_0 , то есть те, которые лежат на прямой $x = x_0$ выше точки ее пересечения с прямой $y = x$. Таким образом, мы получим множество точек, расположенных выше прямой $y = x$. Оно задается неравенством $y > x$.

Совершенно аналогично соотношение $y < x$ задает множество точек плоскости, лежащих ниже прямой $y = x$.

Отметьте на чертеже область, соответствующую неравенству $y < x$ и неравенству $y > x$.



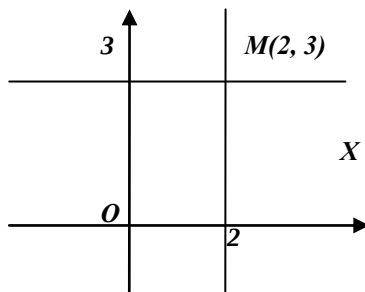
В дальнейшем необходимо практиковать ежеурочное выполнение учащимися аналогичных заданий, например: *Построить множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим*

соотношениям:

- а) $x + y > 0$, в) $y \geq x^2$, д) $x^2 + y^2 < 1$,
 б) $y - x > 1$, г) $y < x^2$, е) $x^2 + y^2 \geq 1$,

Перейдем к несколько более сложным примерам. Теперь координаты рассматриваемого множества точек будут удовлетворять некоторой системе соотношений.

Например, требуется построить множество точек плоскости, аналитическим заданием которого является система $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$



Очевидно, это множество состоит лишь из одной точки М с координатами $x = 2$, $y = 3$. В этом случае мы рассматриваем пересечение двух прямых: во-первых, множества точек, у которых первая координата равна двум, и, во-вторых, множества точек, у которых вторая координата равна трем. Знак системы означает одновременное выполнение этих двух требований.

Интересно сравнить разобранный пример с другим. Нужно построить множество точек, аналитическим заданием которого является уравнение $(x - 2)(y - 3) = 0$. Вешение данной проблемы может стать предметом специального коллективного обсуждения, в ходе которого выяснится, что в это множество входят как все точки прямой $x = 2$, так и все точки прямой $y = 3$. Действительно, для того чтобы произведение равнялось нулю, достаточно, чтобы хотя бы один из множителей был равен 0, то есть в множество входят те точки, у которых либо первая координата 2, либо вторая координата 3.

Следующая система упражнений позволяет сформировать и отработать умения в графическом представлении множеств.

Упражнения

1. Построить множества точек плоскости, задаваемые следующим образом:

а) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$

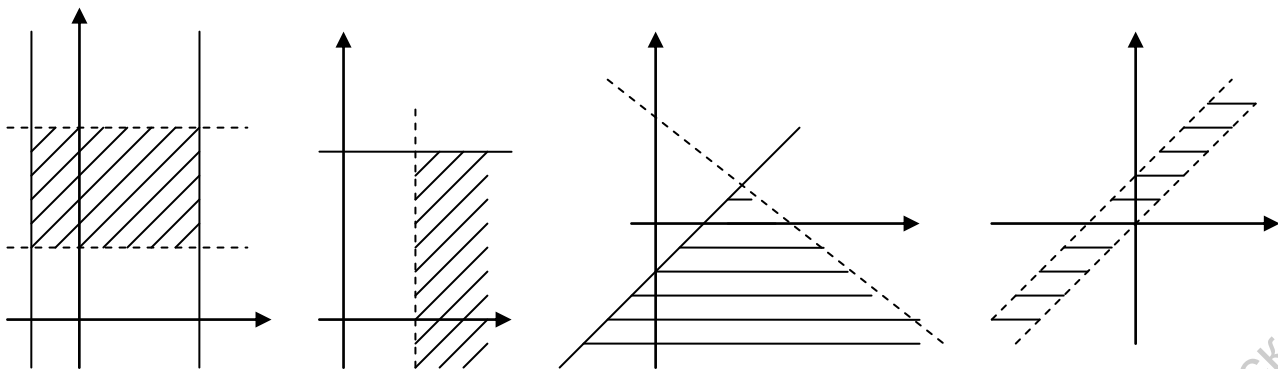
б) $xy = 0$,

в) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

(В последнем случае уравнением $x^2 - 5x + 6 = 0$ задастся парой параллельных прямых.)

2. Требуется построить множество точек плоскости, аналитическим заданием которого является система $\begin{cases} -1 \leq x \leq 3, \\ 2 < y < 5. \end{cases}$

Неравенство $-1 \leq x \leq 3$ определяет множество точек вертикальной полосы, включая точки прямых $x = -1$ и $x = 3$. Неравенство $2 < y < 5$ определяет внутренние точки горизонтальной полосы. Очевидно, точки, координаты которых удовлетворяют одновременно обоим соотношениям, лежат внутри прямоугольника ABCD, причем точки отрезков AB и CD входят в рассматриваемое множество, а точки отрезков BC и AD – нет. Ясно, что сами точки A, B, C и D не принадлежат этому множеству. Действительно, точка A, например, имеет координаты $x = -1$, $y = 2$. Но число $y = 2$ не удовлетворяет второму соотношению системы ($2 < y < 5$).



Упражнения

1. Постройте множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим системам:

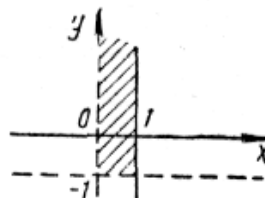
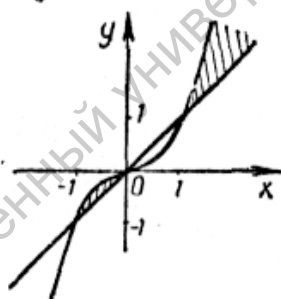
д) $\begin{cases} x > 2, \\ y \leq 3 \end{cases}$

е) $\begin{cases} x + y < 3, \\ x - y \geq 1 \end{cases}$

ж) $x < y < x + 1.$

2. Сравните множество $\begin{cases} x + y < 3, \\ x - y \geq 1 \end{cases}$, с множествами точек, задаваемых системой $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases}$ и уравнением $(x + y - 3)(x - y - 1) = 0$.

3. Изобразите в системе координат множество $z) \begin{cases} y \geq x, \\ y \leq x^3. \end{cases}$

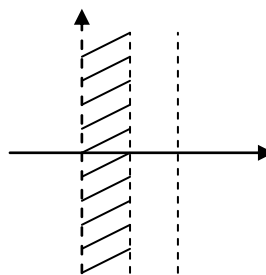
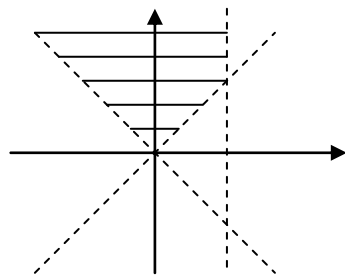


4. В заключении этой серии упражнений рассмотрим построение множества точек плоскости, задаваемого тремя соотношениями.

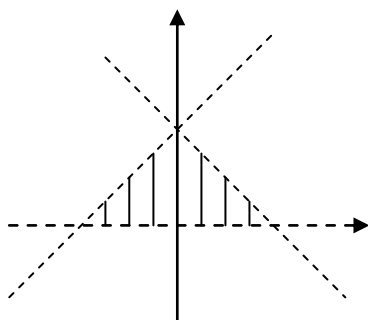
а) $\begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ y > -1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y > 0, \\ x - y < 0, \\ x < 2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \\ x < 2 \end{cases}$



(В случае в) неравенство $x < 2$ практически не работает, так как из системы $\begin{cases} x < 1 \\ x < 2 \end{cases}$ вытекает $x < 1$, и обратно).



5. Изобразите в системе координат множество $\begin{cases} 0 < y < x + 2, \\ y < -x + 2 \end{cases}$.

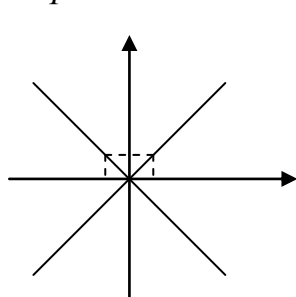
(В этом случае нас устраивают те точки плоскости, которые одновременно принадлежат трем полуплоскостям, определяемым соотношениями $y > 0$, $y < x + 2$, $y < -x + 2$. В результате получаются внутренние точки треугольника ABC.)

Приводимые ниже примеры могут быть использованы как в процессе изложения материала, так и на заключительном занятии.

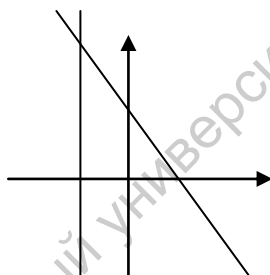
Упражнение – IV

1. Задать аналитически множество внутренних точек треугольника, вершины которого находятся в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

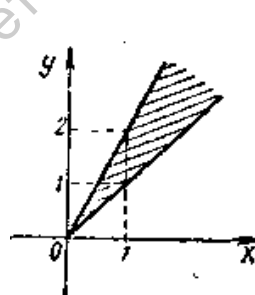
2. Задать аналитически следующие множества точек плоскости, ограниченные прямыми, окружностями, дугами окружностей, параболой, гиперболой.



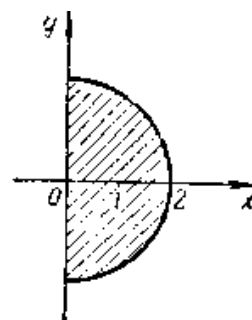
а)



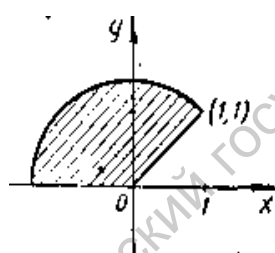
б)



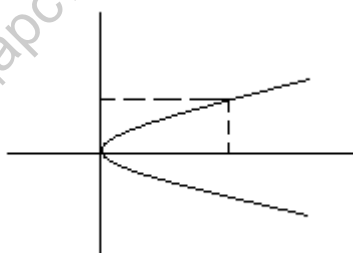
в)



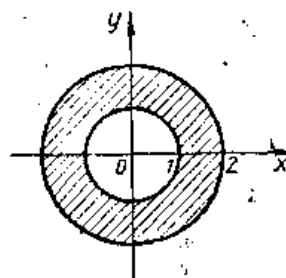
г)



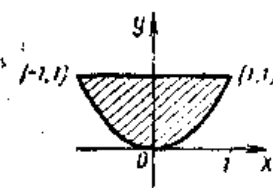
д)



е)



ж)



з)

Решим несколько задач из Сборника заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе*.

4.18. Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 1 - x^2, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

Укажите промежутки возрастания функции.

* Кузнецова Л.В. Алгебра: Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 кл [Текст] /Л.В.Кузнецова, С.Б.Суворова. – М: Просвещение, 2007.

Решение

1. Отмечаем на плоскости два множества: $|x| \leq 1$ и $|x| > 1$;
2. В полосе $|x| \leq 1$ строим график функции $y = 2x^2 - 2$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Вершина в точке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Найдем ещё несколько точек графика

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	0	$-\frac{7}{8}$	-1,5	-2	-1,5	$-\frac{7}{8}$	0

3. В полуплоскостях $x > 1$ и $x < -1$ строим ветви параболы $y = x^2 - 1$. Вершина её в точке $(0; -1)$, ветви направлены вниз. Найдем несколько точек графика

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-8	-3	0	-1	0	-3	-8

4. Построим график $f(x)$.
5. На $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$ $f(x)$ возрастает и принимает значения соответственно на множестве $(-\infty; 0]$.

4.29. Задайте аналитически функцию, график которой изображен на рисунке.

Решение

1. Введём следующие обозначения: $A(-4; 0)$, $B(-2; 2)$, $O(0; 0)$, $C(3; 3)$.
2. Выделим те подмножества X ($X \subseteq \mathbb{R}$), на которых $f(x)$ задаётся какой-либо функцией.
3. На множестве $(-\infty; -2]$ $f(x)$ ведёт себя как прямая AB . На $(-2; 0]$ $f(x)$ ведёт как прямая BO . На $(0; 3]$ $f(x)$ совпадает с прямой OC . На $(3; +\infty)$ $f(x)$ совпадает с прямой CD .
4. Зададим аналитически указанные прямые

Прямая	Вывод формулы $y = kx + b$	Аналитическое задание
AB	$\begin{cases} 0 = k \cdot (-4) + b \\ 2 = k \cdot (-2) + b \end{cases}; \begin{cases} -4k + b = 0 \\ -2k + b = 2 \end{cases}; \begin{cases} k = 1 \\ b = 4 \end{cases}$	$y = x + 4$
BO	$\begin{cases} 2 = k \cdot (-2) + b \\ 0 = k \cdot 0 + b \end{cases}; \begin{cases} k = -1 \\ b = 0 \end{cases}$	$y = -x$
OC	$\begin{cases} 0 = k \cdot 0 + b \\ 3 = k \cdot 3 + b \end{cases}; \begin{cases} k = 1 \\ b = 0 \end{cases}$	$y = x$
CD		$y = 3$

5. Итак, $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} y = x + 4, & x \in (-\infty; -2], \\ y = -x, & x \in (-2; 0], \\ y = x, & x \in (0; 3], \\ y = 3, & x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

3. Множества как результат решения уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств

Известно, уравнение, неравенство, система уравнений или система неравенств может: иметь единственное (конечное число) решение, не иметь решений, иметь бесконечно много решений.

Результат решения можно представить тройкой, согласно таблице

графический способ	аналитический способ	в виде множества
	$\begin{cases} 1 < x < 3 \\ 3 < x \leq 4 \end{cases}$	$x \in (1;3) \cup (3;4]$
	$x = \pm 1$	$x \in \{-1;1\}$
		$\emptyset$ или $x \in \emptyset$
		$x \in R$

Есть ещё словесное описание результата решения уравнения (неравенства, системы), но оно наименее оптимально, так как не наглядно и требует дальнейшего анализа.

Применяют словесное описание в случае, когда уравнение (неравенство, система) не имеет корней (решения) или решением является множество всех чисел (действительных чисел).

Наиболее эффективна запись результата решения уравнения (неравенства, системы) в виде множества.

Поэтому, возникает естественный вопрос, как это множество найти?

Первое, на что учащиеся обращают внимание при решении этой проблемы, так это то, что к теоретико-множественной записи можно прийти, имея систему / совокупность равенств / неравенств вида: $x \geq a$. К равенствам / неравенствам указанного вида приводят равносильные преобразования исходного равенства / неравенства $F(x) G(x)$:

Эти преобразования целиком опираются на известные нам свойства объединения и пересечения множеств, записываемые с использованием алгебраических символов объединения и пересечения согласно следующей таблице. Так как $F(x) G(x)$ всегда можно представить в виде $F(x) - G(x) 0$, то в таблице будем использовать только уравнения / неравенства вида $F(x) 0$.

Теоретико-множественная запись	Алгебраическая (аналитическая) запись
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
$A \cap \emptyset = \emptyset$	
$A \cup \emptyset = A$	

Проиллюстрируем на примерах теоретико-множественный подход к решению уравнений, неравенств и разнообразных систем.

$(A \cup B) \cup (C \cup D) = A \cup B \cup C \cup D$	
$(A \cap B) \cap (C \cap D) = A \cap B \cap C \cap D$	

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

Решение

$$\begin{aligned}
 x^2 - 5|x| + 6 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 + 5x + 6 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \\ x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \\ x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \\ x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ x = -2 \\ x = -3 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow x \in \{-3; -2; 2; 3\}.
 \end{aligned}$$

Пример 2 [24, 147]. Решить неравенство $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$.

Решение

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x &\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \\ 8 - 2x < 0 \\ 8 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x > 4 \\ x \leq 4 \\ 5x^2 - 38x + 69 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \begin{cases} 4 < x \leq 5 \\ x \leq 4 \\ 3 < x < \frac{23}{5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < x \leq 5 \\ 3 < x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 5 \Leftrightarrow x \in (3; 5].
 \end{aligned}$$

Упражнения

а) Каково множество решений каждого из уравнений: $x^2 - 1 = 0$; $|x| = 3$; $|x| = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $x^2 + x + 1 = 0$; $|x| + x = 0$?

Дайте в каждом случае геометрическую иллюстрацию.

б) Приведите примеры уравнений, множество решений которых соответственно пусто, содержит один, два или три элемента.

Можно говорить и о множестве решений неравенства. Пусть, например, дано неравенство $2x + 4 > 0$. Решением его является любое число, большее -2 ($x > -2$). Это множество решений можно изобразить открытой (незамкнутой) полупрямой. Множество решений неравенства $x + 5 < x - 5$ пусто. Множество решений двойного неравенства $0 < 2x - 4 < 8$ (по существу, системы) составляют все числа, большие 2, но меньшие 6 ($2 < x < 6$). Заметим, что множество всех чисел x , удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется интервалом и записывается следующим образом: $(a; b)$. Круглые скобки означают, что точки $x = a$ и $x = b$ не входят в рассматриваемое множество (рис. 1). Нужно отличать интервал $a < x < b$

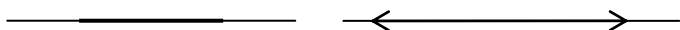


Рис. 1



Рис. 2

от сегмента – множества точек $a \leq x \leq b$, который обозначается так: $[a; b]$ (черт. 2). На чертежах 1 и 2 показано наиболее употребительное графическое изображение интервала и сегмента.

Еще пример. Неравенству $x + 5 > x + 3$ удовлетворяют все числа. Геометрически это множество изображается всей числовой прямой.

Решим теперь задания из Сборника ГИА.

2.27(1) Решить уравнение $x + \sqrt{x} - 20 = 0$.

Решение

$$x + \sqrt{x} - 20 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -5 \\ \sqrt{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset \\ \sqrt{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

3.47(1) Решить систему неравенств $\begin{cases} (x^2 - 7x + 12)^2 \leq 0 \\ (x^2 + 2x - 1)^2 \geq 400 \end{cases}$.

Решение

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x^2 - 7x + 12)^2 \leq 0 \\ (x^2 + 2x - 1)^2 \geq 400 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ |x^2 + 2x - 1| \geq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ x^2 + 2x - 1 \geq 20 \\ x^2 + 2x - 1 \leq -20 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ x^2 + 2x - 21 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 19 \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ x^2 + 2x - 21 \geq 0 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ x^2 + 2x - 21 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + 2x - 21 \geq 0 \\ x = 4 \\ x^2 + 2x - 21 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset \\ x = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow x \in \{4\}. \end{aligned}$$

Теперь можно перейти к решению уравнений с двумя переменными.

Множество решений уравнения $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (1) есть множество точек окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Уравнение $xy = 0$ (2) задаст пару координатных осей на плоскости.

Каково множество решений уравнения $(x^2 + y^2 - 1) \cdot xy = 0$? Легко сообразить что этому уравнению удовлетворяют как любое решение уравнения (1), так и любое решение уравнения (2), причем этими двумя возможностями все множество исчерпывается. Естественно сказать, что новое множество получается в этом случае объединением двух исходных множеств, т. е. состоит из точек, принадлежащих первому или второму множеству (или неразделительное).

Рассмотрим теперь множество решений уравнения $(x^2 + y^2 - 1)^2 + (xy)^2 = 0$. Это уравнение равносильно требованию одновременного обращения в нуль выражений, стоящих в обеих круглых скобках, т. е. системе $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ xy = 0. \end{cases}$

Здесь фигурная скобка соответствует логической связке «и» между двумя условиями.

Нетрудно себе представить, как получается множество решений данного уравнения из двух исходных множеств: оно состоит из точек пересечения единичной окружности и совокупности двух осей координат, т. е. из точек, принадлежащих одновременно и первому и второму множествам.

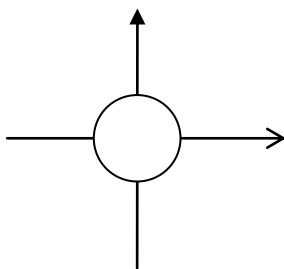
Именно по такой схеме проводится графическое решение системы двух уравнений с двумя неизвестными, а также графическое решение уравнения $f(x) = 0$, которое сводится к решению системы $\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0. \end{cases}$ Первое из этих двух уравнений задает график функции $f(x)$, второе – ось абсцисс, их пересечение есть множество корней уравнения $f(x) = 0$.

Аналогичный подход применим к уравнению $\frac{(x^2 + y^2 - 1)xy}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + (xy)^2} = 0$.

Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)xy = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)^2 + (xy)^2 \neq 0, \end{cases}$

которая распадается на две системы: а) $\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)^2 + (xy)^2 \neq 0, \end{cases}$ или б) $\begin{cases} xy = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)^2 + (xy)^2 \neq 0. \end{cases}$

Связку *или* здесь следует понимать так: каждое решение исходной системы должно быть решением хотя бы одной из двух последних систем, и обратно.



Множество решений системы а) есть единичная окружность без точек, принадлежащих одновременно и окружности и хотя бы одной из осей. Множество решений системы б) есть пара координатных осей без точек, принадлежащих одновременно окружности и хотя бы одной из осей. Нас устраивают обе возможности, поэтому окончательно получаем множество решений исходной

системы в виде

объединения множества точек окружности с множеством точек координатных осей за вычетом точек пересечения каждой из осей с окружностью.

Можно было вести рассуждение и несколько иначе. Числитель дроби, стоящей в левой части данного уравнения, обращается в нуль для любой точки, лежащей на единичной окружности или на одной из осей. Знаменатель дроби обращается в нуль лишь в точках пересечения окружности с парой координатных осей. Именно эти точки и следует исключить из объединения первых двух множеств.

Множество решений данного уравнения есть множество точек, принадлежащих или только единичной окружности или только паре координатных осей (разделительное *или*).

Рекомендуется рассмотреть аналогичным образом уравнения

$\frac{x^2 + y^2 - 1}{xy} = 0$ и $\frac{xy}{x^2 + y^2 - 1} = 0$. Далее решается следующее задание:

1. Решить уравнения и изобразить графически полученные множества:

а) $(y - x)(xy - 1) = 0$, б) $(y - x)^2 + (xy - 1)^2 = 0$, в) $\frac{y - x}{xy - 1} = 0$,

г) $\frac{xy - 1}{y - x} = 0$, д) $\frac{(y - x)(xy - 1)}{(y - x)^2 + (xy - 1)^2} = 0$.

Решим теперь указанным способом задачи из Сборника ГИА.

2.70(1) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3 \end{cases}$.

Решение

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2)^2 + 2x^2y^2 + (y^2)^2 - 2x^2y^2 = 82 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = 82 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 100 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 10^2 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 16 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \\ x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ x = 3 \\ y = 1 \\ x = -3 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ x = 3 \\ y = 1 \\ x = -1 \\ y = -3 \\ x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x; y) \in \{(1; 3), (3; 1), (-1; -3), (-3; -1)\}.$$

Изучение элементов комбинаторики учащимися основной школы

Наиболее трудным при решении комбинаторных задач алгебраическим методом (с использованием формул) является определение вида данной задачи (соотнесение задачи к тому или иному классу комбинаторных задач: «на вычисление количества размещений», «на вычисление количества сочетаний», «на вычисление количества перестановок» и т.д.). При выяснении факта принадлежности задачи к определённому классу совсем несложным является поиск соответствующей формулы (тем более, что в левой её части находится символ, присущий тому или иному комбинаторному соединению A_n^m , C_n^m , P_n и т.д.) и её применение.

Умение решать комбинаторные задачи алгоритмическим методом должно начинаться с умения классифицировать имеющиеся задачи, которое в свою очередь опирается на общепредметное умение анализировать имеющуюся информацию.

Таким образом, вырисовывается следующая схема работы учащихся с комбинаторным материалом в основной школе:

1. Самостоятельное изучение информации по теме «Решение комбинаторных задач алгебраическим методом».
2. Изучение банка задач на предмет их классификации.
3. Формирование и закрепление умения решения комбинаторных задач алгебраическим методом.
4. Контроль знаний, умений и навыков по теме «Решение комбинаторных задач алгебраическим методом».
5. Творческая (проектная) деятельность учащихся.

1. Самостоятельная деятельность учащихся по изучению информации по теме «Решение комбинаторных задач алгебраическим методом»

Самостоятельное изучение информации по теме «Решение комбинаторных задач алгебраическим методом» необходимо для того, чтобы учащиеся получили панорамное представление о материале, подлежащем освоению.

Самостоятельную деятельность можно организовать двумя способами:

- Домашнее самостоятельное чтение научно-популярной литературы
- Работа с соответствующим ЦОР

По ходу изучения материала сайта учащиеся делают (в тетрадях) необходимые им записи и рисунки.

В качестве домашнего задания школьникам можно предложить систематизировать записи, оформить их в виде законченного текста или опорного конспекта, слайд-презентации и пр.

2. Изучение банка задач по теме «Решение комбинаторных задач алгебраическим методом» на предмет их классификации

Для работы учащихся по изучению банка задач по теме «Решение комбинаторных задач алгебраическим методом» на предмет их классификации

Сколькими способами можно разослать 7 различных фотографий, используя для этого 3 различных конверта?

Задачи на правило произведения

учитель должен подготовить несколько конвертов и соответствующую картотеку: на каждой карточке распечатать текст комбинаторной задачи. Карточки помещаются (желательно их предварительно заламинировать) в коробку, шкатулку, большой конверт.

На уроке учащимся предлагается: (1) вспомнить определения всех изученных ранее комбинаторных соединений (можно использовать домашние заготовки); (2) выявить характеристические особенности

комбинаторных соединений и схематически их представить; (3) разложить карточки с задачами в соответствии с принадлежностью к определённому классу комбинаторных задач: задачи, относящиеся к некоторому классу в один конверт. Конверты подписываются.

Правильность классификации можно проверить одним из двух способов. Можно конверты сдать на проверку учителю, который огласит результаты проверки на следующем занятии. Или же распечатывать конверты непосредственно на занятии, посвящённом решению задач определённого комбинаторного типа и разбираться с точностью проведённой классификации.

Вне зависимости от выбранного способа проверки может возникнуть проблема, связанная с тем, что ученики не справились с поставленным заданием по классифицированию комбинаторных задач. В этом случае первый способ проверки предоставляет больше возможности для коррекции знаний и умений учащихся, так как второй урок по теме «Решение комбинаторных задач алгебраическим методом» можно посветить подробному разбору задания: анализировать условия задач и выяснять, правомерно ли её включение в рассматриваемый класс.

В случае проверки вторым способом (когда ошибки выявляются в ходе самого урока) придётся на уроке решать все задачи из вскрытого конверта, а в ходе итога урока (заключительный его этап) делать выводы о принадлежности (непринадлежности) задачи указанному на конверте классу.

Задачи, пригодные для классифицирования, приведены ниже (списком).

1. В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд. Разыгрывается три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось указать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос?

2. В группе 20 студентов. Профессор решил каждому студенту задавать по одному из 25 каверзных вопросов. Сколько есть возможностей провести опрос в группе?

3. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно: а) назначать двух дежурных; б) выбрать 28 человек для осеннего кросса.

4. В 5 классе девять предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть шесть разных уроков?

5. В колоде 32 карты. Раздаются три карты. Сколькими способами это можно сделать?

6. В профком избраны пять человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

7. В прошлые века процветала генуэзская лотерея, сохранившаяся в некоторых странах и поныне. Участники этой лотереи покупали билеты, на которых стояло число от 1 до 90. Можно было купить и билеты, на которых было сразу 2, 3, 4 и 5 чисел. В день розыгрыша лотереи из мешка, содержащего жетоны с числами от 1 до 90, вынимали пять жетонов. Выигрывали те, у которых все номера на билетах были среди вынутых. Если участник лотереи покупал билет с одним числом, то он получал при выигрыше в 15 раз больше стоимости билета; если с двумя числами (амбо), то в 270 раз больше, если с тремя числами (терн) – в 5500 раз больше, если с четырьмя числами (катерн) – в 75000 раз больше, а если с пятью числами (квин) – в 1000000 раз больше, чем стоил билет. Каково отношение «счастливых» билетов при игре, когда участник купил билет с одним числом?

8. В сборную по футболу входит 15 футболистов, один из которых вратарь. Сколькими способами тренер может выбрать команду для участия в матче?

9. В турнире по шахматам каждый участник сыграл с каждым по одной партии, всего было сыграно 36 партий. Определите число участников турнира.

10. В цехе работают восемь токарей. Сколькими способами можно поручить трём из них изготовление трёх различных видов деталей (по одному виду на каждого)?

11. В чемпионате по футболу участвуют десять команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?

12. Дама сдавала в багаж семь предметов. Все они оказались украденными, но два каких-либо (по её выбору) ей согласились поискать. Сколько у неё у неё есть возможностей выбрать два любимых предмета?

13. За столом пять мест. Сколькими способами можно рассадить пятерых гостей?

14. Из 17 учеников 8 класса и 13 учеников 9 класса выбирают команду в количестве шести человек (четыре ученика от 8 класса и два ученика от 9 класса). Сколькими способами это можно сделать?

15. Из ведра, в котором находится 27 роз, выбирают букет из семи роз. Сколькими способами может быть выбран букет?

16. Из десяти различных книг выбирают четыре для посылки. Сколькими способами это можно сделать?

17. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули десять карт. Сколькими разными способами это можно сделать?

18. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из четырёх человек для участия в эстафете на 100+200+400+800 (м). Сколькими способами это можно сделать?

19. Из точек и тире составляют всевозможные 7-значные наборы. Какое число различных наборов можно составить?

20. Имеется 10 книг, среди которых: а) восемь книг разных авторов и двухтомник одного автора, которого не было среди предыдущих семи; б) семь книг разного автора и трёхтомник восьмого автора.

21. На вечер пришли десять одиннадцатиклассников, девять десятиклассников и восемь девятиклассников. Сколькими способами из них можно составить команду из шести человек (по два человека от каждого класса)?

22. На тренировке занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером различных стартовых пятёрок?

23. Найдите число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга.

24. Рота состоит из трёх офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

25. Сколькими способами можно выбрать двух человек в президиум, если на собрании присутствует 78 человек?

26. Сколькими способами можно составить дозор из трёх солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

27. Сколькими различными способами можно распределить между шестью лицами две различные путёвки в санаторий?

28. Сколькими способами в игре «Спортлото» можно набрать шесть номеров из 49?

29. Сколькими способами можно выбрать пять делегатов из участников конференции, на которой присутствуют 15 человек?

30. Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы А, В, С, D, E и F?

31. Сколькими способами можно опустить пять писем в 11 почтовых ящиков, если в каждый ящик опускается не более одного письма?

32. Сколькими способами можно переставлять друг с другом цифры 1, 2, 3 и 4?

33. Сколькими способами можно посадить за круглый стол пять мужчин и пять женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

34. Сколькими способами можно поставить восемь шашек на чёрные поля доски?

35. Сколькими способами можно поставить на черные поля 12 белых и 12 чёрных шашек?

36. Сколькими способами можно присудить шести лицам три одинаковые премии?

37. Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на который поставлено 12 приборов?

38. Сколькими способами можно распределить две одинаковые путёвки между пятью лицами?

39. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора не стояли рядом?

40. Сколькими способами можно составить команду из четырёх человек для участия в соревнованиях по бегу, если имеется семь бегунов?

41. Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди семи учащихся группы в течение семи дней?

42. Сколько всего различных пятизначных чисел, не содержащих нуля?

43. Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что ни одна из них не повторяется?

44. Сколько пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 и 5 так, чтобы: а) последней была цифра 4; б) первой была цифра 2, а второй 3?

45. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 6, 7, 8 и 9, если одна и та же цифра может повторяться несколько раз?

46. Сколько существует четырёхзначных номеров, не содержащих цифр 0, 5 и 8?

47. У Лены есть восемь различных красок. Она хочет написать ими слова «Новый год». Сколькими способами она может это сделать, если собирается каждую букву раскрашивать одним цветом и все восемь букв должны быть разными по цвету?

48. У одного человека есть 11 книг по математике, у другого 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по три книги для обмена?

49. У ювелира есть пять изумрудов, восемь алмазов и семь топазов. Сколькими способами он может сделать браслет, включив в него два изумруда, три алмаза и два топаза?

50. Остап Бендер размышляет, за каким стулом из 12 отправиться сначала, за каким потом и т.д. Сколько тут есть возможностей?

3. Формирование и закрепление умения решать комбинаторные задачи алгебраическим методом

Дальнейшая работа – формирование и закрепление умения решать комбинаторные задачи алгебраическим методом (занятия 3-6) – идёт согласно следующему тематическому плану.

№	Тема	Содержание
8	Алгебраический метод решения комбинаторных задач	Комбинаторные соединения Информационные модели комбинаторных задач Алгебраический метод решения комбинаторных задач
9	Комбинаторные соединения	Классификация комбинаторных задач
10	Перестановки	Факториал Перестановки Формула для подсчёта числа перестановок из n элементов
11	Размещения	Размещения Формулы для подсчёта числа размещений из n элементов по m
12	Сочетания	Сочетания Формулы для подсчёта числа сочетаний из n элементов по m
13	Свойства сочетаний	Доказательство комбинаторных тождеств
14	Треугольник Паскаля	Треугольник Паскаля, его свойства и применение
15	Исторические комбинаторные задачи	Фигурные числа; Латинские квадраты;
16	Зачётный урок по теме	

Занятия 7-8 можно посвятить контролю над усвоением изученного материала и вторичному закреплению умений использовать алгебраический

метод. А можно изучить новый материал: «Треугольник Паскаля» и «Исторические комбинаторные задачи».

Первый случай подходит для учащихся, не сумевших до конца разобраться в тонкостях решения комбинаторных задач.

Второй вариант проведения уроков 7-8 (уроки изучения нового материала) годится для школьников, успешно овладевших методами решения комбинаторных задач.

Зачётный урок по теме можно провести в форме зачёта или в привычной для учеников форме контрольной работы.

Для устного зачёта резервируется двойной урок (последний по расписанию). Учитель готовит зачётные карточки, структура которых такова: I вопрос (теоретический) включает в себя задание на определение какого-либо комбинаторного сочетания, вида комбинаторной задачи или метода решения комбинаторной задачи. II вопрос (практический) предполагает решение комбинаторной задачи (из списка решённых во время занятий – см. п.2.2.2).

Ученик получает оценку «отлично», если полностью и успешно справился с зачётным заданием. Оценка «хорошо» выставляется в случае несущественных недочётов и неточностей при ответе, нарушения логики рассуждений, не приводящего к ошибочным результатам. «Удовлетворительно» выставляется при условии успешного выполнения одного из двух зачётных заданий при условии попытки выполнения другого. Во всех остальных случаях ученик должен пересдать зачёт по теме «Решение комбинаторных задач алгебраическим методом».

Контрольная работа по теме «Решение комбинаторных задач алгебраическим методом» включает три задания: (1) преобразование комбинаторного выражения или доказательство тождества, (2) комбинаторную задачу с предельно лаконичной формулировкой, например: «Сколькими способами можно составить команду из четырёх человек для участия в соревнованиях по бегу, если имеется семь бегунов?», (3) комбинаторную задачу с развёрнутым сюжетом, например: «В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд. Разыгрывается три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось указать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос?»

С учётом факта психологической неготовности учащихся 5-6 классов к усвоению алгебраического материала для них устный зачёт не проводится. Комбинаторная задача включается в последующие текущие контрольные работы в качестве необязательного для выполнения задания (уровень повышенной подготовки учащихся). Такой подход позволяет судить о степени сформированности и развития у учащихся этого возраста комбинаторного стиля мышления.

Котова Н.В., Непомнящая Е.А.

О проблемах изучения элементов комбинаторики и теории вероятностей
в общеобразовательной школе

(Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научно-методических трудов: Выпуск 7. – Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – с.39-40)

Наш мир очень сложен, прекрасен, многообразен, изменчив. Современный ритм жизни постоянно заставляет человека извлекать, анализировать и обрабатывать информацию, принимать обоснованные решения в разнообразных ситуациях со случайными исходами.

Формирование личности, способной жить и работать в таком многогранном мире, является одной из важных задач учителей. Реализация данной задачи с неизбежностью требует развития вероятностно-статистического мышления у подрастающего поколения.

Современная концепция школьного математического образования ориентирована, прежде всего, на учет индивидуальности ребенка, его интересов и склонностей. Этим определяются критерии отбора содержания, разработка и внедрение новых, интерактивных методик преподавания, изменения в требованиях к математической подготовке ученика. И с этой точки зрения, когда речь идет не только об обучении математике, но и формировании личности с помощью математики, необходимость развития у всех школьников вероятностной интуиции и статистического мышления становится насущной задачей. Причем речь сегодня идет об изучении вероятностно-статистического материала в обязательном основном школьном курсе в рамках самостоятельной содержательно-методической линии на протяжении всех лет обучения.

Однако, внедрение стохастической линии в школьный курс столкнулось с рядом трудностей. Прежде всего, как показывают исследования психологов (Ж.Пиаже, Е.Фишбейн), человек изначально плохо приспособлен к сознательно активной вероятностной оценке, к осознанию и верной интерпретации вероятностно-статистической информации. Даже хорошее знание и понимание других разделов математики само по себе не обеспечивает развитие вероятностного мышления и не избавляет даже от тривиальных вероятностных мифов, предрассудков и заблуждений. По этой причине требуется определенная вероятностная направленность курса школьной математики, то есть не одноразовое обращение к этим вопросам, а длительное и настойчивое формирование вероятностного мышления, начиная с младших классов.

Работы психологов подтверждают тот факт, что наиболее благоприятен для формирования вероятностных представлений возраст 10-13 лет (это 5-7 классы). Начинать изложение основ теории вероятностей в старших классах – малоэффективно. Выработанное к этому возрасту стремление к неременной формализации знаний, желание усвоить на уроке, прежде всего, некоторый набор правил, алгоритмов и методов вычисления фактически подменяет формирование вероятностных представлений формальным выучиванием формул, которые впоследствии применяются учащимися наугад, либо не

применяются вовсе из-за неспособности сопоставить условие и требование конкретной задачи с адекватной математической моделью – формулой.

При всем том, проблемы кроются не только в плохом усвоении учащимися вероятностно-статистического материала. Одна из главных проблем внедрения стохастической линии в школьный курс связана с методической неготовностью учителя. На вопрос: «Почему Вы не хотите изучать/исключили из содержания школьного курса математики элементы комбинаторики и теории вероятностей?», учителя отвечают, как правило, что дети плохо усваивают данный материал, или, что в младших классах ученики этого не проходили, и сейчас нет никакого смысла вводить изучение данной темы. Некоторые учителя говорят, что они просто не помнят этот раздел математики или вообще сами не изучали.

Своё нежелание обучать школьников элементам комбинаторики и теории вероятностей учителя аргументируют следующим образом.

(1) Дети плохо усваивают данный материал, который к тому же не подлежит проверке в ходе итоговых аттестаций; в результате учебное время тратится впустую, а ученики забывают подлежащий обязательной проверке материал (24 % опрошенных*).

(2) Нет смысла изучать материал данной темы, поскольку ранее, на пропедевтическом уровне, он не изучался (32 %).

(3) Нет времени и желания проработать математическое содержание темы и адаптировать его для учащихся определённого возраста (8 % опрошенных)

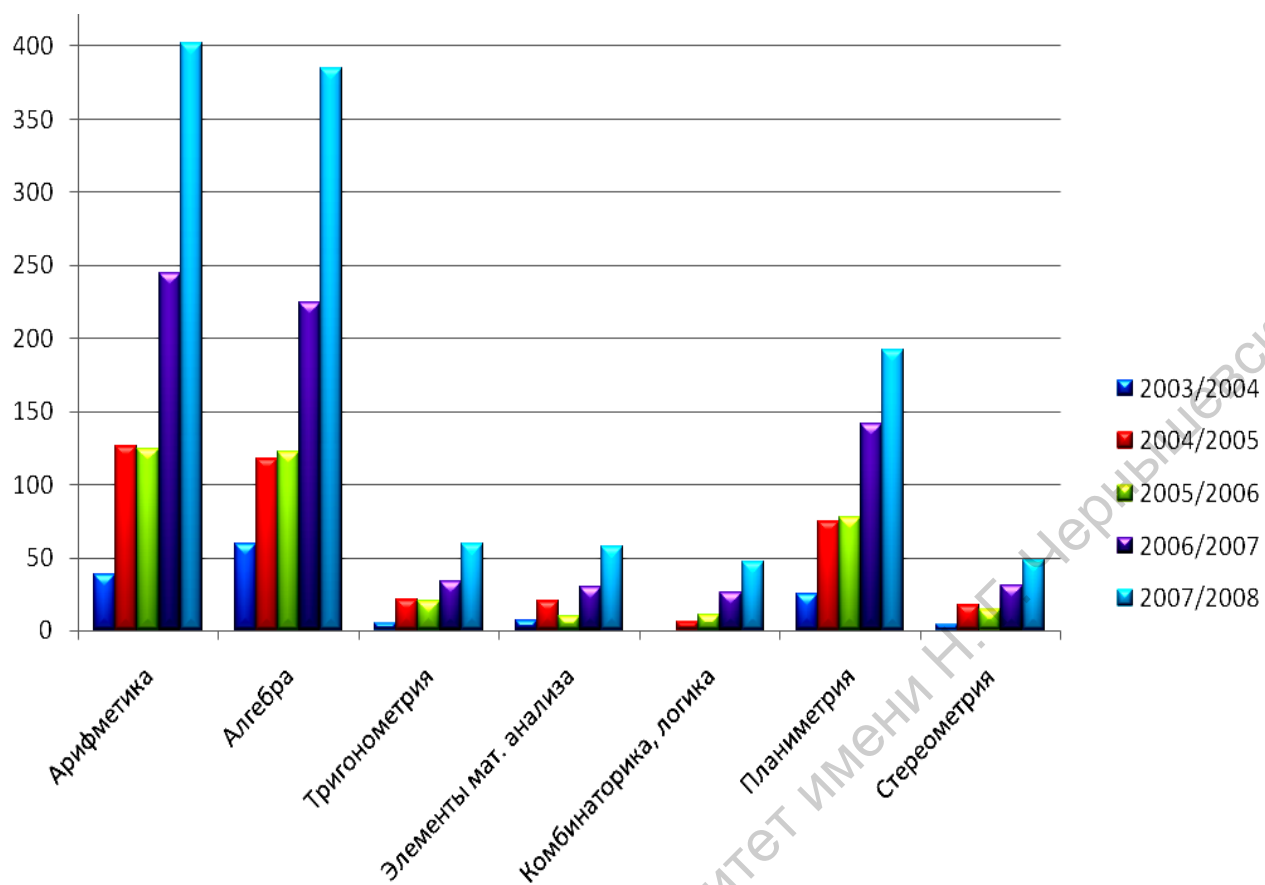
(4) Материал основательно забыт, изучать его заново нет времени и желания (24 %).

(5) Нет хороших методических разработок по данной теме, а те, что есть «не работают» (8 %).

(6) Учебный материал по данной теме не требует специального изучения, а только хорошо развитого аналитического и логического мышления. Это видно по результатам математических олимпиад, где всегда даётся задача по комбинаторике/теории вероятностей, которую участники (вне зависимости от того, изучали они аналогичный материал на уроках в школе, или не изучали) либо решают (высокий уровень развития математических способностей), либо не решают. Так зачем тратить время на его освоение? А развивать мышление учеников можно и на привычном учебном математическом материале (4 %).

Результаты опроса полностью подтверждаются анализом материалов, размещённых на сайте Издательского дома «Первое сентября» в рубриках Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» и Фестиваль творческих работ учащихся «Портфолио».

* Всего было опрошено 25 учителей



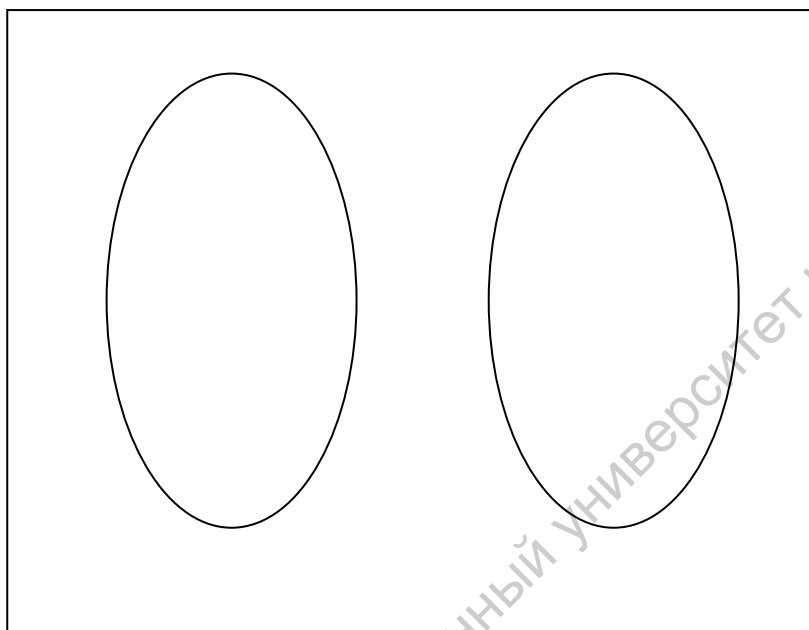
Исследовательская работа
Покупка пирожных

Цель: математическими методами вычислить, сколькими способами можно купить 7 пирожных 4 сортов?

Ход работы

1. Прочитайте задачу. **В кондитерском отделе продаются пирожные 4 сортов: наполеоны, эклеры, песочные слоёные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?**

2. Изобразите схематически соотношения между описанными в задаче множествами предметов.



3. О каких комбинаторных соединениях говорится в задаче? Ответ поясните.

4. Что не даёт нам возможность решить задачу по известной формуле?

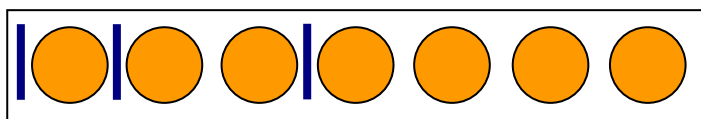
5. Как бы вы определили выявленные комбинаторные соединения?

6. Как бы вы обозначили число всех таких соединений? _____.

7. **Сочетание из n элементов по k , в которых среди k элементов есть одинаковые называются сочетаниями с повторениями.**

8. Какой способ наиболее подходит для решения задачи? _____

9. Поясните следующую схему. _____



10. Переведите схему на язык двоичной системы. Что обозначают следующие записи?

а) 0011011111

б) 1110110101

в) 1101101011

Вспомните, количество каких комбинаторных соединений можно вычислить, проводя рассуждения с опорой на данные схемы?

Решите задачу, используя схему. У вас получилось 120 способов?

11. Какой смысл имеют следующие комбинаторные равенства?

а) $P(3, 7)_{10} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$

б) $P(3, 7)_{10} = \bar{C}_4^7$

Как вычислить $\bar{C}_4^7$?

12. Решите задачу, используя полученную формулу.

13. Сформулируйте задачу в общем виде.

Запишите формулу для её решения

Проверьте, у вас должно получиться следующее равенство: $\bar{N}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$

14. Сформулируйте гипотезу о возможности изменения числа сочетаний с повтором в случае, когда k и n поменяются местами

15. Для доказательства / опровержения гипотезы вычислите:

$\bar{N}_4^3 =$ $\bar{N}_3^4 =$

16. Составьте задачу, комбинаторной моделью которой было бы выражение $\bar{N}_7^4$.

Решите её всевозможными способами.

1 способ. Рассуждения с использованием схемы.

2 способ. Метод замены комбинаторного соединения на более простое.

3 способ. Использование комбинаторных формул.



17. Составьте любые две задачи на основе одного сюжета, описывающие разные комбинаторные соединения (то есть различные комбинаторные ситуации), решением которых бы стало числовое выражение $\frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$

Задача А	Задача Б

Предложите составление задачи для решения одноклассникам.

18. Сделайте выводы по материалам работы.

1. _____

2. _____

3. _____

Лебедева С.В., Харьковская С.С.

Задачи на движение в школьном курсе математики

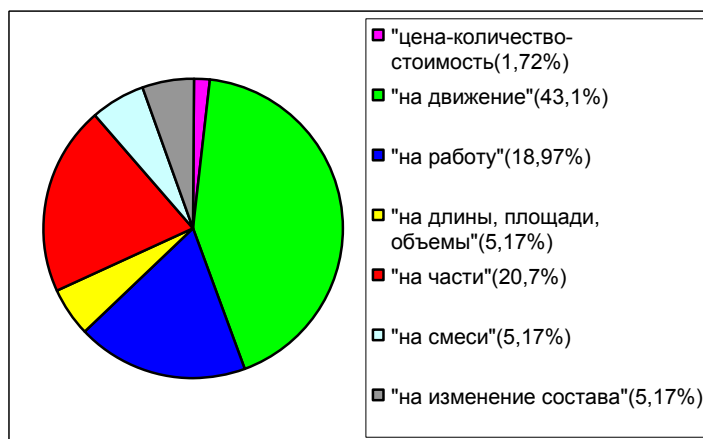
Содержание экзаменационной работы за курс математики основной школы отражает, в известной мере, содержание среднего математического образования выпускников, поэтому анализ экзаменационных заданий позволяет выделить наиболее перспективный математический материал с точки зрения реализации всех функций обучения (дидактической, развивающей и воспитательной).

Анализ первой (обязательной) части работы выявил следующие особенности содержания: 1) задания направлены на проверку базовой подготовки выпускников в ее современном понимании; 2) по сравнению с традиционным экзаменом усилены понятийный и практический аспекты; 3) проверке подвергается не только усвоение основных алгоритмов и правил, но и понимание смысла важнейших понятий и их свойств, содержания применяемых приемов, умение применять знания в простейших практических ситуациях; 4) при выполнении заданий первой части учащиеся должны продемонстрировать определенную системность знаний, умение пользоваться разными математическими языками и переходить с одного из них на другой, распознавать стандартные задачи в разнообразных формулировках; 5) эта часть работы содержит 16 заданий с выбором ответа, с кратким ответом и на соотнесение, из 16 заданий – 4 сюжетных задачи: одна из задач – на умение работать с величинами, второй вид задач – на изменение и сравнение величин количественно и в процентах, задачи третьего вида на адекватность алгебраической модели содержанию задачи, в задачах четвертого вида условие задачи представлено графиком зависимости пути от времени, а требование сформулировано в виде вопроса.

Анализ второй части экзаменационной работы показал, что умение решать сюжетные задачи является одним из наиболее важных, подлежащих отдельной проверке. Задачи, позволяющие оценить сформированность данного умения, выделены в седьмой раздел «Текстовые задачи» и представлены несколькими видами, классификация которых дается в следующей таблице.

Задачи на зависимость				Задачи на соотношение между величинами, выраженными в процентах		
функциональную – $C=AB$ – между величинами						
"Цена-количество-стоимость"	"На движение"	"На работу"	"На вычисление длин, площадей, объемов"	"На части"	На смеси/сплавы	На изменение состава вещества
1,7 %	43,1 %	18,9 %	5,2 %	20,7 %	5,2 %	5,2 %

Обращает внимание следующий факт: в перечне видов задач отсутствуют так называемые «задачи на количество» (функциональная зависимость определяется формулой $a \cdot n = b$, где a – количество предметов в одном наборе, n – количество наборов, b – всего предметов), хотя, в содержании школьного курса математики, начиная с начальной школы, данный вид задач представлен достаточно широко).



Следующая диаграмма «Доля различных типов сюжетных задач во второй части экзаменационной работы по математике за курс основной школы» позволяет визуально определить, что большая часть экзаменационных задач – задачи «на движение». Выясним роль этого типа задач, особенности, основные этапы решения,

требования, предъявляемые к организации работы учащихся по формированию умения решать задачи на движение.

Сюжетные задачи – это наиболее древний вид задач. Во всех сохранившихся письменных памятниках древности встречаются разные сюжетные задачи, в том числе и задачи на движение.

Например, во II веке в Китае решали следующую задачу: Дикая утка от южного моря до северного моря летит 7 дней. Дикий гусь от северного моря до южного моря летит 9 дней. Теперь дикая утка и дикий гусь вылетели одновременно. Через сколько дней они встретятся?

Задача из учебника Л.Ф. Магницкого: Послан человек из Москвы на Вологду, и велено ему в хождении своем совершать на всякий день 40 верст; потом другой человек в другой (следующий) день послан в след его и велено ему идти на день 45 верст, и ведательно есть, в коликий день постигнет (догонит) второй первого.

Приведем также пример старинной русской задачи.

Из Москвы в Тверь вышли одновременно два поезда. Первый проходил в час 39 верст и прибыл в Тверь двумя часами раньше второго, который проходил в час 26 верст. Сколько верст от Москвы до Твери?

Как видно, две последние задачи относятся к типу задач на движение. Это лишний раз подтверждает тот факт, что подобным задачам придавали особое значение во все времена.

Задачи на движение имеют важное практическое значение: это единственный вид учебных задач, в процессе решения которых учащимся необходимо использовать сразу несколько различных информационных и математических моделей: графические (чертеж, схема, граф), реляционные (таблица) и алгебраические (алгебраические выражения, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств). Графическая модель позволяет лучше понять взаимосвязи и отношения, описанные в условии задачи, табличная модель – определить наиболее удобный способ решения, математическая модель строится с целью получения ответа на поставленный вопрос. Таким образом, задачи на движение могут с успехом использоваться, в том числе, и при обучении моделированию.

Одной из особенностей задач на движение является то, что всякая такая задача требует обязательного анализа. Без предварительного анализа трудно

определить, какой метод, и какая соответствующая математическая модель являются наиболее подходящими для решения данной задачи. Процессы реальной жизни характеризуются величинами, между которыми существуют определенные зависимости. Поэтому целесообразно научить детей начинать решение всякой задачи с установления процессов, описываемых в задаче, затем выявлять величины, характеризующие каждый процесс, уяснить функциональную зависимость между величинами.

Надежность результатов деятельности ученика при решении задачи обуславливается его умением выбирать нужные операции, приводящие к получению желаемого результата. Выбор операций определяется структурой задачи, а также сформированностью приемов умственной учебной деятельности учащихся. Из этого вытекает необходимость расчленения задачи на составные элементы, отбор и соединение этих элементов в ином плане, обеспечивающем активную работу учащихся. Из этого также вытекает необходимость расчленения хода решения задачи на отдельные логико-психологические этапы, каждый из которых представляет собой определенную законченную часть решения задачи, дающую возможность осуществить операции следующего этапа.

В логико-психологическом плане такие этапы, содержащие определенные рекомендации, представляют собой программу деятельности учащихся, вызывающую соответствующие операции на уровне познавательных процессов – восприятия и мышления.

Без конкретной программы деятельности для учащихся, без алгоритмов или общих указаний по поиску решения задач трудно организовать процесс учения школьников, так как этот процесс имеет своими составными частями подражание и последующее творчество.

Традиционно решение задач на движение проходит семь основных этапов. I этап – составление информационной модели задачи. Соотнесение задачи к одному из классов: определённых, недоопределённых, переопределённых (с противоречивыми или непротиворечивыми данными условия) задач. II этап – выявление основания для составления математической модели: числового выражения (или его отдельных арифметических элементов), уравнения, неравенства или системы уравнений и неравенств. III этап – составление математической модели. IV этап – решение уравнения (неравенства, системы), нахождение значения числового выражения. V этап – интерпретация результатов: исследование корней уравнения (системы) с целью установления решений задачи, смысловой анализ решения задачи. Проверка расчетов и обоснований. VI этап – запись ответа. VII этап – анализ решения задачи: комментирование решения задачи, возвращение к решению задачи (ретроспективный подход) с целью уяснения и уточнения идей и методов решения задачи, упрощение расчетов, рассмотрение всех вариантов данной ситуации, выяснение возможности обобщения, установление общих правил для решения подобных задач, поиск более рациональных приемов решения задачи.

В процессе решения задач на движение нужно придерживаться описанной выше схемы, однако, разбивать процесс решения на отдельные этапы и

озаглавливать нет необходимости. Тем более нет необходимости оформлять решение, придерживаясь некоторого алгоритма: все зависит от характера и особенностей задачи, от того, с какой целью решается задача и на каком этапе обучения. Решение должно быть организовано так, чтобы принесло наибольшую пользу для осуществления тех целей, ради которых задача включена в процесс обучения математике.

Как было указано выше, успешное решение задач на движение зачастую зависит от правильного использования различных моделей. Наблюдение, анализ письменных работ и устных ответов учащихся позволяют утверждать, что основная причина всех допускаемых школьниками ошибок кроется в неправильной организации 1) первичного восприятия задачи, 2) анализа: должным образом не выяснена сложившаяся ситуация, отраженная в задаче, 3) работы по моделированию: первичному (информационному) и основному (математическому).

Обратимся к проблеме первичного восприятия задачи. Чтобы каждый ученик в соответствии с данными условия смог выполнить требование задачи, ему необходимо уяснить, о чем говорится в задаче: сколько ситуаций описано, сколько объектов участвует в движении, по какой траектории происходит движение и в каком направлении. Монологические формы выяснения этих вопросов, как правило, не приносят нужных результатов: не все учащиеся способны следить за логикой рассуждений педагога. Диалоговые формы работы позволяют подавляющему большинству учащихся уяснить суть решаемых проблем, но из-за несовершенства оперативной памяти многие ученики не в состоянии удерживать всю анализируемую информацию, и тем более осуществлять дальнейший анализ данных условия на предмет выявления функциональных взаимосвязей. Диалоговым способом организации процесса решения задачи должна сопутствовать визуализация выделяемой из текста задачи информации.

Уже в начальной школе, согласно требованиям программы, каждый ученик должен уметь не только кратко записать (сократить текст до возможного минимума) условие задачи, но и проиллюстрировать (визуализовать выделяемую из текста задачи информацию) условие с помощью рисунка, схемы или чертежа. В краткой записи используются и развиваются умения учащихся представлять информацию в вербальной форме. А схематическая запись нацелена на умение работать с образной информацией.

В V-VI классах, как правило, используются лишь разные виды краткой записи задачи да изредка готовые схемы (помещённые в учебнике), а создание информационной (графической) модели задачи и учителем и учащимися применяется крайне редко. Это аргументируется тем, что наглядность обязательна только на начальном этапе обучения, а с развитием у детей абстрактного мышления она свое значение теряет. А между тем наглядность нужна на всем протяжении обучения как важное средство развития более сложных форм пространственного мышления и формирования математических понятий. Как отмечает Л.Ш. Левенберг, «рисунки, схемы и чертежи не только помогают учащимся в сознательном выяснении скрытых зависимостей между

величинами, но и побуждают активно мыслить, искать наиболее рациональные пути решения задач, помогают не только усваивать знания, но и овладевать умениями применять их».

Наряду с графическим представлением информации задач на движение используются схемы. Обучение умению строить схемы проводится по принципу от простого к сложному и реализуется по мере усложнения самих задач на протяжении всего курса математики.

Перечислим основные требования, предъявляемые к схемам, составленным по условию задач на движение: 1) при движении по прямой расстояние принято обозначать отрезком; 2) равные расстояния обозначаются равными отрезками; 3) для обозначения суммы пройденных расстояний используются фигурные скобки; 4) если в задаче описываются две (и более) ситуации, строятся две (и более) схемы; 5) если в задаче описывается движение в одном направлении двух объектов, желательно разделять информацию об этих объектах, располагая ее в различных полуплоскостях относительно прямой, содержащей отрезок (модель пройденного пути); 6) место (пункт отправления, встречи, прибытия) обозначают либо точкой на отрезке и соответствующей буквой, либо черточкой, либо флажком; 7) время, затраченное на тот или иной отрезок пути, отмечается, как правило, над флажком; 8) стоянку можно обозначать выколотой точкой, под которой обозначается время, отведенное на стоянку; 9) направление движения указывают стрелками; 10) движение вслед изображается с использованием двух координатных лучей, располагающихся друг под другом; 11) в задачах на движение по течению (против течения) реки расстояние желательно обозначать наклонной линией, при этом «вниз» по наклонной обозначается движение по течению реки и «вверх» – против течения. Потребность в использовании наклонной определяется необходимостью сконцентрировать внимание обучаемых на изменении скорости объекта (имеющего собственную скорость) при его движении по реке. Кроме того, данный приём позволяет вести пропедевтическую работу по изучению основ векторной алгебры: если за $\bar{v}$ обозначить собственную скорость транспортного средства, за $\bar{v}_t$ – скорость течения, то скорость объекта по течению определяется векторной суммой $\bar{v} + \bar{v}_t$, а против течения – разностью векторов $\bar{v} - \bar{v}_t$; поскольку векторы коллинеарны, то $|\bar{v} + \bar{v}_t| = |\bar{v}| + |\bar{v}_t|$ и $|\bar{v} - \bar{v}_t| = |\bar{v}| - |\bar{v}_t|$.

Сначала с учащимся в ходе коллективной беседы разбираются принципы построения схем по данным условия задачи, потом предлагается система упражнений, в которую входят задания: 1) на выбор схемы, соответствующей условию задачи, 2) на чтение схемы, 3) на составление задачи по схеме, 4) на составление схемы по аналогии, 5) на достраивание незаконченных или исправление неточных схем.

Одна из трудностей, поджидающих ученика, заключается в необходимости так представить условие задачи в знаково-символической форме, чтобы она оказалась предельно понятной.

При решении задач на движение схемы выполняют ориентировочную роль, поскольку дают возможность одновременно видеть все связи между данными. Лучшему и быстрому осознанию сути явления, зафиксированного в схеме, помогает уменьшение количества перекодировок, которые потребуется делать при сопоставлении схемы с реальной ситуацией. Поэтому применяемая схема должна быть разумно сокращенной и упрощенной по сравнению с реальным явлением и в то же время наиболее естественной для каждой задачи.

В некоторых методических рекомендациях по поводу использования той или иной информационной модели задачи часто между строк читается такое положение: «запись должна отражать связи на том языке, на котором задача сформулирована», то есть если в задаче сказано: «больше на», то и в краткой записи должна присутствовать эта фраза. Считая это положение разумным, причислим его в дальнейшем к перечню тех требований, которые мы будем предъявлять к таблицам, но в случае схематической записи условия данное положение будем считать излишним. Кроме того, подмена текстовой информации её арифметическим эквивалентом также недопустима: возможная при этом ошибка выявится только на этапе интерпретации результатов (или не выявится вообще) при использовании алгебраических моделей или в ходе решения задачи арифметическим способом (невозможно осуществить некоторое арифметическое действие на множестве натуральных или положительных рациональных чисел).

Графико-схематическая модель позволяет перейти к построению другой информационной (реляционной) модели – таблице. Целесообразно строить две реляционные модели, в первой – размещать информацию на языке задачи, во второй – ту же информацию представлять на алгебраическом языке.

С таблицами учащиеся работают, начиная с начальной школы; главная цель при этом – научить учащихся размещать и считывать информацию с таблицы. Кроме того, уже в начальной школе идёт пропедевтическая работа по использованию информации, размещённой в таблице, для составления числовых выражений.

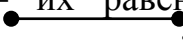
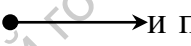
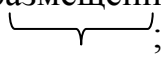
В 5-6 классах задачи, решаемые школьниками, усложняются. Наряду с арифметическим методом начинает использоваться алгебраический метод решения текстовых задач, подразумевающий адекватный выбор переменных условию и требованию задачи. Поэтому на данном этапе обучения целесообразно использовать табличную информационную модель задачи для осуществления такого выбора.

В 7 классе необходимость такой работы обуславливается возросшей степенью сложности решаемых задач, психолого-педагогическими предпосылками решения задач, расширением математического аппарата для осуществления такого решения и ещё рядом второстепенных причин. Поэтому, овладение учащимися умением строить адекватные задаче реляционные модели можно считать одной из основных целей обучения математике в 7 классе. Отметим, что этот этап обучения решению задач тесно связан с аналогичным методом представления информации, используемым в информатике. Таким

образом, работа учителей математики и информатики в этом направлении должна быть хорошо организованной, с учётом требования единообразия.

Мотивация обучения табличному моделированию обусловлена психолого-педагогической ценностью реляционных моделей: когда решающий не в состоянии изначально представить себе целиком план решения задачи, то информация, представленная в таблице позволяет ему наметить некоторые ключевые моменты плана, расчленив задачу на ряд элементарных и решить некоторые из них, осознать и сформулировать причины возникших затруднений и пр. В законченном (числовыми данными заполнены все ячейки) виде таблица дает возможность обобщения способов решения типовых задач, а также осознания некоторых эвристических приёмов деятельности.

Обратимся к объекту нашего исследования – задачам на движение. Таблица, являющаяся информационной моделью этого типа задач инвариантна по форме: состоит из четырёх столбцов. В первом содержится информация об объектах движения, во втором указывается скорость движения рассматриваемых объектов, в третьем – время движения, в четвёртом – пройденный путь (расстояние). Менять содержание столбцов местами в зависимости от того, какой элемент требуется найти, как это советуют некоторые учителя математики, с практической точки зрения нецелесообразно, а с методической точки зрения – неверно: нарушается требование посильности предлагаемых для выполнения заданий.

Сформулируем другие требования к составлению таблиц первого рода, то есть содержащих информацию на языке задачи: 1) количество строк зависит от количества участников движения и количества ситуаций; 2) при необходимости можно использовать сложные таблицы, содержащие объединённые ячейки и (или) «разбитые» ячейки; 3) если рядом стоящие ячейки столбца содержат одинаковую информацию, то они подлежат объединению, если эти ячейки разделены и не содержат явной числовой информации – их равенство обозначают соединяющим отрезком с точками на обоих концах ; 4) если ячейки столбца содержат информацию, связанную некоторым отношением, то существующую зависимость означают отрезком с точкой на одном конце (зависимое значение) и стрелкой на другом конце (независимое значение)  и подписывают условие зависимости, например, «? на 2 м б.» или «? в 2 раза м.»; 5) разность двух числовых значений, размещённых в смежных ячейках столбца обозначают дугой со стрелками на двух концах , сумму двух числовых значений, размещённых в смежных ячейках столбца обозначают фигурной скобкой ; 6) в ячейке содержится либо число, либо вопрос, либо вопрос и условие зависимости, главный вопрос (требование) задачи обводится в овал (?).

Требования к составлению таблиц второго рода, содержащих информацию на алгебраическом языке следующие: 1) форма таблицы второго рода полностью соответствует форме таблицы первого рода, поэтому способ решения задачи с использованием таблиц первого и второго рода назовём решением задачи с использованием таблицы наложений; 2) числовые величины переносятся из таблицы первого рода без каких либо изменений;

3) неизвестные величины записываются в виде арифметических действий или алгебраических выражений с переменной в соответствии с условиями зависимости и основной функциональной зависимостью ($s = v \cdot t$); 4) наличие и количество переменных определяется наличием или отсутствием условий зависимости; 5) если информация в ячейке получена двумя способами, то осуществляется разбиение ячейки по диагонали. На основе информации таких ячеек составляется уравнение; 6) знаки суммы и разности двух величин (двусторонняя стрелка и фигурная скобка) в таблице первого рода предполагают трансформацию соответствующих ячеек таблицы второго рода; 7) единицы измерений величин не указываются; 8) возможно в правом верхнем углу указать ограничения, накладываемые на неизвестные величины.

В процессе решения задач на движение важно целенаправленно работать над формированием и развитием у учащихся умения выбирать величину, которая будет неизвестной в уравнении, составленном по тексту задачи.

Решение задач с использованием таблицы наложений проиллюстрируем на конкретном примере: «Из пункта А выехал велосипедист. Одновременно из пункта В, отстоящем от А на расстоянии 20 км, выехал мотоциклист. Скорость велосипедиста 12 км/ч, мотоциклиста – 16 км/ч. На каком расстоянии от пункта А мотоциклист догонит велосипедиста?»

В задаче рассматриваются два объекта, что предполагает наличие трёх строк таблицы первого рода: «Характеристики движения» (участники/ситуации – скорость – время – расстояние), «Велосипедист», «Мотоциклист». Составляется таблица 3×4. Поскольку время в пути одинаково для двоих участников движения, то следует объединить соответствующие ячейки столбца «Время». Устно указывается функциональная зависимость. Затем в таблицу вносятся два числовых значения: скорости – 12 км/ч и 16 км/ч, то есть указываются, какие из выделенных величин известны, и расставляются знаки вопроса вместо всех остальных величин (указываются неизвестные величины). Далее определяется зависимость между неизвестными величинами, что дополняет таблицу соотношением между пройденными расстояниями. Можно выявить зависимость и между известными величинами, что дополнит таблицу соотношением между скоростями и определит ещё один способ решения задачи. Выделяется главное требование (вопрос) задачи. Этим заканчивается этап анализа условия задачи.

Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В			
М			

Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12 км/ч	?	?
М	16 км/ч		?

Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12 км/ч	?	(?)
М	16 км/ч		?

Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	12 км/ч	?	(?)
М	16 км/ч		?

Рис.1

Процесс составления таблицы первого рода проиллюстрирован на рисунке 1.

По содержанию таблицы первого рода составляется таблица второго рода (рисунок 2): одним из трех возможных способов выбирается одно из

неизвестных (обозначается буквой x), все остальные неизвестные величины выражаются через x (варианты таблиц – I-III). При этом возникает ситуация, когда информация в некоторой ячейке получена двумя способами (осуществляется разбиение ячейки по диагонали). Но основе информации разбитой по диагонали ячейки составляется уравнение. Кроме того, возможен арифметический способ решения (вариант IV).

I вариант			
	v	t	s
B	12	x	12x
M	16		12x+20
			16x

II вариант			
	v	t	s
B	12	x:12	x
M	16	(x+20):16	x+20

III вариант			
	v	t	s
B	12	(x-20):12	x-20
M	16	x:16	x

IV вариант (1 действие)				
	v		t	s
B	12	16-12	?	?
M	16			?
				20

IV вариант (2 действие)				
	v		t	s
B	12	4	20:4	?
M	16			?
				20

IV вариант (3 действие)				
	v		t	s
B	12	4	5	12 · 5
M	16			?
				20

Рис.2

Итак, по результатам составления реляционной модели задачи возможно составление соответствующей математической (разрешающей) модели данной задачи:

- 1) $12x+20=16x$, $x=5$, $12x=60$.
- 2) $x:12=(x+20):16$, $12(x+20)=16x$, $4x=240$, $x=60$.
- 3) $(x-20):12=x:16$, $12x=16(x-20)$, $4x=320$, $x=80$; $80-20=60$.
- 4) $16-12=4$ (км/ч) – скорость сближения; $20:4=5$ (ч) – понадобится, М. чтобы «покрыть» разницу в 20 км; $12 \cdot 5=60$ (км) – расстояние от А до встречи М. и В.

Кроме того, IV вариант реляционной модели задачи предусматривает алгебраическую разрешающую модель задачи – числовое выражение:

- 5) $12 \cdot (20:(16-12))=60$

На примере рассмотренной задачи можно сформулировать в явном виде и в дальнейшем исследовать проблему рациональности выбора неизвестных, для чего необходимо сравнение всех способов решения задачи (то есть информационных модели (схематическую и табличную), математической модели и тем решением, которое осуществляется в рамках составленной математической модели).

В рамках сформулированной проблемы учащиеся делают важный вывод: анализ содержания таблицы (информационной модели задачи) позволяет определить, какой способ решения задачи является наиболее рациональным.

Понятие «решающая математическая модель» было введено с целью показать, что эти модели создаются для решения (получения числового значения) конкретной сюжетной задачи. Составленная модель может

представлять собой как арифметическое выражение, так и уравнение (систему уравнений).

В условиях средней школы необходимо в первую очередь формировать у учащихся умение составлять уравнение. При этом следует обратить внимание учащихся на тот факт, что при выражении одной и той же величины двумя способами (в таблице – соответствующая ячейка разделена по диагонали) уравнивают выражения, описывающие эти способы. Если же уравниваются различные величины, то при составлении уравнения учитываются отношения между ними.

Наличие в таблице двух ячеек разделённых по диагонали говорит о том, что разрешающей моделью задачи будет система двух уравнений.

Решение в рамках составленной математической модели проходит в соответствии с основными положениями соответствующей математической теории.

Например, уравнения могут иметь вполне определенные решения (одно, два или более), иметь бесконечное множество решений или же и не иметь решений. В уравнениях первого вида корни могут быть положительными, равняться нулю и/или быть отрицательными. При этом необходимо помнить, что не всякое положительное число может быть решением задачи.

Неопределенность уравнения связана с недостаточностью условий для получения ограниченного числа корней. Алгебраические выражения, составленные по условию задачи, нередко приводят в таких случаях к тождеству, а не к уравнению. В отдельных случаях неопределенные решения задачи имеют смысл.

Для того чтобы привлечь внимание учащихся к этапу интерпретации результатов разрешающей модели задач, необходимы упражнения следующего содержания: проверьте на достоверность полученные результаты.

№	Данные условия, требование задачи	Полученный результат	Аргументация
1	В движении участвовали три автомобиля. Пройден путь в 1800 км...	Скорости машин равны: 2 км/ч, 120 км/ч, 620 км/ч	
2	За три часа человек прошёл 15,6 км..	Скорость человека равна 5 км/ч или $(-5,2)$ км/ч	
3	Улитка проползла два метра...	Время, затраченное на путь $1/3$ ч или (-3) ч	
4	В движении участвовали три автомобиля. Скорость одного на 20 км/ч больше скорости другого и на 10 км/ч меньше скорости третьего. Автомобили были в пути 4 часа...	Расстояние между первым и вторым автомобилем 40 км, между первым и третьим 600 км	

Пилипенко В.В., Лебедева С.В.
Информационные модели задач «на проценты»

Наиболее сложным типом задач школьники, абитуриенты и даже студенты считают задачи «на проценты», и это вполне понятно: формируемые с начальной школы умения выполнять действия над числами к двенадцати годам (моменту обучения решению задач на проценты) принимают характер обобщенного умения, автоматизируются и обращаются в навык. Эти навыки «переносятся» учениками и на действия с процентами, которые являются не числами, а отношениями.

Преодолеть психологические барьеры, связанные с восприятием задач «на проценты», пытаются многие учителя и методисты. Зачастую, эти попытки венчаются разработкой очередной «математической» или дидактической теории.

Так, в 2004 году в газете «Математика» была опубликована серия статей [1, с.22-24], [2, с.29-32], [3, с.28-32], автор которых М.Кац (г.Тверь) предлагает помимо использования трех традиционных для школьного курса основных действий над процентами: (1) нахождения процента от целого, (2) нахождение целого по части, выраженной в процентах, (3) нахождение отношения чисел, выраженного в процентах, – формулы к решению некоторых типов задач. Представим его теорию в структурированном виде – таблица 1.

Таблица 1			
№	Задача		Знаковая математическая модель
	В общем виде	Пример	
1	Увеличим/уменьшим a на p %, что получится?	Задача 1. Сбербанк перечисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Сколько будет на счету вкладчика, внесшего сумму в 60000 рублей через год? Решение $60000 + 60000 \cdot 3/100 = 61800$. Ответ. 61800 рублей.	$y = a \pm a \cdot \frac{p}{100}$ $y = a \left(1 \pm \frac{p}{100} \right)$ $y = a(1 \pm 0,01p)$
2	Увеличим число a на p %, а затем полученное число уменьшим на p %, что получится?	Задача 2. Цену товара снизили на 30 %, а затем новую цену повысили на 30 %. Как изменилась цена товара? Решение	$y = a \left(1 - \frac{p^2}{100^2} \right)$

	Уменьшим число a на $p\%$, а затем полученное число увеличим на $p\%$, что получится?	1) a – первоначальная цена $a \left(1 - \frac{30^2}{100^2} \right) = a(1 - 0,09) = 0,91a$ 2) $a - 0,91a = 0,09a$ 3) $0,09 = 9\%$ Ответ. Цена снизилась на 9 %	
3	Увеличим число a на $p\%$. На сколько процентов надо уменьшить получившееся число, чтобы вновь получить a ?	Задача 3. Цена товара была повышена на 12%. На сколько процентов надо снизить новую цену, чтобы получить первоначальную? Решение. $\frac{100 \cdot 12}{100 + 12} = 10 \frac{5}{7}$ Ответ. На $10 \frac{5}{7} \%$	$y = \frac{100 \cdot p}{100 + p}$
4	Задачи «на движение» и «на работу» – задачи на обратную пропорциональную зависимость. При $S = \text{const}$, $vt = \text{const}$, при $A = \text{const}$, $Nt = \text{const}$, где A – работа, N – мощность (производительность), t – время, v – скорость.	Задача 4. На сколько процентов снизилась производительность труда, если для выполнения плана пришлось увеличить рабочий день с 7 ч до 8 ч? Решение. $7N = 8 \left(N - N \cdot \frac{p}{100} \right), \quad p = 12,5$ Ответ. На 12,5 %	1) Определить постоянную величину; 2) составить пропорцию, используя формулу к задаче 1 из данной таблицы; 3) найти неизвестный член пропорции.
5	$A\%$ числа x и $b\%$ числа y составляют $c\%$ от суммы данных чисел. Каковы x и y ?	Задача 5. На первом поле 65% площади засеяно овсом. На втором поле овсом занято 45% площади. Известно, что на первом и втором полях вместе под овсом занято 53% общей площади. Какую часть всей засеянной площади составляет первое поле? Решение. Пусть x – площадь первого поля, y – площадь второго поля. По условию, $0,65x + 0,45y = 0,53(x + y)$; откуда $y = \frac{3x}{2}$. Найдёт требуемое отношение: $\frac{x}{x + y} = \frac{x}{x + \frac{3x}{2}} = \frac{2}{5}$ Ответ. 2/5.	$ax + by = c(x + y)$

6	Число A_0 через определенный (единичный) промежуток времени возрастает/убывает на p %. Какое число получим через n единичных промежутков времени?	Задача 6. После двух последовательных снижений объема производства выпуск продукции сократился в два раза. Определить процент сокращения производства. Решение. Из условия следует, что $A_n : A_0 = 1:2$ и $n = 2$. $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{1}{2}.$ Так как сокращение продукции не может быть больше 100%, то $1 - \frac{p}{100} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p = 50(2 - \sqrt{2}) \approx 30$ Ответ. Производство сократилось на 30 %	$A_n = A_0 \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$
7	Задачи на обратную пропорциональную зависимость. При $m_A = \text{const}$, $mn = \text{const}$, где n_A – концентрация вещества, m_A – масса вещества в смеси, m – масса смеси.	Задача 7. Морская вода содержит 5 % соли по массе. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%? Решение. Пусть x – масса воды. Тогда $2 \cdot x = 5 \cdot 40$; откуда $x = 100$. $100 - 40 = 60$. Ответ. 60 кг	$m_1 \cdot n_1 = m_2 \cdot n_2$ или $(m_2 - m_1) \cdot n_2 = m_1 \cdot (n_1 - n_2)$
8	Задачи на прямую пропорциональность	Задача 8. Сплав меди с серебром содержит серебра на 1845 г больше, чем меди. Если к нему добавить некоторое количество чистого серебра, первоначально содержащегося в сплаве, то получится новый сплав, содержащий 83,5% серебра. Какова масса сплава? Решение. Обозначим x (г) – масса меди, $(x + 1845)$ (г) – масса серебра, $\frac{4}{3}(x + 1845)$ (г) – масса серебра после добавки, $(2x + 1845)$ (г) – масса сплава $\frac{\frac{x}{3} + 2460}{67} = \frac{x}{16,5},$ $x = 660, \quad 2x + 1845 = 3165.$ Ответ. 3165 г.	$\frac{m_2}{m_1} = \frac{m_{A_2}}{m_{A_1}}$ или $\frac{m_2 - m_1}{m_{A_2} - m_{A_1}} = \frac{m_{A_2}}{m_{A_1}}$ и др.

9	От двух кусков сплава с различной концентрацией вещества и с массами a и b отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего концентрация вещества в обоих сплавах стала одинаковой. Какова масса каждого из отрезанных кусков?	Задача 9. От двух кусков сплава с массами 3 кг и 2 кг и с концентрацией меди 0,6 и 0,8 отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего концентрация меди в обоих сплавах стала одинаковой. Какова масса каждого из отрезанных кусков? Решение. $x = \frac{3 \cdot 2}{3 + 2} = 1,2$ Ответ. 1,2 кг	$x = \frac{a \cdot b}{a + b}$
10	Задачи «на отношения»	Задача 10. Имеются два сплава золота и серебра, в одном массы этих металлов находятся в отношении 2 : 3, в другом – в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5 : 11? Решение. В новом сплаве должно быть $5 \cdot 8 : 16 = 2,5$ кг золота и $11 \cdot 8 : 16 = 5,5$ кг серебра. Пусть от первого сплава взяли $\frac{2}{5}x$ кг золота, а из второго $\frac{3}{10}(8 - x)$ кг. Тогда $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x) = 2,5$, то есть $x = 7$. Проверим правильность решения «через серебро»: $\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}(8 - x) = 5,5$, то есть $x = 7$. Ответ. 1 кг, 7 кг.	Алгоритм не даётся

М. Кац предлагает 10 типов задач, несколько методов, около десятка способов и 11 наиболее важных формул для решения (всего формул более 20).

Выводы формул предлагаются, но в конечном итоге формулы придется заучивать (что равносильно заучиванию тригонометрических тождеств, от которого начинают отказываться в общеобразовательной школе). Можно ли назвать такой подход к решению задач современным? Не обращает ли это нас к средневековым методам обучения решению задач, в основе которого лежит способ передачи математических знаний из поколения в поколение в виде списка задач практического содержания вместе с их решениями (одновременно с этим и обучение математике велось по образцам: ученики, подражая учителю, решали задачи на определенное «правило»)? И к чему этот метод, в конечном счете, приведет?

Ранее нами в статье «Информационные модели сюжетных задач» [4, с.58-63] был описан метод информационного табличного моделирования,

позволяющий с успехом решать задачи VII и VIII типов по типологии М.Каца, которые мы называем задачами на изменение состава вещества, выраженное в процентах. Адекватные информационные модели таких задач – таблицы 2 и 3.

Информационная табличная модель задача VII типа (по М. Кацу)			
В Е Щ Е С Т В О			
СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	ИСХОДНОЕ СОСТОЯНИЕ		КОНЕЧНОЕ СОСТОЯНИЕ
	в %	масса	в %
неизменный компонент			
жидкость/вода			
ВСЕГО	100%	<i>m</i>	100%

Информационная табличная модель задача VIII типа (по М. Кацу)					
СОСТАВ ВЕЩЕСТВ А	I		II		I + II
	в %	масса I	в %	масса II	в % масса (I + II)
основное вещество (концентрац ия)					
вода					
ВСЕГО	100%		100%		100%

Напомним основные преимущества и принципы построения таблицы:

1. Информация в таблице предельно систематизирована. В закрашенной ячейке содержится основное требование (главный вопрос) задачи. (Данные условия задачи отмечены жирным шрифтом).
2. Таблица задаёт программу решения задачи, то есть является ориентировочной основой деятельности по решению задачи.
3. Исходная (базовая) форма модели имеет вид таблиц 2 и 3. Объединение ячеек «масса вещества в исходном состоянии» и «масса вещества в конечном состоянии» позволяет сократить количество шагов при решении задачи (становится ненужной операция переноса информации из одной ячейки в другую).

+	
=	

⇒

4. Двойная черта отделяет сумму (фиксируемую в последней строке таблицы) от компонентов сложения. По сути, столбцы таблицы представляют собой вертикальную таблицу «сложения» – первую изученную учащимися (ещё в начальной школе) информационную модель сюжетной задачи.

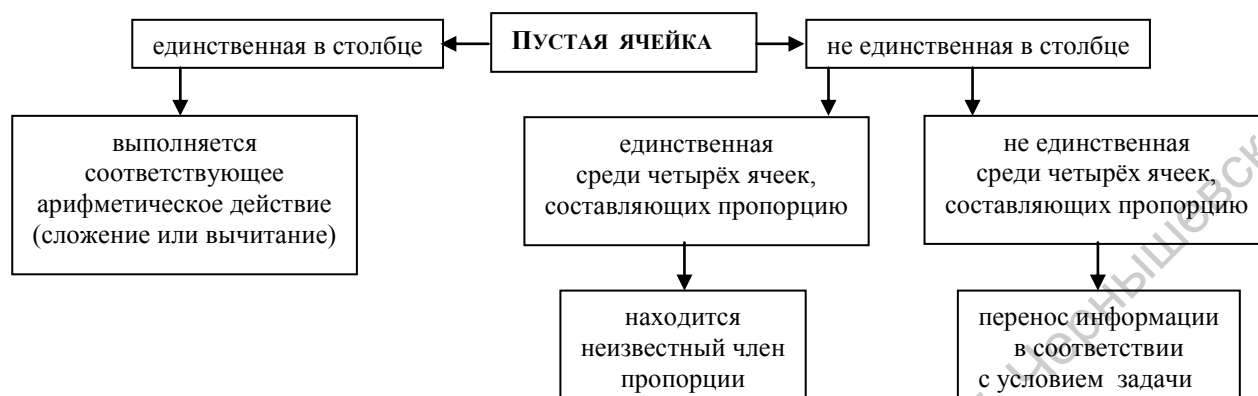
5. Каждое состояние (исходное и конечное) описывается тремя пропорциями (компоненты которой выделены в таблицах I-III цветом).

I.

II.

III.

6. Появляется возможность устных вычислений с последующим занесением результатов в пустые ячейки.
7. Процесс заполнения пустых ячеек (с числовым значением) предельно прост и задаётся следующей схемой.



8. Возможны производные формы таблиц 2 и 3.
9. Таблица помогает предельно легко перейти от наглядно-образной модели (и устного решения задачи) к модели алгебраической (и решению уравнения).
10. Таблица позволяет формулировать дополнительные требования задачи, ориентируясь на наличие незаполненных ячеек после выполнения основного требования задачи.

Применим разрабатываемый метод информационного табличного моделирования к решению всех задач из таблицы 33.

Таблица 4 Информационная табличная модель задачи 1 (I тип по М. Кацу)		
ПРОЦЕСС ИЗМЕНЕНИЯ	СУММА ВКЛАДА	
	руб.	%
Было	60000	100%
↑		3%
Стало	²⁾ $60000 \cdot 103 : 100 = 61800$	¹⁾ 103%

в первом столбце таблицы; (2) стрелкой ↑ описан характер изменения, в данном случае – «увеличение вклада».

Таблица 5 Информационная табличная модель задачи 2 (II тип по М. Кацу)						
ЦЕНА ТОВАРА						
	%	руб.		руб.	%	
↓	30%	³⁾ 0,3	↗	⁵⁾ 0,7	100%	Было
Стало		⁴⁾ 0,7			30%	↑
Было	100%	²⁾ 1	↖	⁶⁾ 0,91	¹⁾ 130%	Стало
⁷⁾ $1 - 0,91 = 0,09 = 9\%$						

требования, которые мы предъявляем к составлению таблиц подобного рода: (1) появляется «пустой» столбец-разделитель, позволяющий лучше воспринимать информацию; (2) изменение величины отражено в первом и последнем столбцах таблицы; (3) вводится дополнительная строка для записи

требования задачи, связанного со сравнением величин; (4) используется круглая скобка для описания требования задачи: «как изменилась цена товара?»

Таблица 6 Информационная табличная модель задачи 3 (III тип по М. Кацу)					
ЦЕНА ТОВАРА					
	%	руб.		руб.	%
Было	100%	²⁾ 1		⁷⁾ 0,12	⁸⁾ $10^{5/7}$
↑	12%	³⁾ 0,12		⁶⁾ 1	Стало
Стало	¹⁾ 112%	⁴⁾ 1,12		⁵⁾ 1,12	100%

Задачи IV типа (по типологии М. Каца) решаются с использованием информационных моделей, описанных в статье «Задачи на движение в школьном курсе математики» [5, с.48-57]. Выделим два

принципиально различных класса задач данного типа. К первому классу отнесём задачи, в которых данные условия, связанные с изменением величин, выражены в процентах. Ко второму классу отнесём задачи с требованием нахождения процентного соотношения величин.

В ходе решения задач первого класса IV типа (обозначим их «задачи IV-1») составляются три таблицы: первая – информационная модель на языке задачи, в которой данные условия, связанные с изменением величин, выражены в процентах; вторая – информационная модель на языке задачи, в которой данные условия, связанные с изменением величин, выражаются в числах; третья – информационная математическая модель задачи.

Проиллюстрируем на примере следующей задачи.

Задача 11. Гонщик-мотоциклист подсчитал, что при увеличении скорости на 10% он пройдёт круг по кольцевой дороге за 15 мин. За какое время прошёл бы гонщик круг при первоначальной скорости?

Таблица 7 Информационная табличная модель задачи 11 (IV-1 тип по М. Кацу)			
	v (круг/мин)	t (мин)	S (круг)
I	? ←	(?)	1
II	? на 10% ↓	15 мин	
I	? ←	?	1
II	в 1,1 раз ↓	15 мин	
I	$1/x$	x	1
II	$1,1/x$	15	

$$1,1/x = 1/15,$$

$$x = 11 \cdot 15 : 10,$$

$$x = 16,5.$$

Ответ. 16,5 мин.

В ходе решения задач второго класса IV типа (обозначим «задачи IV-2») составляются две принципиально разные табличные модели: первая – информационная модель задачи на функциональную зависимость вида $a \cdot b = c$ (обобщение задач «на движение»); вторая – информационная модель задач «на проценты». Кроме того, первая модель содержит основную (на языке задачи) и переходную модели. Переходная информационная модель позволяет перейти к величинам одного вида (заштрихованные ячейки одного из столбцов таблицы), например, к скорости или времени путём исключения остальных величин.

Проиллюстрируем возможности информационного моделирования на примере решения следующей задачи.

Задача 12. Гонщик-мотоциклист подсчитал, что при увеличении скорости на 10% он пройдёт круг по кольцевой дороге за 15 мин. На сколько процентов он должен увеличить скорость, чтобы пройти круг за 12 мин?

Таблица 8а			
Информационная табличная модель задачи 12 (IV-2 тип по М. Кацу)			
	v (круг/мин)	t (мин)	S (круг)
I	?	?	1
II	? на 10% $\underline{b}$	15 мин	
III	на % $\underline{b}$	12 мин	
I	?	?	1
II	на 10% $\underline{b}$	15 мин	
III	на % $\underline{b}$	12 мин	

Таблица 8б				
Информационная табличная модель задачи 12 (второй класс 4 типа по М. Кацу)				
ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ				
	%	круг/мин	%	
Было	100%	²⁾ $\frac{2}{33}$	100%	Было
↑	10%	³⁾ $\frac{1}{44}$	⁴⁾ 37,5%	↑
Стало	¹⁾ 110%	1/15 1/12		Стало

Согласно положениям, описанным в статье [5], строим таблицу 8а – её основную часть. Выделяем требование задачи вопросом и определяем тип задачи – задача на движение с требованием нахождения процентного соотношения величин (скоростей). Штрихуем ячейку, описывающую искомую величину – « v (круг/мин)». Приступаем к построению переходной табличной модели: выражаем скорость через пройденный путь и время; результаты заносим в соответствующие (заштрихованные) ячейки таблицы, каждую из

которых мы предварительно разбиваем на две.

Построенная модель позволила перейти к более простой эквивалентной данной задаче: Гонщик-мотоциклист подсчитал, что при увеличении скорости на 10% она станет равной $1/15$ круга/мин. На сколько процентов гонщик должен увеличить скорость, чтобы она стала равной $1/12$ круга/мин? Теперь это – задача на изменение величины, выраженное в процентах. Её информационная модель представлена таблицей 8б.

Задачи такого типа М. Кац не рассматривает, поэтому сформулируем задачу в общем виде и дадим её знаковую математическую модель (формулу).

Увеличив (уменьшив) некоторое число на p % получили число a . На сколько процентов надо увеличить (уменьшить) первоначальное число, чтобы получить другое наперёд заданное число b ?

$$\text{Решение: } \tilde{O} = \left(\frac{b}{a \cdot \frac{100}{100 \pm p}} \mp 1 \right) \cdot 100\%.$$

Пополнив, таким образом, коллекцию М. Каца, продолжим построение информационных табличных моделей задач 4-10 из таблицы 33.

Таблица 9а	
Информационная табличная модель задачи 4 (IV-2 тип по М.Кацу)	

		IV	t (ч)	A
I	?	на % M	7 ч	1
II	?		8 ч	
II	?	1/7	7 ч	1
III	?	1/8	8 ч	

Вернёмся к задаче 4 и решим её, построив информационные табличные модели, сначала основную и переходную (для задач на

функциональную зависимость вида $a \cdot b = c$) – таблица 9а, а затем – модель задач «на проценты» – таблица 9б.

Таблица 9б – описывает задачи первого типа по М.Кацу, а также обратные к ним, например, в нашем случае, это задача: *На сколько процентов число a больше (меньше) числа b?* Или, что то же самое: *Некоторое число a уменьшили (увеличили) и получили число b. На сколько процентов уменьшили (увеличили) число a?*

Перейдём к задаче 5 (V тип по М.Кацу). Её информационная модель описывается такой же таблицей, как и задачи VIII типа. Используя заготовку (таблицу 3) построим информационную модель задачи 5, не забывая отвести дополнительную строку для фиксации требования задачи.

Таблица 10						
Информационная табличная модель задачи 5						
(V тип по М.Кацу)						
ПОСЕВЫ ОВСА						
	I		II		I + II	
	%	га	%	га	%	га
Засеяно	65%	¹⁾ 0,65x	45%	²⁾ 0,45y	53%	³⁾ 0,65x+0,45y ⁴⁾ 0,53(x+y)
Не засеяно	–	–	–	–	–	–
Всего	100%	x	100%	y	100%	x+y
$\frac{x}{x+y} = ?$						

$$0,65x + 0,45y = 0,53(x + y)$$

$$65x + 45y = 53(x + y);$$

$$12x = 8y;$$

$$3x = 2y$$

$$\frac{x}{x+y} = \frac{3x}{3(x+y)} = \frac{2y}{2y+3y} = \frac{2}{5}.$$

Ответ. $\frac{2}{5}$ часть.

Разрешающей (знаковой математической) моделью пятой задачи стало линейное уравнение с двумя переменными, позволяющее выполнить требование задачи, то есть определить нужное отношение.

Без подробных комментариев, используя информационное табличное моделирование (форма таблицы 2), решим задачи 6 и 7.

Задача 6. После двух последовательных снижений объема производства выпуск продукции сократился в два раза. Определить процент сокращения производства.

Информационная табличная модель задачи 6 (VI тип по М.Кацу)					
ОБЪЕМ ПРОИЗВОДСТВА					
	%	объем		объем	%
↓	3) x	5) $x/100$,		8) $\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot x$	4) x
↓				9) $\left(1 - \frac{x}{100}\right) - \frac{1}{2}$	↓
Стало		6) $1 - x/100$		? в 2 р м	Стало
Было	100%	1) 1		7) $1 - x/100$	100%

При условии $x/100 < 1$:

$$\frac{\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot x}{100} = \left(1 - \frac{x}{100}\right) - \frac{1}{2};$$

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = \frac{1}{2};$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = 50 \cdot (2 - \sqrt{2});$$

$$x \approx 30.$$

Ответ. На 30%

Задача 7. Морская вода содержит 5 % соли по массе. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%?

Информационная табличная модель задачи 7 (VII тип по М.Кацу)				
СОСТАВ МОРСКОЙ ВОДЫ				
СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	ИСХОДНОЕ СОСТОЯНИЕ		КОНЕЧНОЕ СОСТОЯНИЕ	
	в %	масса (кг)	в %	
неизменный компонент – соль	5%	1) 2	2%	
жидкость/вода				
ВСЕГО	100%	40	2) 100	100%
		3) 60		

Решение восьмой задачи поначалу было сопряжено с рядом трудностей: информационное моделирование (форма таблиц 2 и 3) никак не приводило к тем знаковым математическим моделям (уравнениям), которые были предложены М. Кацем.

Анализ информации, закодированной в табличной модели (таблицы 11 и 12), позволил сделать вывод: восьмая задача не определена.

К выводу привели:

(1) отсутствие взаимосвязей (отсутствие стрелок в табличной модели) между исходным и конечным состоянием вещества, а также адекватная табличной (таблица 11) знаковая математическая модель, представляющая собой не уравнение, а тождество: $2x + 1845 = 2x + 1845$;

(2) отсутствие взаимосвязей (отсутствие стрелок в табличной модели) между массами I, II и I+II веществ, а также адекватная табличной (таблица 12)

знаковая математическая модель, представляющая собой систему линейно

зависимых уравнений

$$\begin{cases} x + 1845 + y = \frac{167}{33}x \\ 2x + 1845 + y = \frac{200}{33}x \end{cases}$$

Информационная табличная модель задачи 8 (VIII тип по М. Кацу)				Таблица 11
СОСТАВ МОРСКОЙ ВОДЫ				
СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	ИСХОДНОЕ СОСТОЯНИЕ		КОНЕЧНОЕ СОСТОЯНИЕ	
	в %	масса (кг)	в %	
неизменный компонент – медь		1) x	4) 16,5%	
серебро	$\frac{x + 1845}{2x + 1845} \cdot 100\%$	2) $x + 1845$	5) $\frac{167x}{33}$	83,5%
ВСЕГО	100%	3) $2x + 1845$ 7) $2x + 1845$	6) $\frac{200 \cdot x}{33}$	100%

Информационная табличная модель задачи 8 (VIII тип по М.Кацу)						Таблица 12
СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	I		II		I + II	
	%	масса I	%	масса II	%	масса (I + II)
серебро		? на 1845 г 2) $x + 1845$	100%	4) y	83,5%	8) $\frac{167 \cdot x}{33}$ 12) $x + 1845 + y$
медь		1) x		0	9) 16,5%	7) x
ВСЕГО	100%	3) $2x + 1845$	100%	5) y	100%	10) $\frac{200 \cdot x}{33}$ 11) $2x + 1845 + y$

Таким образом обнаруживается ещё одно полезное качество информационных табличных моделей: благодаря им, можно выявить, имеет ли задача решение, или же данных для решения (как в случае задачи 8) недостаточно.

Проанализируем метод решения девятой задачи.

Задача 9. От двух кусков сплава с массами 3 кг и 2 кг и с концентрацией меди 0,6 и 0,8 отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего концентрация меди в обоих сплавах стала одинаковой. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

М.Кац предлагает решить её по формуле $x = \frac{a \cdot b}{a + b}$. Но при использовании формулы остаются неустраиваемыми некоторые данные условия задачи, что не совсем понятно: теряется общность, присущая решению любой задачи – учитывать все данные условия. Поэтому, либо перед использованием формулы её необходимо предварительно вывести (для чего нужно решить задачу в общем виде), либо вообще отказаться от подобного метода решения.

Табличная информационная модель девятой задачи представлена в таблице 13. Принцип её построения очевиден. Общность, присущая

табличному информационному моделированию задач на проценты, сохраняется.

Информационная табличная модель задачи 9 (IX тип по М.Кацу)					
		I		II	
Было		%	масса	масса	%
	Медь	60%	²⁾ 1,8 кг	³⁾ 1,6 кг	80%
	Примеси				
	Всего	100%	3 кг	2 кг	100%
Отрезали (-) и сплавили (+)	Медь	60%	⁷⁾ 0,8x ⁴⁾ -0,6x ⁵⁾ +0,6x ⁶⁾ -0,8x		80%
	Примеси				
	Всего	100%	¹⁾ x		
Стало	Медь	¹⁰⁾ $\frac{100}{3}(1,8 + 0,2x)$	⁸⁾ $1,8x + 0,8x - 0,6x$	⁹⁾ $1,6 + 0,6x - 0,8x$	¹¹⁾ $\frac{100}{2}(1,6 - 0,2x)$
	Примеси				
	всего	100%	3 кг	2 кг	100%

$$^{12)} \frac{100}{3}(1,8 + 0,2x) = \frac{100}{2}(1,6 - 0,2x), \text{ откуда } x = 1,2.$$

Ответ. 1,2 кг.

Задачи десятого типа мы относим к классу задач на изменение вещества, выраженное в числах.

Задача 10. Имеются два сплава золота и серебра, в одном массы этих металлов находятся в отношении 2 : 3, в другом – в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5 : 11?

Рассмотрим задачи десятого типа с точки зрения информационного моделирования. Несмотря на то, что изменение вещества выражено здесь не в процентах, а в числах, задача решается с использованием таблицы 3.

Построим табличную информационную модель этой задачи – таблица 14. Отсутствие взаимосвязей (отсутствие стрелок) между массами I, II и I+II веществ предполагает необходимость введения двух переменных x и y .

В результате информационного моделирования мы получаем три уравнения с двумя переменными:

$$(1) \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = 2,5,$$

$$(2) \frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y = 5,5 \text{ и}$$

$$(3) x + y = 8.$$

Эти уравнения линейно независимы, следовательно, любые два из них можно включить в систему уравнений (знаковая математическая модель задачи), а оставшееся использовать в качестве условия для проверки решения.

Таблица 14

Информационная табличная модель задачи 10 (X тип по М.Кацу)

Состав	I		II		I + II	
	отношение (части)	масса I	отношение (части)	масса II	отношение (части)	масса (I+ II)
Золото	2	6) $\frac{2}{5}x$	3	8) $\frac{3}{10}y$	5	10) 2,5 кг 11) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y$
Серебро	3	7) $\frac{3}{5}x$	7	9) $\frac{7}{10}y$	11	12) 5,5 кг 13) $\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y$
Всего	1) 5	4) x	2) 10	5) y	3) 16	14) x+y 8 кг

$$15) \begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = 2,5; \\ x + y = 8 \end{cases}; \begin{cases} \frac{4}{10}(8-y) + \frac{3}{10}y = \frac{25}{10}; \\ x = 8 - y \end{cases}; \begin{cases} 32 - 4y + 3y = 25; \\ x = 8 - y \end{cases}; \begin{cases} y = 7; \\ x = 1 \end{cases}$$

Проверка. Если $x=1$, $y=7$, то условие (2): $\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y = 5,5$ – выполняется:

$$\frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{7}{10} \cdot 7 = \frac{6 + 49}{10} = 5,5$$

Ответ. 1 кг первого сплава и 7 кг второго сплава.

Проанализировав все типы задач, предложенные М. Кацем, выделяем один, который, казалось, невозможно решить, не используя одну из рекомендованных к запоминанию формул (формулу сложных процентов).

Рассмотрим решение следующей задачи (6 тип задач – задачи на «сложные проценты»).

Задача 13. Сбербанк перечисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Через сколько лет внесенная сумма удвоится? [2, с.31]

Вербальная модель задачи (то есть её текст), казалось бы, предполагает выбор знаковой математической модели – формулы сложных процентов – для нахождения неизвестной величины n – число лет хранения денег в сберкассе: $A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

В нашем случае, $A_n = 2A_0$, $p=3$. Используя формулу, получаем $2A_0 \leq A_0(1+0,03)^n$; после преобразований: $2 \leq 1,03^n$, $n = \min$.

Возникает вопрос: как вычислить n ?

Всегда ли под рукой будет таблица логарифмов? Если ее нет в наличии, придется умножением 1,03 на себя n -е количество раз «приближаться» к 2, что соответствует заполнению таблицы значений:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$1,03^n$	1,03	1,06	1,09	1,13	1,16	1,19	1,23	1,27	1,30	1,34	1,38	1,42

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$1,03^n$	1,47	1,51	1,56	1,6	1,65	1,7	1,75	1,81	1,86	1,92	1,97	2,03

С другой стороны информационное табличное моделирование сразу же обращает нас к интересующей таблице – таблица 15.

Таблица 15

Год хранения вклада	Сумма вклада	Процентная ставка	ИТОГО приближённые значения, округлённые до сотых	
		$(100\% + 3\% = 103\%$ $103\% = 1,03$)		
1	<i>a</i>	1,03	1,03 <i>a</i>	2
2	1,03 ←	1,03	1,06 <i>a</i>	
3	1,06 <i>a</i> ←	1,03	1,09 <i>a</i>	
4	1,09 <i>a</i> ←	1,03	1,13 <i>a</i>	
5	1,13 <i>a</i> ←	1,03	1,16 <i>a</i>	
	1,16 <i>a</i> ←			
			1,92	
23	1,92 ←	1,03	1,97 <i>a</i>	
24	1,97 ←	1,03	2,03 <i>a</i>	

Исследование разнообразных задач «на изменение величин» и методов и способов их решения, позволяет сделать вывод об универсальности информационного подхода к решению задач в целом и табличного моделирования в частности.

Можно рассмотреть информационный подход к решению задач с ещё одной точки зрения – моделирования в среде электронных таблиц. В этом случае наши информационные табличные модели являются прообразами компьютерных электронных табличных моделей.

Литература

1. Кац, М. Проценты / М. Кац // Математика, 2004, №20.
2. Кац, М. Проценты / М. Кац // Математика, 2004, №22.
3. Кац, М. Проценты / М. Кац // Математика, 2004, №23.
4. Лебедева, С.В., Пилипенко, В.В. Информационные модели сюжетных задач / С.В.Лебедева, В.В.Пилипенко // Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научно-методических трудов: Выпуск 5 / Составители С.В. Лебедева, Т.А. Капитонова – Саратов: ИЦ «Наука», 2007.
5. Лебедева, С.В., Харькова, С.С. Задачи на движение в школьном курсе математики / С.В.Лебедева, С.С.Харькова // Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научно-методических трудов: Выпуск 5 / Составители С.В. Лебедева, Т.А. Капитонова – Саратов: ИЦ «Наука», 2007.

Зубарева И.И.

Ещё раз о процентах

Немало написано статей в периодических изданиях, посвященных тому, как легко и быстро научить решать задачи на проценты, есть и целые книги, посвященные этой теме, но не знает и не понимает наш народ процентов, и доказательств тому немало.

Первый пример. Некая фирма заключает так называемый агентский договор на поставку оборудования. В договоре четко сказано, что сумма, которую должен уплатить покупатель, состоит из двух слагаемых: стоимости оборудования, определяемой производителем, и агентского вознаграждения, размер которого составляет 1% стоимости оборудования. Спецификация, в которой дается перечень оборудования, его цена, стоимость и размер агентского вознаграждения, выглядит примерно следующим образом:

№	Наименование оборудования	Кол-во	Цена	Стоимость
1	Наименование №1	2	45	90
2	Наименование №2	3	89	267
3	Наименование №3	1	34	34
	Итого:			391
	В т.ч. агентское вознаграждение (1%)			3,91

Пристальное изучение спецификации позволяет, во-первых, сделать вывод о непонимании ее разработчиком того, что, если агентское вознаграждение «в том числе», то делить общую сумму надо не на 100, а на 101, а, во-вторых, возникают подозрения по поводу честности агента. Самое печальное, что подписал этот договор выпускник мехмата МГУ, который к тому же не сразу согласился с тем, что допущена ошибка (видимо отстаивал честь мундира).

Второй пример. Однажды я оказалась на лекции по налогообложению, которая читалась слушателям бухгалтерских курсов, проводившимся на базе МВТУ им. Н.Э. Баумана. Замечу, что тогда размер НДС (налог на добавленную стоимость) составлял 20%. При выполнении бухгалтерских операций часто приходится выполнять обратную задачу: определить размер НДС, зная цену товара, в которую этот налог уже включен. Например, если продан товар на сумму 20 000 рублей, то надо определить размер НДС, который должен быть перечислен государству. Математик решит эту задачу, например, составив пропорцию:

$$\begin{array}{l}
 20\,000 - 120\% \\
 x - 20\%, \text{ откуда} \\
 \frac{20\,000 \cdot 20}{120} \\
 x = \frac{20\,000 \cdot 20}{120} = 3333,3.
 \end{array}$$

Или, еще проще, разделит 20 000 на 6.

Лектор своим слушателям говорит буквально следующее: «Чтобы выделить НДС, надо общую сумму умножить на 16,67% или на 0,1667. Почему так, пусть вас не волнует – это чистая математика». И никаких попыток объяснить, откуда это берется! Видимо отчаялся...

А сколько было проблем у бухгалтеров Москвы, когда был введен налог с продажи! Ведь эти 4% накручивались на стоимость товара с НДС, и раскрутить эту цепочку в обратную сторону, оказалось, по силам далеко не всем.

Третий пример. Серьезный журналист берет интервью у серьезного политика, который рассказывает об ужасающем взяточничестве среди чиновников: представьте, что размер «отката» в среднем составляет 20%. Журналист с заинтересованным видом спрашивает: это в долларах или в рублях?

И, наконец, реклама. Как вам такая фраза: «Наше пиво подешевело на 20% – теперь 0,6 по цене 0,5!»? А в чем смысл предложения: «Кожа становится более гладкой до 51%»? Неужели мы скоро вообще перестанем говорить по-русски?

На самом деле перечень нелепостей можно продолжить. Недавно купила блузку, на ярлыке которой было указано: полиэстер 101%...

Понятно, что в этой статье мне хочется не только поднять существующие проблемы, но и рассказать о том, как в наших учебниках⁷ мы предлагаем изучать проценты, как в них разворачивается соответствующая линия задач.

Изучение этой темы начинается в 5 классе. Прежде всего, заметим, что умение решать задачи на проценты тесно связано с умением решать задачи на отыскание части от целого и целого по его части. И в тех, и в других задачах, анализируя условие, прежде всего, следует определить, какая величина принята за целое (в задачах на проценты – за 100%). Далее следует выяснить, известна ли эта величина. После этого уже нетрудно определить, какая величина приходится на одну долю, и выполнить действия, необходимые для ответа на вопрос задачи.

Поэтому, и в 5, и в 6 классе, перед набором задач, в которых надо найти часть от целого или целое по его части, мы даем учащимся такое указание: «Прежде чем приступить к решению задачи, ответьте на вопросы:

- какая величина принята за целое;
- известна ли эта величина;
- как найти величину, которая приходится на одну долю (только в 5 классе);
- что требуется найти – часть от целого или целое по его части?»

Соответственно, перед задачами на проценты дается аналогичное указание: «Прежде чем приступить к решению задачи, ответьте на вопросы:

- какая величина принята за 100%;
- известна ли эта величина;
- как найти величину, которая приходится на 1% (только в 5 классе и до изучения темы «Нахождение части от целого и целого по его части», §21 учебника 6 класса);
- что требуется найти – процент от числа или число по его проценту?»

⁷ И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович «Математика, 5», «Математика, 6», учебники для общеобразовательных учреждений.

При этом важно, чтобы учащиеся, в случае, если величина, которая принята за 100%, известна, при ответе на первый вопрос называли не числовое ее значение, а описывали бы ее словесно, например: не «50 га», а «площадь всего поля», не «230 км», а «длина всего пути».

Заметим, что в 5 классе мы рассматриваем задачи на проценты только двух типов: отыскание процента от числа и отыскание числа по его проценту. Задачи на процентное отношение рассматриваются только после изучения пропорций – в 6 классе. Это обусловлено многолетними наблюдениями за усвоением темы «Проценты» учащимися 5 классов, обучавшимися по учебникам Н.Я. Виленкина и др. Опыт показывает, что, если задачи первых двух типов учащиеся в той или иной мере решают, то задачи третьего типа для абсолютного большинства из них недоступны. Сталкиваясь с задачами третьего типа, пятиклассники, как правило, обращаются за помощью к родителям, которые решают их с помощью той же пропорции.

Таким образом, в 5 классе, при изучении темы «Проценты» главное – приучить учащихся, анализируя условие и данные задачи, определять, какая величина принята за 100% и известна ли эта величина. Если этого не происходит, учащиеся, зачастую, просто действуют наугад, что и влечет за собой неверное решение.

В 6 классе уровень сложности задач повышается. Сначала возникают задачи с разными процентными базами. Учащимся предлагается выполнить следующие задания.

281. Мотоциклист проехал 120 км, 30% из которых – по шоссе. 60% оставшегося расстояния он ехал по грунтовой дороге, а далее – по лесной тропе.

Прочитайте первое предложение и ответьте на вопросы:

- Что принято за 100%? Известна ли эта величина?
- Какая величина приходится на 1%?
- Сколько километров мотоциклист проехал по шоссе?
- Прочитайте второе предложение и ответьте на вопросы:
- Что принято за 100%? Известна ли эта величина?

– Какое расстояние проехал мотоциклист по грунтовой дороге и по лесной тропе?

– Чему равен 1% этой величины?

– Сколько километров мотоциклист проехал по грунтовой дороге?

Сколько километров мотоциклист проехал по лесной тропе?

282. Мотоциклист проехал по шоссе 8 км, что составило 20% всего пути. 45% оставшегося пути он ехал по грунтовой дороге, а далее – по лесной тропе.

Ответьте на вопросы:

– Что принято за 100% в первом предложении, а что во втором? Известны ли эти величины?

– Чему равен 1% всего пути? Какова длина всего пути?

– Какое расстояние проехал мотоциклист по грунтовой дороге и по лесной тропе?

- Чему равен 1% этого расстояния?
- Сколько километров проехал мотоциклист по грунтовой дороге?
- Сколько километров проехал мотоциклист по лесной тропе?
- Что общего в условиях предыдущих двух задач и чем они отличаются?»

Основная трудность этих заданий состоит в том, чтобы осознать то, что в первом предложении за 100% принята длина всего пути, а во втором – длина грунтовой дороги и лесной тропы вместе (оставшийся путь). Результатом выполнения этих упражнений является осознание учащимися того, что в одной и той же задаче за 100% могут быть приняты разные величины.

С целью закрепления умений решать задачи с разными процентными базами, даются задания такого типа:

283. Весной яблоки, продавались по 35 р. за килограмм, а к осени их цена была снижена сначала на 20%, а затем еще на 15%. Какой стала цена яблок после второго снижения?

Постепенно уровень сложности задач с разными процентными базами повышается, и, наконец, мы доходим до задач на «сухое вещество». Рассмотрим первую задачу такого типа, предлагаемую в нашем учебнике:

363. Свежий гриб содержит 90% воды, а сушеный 15%. Сколько получится сушеных грибов из 17 кг свежих? Сколько надо взять свежих грибов, чтобы получить 3,4 кг сушеных?

Известно, что такие задачи вызывают у учащихся наибольшие затруднения, поэтому разберем подробно методику работы с этой задачей.

Прежде всего, учащимся надо сообщить, что практически любой продукт: яблоки, картофель, крупа, хлеб, грибы состоят из воды и сухого вещества. Причем, воду содержат как свежие, так и сушеные овощи, фрукты, сухари или грибы. Очень важно обратить внимание учащихся на то, что в процессе высыхания испаряется только вода, сухое же вещество никуда не девается и его масса не меняется. Опыт показывает, что успешно организовать поиск решения задачи, анализ данных и условия, можно, заполняя постепенно ячейки следующей таблицы.

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы			Сушеные грибы		
Вода			Вода		
Сухое вещество			Сухое вещество		

Начинаем рассуждать. Прочитаем первую часть первого предложения: «Свежий гриб содержит 90% воды». Какая величина здесь принята за 100%?

Ответ: «Масса свежих грибов». Внесем это в таблицу:

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы	100%		Сушеные грибы		
Вода			Вода		
Сухое вещество			Сухое вещество		

Какую еще информацию из этого предложения можно внести в таблицу?

Ответ: «Вода составляет 90% массы свежих грибов». Вносим в таблицу:

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы	100%		Сушеные грибы		
Вода	90%		Вода		
Сухое вещество			Сухое вещество		

Какую еще ячейку можем сразу заполнить? Ответ: «На сухое вещество приходится 10%». Заполним ее:

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы	100%		Сушеные грибы		
Вода	90%		Вода		
Сухое вещество	10%		Сухое вещество		

Прочитаем вторую часть первого предложения: «а сушеный – 15%». Какая величина здесь принята за 100%? Ответ: «Масса сушеных грибов».

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы	100%		Сушеные грибы	100%	
Вода	90%		Вода		
Сухое вещество	10%		Сухое вещество		

Какие еще ячейки можем заполнить? Ответ: «Вода – 15%, сухое вещество – 85%». Заполним их:

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы	100%		Сушеные грибы	100%	
Вода	90%		Вода	15%	
Сухое вещество	10%		Сухое вещество	85%	

Читаем следующее предложение это вопрос: «Сколько получится сушеных грибов из 17 кг свежих?» В этом предложении есть данные для нашей таблицы? Ответ: «Есть – масса свежих грибов, 17 кг». Заполним очередную ячейку:

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы	100%	17 кг	Сушеные грибы	100%	
Вода	90%		Вода	15%	
Сухое вещество	10%		Сухое вещество	85%	

Какие еще ячейки можем заполнить? Ответ: «Можем найти массу воды и массу сухого вещества в свежих грибах». Найдем эти величины (кстати, какую из них найти проще?) и внесем их в таблицу:

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы	100%	17	Сушеные грибы	100%	
Вода	90%	15,3	Вода	15%	
Сухое вещество	10%	1,7	Сухое вещество	85%	

В этот момент опять следует обратить внимание учащихся на то, что масса сухого вещества в процессе высыхания не меняется. Зная это, мы можем заполнить еще одну ячейку таблицы. Какую? Ответ: «Масса сухого вещества в сушеных грибах». Внесем эту величину в соответствующую ячейку:

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы	100%	17 кг	Сушеные грибы	100%	
Вода	90%	15,3 кг	Вода	15%	
Сухое вещество	10%	1,7 кг	Сухое вещество	85%	1,7 кг

Для наглядности целесообразно продемонстрировать с помощью стрелки, как мы переносим 1,7 кг из одной ячейки в другую.

Можем ли мы теперь ответить на вопрос задачи? Ответ: «Да. Надо 1,7 разделить на 85, этим мы найдем величину, которая приходится на 1%. Затем полученный результат умножим на 100, этим найдем массу сухих грибов и ответим на вопрос задачи». Завершим заполнение таблицы:

Вещество	Число процентов	Масса	Вещество	Число процентов	Масса
Свежие грибы	100%	17 кг	Сушеные грибы	100%	2 кг
Вода	90%	15,3 кг	Вода	15%	
Сухое вещество	10%	1,7 кг	Сухое вещество	85%	1,7 кг

Итак, подведем итог. Анализируя условие задачи, мы заполняли таблицу. В результате мы получили ответ на вопрос задачи. Но это только поиск решения. Теперь давайте запишем само решение. Для этого вспомним, с чего мы начали.

Записывая решение, учащиеся еще раз проходят весь путь рассуждений, что способствует лучшему усвоению метода решения задачи нового типа.

Решение:

- 1) $100 - 90 = 10$ (%) – приходится на сухое вещество в свежих грибах;
- 2) $17 : 10 = 1,7$ (кг) – масса сухого вещества в 17 кг свежих грибов и в сушеных грибах;
- 3) $1,7 : 85 = 0,02$ (кг) – приходится на 1% массы сушеных грибов;
- 4) $0,02 \cdot 100 = 2$ (кг) – масса сушеных грибов.

Ответ: 2 кг.

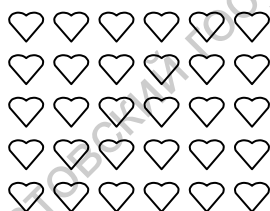
Отыскание ответа на второй вопрос задачи можно предложить учащимся в качестве домашнего задания.

Заметим, что в учебнике не часто встречаются задачи на «сухое вещество», что обусловлено объективными причинами, прежде всего ограничениями по объему в соответствии с гигиеническими правилами. Но в настоящее время готовится к выпуску сборник задач и упражнений для 6 класса, в который будут дополнительно включены задачи такого типа.

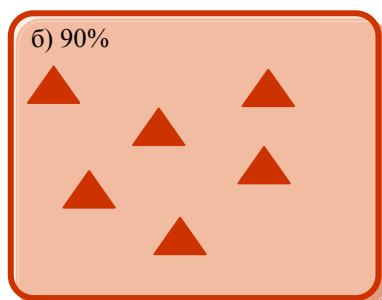
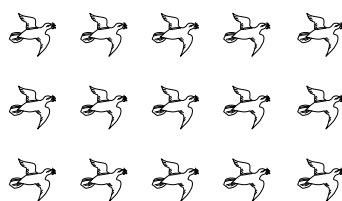
Очень полезны для формирования понятия процента такие задачи (мы даем их в рабочей тетради):

1. Закрасьте:

а) 10% сердечек;



б) 60% птичек.



2. Изображена указанная часть фигур. Дополните рисунок так, чтобы получилось 120% фигур.

Эти задания даются

задолго до того как учащиеся решают задачи на проценты с помощью пропорций, поэтому поиск ответа требует от них смекалки и сообразительности, что в свою очередь способствует более глубокому усвоению понятия процента.

Следующий этап – задачи, в которых трудно определить, какая величина принята за 100%. Это задачи, в которых надо выяснить, на сколько процентов одна величина больше или меньше другой, и обратные им. То, что эти задачи трудны не только для детей, но и для взрослых проиллюстрируем на примере из сборника задач по математике для 6 класса, выпущенного в Минске. Учащимся предлагается задача следующего содержания: С 1998 г. до 2030 г. территория Минска увеличится с 23 тыс. га до 43,5 тыс. га. На сколько процентов увеличится площадь территории Минска, если за 100% принять площадь его территории:

1) в 1998 г.; 2) в 2030 г.?

Такой постановкой вопроса авторы демонстрируют отсутствие понимания смысла сказанного. Дело в том, что если в задаче требуется узнать, на сколько процентов увеличится площадь территории Минска к 2030 г. по сравнению с 1998 г., то здесь за 100% принимается площадь Минска в 1998 г. Если же авторы хотят, чтобы в задаче за 100% была принята площадь Минска в 2030 г., то вопрос должен быть сформулирован иначе: «На сколько процентов площадь территории Минска в 1998 г. меньше площади, которую он будет занимать в 2030 г.?» или так «Определите, какой процент площади Минска, которую он будет занимать в 2030 г., будет приходиться на территорию, присоединенную к городу в период с 1998 по 2030 годы».

С целью формирования умений решения задач такого типа, в нашем учебнике разбирается следующее задание:

«589. Подумайте, что в следующей задаче принято за 100%.

1) В магазине батон хлеба стоит 6,7 р., а на лотке цена такого же батона 6 р. На сколько процентов дешевле продается батон с лотка, чем в магазине?

2) Определите, на сколько процентов батон хлеба в магазине дороже, чем на лотке.

Проверьте себя.

1) По условию задачи цена “дешевого” батона сравнивается с ценой “дорогого”.

В таких случаях всегда за 100% принимается то, с чем сравнивают.

6,7 р. – 100%, 1% – 0,067 р. Тогда на сумму 6 р. приходится примерно 89,5%:

$$6 : 0,067 \approx 89,5; \quad 100\% - 89,5\% = 10,5\%.$$

Значит, на лотке батон на 10,5% дешевле, чем в магазине.

2) На этот раз “дорогой” батон сравнивается с “дешевым”. Значит за 100% принимается стоимость “дешевого” батона. 6 р. – 100%, 1% – 0,06 р. Тогда на сумму 6,7р. приходится примерно 111,6%:

$$6,7 : 0,06 \approx 111,6; \quad 111,6\% - 100\% = 11,6\%.$$

Таким образом, видим, что в магазине батон на 11,6% дороже, чем на лотке».

С целью закрепления умений решать задачи, в которых надо сравнить, на сколько процентов одна величина больше или меньше другой, в учебнике даются разнообразные задания, например:

«591. В результате дефолта (так называется экономический кризис, который случился в России в 1998 г.) цены на импортные товары выросли примерно в 5 раз. До дефолта кроссовки стоили 200 р. На сколько процентов новая цена кроссовок выше старой? На сколько процентов старая цена кроссовок ниже новой? Закончите предложение: «В результате дефолта цены в среднем выросли на ... %».»

Такая система упражнений на формирование умений решения задач на проценты позволяет заложить тот фундамент, на основе которого можно рассматривать более сложные задачи этого типа. В последней главе учебника 6 класса рассматривается пропорциональность величин, решение пропорций, решение задач с помощью пропорций. Там учащиеся получают универсальный метод решения простейших задач на проценты. Правильно составить пропорцию им помогают те навыки, которые были сформированы в ходе всей предыдущей работы.

Хотелось бы остановиться еще на одном важном моменте.

Многие учителя, обучая своих питомцев решению задач на проценты, уже в 5 классе дают им метод решения путем умножения (если надо найти процент от числа) или деления (если надо найти число по его проценту) числа на десятичную дробь, соответствующую данному числу процентов. Для этого им достаточно показать, что, решая задачу в два этапа (первый – находим величину, которая приходится на 1%, второй – отвечаем на вопрос задачи), получаем тот же результат, что и в случае умножения (деления) на десятичную дробь. Мы считаем, что эта практика порочна, т.к. учащиеся видят совпадение результатов, но не могут понять, почему так происходит. Таким образом, алгоритм решения задач на проценты усваивается формально.

Мы даем такой способ решения только в 6 классе, после того, как: во-первых, учащимися усвоен алгоритм умножения и деления обыкновенных дробей; во-вторых, разобран и отработан алгоритм решения задач на отыскание части от целого и целого по его части путем умножения или деления данной величины на дробь (обыкновенную или десятичную), соответствующую этой части.

Такой подход к формированию умений решения задач на проценты находится в единстве с подходами к изучению других тем программы: знания по изучаемому вопросу формализуются только после того, как учащиеся полностью усвоили все понятия, свободно оперируют терминами, демонстрируют понимание смысла условий и вопросов тех или иных задач и упражнений по данному разделу, осознанно осуществляют поиск и решение задач.

Баврин Г. И.,

Метод моделирования как элемент содержания обучения
(*Информатика и образование, 2009, №6, с.122-124*)

Методы моделирования и виды моделей, используемые в различных науках и в различные периоды их развития, многообразны. Многие науки (физика, химия, математика, логика, астрономия, механика) давно уже пользуются различными видами моделей. Другие науки (психология, педагогика, медицина, биология, социология), хоть и являются столь же или почти столь же древними науками, начали пользоваться моделями сравнительно недавно. Совсем молодые науки (кибернетика, бионика, космическая медицина, математическая теория моделирования) применяют метод моделирования с самого начала своего существования. Более того, метод моделирования лежит в основе таких наук, как кибернетика и бионика: без использования определенных видов моделей эти науки вообще не могли бы возникнуть.

Моделью называется некий объект, который при определенных условиях сможет заменить собой объект-оригинал, воспроизводя интересующие свойства и характеристики оригинала, причем созданный объект имеет существенные преимущества, удобства (наглядность, обозримость, доступность испытаний, легкость оперирования с ним и т.д.

Иначе говоря, модель – это некоторое упрощенное подобие реального объекта.

Опираясь на понятие модели, можно столь же кратко определить и понятие моделирования: **моделированием** называется построение (или выбор) и изучение моделей с целью получения новых знаний об объектах.

Информационная модель – это информация об объекте, процессе, явлении. Большинство знаний, которые ученики получают на уроках, носят характер информационных моделей. На уроках физики ученики узнают о модели атома Бора, не имея возможности разглядеть реальный атом. Описание Солнечной системы, молекулярные структуры вещества, схема кровеносной системы и многое другое носят характер информационных моделей. Знания о реальном мире – это множество информационных моделей. Информационное моделирование – одно из узловых понятий в курсе информатики.

В информатике **информационной моделью** называется набор величин, содержащих всю необходимую информацию об исследуемых объектах и процессах. Информационная модель содержит не всю информацию о моделируемых явлениях, а только ту ее часть, которая нужна для рассматриваемого класса задач. То, что не нужно для решения поставленных задач, при моделировании не учитывается. Если круг решаемых задач расширяется, то приходится расширять и модель, включать в нее больше информации. Даже когда круг решаемых задач фиксирован, информационную модель можно строить разными способами.

Информационные модели имеют ряд преимуществ перед моделями других видов.

Они могут вобрать в себя больше аспектов моделируемой реальности, обеспечивают гибкость при проведении экспериментов. При информационном моделировании можно замедлять или ускорять ход времени, сжимать или расширять пространство, выполнять действия опасные, дорогостоящие или просто невозможные в реальном мире.

Информационные модели являются мощным средством, которое расширяет возможность активного обучения.

В содержание почти всех учебных предметов, особенно естественнонаучного цикла, модели и моделирование включены очень широко, но в неявном виде. Изучая понятия физики, математики и других предметов, учащиеся по сути дела всё время имеют дело с определенными моделями, но то, что они изучают модели, занимаются моделированием, учащиеся не знают.

Содержание учебного предмета представляет с своеобразную (педагогическую) проекцию соответствующих наук. Науки представляют собой процесс разработки идей и теорий с помощью определенных методов. **Изучить основы какой-либо науки** – это не только освоить знания этой науки, но и овладеть ее идеями и методами. При этом овладение идеями и методами науки с точки зрения современных целей обучения не менее важно, чем овладение фактами и закономерностями.

В настоящее время в науке широко используются различные модели. Метод моделирования стал одним из основных методов научного исследования. Этот метод, в отличие от других, является всеобщим, используемым во всех науках, на всех этапах научного исследования. Он обладает огромной эвристической силой, позволяет вести изучение от сложного к простому, невидимого и неосязаемого к видимому и осязаемому, от незнакомого к знакомому. То есть сделать какое угодно сложное явление реальной действительности доступным для тщательного и всестороннего изучения.

Каждая наука решает три основные задачи:

(1) На основе непосредственного изучения объектов соответствующих областей действительности она строит (конструирует) разные модели этих объектов.

(2) Разрабатывает специальные методы изучения построенных моделей, для чего создает особый научный аппарат.

(3) Разрабатывает методы применения результатов изучения построенных моделей на практике.

Соответственно с данными задачами основа науки, составляющая содержание учебного предмета, содержит и систему научных моделей, и аппарат для их исследования, и методы использования результатов изучения моделей для решения практических задач. В программах и учебниках понятия модели и моделирования почти не упоминаются, на изучение этой стороны науки внимание учащихся почти не обращается.

Может быть, и не нужно учащимся знать модельный характер изучаемых понятий?

Может быть, достаточно того, что они изучают сами эти понятия, изучают научные модели, усваивают их сущность, учатся их применять, а то, что это модели каких-то реальных явлений или сторон действительности, им не обязательно знать?

Такое мнение (в явном или неявном виде) довольно широко распространено в педагогической среде. Между тем с ним нельзя согласиться.

Во-первых, важнейшей задачей общего образования является формирование у учащихся научного мировоззрения. Научное мировоззрение предполагает, что у учащихся сформированы ясное понимание соотношения объективного мира и научных знаний о нем, четкое осмысление и оценка явлений этого мира в свете научных теорий.

У учащихся должно быть ясное понимание значимости научных, абстрактных понятий в познании действительности. Явное знакомство учащихся с модельным характером науки, с понятиями моделирования и модели необходимо в целях формирования у них научного мировоззрения.

Во-вторых, как показывают эксперименты, введение в содержание обучения понятий модели и моделирования, выяснение сущности и роли моделирования в научном познании существенно меняют само отношение учащихся к учебному предмету, к учению, делают их учебную деятельность более осмысленной и более продуктивной, то есть усиливают желание детей учиться.

Все это позволяет утверждать, что целесообразно включение моделирования в содержание обучения, ознакомление учащихся с современной научной трактовкой понятий, моделей и моделирования, овладение ими моделированием как методом научного познания.

Лебедева С.В., Пилипенко В.В.

Моделирование задач на движение в условиях интеграции физики, математики, информатики

(Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научно-методических трудов:
Выпуск 7. – Саратов: ИЦ «Наука», 2009. – с.47-52)

Интеграция физики, математики, информатики естественна и необходима, особенно при обучении в классах естественнонаучного профиля, причём знания математики и информатики интегрируются в курс физики, реализуя дидактический принцип научности в обучении (Схема 1).

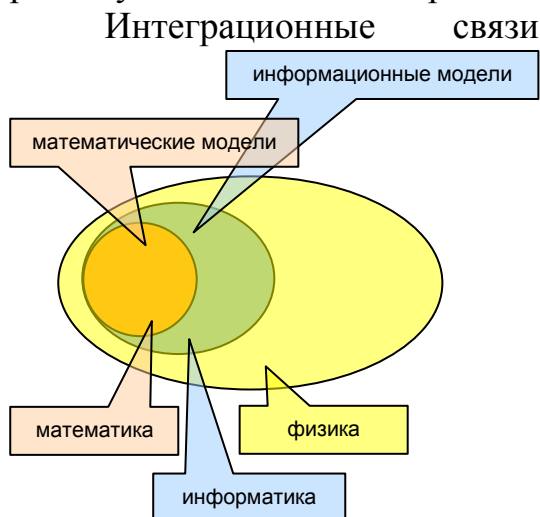


Схема 1. Интеграция математики, информатики, физики

прослеживаются на всём протяжении изучения названных дисциплин. Но можно выделить несколько тем, где интеграция достигает своего максимума, позволяя задуматься о необходимости разработки интегрированных курсов (скорее всего, курсов по выбору). Одна из этих тем – «Задачи на движение».

Напомним, задачи на движение изучаются ещё в начальной школе на уроках математики, где решаются по редукции на основе наглядно-образных информационных моделей – схем. Чуть позднее учащиеся

осваивают другие информационные модели – таблицы.

В 5 классе названные информационные модели становятся вспомогательными: учащиеся решают задачи на движение, используя математические модели – числовые выражения и уравнения. Освоив азы метода информационного моделирования, ученики вправе сами определять метод и способ решения задачи на движение на основе любой адекватной задаче информационной модели.

В 7 классе в курсе физики (раздел «Механика») выясняется физическая сущность задач на движение, изучается собственно движение и его характеристики, рассматриваются различные виды движения (прямолинейное равномерное и равноускоренное, движение по окружности). Здесь в основе решения задачи – знаковая математическая модель – формула.

Геометрический смысл понятия «движение» – ядро раздела «Геометрические преобразования» (геометрия, 8-9 классы).

С освоением элементов аналитической геометрии – векторный и координатный метод – у учащихся (9-11 классы) появляется мощный аппарат для более фундаментального изучения движения.

Элементы математического анализа (10-11 класс) позволяют рассматривать движение с функциональной точки зрения.

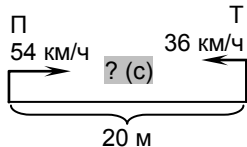
Таким образом, можно говорить о расширении понятия движения.

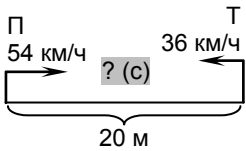
Что же касается решения задач, то в соответствии с расширением понятия «движение» множится, во-первых, количество типов задач на движение и, во-вторых, количество методов и способов информационного представления, а, следовательно, и решения традиционных (известных ещё с начальной школы) задач на движение.

При этом, если интеграционные связи математики, информатики, физики при изучении темы «Движение» недостаточно прочны, задачи на движение приводят учащихся в состояние дезориентации, неуверенности и творческой апатии. Результатом этого становится построение неадекватной информационной, в том числе математической модели, которое приводит к ошибочному решению. Поясним на примере решения следующей задачи.

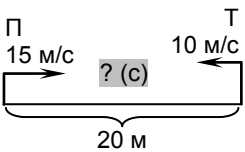
Задача. Пассажирский поезд движется со скоростью 54 км/ч. По соседнему пути навстречу ему движется товарный поезд со скоростью 36 км/ч. За какое время проносится нефтеналивная цистерна длиной 20 м мимо окон вагона пассажирского поезда?

Сопоставим информационную модель, решающую математическую модель и соответствующие теоретические положения, лежащие в основе решения задачи. Результаты зафиксируем в таблице.

Сравнительный анализ процесса решения задачи на движение			
Этап обучения	Информационная модель	Знаковая математическая модель: этапы разработки	Теоретическое обоснование
НШ (3-4 кл.) математика		1) $54 \text{ км/ч} = 54 \cdot 1000 : 3600 \text{ м/с} = 15 \text{ м/с}$ 2) $36 \text{ км/ч} = 36 \cdot 1000 : 3600 \text{ м/с} = 10 \text{ м/с}$	Поезда движутся очень быстро, поэтому цистерна пронесётся за считанные секунды. Переведём км/ч в м/с
		3) $15 + 10 = 25 \text{ (м/с)}$	Поезда движутся навстречу друг другу, скорость сближения равна сумме скоростей.
		4) $20 : 25$	Найдём время: разделим расстояние на скорость сближения
		Ответ. $20/25 \text{ с.}$	Деление невозможно: запишем ответ в виде обыкновенной дроби
Комментарий. Построив рекомендуемую (учителями и методистами) информационную модель – схему, ученикам удалось найти ход решения, который привёл к верному результату: цистерна пронесётся мимо окна за 0,8с. Ключевым звеном в построенной наглядно-образной информационной модели, позволившим решить задачу, стали стрелки, показывающие направление движения			

5-7 кл. математи ка					1) 54 км/ч = 54·1000:3600м/с = =15 м/с 2) 36 км/ч = 36·1000:3600м/с= = 10 м/с	Поезда движутся очень быстро, поэтому цистерна пронесётся за считанные секунды. Переведём км/ч в м/с	
	УД	v	t	s	(15+10)·t=20 25·t=20 t=20:25 t=0,8	Используя таблицу, составим уравнение. Обозначим: t – время движения цистерны мимо окна	
	П	54 км/ч	}	}			20 м
	Т	36 км/ч					
					Ответ: 0,8 с.	Решение уравнения – 0,8 – ответ на требование задачи	

Комментарий. Воспользовавшись привычной информационной моделью, учащиеся построили табличную модель, которая дала возможность построить математическую модель – уравнение с одним неизвестным. Эта модель адекватна задаче, поэтому решение уравнения привело к верному результату: цистерна пронесётся мимо окна за 0,8 с.

7 класс физика	Дано: $v_{\text{П}} = 54 \text{ км/ч}$ $v_{\text{Т}} = 36 \text{ км/ч}$ $s_{\text{Т}} = 20 \text{ м}$ $t_{\text{Т}} = ?$ 		$s = v \cdot t$ (1)	Задача на равномерное прямолинейное движение
			1) $54 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 54 \cdot \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ 2) $36 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 36 \cdot \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	Переведём единицы измерения в международную систему измерений.
			$s_{\text{Т}} = (v_{\text{П}} + v_{\text{Т}}) \cdot t$ (2)	Чтобы лучше понять характер движения изобразим схему (модель) движения, которая и определит уравнение зависимости пройденного пути от скорости движения
			$20 = (15 + 10) \cdot t$ $t = 0,8 \text{ м/с}$	

Комментарий. Краткая запись задачи не позволяет найти путь решения. Требуется дополнительное информационное моделирование. «На помощь» приходит с НШ известная схема задачи на движение. Физический смысл движения размывается: процесс перехода от формулы (1) к формуле (2) остаётся неясным. Однако здравый смысл и 5-летняя математическая практика позволили получить нужный результат

Сравнительный анализ процесса решения задачи на движение			
Этап обучения	Информационная модель	Знаковая математическая модель	Теоретическое обоснование
9 класс физика	Дано: $v_{\text{П}} = 54 \text{ км/ч} = 15 \text{ м/с}$ $v_{\text{Т}} = 36 \text{ км/ч} = 10 \text{ м/с}$ $s_{\text{П}} = 20 \text{ м}$ $t_{\text{Т}} = ?$	$s = v \cdot t$	Задача на равномерное прямолинейное движение. Поскольку движение относительно, то скорость движения цистерны будем рассчитывать исходя из следующих соображений. 1) Пусть у окна находится пассажир (другими словами, за точку отсчёта взяли окно пассажирского поезда). Именно с точки зрения <u>стоящего</u> пассажира мы и опишем ситуацию задачи.

		$\vec{v}_{TP} = -\vec{v}_P$	2) Рассмотрим ситуацию: пассажир стоит в движущемся вагоне; товарный поезд стоит. Пусть скорость пассажирского поезда определяется вектором $\vec{v}_P$, тогда скорость <u>стоящего</u> товарного поезда, который наблюдает пассажир у окна, по абсолютной величине совпадает со скоростью пассажирского поезда, то есть определяется вектором (обозначим его $\vec{v}_{TP}$) такой же длины, но противоположно направленным к $\vec{v}_P$. Другими словами, относительно точки отсчёта товарный поезд движется со скоростью, характеризуемой вектором $\vec{v}_{TP}$.
		$\vec{v}_P \updownarrow \vec{v}_T$	3) По условию задачи, товарный поезд не стоит, а движется в противоположном к пассажирскому поезду направлению, другими словами, относительно точки отсчёта товарный поезд движется со скоростью, характеризуемой вектором $\vec{v}_T$.
		$\vec{v}_T \uparrow \vec{v}_{TP}$ $\vec{v}_T + \vec{v}_{TP} = \vec{v}_C$	4) Относительно пассажира (точки отсчёта) скорость товарного поезда, а, следовательно, и скорость цистерны есть сумма векторов
		$v_C = v_T + v_{TP}$	5) В силу сонаправленности векторов: $v_C = 15 \text{ м/с} + 10 \text{ м/с} = 25 \text{ м/с}.$
		$s_C = v_C \cdot t,$ $20 = 25 \cdot t \quad (*)$ Итак, 20 м проносятся со скоростью 25 м/с, то есть пассажир наблюдает движущуюся цистерну 20/25 секунды, то есть 0,8 секунды	6) Разрешающая модель задачи

Комментарий. Поскольку задача решается на уроке физики, учащиеся ожидают именно «физико-математического» решения, базирующегося на выяснении сути движения, выборе системы отсчёта, применении законов векторной алгебры, выборе и применении формул, описывающих соответствующий вид движения.

Заметим, что моделирование задачи шло исключительно с применением математического аппарата векторной алгебры: построенные модели – не наглядно-образные схемы, а графические математические модели.

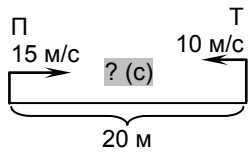
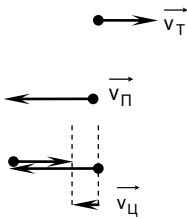
Построенные модели адекватно описывают один, неизвестный из текста задачи, параметр движения – скорость. Другие параметры заданы. Составленная алгебраическая модель (*) привела к верному результату: цистерна пронесётся мимо окна за 0,8 с.

9 класс математик а						$(54+36) \cdot t = 0,02$ $90 \cdot t = 0,02$ $t = 0,02 : 90$ $t = \frac{1}{4500}$ $t = \frac{1}{4500} \text{ ч} = \frac{60}{4500} \text{ мин} = \frac{1}{75} \text{ мин} = \frac{60}{75} \text{ с} = 0,8 \text{ с}$	Пусть t (ч) – время, за которое цистерна проносится мимо окна.
	УД	v		t	s		
	П	54 км/ч	}	?	20 м		
	Т	36 км/ч					

Комментарий. Поскольку для учащихся 9 класса данная задача – стандартная задача на движение, то наблюдается предельно формализованное решение. Информационная модель – таблица – носит вспомогательный характер, и большинством учащихся даже не воспроизводится

Этап обучения	Информационная модель	Знаковая математическая модель	Теоретическое обоснование
ЕГЭ математика		$(54+36) \cdot x = 0,02$ $90 \cdot x = 0,02$ $x = \frac{1}{4500}$ $x = \frac{1}{4500} \text{ ч} = \frac{60}{4500} \text{ мин} = \frac{1}{75} \text{ мин} = \frac{60}{75} \text{ с} = 0,8 \text{ с}$ Ответ: 0,8 с.	Пусть x (ч) – время, за которое цистерна проносится мимо окна.

Комментарий. Транслируется решение, типичное для учащихся старшей школы, сталкивающихся с несложной стандартной задачей на движение при изучении математики

ЕГЭ физика	Дано: $v_{\text{П}} = 54 \text{ км/ч}$ $v_{\text{Т}} = 36 \text{ км/ч}$ $s_{\text{Ц}} = 20 \text{ м}$ $t_{\text{Ц}} = ?$	1) $54 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 54 \cdot \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ 2) $36 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 36 \cdot \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	Переведём единицы измерения в СИ
		$s = v \cdot t$	Построим схему движения поездов, отразив существенные характеристики движения: скорость и путь
		3) $\vec{v}_T + \vec{v}_P = \vec{v}_C$ $\vec{v}_T \uparrow \downarrow \vec{v}_P$ $v_C = v_P - v_T$	Путь известен. Осталось определить скорость. Поезда движутся в разных направлениях, поэтому векторы их скоростей – противоположно направлены, изобразим их отдельно и найдём сумму векторов
		4) $s_{\text{Ц}} = v_{\text{Ц}} \cdot t$, $20 = (15 - 10) \cdot t$ $t = 4 \text{ с}$. Ответ: 4с.	Подставим числовые данные в формулу пути, получим ответ на требование задачи: 4с.

Комментарий. Краткая запись задачи не позволяет найти путь решения. Требуется дополнительное информационное моделирование. «На помощь» приходит с НШ известная схема задачи на движение. Взяв её за основу, учащиеся переходят к математическим моделям скоростей – векторам, от них – к соответствующим скалярным величинам; используют формулу пути при прямолинейном равномерном движении, и ... получают неверный результат!

Парадоксальная ситуация: задача, которую любой ученик средней школы назвал бы лёгкой, и которая на разных этапах освоения программного материала решалась учениками правильно, в процессе подготовки к ЕГЭ обрела статус контрпримера, поскольку спровоцировала учащихся на ошибку!

Итак, уровень интеграции физики, математики, информатики в полной мере проявляется при подготовке выпускников (учащихся 11 класса) к единому государственному экзамену (ЕГЭ).

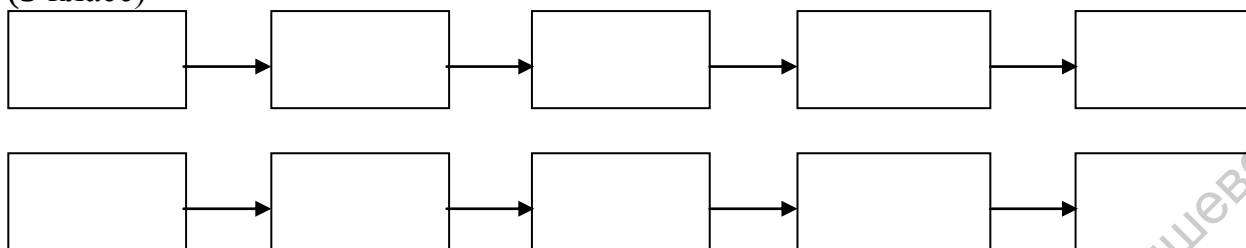
Сравнительный анализ процесса решения задачи учащимися разных возрастов с различным уровнем подготовки по физике, математике и информатике позволяет выяснить причину затруднений выпускников – недопонимание роли информационного, в том числе математического, моделирования при решении прикладной задачи. Всё это – следствие слабых интеграционных связей физики, математики, информатики, которых никто специально не устанавливал. В результате у учащихся стихийным образом формируется представление о своеобразной изолированности математики от других дисциплин естественнонаучного цикла. Своеобразие заключается в том, что любая правдоподобная математическая модель не проверяется на адекватность поставленной прикладной задаче. Если ко всему прочему математическая модель подкрепляется знакомой, на протяжении долгого периода отработанной, информационной наглядно-образной моделью, то «кредит доверия» к построенной математической модели побеждает даже здравый смысл.

Понятно, что такое положение вещей не может быть признано должным и требует немедленного преобразования – возможно, разработки интегрированного курса для учащихся 10 классов (именно в этот период идёт интенсивное забывание основных разделов механики) «Задачи на движение», построенной, прежде всего, на принципах научности, цикличности и преемственности в обучении.

Вариант 0 зачётной работы

1. Дидактическая система учителя – это _____

2. Структурирование урока/ов по теме «Обозначение натуральных чисел»
(5 класс)



3. Сформулировать требования, предъявляемые к математической сказке – форме изучения материала

4. Разработать упражнение на распознавание

5. Сформулируйте цели урока ПОМ по теме «Натуральные числа и шкалы»

6. Охарактеризуйте степень обученности математике на уровне «знакомства»

7. Перечислите три типовые ошибки учащихся по теме «Признаки делимости»

8. Сопоставьте цели самостоятельной работы целям/функциям обучения математике.

	цель самостоятельной работы		группа целей обучения	
1	Выработка умений и навыков учебной деятельности		дидактические	Д
2	Качественное усвоение учебного материала			
3	Развитие информационной культуры учащихся		развивающие	Р
4	Формирование готовности к самообразованию			
5	Формирование познавательных способностей учащихся и интереса к изучаемому материалу;		воспитательные	В

9. Информационная деятельность – это _____

10. Тестовое задание должно быть

- (а) репрезентативным (б) рефлексивным
(в) репродуктивным (г) регенеративным)

Любой тест имеет

- (а) полную группу ошибок (б) возможность «натаскивания»
(в) диапазон применимости (г) алгоритм разработки

11. Разработать содержание серии уроков изучения какой-либо темы курса арифметики 5-6 классов, результаты оформить в таблицу

Тема				
Тема урока	Тип урока	Содержание теоретического материала	Решение учебных и развивающих задач	Средства обучения

12. Достоинства и недостатки концепции выделения курса Наглядной геометрии в отдельную дисциплину:

13. Разработать текст исследовательской работы по решению комбинаторной задачи.

14. Выпишите 5 основных положений статьи Лебедева С.В., Мухангалиева Г.Н. Активизация самостоятельной работы учащихся посредством включения в содержание обучения историко-математического материала / Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научных трудов: Выпуск 4. – Саратов: Научная книга, 2005. – с.29-33.

15. Что такое теорема, утверждение? Чем отличается утверждение от теоремы?

16. Каким образом и в таких разделах школьного курса алгебры проявляется теория множеств?

17. Охарактеризуйте основные проблемы изучения комбинаторики и теории вероятностей в ШКМ.

18. В чём отличие информационного подхода к решению сюжетных задач от подхода традиционного. Перечислите 10 отличий.

Образец оформления заданий

На примере занятия по теме 7. Урок как основная форма обучения математике: коррекция знаний и умений учащихся

I. Предваряющее задание. Разработать модель урока коррекции знаний и умений учащихся по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс). Какова при этом роль диагностических карт? карт анализа контрольных работ? – **5 баллов.**

Поскольку в задании идёт речь о роли диагностических карт и карт анализа контрольных работ, целесообразно разработать методическую модель урока, где по содержанию информации поля «Цель этапа» будет можно выявить роль указанных средств обучения..

Этап урока	Цель этапа	Учебное задание	Средство обучения	Метод / приём
«Обыкновенные дроби» (6 класс)				

III. Анализ методического материала (15 минут): Проанализируйте изученный вами новый материал. По каким критериям вы проводили анализ? – **10 баллов.**

Выводы.

1.

Университет имени Н. Г. Чернышевского

IV. Практическая работа №1 (15 минут). Составление тестов, контрольных вопросов и текстов проверочных работ по теме «Обыкновенные дроби». – **10 баллов.**

Тест «НОД. Разложение на простые множители», t = _____ мин.

Критерии оценки: _____

Найдите все общие делители чисел

(а) 18 и 60; (б) 72, 96 и 120; (в) 35 и 88.

1. Найдите разложение на простые множители наибольшего общего делителя чисел a и b , если

(а) $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ и $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4$; (б) $a = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ и $b = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$.

2. Найдите НОД чисел

(а) 12 и 18; (б) 50 и 175; (в) 675 и 825; (г) 7920 и 594.

3. Являются ли взаимно-простыми числа:

(а) 35 и 40; (б) 77 и 20; (в) 10, 30 и 41?

4. Найдите среди чисел 9, 14, 15 и 27 три пары взаимно-простых чисел.

5. Разложите на простые множители числа: 875, 2376, 3625.

6. Найдите НОД чисел 585 и 360.

7. Найдите НОД чисел 680 и 612.

8. Являются ли взаимно-простыми числа 231 и 280?

9. Найдите НОД чисел 680 и 612.

**Контрольные вопросы по теме «НОД. Разложение на простые множители»,
t = _____ мин.**

Критерии оценки: _____

Какое число называют наибольшим общим делителем двух натуральных чисел?

1. Какие два числа называют взаимно простыми?
2. Как найдите НОД нескольких натуральных чисел?
3. Число a кратно числу b . Какое число является НОД чисел a и b ?

V. Практическая работа №2 (25 минут). Проектирование уроков КОРЗ по теме «Обыкновенные дроби» (6 класс). – **10 баллов.**

Учебно-методическое пособие

Светлана Владимировна Лебедева

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Практикум по общей методике

Работа издана в авторской редакции

Подписано в печать 14.03.2012.

Бумага офсетная

Усл. печ. л. 10,6.

Формат 60 × 84 ¹/₁₆

Гарнитура Times

Заказ №
