ГАНГНУС Ю. С.

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Саратов

2012 г.

Данное методическое пособие представляет собой конспект лекций, читавшихся в течении многих лет Гангнусом Юрием Сергеевичем на дневном и вечернем отделениях физического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского. Этот курс не имеет аналогов в литературе и в методическом отношении является оригинальной разработкой автора. К достоинствам пособия следует отнести ясность изложения и подробность проводимых доказательств. Предлагаемый материал может быть полезен для преподавателей и студентов других вузов.

Введение. Электромагнитное поле в вакууме.

Электромагнитное поле в вакууме характеризуется векторами напряжённости электрического и магнитного полей $\left(\overline{E}\, и\, \overline{H}\right)$. В качестве основы для дальнейшего изложения возьмём **систему уравнений Максвелла** электромагнитного поля.

(I) $\oint\limits_L \overline{H}\,\overline{dL} = \frac{4\pi}{c} I(L) + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \overline{E}\,\overline{dS}$,

(II) $\oint\limits_L \overline{E}\,\overline{dL} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \overline{H}\,\overline{dS}$,

(III) $\oint\limits_S \overline{H}\,\overline{dS} = 0$,

(IV) $\oint\limits_S \overline{E}\,\overline{dS} = 4\pi e(s)$.

Здесь использовалась абсолютная система единиц, в которой величина c является электродинамической постоянной, совпадающей со скоростью света в вакууме.
Скалярные произведения, стоящие под знаками интегрирования определены стандартным образом.

$, \overline{H}\,\overline{dL} = H_e dL$

$\overline{E}\,\overline{dS} = E_n dS$.

Напомним физический смысл используемых уравнений.

Выполнение (III) означает, что нет свободных магнитных зарядов.
Соответственно, (IV) утверждает что электрическое поле порождается электрическими зарядами 2х противоположных зарядов.
Уравнение (II) утверждает, что электрическое поле, кроме заряда может создаваться изменением поля магнитного.
Аналогично этому (I) утверждает, что магнитное поле создаётся не только электрическими токами, но и изменением поля электрического.
Из (I) и (II) видно, что переменное электрическое и магнитное поля не существуют отдельно друг от друга и образуют единое электромагнитное поле.

В области непрерывности и конечности векторов поля $\overline{E}$ и $\overline{H}$ выполняется система дифференциальных уравнений.

(I) $rot\overline{H} = \frac{4\pi}{c}\overline{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$,

(II) $rot\overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$,

(III) $div\overline{H} = 0$,

(IV) $div\overline{E} = 4\pi\rho$.

В правой части уравнений стоит вектор плотности тока $\overline{j}\,(j_n, j_\tau)$,

$j_n = \dfrac{dI}{dS}$ $\left(j_n = \dfrac{I}{S}\right)$, (при однородном распределении I по сечению проводника).

и пространственная плотность электрического заряда $\rho = \dfrac{de}{dV}$ $\left(\rho = \dfrac{e}{V}\right)$,(при однородном распределении заряда по объёму).

При решении реальных физических задач, когда источники поля находятся в точечных, по размерам, областях, следует использовать стандартные краевые условия:

$$E \sim \frac{1}{R^2}\ ,\qquad H \sim \frac{1}{R^2}\ ,\qquad R \to \infty$$

Используя известные тождества из курса векторного анализа

$divrot\overline{a} \equiv 0$

$rotgradf \equiv 0$, логично ввести потенциалы поля, как формальные решения (III) и (II) дифференциальных уравнений.

$$(\mathrm{III}) \to \overline{H} = rot\overline{A}$$

$$(\mathrm{II}) \to rot\overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\overline{A}$$

$$rot\left(\overline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \overline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = -grad\varphi\,.$$

Проверка, показывает, что одновременная замена

$$\begin{cases} \overline{A} \to \overline{A'} = \overline{A} + gradf\,, \\ \varphi \to \varphi' = \phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial f}{\partial t}\ , \end{cases}$$

не меняет наблюдаемых величин $\overline{E}$ и $\overline{H}$, и оставляет уравнения Максвелла инвариантными. Этот факт носит название **калибровочной инвариантности электромагнитного поля**. Воспользовавшись произволом в определении векторного и скалярного потенциалов, потребуем выполнения для них условий Лоренца.

$$div\overline{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\,.$$

Воспользовавшись этим условием, от (I) и (IV) переходим к **уравнениям Деламбера**, которые не однородны на $V_{заряда}$ и $V_{тока}$ и однородны вне зарядов и токов.

$$\nabla^2\overline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\overline{j}\ ,$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$, где

$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Решение этих уравнений даёт

для точечного заряда

$$\varphi(R,t) = \frac{e(t - \frac{R}{c})}{R},$$

а для пространственных источников

$$\varphi(P,t) = \int_{V_{зар}} \frac{\rho(t - \frac{R}{c})}{R} dV,$$

$$\overline{A}(P,t) = \frac{1}{c}\int_{V_{njrf}} \frac{j(t - \frac{R}{c})}{R} dV.$$

Здесь R – расстояние от точек, принадлежащих источникам поля, до точки P, в которой, это поле изучается. Разная зависимость от времени слева и справа отражает важное физическое явление, называемое запаздыванием. Запаздывание проявляется в том, что изменения потенциалов в точке наблюдения отстают от породивших их изменения в точках истока e и dV. Физической причиной запаздывания является конечность скорости распространения электромагнитного поля в пространстве ($c = 3\cdot 10^8\ м/с$). Полю требуется время, называемое временем запаздывания $t_{зап} = \frac{R}{c}$, а чтобы пройти расстояние R запаздывание обеспечивает отрыв электромагнитных волн от источников.

Статистический предел для электромагнитного поля $\left(\frac{\partial\overline{E}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial t} = 0\right)$ приводит к его расщеплению на две независимые части: электростатическое поле(ЭСП) и стационарное магнитное поле (СМП). В результате вышеприведённые соотношения делятся на два независимых набора.

Для ЭСП имеем

$\oint_L \overline{E}\overline{dL} = 0$, $\oint_S \overline{E}\overline{dS} = 4\pi e(s)$.

$rot\overline{E} = 0$,

$div\overline{E} = 4\pi\rho$.

$\overline{E} = -grad\varphi$,

$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$,

$\varphi = \frac{e}{R}, \varphi = \int_{V_{зар}} \frac{\rho}{R} dV$.

Для СМП выполняется

$$\oint_L \overline{H}\,\overline{dL} = \frac{4\pi}{c} I(L),$$

$$\oint_S \overline{H}\,\overline{dS} = 0.$$

$$rot\overline{H} = \frac{4\pi}{c}\overline{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t},$$

$$div\overline{H} = 0.$$

$$\overline{H} = rot\overline{A}.$$

$$\nabla^2 \overline{A} = -\frac{4\pi}{c}\overline{j},$$

$$\overline{A} = \frac{1}{c}\int_{V_{тока}} \frac{\overline{j}}{R} dV.$$

Все эти соотношения будут использоваться в дальнейшем.

Тема I. Поляризация и намагничивание неподвижных сред.

1. Влияние среды на характеристики поля

Запишем закон Кулона в вакууме:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ в системе СИ, где ε_0 – некая электрическая постоянная,

$k = 1$ в абсолютной системе единиц (СГС).

Закон Кулона в среде выглядит так:

$$F = \frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2},$$

где r – расстояние между точечными зарядами, ε – диэлектрическая проницаемость среды,

$\varepsilon = 1$ для вакуума, $\varepsilon > 1$ для среды.

ε показывает степень ослабления кулоновских сил средой по сравнению с вакуумом. Это объясняет диссипацию веществ в воде.

$E = \frac{F}{|q_0|} = \frac{|q|}{\varepsilon r^2}$ – для точечного заряда.

Для любого заряда E ослабляется в ε раз.

Для вакуума:

$div\ \overline{E} = 4\pi\rho$, ρ – плотность электрического заряда.

Для среды:

$div\ \overline{D} = 4\pi\rho, \overline{D} = \varepsilon\overline{E}.$

Посмотрим на потенциал:

$rot\ \overline{E} = 0 \ => E = -grad\ \varphi,$

$grad\ \varphi = \overline{n}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{n}}$, $\overline{n}$ в направлении наибольшего возрастания напряжённости.

Пусть l – любое направление, тогда

$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}, d\varphi = -E_l dl, \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E_l dl.$

Введём понятие разности потенциалов.

За ноль потенциала в физических задачах берём ∞.

$0 - \varphi_1 = -\int_1^\infty E_l dl$.

$\varphi_1 = \int_1^\infty \frac{q}{\varepsilon r^2} dr = \frac{q}{\varepsilon r}$ для $\varepsilon \neq \varepsilon(r)$ – в однородной среде.

$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$ – бесконечная нормировка однородного поля.

Стационарное магнитное поле.

$rot\ \overline{H} = \frac{4\pi}{c}\overline{j}, \overline{j} = \frac{dI}{d\overline{S}}$ – плотность тока.

$div\ \overline{H} = 0.$

Закон Био-Савара-Лапласа: (для вакуума)

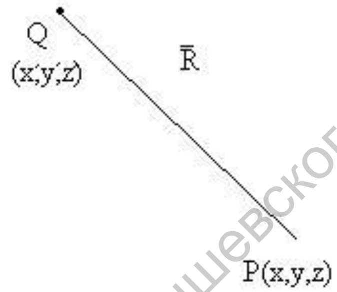
$H = \frac{I}{c}\oint_L \frac{[d\overline{l}\overline{R}]}{R^3}.$

Для сред:

$\overline{B} = \mu\overline{H} = \frac{\mu I}{c}\oint_L \frac{[d\overline{l}\overline{R}]}{R^3}.$

B – магнитная индукция.
μ может быть как больше единицы, так и меньше, и равно единице.
$\mu < 1$ – диамагнетики (ослабляют магнитное поле)
$\mu > 1$ – парамагнетики (усиливают магнитное поле)
$\mu \gg 1, \mu = \mu(E)$ – ферромагнетики.
Для нелинейных сред и уравнений принцип суперпозиции не срабатывает.
Вместо второго уравнения для таких сред получаем
$div\ \overline{B} = 0.$
Первое уравнение меняется сложнее.

2. Потенциал электрически нейтральной системы.



Пусть система из $e_i\,(i=1,2,..n)$ зарядов обладает суммарным нулевым электрическим зарядом $\sum_{i-1}^{n} e_i = 0$.

Для точечного заряда используем выражение для потенциал

$$\varphi = \frac{e}{R},$$

где R- расстояние от е до точки P.

(Q- точка истока,. P-точка наблюдения).

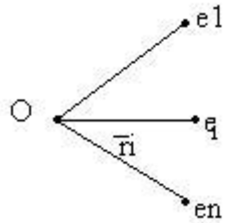
$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$. Видим, что R зависит от шести переменных.

$$R = R(x, y, z, x', y', z')$$

Используем принцип суперпозиции $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{R_i}$ и введём новую величину $\overline{\rho} = \sum_{i=1}^{n} e_i \overline{r_i}$,

которую назовем **электрическим моментом системы**. Выберем произвольную точку O как центр электрически нейтральной системы. Заметим, что если вместо O взять O', смещённый на вектор $\overline{a}$, то электрический момент нейтральной системы $\overline{\rho}$ не изменяется, т.е $\overline{\rho}$ **не зависит от выбора центра системы.**

РИС 1.1



$$\overline{\rho} = \rho' = \sum_{i=1}^{n} e_i \overline{r_i'} = \sum_{i-1}^{n} e_i \overline{r_i} \pm \overline{a} \sum_{i=1}^{n} e_i = \overline{\rho}$$, поскольку

$$\overline{r_i'} = \overline{r_i} \pm \overline{a}.$$

Частный случай Система из 2х зарядов образует **диполь-** совокупность 2х равных по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов, расстоянием между которыми можно пренебречь по сравнению с расстоянием от них до точки наблюдения.

$$\overline{p} = e\overline{r_+} - e\overline{r_-} = e(\overline{r_+} - \overline{r_-}) = e\overline{e}$$

Вернёмся к совокупности n зарядов. Для них

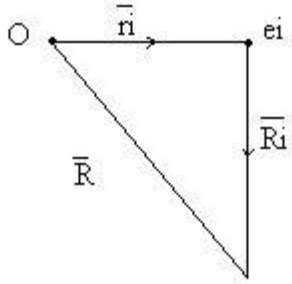
$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{R_i}$$, где

$$\overline{R_i} = \overline{R} + \overline{r_i} \rightarrow R_i^2 = R^2 - 2\overline{R}\overline{r_i} + r_i^2 = R^2\left(1 - 2\frac{r_i}{R}\cos\theta_i + \frac{r_i^2}{R_i^2}\right)$$

$$\overline{R}\overline{r_i} = Rr_i\cos\theta_i$$

Будем считать, что:

$R \gg r_i$
$R_i \gg r_i$ в итоге $\frac{r_i}{R} = x_i$ - малая величина.



Пренебрежем величиной 2го порядка малости. Что даёт $R_i = R\left(1-2x_i\cos\theta_i\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R}\left(1-2x_i\cos\theta_i\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}\left(1-2x_i\cos\theta_i\right)$$

РИС. 1.2

Используем бином Ньютона

$(1+ax)^n = 1+nax+O(x^2)$.

Считая $n=\frac{1}{2}, a=-2\cos\theta_i$, и ограничимся первым порядком малости, получаем

$\varphi = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n} e_i\left(1-2x_i\cos\theta_i\right) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n} e_i + \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{R}\cos\theta_i = \frac{1}{R^3}\sum_{i=1}^{n} e_i\overline{r_i}\,\overline{R} = \frac{\overline{P}\,\overline{R}}{R^3}$. Следовательно

$\varphi = \frac{\overline{pR}}{R^3}$ (1.1)

Считая электрический момент направленным по оси z, имеем

$\varphi = \frac{P\cos\theta}{R^2}$; $\varphi = \varphi(R,\theta,\alpha)$, где θ - угол между R и осью z, α угол между осью x и проекцией R на плоскость xy.

Найдём напряженность электростатического поля диполя.

$\overline{E} = -grad\varphi$

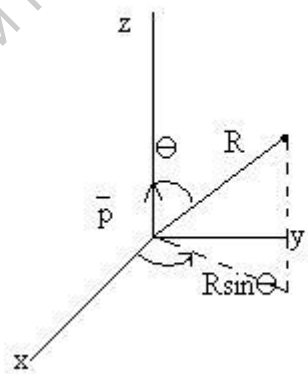


РИС1.3

Используя $grada = \overline{e_R}\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{\overline{e_n}\partial f}{R\partial\theta}\cdot\frac{\overline{e_\alpha}\partial f}{\sin\theta\partial\alpha}$

получим

$E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R}$,

$E_Q = -\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$,

$E_\alpha = \frac{1}{R}\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$,

$E_R = \frac{2p\cos\theta}{R^3}$,

$E_Q = \frac{p\sin\theta}{R^3}$, (1.2)

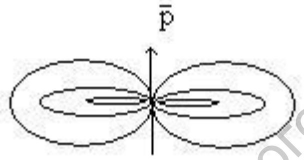
$E_\alpha = 0$. Графически представим распределение $\overline{E}$ в пространстве с помощью электрических силовых линий, для которых $\overline{dL}\uparrow\uparrow\overline{E}$ условия коллинеарности $\overline{dL}(dR, Rd\theta, R\sin\theta d\alpha)$ и $\overline{E}(E_R, E_\theta, E_\alpha)$ имеет вид

$$\frac{dR}{E_r} = \frac{RdQ}{E_\theta} = \frac{R\sin\theta d\alpha}{E_\alpha}$$

Подставляем $E_R u E_\theta$ и, отбрасывая последнее равенство, получаем

$$\frac{R^3dR}{2p\cos\theta} = \frac{R^3d\theta}{p\sin\theta} \Rightarrow \frac{dR}{R} = 2\frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$

$$\int\frac{dR}{R}=2\frac{d\sin\theta}{\sin\theta}$$



lnR=2lnsinθ+lnC Получаем семейство линий (1.3)
R=csin$^2\theta$
Которое представлено на рисунке.

РИС 1.4

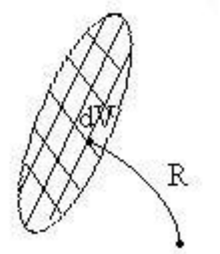
Отметим, что в характеристиках поля электрически нейтральной системы отсутствует указание на число зарядов ее образующих. В электрическом отношении такие системы эквивалентны диполям с тем же значением электрического момента $\bar{p}$.

3. Потенциал электростатического поля в неоднородной среде.

Диэлектрики – это среды не способные проводить электрический ток. **Явление поляризации** заключается в том, что диэлектрики, попадая во внешнее электрическое поле создают собственное электрическое поле. В отсутствии внешнего поля явления **поляризации нет.**
$\bar{E}=\bar{E}_{внеш}=0\Rightarrow\bar{E}_{собст}=0$. Поскольку электрически нейтральные системы эквивалентны диполям можно считать диэлектрик состоящим из диполей. Во внешнем поле диполи выстраиваются в среднем в направлении $\bar{E}_{внеш}$ и их электрические поля складываются.
$\bar{E}=\bar{E}_{внеш}=0;\bar{E}_{собст}\neq 0$
Введём функцию распределения электрического момента по диэлектрикам $\bar{p}\equiv\bar{p}(x,y,z)$.

Определим вектор поляризации как $\bar{p}=\frac{d\bar{p}}{dV}$ очевидно что он связан с внешним напряжением
$\bar{p}=\alpha\bar{E}$ (2.1) потенциал ЭСП в вакууме, где α - **поляризуемость диэлектрика.**
Вклад в потенциал от диэлектрика представим как

РИС 3.1



$$\varphi_0=\int\limits_{V_{зар}}\frac{\rho dV}{RdV}+\int\limits_{Saa}\frac{\delta}{RdV}dS$$

$\varphi_1=\int\limits_{V\partial}\frac{d\bar{p}\bar{R}}{R^3}dV$ где для элемента объёма диэлектрика.

$d\bar{p}=\bar{p}dV$ и $d\varphi_1=\frac{d\bar{p}\bar{R}}{R^3}$, в соответствии с (1.1)
Используем формулы векторного анализа.

$$grad_p\frac{1}{R}=-\frac{\bar{R}}{R^3}=-grad_a\frac{1}{R},$$
$$div(f\bar{a})=fdiv\bar{a}+\bar{a}grad\rho,$$

получаем

$$\bar{P}grad_Q\frac{1}{R}=\frac{div\bar{P}}{R}-div_Q\frac{\bar{P}}{R}$$

тогда

$$\varphi_1 = \int\limits_{V\partial} div_Q \frac{\overline{P}}{R} dV - \int\limits_{V\partial} \frac{div\overline{P}}{R} dV.$$

Преобразуем первый интеграл по теореме Остроградского – Гаусса.

$$\varphi_1 = \oint\limits_{S} \frac{\overline{P}}{R}\overline{dS} - \int\limits_{V\partial} \frac{dV\overline{P}}{\overline{R}} dV + \oint\limits_{S \to S\text{г}} \frac{\overline{P}}{R}\overline{dS}$$

Здесь из рассматриваемой области исключены точки, принадлежащие Sгр, в которых

$\overline{P}_1 \neq \overline{P}_2$

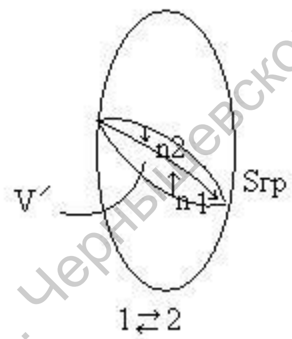


РИС 3.2

$$\oint\limits_{S} \frac{\overline{P}}{R}\overline{dS} - \oint\limits_{V\partial} \frac{div\overline{P}}{R} dV + \oint\limits_{S\text{г}} \frac{P_{1n}}{R_1} dS - \oint\limits_{S\text{гг}} \frac{P_{2n}}{R_2} dS = \oint\limits_{S} \frac{P_n}{R} dS - \int\limits_{V\partial} \frac{div\overline{P}}{R} dV + \int \frac{P_{1n} - P_{2n}}{R} dS$$

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$

$$\varphi_1 = -\int\limits_{V\partial} \frac{div\overline{P}}{R} dV + \int \frac{P_{1n} - P_{2n}}{R} dS + \oint\limits_{S} \frac{P_n}{R} dS$$

Рассмотрим случай полного поля, при выполнении стандартных краевых условий

$V_{\text{диэл}} \to \infty$; $S \to \infty; (E \sim \frac{1}{R^2}, R \to \infty)$. Вычислим интеграл по внешней поверхности S,считая её сферой бесконечно растущего радиуса R с центром на диэлектрике. В пределе P=Pn, а подынтегральное выражение становиться константой, и с учётом $P = \alpha E$,получаем

$$\oint\limits_{S} \frac{P_n}{R} dS = \frac{P}{R} \oint\limits_{R \to \infty, S \to \infty} dS = \frac{dE}{R} \cdot 4\pi R^2 \sim \frac{1}{R^3}_{R \to \infty} \cdot R^2 = 0.$$

В результате, при этих условиях, получаем:

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$,

$$\varphi = \int\limits_{V\text{з}} \frac{S}{R} dV + \int\limits_{S\text{з}} \frac{\sigma}{R} dS - \int\limits_{V\partial} \frac{div\overline{P}}{R} dV + \int\limits_{S\text{г}} \frac{\overline{P}_{1n} - \overline{P}_{2n}}{R} dS$$

Сгруппируем интегралом

$$\varphi = \int\limits_{V} \frac{\rho - div\overline{P}}{R} dV + \int\limits_{S} \frac{\delta + (P_{1n} - P_{2n})}{R} dS, \text{ где}$$

$V = V_{\text{зар}} + V_{\text{гр}},$

$S = S_{\text{зар}} + S_{\text{гр}}.$

Размерность $div\overline{P}$ совпадает с размерностью пространственного заряда, а размерность $(P_{1n} - P_{2n})$ - с размерностью плотности поверхностного заряда. Обозначим

$$\rho_{св} = -div\overline{P} (2.2)$$

$$\sigma_{св} = P_{1n} - P_{2n} (2.3)$$

В результате для **потенциала в неоднородной среде получаем:**

$$\varphi = \int_V \frac{\rho + \rho_{св}}{R} dV + \int_S \frac{\sigma + \sigma_{св}}{R} dS (2.4)$$

Связанными зарядами будем называть электрические заряды, объединённые в диполе внутри диэлектриков.

4. Связь между силовыми характеристиками электростатического поля.

В неоднородной среде при Стандартных краевых условиях.(СКУ)

$$\varphi = \int_V \frac{\rho + \rho_{св}}{R} dV + \int_S \frac{\sigma + \sigma_{св}}{R} dS (2.4),$$

$$\rho_{св} = -div\overline{P},$$

$$\sigma_{св} = P_{1n} - P_{2n},$$

$\overline{P}$ **-вектор поляризации диэлектрика**

В вакууме $(\varepsilon = 1)$ выражение для потенциалов ЭСП (введение)

$\varphi = \int_{V з} \frac{\rho}{R} dV + \int_S \frac{\sigma}{R} dS,$ **уравнения Пуассона и Лапласа**

$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$ (на $V_{зар}$),

$\nabla^2 \varphi = 0$ (вне зарядов),

При выполнении стандартных краевых условий (СКУ).

Обозначим:

$\rho' = \rho + \rho св,$

$\sigma' = \sigma + \sigma св,$

$\varphi = \int_{V з} \frac{\rho'}{R} dV + \int_S \frac{\sigma'}{R} dS$

Можем восстановить краевую задачу для потенциала в неоднородной среде.

$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho'$ (на $V_{зар}$ и $V_{диэл}$),

$\nabla^2 \varphi = 0,$

При стандартных краевых условиях.

Следовательно в неоднородной среде потенциал подчиняется уравнению.

$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho \; (\rho' = \rho + \rho св)$ (3.1)

Учитывая что $\nabla^2 \varphi \equiv divgrad\varphi = -div\overline{E}$,

$\overline{E} = -grad\varphi$,

$\rho_{св} = -div\overline{P}$,

получаем

$$-div\overline{E} = -4\pi\rho + 4\pi div\overline{P}$$

Кулоновские силы и $\overline{E}$ внутри диэлектриков ослабляются в ε раз. Введём ещё одну силовую характеристику ЭСП, называемую **электрической индукцией**.

$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$

$divD = 4\pi\rho$

Получаем из уравнения (3.1)

$div\overline{E} = div\overline{D} - 4\pi div\overline{P},$

$div\overline{D} = div(\overline{E} + 4\pi\overline{P})$

$\overline{D} = \overline{E} + 4\pi\overline{P} + \overline{C}$

Константу С будем считать нулевой, поскольку она равно нулю в случае отсутствия диэлектриков и ЭСП.

$\overline{D} = \varepsilon\overline{E}, \overline{P} = \alpha\overline{E}$,

$\varepsilon\overline{E} = \overline{E} + 4\pi\alpha\overline{E}$.

Находим связь между диэлектрической проницаемостью ε и поляризуемостью диэлектрика α .

$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$, (3.2)

$\varepsilon \geq 1, \alpha \geq 0,$

$\alpha = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi},$

$\overline{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}\overline{E},$

$\overline{P} = 0(\varepsilon = 1, \overline{E} = 0)$.(3.3)

Видно, что вакуум не поляризуется и само явление поляризации отсутствует, если нет внешнего поля.

Рассмотрим частный случай когда среда однородна ($\varepsilon = const, \alpha = const$) . Для упрощения предположим, что нет поверхностных зарядов и границ раздела между различными диэлектриками.

$S_{зар}$ и $S_{гр}$ – нет

$\varphi = \int\limits_V \dfrac{\rho - \rho_{св}}{R} dV$, $V = V_{зар} + V_{д}$

$\rho + \rho св = \rho - div\overline{P} = \rho - \dfrac{\alpha}{\varepsilon} div\overline{D} = \rho - \dfrac{\alpha}{\varepsilon} 4\pi\rho = \rho\left(\dfrac{\varepsilon - 4\pi\alpha}{\varepsilon}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$

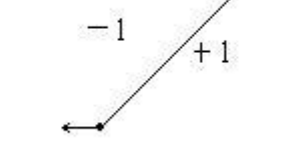
Следовательно, в одной среде

$\varphi = \dfrac{1}{\varepsilon} \int\limits_{V_З} \dfrac{\rho}{R} dV$ (3.4)

5. Сила, действующая на диэлектрики в ЭСП

На точечный заряд в электрическом поле действует сила

РИС 5.1



$\overline{F} = e\overline{E}, \overline{E} = \overline{E}(x, y, z)$

Сила действующая на диполь, представляет собой пару сил

$\overline{E}(x', y', z') = e\overline{E}(x, y, z) + el\dfrac{\partial\overline{E}}{\partial l} + 0(l^2).$

$grad_l f = \dfrac{\partial f}{\partial l} = \nabla_l$, $\overline{a}\overline{b} = ab_a, \overline{\rho} = e\overline{l}$

$$\overline{F} = e\overline{E}(x', y', z') - e\overline{E}(x, y, z) = el\frac{\partial \overline{E}}{\partial L} = el\nabla_l \overline{E} = l(\bar{l}\nabla)\overline{E} = (\overline{p}\nabla)\overline{E}$$

$$\overline{F} = \left(P_x\frac{\partial}{\partial x} + P_y\frac{\partial}{\partial y} + P_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\overline{E} \ (4.1)$$

Где $\overline{\rho}(P_x, P_y, P_z)$, $\nabla(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Определим силу действующую на диэлектрик.

Представим Vд как совокупность конечного числа элементов dV, каждый из которых можно считать элементарным диполем.

$d\overline{P} = \overline{P}dV$,

Из (4.1) следует

$d\overline{F} = (d\overline{\rho})\overline{E} = (\overline{P}\nabla)\overline{E}dV$,

$$\overline{F} = \int_{V\partial}(\overline{P}\nabla)\overline{E}dV \ (4.2)$$

Введём **пространственную плотность силы** : $\overline{f} = \frac{d\overline{F}}{dV}, \overline{F} = \int_V \overline{f}dV$. Для неё получим

$$\overline{f} = (\overline{P}\nabla)\overline{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}(\overline{E}\nabla)\overline{E}. \ (4.3)$$

$$\overline{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\overline{E}$$

Используя формулу векторного анализа

$grad(\overline{a}\overline{b}) = [\overline{a}\, rot\overline{b}] + [\overline{b}\, rot\overline{a}] + (\overline{a}\nabla)\overline{b} + (\overline{b}\nabla)\overline{a}$, полагая

$\overline{a} = \overline{b} = \overline{E}$, получим

$grad\overline{E}^2 = 2[\overline{E}\, rot\overline{E}] + 2(\overline{E}\nabla)\overline{E}$.

Поскольку ЭСП потенциально

$rot\overline{E} = 0$,

имеем

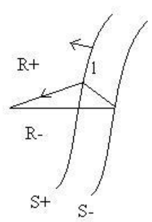
$(\overline{E}\nabla)\overline{E} = \frac{1}{2}grad\overline{E}^2$. В результате **для диэлектрика плотность силы**

$$\overline{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}gradE^2 \ (4.4)$$

Плотность силы, действующей на диэлектрик, не зависит от направления вектора $\overline{E}$, и направлен в сторону роста его модуля. Это приводит к тому, что диэлектрик всегда втягивается в поле, независимо от того, каким зарядом оно создаётся.

6. Двойной электрический слой

РИС 6.1



двойной электрический слой – совокупность 2х, параллельных друг другу поверхностей, противоположные элементы которых обладают равными по величине, но противоположными по знаку зарядами, причём расстоянием между поверхностями можно пренебречь, по сравнению с их размерами, и расстоянием от них до точки наблюдения.

Будем считать, что двойной электрический слой- совокупность конечно числа элементарных диполей

$\overline{dS}$, с электрическими моментами

$d\bar{\rho} = de\bar{l} = \sigma\bar{l}dS = \sigma l\overline{dS}$. Поскольку поля диполя с электрическим моментом $\bar{P}$

$\varphi = \frac{\bar{\rho}\bar{R}}{R^3} \to имеем \to d\varphi = \frac{\overline{d\rho}\bar{R}}{R^3} = \frac{\sigma l\bar{R}\overline{dS}}{R^3}$,

Обозначим $\tau = \sigma l$ $\varphi = \int\limits_{S\partial\partial} \frac{\bar{R}\overline{dS}}{R^3} = \int\limits_{\Omega} r d\Omega$. **Элемент телесного угла представляет собой**

$d\Omega = \frac{\bar{R}\overline{dS}}{R^3} = \frac{\cos(\bar{n}\bar{R})}{R^2} dS,$

$d\Omega$ >0, если из точки наблюдения видна положительно заряженная сторона $\overline{dS}$

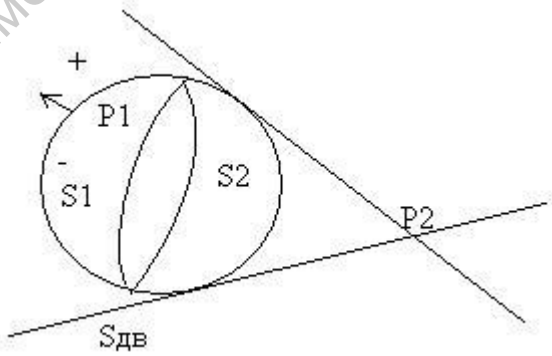
$d\Omega$ <0, если видна отрицательно заряженная сторона.

При переходе через двойной слой потенциал претерпевает скачок, т.е на нём напряжённость поля превращается в ∞

Для однородных сред

$\varphi = \frac{\tau}{\varepsilon}\Omega$,(5.1)

РИС 6.2



Докажем что потенциал претерпевает скачок при переходе через двойной слой.

Рассмотрим

1) двойной замкнутый электрический слой

а)возьмём произвольную точку снаружи (P_2)

$S\partial\partial = S_1 + S_2$

$\varphi = \tau(\Omega_1 + \Omega_2) = 0$, так как

$\Omega_1 = -\Omega$,

$\Omega_2 = \Omega$.

Вне двойного замкнутого слоя, поле отсутствует.

б) возьмём точку находящуюся внутри (P_1)

$\varphi = \tau\Omega$, где полный телесный угол

$\Omega = -4\pi$. В итоге

$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau$ (5.2)

2)двойной электрический слой разомкнут.

Будем считать что переход осуществляется на конечном расстоянии от края.

По сравнению с расстоянием между точками 1 и2 края можно считать уходящими на бесконечность, где предположим, что они смыкаются. Тогда этот случай сводиться к предыдущему и выполняется (5.2)

$d\bar{\rho} = de\bar{l} = \delta\bar{l}dS = \delta l\overline{dS} = r\overline{dS}$

$d\varphi = \frac{\overline{d\rho}\bar{R}}{R^3} = \frac{r\bar{R}\overline{dS}}{R^3} = rd\Omega$

$\varphi = r\Omega$

$\varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi r$ конечное число диполей

7. Скалярный потенциал стационарного магнитного поля.

Для ЭСП условия потенциальности записываются в различных видах:

$\oint\limits_L \bar{E}\overline{dL} = 0$,

$rot\overline{E} = 0$,
$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$,
$\overline{E} = -grad\varphi$,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \overline{E}\overline{dl}.$$

Для СМП правые части аналогичных соотношений отличны от нуля.

$$\oint_L \overline{H}\overline{dL} = \frac{4\pi}{c} I(L),$$

$$rot\overline{H} = \frac{4\pi}{c}\overline{j}$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} iN.$$

Рассмотрим стационарное магнитное поле, для которого на линейные замкнутые токи оденем поверхности, называемые условными перегородками, и будем считать, что они непроницаемы для контуров интегрирования.
j=0,i=0 .
тогда

$$\oint_L \overline{H}\overline{dL} = 0$$

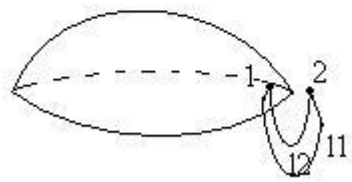
$rot\overline{H} = 0$, $\overline{H} = -grad\psi$ (6.1), где ψ - **скалярный потенциал магнитного поля.**

$H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0$,

$\int_L \overline{HdL} = 0$, если контур не захватывает ток ($L=L_1+L_2$).при пробивании условий перегородки.

$$\int_{L1} \overline{HdL} + \int_1^2 \overline{H}\overline{dL} = \frac{4\pi}{c} I.$$

РИС 7.1



$\int_1^2 \overline{HdL} = 0$ как интеграл по нулевой области

Вывод: на условной перегородке, скалярный потенциал ψ претерпевает скачок, $\psi_2 - \psi_1 = \frac{4\pi}{c} I$ (6.2) пропорциональный захваченному току, вне перегородки ψ -непрерывен.

В ЭСП аналогичная ситуация возникает для Двойного электронного слоя

$$d\varphi = \frac{d\overline{p}\overline{R}}{R^3},$$

$dp = \tau dS$,
$\varphi = \tau\Omega$,
$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi$,
φ непрерывно везде вне $S_{\text{дв.слдвойного электрического слоя}}$
Для СМП,создаваемого **условной перегородкой**

$$\psi = \tau_м \Omega,$$

$$\psi_2 - \psi_1 = 4\pi\tau_м.$$

$$d\psi = \frac{d\overline{p}\overline{R}}{R^3}\ (d\overline{p} = \tau_м d\overline{S}),\text{где } \tau_\mu = \frac{I}{c}.$$

Условную перегородку можно назвать двойным магнитным слоем и считать её совокупностью магнитных диполей. Покажем, что магнитное поле линейного тока, совпадает с полем двойного магнитного слоя, одетого на этот ток.

Для линейного тока

$\overline{H} = \frac{I}{c}\oint_L \frac{[d\overline{l}\overline{R}]}{R^3}$. Поскольку

$\overline{H} = -grad\psi \rightarrow H_м = -\frac{I}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial m}$. Элемент изменения телесного угл

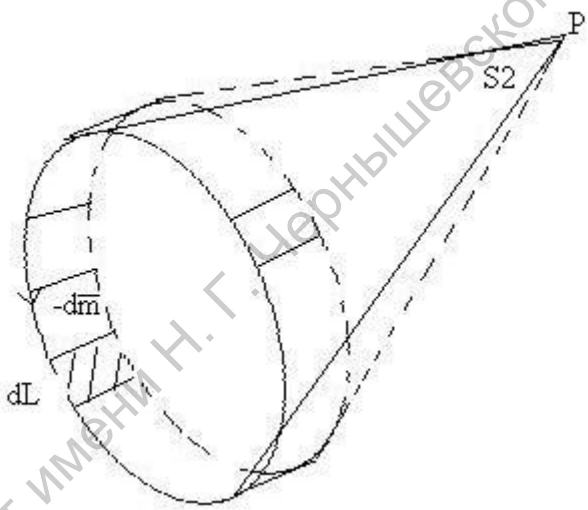


РИС6.2

$$dW = \frac{\overline{R}d\overline{S}}{R^3},\ dS = -[d\overline{m}d\overline{l}],$$

$$dW = -\frac{[d\overline{m}d\overline{l}]\overline{R}}{R^3} = -\frac{d\overline{m}[d\overline{l}\overline{R}]}{R^3}.$$

Общее изменение телесного угла.

$$d\Omega = \int dw = d\overline{m}\oint_L \frac{[d\overline{l}\overline{R}]}{R^3},$$

$$H_m = \frac{I}{c}\oint_L \frac{[d\overline{l}\overline{R}]_m}{R^3}$$

$$\overline{H} = \frac{I}{c}\oint_L \frac{[d\overline{l}\overline{R}]}{R^3}$$

8.Магнитный момент тока.

Двойной магнтный слой будем считать состоящим из магнитных диполей

$$d\overline{p_m} = \frac{I}{c}dS,$$

Их векторную сумму назовём магнитным моментом тока

$\overline{M} = \frac{I}{c}\int_S d\overline{S}$,(7.1)

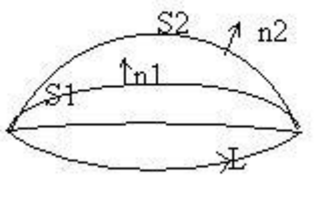
Покажем, что величина магниптного момента не зависит от выбора условий перегородки.

$$M_1 = \frac{I}{c}\int_S d\overline{S},$$

$$M_2 = \frac{I}{c}\int_S d\overline{S},$$

Из курса векторного анализа известно

$\oint_S \overline{n}dS = 0$, где $\overline{n}$ нормаль к замкнутой поверхности $S=S_1+S_2$



$M_1 = \frac{I}{c}\int_{S1} \overline{n}_1 d\overline{S}$, $M_2 = \frac{I}{c}\int_{S2} \overline{n}_2 d\overline{S}$

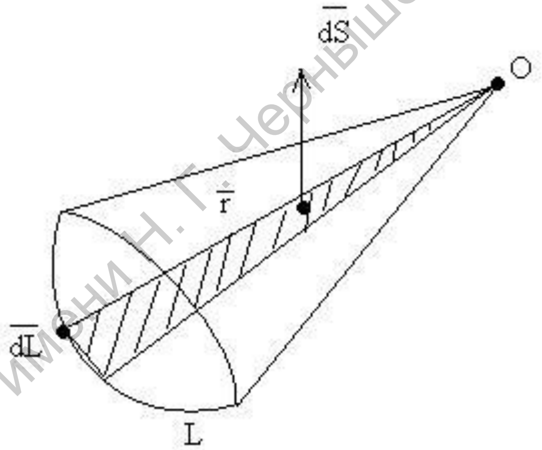
РИС 8.1

$$\oint_S \overline{n}dS = -\int_{S1}\overline{n_1}dS + \int_{S2}\overline{n_2}dS = 0 \Rightarrow M_1 = M_2$$

$d\overline{S} = \frac{1}{2}\left[\overline{r}\,d\overline{l}\right]$, значит выберем произвольную точку О, которую назовём центром линейного тока. Поставим условную перегородку в вершиной в этой точке.

$$\overline{M} = \frac{I}{c}\int_S d\overline{S} = \frac{I}{2c}\oint_L\left[\overline{r}\,d\overline{l}\right] \ (7.2)$$

РИС 8.2



Введём векторный элемент тока

$d\overline{I} = Idl$ для линейного тока

$d\overline{I} = \overline{i}dS$ для поверхностного тока ,

$\overline{dI} = \overline{j}dV$ для пространственного тока,

элементарный магнитный момент представим используя (7.2), запишем в виде:

$$d\overline{M}\frac{I}{2c}\left[\overline{r}\,\overline{dl}\right] \to d\overline{M} = \frac{1}{2c}\left[\overline{r}\,d\overline{I}\right],$$

Тогда для поверхностных и пространственных токов получаем

$$d\overline{M} = \frac{1}{2c}\left[\overline{r}\,\overline{i}\right]dS,$$

$d\overline{M} = \frac{1}{2c}\left[\overline{r}\,\overline{j}\right]dV$, следовательно для них

$$\overline{M} = \frac{1}{2c}\int_s\left[\overline{r}\,\overline{i}\right]dS, \overline{M} = \frac{1}{2c}\int_s\left[\overline{r}\,\overline{j}\right]dV.$$

9. Векторный потенциал СМП в неоднородной среде.

Явление намагничивания заключается в возникновении в среде, попавшей во внешнее магнитное поле, собственного поля, которое может ослаблять или усиливать внешнее поле.

Диэлектрик в ЭСП считаем совокупностью электрических диполей, с распределённым по диэлектрику электрическим моментом $\overline{p}(x,y,z)$.вектор поляризации :

$\overline{P} = \frac{d\overline{p}}{dV} = \alpha E$, где $\alpha \geq 0$ - поляризуемость диэлектрика. В пункте 3

$$\overline{D} = \varepsilon\overline{H}$$

$$\overline{D} = \overline{E} + 4\pi\overline{\rho}$$

$$\varepsilon \geq 1, \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$$

$$\overline{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\overline{E},$$

$$div\overline{D} = 4\pi\rho$$

Диэлектрики всегда ослабляют внешнее электрическое поле внутри себя.

Магнетик в СМП будем считать совокупностью конечного числа магнитных диполей, с распределением по среде магнитных моментов $\overline{p_\mu}(x, y, z)$. Введём **вектор намагничивания:**

$\overline{p}_i$

$\overline{I} = \frac{d\overline{p_m}}{dV} = \phi\overline{H}$,где ϕ **-намагничиваемость**

$\overline{B} = \mu\overline{H}$

$\overline{D} = \overline{H} + 4\pi\overline{I}$ (7.2) получаем

$\mu \geq 1,\ \mu = 1 + 4\pi\phi$

$\overline{I} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\overline{H}$. Поскольку свободных магнитных зарядов нет

$div\overline{B} = 0$.

Магнетики могут как ослаблять так и усиливать внешнее магнитное поле внутри себя. Подействуем rot на (7.2), с учётом того, что

$div\overline{B} = 0$ и $\overline{B} = rot\overline{A}$, получаем

$rotrot\overline{A} = rot\overline{H} + 4\pi rot\overline{I}$, используя тождество

$rotrot\overline{a} \equiv graddiv\overline{a} - \nabla^2\overline{a}$, имеем

$graddiv\overline{A} - \nabla^2\overline{A} = rot\overline{H} + 4\pi rot\overline{I}$. Векторный потенциал вводиться при замене

$\overline{A} \to \overline{A''} = \overline{A} + gradf$, $\overline{B} \to \overline{B'} = \overline{B}$

Будем выбирать векторный потенциал, для которого $div\overline{A} = 0$.тогда, с учётом

$rot\overline{H} = \frac{4\pi}{c}\overline{j}$, имеем

$-\nabla^2 A = \frac{4\pi}{c}\overline{j} + 4\pi rot\overline{I}$,

$\nabla^2\overline{A} = -\frac{4\pi}{c}(\overline{j} + crot\overline{I})$

В вакууме уравнение

$\nabla^2\overline{A} = -\frac{4\pi}{c}\overline{I}$,имеет решение $\overline{A} = \frac{1}{c}\int_{Vm}\frac{\overline{j}}{R}dV$.

В магнетитах

$\nabla^2\overline{A} = -\frac{4\pi}{c}(\overline{j} + \overline{j_м})$, где $\overline{j}_м = crot\overline{I}$ (плотность молекулярных токов в магнетике)

соответствующее решение будет иметь вид

$$\overline{A} = \frac{1}{c}\int_V \frac{\overline{j} + \overline{j_m}}{R}dV$$

Векторный потенциал СМП в неоднородной среде примет вид

$$V = V_{тока} + V_{магн}$$

$$\overline{A} = \frac{1}{c}\int_V \frac{\overline{j} + crot\overline{I}}{R}dV \quad (7.3)$$

Если среда однородна ($\mu = const, \phi = const$)

$$\bar{A} = \frac{1}{c}\int\limits_{Vm+V_м} \frac{\bar{j} + c\,rot\bar{I}}{R}dV = \frac{1}{c}\int\limits_{V}\frac{\bar{j} + c\phi rot\bar{H}}{R}dV = \frac{1}{c}\int\limits_{V}\frac{\bar{j} + 4\pi\phi\bar{j}}{R}dV = \frac{1}{c}\int\limits_{V}\frac{\bar{j}(1+4\pi\phi)}{R}dV = \frac{\mu}{c}\int\limits_{V}\frac{\bar{j}}{R}dV$$

$$\bar{A} = \frac{\mu}{c}\int\limits_{V}\frac{\bar{j}}{R}dV \quad (7.4)$$

В (7.4) интегрирование идёт только по пространственным токам, в отличии от (7.3)

Тема II
Электромагнитное поле в неподвижных средах

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0$$

10. Связь микроскопических уравнений электродинамики с макроскопическими.

Система дифференциальных уравнений Максвелла в вакууме в микроскопическом подходе запишется следующим образом

(I) $\quad rot\vec{H}_м = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_м + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}_м}{\partial t}$,

(II) $\quad rot\vec{E}_м = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}_м}{\partial t}$,

(III) $\quad div\vec{H}_м = 0$,

(IV) $\quad div\vec{E}_м = 4\pi\rho_м$.

Рассмотрим конечный малый объем ΔV. В нем

$\vec{j}_м = \vec{j} + \vec{j}_{мол}$,

$\rho_м = \rho + \rho_{связ}$.

Усредним по рассматриваемому объему ΔV

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V}\rho_м dV$$

Тогда

$\bar{\vec{j}}_м = \vec{j} + \vec{j}_{мол}$,

$\bar{\rho}_м = \rho + \rho_{связ}$.

Будем считать $\bar{\vec{H}} = \vec{B}$, $\bar{\vec{E}} = \vec{E}$. Получим систему

(I) $\quad rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{мол}) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$,

(II) $\quad rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$,

(III) $\quad div\vec{B} = 0$,

(IV) $\quad div\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_{связ})$.

Учтем, что

$$\rho_{связ} = -div\vec{P},$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

Тогда

$$div(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho,$$

(IV) $\quad div\vec{D} = 4\pi\rho.$

(I) $\quad rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{мол} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$

(II) $\quad div\vec{E} = 4\pi\rho_{связ}.$

Подействуем div на каждое слагаемое в первом уравнении

$$0 = \frac{4\pi}{c}div(\vec{j}_{мол}) + \frac{1}{c}div\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Операции div и $\frac{\partial}{\partial t}$ можно поменять местами

$$0 = \frac{4\pi}{c}div(\vec{j}_{мол}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{E},$$

$$\boxed{div(\vec{j}_{мол}) = -\frac{\partial\rho_{связ}}{\partial t}}$$ **Уравнение непрерывности для связанных зарядов.**

$$div\left(\vec{j}_{мол} - \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right) = 0.$$ Обозначим $\vec{j}_{мол} - \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = c\cdot rot\vec{I}$.

Подставим в уравнение (I)

(I) $\quad rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + 4\pi\cdot rot\vec{I} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$

Система уравнений Максвелла для среды запишется следующим образом:

(I) $\quad rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$

(II) $\quad rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$

(III) $\quad div\vec{B} = 0,$

(IV) $\quad div\vec{D} = 4\pi\rho.$

11. Потенциалы электромагнитного поля.

(III) $\quad div\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = rot\vec{A}$ где $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$.

(II) $\quad rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{A},$

$$rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Обозначим $\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-grad\varphi$. Знак минус в правой части означает, что работа поля положительна.

В связи с такими обозначениями возникает неоднозначность.

При замене

$$\begin{cases}\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+gradf, \\ \varphi\to\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\end{cases}$$

наблюдаемые величины остаются неизменными.

$$\vec{B}\to\vec{B}'=rot\vec{A}'=rot\vec{A}+rot\left(gradf\right)=rot\vec{A}=\vec{B},$$

$$\vec{E}\to\vec{E}'=grad\varphi'-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-grad\varphi+\frac{1}{c}grad\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}gradf=\vec{E}.$$

Электромагнитное поле калибровочно инвариантно.

$$\left\{\vec{A},\varphi\right\}\to\left\{\vec{A}',\varphi'\right\}$$

Будем рассматривать тот набор, для которого выполняется условие Лоренца $div\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, справедливость которого покажем от противного. Пусть для $\left\{\vec{A}',\varphi'\right\}$ условие не выполняется $div\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=f_0\neq 0$,

$$div\vec{A}+div\left(gradf\right)+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=f_0.$$

Выберем f так, чтобы $\nabla^2 f-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=f_0$.

Следовательно, для $\left\{\vec{A},\varphi\right\}$ условие Лоренца выполняется.

12. Уравнения Даламбера и их решения.

(I) $rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$,

(II) $\vec{B}=rot\vec{A}$,

(III) $\vec{E}=-grad\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$,

(IV) $div\vec{D}=4\pi\rho$.

Для однородной среды $\varepsilon=const$, $\mu=const$. Введем в уравнения потенциалы.

$$\text{(I)}\Rightarrow rot\frac{1}{\mu}rot\vec{A}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-grad\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right),$$

$$grad\left(div\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}-\frac{\varepsilon\mu}{c}\left(grad\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right),$$

$$grad\left(div\vec{A}\right)+grad\,\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\nabla^2\vec{A}=\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}.$$

Условие Лоренца $div\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ упрощает выражения.

$$\text{(IV)}\Rightarrow \varepsilon div\vec{E}=4\pi\rho\Rightarrow -div\left(-grad\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

$$div\left(grad\varphi\right)+\frac{1}{c}div\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{A}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

В итоге получаем уравнения

$$\nabla^2\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j},$$

называемые уравнениями Даламбера.

Используя стандартные решения (см. Введение) для пространственных источников поля в однородной среде получаем

$$\vec{A}(t)=\frac{\mu}{c}\int\limits_{V_т}\frac{\vec{j}\left(t-\frac{R}{v}\right)}{R}dV,$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{V_{зар}}\frac{\rho\left(t-\frac{R}{v}\right)}{R}dV,$$

где $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Вне $V_{зар}$ и $V_{ток}$ уравнения выглядят проще, превращаясь в волновые уравнения

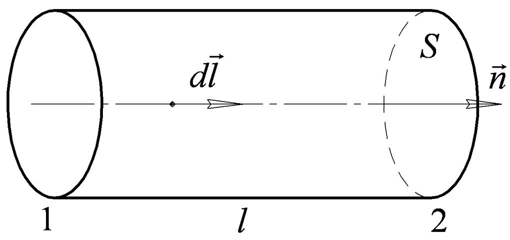
$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0,$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0.$$

Полученные решения обладают свойством запаздывания. Оно проявляется в том, что изменения потенциалов в точке наблюдения отстают от породивших их изменений источников на время запаздывания $t_{зап}=\frac{R}{v}$.

13. Энергия ЭМП в сплошных средах

Рассмотрим малый объем токонесущего проводника, ориентированный в пространстве определенным образом $\left(d\vec{l}\parallel d\vec{n}\parallel\vec{E}\parallel\vec{j}\right)$

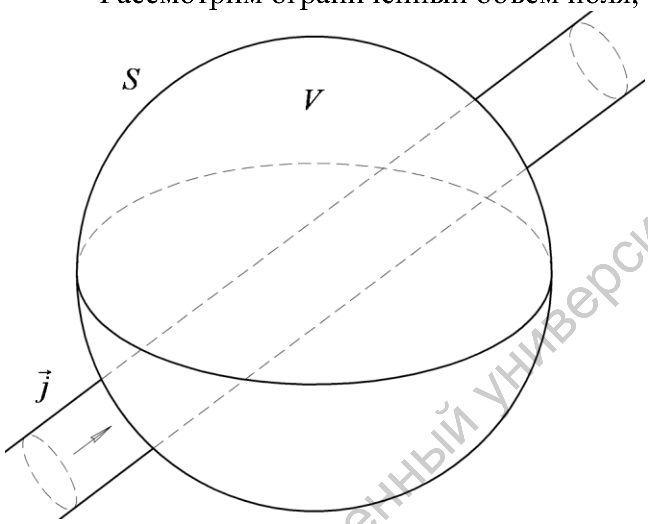


Тогда $dA = de\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$, $\dfrac{de}{dt} = \int_S \vec{j}d\vec{S}$.

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{de}{dt}\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_S \vec{j}d\vec{S}\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_S j_n dS\int_0^l \vec{E}d\vec{l} = \int_V j_n E_l dV = \int_V \vec{j}\vec{E}dV$$

Для проводника, в целом, получаем $P = \int_{V_{пров}} \vec{j}\vec{E}dV$.

Рассмотрим ограниченный объем поля, содержащий проводник, с током



$P = \int_V \vec{j}\vec{E}dV$ на всем объеме V .

Используем

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}rot\vec{H} - \frac{c}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \text{ и}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

$$P = \int_{V_{пол}} \vec{j}\vec{E}dV = \int_{V_{пол}} \vec{E}\left(\frac{c}{4\pi}rot\vec{H} - \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)dV = \frac{c}{4\pi}\int_{V_{пол}} \vec{H}rot\vec{E}dV - \frac{c}{4\pi}\int_{V_{пол}} div\left[\vec{E}\vec{H}\right]dV - \frac{1}{4\pi}\int_{V_{пол}} \varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}dV =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{V_{пол}} \mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}dV - \frac{1}{4\pi}\int_{V_{пол}} \varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}dV - \frac{c}{4\pi}\int_{V_{пол}} div\left[\vec{E}\vec{H}\right]dV =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{пол}} \left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)dV - \frac{c}{4\pi}\int_S \left[\vec{E}\vec{H}\right]d\vec{S}.$$

Обозначим $W = \dfrac{1}{8\pi}\int_{V_{пол}} \left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)dV$ и $\vec{U} = \dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}\right]$.

Тогда $P = -\dfrac{\partial W}{\partial t} - \oint_S \vec{U}d\vec{S}$ и $dA = -dW - Ndt$, где $N = \oint_S \vec{U}d\vec{S}$.

W по размерности энергия ЭМП в объеме V, а $\vec{U}$ характеризует граничный процесс связанный с переносом энергии через поверхность, ограничивающую объем. Следовательно, энергия идет на совершение работы в объеме и частично переносится через его границы.

В вакууме $\varepsilon = 1, \mu = 1$ тогда $W = \dfrac{1}{8\pi}\int\limits_V \left(E^2 + H^2\right) dV$. Наличие среды меняет энергию в сторону ее увеличения.

Случай полного поля $V \to \infty$ при стандартных краевых условиях $E \approx \dfrac{1}{r^2}, H \approx \dfrac{1}{r^2}$, позволяет получить $N = \oint\limits_{S\to\infty} U_n dS = \dfrac{c}{4\pi}\oint\limits_{S\to\infty} \left[\vec{E}\vec{H}\right]_n dS$.

Будем считать, что $S \to \infty$ как сфера бесконечно растущего радиуса с центром на источнике поля.

На $S_{сфер} \to \infty$ $\left[\vec{E}\vec{H}\right] \parallel \vec{n}$, $\vec{E} \perp \vec{H}$, $E = E(R)$, $H = H(R)$.

$$N = \frac{c}{4\pi}\oint\limits_{S\to\infty} \left|\left[\vec{E}\vec{H}\right]\right| dS = \frac{c}{4\pi}\oint\limits_{S\to\infty} EHdS = \frac{c}{4\pi} EH \oint\limits_{S\to\infty} dS \approx \frac{1}{R^2}\frac{1}{R^2}R^2 = 0.$$

В этом случае $dA = -dW$.

Работа поля совершается за счет убыли его энергии.

Случай стационарного поля, занимающего ограниченный объем

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial W}{\partial t} = 0,\ dA = -Ndt.$$

Работа совершается за счет притока энергии из области вне этого объема.

14. Квазистационарное ЭМП.

(I) $rot\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$,

(II) $rot\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

(III) $div\vec{B} = 0$,

(IV) $div\vec{D} = 4\pi\rho$,

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}$,

(I)$\to$ $rot\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_{см}\right)$, $\quad \vec{j}_{см} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Ток смещения может существовать в диэлектрике или даже в вакууме. Он связан не с переносом заряда, а с изменение ЭМП. $\vec{j}$ и $\vec{j}_{см}$ равноправны при создании магнитного поля.

.

ЭМП считается **квазистационарным** в той области, где можно пренебречь $\vec{j}_{см}$. Тогда в (I) выпадает одно слагаемое.
Введем потенциалы ЭМП.

(III) $\quad div\vec{B} = 0 \to \vec{B} = rot\vec{A}, \qquad \vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t),$

(II) $\quad rot\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{A} \Rightarrow rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$

Можно представить $\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\varphi$.

Заметим, что потенциалы вводятся не однозначно

$$\begin{cases} \vec{A} \to \vec{A}' + gradf, \\ \varphi \to \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \end{cases}$$

Выберем те $\{\vec{A}, \varphi\}$, для которых выполняется условие $div\vec{A} = 0$.

В случае квазистационарного поля $rot\left(\frac{1}{\mu} rot\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Для однородной среды ($\varepsilon = const, \mu = const$).

$$rot\, rot\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j},$$

$$grad\, div\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}.$$

Используем усеченное условие Лоренца $div\vec{A} = 0$, получаем уравнения

$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$, на $V_{ток}$;

$\nabla^2\vec{A} = 0$, вне $V_{ток}$.

Для четвертого уравнения $\varepsilon div\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow -\varepsilon div\left(grad\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 4\pi\rho$,

$\nabla^2\varphi + \frac{1}{c} div\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$, получаем

$\nabla^2 = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$, на $V_{зар}$;

$\nabla^2 = 0$, вне $V_{зар}$.

Решения уравнений известны

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int\limits_{V_{ток}} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV, \qquad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{V_{зар}} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV.$$

Вид потенциалов в каждый момент времени такой же как и для статических полей. Для статических полей характерно отсутствие запаздывания. В квазистационарных электромагнитных полях изменение источников и потенциалов происходит в один момент времени.

ЭМП квазистационарно там, где можно пренебречь $t_{зап} = \dfrac{R}{v}$

15. Условия квазистационарности.

1. **Проводящая среда $(\lambda \neq 0)$.**

$\vec{j} = \lambda \vec{E}$ при этом $\vec{j} >> \vec{j}_{см}$.

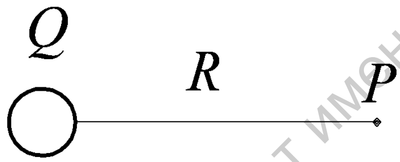
Пусть $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin \omega t$, тогда $\vec{j}_{см} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\varepsilon \omega}{4\pi} \cos \omega t$.

Амплитуда $\vec{j}$ должна быть много больше амплитуды $\vec{j}_{см}$.

Следовательно, $\lambda >> \dfrac{\varepsilon \omega}{4\pi}$.

Для различных частот, вплоть до СВЧ условие квазистационарности выполняется. ЭМП внутри проводников квазистационарно.

2. **Непроводящая среда $(\lambda = 0)$.**



$\vec{j} = \lambda \vec{E} = 0$.

Предположим, что $\vec{E}(Q) = \vec{E}_0 \cos \omega t$, $\vec{E}(P) = \vec{E}_0 \cos \omega \left(t - \frac{R}{v}\right)$

Для квазистационарного магнитного поля $E(P) \approx E(Q)$ только, если $\omega \dfrac{R}{v} \approx 0$, значит

$T >> \dfrac{R}{v}$.

Выводы.

1. Каким бы большим не было R, есть столь большие T, что условие квазистационарности выполняется.
2. Каким бы большим не было T, всегда есть такое R, что условие квазистационарности нарушается. Иными словами область квазистационарности всегда ограниченна по размерам.

В непроводящей среде около любого источника всегда есть область квазистационарности прилегающая к нему и ограниченная по размерам. В случае полного поля квазистационарности нет.

16. ЭМП в однородном диэлектрике

(I) $\quad rot\vec{H} = \dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$,

(II) $\quad rot\vec{E} = -\dfrac{\mu}{c} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$,

(III) $\quad div\vec{H} = 0$,

(IV) $\quad div\vec{E} = 0$.

При этом $\mu, \varepsilon = const, \vec{j} = 0, \rho = 0$.

(I) $\rightarrow$ $$rot\left(rot\vec{H}\right) = \frac{\varepsilon}{c} rot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$grad\left(div\vec{H}\right) - \nabla^2 \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{E}.$$

$$-\nabla^2 \vec{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$ обозначим $v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$,

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

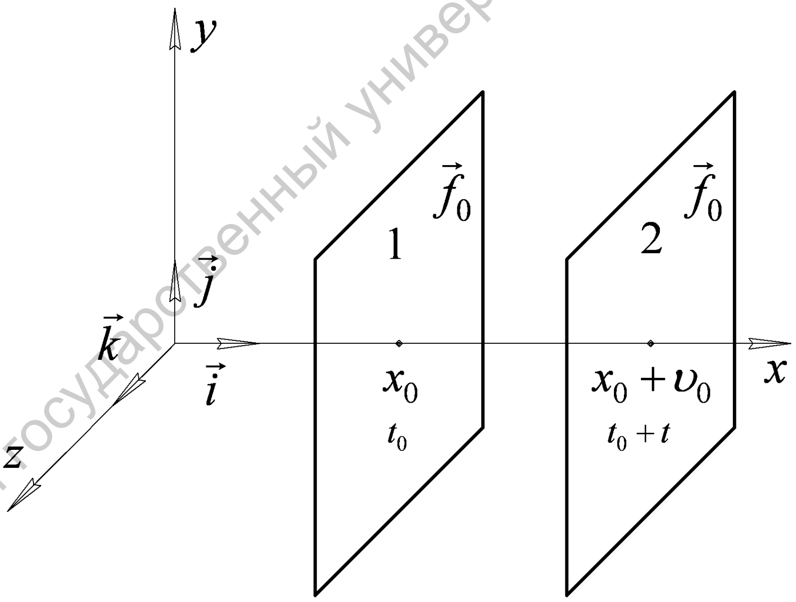
(II) $$rot\left(rot\vec{E}\right) = -\frac{\mu}{c} rot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$grad\left(div\vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H},$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

$$\vec{E} = \vec{E}\left(x, y, z, t\right)$$



Будем искать решение в виде плоской монохроматической волны идущей вдоль оси x слева направо.

$$\overline{E} = \overline{E}(x)e^{i\omega t}, \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

$$\nabla^2 \overline{E}(x) = \frac{d^2\overline{E}(x)}{dx^2}, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t},$$

$$e^{i\omega t}\frac{d^2\overline{E}(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}e^{i\omega t}\overline{E}(x) = 0,$$

$$\frac{d^2\overline{E}}{dx^2} + k^2\overline{E} = 0, \quad k = \frac{\omega}{v}.$$

Запишем решение в общем виде

$$\overline{E}(x) = \overline{E}_0 e^{-ikx} + \overline{E}'_0 e^{ikx}.$$

$$\overline{E}(x,t) = \overline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} + \overline{E}'_0 e^{i(\omega t + kx)}.$$

Физический смысл $\overline{E} = \overline{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}$.

В точке 1 $x = x_0$, $t = t_0$ обозначим $\overline{E} = \overline{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} = \vec{f}_0$, в точке 2 $x = x_0 + v \cdot 1c$, $t = t_0 + 1c$ $\overline{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} = \overline{E}_0 e^{i\omega\left(t_0 + 1 - \frac{x_0 + v_0}{v}\right)} = \overline{E}_0 e^{i\omega\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right)} = \vec{f}_0$

По расстоянию отличном на v $\vec{f}_0$ перешло за 1с из t_1 в t_2 вдоль оси x слева направо на расстояние равное v. Следовательно v - скорость распространения поля, решение описывает плоскую волну.

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} \\ \vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} \end{array}} \qquad t_{зап} = \frac{x}{v}$$

17. Особенности распространения ЭМВ.

(II) $\quad rot\vec{E} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

На OX: $$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial H_x}{\partial t}=0\Rightarrow H_x=0$$

На OY: $$\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial E_z}{\partial t}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}\Rightarrow i\frac{\omega}{v}E_y=-i\omega\frac{\mu}{c}H_y\Rightarrow\sqrt{\varepsilon}E_z=-\sqrt{\mu}H_y$$

На OZ: $$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}\Rightarrow -i\frac{\omega}{v}E_y=i\omega\frac{\mu}{c}H_z\Rightarrow\sqrt{\varepsilon}E_y=\sqrt{\mu}H_z$$

Направим OY по $\vec{E}$

$E_z=0, H_y=0, H_z=H\Rightarrow\vec{H}$ направлен по z

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H}\qquad \vec{E}\perp\vec{H},\qquad \vec{E}\perp\vec{v},\qquad \vec{H}\perp\vec{v}.$$

Для энергии электромагнитного поля

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_V\left(\varepsilon E^2+\mu H^2\right)dV.$$

$$\vec{U}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}\right]\qquad \vec{U}\perp\vec{E},\qquad \vec{U}\perp\vec{H},\qquad \vec{U}\parallel\vec{v}$$

$$\omega=\frac{dW}{dV}=\frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon E^2+\mu H^2\right)$$

$$\omega_{эл}=\omega_{маг}=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$$

$$U=\frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}\vec{H}\right|=\frac{c}{4\pi}E\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu}}E=\frac{1}{4\pi}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\varepsilon E^2=\omega v$$

18. Отсутствие свободных пространственных зарядов внутри однородных проводников.

(I) $$rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

(IV) $$div\vec{D}=4\pi\rho,\qquad \vec{D}=\varepsilon\vec{E}.$$

(I)$\Rightarrow$ $$div\left(rot\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}div\vec{j}+\frac{1}{c}div\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

$$\frac{4\pi}{c}div\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{D}=0,$$

$$div\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t},\qquad div\lambda\vec{E}=-\frac{\partial\rho}{\partial t},\qquad \lambda\neq 0,\lambda=const.$$

$$\vec{j}=\lambda\vec{E}$$

$$\frac{\lambda}{\varepsilon}div\vec{D}=-\frac{\partial\rho}{\partial t},\ \frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

После неопределенного интегрирования

$$\ln\rho=-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}t+\ln C\Rightarrow\rho\left(t\right)=Ce^{-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}t}.$$

При $t=0, \rho=\rho_0 \quad \Rightarrow \qquad \rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}t}$.

19. Электромагнитное поле в однородном проводнике.

(I) $\quad rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$,

(II) $\quad rot\vec{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$,

(III) $\quad div\vec{B}=0$,

(IV) $\quad div\vec{D}=4\pi\rho$.

$\varepsilon,\mu,\lambda=const, \rho=0$.

(I) $\quad rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\lambda\vec{E}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$,

(II) $\quad rot\vec{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$,

(III) $\quad div\vec{H}=0$,

(IV) $\quad div\vec{E}=0$.

(I) $\quad \Rightarrow rot\left(rot\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\lambda rot\vec{E}+\frac{\varepsilon}{c}rot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$,

$$grad\left(div\vec{H}\right)-\nabla^2\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\lambda rot\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{E},$$

$$-\nabla^2\vec{H}=-\frac{4\pi\mu\lambda}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \qquad v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{H}-\frac{4\pi\mu\lambda}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0}$$

(II) $\quad rot\left(rot\vec{E}\right)=-\frac{\mu}{c}rot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$,

$$grad\left(div\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{H},$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\frac{4\pi\mu\lambda}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0}$$

При $\lambda=0$ переходим к однородному диэлектрику.
Ищем решение в виде

$\vec{E}=\vec{E}(x)e^{i\omega t}$,

$\vec{H}=\vec{H}(x)e^{i\omega t}$.

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{i\omega t}=i\omega e^{i\omega t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}.$$

$$\nabla^2 \vec{E}(x) = \frac{d^2\vec{E}}{dt^2},$$

$$e^{i\omega t}\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} - \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} i\omega e^{i\omega t}\vec{E} + \frac{\omega^2}{v^2} e^{i\omega t}\vec{E} = 0,$$

$$e^{i\omega t}\frac{d^2\vec{E}}{dx^2} - \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} i\omega e^{i\omega t}\vec{E} + \frac{\omega^2}{v^2} e^{i\omega t}\vec{E} = 0,$$

$$\frac{d^2\vec{E}}{dx^2} - \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} i\omega\vec{E} + \frac{\omega^2}{v^2}\vec{E} = 0.$$

Обозначим $k_1^{\,2} = \dfrac{\omega^2}{v^2} - \dfrac{4\pi\mu\lambda}{c^2} i\omega$.

Общее решение представим в виде

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_0 e^{-ik_1x} + \vec{E}_0{}' e^{ik_1x},$$

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_1x)} + \vec{E}_0{}' e^{i(\omega t + k_1x)}.$$

Отбросим решения в виде волны, идущей справа – налево.

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_1x)},$$

$$\vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - k_1x)},$$

$$k_1 = \alpha - i\beta.$$

В результате получаем

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{-\beta x} e^{i(\omega t - \alpha x)},$$

$$\vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 e^{-\beta x} e^{i(\omega t - \alpha x)}.$$

Амплитуда убывает с ростом x, т.е. ЭМВ поглощается верхним слоем проводника и практически не проходит внутрь него. Это явление называется **скин – эффектом.**

Так как $\beta \sim \lambda$, то при $\lambda = 0$ - затухание пропадает. В диэлектриках скин-эффект **не возникает**.

20. ЭМП осциллятора.

Осциллятор – диполь с переменным электрическим моментом.

$\vec{p} = \vec{l}e$ - **электрический момент диполя,** $\vec{p} = \vec{p}(t)$.

Ранее было получено $\vec{A}(p,t) = \dfrac{\mu}{c}\displaystyle\int \frac{j\left(t - \frac{R}{\upsilon}\right)}{R} dV$

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1, \upsilon = c$

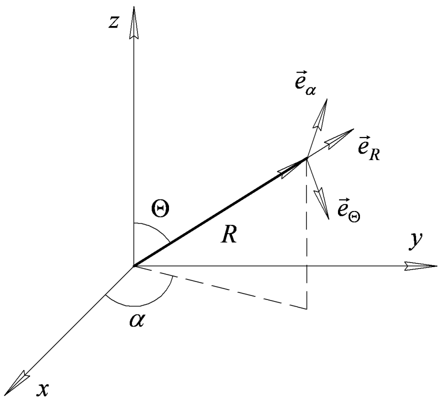
$$\vec{A}(p,t) = \frac{1}{c}\int_V \frac{j\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV = \frac{1}{cR}\int_0^R dr \int_S j\left(t - \tfrac{R}{c}\right) dS.$$

R можно вынести за знак интеграла, интеграл по длине и поперечному сечению.

$$I = \int j_n dS = \int \vec{j} d\vec{S}\,, \qquad I = \frac{de}{dt},$$

$$\vec{A} = \frac{1}{cR}\int_0^l d\vec{l}\, J\left(t-\frac{R}{c}\right) = \frac{1}{cR}\vec{l}\,\frac{d}{dt}e\left(t-\frac{R}{c}\right) = \frac{\vec{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)}{cR}.$$

$\vec{A}(t) = \frac{\vec{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)}{cR}$ – **состояние потенциала в точке наблюдения в момент времени** t**.**



$\vec{A}(A_R, A_\Theta, A_\alpha)$

$t' = t - \frac{R}{c}$ **- время запаздывания.**

$$A_r(t) = \frac{p\left(t-\frac{R}{c}\right)}{cR}\cos\Theta$$

$$A_\Theta(t) = \frac{p\left(t-\frac{R}{c}\right)}{cR}\sin\Theta$$

$$A_r(t) = 0$$

$$grad\varphi = \vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial R} + \frac{\vec{e}_\Theta}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta} + \frac{\vec{e}_\alpha}{R\sin\Theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}.$$

Используем $div\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, которое представим в виде

$$\dot{\varphi} = -c\,div\vec{A}.$$

$$div\vec{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial R^2}{\partial R}\frac{\vec{A}(t')}{cR}\cos\Theta + \frac{1}{R\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(-\dot{p}(t')\sin\Theta\frac{1}{cR}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t') = \frac{\partial p(t')}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial r} = \dot{p}(t').$$

$$div\vec{A} = -\frac{\ddot{p}(t')}{c^2R^2}\cos\Theta - \frac{\ddot{p}(t')}{c^2R}\cos\Theta - \frac{2\dot{p}(t')}{cR^2}\cos\Theta,$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\ddot{p}(t')}{cR^2}\cos\Theta - \frac{\dot{p}(t')}{cR^2}\cos\Theta.$$

Проведем интегрирование

$$\varphi(t) = \frac{\dot{p}(t')}{R^2}\cos\Theta - \frac{p(t')}{R^2}\cos\Theta + C.$$

Определим константу интегрирования

$\varphi(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0$. Получаем $\varphi(t) = \frac{\dot{p}(t')}{cR}\cos\Theta + \frac{p(t')}{R^2}\cos\Theta$.

$$\vec{H} = rot\vec{A}, \vec{H}(H_R, H_\Theta, H_\alpha).$$

$$H_R = \frac{1}{R\sin\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta A_\alpha) - \frac{\partial A_\Theta}{\partial\alpha}\right) = 0,$$

$$H_\Theta = \frac{1}{R\sin\Theta}\left(\frac{\partial A_R}{\partial\alpha} - \frac{\partial R\sin\Theta}{\partial R}A_\alpha\right) = 0,$$

$$H_\alpha = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial(A_\Theta R)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial\Theta}\right) = \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(-\dot{p}(t')\frac{\sin\Theta}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial\Theta}\frac{\dot{p}(t')}{cR}\cos\Theta\right\} =$$

$$= \frac{\ddot{p}(t')}{c^2R}\sin\Theta + \frac{\dot{p}(t')}{cR^2}\sin\alpha,$$

$$E = -grad\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial r}.$$

$$E_R(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial R} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_R}{\partial t} =$$

$$= \frac{\ddot{p}(t')}{c^2R}\cos\Theta + \frac{\dot{p}(t')}{cR^2}\cos\Theta + \frac{\dot{p}(t')}{cR^2}\cos\Theta + \frac{\dot{p}(t')}{cR^2}\cos\Theta + \frac{2\dot{p}(t')}{cR^2}\cos\Theta - \frac{\ddot{p}(t')}{cR^2}\cos\Theta =$$

$$= \frac{2\dot{p}(t')}{cR^2}\cos\Theta + \frac{2p(t')}{R^2}\cos\Theta$$

$$E_\Theta(t) = -\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_\Theta}{\partial t} = \frac{\dot{p}(t')}{cR^2}\sin\Theta + \frac{p(t')}{c^2}\sin\Theta + \frac{\ddot{p}(t')}{c^2R}\sin\Theta,$$

$$E_\alpha(t) = -\frac{1}{R\sin\Theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0.$$

20. Энергия излучения осциллятора.

1. **Ближняя зона ЭМП осциллятора.**

λ_0 - длина волны , $R << \lambda_0, \lambda_0 = cT$.

$T >> \frac{R}{c}$ **- выполняется условие квазистационарности.**

Используем приближение

$t_{зап} = \frac{R}{c} \approx 0, t' = t, \frac{1}{R^3} >> \frac{1}{R^2} >> \frac{1}{R}$. В результате получаем

$$\varphi(t) = \frac{p(t)}{R^2}\cos\Theta,$$

$$E_R(t) = \frac{p(t)}{R^3}\cos\Theta, \qquad E_\Theta(t) = \frac{p(t)}{R^3}\sin\Theta, \qquad E_\alpha = 0.$$

Для ЭСП диполя ранее было получено

$$E_R = \frac{2p\cos\Theta}{R^3}, \quad E_\Theta = \frac{p\sin\Theta}{R^3}, \quad E_\alpha = 0.$$

$$\varphi = \frac{p\cos\Theta}{R^2}.$$

В ближней зоне в каждый момент времени электрическое поле осциллятора совпадает с электростатическим полем диполя с тем же значением электрического момента. Поэтому эта область называется **зоной квазистационарности.**

2. **Дальняя зона.**

$$R >> \lambda_0, \qquad t' = t - \frac{R}{c}, \quad \frac{1}{R^3} << \frac{1}{R^2} << \frac{1}{R}.$$

В этом приближение получаем

$$H_\Theta = H_r = 0, \qquad H_\alpha(t) = \frac{\dot{p}(t')}{c^2 R}\sin\Theta.$$

$$E_r >> E_\Theta = 0, \qquad E_\Theta(t) = \frac{\ddot{p}(t')}{c^2 R}\sin\Theta.$$

Пусть $p(t') = p_0 e^{i\omega t'}$

$$E(t') = H(t') = \omega^2 \frac{p(t')}{c^2 R}\sin\Theta$$

Известно, что функция $G(t, R) = \frac{\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R^2}\sin\Theta$ удовлетворяет уравнению

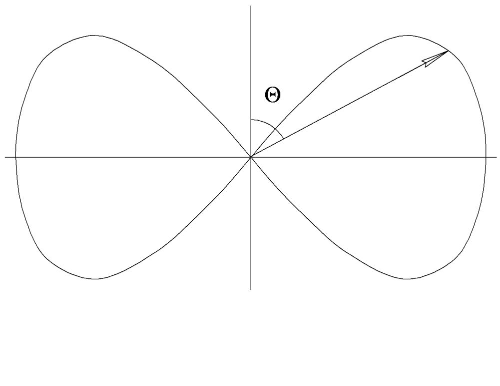
$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0.$$

Следовательно, для векторов поля получаем

$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$. Силовые линии замыкаются сами на себя и в дальней зоне происходит отрыв поля от источника.

$\vec{U} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}\right]$ **- вектор Умова-Пойнтинга.**

$$\vec{U}(t) = \frac{\omega^2 p^2(t)}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\Theta$$



Поток вектора $\vec{U}$ через замкнутую поверхность

$$N = \oint \vec{U} d\vec{S} = \oint U dS = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta U = \frac{2\pi\omega^2 p^2(t)}{4\pi^3}\int_0^{\pi}\sin^2\Theta d\Theta,$$

$$dS = R^2 \sin\Theta d\Theta d\alpha.$$

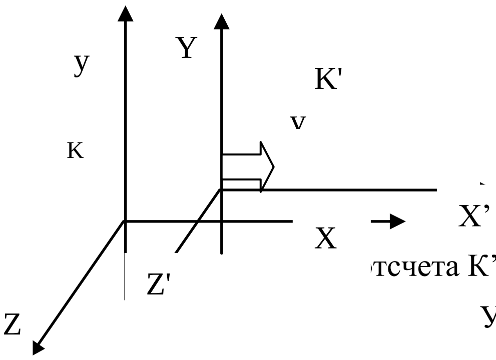
Видно, что N не зависит от R, т.е. энергия распространяется в пространстве без потерь.

$W_T = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{2\omega^4 p_0{}^2}{3c^2}\cos^2\omega t dt$ **- энергия, излучаемая осциллятором за период колебаний *T*.**

После вычисления интеграла получаем $W_T = \frac{p_0{}^2\omega^4}{3c^2}$. Излучаемая энергия пропорциональна четвертой степени частоты. Такой результат характерен для всех зарядов, движущихся с ускорением, и получается в рамках классической электродинамики.

Тема 3. Электромагнитное поле в движущихся средах.

21.Поляризация и намагничивание движущихся сред



Пусть есть две системы отсчета и К' движется относительно К со скоростью $\vec{v}$ так как показано на рисунке Если есть, какое-то поле в системе отсчета, то в вакууме в системе тсчета К' для микрообъектов: $\overrightarrow{E'_\mu} = \overrightarrow{E_\mu} + \frac{1}{c}[\vec{v}\overrightarrow{H_\mu}]$; $\overrightarrow{H'_\mu} = \overrightarrow{H_\mu} - \frac{1}{c}[\vec{v}\overrightarrow{E_\mu}]$

Усреднение по элементарному объему введем как:

$$\overrightarrow{E_\mu} = \vec{E}; \overrightarrow{H_\mu} = \vec{B};$$

После усреднения получаем:

$$\overrightarrow{E'} = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}];\ \overrightarrow{H'} = \vec{H} - \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{E}]$$

Z

При переходе от системы К к К': $\vec{E} \to \overrightarrow{E'}$ $\vec{B} \to \overrightarrow{B'}$ Однако связи между векторами остаются неизменными. $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I}$ но $\vec{P}$ и $\vec{I}$ поменяются. При v=0 они имеют вид: $\vec{I} = \vec{I_0} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\left(1 - \frac{\vec{B}}{\mu}\right), \vec{P} = \vec{P_0} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}$

При v≠0 $\vec{E} \to \overrightarrow{E'}$ $\vec{B} \to \overrightarrow{B'}$. Опыт показывает, что для движущихся сред поляризация пораждает намагниченность и наоборт.

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\overrightarrow{E'} + \vec{P}(\overrightarrow{I_0}),$$

$$\vec{I} = \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\overrightarrow{B'} + \vec{I}(\overrightarrow{P_0})$$

Из опытных данных: $\vec{P}(\overrightarrow{I_0}) = \frac{1}{c}[v\overrightarrow{I_0}]$ $\vec{I}(\overrightarrow{P_0}) = -\frac{1}{c}[v\overrightarrow{P_0}]$

В результате получаем:

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\overrightarrow{E'} + \frac{1}{c}[v\overrightarrow{I_0}] \quad \vec{I} = \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\overrightarrow{B'} - \frac{1}{c}[v\overrightarrow{P_0}]$$

Установим связь между векторами поля для движущейся среды:

$$\vec{D} = \vec{E} + (\varepsilon - 1)\overrightarrow{E'} + \frac{4\pi}{c}\left[\overrightarrow{vI_0}\right] = \vec{E} + (\varepsilon - 1)\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}]\right) + \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)[\vec{v}\vec{B}]$$

$$= \vec{E} + \varepsilon\overrightarrow{E'} - \vec{E} - \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}] + \frac{1}{c_\mu}[\vec{v}\vec{H}] + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}] = \varepsilon\overrightarrow{E'} + \frac{1}{c_\mu}[\vec{v}\vec{H}]$$

$$\vec{D} = \varepsilon\overrightarrow{E'} + \frac{1}{c_\mu}[\vec{v}\vec{H}]$$

Посчитаем H:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I} = \vec{B} - \left(1-\frac{1}{\mu}\right)\overrightarrow{B'} - \frac{4\pi}{c}[v\,\overrightarrow{P_0}] = \vec{B} - \left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(\vec{B}+\frac{1}{c}[\vec{v}\vec{E}]\right) - \frac{\varepsilon-1}{c}[\vec{v}\vec{E}]$$

$$= \vec{B} - \vec{B} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}] + \frac{1}{\mu}\overrightarrow{B' - \frac{\varepsilon}{c}[\vec{v}\vec{E}]} - \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{E}] = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{B'} - \frac{\varepsilon}{c}[\vec{v}\vec{E}]$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{B'} - \frac{\varepsilon}{c}[\vec{v}\vec{E}]$$

23. Законы Ома и Фарадея. Униполярная индукция.

Закон Ома имеет вид: $\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \overrightarrow{E^{\text{стор}}})$, *если* $\overrightarrow{E^{\text{стор}}} = 0$ и $\vec{E} \to \overrightarrow{E'}$, *то закон Ома примет* вид:

$\vec{j} = \lambda\overrightarrow{E'} = \lambda\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]$.

Электродвижущая сила- это циркуляция вектора $\vec{E}$ вдоль произвольного контура, т.е.

$\varepsilon = \oint_L \vec{E}\,d\vec{l}$. $\varepsilon = \oint \vec{E}d\vec{l} + \frac{1}{c}\oint[\vec{v}\vec{B}]d\vec{l} = \oint_s rot\vec{E}\,d\vec{S} - \frac{1}{c}\oint_l \vec{B}[\vec{v}d\vec{l}] = -\frac{1}{c}\oint_S \frac{\partial B}{\partial t}dS - \frac{1}{c}\oint_L \left[\frac{d\vec{r}}{dl}d\vec{l}\right] =$

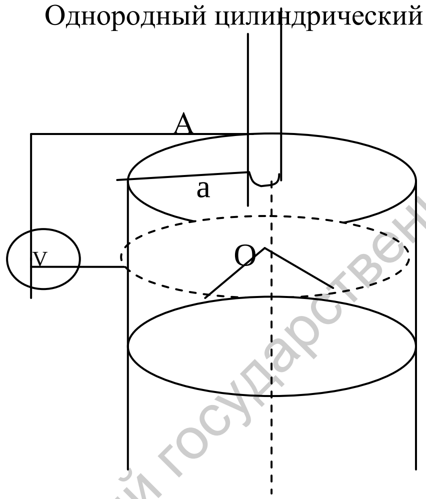
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad d\vec{S} = \left[d\vec{r}d\vec{l}\right]$$

$= -\frac{1}{c}\int\frac{\partial B}{\partial t}dS - \frac{1}{c}\int\vec{B}\frac{d\vec{S}}{dt} =$;так как магнитный поток это $\Phi = \int\vec{B}d\vec{s}$. И фактически в обоих слагаемых он стоит, то:

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}|_{S=const} - \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}|_{B=const} = \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \varepsilon^{\text{инд}}$$

Рассмотрим явление униполярной индукции.

Однородный цилиндрический магнит посажен на ось вращения, и вращается с угловой скоростью ω



Вращается с некоторой угловой скоростью ω.Прикрепим к магниту контакты в точках A и B. Выберем контур: L_1=COABC, через время Δt получаем контур: $L_2=C_1OABCC_1$.

Возьмем магнитное поля, действующее по оси z. B=const, за счет изменения контура изменится магнитный поток. $\Delta\Phi=\varphi_2-\varphi_1=B*S_{COC1}$, Так как $\Delta\Phi\neq0$ то возникает ЭДС индукция и следовательно ток.

Исходно $\vec{j} = \lambda\overrightarrow{E'} = \lambda\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]$. Пусть $\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]$. В цилиндрической системе координат:

$\vec{E}(E_\rho E_\alpha E_z)$

С базисом $\overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_\alpha}, \overrightarrow{e_z}$ выберем

$$\vec{v} \parallel \overrightarrow{l_\alpha} \quad \vec{B} \parallel \overrightarrow{l_z} \quad \vec{E} \perp \vec{v} \quad \vec{E} \perp \vec{B} \quad \vec{E} \parallel \overrightarrow{l_\rho} \Rightarrow E_\rho = -\frac{1}{c}vB \quad E_\alpha = E_z = 0$$

Очевидно что при переходе от 0 до точки B, возникает разность потенциалов:

$\varphi(a) - \varphi(0) = -\int_0^a \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_0^a \overrightarrow{E_\rho}\,d\rho = \int_0^a \frac{1}{c}vBd\rho =$ т.к. v=ρω

$= \frac{\omega B}{c}\int_0^a \rho d\rho = \frac{\omega B a^2}{2c}$, т.е. возникает разность потенциалов.

Вращающийся магнит можно рассматривать как источник электрического тока. Но для того что бы этот эффект проявлялся на опыте необходимо увеличить W,B и a.

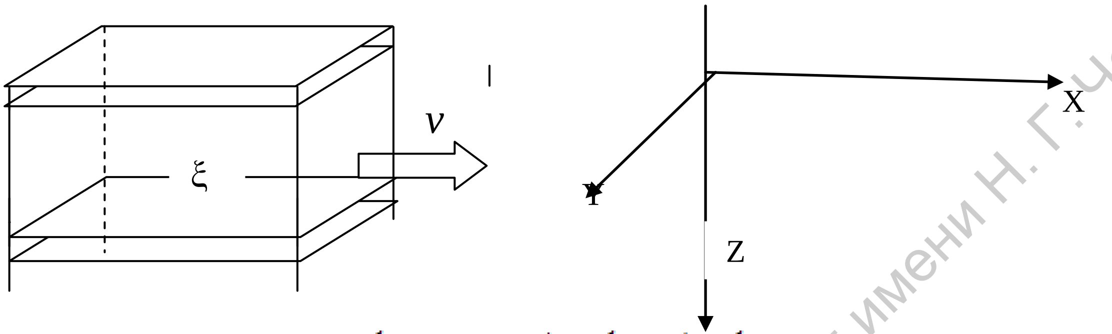
24.Диэлектрик, движущийся в статистических полях.

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E'} + \frac{1}{c\mu}[\vec{v}\vec{H}]$ $\quad$ $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B'} - \frac{\varepsilon}{c}[\vec{v}\vec{E}]$

1) **Опыт Вильсона .**

Между двумя металлическими пластинами помещен диэлектрик , который движется в магнитном поле с некоторой скоростью v.

Для диэлектрика возьмем μ=1, тогда



$\vec{B} = \vec{H} \Rightarrow \vec{E'} = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]\ \vec{D} = \varepsilon\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]\right) - \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]$

Пусть электрического поля нет $\vec{E} = 0$, тогда $\vec{D} = \frac{\varepsilon-1}{c}[\vec{v}\vec{B}]$. $v = v_x, H = H_y \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{v}\ \vec{D} \perp \vec{H}$ тогда

$D = \frac{\varepsilon-1}{c}[\vec{v}\vec{H}]\ D = D_z = \frac{\varepsilon-1}{c}vH$.

Известно что скачок D соответствует наличию на поверхности поверхностного заряда $D_{2n}-D_{1n}=4\pi\sigma$.

На границе металл- диэлектрик возникает поверхностный заряд: $\sigma = \pm\frac{\varepsilon-1}{4\pi c}vH$

В этих металлических обкладках возникают заряды, т.е. в проводнике между ними возникает ток. Таким образом диэлектрик двигаясь в магнитном поле между металлическими пластинками создает электрическое поле. изначально электрического поля не было оно возникает за счет движения диэлектрика.

2)Опыт Эйхенвальда.

Магнитного поля исходно нет, но есть поле электрическое между металлическими пластинами

$\vec{B'} = \vec{B} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{E}]$ $\quad$ $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B'} - \frac{\varepsilon}{c}[\vec{v}\vec{E}]$. Пусть $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\frac{1}{c}[\vec{v}\vec{E}] + \frac{\varepsilon}{c}[\vec{v}\vec{E}]$ В результате

$\vec{H} = \frac{\varepsilon - 1}{c}[\vec{v}\vec{E}]$

Тем самым получается, что возникает магнитное поле причем:

Т.к. $\vec{H} \perp \vec{v}\ \vec{H} \perp \vec{E}\ v = v_x \quad E = E_z \Rightarrow H = H_y = \frac{\varepsilon-1}{c}[\vec{v}\vec{E}]$

Диэлектрик двигаясь в электрическом поле проявляет магнитные свойства которых в исходном виде не было.

24^0 Уравнение непрерывности в гидродинамике и электродинамике

1) Гидродинамика

Используем закон сохранения массы для получения уравнения непрерывности

Введем следующие понятия:

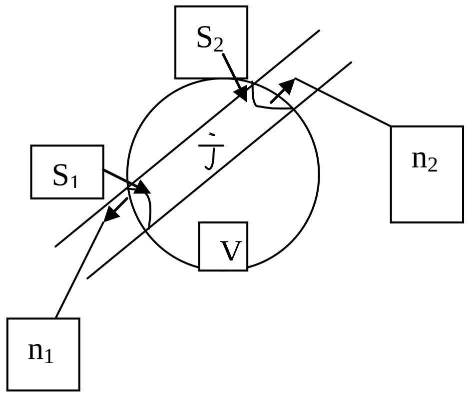
плотность жидкости $\rho = dm/dv$,

$m = \int\limits_v \rho dv$,

сила потока $J=dm/dt$,

плотность потока $j_n=dI/ds \Rightarrow J = \int\limits_s j_n ds$.

Рассмотрим произвольный фиксированный объем, в который втекает и вытекает жидкость. Пусть она втекает через s_1, а вытекает через s_2.



Зная закон сохранения масс, свяжем его с втеканием и вытеканием жидкости.

$\Delta m_{вых} - \Delta m_{вх} = -\Delta m(s) \big| 1/\Delta t$,

$\Delta m_{вых}/\Delta t - \Delta m_{вх}/\Delta t = -\Delta m(s)/\Delta t, где\ \Delta t \to 0$

Следовательно, получим **силу потока**

$J_{вых} - J_{вх} = dm(s)/dt$,

$\int\limits_{s2} \vec{j} d\vec{s} + \int\limits_{s1} \vec{j} d\vec{s} = -\int\limits_v (\partial\rho/\partial t) dv$,

$\vec{j} \uparrow\uparrow \vec{n}_2; \vec{j} \uparrow\downarrow \vec{n}_1$.

Расширим область интегрирования на всю поверхность s:

$\oint\limits_s \vec{j} d\vec{s} = -\int (\partial\rho/\partial t) dv$

По теореме Остроградского-Гаусса

$\oint\limits_v \vec{a} ds = -\int\limits_v div\vec{a} dv, получаем: \int\limits_v div\vec{j} dv = -\int\limits_v \frac{\partial\rho}{\partial t} dv.$

Из-за произвольности объёма v следует

$div\,\vec{j} = -\partial\rho/\partial t$ - **уравнение непрерывности**.

Возьмем малый объем в трубке жидкости

$dv = dS \cdot vdt$

т.к $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{j}$,

$dJ=dm/dt,\ dm=\rho\, dv, получаем$

$j = \frac{dI}{ds} = \frac{dm}{dtds} = \frac{\rho v dt d\rho}{dtds} = \rho v$, v-скорость.

В итоге получаем

$div\, \rho v = -\partial\rho/\partial t$.

Если жидкость несжимаемая $\rho = const \Rightarrow div\ v=0$-это **условие несжимаемости жидкости**.

***2)* электродинамика**

$(1)\ rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$

$(4)\ div\ D=4\pi\rho$

$D=\varepsilon E$

Подействуем операцией *div* на 1-ое уравнение:

$div\ rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}div\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}divD.$

Из курса векторного анализа

$divrot\,\vec{a} = 0$

$0 = \frac{4\pi}{c}div\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{D}$,подставим 4 уравнение Максвелла и получим

$divj=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ (**уравнение непрерывности**),где

j-**плотность тока,**

$\rho = de/dv$-**плотность электрического заряда.**

Можно показать, что заряд сохраняется

$\Delta e_{вых} - \Delta e_{вх} = -\Delta e(s)$

Любому закону сохранения величин типа масса, заряд соответствует свое уравнение непрерывности.

25. Уравнение Навье-Стокса в гидродинамике.

Оно следует из 2 закона Ньютона для капельки жидкости массой Δm

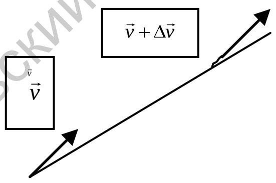
$\Delta m\,\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$, $\sum_i \vec{F}_i$ -сумма всех сил, действующих на капельку

Т.к $\Delta m = \rho\Delta v$ введем понятие

$\vec{f}_i = \frac{\Delta\vec{F}_i}{\Delta v}$, тогда **плотности силы**

$\rho\vec{a} = \sum_i \vec{f}_i$.

Возьмем линию потока жидкости, капелька движется вдоль нее.



$$x' = x + v_x\Delta t,$$
$$y' = y + v_y\Delta t,$$
$$z' = z + v_z\Delta t,$$
$$t' = t + \Delta t.$$

$\vec{v}_1 = \vec{v}$, $\vec{v}_2 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$,

$\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, $\quad \Delta v = v_2 - v_1$. Разлагаем в ряд Тейлора

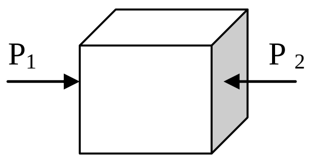
$V_2(x,y,z,t) = \vec{v}_1(x,y,z,t) + \Delta t\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \Delta t v_x\dfrac{\partial v}{\partial x} + \Delta t v_y\dfrac{\partial v}{\partial y} + \Delta t v_z\dfrac{\partial v}{\partial z}$ *+величины 2-го порядка малости.*

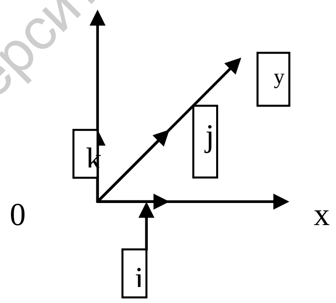
$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial v}{\partial x} + v_y\frac{\partial v}{\partial y} + v_z\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\nabla)\vec{v},$$ так как

$\nabla(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}), \vec{v}(v_x, v_y, v_z),$ *получаем*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla).$$

Можно определить силы внутри жидкости и сторонние силы, действующие на капельку. Возьмём каплю в виде параллелепипеда со сторонами $\Delta x, \Delta y$ и Δz.





$$\sum \vec{f}_i = \vec{f}_{давл} + \vec{f}_{вязк-ти} + \vec{f}_{стор}$$

Определим силы давления $\vec{f}_{давл}$ со стороны жидкости на капельку.

По OX:

$p_1 = p,$

$p_2 = p + \Delta x\dfrac{\partial p}{\partial x}, \Delta F = \Delta p \cdot S$

$$\vec{i}\,|\Delta F_x = (p_1 - p_2)S_{yz} = -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta я$$

$$\vec{j}\,|\Delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$k\,|\Delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$$

Просуммируем

$$\Delta\vec{F} = -(\vec{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z})\Delta V = -\,grad p\Delta V$$

$$\vec{f}_{давл} = grad p.$$

Жидкость будем называть **‘’сухой** ’’,тогда $\vec{f}_{вяз} = 0$.

Жидкость **“свободна**”,если $\vec{f}_{стор} = 0$,тогда для сухой свободной жидкости получаем $\rho\vec{a} = -grad p$. В итоге

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

Возьмем rot от 2х частей ,но сначала преобразуем,

$grad(ab) = [\vec{a} rot\vec{b}] + [\vec{b} rot\vec{a}] + (\vec{b}\nabla)\vec{a} + (\vec{a}\nabla)\vec{b}.$ Пусть

$\vec{a} = \vec{b} = \vec{v},$

$grad v^2 = 2[\vec{v} rot v] + 2(\vec{v}\Delta)\vec{v},$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + [rot\vec{v}\vec{v}] + \frac{1}{2}grad v^2 = -\frac{1}{\rho}grad p.$$

<u>*Используем Векторное тождество*</u> *rotgradf=0*, тогда

$$rot\frac{\partial v}{\partial t} + rot[rot\vec{v}\vec{v}] = 0.$$

Введем вихрь потока $\vec{u} = rot\vec{v}$, *тогда* $\frac{\partial u}{\partial t} = rot[\vec{v}\vec{u}]$ **- это уравнение для вихря.**

При **безвихревом** течении $\vec{u} = 0$,для **несжимаемой жидкости** $\begin{cases} div v = 0 \\ rot\vec{v} = 0 \end{cases}$

Для электростатического поля $\begin{cases} rot\vec{E} = 0 \\ div\vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$

При $\varepsilon = const$ **вне источника** $\begin{cases} rot E = 0 \\ div E = 0 \end{cases}$

Для **стационарного магнитного поля** $\begin{cases} rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ div\mu\vec{H} = 0 \end{cases}$

$\mu = const$ вне источников

$$\begin{cases} rot\vec{H} = 0 \\ div\vec{H} = 0 \end{cases}$$

ЭМП и СМП вне источников имеют характер безвихревой несжимаемой жидкости.

Стационарное течение жидкости.

В дальнейшем под жидкостью подразумеваем плазму. Запишем **условие** ее **стационарности.**

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0 \Rightarrow [rot\vec{v}\vec{v}] + \frac{1}{2}grad v^2 = -\frac{1}{\rho}grad p$$

Пусть $\rho = const$,умножим это неравенство на $\vec{v}$

$$\frac{1}{2}\vec{v} grad(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}) = 0$$

Вдоль линий потока жидкости выполняется соотношение

$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = const$ **-з-н сохранения энергии вдоль стационарного движения жидкости.**

Это соотношение аналогично уравнению Бернулли.

26. Основные уравнения магнитной гидродинамики

Пусть жидкость –поток движущихся зарядов.
Запишем уравнения Максвела

(1) $rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$,

(2) $rot\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ **.**

(3) $div\vec{B} = 0$,

(4) $div\vec{D} = 4\pi\rho$.

Преобразуем первое уравнение
Используем условие квазистационарности

$\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} \approx 0,$

$\vec{j} = \lambda\vec{E}',$

$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]$

$\mu \approx 1, \vec{B} = \vec{H}.$

Тогда *(1)* $rot\vec{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}])$

(2) $rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$,

(3) $div\vec{H} = 0$,

Четвёртое уравнение в магнитогидродинамике не используется

(5) $div(\vec{\rho}\vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \rho - плотность$ жидкости

(6) $\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\vec{f}_{вяз-ти}}{\rho} + \frac{\vec{f}_{стор}}{\rho}$

Преобразуем (1,2,3).

$(1) \Rightarrow rotrot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\lambda(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}])$

<u>Используя векторное тождество</u>

rotrota=grad diva- ∇^2 *a,*

$\rightarrow$ получим

$-\nabla^2\vec{H} = -\frac{4\pi\lambda}{c^2}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \frac{4\pi\lambda}{c^2}rot[\vec{v}\vec{H}],$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = rot[\vec{v}\vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\lambda}\nabla^2\vec{H} \text{ ,}$$

Если жидкость идеальная, $\lambda \to \infty$*,то*

$$(1+2+3) \Rightarrow \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = rot[\vec{v}\vec{H}]$$

(5) $div(\vec{\rho}\vec{v}) = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}, \rho - \textit{плотность}$

(6) **Навье-Стокса** $\rho\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -gradp + \vec{f}_{вязк} + \vec{f}_{стор}$

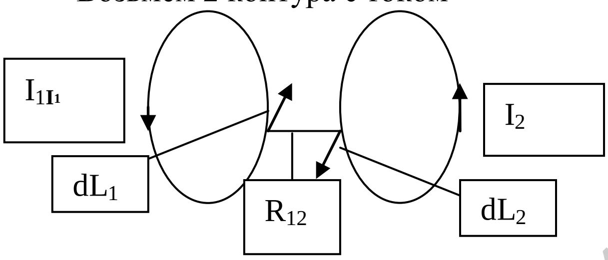
$$\vec{f}_{стор} = \vec{f}_{маг}$$

Для определения $\vec{f}_{магн}$ используем

закон Ампера

$$\vec{F}_{12} = \mu\frac{Y_1Y_2}{c^2}\oint\limits_{L_2}\oint\limits_{L_1}\frac{[d\vec{l}\,[_2\, d\vec{l}_1\vec{R}_{12}]]}{R_{12}^3} \text{ .}$$

Возьмем 2 контура с током



I_1, I_2-токи ,которые текут по контурам L_1 и L_2.

Пусть поле создаётся током $I_1=I_0$ и воздействует на $I_2=I$.

Тогда

$$d\vec{l}_1 = d\vec{l}_0, \vec{L}_1 = \vec{L}_0, d\vec{l}_2 = d\vec{l}, \vec{L}_2 = \vec{L}$$

Перепишем закон Ампера, с учетом

$\vec{F}_{12} = \vec{F}, R_{12} = R$.

$$\vec{F}_{12} = \mu\frac{II_0}{c^2}\oint\limits_{L}\oint\limits_{L_0}\frac{[d\vec{l}\,[\; d\vec{l}_0\vec{R}\;]]}{R^3}$$

Обозначим $\vec{B} = \dfrac{\mu}{c}I_0\oint\limits_{L_0}\dfrac{[d\vec{l}_0\vec{R}]}{R^3}$, тогда

$\vec{F} = \dfrac{I}{c}\oint\limits_{L}[d\vec{l}\,\vec{B}]$ **-сила действующая на контур с током I**

Любой ток можно представить как совокупность линейных токов.

Векторный элемент тока это:

$$d\vec{I} = \begin{cases} Id\vec{l}\,, \text{для.линеного.тока,} \\ \vec{i}\,dS, \text{для.поверхностного.тока,} \\ \vec{j}dV, \text{для.пространственного.тока.} \end{cases}$$

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}[d\vec{l}\,B] \Rightarrow d\vec{F} = 1/c[d\vec{I}\vec{B}]$$

$$\vec{F}_{пов} = \frac{1}{c}\oint\limits_{S тока}[\vec{i}\,\vec{B}]dS$$

$\vec{F}_{простр} = \dfrac{1}{c}\oint\limits_{V тока}[\vec{j}\vec{B}]dV$. **Для пространственных токов получаем**

$$\vec{f}_{маг} = \frac{1}{c}[\vec{j}\vec{B}]$$

Запишем основные уравнения МГД

(1) $rot\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}j, \vec{j} = \lambda\vec{E}', \vec{E}' = \vec{E} + \dfrac{1}{c}[\nabla H]$

(1+2+3) $\Rightarrow \dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} = rot[\vec{v}\vec{H}] + \dfrac{c^2}{4\pi\lambda}\nabla^2\vec{H}$

(3) $div\vec{B} = 0$

(5) $div(\vec{\rho v}) = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}, \rho - \text{плотность проводящей жидкости}$

(6) $\rho\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -gradp + \vec{f}_{вязк} + \vec{f}_{стор}$.

27. Уравнение Алфвена

Используем уравнения при $\lambda = \infty$, *т.е.* считаем проводящую жидкость идеальной

(1+2+3) $\Rightarrow \dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} = rot[\vec{v}\vec{H}]$,

(3) $div\vec{H} = 0$,

(5) $div(\vec{\rho v}) = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$.

Используем формулу векторного анализа

$rot[\vec{a}\vec{b}] \equiv (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\nabla)\vec{b} + \vec{a}div\vec{b} - \vec{b}div\vec{a}$.

Пусть $\vec{a} = \vec{v}, \vec{b} = \vec{H}$

(1+2+3) $\Rightarrow rot[\vec{v}\vec{H}] = (\vec{H}\nabla\vec{v} - (\vec{v}\nabla)\vec{H} + \vec{v}div\vec{H} - \vec{H}div\vec{v}$, $div\,\vec{H} = 0$.

Поскольку

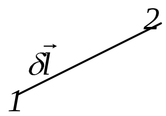
$$div(f\vec{a}) = fdiv\vec{a} - agradf, где$$
$$f = \rho,$$
$$\vec{a} = \vec{v},$$
$$divv(\rho\vec{v}) = \rho div\vec{v} + \vec{v}grad\rho,$$
$$div\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\vec{v}grad\rho}{\rho}.$$
$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = (\vec{H}\nabla)\vec{v} - (v\nabla)\vec{H} + \frac{\vec{H}}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{H}{\rho}(\vec{v}grad\rho).$$

Умножим на $\frac{1}{\rho}$ *и с учетом того, что* $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)$, *получаем*

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{H}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\rho}) = \frac{(\vec{H}\nabla)}{\rho}\vec{v} - \vec{H}(\vec{v}grad\frac{1}{\rho}),$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\vec{H}}{\rho}) = (\frac{\vec{H}}{\rho}\nabla)\vec{v}.$$

Это уравнение называется уравнением Алфвена.

Пусть есть 2 близких друг к другу точки в жидкости ,будем изучать изменение расстояния между ними.



Пусть
$$\vec{v}_1 = \vec{v},$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v} + \Delta\vec{v},$$
$$\Delta\vec{v} = \delta x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + \delta y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + \delta z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}. \textit{Проекции векторов}$$
$$\delta\vec{l}\,(\delta x, \delta y, \delta z), \nabla(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}), \textit{позволяют записать}$$
$$\Delta\vec{v} = (\delta\vec{l}\,\nabla)\vec{v}$$
$$\Delta(\vec{\delta l}) = \Delta\vec{v}\Delta t$$
$$\frac{\Delta(\vec{\delta l})}{\Delta t} = \Delta\vec{v}$$
$$\Delta t \to 0$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{\delta l}) = (\vec{\delta l}\nabla)\vec{v}.$$

Получается уравнение аналогичное уравнению Алфвена.

Значит $\frac{\vec{H}}{\rho}$ и $\delta\vec{l}$ ведут себя аналогично с течением времени.

Пусть в начальный момент времени *t=0* $\frac{\vec{H}}{\rho} \parallel \delta\vec{l}$ (обе точки лежат на одной магнитной линии).Такая ситуация не меняется со временем.

Это явление носит название **вмороженности магнитных силовых линий**, в плазму.

28. Диссипация энергии в плазме

(нестабильная плазма)

***1* Диффузия магнитного поля в плазме**

Рассмотрим уравнение *(1+2+3)* $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = rot[\vec{v}\vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\lambda}\nabla^2\vec{H}$

Пусть $\lambda -$ **(удельная электропроводность) конечна.**

Предположим, что плазма стоит на месте, (статическая плазма).

$\vec{v} = 0.$

Пусть $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\lambda}\nabla^2\vec{H}$

Воспользуемся краевой задачей теплопроводности

$u=u(x,t),$

$u_t = a^2 u_{xx},$

$-\infty \le x \le \infty, t \ge 0,$

*с н*ачальным условием $u(x,0) = \varphi(x)$. Это краевая задача описывает процесс охлаждения бесконечного стержня и имеет решение в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4a^2 t}}dy.$$

Пусть H меняется в направления оси *x, H=H(x,t).*Построим для $\vec{H}$ одномерную краевую задачу

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\lambda}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2},$$

$-\infty \le x \le \infty,$

$\vec{H}(x,0) = \vec{H}_0\delta(x-0),$ *где*

$\vec{H}_0$ **заданное значение поля в начале координат,в начальный момент времени.**

Решение краевой задачи будет иметь вид:

$$a^2 = \frac{c^2}{4\pi\lambda},$$

$$\vec{H}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}H_0 e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

После подстановки

$$\vec{H}(x,t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{ct}\vec{H}_0 e^{-\frac{x^2}{c^2 t}\pi\lambda}$$. Видим, что

через какое-то время в точке x поле H убывает в е раз, за время $t = \tau = \frac{x^2}{c^2}\pi\lambda$

Расплывание H вдоль X со временем назовём диффузией магнитного поля.

2. магнитная вязкость.
Используем уравнение Навье-Стокса

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = gradp + \vec{f}_{вязк} + \vec{f}_{м}$$

$$\vec{f}_{вязк} = 0, \vec{f}_{маг} \frac{1}{c}[\vec{j}\vec{B}],$$

$$\mu \approx 1, \vec{B} = \vec{H}, j = \lambda \vec{E}',$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}].$$

$$\vec{E} - внешнее, электрическое. поле.$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\lambda}{c}[(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}])\vec{H}]. Поскольку. можно. рассмотреть. случай$$

$$\vec{E} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\lambda}{c^2}[\vec{H}[\vec{H}\vec{v}]]. Раскрываем \cdot двойное \cdot векторное \cdot произведение$$

$$[\vec{H}[\vec{H}\vec{v}]] = \vec{H}(\vec{H}\vec{v}) - \vec{v}H^2.$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\lambda}{c^2}(\vec{H}(\vec{H}\vec{v}) - vH^2). Рассмотрим \cdot движения \perp \vec{H}(\vec{v}\vec{H} = 0),$$

тогда

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda}{c^2} H^2 v,$$

$$\ln v = -\frac{\lambda}{c^2} \frac{H^2}{\rho} t + \ln const,$$

$$v(t) = ce^{-\frac{\lambda H^2}{c^2 \rho} t}.$$

Скорость экспоненциально затухает, т.е. за время $t = \frac{c^2 \rho}{\lambda H^2}$, скорость уменьшается в е раз.

29. Равновесная конфигурация плазмы.

Будем называть конфигурацию плазмы равновесной, если $\frac{dv}{dt} = 0$

Или $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = 0$

В итоге

1)$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \rightarrow \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi} rot\vec{H}$

3) $div\vec{H} = 0$

6) $\nabla p = \frac{1}{c}[\vec{j}\vec{H}]$

Будем считать μ=1 и не учитывать гидродинамическую вязкость($f_{вяз}$=0). Тогда $\vec{B} = \vec{H}$.
$\vec{j}(\nabla p) = 0 \quad \vec{H}(\nabla p) = 0$,то можно учитывать, что $\nabla p = 0$ вдоль линии тока и магнитного поля.

Фактически мы можем провести плоскость через $\vec{j}$ и $\vec{H}$. Давление p= const на магнитных поверхностях(включающие $\vec{j}$ и $\vec{H}$).

Рассмотрим частный случай . Пусть есть плоское течение жидкости, т. е.$H=H_z(x,y)$.

Автоматически выполняется (3) уравнение :

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

Рассмотрим (1) и (6) уравнения.

Сначала распишем $\vec{j}$ (плотность тока) по компонентам.

$j=\frac{c}{4\pi}\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}$. **Проекции на оси x, y, z.**

$$j_x=\frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)=\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$j_y=\frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)=-\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$j_z=\frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)=0$$

(6)уравнение: $\vec{e_x}\frac{\partial p}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial p}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{1}{c}\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ j_x & j_y & j_z\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}$.Распишем проекции

$$c\frac{\partial p}{\partial x}=j_yH_z-j_zH_y=j_yH_z$$

$$c\frac{\partial p}{\partial y}=j_zH_x-j_xH_z=-j_xH_z$$

$$c\frac{\partial p}{\partial z}=j_xH_y-j_yH_x=0$$

Подставим j_x и j_y и получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{1}{4\pi}H_z\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{1}{4\pi}H_z\frac{\partial H_z}{\partial y}$, преобразуем и получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H_z^2}{\partial x}\quad\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H_z^2}{\partial y}$$

$p+\frac{1}{8\pi}H_z^2=const$ **-Условие равновесности**,

$$p_м=\frac{1}{8\pi}H_z^2$$

Вывод: если изменение гидродинамического давления компенсируется давлением магнитного поля, то данная проводящая жидкость будет устойчива

30. Равновесная цилиндрическая конфигурация плазмы(пинч)

Есть бесконечно узкий пучок плазмы который нужно удержать в равновесии.

$$\vec{j}=\frac{C}{4\pi}rot\vec{H}$$

$$div\vec{H}=0$$

$$\nabla p=\frac{1}{c}[\vec{j}\vec{H}]$$

Распишем компоненты вектора тока:

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi\rho}\begin{vmatrix} \vec{e_\rho} & \rho\vec{e_\alpha} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\rho & \rho H_\alpha & H_z \end{vmatrix}$$ Будем считать что пучок аксиально симметричен, т. е.

$\frac{\partial\vec{H}}{\partial\alpha} = 0$ *Тогда :*

$$j_\rho = \frac{c}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial H_z}{\partial\alpha} - \rho\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}\right) = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}$$

$$j_\alpha = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)$$

$$j_z = \frac{c}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial(\rho H_\alpha)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\alpha}\right) = -\frac{c}{4\pi\rho}\frac{\partial(H_\alpha\rho)}{\partial\rho}$$

$$c(\vec{e_\rho}\frac{\partial p}{\partial\rho} + \vec{e_\alpha}\frac{\partial p}{\partial\alpha} + \vec{e_z}\frac{\partial p}{\partial z}) = [\vec{j}\vec{H}] \rightarrow$$

$$c\frac{\partial p}{\partial\rho} = j_\alpha H_z - j_z H_\alpha$$

$$c\frac{\partial p}{\partial\alpha} = j_\rho H_z - j_z H_\rho$$

$$c\frac{\partial p}{\partial z} = j_\rho H_\alpha - j_\alpha H_\rho$$

Рассмотрим частный случай

1)H=H(ρ), тогда из (3) уравнения получаем $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\rho) = 0 \quad H_\rho = \frac{c}{\rho}$, c – произвольная константа

Если c=const,то H обращается в бесконечность. Тогда положим c=0 → $H_\rho=0$

div j=0 → $j_\rho=0$

$$j_\alpha = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}$$

$$j_z = -\frac{c}{4\pi\rho}\frac{\partial(H_\alpha\rho)}{\partial\rho}$$

$$c\frac{\partial p}{\partial\rho} = j_\alpha H_z - j_z H_\alpha$$

$$c\frac{\partial p}{\partial\alpha} = 0$$

$$c\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial\rho} = -\frac{1}{4\pi}H_z\frac{\partial H_z}{\partial\rho} - \frac{H_\alpha}{4\pi\rho}\frac{\partial(H_\alpha\rho)}{\partial\rho}$$

а) пусть $H_\alpha = 0$, тогда тока вдоль цилиндрического пучка не будет(j_z=0), H_z=H

$$p + \frac{1}{8\pi}H_z^2 = const$$

б)пусть $H_z = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial\rho} = -\frac{H_\alpha}{4\pi\rho}\frac{\partial(H_\alpha\rho)}{\partial\rho}$$

31. Магнитогидродинамические волны

Рассмотрим равновесное однородное состояние плазмы H_0 , ρ_0, p_0 , $v_0=0$

Небольшое возмущение

$\vec{H} = \overrightarrow{H_0} + h(f) \qquad \rho = \rho_0 + \rho(f) \qquad p = p_0 + p(f)$

Отклонения от равновесных значений будем считать малыми

(1+2+3) $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = rot\,[\vec{v}\vec{H}] \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = rot\,[\vec{v}\vec{h}]$

(3) $div\vec{H} = 0 \;\rightarrow\; div\vec{h} = 0$

(5) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = div(\rho\vec{v}) \quad \rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 div\vec{v}$

(6) $\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\nabla p' - \frac{1}{4\pi}[\vec{H}rot\vec{h}] \quad \rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\nabla p' + \frac{1}{c}[\vec{j}\vec{H}]$

где $p' = U_0^2\rho' \qquad \frac{\partial p}{\partial \rho} = U_0^2$ – квадрат обычной скорости звука в данной среде

$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}rot\vec{H} \quad h = \overrightarrow{h_м}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad v = \overrightarrow{v_м}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad \rho' = \overrightarrow{\rho_м}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad p' = \overrightarrow{\rho_м}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$

$div\vec{h} = div\overrightarrow{h_м}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \overrightarrow{h_м}grade^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \overrightarrow{h_м}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}grad\vec{k}\vec{r} = \vec{h}\vec{k}$

$grad\vec{k}\vec{r} = \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x}(k_x x) + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y}(k_y y) + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}(k_z z) = \overrightarrow{e_x}k_x + \overrightarrow{e_y}k_y + \overrightarrow{e_y}k_z = \vec{k}$

$(3) \rightarrow\; \vec{k}\,\vec{h} = 0 \rightarrow\; \vec{h} \perp \vec{k} \;\; (\vec{k} \parallel \vec{i})$

(1) $\qquad -\omega\vec{h} = \left[\vec{k}[\vec{v}\overrightarrow{H_0}]\right]$

(2) $\qquad \omega p' = \rho(\vec{k}\vec{v})$

(3) $\qquad -\omega\vec{v} + \frac{H_0\rho'}{\rho}\vec{k} = -\frac{1}{4\pi}\left[\overrightarrow{H_0}[\vec{k}\vec{h}]\right]$

$U = \frac{\omega}{k}$ – фазовая скорость

$p' = U_0^2\rho \quad U_0^2 = \frac{p'}{\rho}$

$\frac{grad\,p'}{\rho} = \frac{p'\vec{k}}{\rho} = U_0^2\vec{k}$

(1) $\rightarrow\; -\omega h_y = -k(v_x H_y - v_y H_x) \qquad -\omega h_z = -k(v_z H_x)$

(2) $\rightarrow\; U\omega_z = -\frac{H_x}{4\pi\rho}h_z \qquad U\omega_y = -\frac{H_z}{4\pi\rho}h_y$

(3) $\rightarrow\; \left(U - \frac{U_0^2}{U}\right)v_x = \frac{H_y}{4\pi\rho}h_y$

$U^2 = \frac{{H_x}^2}{4\pi\rho} \qquad\qquad U = \frac{|H_x|}{\sqrt{4\pi\rho}}$

Ниже будем считать, что $H_x>0$ и опускать знак модуля

Т.к. $\quad \vec{h} \perp \vec{H} \quad \vec{h} \perp \vec{k}$

$$v_x \approx 0 \quad v_z = -\frac{H_x}{4\pi\rho U} h_z \to v_z = \frac{h_z}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

Групповая скорость совпадает с $\vec{H}$. $\overrightarrow{v_{\text{гр}}} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}$

Список литературы

1. И.Е.Тамм Основы теории электричества. Физматлит, 2003
2. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматлит, 2003.
3. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4-х томах. Том 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред . 2011
4. де Гроот С.Р., Сатторп Л.Г. Электродинамика. 1982
5. Васильев А. Н. Классическая электродинамика. 2010
6. Лотов К.В. Физика сплошных сред. ИКИ, 2002

7. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по классической электродинамике и специальной теории относительности –М.: Лань, 2008.
8. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике – М.: Лань 2008.