

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Н.Б. Ковылов, М.К. Куровская, Д.В. Савин

**Электричество и магнетизм:
линейные и нелинейные явления
Часть 1. Физика электричества**

Учебно-методическое пособие
для студентов 2 курса факультета нелинейных процессов

Саратов 2012

Авторы-составители:
Николай Борисович Ковылов
Мария Константиновна Куровская
Дмитрий Владимирович Савин

Пособие предназначено для использования при проведении занятий в лаборатории «Методика, технология и компьютерная обработка физического эксперимента» по курсу «Электричество и магнетизм» у студентов 2 курса факультета нелинейных процессов. Может быть полезно как студентам, изучающим курс электричества и магнетизма, так и преподавателям при проведении семинаров по указанному курсу.

Работа представлена в авторской редакции.

© Ковылов Н.Б., Куровская М.К., Савин Д.В., 2012

Содержание

Предисловие.....	4
1. Физика диэлектриков.....	5
1.1. Строение и физические модели однородного диэлектрика.....	6
1.2. Виды диэлектрической поляризации.....	8
1.3. Понятие относительной диэлектрической проницаемости.....	9
1.4. Диэлектрическая поляризация в неоднородных диэлектриках.....	12
1.5. Конденсаторные измерительные ячейки.....	13
1.6. Лабораторная работа.....	16
Литература к разделу 1.....	17
2. Процессы в колебательном контуре.....	18
2.1. Свободные колебания в RLC-контуре.....	18
2.2. Процессы заряда и разряда конденсатора.....	21
2.3. Вынужденные колебания и резонанс в последовательном колебательном контуре.....	22
2.4. Резонанс в параллельном колебательном контуре.....	24
2.5. Лабораторные работы.....	26
Работа 1. Исследование затухающих колебаний.....	26
Работа 2. Исследование процессов заряда и разряда конденсатора.....	27
Работа 3. Вынужденные колебания и резонанс в последовательном контуре.....	29
Работа 4. Резонанс в параллельном контуре.....	29
Литература к разделу 2.....	31

Предисловие

В настоящем пособии излагаются некоторые аспекты физики электрических явлений, полезные при работе в физическом практикуме. Основным назначением пособия является его использование при проведении занятий в лаборатории «Методика, технология и компьютерная обработка физического эксперимента» по курсу «Электричество и магнетизм» у студентов 2 курса факультета нелинейных процессов, однако оно может пригодиться и при проведении семинаров по этому курсу.

Первый раздел пособия посвящен изучению электрического поля в средах. Излагаются физика диэлектриков и теория диэлектрических измерений.

Во втором разделе представлены материалы, относящиеся к изучению колебаний в цепях переменного тока. Изложение материала этого раздела использует понятия, вводимые в курсах теории колебаний.

Оба раздела содержат как теоретическую часть, так и описания лабораторных работ, а теоретические указания снабжены заданиями для самостоятельной работы, которые выделены жирным шрифтом.

В настоящем пособии не приводятся подробные описания экспериментальных установок в связи с тем, что их конкретные особенности периодически подвергаются изменениям. Актуальные описания установок, а также паспортные данные приборов, используемых при выполнении эксперимента, можно найти в лаборатории.

1. Физика диэлектриков

Физика диэлектриков представляет один из важных разделов современной физики, связанный с изучением взаимодействия электрического поля с веществом. Существенный вклад в развитие фундаментальных основ классической теории диэлектрической проницаемости внесли такие крупные ученые, как Дж. Максвелл, П. Дебай, Г. Вагнер, О. Винер. В отечественной науке наиболее известна монография Г.И. Сканави, который обобщил все сделанное в физике диэлектриков к середине XX века.

Как известно, переход от фундаментальной к прикладной науке происходит благодаря требованиям промышленности. Первоначально диэлектрики требовались в качестве изоляторов в энергетических сетях и как конструкционный материал при производстве конденсаторных батарей. Эти батареи применялись и применяются поныне для повышения коэффициента мощности ($\cos \varphi$) у потребителей больших количеств электроэнергии. Затем с развитием радиотехники потребовалось создавать малогабаритные конденсаторы с малыми потерями энергии на радиочастотах. В связи с этим появились работы, связанные с изучением особенностей взаимодействия диэлектриков с высокочастотными полями, было открыто и объяснено явление дисперсии диэлектрической проницаемости.

Дальнейшим шагом, вызванным необходимостью объяснения ряда экспериментов на гетерогенных диэлектриках, стало развитие теории Максвелла–Вагнера, изучавших дипольные моменты сферических включений в эмульсиях и суспензиях. На базе этой теории появился ряд прикладных исследований, обосновавших возможность измерения концентрации таких дисперсных частиц. В частности, в начале 70-х годов была разработана и доведена до введения государственного стандарта вся цепочка средств передачи единиц измерения влажности нефти и нефтепродуктов от эталона до измерительной аппаратуры.

Дальнейшее развитие теории гетерогенных диэлектриков привело к уточнению влияния формы вкраплений, двойных электрических слоев на гранич-

ных поверхностях дисперсных частиц и их поверхностной проводимости на комплексную диэлектрическую проницаемость. Были открыты явления низкочастотной дисперсии.

Более поздние работы в этом направлении привели к появлению теории гигантской низкочастотной дисперсии, связанной с влиянием пленок, адсорбционных слоев и мембран на диэлектрические явления.

Перечисленные явления дают в руки исследователей механизмы экспериментального изучения структур и свойств гетерогенных диэлектриков, что очень важно в связи с прогрессом биофизики и биотехнологий. Кроме того, ряд диэлектрических явлений, например, диполофорез и диэлектрофорез могут использоваться в современных технологических процессах.

Настоящая лабораторная работа имеет целью ознакомить начинающего исследователя с физическими явлениями, связанными с поляризацией различных веществ, и ввести в сложный мир диэлектрических измерений, демонстрирующий необходимость учета ряда специфических особенностей и тонкостей при обработке измерительной информации и при сравнении экспериментальных результатов с теоретическими моделями.

1.1. Строение и физические модели однородного диэлектрика

Диэлектрики в природе встречаются в трех агрегатных состояниях: газообразном, жидком и твердом.

Газообразные диэлектрики состоят из атомов или молекул, слабо взаимодействующих друг с другом. Если газ не подвержен никаким внешним воздействиям, то в нем отсутствуют свободные ионы и электроны, т.е. он может считаться идеальным диэлектриком. Молекулы, из которых состоят все газы, будучи электрически нейтральными, делятся на два класса. Одни имеют симметричное относительно некоего центра расположение зарядов, другие – смещенные друг относительно друга положительные и отрицательные заряды. Первые образуют неполярные диэлектрики, вторые – полярные. У полярных диэлектриков молекулы могут быть уподоблены электрическим диполям,

существующим независимо от внешнего электрического поля. Молекулы неполярных газов превращаются в диполи под влиянием внешнего поля.

Жидкие диэлектрики, в отличие от газов, обладают гораздо более сильным взаимодействием молекул, которые также делятся на полярные и неполярные. Простейшее строение имеют двухатомные полярные молекулы, например, соляной кислоты HCl , а также молекулы воды H_2O (рис. 1, а). Наличие у этих молекул дипольных моментов очевидно, поскольку они состоят из положительных и отрицательных ионов, смещенных относительно друг друга.

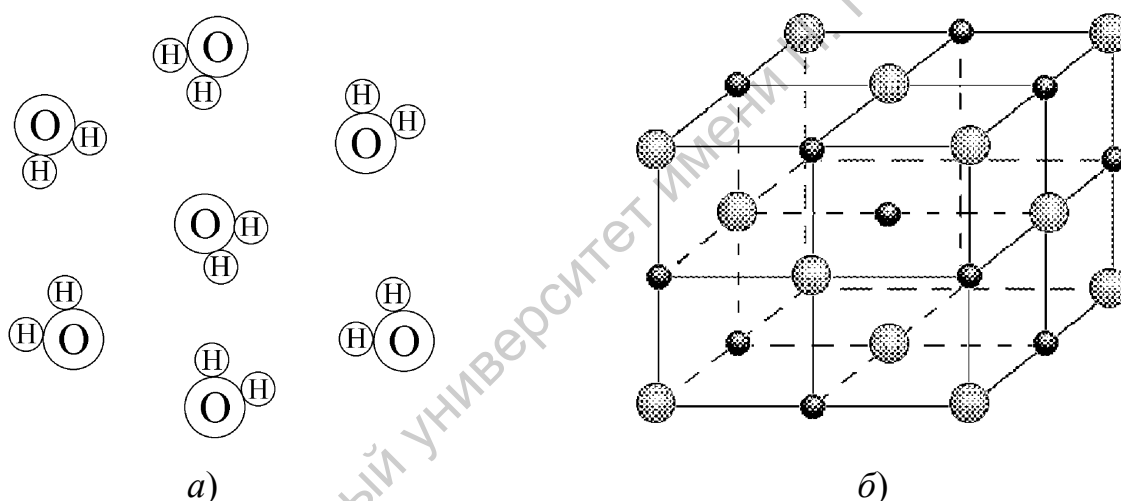


Рис. 1.1. Модели молекул: а — воды; б — NaCl .

Твердые диэлектрики чаще всего имеют кристаллическую структуру. Их кристаллические решетки могут быть образованы как нейтральными атомами и молекулами, так и чередующимися в узлах решетки ионами разного знака. В первом случае диэлектрик относится к классу неполярных, во втором — к полярным диэлектрикам. Рис. 1.1 б иллюстрирует строение неполярного диэлектрика NaCl .

Рассмотренные примеры показывают, что при взаимодействии диэлектрика с электрическим полем возможно проявление двух основных физических механизмов. Неполярные молекулы под действием электрического поля деформируются так, что центр положительных зарядов смещается по направлению вектора напряженности, а центр отрицательных — против направле-

ния этого вектора. Второй механизм обусловлен тем, что полярные молекулы, будучи изначально хаотически ориентированными в пространстве, поворачиваются таким образом, что их дипольный момент располагается вдоль силовых линий электрического поля.

Таким образом, и полярные и неполярные диэлектрики объединяет тот факт, что их можно интерпретировать как равномерно распределенные в объеме диэлектрика диполи, ориентированные своими моментами по направлению внешнего электрического поля. Векторы дипольных моментов, заключенных внутри элемента объема, суммируются по принципу суперпозиции и придают этому элементу объема общий дипольный момент. Наличие этого дипольного момента является необходимым и достаточным признаком особого состояния диэлектрика, названного *диэлектрической поляризацией*. Нередко и процесс перехода в это состояние также называют поляризацией.

1.2. Виды диэлектрической поляризации

Несмотря на описанный выше признак состояния поляризации у всех типов диэлектриков, физические механизмы поляризации заметно отличаются друг от друга.

В неполярных диэлектриках под действием приложенного к ним электрического поля положительные заряды в их молекулах смещаются в направлении вектора напряженности, а отрицательные – в противоположную сторону. Происходит деформация атомов и молекул, в которой участвуют частицы с сильной связью (электроны – ядра атомов, атомы в молекулах, ионы в кристаллических решетках). При снятии внешнего поля деформация исчезает. Такая поляризация называется *деформационной или упругой*, а также иногда называется *индуцированной поляризацией*.

В полярных диэлектриках под действием внешнего поля происходит поворот полярных молекул таким образом, что их дипольные моменты выстраиваются в направлении этого поля. Это – *ориентационная или дипольная поляризация*.

В некоторых диэлектриках заряженные частицы связаны слабо, и тепловое движение приводит к их самопроизвольной поляризации. Поляризация этого происхождения в большинстве случаев обусловлена упорядочением взаиморасположения ионов (реже электронов) и получила название *релаксационной поляризации*.

Академик А.Ф. Иоффе открыл и глубоко обосновал еще один вид поляризации, которая вызывается накоплением объемных зарядов благодаря их смещению на макрорасстояния, в отличие от предыдущих видов поляризации. Наблюдается это явление при больших значениях напряженности внешнего электрического поля и поэтому названо *высоковольтной поляризацией*. К этому же типу относится и поляризация, вызванная макровключениями в объеме однородного диэлектрика.

С позиции основных положений электродинамики поляризация диэлектрика выглядит как реакция вещества на проникновение в него внешнего электрического поля, выражающаяся в возникновении в нем собственного внутреннего макрополя, направленного навстречу внешнему полю и ослабляющего его.

1.3. Понятие относительной диэлектрической проницаемости

Поскольку источниками поля являются электрические заряды, то внутри диэлектрика будет наблюдаться как поле, созданное зарядами, находящимися вне диэлектрика, так и поле, созданное образовавшимися диполями внутри диэлектрика. Математически это можно записать в виде

$$\nabla E = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{внеш}} + \rho_{\text{внутр}}), \quad (1.1)$$

где $\rho_{\text{внеш}}$ и $\rho_{\text{внутр}}$ — соответственно объемные плотности внешних и внутренних зарядов.

Поскольку $\rho_{\text{внутр}}$ зависит от E , то воспользоваться выражением (1.1) для расчета поля невозможно. Для определения величины $\rho_{\text{внутр}}$ можно воспользоваться известным выражением

$$\rho_{\text{внутр}} = -\nabla \mathbf{P}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{P} – вектор диэлектрической поляризации, представляющий собой геометрическую сумму всех дипольных моментов, приходящихся на единицу объема поляризованного диэлектрика.

Подставив (1.2) в (1.1), получим

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{внеш}} - \nabla \mathbf{P})$$

или

$$\nabla(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{внеш}}. \quad (1.3)$$

Сумма, стоящая под знаком оператора в (1.3), есть не что иное как некоторое внешнее возбуждающее поле, которое назвали электрической индукцией (в ряде учебников — электрическим смещением) и которое обозначается как вектор \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1.4)$$

Подчеркнем, что вектор поляризации, определенный соотношением (1.2), у подавляющего большинства диэлектриков пропорционален вектору напряженности \mathbf{E} , т.е. $\mathbf{P} = \varkappa \varepsilon_0 \mathbf{E}$.

Коэффициент пропорциональности \varkappa отражает способность данного диэлектрика к поляризации и поэтому назван *диэлектрической восприимчивостью*. С учетом приведенного соотношения выражение (1.4) можно представить в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varkappa \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \varkappa) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}. \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) отражает физическую сущность взаимодействия внешнего электрического поля с диэлектриком. Действительно, поле в диэлектрике есть суперпозиция поля, которое создано сторонними зарядами \mathbf{E} , и суммарного макрополя поляризованных частиц диэлектрика $\varkappa \mathbf{E}$ (поля связанных зарядов).

Величина $\varepsilon = 1 + \alpha$ называется *относительной диэлектрической проницаемостью (ДП) вещества* и широко используется в фундаментальных и прикладных научных исследованиях.

Отметим, что для специалистов, работающих в различных областях физики, физический смысл выражения для относительной диэлектрической проницаемости имеет неоднозначную трактовку.

С одной стороны, – это макроскопический коэффициент ослабления силы кулоновского взаимодействия зарядов внутри диэлектрика по сравнению с их взаимодействием в вакууме:

$$\varepsilon = F_{\text{к. вак}} / F_{\text{к. диэл.}} \quad (1.6)$$

Специалист по теории электрических цепей посчитает, что ДП определяется как коэффициент увеличения тока смещения в конденсаторе с диэлектриком по сравнению с током смещения такого же конденсатора без диэлектрика при одинаковом падении напряжения, т.е.

$$\varepsilon = \frac{I_{\text{с.диэл}}}{I_{\text{с.вак}}} = \frac{V\omega C_{\text{с.диэл}}}{V\omega C_{\text{с.вак}}} = \frac{C_{\text{диэл}}}{C_{\text{вак}}} \quad (1.7)$$

Это, в свою очередь, означает, что в идеальном случае ДП есть коэффициент увеличения емкости конденсатора с диэлектриком по сравнению с его емкостью в вакууме.

В ряде случаев используют ДП как показатель замедления скорости распространения электромагнитной волны в диэлектрике по сравнению с ее скоростью в вакууме.

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{c}{V_{\text{диэл}}} \quad (1.8)$$

В оптическом диапазоне частот используется явление преломления света, и формула (1.8) переходит, согласно определению показателя преломления n , в формулу

$$n = \frac{c}{v_{\text{диэл}}} . \quad (1.9)$$

Эксперименты по измерению ДП по методикам, основанным на соотношениях (1.6–1.9), дают для одних и тех же веществ близкие результаты. Это говорит о том, что явления, на которых основаны методики измерения, являются следствиями явления поляризации.

1.4. Диэлектрическая поляризация в неоднородных диэлектриках

Наибольший интерес исследователей вызывают распространенные в современных химических и физико-химических технологиях вещества, относящиеся к классу дисперсных, или гетерогенных, систем. Характерным для них является наличие чередующихся объемов однородных веществ с выраженными границами между ними. Наиболее распространенными являются эмульсии и суспензии, при этом одно вещество как бы занимает объем, ограниченный сосудом, а в нем распределены частицы несмешивающегося с ним вещества. Непрерывная фаза эмульсии или суспензии называется *дисперсионной фазой*, а частицы вещества образуют *дисперсную фазу*. В таких веществах, которые с некоторой долей компромисса относят к диэлектрикам, инородные вкрапления в непрерывную фазу вносят свой вклад во взаимодействие с внешним электрическим полем.

Физическую картину взаимодействия в таких диэлектриках можно представить следующим образом. На границах объема гетерогенного диэлектрика находится система положительных и отрицательных истинных зарядов. Векторные линии электрической индукции \mathbf{D} берут начало у положительных свободных зарядов и заканчиваются у отрицательных.

Внутри рассматриваемого объема диэлектрика произойдет поляризация, вследствие которой часть истинных зарядов станет связанной, т.е. их поле будет частично скомпенсировано поляризованными зарядами, а оставшаяся часть — свободные заряды — определит величину напряженности поля \mathbf{E} внутри диэлектрика. Если \mathbf{E} и \mathbf{D} — усредненные по объему диэлектрика на-

пряженность и индукция соответственно, то связь между ними определяется эффективным значением диэлектрической проницаемости:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{эф}} \mathbf{E}, \quad (1.10)$$

Величина $\varepsilon_{\text{эф}}$ может быть интерпретирована как ДП такого однородного диэлектрика, внутри которого величины \mathbf{E} и \mathbf{D} совпадают с \mathbf{E} и \mathbf{D} для гетерогенного диэлектрика.

Поскольку величина $\varepsilon_{\text{эф}}$ может быть определена посредством расчета дипольного момента \mathbf{P} , присущего единице объема поляризованного диэлектрика, для его нахождения необходимо просуммировать его по всем находящимся в этом объеме частицам:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{P}_i = \frac{1}{V} \sum_i \sum_k n_k \mathbf{P}_k, \quad (1.11)$$

где i — номер частичного объема, n_k — число поляризующихся частиц k -го сорта в единице объема, \mathbf{P}_k — дипольный момент одной частицы k -го сорта.

С учетом (1.11) можно сделать вывод, что рассматриваемый гетерогенный диэлектрик подобен однородному диэлектрику с таким же суммарным дипольным моментом:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \mathbf{P}_{\text{эф}} N. \quad (1.12)$$

Интерес к гетерогенным диэлектрикам объясняется тем, что характер взаимодействия таких диэлектриков с внешним переменным электрическим полем на разных частотах существенно зависит от структуры непрерывной и дисперсной фаз, а это дает исследователю большой объем научной информации.

1.5. Конденсаторные измерительные ячейки

Выше было отмечено, что обнаружить меру взаимодействия диэлектрика с внешним электрическим полем можно только поместив этот диэлектрик в устройство, создающее электрическое поле. Таким устройством в

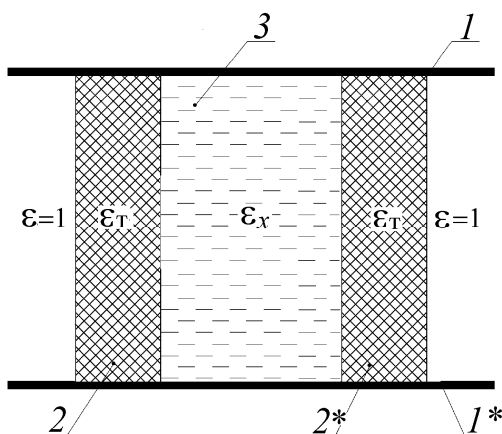


Рис. 1.2. Типичная измерительная ячейка конденсаторного (емкостного) типа.

электротехнике является конденсатор – система двух или нескольких разнопотенциальных электродов. В качестве измерительной ячейки конденсатор должен обеспечивать однозначность зависимости его емкости от диэлектрической проницаемости заполняющего его образца, а также минимальный разброс результатов при многократном повторении измерений на

одном и том же образце (хорошую воспроизводимость опыта).

На рис. 1.2 изображен разрез типичной измерительной ячейки. Пластины конденсатора 1 и 1^* скреплены распорками из диэлектрика 2 и 2^* . Между пластинами помещен измеряемый диэлектрик 3 . Очевидно, после приложения между пластинами 1 и 1^* некоторой разности потенциалов на их внутренних поверхностях появятся заряды, распределенные с определенной плотностью. Часть силовых линий поля внутри конденсатора будет пронизывать измеряемый диэлектрик, часть пройдет через изолирующие распорки, часть – по воздуху (краевые эффекты). Подчеркнем, что количество силовых линий поля характеризует величину запасенной энергии электрического поля, поэтому можно утверждать: энергия поля распределится между объемом конденсатора, занимаемым измеряемым диэлектриком, распорками и областью краевых эффектов.

Аналитическое выражение для суммарной плотности энергии в рассматриваемом конденсаторе будет иметь вид:

$$W = \frac{E_x D_x}{2} + \frac{E_{\text{расп}} D_{\text{расп}}}{2} + \frac{E_{\text{кр}} D_{\text{кр}}}{2}, \quad (1.13)$$

где E_x , D_x , $E_{\text{расп}}$, $D_{\text{расп}}$, $E_{\text{кр}}$, $D_{\text{кр}}$ — напряженности полей и индукции в соответствующих областях.

Из электростатики известно, что любой конденсатор можно разделить на любое количество аддитивных частей поверхностями, образованными силовыми линиями поля в конденсаторе, т.е. $C = \sum_i C_i$ или

$$C = C_x + C_{\text{расп}} + C_{\text{кр}}. \quad (1.14)$$

При измерении диэлектриков с разными значениями ДП переменной в выражении для суммы емкостей является только C_x . По определению $C_x = \varepsilon_x C_0$, где величину C_0 удобно назвать геометрической емкостью конденсатора, поскольку она зависит лишь от размеров и формы электродов. Величины $C_{\text{расп}}$ и $C_{\text{кр}}$ должны быть постоянными, что достигается конструкцией измерительного конденсатора и подбором материалов для его деталей. Если обозначить сумму $C_{\text{расп}}$ и $C_{\text{кр}}$ как $C_{\text{п}}$, то емкость измерительной ячейки запишется в виде

$$C = C_{\text{п}} + \varepsilon_x C_0. \quad (1.15)$$

Каждая измерительная ячейка имеет собственные значения $C_{\text{п}}$ и C_0 . Определить их опытным путем несложно, если измерить емкость этой ячейки один раз с воздухом ($C_{\text{в}}$), а второй раз — с эталонным диэлектриком, ДП которого известна с высокой степенью точности и стабильна. Параметры ячейки определяются в результате решения системы уравнений

$$\begin{cases} C_{\text{в}} = C_{\text{п}} + (1) \cdot C_0 \\ C_{\text{эт}} = C_{\text{п}} + \varepsilon_{\text{эт}} \cdot C_0 \end{cases}, \quad (1.16)$$

откуда получаем

$$C_{\text{п}} = \frac{C_{\text{в}} \varepsilon_{\text{эт}} - C_{\text{эт}}}{\varepsilon_{\text{эт}} - 1}, \quad C_0 = \frac{C_{\text{эт}} - C_{\text{в}}}{\varepsilon_{\text{эт}} - 1}. \quad (1.17)$$

Зная параметры измерительной ячейки, можно по величине емкости с измеряемым диэлектриком C_x рассчитать величину ДП по следующей формуле:

$$\varepsilon_x = \frac{C_x - C_{\text{п}}}{C_0}. \quad (1.18)$$

Примечание: Измерение емкости может производиться разными приборами, для этой цели предназначенными, и работающими на разных частотах. Правила пользования этими приборами описаны в прилагаемых к ним технических описаниях.

1.6. Лабораторная работа

В данном комплексе предусмотрены следующие направления работы (по выбору студента):

1. Измерение диэлектрической проницаемости жидких диэлектриков, в том числе их смесей.
2. Наблюдение динамики изменения ДП водомасляной эмульсии или порошково-масляной суспензии во времени.
3. Наблюдение динамики изменения ДП гетерогенных систем под влиянием внешнего неоднородного электрического поля (диполофорез).
4. Измерение ДП твердых диэлектриков.

Порядок выполнения работы

1. Выбрать направление работы из приведенного списка.
2. Получить у преподавателя задание на решение контрольных задач, которые совпадают по тематике с выбранным направлением, и решить их.
3. С помощью теоретической части пособия и рекомендованной литературы разработать обоснование и методику проведения эксперимента. Обсудить свои решения с преподавателем.
4. Из набора функциональных модулей и универсальных измерительных приборов собрать измерительную установку.
5. Определить порядок тестирования установки и с помощью достаточного количества тестов оценить работоспособность и точность установки.
6. Провести опыты по намеченной методике и осмыслить их результаты.
7. Составить протокол эксперимента и защитить работу в целом.

Литература к разделу 1

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Наука. 1977.
2. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Высшая школа. 1983.
3. Губкин А.Н. Физика диэлектриков. Т. 1. М.: Высшая школа. 1971.
4. Сканапи Г.И. Физика диэлектриков (область слабых полей). М.-Л.: ГИТТЛ. 1949.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982.
6. Духин С.С., Шилов В.Н. Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и полиэлектролитах. Киев: Наукова думка. 1972.
7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Высшая школа. 1984.
8. Карандеев К.Б. Специальные методы электрических измерений. М.-Л.: Госэнергоиздат. 1963.

2. Процессы в колебательном контуре

2.1. Свободные колебания в RLC-контуре

Простейшая электрическая цепь, способная демонстрировать колебания, может быть образована двумя элементами – катушкой индуктивности L и конденсатором C . В реальности, однако, любой элемент имеет активное сопротивление, поэтому разумно дополнить полученную цепь резистором R . Полученную систему называют колебательным, или RLC контуром (рис. 2.1).

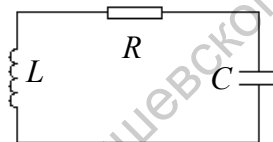


Рис. 2.1.

Уравнение, описывающее колебания в таком контуре, легко получить, используя второй закон Кирхгофа [1]. Пусть в рассматриваемый момент времени в цепи протекает ток I (будем считать, что колебания являются *квазистационарными*¹, и в каждый момент времени ток одинаков во всей цепи). Тогда на сопротивлении возникает падение напряжения $U_R = RI$, в катушке индуктивности возникает э.д.с. индукции $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$, а напряжение на конденсаторе выражается как $U_C = \frac{q}{C} = \frac{\int Idt}{C}$. В результате получим

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{\int Idt}{C} = 0. \quad (2.1)$$

Для заряда уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (2.2)$$

Дифференцирование этого уравнения по времени даёт

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0. \quad (2.3)$$

Как видим, колебания тока в RLC контуре описываются таким же точно уравнением, как и колебания математического либо пружинного маятника в

¹ В электродинамике квазистационарными называют поля, которые, будучи переменными во времени, сохраняют основные черты стационарных. В частности, пространственная структура такого поля не изменяется с течением времени. Если длина анализируемой цепи переменного тока много меньше длины волны соответствующего колебания, её можно анализировать по тем же законам, что и стационарные цепи, используя понятия индуктивности и ёмкости. Для таких цепей можно считать малым излучение энергии в окружающее пространство. [2]

присутствии трения. Таким образом, имеет место *колебательная общность* явлений различной физической природы [3]. В этом контексте можно говорить о некоторых аналогиях между колебаниями в RLC контуре и колебаниями грузика на пружинке. Можно сказать, что энергия заряженного конденсатора подобна потенциальной энергии сжатой пружины, а энергия созданного током в катушке индуктивности магнитного поля подобна кинетической энергии тела, связанного с пружиной. При замыкании цепи конденсатор начинает разряжаться, и в цепи начинает протекать ток (в рамках рассматриваемой аналогии замыкание цепи соответствует тому, что закрепленное на сжатой пружине тело перестают удерживать, и оно приводится в движение силой упругости). При этом энергия электрического поля в конденсаторе переходит в энергию магнитного поля катушки. По мере истощения заряда конденсатора убывает причина, поддерживающая ток в катушке. Магнитное поле начинает ослабевать, что по закону самоиндукции приводит к возникновению на концах катушки ЭДС, стремящейся сохранить убывающий ток на прежнем уровне. За счёт этой ЭДС конденсатор оказывается вновь заряженным, но в противоположной полярности. Часть энергии в каждом цикле колебаний выделяется в виде джоулева тепла на активном сопротивлении, что приводит к их затуханию.

Решения уравнений (2.2, 2.3) легко найти, составив характеристическое уравнение. Напомним, что для этого нужно представить его решение в виде $I = I_0 e^{pt}$ (для определённости здесь описывается решение уравнения (2.3), для уравнения (2.2) процедура аналогична). Тогда для показателя характеристической экспоненты p получим квадратное уравнение $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$.

Его решение имеет вид $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$. В зависимости от значений корней характеристического уравнения возможны два варианта поведения системы. Если подкоренное выражение положительно, в системе будет наблюдаться экспоненциальное убывание значения измеряемой величины (к

примеру, заряда на конденсаторе q при рассмотрении уравнения (2)) от начального значения до 0 при отсутствии колебаний (**объясните, почему**). С точки зрения теории колебаний такая ситуация отвечает наличию на фазовой плоскости осциллятора особой точки типа узел [3]. Если же подкоренное выражение отрицательно, корни характеристического уравнения приобретают комплексный характер, что приводит к возникновению колебаний в системе. При этом мнимая часть корня отвечает за частоту колебаний, а вещественная – за их затухание (**объясните, почему**). С точки зрения теории колебаний такая ситуация соответствует наличию особой точки типа устойчивый фокус [3]. Характерные фазовые портреты линейного осциллятора для двух рассмотренных случаев приведены на рис. 2.2 (рис. а – узел, рис. б – фокус).

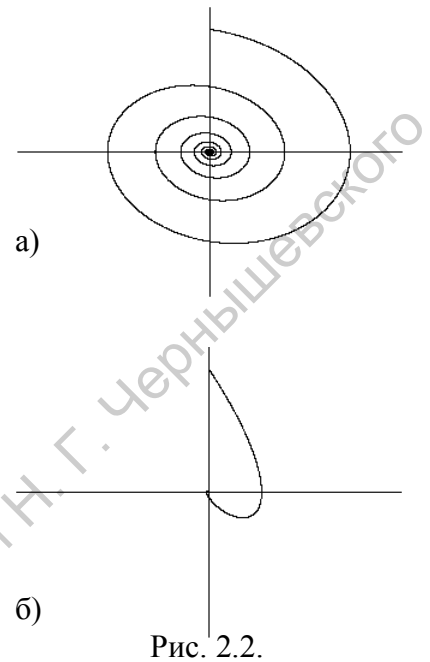


Рис. 2.2.

Важными характеристиками затухающих колебаний являются логарифмический декремент затухания и добротность колебаний. Логарифмический декремент затухания характеризует уменьшение амплитуды колебаний с течением времени, а добротность – отношение запаса энергии в системе к убыли энергии за период. Для логарифмического декремента затухания можно записать $\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{R}{2L} T$, где A_n и A_{n+1} – амплитуды n -го и $(n+1)$ -го колебаний соответственно, а T – период колебаний (**объясните вывод формулы**).

Добротность колебаний рассчитывается по формуле $Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega L}{R}$, где $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ – частота колебаний в контуре (в пределе $R \rightarrow 0$ эта формула переходит в известную формулу Томпсона). Чем больше добротность, тем медленнее в системе затухают колебания.

Затухающие колебания в колебательном контуре исследуются в работе 1.

2.2. Процессы заряда и разряда конденсатора

Если индуктивность L мала по сравнению с емкостью и сопротивлением, создаваемая в ней ЭДС индукции также будет мала, и ей можно пренебречь. В этом случае вместо колебательного контура будем иметь RC -цепочку. Эта система является удобной для наблюдения процессов заряда и разряда конденсатора.

Получим уравнение, описывающее процессы заряда и разряда конденсатора. Пусть имеется RC -цепочка с подключенной ЭДС E (рис. 2.3). Запишем для неё второй закон Кирхгофа:

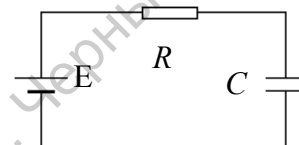


Рис. 2.3.

$$E = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}. \quad (2.4)$$

После элементарных преобразований и перехода от заряда к напряжению на конденсаторе $U_C = q/C$ получим уравнение для него $\frac{dU_C}{dt} = \frac{E - U_C}{RC}$. Его решение имеет вид

$$\ln|E - U_C| = -\frac{t}{RC} + const. \quad (2.5)$$

Для определения константы интегрирования и снятия модуля нужно учесть начальные условия. В случае, если уравнение (2.4) описывает процесс заряда конденсатора, можно считать, что $U_C(0)=0$, и в этом случае $E > U_C$. Тогда решение (2.5) примет вид $U_C = E(1 - e^{-t/RC})$ – будет наблюдаться экспоненциальное приближение напряжения на конденсаторе к максимальной величине, равной величине заряжающего напряжения.

При рассмотрении процесса разряда конденсатора в начале процесса конденсатор заряжен, а сторонняя ЭДС в цепочке отсутствует: $U_C(0)=U_0$, $E=0$. Тогда решение (2.5) принимает вид $U_C = U_0 e^{-t/RC}$ – наблюдается экспоненциальное убывание величины напряжения на конденсаторе.

Фактически, единственным существенным параметром в обоих рассмотренных случаях является величина $\tau=RC$, называемая *временем релаксации*, или постоянной времени цепочки. Она определяет скорость зарядки и разряда конденсатора. Физически τ – время, за которое в процессе разряда конденсатора заряд на нём убывает в e раз. В эксперименте бывает удобно измерять время, за которое напряжения на конденсаторе убывает вдвое. В этом случае время релаксации можно определить как $\tau = RC = 1.4425 \cdot t_{1/2}$.

Фазовый портрет процессов заряда и разряда конденсатора можно пронаблюдать, выведя на экран осциллографа зависимость тока в цепи от напряжения на конденсаторе. Для процесса разряда фазовый портрет представляет собой прямую линию (см. рис. 2.4 – фазовые портреты для различных значений нагрузки) (**Покажите это самостоятельно**).

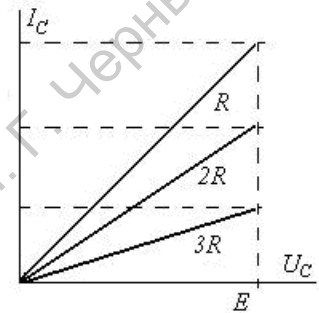


Рис. 2.4.

Процессы заряда и разряда конденсатора исследуются в работе 2.

2.3. Вынужденные колебания и резонанс в последовательном колебательном контуре

Вернемся к изучению колебательного RLC -контурa. Рассмотрим теперь вынужденные колебания. Для этого можно, например, добавить в цепь источник тока с напряжением, изменяющимся по гармоническому закону (рис. 2.5). Такой контур называется последовательным. Записывая для него закон Кирхгофа, получим аналог уравнения (2.2) для свободных колебаний:

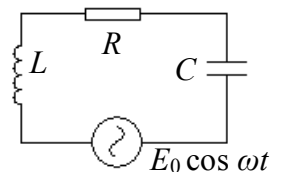


Рис. 2.5.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = E_0 \cos \omega t. \quad (2.6)$$

Аналогичным образом для тока можно записать²

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = E_0 \omega \sin \omega t. \quad (2.7)$$

² Знак « \leftarrow » в правой части формулы (2.7) опущен для удобства.

Так как в контуре имеется затухание, установившиеся вынужденные колебания будут происходить на частоте ω . В таком случае удобно перейти к записи тока и напряжения источника через комплексные амплитуды:

$E = E_m e^{j\omega t}$, $I = I_m e^{j\omega t}$. Полное сопротивление нагрузки в этом случае можно найти как $Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$, или $Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$.

Тогда, используя закон Ома, для тока можно записать

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E_m e^{j\omega t}}{|Z| e^{j\varphi}} = \frac{E_m}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)}, \quad (2.9)$$

где $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ и $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$ – амплитуда и фаза ком-

плексного сопротивления нагрузки соответственно. Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний тока в контуре зависит от частоты ω , претерпевая резкое увеличение при приближении частоты источника к частоте собственных колебаний контура (*явление резонанса*), а фаза колебаний тока отличается от фазы напряжения на угол φ . (Аналогичные соотношения можно получить и с помощью анализа уравнения (2.7) методами теории колебаний.

Прodelайте это самостоятельно.)

Также можно рассчитать значения напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности. Используя выражение (2.9) для тока в контуре, получим

$$U_L = \frac{E_m}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)} j\omega L = \frac{E_m \omega L}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})} \quad (2.10)$$

для катушки индуктивности и

$$U_C = \frac{E_m}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)} \frac{1}{j\omega C} = \frac{E_m}{|Z| \omega C} e^{j(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})} \quad (2.11)$$

для конденсатора. Для резонансной частоты формулы (2.10) и (2.11) принимают вид

$U_L = \frac{E_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$ и $U_C = \frac{E_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ соответственно (**покажи-**

те это самостоятельно). Можно заметить, что амплитуды колебаний напряжений становятся одинаковыми и отличаются от амплитуды колебаний источника в $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ раз, а фазы сдвинуты друг относительно друга на π . Величина Q есть не что иное, как добротность колебательного контура $\frac{\omega L}{R}$.

То есть в высокодобротном контуре на резонансной частоте наблюдаются противофазные колебания напряжения, существенно превышающие по амплитуде напряжение источника. Поэтому резонанс в последовательном контуре называют *резонансом напряжений*.

Вынужденные колебания и явление резонанса в последовательном контуре исследуется в работе 3.

2.4. Резонанс в параллельном колебательном контуре

Рассмотрим теперь ситуацию, когда конденсатор и катушка индуктивности подключены параллельно источнику внешнего напряжения. Обозначим активное сопротивление в соответствующих ветвях контура R_C и R_L и введём для удобства рассмотрения параллельно подключенное сопротивление R (см. рис. 2.6).

Такой колебательный контур называется параллельным. Проведем его анализ, используя вместо комплексных сопротивлений более удобные при расчёте цепей с параллельными подключениями комплексные проводимости. Проводимость R , L и C ветвей контура на частоте ω можно

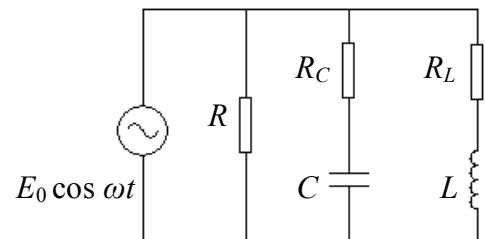


Рис. 2.6.

записать соответственно как $Y_R = \frac{1}{R}$, $Y_L = \frac{1}{R_L + j\omega L}$ и $Y_C = \frac{1}{R_C + \frac{1}{j\omega C}}$. В этом

случае закон Ома для всей цепи можно записать как $I = E_m (Y_R + Y_L + Y_C) e^{j\omega t} = E_m |Y| e^{j(\omega t - \varphi)}$, где ω и φ – абсолютная величина и фаза комплексной проводимости цепи соответственно, а I – ток внешней цепи. Токи в ветвях в таком случае можно определить как $I_k = I Y_k / Y$ (здесь k – ин-

декс, обозначающий ветвь цепи). Действительная и мнимая часть полной комплексной проводимости цепи (обозначим их A и B , $Y=A+jB$) и её фаза φ будут равны соответственно

$$A = \frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}, \quad B = \frac{1}{\omega C (R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2})} - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}, \quad (2.12)$$

$$\varphi = \arctan \frac{B}{A}.$$

Рассмотрим сначала случай отсутствия активных сопротивлений в L и C ветвях контура. В этом случае на резонансной частоте, определяемой формулой Томпсона, мнимая часть полной проводимости цепи становится равной 0, а для токов в ветвях можно записать

$$I_L = I_C = I_m R \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \Delta\varphi_L = -\frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi_C = \frac{\pi}{2}, \quad (2.13)$$

где $\Delta\varphi_k$ – сдвиг фазы тока в соответствующей цепи (ток во внешней цепи при этом изменяется синфазно с напряжением источника), I_m – амплитуда тока во внешней цепи, а величина $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$ представляет собой добротность параллельного колебательного контура. Она тем больше, чем больше сопротивление R ветви контура, и в предельном случае идеального параллельного контура стремится к бесконечности³. Таким образом, при резонансе в высокодобротном параллельном контуре в L и C ветвях возникают изменяющиеся в противофазе токи, значительно превышающие ток во внешней цепи. Поэтому резонанс в параллельном контуре называют *резонансом токов*. В этом случае резонанс соответствует резкому увеличению общего сопротивления контура на резонансной частоте.

При наличии в C и L ветвях активных сопротивлений условие резонанса можно найти, исходя из равенства 0 мнимой части комплексной проводимости (2.12):

³ Ясно, что в реальности даже при разрыве R ветви параллельного контура всегда будут присутствовать активные сопротивления в C и L ветвях, и добротность будет принимать большие, но конечные значения.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_L^2}{\frac{L}{C} - R_C^2}}. \quad (2.14)$$

Таким образом, резонансная частота параллельного колебательного контура зависит не только от реактивных, но и от активных сопротивлений ветвей контура.

Явление резонанса в параллельном контуре исследуется в работе 4.

2.5. Лабораторные работы

Работа 1. Исследование затухающих колебаний

Данная работа предполагает наблюдение затухающих колебаний в RLC контуре, экспериментальное определение частоты колебаний, декремента затухания и добротности, исследование зависимости указанных характеристик от величины вносимого в контур сопротивления, исследование фазовых портретов колебаний.

Принципиально экспериментальная установка представляет собой колебательный контур, на который подаётся периодическая последовательность импульсов. Сигнал с контура выводится на осциллограф. Длина импульса достаточна для того, чтобы произошел заряд конденсатора. В промежутке между импульсами происходят свободные колебания в контуре. В начале промежутка конденсатор заряжен максимально, а затем в зависимости от значения сопротивления происходит либо экспоненциальный процесс разряда, либо затухающие колебания. При правильно подобранном промежутке следования импульсов к моменту начала действия следующего импульса конденсатор практически полностью разряжен. Величину активного сопротивления можно изменять при помощи магазина сопротивлений.

Упражнения

1. Подобрать сопротивление таким образом, чтобы система демонстрировала затухающие колебания. В этом режиме провести измерение частоты

собственных колебаний колебательного контура, логарифмического декремента затухания и добротности.

Напомним, что частоту колебаний можно определить как $\omega = 2\pi/T$, где период колебаний T нетрудно определить по осциллограмме, пользуясь данными о длительности развёртки, приходящейся на одну клеточку делений. Среднее значение логарифмического декремента затухания можно рассчитать по формуле $\delta = \ln \frac{V_{10}}{V_{20}}$, где V_{10} и V_{20} – амплитуды соседних чётных и не-

чётных колебаний, а добротность – как $Q = \frac{\pi}{\delta}$.

2. Сравнить полученные результаты с значениями, рассчитанными с использованием параметров установки (их можно взять в паспортах используемых устройств).

3. Повторить описанные измерения в некотором диапазоне значений сопротивления R , по результатам измерений построить графики зависимости экспериментальных и расчётных значений ω , δ и Q от R , сравнить их.

4. Изменяя значения сопротивления, пронаблюдать динамику системы как в случае существования на фазовой плоскости осциллятора особой точки типа устойчивый фокус, так и типа устойчивый узел. Для наблюдения фазовых портретов необходимо отключить горизонтальную развёртку осциллографа. Зарисовать в тетрадь характерные фазовые портреты и временные реализации и сравнить их с приведенными на рис. 2.

Работа 2. Исследование процессов заряда и разряда конденсатора

Данная работа предполагает исследование поведения конденсатора в цепи с импульсным напряжением. Принципиальная схема экспериментальной установки приведена на рис. 2.7. При замкнутом ключе K происходит процесс заряда конденсатора, при разомкнутом – процесс разряда.

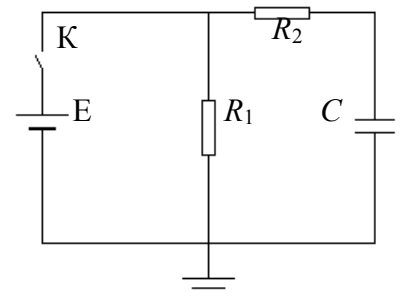


Рис. 2.7.

При таком подключении при заряде конденсатора постоянная времени цепи будет определяться сопротивлением R_2 , а при разряде – суммарным сопротивлением R_1+R_2 (**покажите это самостоятельно**). Величины ёмкости и сопротивлений можно регулировать с помощью магазинов ёмкостей и сопротивлений, замыканию и размыканию ключа К соответствует подача прямоугольных импульсов генератором. При этом частота следования импульсов должна быть не очень высокой. В противном случае процесс разряда конденсатора не будет успевать завершиться к моменту начала следующего импульса.

Упражнения:

1. При постоянной величине ёмкости конденсатора определить зависимость постоянной времени разряда от суммарного сопротивления в цепочке, построить график. По углу наклона графика определить ёмкость конденсатора, сравнить с реальным значением. Измерения повторить для нескольких значений ёмкости. Исследовать влияние изменения сопротивлений R_1 и R_2 по отдельности.

2. При постоянной величине суммарного сопротивления определить зависимость постоянной времени разряда от ёмкости конденсатора, построить график. По углу наклона графика определить сопротивление, сравнить с реальным значением. Измерения повторить для нескольких значений сопротивления.

3. При постоянной величине ёмкости конденсатора определить зависимость постоянной времени заряда от сопротивления R_2 , построить график. По углу наклона графика определить ёмкость конденсатора, сравнить с реальным значением. Пронаблюдать процесс заряда конденсатора при различных величинах сопротивления R_1 , проверить выводы теории.

4. Получить изображение фазовых портретов процесса заряда и разряда конденсатора при различных значениях R и C , сравнить с предсказаниями теории, зарисовать несколько характерных портретов в тетрадь. Чему соответствуют яркие и бледные участки на фазовом портрете? Для наблюдения

фазовых портретов необходимо отключить горизонтальную развертку осциллографа.

Работа 3. Вынужденные колебания и резонанс в последовательном контуре

Данная работа предполагает наблюдение вынужденных колебаний в последовательном колебательном контуре, получение резонансных кривых, определение зависимости резонансной частоты от параметров контура.

Принципиально экспериментальная установка представляет собой колебательный контур с последовательным включением источника переменного напряжения, колеблющегося по гармоническому закону. Имеется возможность регулирования частоты колебаний напряжения источника, а также сопротивления и емкости колебательного контура с помощью магазинов сопротивлений и ёмкостей.

Упражнения

1. Рассчитать резонансную частоту контура для $C = 0.003 \text{ мкФ}$.
2. Определить диапазон частот генератора, необходимый для снятия резонансных кривых контура, считая, что $f_{\text{нижн}} = 0.1 \cdot f_{\text{рез}}$, а $f_{\text{верх}} = 10 \cdot f_{\text{рез}}$.
3. Снять по точкам зависимость падения напряжения на сопротивлении R от частоты генератора, обеспечив достаточное количество точек внутри рассчитанного диапазона при фиксированном сопротивлении, построить резонансную кривую. Прodelать описанную операцию для двух-трёх значений сопротивлений, сравнить полученные кривые.
4. Изменяя ёмкость с помощью магазина ёмкостей, снять зависимость резонансной частоты от ёмкости в контуре и построить график.

Работа 4. Резонанс в параллельном контуре

Данная работа предполагает наблюдение резонанса в параллельном контуре и исследование зависимости резонансной частоты от активных сопротивлений в ветвях контура.

Принципиально экспериментальная установка представляет собой параллельный колебательный контур с источником переменного напряжения, колеблющегося по гармоническому закону. Имеется возможность регулирования частоты колебаний напряжения источника, а также емкости колебательного контура и сопротивлений в L и C ветвях контура с помощью магазинов сопротивлений и ёмкостей. Внешнее воздействие на контур производится генератором звуковых частот через конденсатор

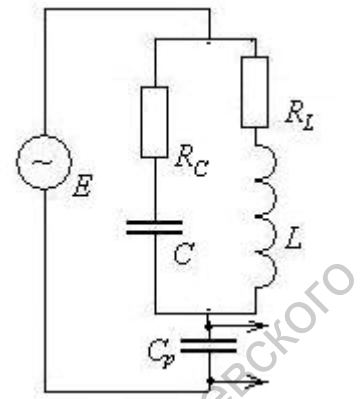


Рис. 2.8.

C_p , сопротивление которого на порядок выше сопротивления контура на резонансной частоте (рис. 2.8). Выходной сигнал на осциллограф снимается с делителя напряжения, образованного этим конденсатором и эквивалентным сопротивлением контура. При больших значениях сопротивления контура амплитуда поступающего на осциллограф сигнала увеличивается, что позволяет пронаблюдать резонансную кривую и определить момент резонанса.

Упражнения

1. Выбрать режим включения установки, при котором не вносятся дополнительных активных сопротивлений в ветви контура. Рассчитать частоту резонанса, учтя собственное сопротивление катушки индуктивности. Значения необходимых величин можно взять в паспортах используемых устройств.

2. Установить частоту генератора вблизи расчетного значения. Изменяя частоту, настроиться на резонансный режим, основываясь на максимум тока на контуре по картинке на экране осциллографа. Измерить частоту генератора с помощью частотомера и сравнить полученное значение с расчетным.

3. Исследовать влияние сопротивления в индуктивной ветви контура на резонансную частоту. Для этого при фиксированной величине емкости и подключенном последовательно с катушкой магазином сопротивлений снять по точкам зависимость резонансной частоты от сопротивления. Используя формулу для расчета резонансной частоты параллельного контура, найти

теоретические значения для условий опыта и сравнить их с экспериментальными точками.

4. Исследовать влияния сопротивления в емкостной ветви контура на условия резонанса. Для этого магазин сопротивлений включить последовательно с магазином емкостей. Установить магазин емкостей на то же значение емкости, что и в предыдущем упражнении, снять по точкам зависимость резонансной частоты от сопротивления магазина. Провести сравнение экспериментальных результатов с теорией.

По результатам измерений построить графики.

Литература к разделу 2

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 5 т. Том III. Электричество. М.: Физматлит, изд-во МФТИ, 2004, 656 с.
2. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М: Наука, 1989, 544 с.
3. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002, 292 с.