

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

А. П. Кузнецов, О. Б. Исаева

Задачи по теории катастроф

Учебно-методическое пособие
для студентов 3 курса факультета нелинейных процессов

Саратов 2012

Авторы-составители:
Александр Петрович Кузнецов
Ольга Борисовна Исаева

Пособие предназначено для использования при проведении семинарских занятий по курсам «Теория катастроф и бифуркаций», «Приложения теории катастроф» у студентов 3 курса факультета нелинейных процессов. Может быть полезно как студентам, изучающим теорию катастроф, так и преподавателям при проведении семинаров по указанным курсам.

Работа представлена в авторской редакции.

© Кузнецов А. П., Исаева О. Б., 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Ряд Тейлора и модели	5
Понятия типичности и коразмерности	6
“Игрушки” теории катастроф	7
Критические точки функций одной переменной	8
Критические точки функций двух переменных	9
Катастрофа коразмерности один – складка	10
Бифуркация вилка	11
Катастрофа коразмерности два – сборка	13
Катастрофа коразмерности три - ласточкин хвост	15
Каспoidные катастрофы в двумерных системах	16
Катастрофа коразмерности три – эллиптическая омбилика	18
Катастрофа коразмерности три – гиперболическая омбилика	19
Катастрофы и теория упругости	19
Катастрофы и физика фазовых переходов	20
Кривые и их особенности. Эволюты и эвольвенты	20
Каустики	21
Волновые фронты и их особенности	21
Колебания. Эффект смягчения мод	21
Нелинейный резонанс	22
Задачи для компьютерных исследований	23
Решения, комментарии, ответы	27

Введение

Предлагаемый ниже материал представляет собой задачи к курсам «Теория катастроф и бифуркаций» и «Приложения теории катастроф и бифуркаций», читаемых студентам 3-го курса Факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Представлены задачи, посвященные не только формальной теории катастроф, но и таким важным понятиям, как типичность, случаи общего положения, вырожденные случаи, коразмерность и т.д. Те или иные типы критических точек и катастроф иллюстрируются задачами в стиле курса общей физики, что должно способствовать восприятию теории катастроф, как инструмента для решения физических задач. В настоящем издании представлены решения для всех основных одномерных (каскадных) катастроф. Задачи, посвященные двумерным катастрофам и приложениям теории катастроф, мы рекомендуем для самостоятельного решения.

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Ряд Тейлора и модели

1. Маленькое тело массы m движется по плоской кривой $y = f(x)$. Какая математическая аппроксимация этой кривой достаточна, чтобы верно задать скорость тела в некоторой точке кривой? Силу, действующую на тело в этой точке?

2. Эллипс задан уравнением $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$. Получите аппроксимацию эллипса квадратичной параболой и параболой четвертой степени в окрестности его верхней точки $x=0$. С помощью этой аппроксимации определите координату точки пересечения эллипса с осью абсцисс и сравните полученный результат с точным значением.

3. Свойства некоторой системы определяются функцией $f(x) = Ax + Bx^2 + C \sin x + Dx \cos x + E \operatorname{sh} x$, зависящей от пяти параметров. Найдите число существенных параметров, которые необходимы при использовании аппроксимации с помощью членов ряда Тейлора, вплоть до кубических. Что означает свойство “полноты” аппроксимирующей “модельной” функции в применении к обсуждаемой задаче?

4. Точки A и B расположены на фиксированном расстоянии друг от друга. Точки соединены некоторым путем, заданным гладкой функцией $f(x)$, обладающей симметрией относительно центра отрезка. Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, постройте систему моделей, аппроксимирующих путь из A в B . Каково число параметров этих моделей? Какие типы траекторий они описывают? Определите с их помощью длину пути вдоль кривой. Расстояние AB примите за единицу.

5. Линза из материала с показателем преломления n образована плоской поверхностью и поверхностью, полученной вращением вокруг оси y некоторой четной функции $f(x)$ с единственным квадратичным экстремумом, расположенным в точке $x=0$. Сколько параметров характеризуют фокусирующие свойства такой системы в параксиальном приближении? Как учесть aberrации линзы?

6. Консервативный осциллятор характеризуется некоторой потенциальной функцией $U(x)$. Сколько членов ряда Тейлора надо учесть в разложении функции $U(x)$, чтобы получить существенно двухпараметрическую модель консервативного нелинейного осциллятора? Постройте такую модель.

7. Используя примеры, обсудите понятие универсальности применительно к модели осциллятора с кубической нелинейностью.

8. Обсудите использование рядов Тейлора при построении моделей теории колебаний по типу автогенератора Ван-дер-Поля.

9. Отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ задано некоторой гладкой функцией $f(x)$. Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, а также замены переменных и параметров, получите одно- и двухпараметрические универсальные модельные отображения.

Понятия типичности и коразмерности

10. Приведенные ниже уравнения могут иметь несколько действительных корней. Изобразите плоскость параметров p, q , разбитую на соответствующие области и исследуйте вопрос о типичности и коразмерности каждой из возможных ситуаций.

а) квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$,

б) биквадратное уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$,

в) кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$.

Обсудите применение метода малых «шевелений» параметров в этих случаях.

11. Космическая станция движется вокруг планеты по круговой орбите. Затем включается двигатель, увеличивающий скачком скорость станции по касательной к первоначальной траектории. Какие из возможных новых траекторий относятся к случаям общего положения, а какие – к вырожденным?

12. Иголку бросают на плоскость, на которой нарисована окружность. Какие возможны случаи общего положения, и какие вырожденные ситуации взаимного расположения иголки и окружности? Обсуждение проведите по возрастающей коразмерности. Обсудите случай другой фигуры, например, квадрата.

13. На доске массы M лежит небольшой брусок массы m , рис.1. Коэффициент трения между доской и бруском равен μ_1 , а между доской и поверхностью – μ_2 . К бруску приложена горизонтальная сила F . Укажите все возможные качественно разные ситуации поведения системы и изобразите на плоскости параметров (μ_1, μ_2) области, соответствующие различным типам динамики. Укажите возможные негрубые ситуации коразмерности один и два.

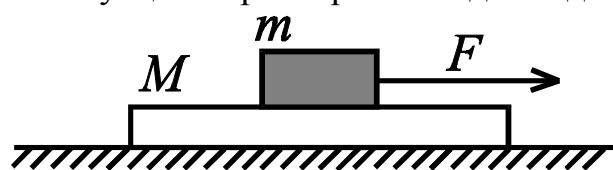


Рис.1

14. Укажите случаи общего положения, а также вырожденные ситуации ко-размерности один и два на фазовых диаграммах состояния вещества.

15. Как могут располагаться друг относительно друга плоская кривая и соприкасающаяся окружность (окружность кривизны)? Какие из этих вариантов соответствуют случаям общего положения, а какие представляют собой вырожденные ситуации?

16. Какие возможны ситуации взаимного расположения тора и плоскости? Какие из них соответствуют случаям общего положения, а какие являются вырожденными? В своих рассуждениях используйте метод малых шевелений.

“Игрушки” теории катастроф

17. Возьмите металлическую линейку и сожмите ее так, чтобы она прогнулась в одну сторону. Попробуйте "ликвидировать" этот прогиб, надавливая на выгнувшуюся линейку другой рукой. Пронаблюдайте происшедшую катастрофу.

18. Изготовьте машину Зимана, рис.25. Она представляет собой диск, который может вращаться вокруг оси O . Одна резинка закреплена в точка A и в некоторой точке на диске. На конце второй резинки закреплена указка, которая может перемещаться по плоскости. При фиксированном положении указки система будет находиться в равновесии. При медленном перемещении указки могут происходить «катастрофы»: диск будет резко проворачиваться на некоторый угол. Проведите эксперименты с этой машиной и определите примерное расположение области бистабильности на плоскости (x, y) , где x, y - координаты конца указки на плоскости параметров.

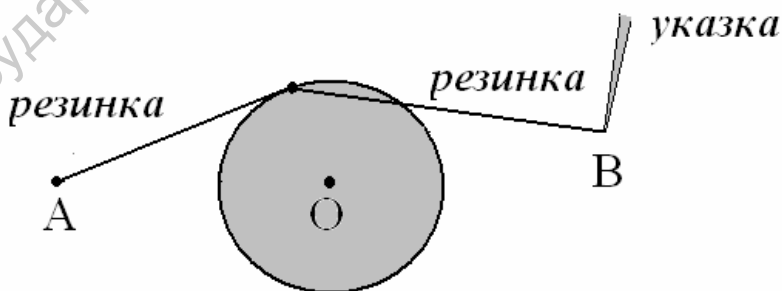


Рис.2

19. Имеется машина Зимана со следующими параметрами: диаметр диска 1, длина резинок в нерастянутом состоянии 1, расстояние OA от центра диска до точки прикрепления одной резинки 2, рис.3. Найдите величину s расстояния OB , которое отвечает расположению одного из "клювов" области бистабильности, ближайшего к центру диска.

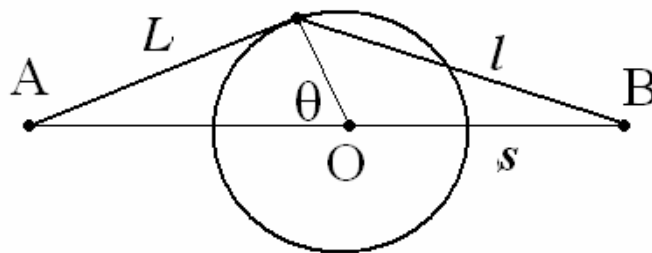


Рис.3

20. Качалка представляет собой картонную конструкцию, форма которой задана некоторой кривой, например, $y = x^2$, рис.4. К качалке прикреплены в виде грузика два небольших магнита. Они достаточно тяжелые, так что можно считать, что центр масс системы совпадает с грузиком. Качалка может находиться в состоянии равновесия, которое зависит от положения грузика. Изготовьте качалку и проведите эксперименты, меняя положение грузика.

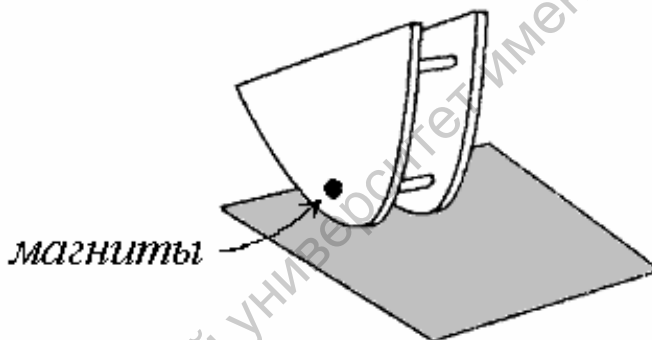


Рис.4

21. Обсудите проблему устойчивости качалки с точки зрения картины семейства нормалей к параболе?

22. Сделайте поиск в Интернете по задаче об устойчивости судна с параболическим профилем.

Критические точки функций одной переменной

23. Какие критические точки имеет функция $f(x) = x(1 - \cos x)$?

24. Какую критическую точку имеет функция $f(x) = (a - \cos x)^2$ при $x=0$?

25. Найдите явный вид замены переменной и параметров, приводящей полином $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ к виду, не содержащему член x^3 .

26. Рассмотрите возмущение функции $f(x) = x^4$ вида px^2 , где p - некоторый малый параметр. Какое число квадратичных экстремумов возникает при малом «шевелении» параметра p ?

27. Чему равна коразмерность критической точки x^6 на классе гладких функций?

28. Массивная платформа движется по прямой вдоль оси x со скоростью V . На платформе находится прикрепленный к пружине жесткости k шарик массы m , совершающий колебания вдоль оси x с амплитудой a . Какие критические точки может иметь функция, определяющая зависимость от времени координаты шарика относительно неподвижного наблюдателя? Какие из них "более типичны"?

Критические точки функций двух переменных

29. Найдите матрицу Гессе в критических точках типа минимум $x^2 + y^2$, седло $x^2 - y^2$, обезьянье седло $x^3 - 3xy^2$, желоб x^2 и скрещенные желоба x^2y^2 , и выясните, какие из них являются вырожденными, а какие нет.

30. С помощью компьютера постройте потенциальные рельефы, отвечающие всем перечисленным выше критическим точкам. Постройте систему линий уровня, соответствующую точкам типа минимум, седло и обезьянье седло.

31. Найдите представление критической точки обезьянье седло с помощью функции комплексной переменной.

32. Известно четыре стандартных кубики: $x^2y - y^3$, $x^2y + y^3$, x^2y , x^3 . К какой из них приводится обезьянье седло $x^3 - 3xy^2$?

33. Найдите выражение для потенциала $\varphi(x, y)$ в системе двух параллельных нитей, несущих положительные заряды с одинаковой линейной плотностью σ . Постройте картину линий уровня функции $\varphi(x, y)$ – так называемые овалы Кассини. Нити расположены на расстоянии d .

34. Какие критические точки имеет функция $\varphi(x, y)$ из предыдущей задачи? В их окрестности выделите у функции $\varphi(x, y)$ морсовскую часть, выполнив соответствующее разложение в ряд Тейлора.

35. Тор располагается в трехмерном пространстве x, y, z . Какие критические точки располагаются на поверхности тора, если считать, что она локально задает некоторую функцию $z(x, y)$? Какие из этих точек являются морсовскими? Рассмотрите различные ориентации тора в пространстве.

36. Какие объекты на фазовой плоскости консервативного осциллятора соответствуют морсовским седлам?

37. В случае $a = b$ имеем $a(x + y)(x^2 - y^2)$ $x + y \rightarrow x$, $x - y \rightarrow y$ приходим к кубике x^2y . Аналогично в случае $a = -b$ приходим к той же самой кубике.

Катастрофа коразмерности один – складка

38. Найдите на плоскости параметров линии складок для функции $y = x^6 + ax^2 + bx$.

39. Имеется система двух проводов с током, из которых один удерживается упругой пружиной, а другой неподвижен, рис.5. Величины токов I и i , коэффициент жесткости пружины k , расстояние между проводниками в отсутствие токов l . Найдите состояния равновесия системы. Найдите выражение для зависимости потенциальной энергии от координаты, и определите характер устойчивости состояний равновесия. Покажите, что при изменении параметров (например, величины токов) в системе реализуется катастрофа складки. Покажите, что вблизи точки катастрофы зависимость энергии от координаты может быть приведена к соответствующей канонической форме. Удобно использовать безразмерные переменные и параметры, в частности управляющий параметр

$$\varepsilon = \frac{2\mu_0 I i l}{\pi k L^2}.$$

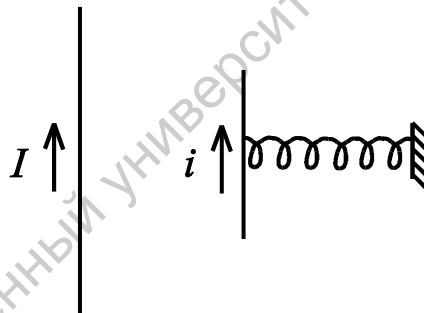


Рис.5

40. Шарик массы m , несущий заряд q , может скользить без трения внутри «лунки», профиль которой задан функцией $y = a \ln(x^2 / a^2 + 1)$, в электрическом поле напряженности E , направленном по горизонтали. Найдите потенциальную энергию шарика в зависимости от координаты. Найдите равновесия в системе и точку их исчезновения при изменении параметра $\varepsilon = mg / qE$. Определите тип катастрофы, происходящей в системе. Изобразите многообразие катастрофы для данной задачи.

41. Математический маятник в виде невесомого стержня длины l и маленького груза массы m может вращаться в вертикальной плоскости. К маятнику прикреплен спиралевидная пружина, создающая возвращающий при отклонении маятника от вертикали на угол φ момент $M = \mu\varphi$. Обсудите возможность

равновесий в системе. Найдите значения безразмерного параметра $k = \frac{\mu}{mgl}$, отвечающего появлению новых равновесий. Пружина может «закручиваться» на большие углы, в том числе бóльшие, чем 2π .

42. Как будет вести себя качалка, если магнит поместить на линию складки?

43. В пробирке под невесомым поршнем находится идеальный газ. Поверх поршня налита ртуть, рис.6. Газ очень медленно нагревают. При этом поршень поднимается, и ртуть постепенно выливается из пробирки. При превышении некоторого значения температуры T_c происходит "катастрофа": поршень поднимается вверх и выбрасывает оставшуюся ртуть из пробирки, даже если температура газа больше не увеличивается. Установите тип наблюдающейся катастрофы. Атмосферное давление p_0 , начальная температура газа T_0 , длина пробирки l , первоначально газом занята часть пробирки l_0 .

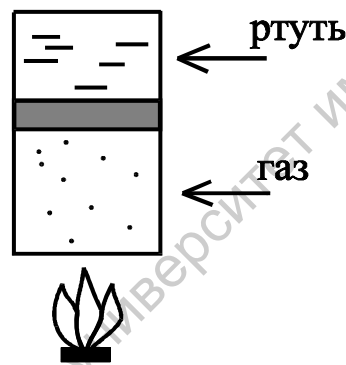


Рис.6

Бифуркация вилка

44. Математический маятник вблизи верхнего положения равновесия прикреплен к нелинейной пружине, рис.7. Найдите потенциальную энергию системы, проанализируйте характер устойчивости состояний равновесия и их перестройки. Считайте, что отклонение пружины от закона Гука описывается соотношением $F = kx + cx^3$, где k и c – положительные коэффициенты, а угол отклонения маятника от вертикали мал. Длина стержня l , масса шарика m .

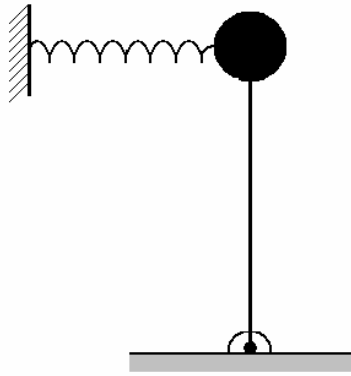


Рис.7

45. Небольшое тело массы m может скользить без трения по горизонтальному стержню, рис.8. Тело прикреплено пружиной жесткости k к точке O , находящейся на расстоянии a от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии l . Как трансформируется вид зависимости потенциальной энергии от координаты x при изменении параметра a ? Дайте физическое обоснование наблюдаемых перестроек. Проанализируйте вид потенциала при малых значениях координаты. Ось x направлена вдоль стержня, а начало координат расположено в ближайшей точке к O .

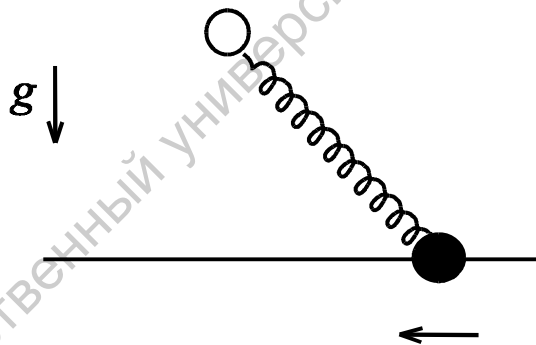


Рис.8

46. Имеются два одинаковых кольца радиуса R , по каждому из которых равномерно распределен положительный электрический заряд Q . Вдоль оси, проходящей через центры колец, может скользить точечный отрицательный заряд $-q$, рис.9. Обсудите вопрос о возможных перестройках равновесия заряда в зависимости от расстояния между кольцами $2a$. Проведите сначала качественное обсуждение, а затем найдите точное значение, отвечающее наблюдаемой катастрофы (бифуркации).

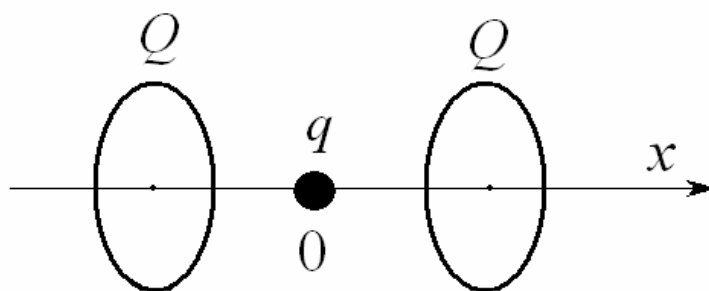


Рис.9

47. Тонкая однородная палочка длины l и плотности ρ шарнирно укрепена за верхний конец так, что шарнир находится на расстоянии h от поверхности жидкости плотности $\rho_{ж}$. Обсудите вопрос об устойчивости вертикального расположения палочки. Точка прикрепления шарнира находится над поверхностью жидкости.

Катастрофа коразмерности два – сборка

48. Изобразите качественно многообразие катастрофы сборки – поверхность отвечающую равновесиям в системе с потенциалом $U(x) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx$ в пространстве (a, b, x) . Укажите бифуркационное множество, отвечающее проекции этой картины на плоскость параметров (a, b, x) . (Рекомендуем сделать это, даже если вы представляете, как выглядит такая картина.)

49. Экспериментально получите сборку на ткани.

50. Параметры системы, демонстрирующей катастрофу сборки, медленно изменяют так, что точка на плоскости параметров обходит сборку 5 раз, рис.10. Сколько жестких переходов происходит в системе? Аналогичный вопрос для двух других маршрутов.

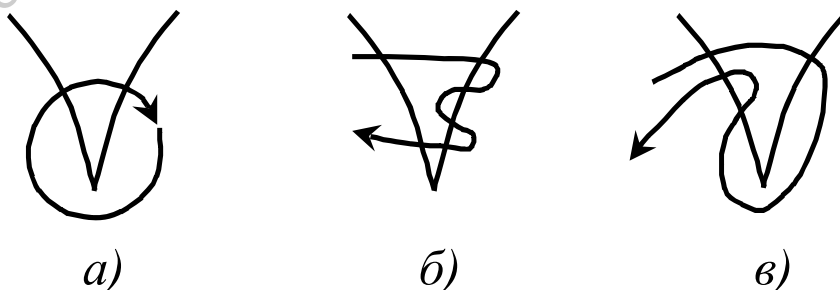


Рис.10

51. Как будет вести себя качалка, если прикрепить магнит в точке сборки?

52. Маленькая бусинка массы m может без трения скользить по тонкому проволочному кольцу радиуса R , рис.11. Кольцо вращают с частотой ω вокруг вер-

тикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии a от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Найдите линии складок и точку сборки. Используйте безразмерную форму для энергии и параметров, характеризующих частоту вращения и смещение оси вращения. Сначала рассмотрите случай малых отклонений шарика и соответствующее разложение в ряд Тейлора, а затем поведите более строгое исследование.

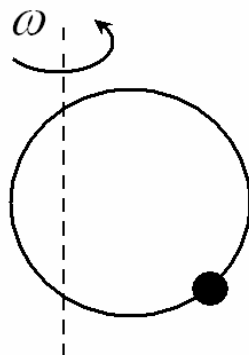


Рис.11

53. Шарик массы m может без трения скользить по стержню, наклоненному под углом α к горизонту, рис.12. Шарик прикреплен к пружине жесткости k , второй конец которой неподвижно зафиксирован на расстоянии a от стержня в точке, принадлежащей проходящей через стержень вертикальной плоскости. Длина пружины в нерастянутом состоянии l . Как трансформируется при изменении параметров вид зависимости потенциальной энергии от координаты шарика x , отсчитываемой вдоль стержня? Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $\alpha, l/a$.

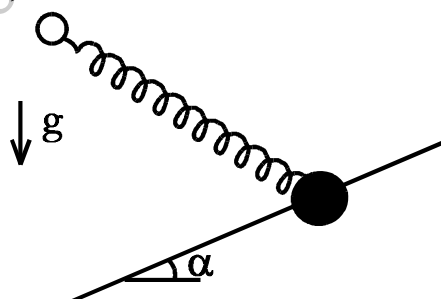


Рис.12

54. На рис.13 показана вольтамперная характеристика туннельного диода. Считайте, что она задается кубическим полиномом $I = a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c$, где a, b и c — коэффициенты. Такой диод включен в цепь, содержащую регулируемую Э.Д.С. E и резистор с регулируемым сопротивлением R . Определите напряжение на диоде. Укажите на плоскости введенных подходящим образом параметров точку сборки, а также область, в которой возможно единственное решение, а также область, где таких решений

несколько.

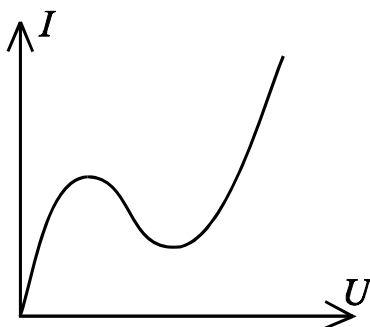


Рис.13

55. Найдите поверхность, задаваемую уравнением газа Ван-дер-Ваальса в пространстве давление P , объем V , температура T и обсудите ее устройство с точки зрения теории катастроф. Найдите линии складок и точку сборки в координатах P/P_c , T/T_c , где P_c и T_c – известные из термодинамики критические значения температуры и давления.

56. Чем отличаются свойства нелинейного осциллятора в случаях, когда зависимость потенциальной энергии от координаты имеет катастрофу сборки и двойственной сборки?

57. Покажите, что траектория точки на ободе колеса, катящегося без проскальзывания, имеет острия с характерной "полукубической" особенностью.

Катастрофа коразмерности три - ласточкин хвост

58. Для катастрофы ласточкин хвост, соответствующей потенциальной функции $U(x) = x^5 / 5 + ax^3 / 3 + bx^2 / 2 + cx$, найдите линию сборок в пространстве параметров (a, b, c) .

59. Найдите в параметрической форме уравнения линий складок в сечениях катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a = \text{const}$. Покажите, что в точках сборки производные по параметру обращаются в ноль.

60. Изобразите характерные конфигурации потенциальной функции $U(x)$, отвечающие сечению катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a = \text{Const}$ для $a > 0$ и для $a < 0$.

61. Изобразите бифуркационное множество катастрофы ласточкин хвост.

62. Пусть потенциальная функция задана полиномом $U(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$. Какие геометрические объекты образуют в пространстве параметров A, B, C, D складки, сборки, "линия самопересечений", ласточкин хвост? Дайте ответ, не проводя детальных вычислений, а используя понятие коразмерности.

63. Покажите, что для полинома $U(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$ точка катастрофы ласточкин хвост реализуется при выполнении условий $B = 2A^2/5$, $C = 2A^3/25$, $D = A^4/125$.

64. В системе из задачи 44 шарик маятника несёт заряд q . При этом точка прикрепления пружины сдвинута на расстояние x_0 . Кроме того, на расстоянии a от него (в ситуации, когда пружина не растянута) помещен неподвижный заряд $-Q$, рис.14. Найдите потенциальную энергию $U(x)$ в зависимости от координаты шарика. Покажите, что в системе может наблюдаться катастрофа ласточкин хвост, и найдите соответствующие значения параметров.

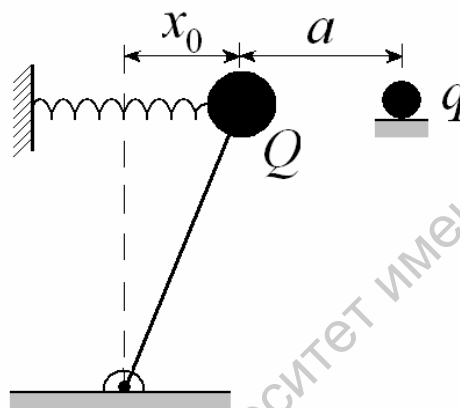


Рис.14

65. Для предыдущей задачи получите выражение для потенциальной энергии шарика в виде полинома пятой степени, используя разложение в ряд Тейлора электростатической энергии как функции координаты x . Используя эту аппроксимацию, получите значения параметров, соответствующих точке катастрофы ласточкин хвост. Сравните полученные значения с точным. Можно ли считать полученное приближенное решение приведением катастрофы ласточкин хвост к канонической форме? Почему?

Каспидные катастрофы в двумерных системах

66. По горизонтальной плоскости может кататься шарик массы m , несущий положительный заряд q . Под плоскостью на расстоянии a от нее и на расстоянии l друг от друга помещены два отрицательных заряда Q_1 и Q_2 , рис.15. Найдите значения параметров, отвечающих точке катастрофе самой высокой координаты (какая это катастрофа?) и получите уравнение, задающее линии уровня потенциальной энергии шарика в этой точке. Решите эту же задачу в случае, если заряды Q_1 и Q_2 положительны.

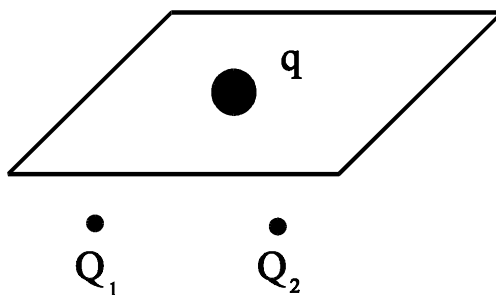


Рис.15

67. Придумайте физическую систему, для которой в точке катастрофы сливаются максимум и два седла.

68. Изобразите картину линий уровня потенциальной энергии $U(x, y) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx + y^2$ в различных характерных точках плоскости параметров вблизи точки сборки.

69. Решите ту же задачу для функции $U(x, y) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx - y^2$. Укажите линию на плоскости параметров, соответствующую нелокальному бифуркационному множеству.

70. Установите вид сепаратрис для системы линий уровня в двумерных системах в точках катастроф типа ласточкин хвост и бабочка.

71. Движение консервативного осциллятора задается потенциальной функцией $U(x)$. Какие катастрофы - каспийные или омбилические - могут происходить с линиями уровня на фазовой плоскости осциллятора? Будут ли "проблемы" с приведением этих катастроф к каноническим формам?

72. Рассмотрите функцию $U(x, y) = (x^2 - 1)y - \varepsilon x$. Найдите критические точки на плоскости x, y и "высоту", на которой они расположены. Постройте систему линий уровня для случаев $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 0$, $\varepsilon > 0$, укажите сепаратрисы и покажите, что наблюдается нелокальная бифуркация.

73. Рассмотрите следующую систему: вертикально висящий маятник, несущий заряд q , расположен посередине между двумя вертикальными нитями, несущими заряд с линейной плотностью λ_1 и λ_2 . Колебания могут происходить и в поперечном направлении. Найдите потенциальную энергию маятника как функцию координат x, y . Отклонения маятника от вертикали считайте малыми. Изобразите характерный потенциальный рельеф и картину линий уровня. Покажите, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ имеет место нелокальная бифуркация, и изобразите соответствующую картину линий уровня. Покажите, что соответствующая бифуркационная линия при вариации параметра $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ обрывается в точке,

отвечающей сборке того же типа, что и в задаче 65. Изобразите соответствующую эволюцию линий уровня.

Катастрофа коразмерности три – эллиптическая омбили-ка

74. Для эллиптической омбилики, заданной потенциальной функцией $U(x, y) = x^2 y - y^3 / 3 + a(y^2 + x^2) + bx + cy$, получите уравнение для линий сборок в пространстве параметров a, b, c .

75. Найдите выражение для потенциальной функции $U(x, y)$ в точке сборки $a=1, b=0, c=3$. Каков “тип” (см. задачи 68 и 69) этой сборки?

76. Покажите, что линия складок в сечении $a=1$ является гипоциклоидой - кривой, получаемой при движении точек катящейся окружности по внутренней части другой окружности.

77. Исследуйте эволюцию критических точек на плоскости переменных x, y при движении вдоль линии $a=1, b=0$. (Нарисуйте предварительно линию складок, точки сборки и выбранный маршрут.) Покажите, что

а) при $c < -1$ имеются два седла, которые с ростом c двигаются по линии $y=-1$ навстречу друг другу;

б) при $c=-1$ в точке $x=0, y=1$ рождаются минимум и седло;

в) при $-1 < c < 3$ эти седло и минимум расходятся по оси x в противоположные стороны, а два исходных седла продолжают сближаться;

г) при $c=3$ два седла и минимум сливаются в точке $x=0, y=-1$;

д) при $c > 3$ остаются два седла, которые расходятся по оси x с ростом c .

Дайте соответствующие иллюстрации на плоскости переменных x, y .

78. Изобразите бифуркационное множество катастрофы эллиптической омбилики в пространстве параметров (a, b, c) . Укажите и нелокальное бифуркационное множество.

79. Объясните симметрию бифуркационного множества эллиптической омбилики. Для этого покажите, что повороты системы координат x, y на 120° и 240° соответствуют аналогичным поворотам на плоскости параметров b, c . (Указание. Используйте комплексное представление преобразования поворота.)

80. Имеется система трех одинаковых параллельных, равномерно заряженных нитей. Нити располагаются так, что их пересечение с перпендикулярной плоскостью образуют равносторонний треугольник. Покажите, что электростатический потенциал в такой системе как функция координат на этой плоскости

имеет критическую точку, отвечающую ростку катастрофы эллиптической омбилики.

81. Придумайте, как можно использовать предыдущую задачу, чтобы реализовать систему с катастрофой эллиптической омбилики. (*Указание.* Используйте маятник, несущий заряд Q).

Катастрофа коразмерности три – гиперболическая омбилика

82. Проведите исследование гиперболической омбилики, заданной потенциальной функцией $U(x, y) = x^2 y + y^3 / 3 + a(y^2 - x^2) + bx + cy$, по следующей схеме:

- а) получите выражение для критических точек;
- б) найдите уравнение для линий складок в сечении пространства параметров плоскостью $a=1$;
- в) найдите точки сборки в этом сечении и напишите уравнение для линий сборки в пространстве параметров;
- г) выясните расположение и характер критических точек на плоскости x, y при $a=1, b=0$ и различных c ;
- д) сделайте выводы об устройстве бифуркационного множества.

Катастрофы и теория упругости

83. Оцените критическую нагрузку для стального стержня длины 20 см и диаметром 5 мм.

84. Найдите критическую нагрузку для обычной стальной линейки. На сколько надо превысить эту нагрузку, чтобы линейка выгнулась на 2 см?

85. Получите выражение для энергии упругого стержня как функции амплитуды "выпучивания" a , считая что конфигурация стержня описывается выражением $y(s) = af(s)$, где $f(s) = s(s-L)/4$. Здесь s – координата, отсчитываемая вдоль стержня. Найдите с помощью этого приближения критическую нагрузку и соответствующий степенной закон для амплитуды a . Сравните результаты с полученными для случая $f(s) = \sin \pi s/h$.

86. Попробуйте угадать без вычислений структуру выражения для энергии Эйлера стержня в двухмодовом приближении с точностью до членов четвертого порядка. Представляет ли оно собой элементарную катастрофу Тома?

87. Найдите критическую нагрузку в задаче о выпучивании Эйлера стержня в многомодовом приближении в случае, когда он лежит на упругом основании с заданным коэффициентом жесткости.

88. Найдите значения коэффициента жесткости основания, при котором теряют устойчивость сразу две моды.

89. Найдите критические значения нагрузок потери устойчивости мод в случае отсутствия упругого основания. В каком порядке моды теряют устойчивость? Покажите, что соответствующие критические значения соответствуют простому пересчету длины стержня и объясните, почему это так.

Катастрофы и физика фазовых переходов

90. Изобразите линии фазовых переходов жидкость-газ, жидкость-твердое тело, газ-твердое тело, тройную и критическую точки вещества на P, T плоскости. Покажите характерные конфигурации зависимости потенциала Гиббса от параметра порядка во всех характерных точках такой диаграммы.

91. Используя теорию Ландау, найдите скачок теплоемкости C_V в точке фазового перехода.

92. Изобразите качественно зависимость термодинамического потенциала от параметра порядка для системы с метастабильным фазовым переходом 1-го рода.

93. Какой параметр в задаче о выпучивании стержня является аналогом параметра порядка в физике фазовых переходов?

94. Для модели Гинзбурга-Ландау с так называемым трикритическим термодинамическим потенциалом $\Phi(\eta) = \frac{1}{6}\eta^6 + \frac{a}{4}\eta^4 + \frac{b}{2}\eta^2 + h\eta$ найдите линии фазовых переходов 1-го рода на b, h плоскости при $a = 1$. Здесь h – параметр порядка. Как они трансформируются при вариации a ?

Кривые и их особенности. Эволюты и эвольвенты

95. Докажите, что эволютой циклоиды является циклоида, и получите ее уравнение.

96. Постройте на компьютере семейство нормалей к эллипсу и укажите огибающую семейства нормалей дает астроиду с четырьмя точками сборки.

97. Нарисуйте циклоиду, изготовьте по ее форме гнутый кусок жести и используйте его для создания изохронного маятника в виде катающегося по нему шарика. Измерьте экспериментально период такого маятника и сравните с теоретическим значением.

Каустики

98. На борту корабля, стоящего у причала, можно наблюдать медленно меняющуюся картину бликов, возникающую из-за отражений солнечного света от воды. Обсудите свойства яркости этой картины с точки зрения теории катастроф.

99. При отражении от цилиндрической поверхности возникает яркая каустика и еще более яркая точка сборки. Проведите экспериментальное исследование этой каустики (в частности определите положение точки сборки) и сравните с результатами теоретического анализа.

100. Пронаблюдайте картину, возникающую при прохождении света через “гофрированное” стекло. Что будет происходить при шевелении стекла?

101. Обсудите известные вам геометрические аберрации линз с позиций теории катастроф.

Волновые фронты и их особенности

102. В момент времени $t=0$ волновой фронт имеет форму параболы $y=x^2$. Получите уравнение линии, задающей положение волнового фронта в момент времени t . Скорость распространения волны c . Когда волновой фронт претерпит катастрофу ласточкин хвост?

103. Получите аналитическое выражение для волнового фронта, испущенного плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями $y=f(t)$, $x=g(t)$.

104. Используя выражение для волнового фронта, испущенного эллипсом, обоснуйте, что волновой фронт будет иметь особенность типа ласточкин хвост. Для этого обсудите структуру разложения в ряд Тейлора, а детальные выкладки можете не проводить

Колебания. Эффект смягчения мод

105. Исследуйте вид поверхности $\omega^2 = \omega^2(a, b)$, дающей зависимость частоты линейных колебаний от параметров для нелинейного осциллятора в окрестности катастрофы сборки $\ddot{x} + ax + b + x^3 = 0$. Сколько листов имеет эта поверхность? Чему это отвечает с точки зрения конфигурации потенциальной функции? Какие листы соответствуют устойчивым, а какие неустойчивым движениям? Каков смысл линии самопересечения? Покажите, что в окрестности линии складки и точки сборки частота зависит от параметров по степенным законам и найдите соответствующие показатели.

106. Найдите зависимость частоты линейных колебаний от параметров для механической системы из задачи 53. Покажите, что в точках катастроф частота обращается в ноль, а период – в бесконечность (феномен “смягчения мод”). Установите характер зависимости частоты от превышения параметром a значения, отвечающего точке катастрофы, в окрестности точки слияния экстремумов потенциальной функции. Сравните показатель полученной степенной зависимости со значением, полученным в предыдущей задаче для катастрофы сборки.

107. Почему опрокидыванию корабля предшествует долгопериодическая качка?

108. Как наблюдать феномен смягчения мод с помощью качалки?

109. В книге Постона и Стюарта “Теория катастроф” читаем: “Значит, ненагруженный стержень издает “тиньк”, при умеренной нагрузке “бумм”, а вблизи точки выпучивания – “буинньккк”. Это великолепно известно опытным инженерам, а неискушенного читателя должно предостеречь от предпочтения конструкций в тоне сопрано басовым.” Обсудите эти утверждения с позиций теории катастроф и феномена смягчения мод.

Нелинейный резонанс

110. Покажите, что укороченное уравнение,

$$\dot{A} + i(\omega - \omega_0)A = -\gamma A/2 + \frac{3}{8} \frac{i\beta}{\omega_0} A|A|^2 - ib/2\omega_0,$$

описывающее осциллятор Дуффинга под внешним гармоническим воздействием, с помощью замены переменных приводится к комплексному укороченному уравнению в безразмерной форме:

$$\dot{z} + i\Delta z = -z = i|z|^2 z - iP^{1/2}.$$

Получите уравнение для действительных амплитуды и фазы. Получите также в безразмерном виде уравнение резонансной кривой.

111. Приведите к каноническому для сборки виду безразмерное уравнение резонансной кривой нелинейного осциллятора. С его помощью определите координаты сборки и получите уравнение для линий складок на плоскости безразмерных отстройки частоты Δ – амплитуды входного сигнала P . Получите вид этой зависимости в окрестности точки сборки. Какие бифуркации (в терминах теории бифуркаций) реализуются при переходе через линии складок на плоскости частота - амплитуда воздействия?

112. Оцените амплитуду внешней силы b , при которой разыгрываются явления, связанные с нелинейным резонансом, для осциллятора Дуффинга с пара-

метрами $\omega_0=1$, $\beta=0,3$, и с параметром диссипации $\gamma=0,2$. То же самое для диссипации $\gamma=0,02$.

113. Выполните оценки, аналогичные представленным в предыдущей задаче, для супергармонического резонанса на частотах, близких к $\omega_0/3$.

114. Частота внешнего сигнала точно равна $3\omega_0$. Найдите пороговое значение амплитуды воздействия, при которой возможно жесткое возникновение колебаний на этой частоте, значения параметров $\omega_0=1$, $\beta=0,3$, $\gamma=0,2$ и $\gamma=0,02$.

115. Почему при исследовании резонанса на гармониках в осцилляторе Дуффинга выбирают именно частоты $3\omega_0$ и $\omega_0/3$?

Задачи для компьютерных исследований

116. Многообразия каспидных катастроф. Постройте многообразия катастроф в следующих случаях:

- Для катастрофы сборки в канонической форме,
- Для канонической формы катастрофы ласточкин хвост в случае нескольких различных значений параметра a .

117. Машина Зимана. Постройте многообразие катастроф для машины Зимана. Диаметр диска и длины нерастянутых резинок положите равными 1, а расстояние от неподвижной точки прикрепления резинки до центра диска – 2. Предварительно получите строгое выражение для энергии упругой деформации резинок как функции угла поворота диска.

118. Колебания осциллятора в потенциале с двумя ямами. Постройте фазовые портреты консервативного и диссипативного осциллятора $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + U'(x) = 0$ в потенциале, отвечающем катастрофе сборки $U(x)=x^4/4+ax^2/2+bx$. Создайте программу, демонстрирующую вид потенциала и фазовые портреты в различных точках плоскости a, b . Предварительно нанесите на нее линии складок и точку сборки. За эволюцией картинок удобно наблюдать, если изменение параметров (координаты выделенной на экране точки) осуществлять с помощью “мыши”.

119. Ласточкин хвост. Изучите эволюцию формы потенциала для катастрофы ласточкин хвост. Для этого предварительно получите на экране дисплея соответствующее бифуркационное множество. Создайте программу, которая демонстрирует вид потенциала в точке, отмеченной на экране с помощью “мыши”. Выберите несколько значений параметра a .

120. Трансформации эквипотенциалей. Над поверхностью океана помещена материальная точка массы m . Точка располагается на высоте h над невозму-

щенным уровнем океана. Постройте "карту" эквипотенциалей гравитационного поля в такой системе. Проследите за ее трансформациями при вариации безразмерного параметра m/gh^2 . (Ось x направьте вдоль невозмущенной поверхности воды.) Что можно сказать о форме возмущенной поверхности воды? Изобразите несколько характерных рельефов потенциальной функции $U(x,y)$.

121. Каспидные катастрофы в двумерных системах. Изучите эволюцию линий уровня для катастроф сборки, заданной потенциальной функцией $U(x,y)=x^4/4+ax^2/2+bx+y^2$. Предварительно получите на экране дисплея соответствующее бифуркационное множество. Создайте программу, которая демонстрирует вид эквипотенциалей в точке, отмеченной на экране. Создайте программу, которая демонстрирует рельеф потенциальной функции в выделенной точке.

Решите аналогичную задачу в случае потенциальной функции $U(x,y)=x^4/4+ax^2/2+bx-y^2$.

122. Эллиптическая омбилика. С помощью компьютера постройте картину линий уровня потенциальной функции $U(x,y)$ для катастрофы эллиптической омбилики в случае $a=1$. Подберите характерные точки на плоскости параметров b и c , на которой предварительно получите соответствующее бифуркационное множество. Обратите внимание на точки сборки. Постройте несколько потенциальных рельефов.

Решите эту же задачу в случае $a=0$.

Постройте бифуркационное множество в трехмерном пространстве параметров.

123. Гиперболическая омбилика. Решите задачу 118 для случая гиперболической омбилики при $a=1$ и при $a=0$. Постройте бифуркационное множество этой катастрофы.

124. Двумерный маятник в поле трех притягивающих тел. Рассмотрите движение двумерного маятника с затуханием, помещенного в центре равностороннего треугольника, в вершинах которого находятся три притягивающих центра (магниты, гравитационные массы и др.) Считайте, что потенциал отвечает закону всемирного тяготения. Изобразите картину линий уровня такого потенциала и его рельеф. Покажите, что вблизи центра он отвечает катастрофе эллиптическая омбилика. Постройте несколько характерных траекторий маятника. Найдите бассейны притяжения положений равновесия маятника.

125. Гладкие кривые с особенностями. Постройте простейшие кривые, имеющие особенности в виде точек сборки с характерными полукубическими

остриями: циклоиду, гипоциклоиду, астроиду. Пополните этот список самостоятельно.

126. Каустики в чашке. В цилиндрическом сосуде (например, в чашке с кофе) можно наблюдать яркую линию с еще более ярким острием. Эта линия – каустика – представляет собой огибающую световых лучей, отраженных от цилиндрической поверхности. Проведите компьютерное моделирование такой каустики. Рассмотрите далее ситуации, когда имеется точечный источник света, который может быть расположен как внутри, так и вне отражающей цилиндрической поверхности. Изучите трансформации каустик. Решите аналогичную задачу в случае эллиптической отражающей поверхности.

127. Миражи. В атмосфере температура изменяется с высотой и, соответственно, изменяется показатель преломления. Проведите компьютерное исследование траекторий световых лучей в такой среде. Используйте известные из оптики законы зависимости показателя преломления воздуха от температуры. Рассмотрите некоторые простейшие законы изменения температуры с высотой. Охарактеризуйте наблюдаемые картины в терминах теории катастроф.

128. Радуга. Найдите в справочнике данные по коэффициенту преломления света в воде в диапазоне от красного цвета до фиолетового и воспроизведите на компьютере расчет траекторий лучей света в капле воды (теория радуги Декарта). Пронаблюдайте образование каустик. Определите, под какими углами по отношению к направлению на солнце наблюдатель видит красное и фиолетовое кольца радуги. Используйте цветную графику.

129. Каустики в электронном потоке. Одно из известных устройств микроволновой электроники – клистрон – содержит две близко расположенные металлические сетки, на которые подано переменное напряжение $U=U_0\cos t$. Через сетки со скоростью v_0 летит пучок электронов (рис.36). Проведите компьютерное исследование пространственно-временных диаграмм для электронов в области за сетками. Охарактеризуйте полученные результаты в терминах теории катастроф.

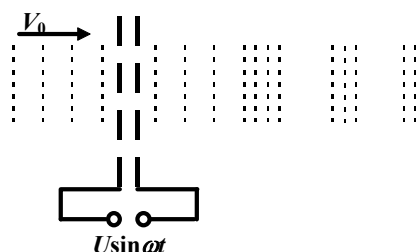


Рис.16

130. Плоский волновой фронт. Постройте на компьютере картину распространения волнового фронта внутри эллипса в режиме компьютерной мультипликации. Попробуйте в качестве излучающей поверхности другие гладкие кривые.

131. Принцип Гюйгенса на компьютере. Создайте программу, иллюстрирующую принцип Гюйгенса и показывающую систему волновых фронтов в виде окружностей одного радиуса с центрами на эллипсе. Что происходит с этой картиной с ростом радиусов? Как она соотносится с каустиками?

132. Нелинейный резонанс. Напишите программу, которая строит фазовые портреты укороченного уравнения, описывающего нелинейный резонанс, в выбранных точках плоскости безразмерные отстройка частоты Δ - амплитуда P . На плоскость параметров предварительно нанесите линии складок и точку сборки. Проследите за метаморфозами фазовых портретов при движении по плоскости параметров.

Саратовский государственный университет имени Г.Г. Чернышевского

Решения, комментарии, ответы

Ряд Тейлора и модели

1. Для задания скорости достаточно провести касательную к траектории. Это самая «грубая» аппроксимация. Для того чтобы найти силу, необходимо знать ускорение тела. При движении по кривой сложной формы тело, кроме тангенциального, имеет центростремительное ускорение. Последнее, как известно, определяется радиусом кривизны траектории. Таким образом, необходимо аппроксимировать траекторию с помощью касающейся окружности.

2. Из уравнения эллипса $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$ следует выражение для ординаты $y = a\sqrt{1 - x^2/b^2}$. Для корневой зависимости $\sqrt{1-x}$ разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\sqrt{1-x} = 1 - x/2 - x^2/8 + \dots$$

Используя его, получаем искомое выражение:

$$y = a - \frac{ax^2}{2b^2} - \frac{ax^4}{8b^4} + \dots$$

Отметим, что при $a = b = R$ получаем частный случай окружности, для которой, таким образом, $y = R - \frac{x^2}{2R} - \frac{x^4}{8R^3} + \dots$

Определим теперь точку пересечения графика с осью абсцисс. Если использовать аппроксимацию в виде квадратичной параболы, то условие $y = a - \frac{ax^2}{2b^2} = 0$ приводит к $x = \sqrt{2b}$.

Если использовать аппроксимацию в виде параболы четвертой степени, то $y = a - \frac{ax^2}{2b^2} - \frac{ax^4}{8b^4} = 0$ и тогда $\frac{z^2}{8} + \frac{z}{2} - 1 = 0$, где $z = \frac{x^2}{b^2}$. Решая это уравнение, получаем $x = \sqrt{2(\sqrt{3}-1)b} \approx 1.21b$, что уже ближе к точному значению $x = b$.

3. Используем разложения в ряд Тейлора функций, входящих в исследуемое соотношение:

$$\sin x = x - x^3/6 + \dots$$

$$\cos x = 1 - x^2/2 + \dots$$

$$\operatorname{sh} x = x + x^3/6 + \dots$$

В результате получаем:

$$f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \dots,$$

где $a = A + B + C + D + E$, $b = B$, $c = -C - D/2 + E/6$. Таким образом, число параметров уменьшилось до трех. Если использовать замену переменной типа сдвига и изменения масштаба, можно привести полученную кубическую параболу к однопараметрической форме. Ее исследование даст полную картину конфигураций исследуемой функции; необходимо лишь пересчитывать новые параметры к старым с помощью использованных соотношений.

4. Поместим начало координат в центр отрезка. В силу свойства симметрии ряд Тейлора будет содержать только четные степени x . Поэтому в первом приближении траекторию можно аппроксимировать квадратичной параболой. С учетом граничных условий $f(-1/2) = f(1/2) = 0$, уравнение параболы примет вид:

$$y = f(x) = a(1 - 4x^2).$$

Эта модель характеризуется единственным параметром $a = f(0)$, задающим максимальное отклонение траектории от отрезка AB .

Определим длину пути вдоль параболической траектории. Для этого используем формулу для длины дуги:

$$s = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

В нашем случае $f'(x) = -8ax$, и с учетом симметрии получаем:

$$s = 2 \int_0^{1/2} \sqrt{1 + 64a^2 x^2} dx.$$

Интеграл приводится к табличному, однако, мы здесь ограничимся оценкой при малых a :

$$s = 2 \int_0^{1/2} \sqrt{1 + 64a^2 x^2} dx \approx 2 \int_0^{1/2} (1 + 32a^2 x^2) dx = 1 + 64a^2 \frac{(1/2)^3}{3} = 1 + \frac{8}{3} a^2.$$

Таким образом, увеличение длины пути квадратичным образом зависит от максимального отклонения от прямолинейного маршрута.

Учет следующих членов ряда приводит к модели с полиномом четвертой степени:

$$y = f(x) = a(1 + bx^2 + cx^4).$$

Граничные условия в точках $x = \pm 1/2$ приводят к равенству $16 + 4b + c = 0$, что позволяет исключить параметр c . Таким образом:

$$f(x) = a[1 + bx^2 - 4(4 + b)x^4].$$

Обсудим свойства полученной функции. Для определенности считаем, что $a > 0$. В точке $x_1 = 0$ всегда находится квадратичный экстремум. При $b < 0$ этот

минимум, а при $b > 0$ – максимум. При этом расстояние от отрезка AB управляется первым параметром $a = f(0)$.

Кривая может иметь еще два дополнительных экстремума, расположенных симметричным образом относительно начала координат. Их находим, приравняв нулю производную $f'(x) = 0$. Тогда

$$x_{2,3}^2 = \frac{b}{8(4+b)}.$$

Эти решения возможны, если $b > 0$ или $b < -4$. В втором случае точки экстремума должны еще «попасть» на отрезок $(-1/2, +1/2)$, что возможно при $b < -8$.

Еще одно свойство траектории в виде параболы четвертой степени состоит в том, что она может также пересекать исходный отрезок. Точки пересечения ищем, полагая $f(x) = 0$. Решая полученное биквадратное уравнение, находим для точек пересечения

$$x^2 = -\frac{1}{(4+b)}.$$

В этом случае точки должны «попасть» на отрезок, что возможно при $b < -8$.

Таким образом, парабола четвертой степени при изменении параметра b может описывать уже три типа траекторий, показанных на рис17. Случай а) отвечает траектории, сначала удаляющейся от исходного отрезка, затем приближающейся и вновь удаляющуюся. Случай в) соответствует тому, что траектория трижды пересекает исходный отрезок. Это основные типы траекторий, описываемые данной моделью.

Оценим теперь длину пути. Опять рассмотрим случай малых a . Тогда

$$s = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \approx 1 + \int_0^{1/2} (f'(x))^2 dx.$$

Подставляя выражение для использованной функции и интегрируя, получаем

$$s \approx 1 + a^2 \frac{11b^2 + 144b + 960}{210}.$$

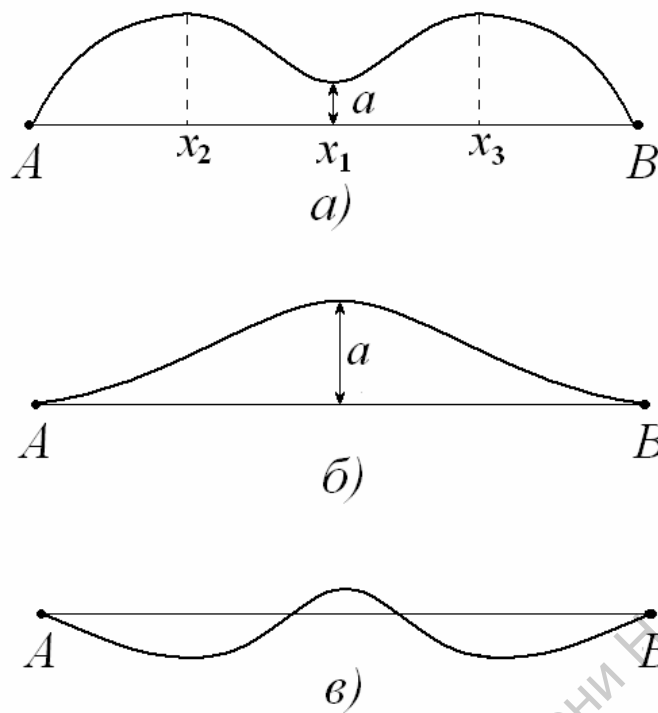


Рис.17. Различные типы траекторий в двухпараметрической модели;
 а) $b > 0$, б) $-8 < b < 0$, в) $b < -8$.

5. Фокусирующие свойства в параксиальном приближении определяются радиусом кривизны преломляющей поверхности. В свою очередь, радиус кривизны функции дается соотношением:

$$R(x) = \frac{(\sqrt{1 + f'(x)^2})^3}{f''(x)}.$$

В начале координат $R = \frac{(\sqrt{1 + f'(0)^2})^3}{f''(0)}$. Для симметричной функции $f'(0) = 0$,

так что $R = \frac{1}{f''(0)}$. Таким образом, фокусирующие свойства системы определяются двумя параметрами: второй производной функции, задающей форму линзы и показателем преломления. Для описания aberrации линзы необходимо учесть члены более высокого порядка в разложении в ряд Тейлора.

6. Уравнение консервативного осциллятора в общем случае имеет вид:

$$\ddot{x} + U'(x) = 0.$$

Если $U(x) = ax^2/2$, то получаем уравнение линейного осциллятора $\ddot{x} + ax = 0$.

Нормировкой времени оно приводится к виду, не содержащему параметров: $\ddot{x} + x = 0$.

Будем теперь добавлять следующие члены ряда Тейлора. Для кубического потенциала $U(x) = x^2/2 + \alpha x^3/3$ уравнение движения принимает вид:

$$\ddot{x} + x + \alpha x^2 = 0.$$

Это уравнение осциллятора с квадратичной нелинейностью, содержащее параметр α . Однако заменой $x \rightarrow x/\alpha$ можно исключить и этот параметр, так что $\ddot{x} + x + x^2 = 0$.

Для потенциала четвертой степени $U(x) = x^2/2 + x^3/3 + \beta x^4/4$ можно прийти к однопараметрической модели

$$\ddot{x} + x + x^2 + \beta x^3 = 0.$$

Наконец, для потенциала пятой степени получаем двухпараметрическую модель:

$$\ddot{x} + x + x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 = 0.$$

7. Осциллятор с кубической нелинейностью можно представить в виде:

$$\ddot{x} + x + \beta x^3 = 0.$$

Обратимся к математическому маятнику:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0,$$

где $\omega^2 = g/l$. Разложим синус в ряд Тейлора $\sin x = x - x^3/6$. Тогда

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \omega^2 x^3/6.$$

Перенормировкой времени и координаты приходим к модели осциллятора с кубической нелинейностью, для которого $\beta = -1/6$.

В качестве второго примера рассмотрим «термодинамический» осциллятор, рис.18. Для него сосуд объемом $2V_0$ разделен подвижным поршнем площади S на две равные части. При смещении поршня он может колебаться около состояния равновесия.

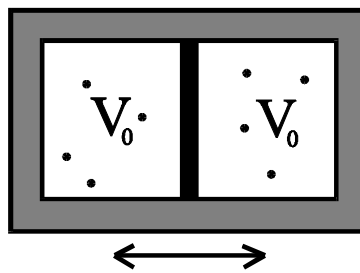


Рис. 18

Пусть поршень сместился на расстояние x . Будем считать процесс изотермическим, так что $pV = const$. Тогда для давления в частях сосуда имеем:

$$p_1(V_0 - xS) = p_0V_0,$$

$$p_2(V_0 + xS) = p_0V_0.$$

Поршень движется под действием силы $F = (p_1 - p_2)S$. Его уравнение движения, таким образом:

$$\frac{mS}{p_0} \ddot{x} + \frac{1}{1 - xS/V_0} - \frac{1}{1 + xS/V_0} = 0.$$

Разложим теперь функции координаты в ряд Тейлора, используя соотношение

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

В результате получим

$$\ddot{x} + \frac{2p_0}{m}x + \frac{2S^2 p_0}{mV_0^3}x^3 = 0.$$

После перенормировки получаем универсальное уравнение осциллятора с кубической нелинейностью.

8. Автоколебательный осциллятор общего вида можно записать в следующей форме:

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0.$$

В этом случае функция $g(x)$ характеризует трение (оно может быть и отрицательным для автоколебаний), а функция $f(x)$ – возвращающую силу. Разлагая эти функции в ряды Тейлора, можно придти к универсальным моделям теории колебаний.

Например, если функция $g(x)$ четная, то приходим к уравнению Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Учитывая кубические члены для функции $f(x)$, получаем уравнение Ван-дер-Поля-Дуффинга:

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0.$$

Если потенциал представлен полиномом четвертой степени общего вида, то приходим к осциллятору с катастрофой сборки:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x^3 + ax + b = 0.$$

Можно показать, что заменами переменных это уравнение приводится к так называемому осциллятору Бонхоффера–Ван-дер-Поля (или в биофизической интерпретации – к уравнению Фитц-Хью–Нагумо).

9. Однопараметрическая модель – это квадратичное отображение вида

$$x_{n+1} = a + x_n^2,$$

(или, что эквивалентно, $x_{n+1} = a - x_n^2$).

Двухпараметрическая модель представляет собой две формы кубического отображения:

$$x_{n+1} = a + bx_{n+} \pm x_n^3,$$

Трехпараметрическая модель может быть выбрана в форме кватричного отображения

$$x_{n+1} = a + bx_{n+} + cx_n^2 + x_n^4,$$

Эти отображения ассоциируются с катастрофами складка, сборка, ласточкин хвост.

Понятия типичности и коразмерности

10. Рассмотрим сначала случай а). Для квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, если $q > p^2/4$, то действительных корней нет вообще, если $q < p^2/4$, то имеется два действительных корня, а если $q = p^2/4$, то один. На плоскости параметров (q, p) можно выделить, таким образом, две области – где есть два корня и где их нет вообще, рис.19. Они отвечают случаям общего положения. Разделительной линией служит парабола $q = p^2/4$, которая отвечает ситуации единственного корня, и является вырождением коразмерности один..

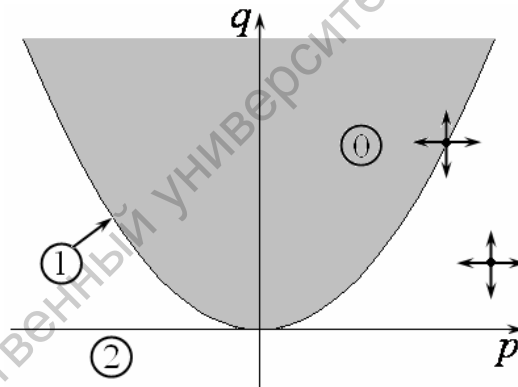


Рис. 19

На рисунке в кружочке указано число действительных корней. Для наглядности на показаны также ситуации малого «шевеления» параметров для случая общего положения и вырожденной ситуации. Можно видеть, что в первом случае мы остаемся внутри области при любом направлении шевеления. Если же имеется вырождение, то ситуация иная. Действительно, обязательно существует такое направление, что даже бесконечно малое шевеление вдоль него может привести либо в одну, либо в другую область, рис.19.

б) Для биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ решения имеют вид

$$x_{1,2}^2 = y_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_{3,4}^2 = y_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Если $q > p^2/4$, то корней нет вообще. Пусть $q < p^2/4$. Тогда удобно провес-

ти анализ для всех четырех четвертей плоскости (q, p) , с учетом того, что величина y должна быть положительной.

Если $p > 0, q > 0$, то $y_1 < 0$ и $y_2 < 0$. В этом случае действительных корней нет вообще.

Если $p > 0, q < 0$, то $y_1 > 0$ и $y_2 < 0$. В этом случае есть два действительных корня.

Если $p < 0, q > 0$, то $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$. В этом случае есть четыре действительных корня.

Если $p < 0, q < 0$, то $y_1 > 0$ и $y_2 < 0$. В этом случае есть два действительных корня.

Окончательно разбиение плоскости параметров (q, p) на характерные области показано на рис.20. Число случаев общего положения равно трем. Имеются три линии вырожденных ситуаций (рекомендуем самостоятельно обсудить, что происходит с корнями на этих линиях).

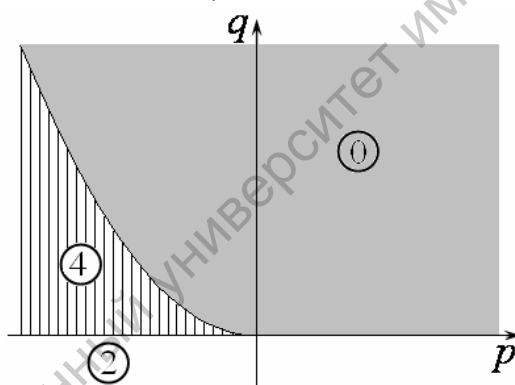


Рис. 20

Особенность полученного рисунка – наличие двукратного вырождения в точке $p = 0, q = 0$. В этой точке сходятся все три разграничительные линии. «Шевеля» параметры в ее окрестности, можно попасть в любую из трех характерных областей.

в) Кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$ в случае общего положения может иметь либо три, либо один действительный корень, что иллюстрирует рис.21а,б.

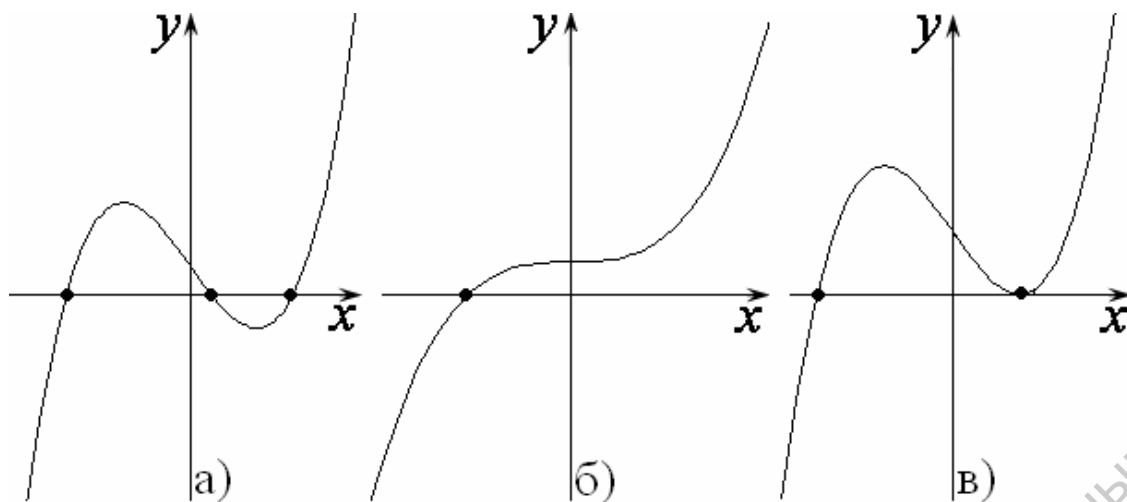


Рис.21

Нетрудно понять, что разграничительным линиям на плоскости параметров, отвечающим рождению (исчезновению) корней, будет отвечать ситуация касания графиком кубической параболы оси абсцисс, рис.21в. Поэтому для этих линий справедливо как уравнение $x^3 + px + q = 0$, так и продифференцированное соотношение $3x^2 + p = 0$. Тогда $x = \pm\sqrt{-p/3}$, и, подставляя в исходное кубическое уравнение, получаем уравнения линий, разграничивающих области существования одного и трех корней:

$$q = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{3/2}.$$

Эти линии отвечают вырождению коразмерности один, рис.22. Они имеют вид характерного «полуострия», отвечающего степенному закону «три вторых» в формуле. Линии сходятся в начале координат, которое является, таким образом, точкой вырождения более высокого порядка. Она отвечает слиянию всех трех корней кубического уравнения. Особая точка такого типа с подходящими по закону «три вторых» в теории катастроф носит название «сборка».

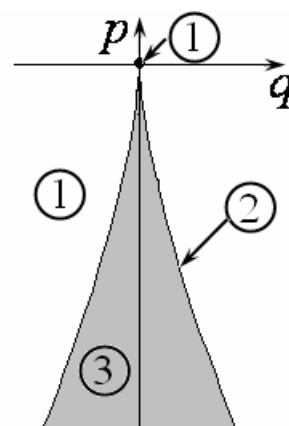


Рис.22

11. Эллиптической скорости отвечают значения скорости менее второй космической. Точно при второй космической скорости траекторией является парабола, а при большей – гипербола. Таким образом, эллипс и гипербола – случаи общего положения, а парабола – это вырожденная ситуация.

12. Для окружности можно выделить следующие случаи общего положения: иголка целиком попала внутрь круга, иголка целиком лежит вне круга, иголка пересекает окружность в одной точке, иголка пересекает окружность в двух

точках. Вырожденные ситуации: иголка касается окружности, иголка одним из концов лежит на окружности. В последнем случае она может иметь еще одну точку пересечения с окружностью, а может и не иметь. Вырождения более высокого порядка: иголка одним концом лежит на окружности и направлена по касательной к ней, оба конца иголки лежат на окружности.

13. Брусек либо скользит по доске, либо нет. В первом случае приложенная сила F больше, чем максимальная сила трения покоя между бруском и доской $\mu_1 mg$, во втором – меньше. Кроме того, доска либо скользит по поверхности, либо нет. Для анализа этого условия можно рассматривать систему как единое целое с массой $(m+M)$ под действием силы F . Если эта сила меньше, чем максимальная сила трения покоя между доской и поверхностью $\mu_2(m+M)g$, то доска скользит по поверхности, если нет, то доска покоится. Таким образом, возможны четыре различные ситуации, отвечающие случаям общего положения:

1. Брусек и доска скользят относительно друг друга. В этом случае $F > \mu_1 mg$ и $\mu_1 mg > \mu_2(m+M)g$, и следовательно

$$\mu_1 < \frac{F}{mg}, \mu_2 < \mu_1 \frac{m}{m+M}.$$

2. Брусек скользит по доске, доска покоится относительно поверхности. В этом случае должны выполняться неравенства $F > \mu_1 mg$ и $\mu_1 mg < \mu_2(m+M)g$, откуда следует, что

$$\mu_1 < \frac{F}{mg}, \mu_2 > \mu_1 \frac{m}{m+M}.$$

3. Брусек неподвижен относительно доски, доска скользит. Это соответствует $F < \mu_1 mg$ и $F > \mu_2(m+M)g$, или

$$\mu_1 > \frac{F}{mg}, \mu_2 < \frac{F}{(m+M)g}.$$

4. Брусек и доска неподвижны. Тогда $F < \mu_1 mg$ и $F < \mu_2(m+M)g$, или

$$\mu_1 > \frac{F}{mg}, \mu_2 > \frac{F}{(m+M)g}.$$

Соответствующие этим ситуациям области на плоскости параметров (μ_1, μ_2) приведены на рис.23. Границы между ними отвечают вырожденным ситуациям коразмерности один, когда выполняется одно из критических условий. Кроме того, имеет место точка коразмерно-

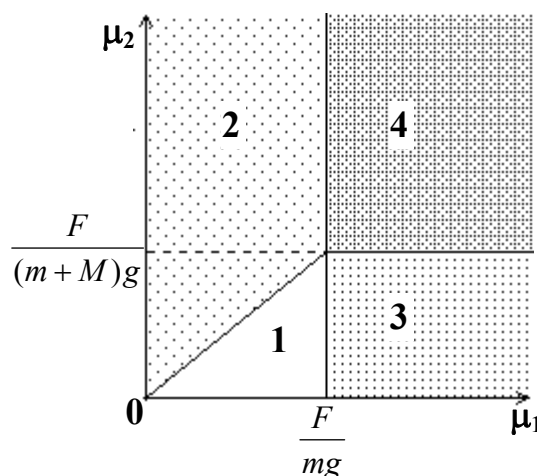


Рис.23

сти два с координатами

$$\mu_1 = \frac{F}{mg}, \quad \mu_2 = \frac{F}{(m+M)g}.$$

В сколь угодно малой ее окрестности при малом «шевелении» параметров возможны все четыре случая общего положения.

14. Например, для воды состояния жидкость, пар и лед являются случаями общего положения. Ситуации фазовых переходов (например, вода – пар) – это ситуации коразмерности один. На плоскости параметров температура – давление им будут отвечать некоторые линии. Известная из термодинамики тройная точка, в которой сходятся области твердой, жидкой и газообразной фаз, представляет собой ситуацию коразмерности два.

15. Соприкасающаяся окружность имеет с кривой контакт не иже второго порядка. Это означает, что разность значений функции и координаты соприкасающейся окружности дается разностью их кубических членов ряда Тейлора. По разные стороны от точки контакта эта разность будет иметь разные знаки. Таким образом, в случае общего положения кривая с одной стороны от точки контакта располагается внутри окружности, а с другой – вне ее. Если точка контакта характеризуется вырождением, когда совпадают кубические члены, то кривая может лежать с одной стороны окружности. Примером может служить расположение соприкасающейся окружности и параболы $y = ax^2$ в точке $x = 0$.

16. Случаи общего положения: два овала, вложенных друг в друга, два изолированных овала, один овал. Вырожденные ситуации: точка, окружность, два овала с общей «перемычкой»¹.

«Игрушки» теории катастроф

17. Понадобится некоторое усилие, после которого произойдет перескок, и линейка выгнется в противоположную сторону.

18. Эксперименты с машиной Зимана выявляют область бистабильности, т.е. сосуществование двух устойчивых равновесий. Эта область ограничена линиями, на которых могут происходить жесткие переходы, рис.24. При входе в эту область диск плавно поворачивается, но совершает «прыжок» при пересечении другой границы. При движении в обратном направлении скачок произойдет уже на первой линии. В свою очередь, эти линии имеют особенности в виде «клювов» (точек сборки). Качественно вид области бистабильности показан на

¹ Эта классификация не полна, подумайте, какие еще могут быть варианты

рис.

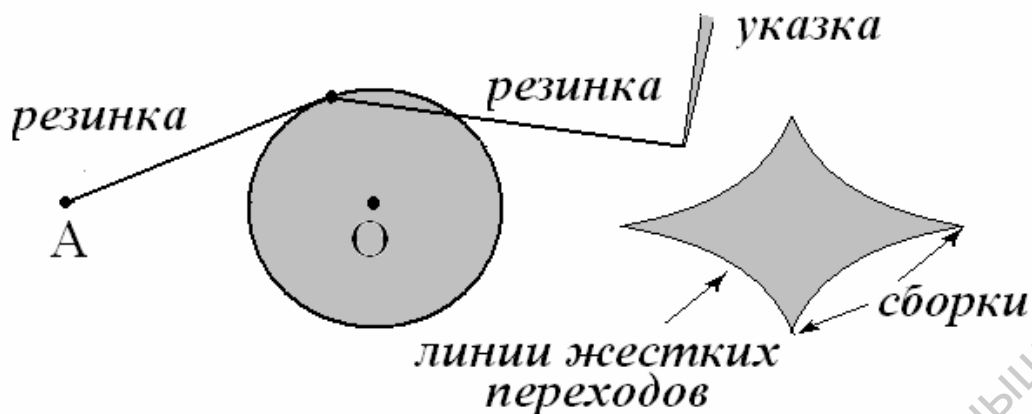


Рис.24

19. В силу симметрии искомый «клюв» лежит на линии АВ (см. рис.). Поэтому задача является одномерной. Потенциальная энергия растянутых резинок по закону Гука дается соотношением

$$U = \frac{k}{2}(L - 1)^2 + \frac{k}{2}(l - 1)^2.$$

В свою очередь, по теореме Пифагора в соответствии с рис. для длины первой резинки L имеем:

$$L^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right)^2 = \frac{17}{4} - 2 \cos \theta.$$

Используем разложение в ряд Тейлора $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots$, тогда

$$L = \sqrt{\frac{9}{4} + \theta^2} + \dots = \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{9} \theta^2}$$

Используя теперь соотношение $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$ и получаем:

$$L = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \theta^2 + \dots$$

Для второй резинки имеем:

$$l^2 = \left(s + \frac{1}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right)^2 = s^2 + \frac{1}{4} + s \cos \theta.$$

Используя аналогичное представление в виде членов ряда Тейлора, находим:

$$l = \left(s + \frac{1}{2}\right) - \frac{s}{2(2s+1)} \theta^2 + \dots$$

Подставляем полученные соотношения в выражение для потенциальной энергии:

$$\frac{2U}{k} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\theta^2\right)^2 + \left(s - \frac{1}{2} - \frac{s}{2(2s+1)}\theta^2\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{s(2s-1)}{2(2s+1)}\right)\theta^2 + \dots$$

Таким образом, зависимость потенциальной энергии от угла $U(\theta)$ может иметь как минимум (устойчивое равновесие), так и максимум (неустойчивое равновесие). Точка перехода соответствует искомому «кляву» области бистабильности. Приравнивая нулю коэффициент при θ^2 , получаем $6s^2 - 7s - 2$, откуда находим:

$$s = \frac{7 + \sqrt{97}}{12}.$$

20. Эксперименты дают следующий результат. На качалке имеется область, при помещении в которую грузика, она имеет единственное устойчивое состояние равновесия. Вторая область отвечает возможности двух устойчивых равновесий, которые отличаются углом наклона качалки. Область бистабильности имеет вид «клява». На его границах могут происходить жесткие переходы. В этом случае, если медленно перемещать грузик, качалка теряет устойчивость и наклоняется на другой угол, совершив предварительно несколько колебаний. Качественно вид области бистабильности показан на рис.25. Отметим, что в этой области имеется также и неустойчивое состояние равновесия.

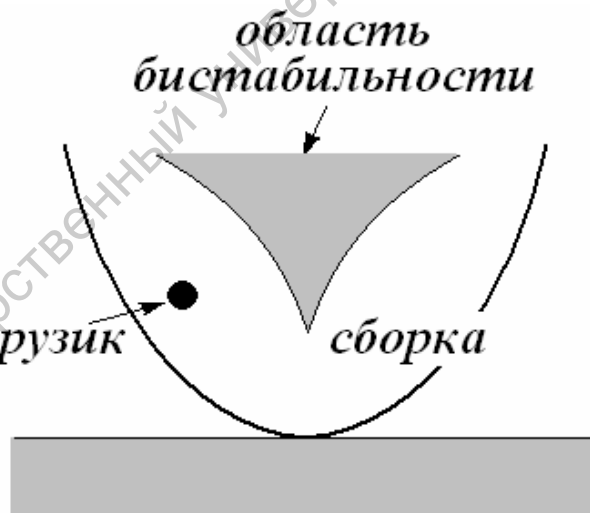


Рис.25

21. Пусть качалка наклонена на некоторый угол. Мы считаем ее невесомой. Это означает, что качалка будет находиться в состоянии равновесия тогда, когда грузик лежит на нормали к кривой, задающей границу качалки. При этом грузик может располагаться в любой точке этой нормали. Если провести семейство нормалей к параболе, то мы получим систему линий, задающих равновесное положение качалки. Такая система, построенная на компьютере, представлена на рис.26. Можно видеть, что имеются две области. Одной отвечает един-

ственная нормаль, проходящая через данную точку. Для второй – таких нормалей несколько, точнее, три². Огибающая семейства нормалей и дает область бистабильности, которая описана в предыдущей задаче. Эта огибающая имеет особенность в форме «клюва» - точки сборки.

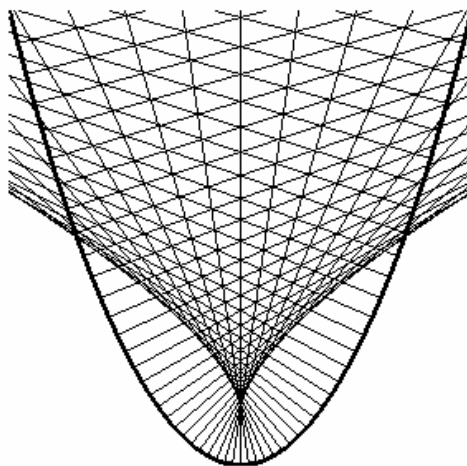


Рис.26

Критические точки функций одной переменной

23. Функция имеет квадратичные экстремумы, за исключением точки $x = 0$. В этой точке разлагая косинус в ряд Тейлора $\cos x = 1 - x^2/2 + \dots$, получаем: $f(x) = x(1 - \cos x) = -x^3/3$. Таким образом, функция имеет кубическую критическую точку.

24. Функция $f(x) = (a - \cos x)^2$ при $a = 1$ имеет критическую точку в виде экстремума четвертой степени, а при $a \neq 1$ – квадратичный экстремум.

25. Для этого в выражении $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ следует сделать замену переменной $x \rightarrow x + \alpha$, привести подобные и подобрать параметр α так, чтобы обратился в ноль коэффициент при кубическом члене.

26. Исследуем функцию $f(x) = x^4 + px^2$. Ее экстремумы даются условием $f'(x) = 4x^3 + 2px = 0$, т.е.

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{-p/2}.$$

Таким образом, при $p > 0$ возникает один экстремум (квадратичный минимум), а при $p < 0$ – три: квадратичный максимум и два симметрично расположенных относительно него квадратичных минимума.

27. Коразмерность равна четырем.

² Две из них отвечают устойчивым равновесиям, одна – неустойчивому.

28. Скорость шарика складывается из его гармонических колебаний по закону $x = a \cos \omega t$, где $\omega = \sqrt{k/m}$ и движения вместе с платформой с постоянной скоростью:

$$x(t) = Vt + a \cos \omega t.$$

На рис.31 приведены графики движения шарика при большой и малой амплитудах его колебаний. В первом случае шарик движется всегда вперед, и его скорость $v = V - a\omega \cos \omega t$ всегда положительна, рис.27а. При выполнении условия $V = a\omega$ появляются отдельные моменты времени, когда скорость обращается в ноль. На графике $x(t)$ появляются вырожденные критические точки – кубические точки перегиба. Если же $V < a\omega$, то у функции $x(t)$ появляется множество простейших точек квадратичных экстремумов (пары максимум и минимум), рис.27б. Таким образом, представленные на рисунке ситуации отвечают двум случаям общего положения.

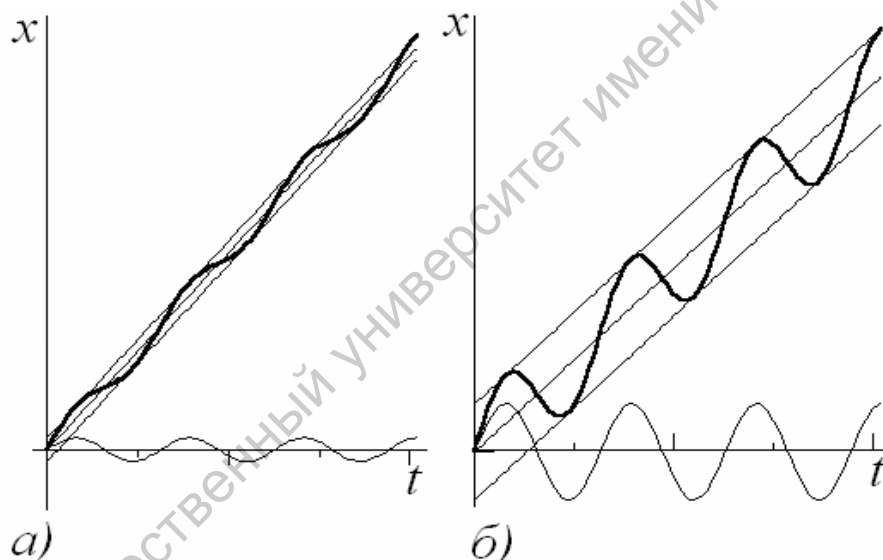


Рис. 27

Критические точки функций двух переменных

29. Для функции $U(x)$ матрица Гессе по определению составлена из вторых производных:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Для перечисленных критических точек тогда легко находим:

а) минимум, $U(x) = x^2 + y^2$, $\hat{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

б) седло, $U(x) = x^2 - y^2$, $\hat{F} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

в) обезьянье седло, $U(x) = x^3 - 3xy^2$, $\hat{F} = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

г) желоб, $U(x) = x^2$, $\hat{F} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

д) скрещенные желоба, $U(x) = x^2y^2$, $\hat{F} = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы Гессе (гессиан) отличен от нуля для первых двух точек. Они являются невырожденными, а остальные – вырождены.

30. Потенциальные рельефы и линии уровня приведены на рис.28.

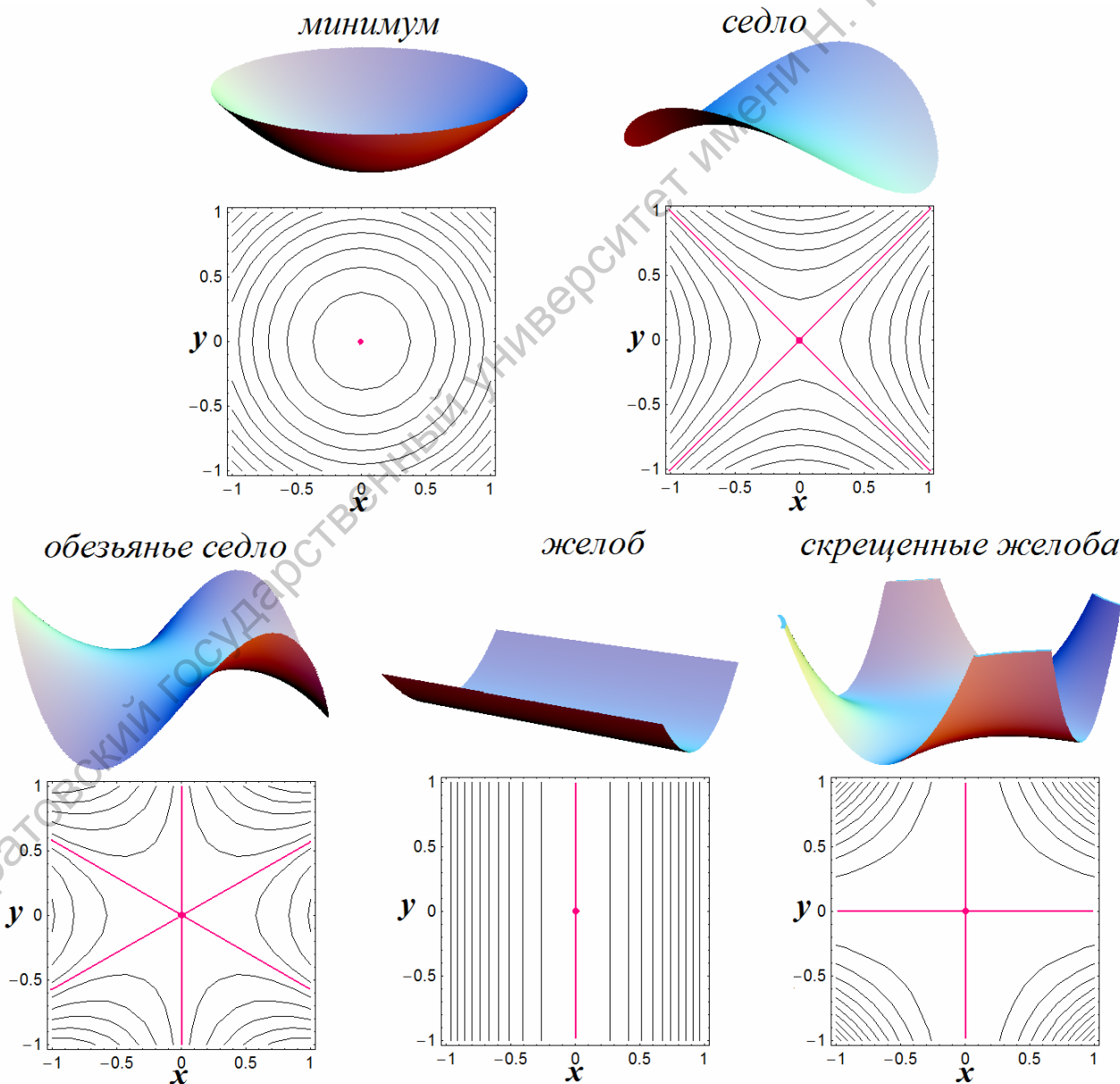


Рис.28

31. $\operatorname{Re} z^3 = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$.

32. Заменой $x \rightarrow y$ и $y \rightarrow x$ и изменением масштабов обезьянье седло приводится к первой канонической кубике.?

33. Потенциал отдельной нити дается выражением (в системе Си):

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln R,$$

где R – расстояние от нити до точки наблюдения. Соответственно, для двух заряженных нитей

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} (\ln R_1 + \ln R_2) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(R_1 R_2).$$

Эквипотенциали $\varphi = \text{const}$ отвечают условию $R_1 R_2 = \text{const}$, где R_1 и R_2 – расстояния от двух фиксированных точек на плоскости. Это отвечают кривые, известным как овалы Кассини. Система овалов Кассини показана на рис.29.

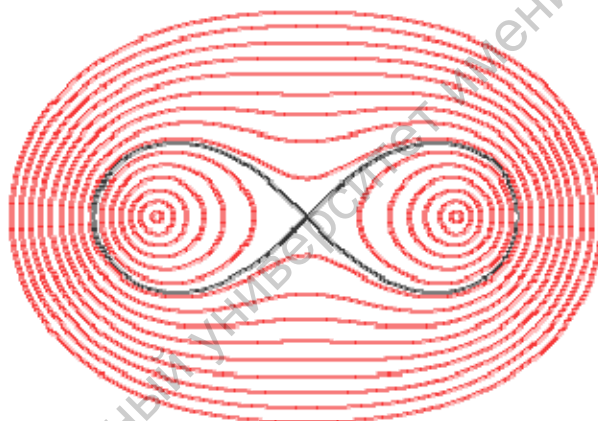


Рис.29

34. В точках расположения нитей потенциал стремится к минус бесконечности. Таким образом, имеется единственная морсовская точка – седло, расположенное точно посередине между нитями, см. рис.. Поместим начало координат в эту точку, а расстояние между точками отнормируем так, чтобы оно равнялось 2. Тогда

$$R_1 = (1 - x)^2 + y^2,$$

$$R_2 = (1 + x)^2 + y^2.$$

Соответственно, перемножим два этих выражения и оставим только квадратичные члены. Получаем:

$$R_1 R_2 = (1 - 2x + x^2 + y^2)(1 + 2x + x^2 + y^2) = 1 + 2(y^2 - x^2) + \dots$$

Следовательно, для потенциала:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(1 + 2(y^2 - x^2)) = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} (y^2 - x^2) + \dots$$

Мы использовали разложение в ряд для логарифма $\ln(1+x) = x + \dots$. Таким образом, действительно получается каноническая форма для критической точки типа седло.

35. Расположим тор «вертикально». Тогда его вершина будет давать максимум, а нижняя точка минимум. «Вершина» дырки образует седло. Если положить тор плашмя, то его вершина образует желоб. Рекомендуем сделать соответствующий рисунок.

36. На фазовой плоскости морсовским точкам отвечают особые точки типа «центр» и типа «седло». На рис. 30 приведен типичный фазовый портрет.

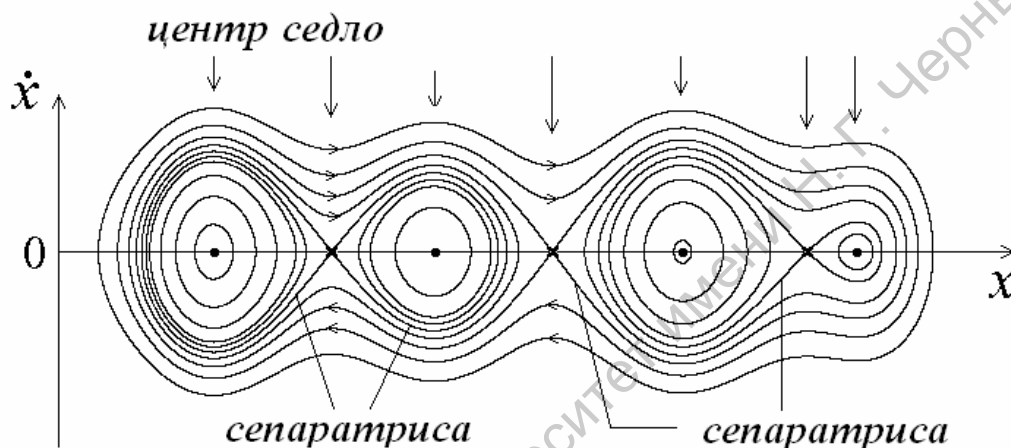


Рис.30

37. К какой из канонических кубик приводится кубическая форма $(ax + by)(x^2 - y^2)$ в случаях $a = b$ и $a = -b$?

Катастрофа коразмерности один – складка

38. Критические точки функции отвечают условию обращения в нуль производной от заданной функции. Линиям складок отвечает равенство нулю второй производной. Таким образом для функции $y = x^6 - ax^2 + bx$ получаем:

$$\begin{aligned} y' &= 6x^5 - 2ax + b = 0. \\ y'' &= 30x^4 - 2a = 0. \end{aligned}$$

Отсюда легко находим уравнение искомой линии: $b = 24 \left(\frac{a}{15} \right)^{5/4}$.

39. Равновесие системы будет определяться конкуренцией двух факторов – притяжением токов, которое стремится уменьшить расстояние между ними, и силой упругости, которая стремится это расстояние увеличить. Поместим начало координат в точку, отвечающую положению правого провода при отсут-

вии деформации пружины. Тогда сила притяжения токов, расположенных на расстоянии $(L - x)$, дается известной формулой

$$F(x) = \frac{\mu_0 I i l}{2\pi(L - x)}.$$

В противоположную сторону будет направлена сила упругости $-kx$, так что суммарная сила

$$F(x) = \frac{\mu_0 I i l}{2\pi(L - x)} - kx.$$

Положение равновесия будет определяться условием $F(x) = 0$, которое приводит к квадратному уравнению

$$x^2 - Lx + \frac{\mu_0 I i l}{2\pi k} = 0.$$

Решая его, находим

$$x_{1,2} = \frac{L}{2} (1 \mp \sqrt{1 - \varepsilon}),$$

где $\varepsilon = \frac{2\mu_0 I i l}{\pi k L^2}$ – безразмерный параметр, который можно варьировать, изменяя, например, ток в проводниках.

Состояния равновесия возможны при $\varepsilon < 1$, причем в этом случае их два, чему отвечают разные знаки перед квадратным корнем. При этом точка x_1 лежит ближе к началу координат, а x_2 – ближе к неподвижному проводнику. Действительно, в отсутствие токов $\varepsilon = 0$ и из полученной формулы имеем $x_1 = 0$ и $x_2 = L$. При увеличении ε положения равновесия движутся навстречу друг другу, и при $\varepsilon = 1$ сливаются и исчезают.

Для того, чтобы выявить характер катастрофы, выясним характер зависимости потенциальной энергии $U(x)$ от координаты. Для потенциальной энергии имеем выражение

$$U(x) = -\int F(x) dx = -\int \left(\frac{\mu_0 I i l}{2\pi(L - x)} - kx \right) dx = \frac{\mu_0 I i l}{2\pi} \ln|L - x| + \frac{kx^2}{2}.$$

Полезно проанализировать асимптотические ситуации. При малых x сила почти постоянна и равна $F(x) \approx \frac{\mu_0 I i l}{2\pi L}$. Соответственно, потенциал оценивается как

$$U(x) \approx -\frac{\mu_0 I i l}{2\pi L} x.$$

и убывает с ростом координаты. Затем за счет квадратичного потенциала пружины суммарный потенциал растет. Наконец, при $x \approx L$ потенциал стремится к «минус бесконечности» за счет логарифмического члена. Суммарный график дан на рис.31.

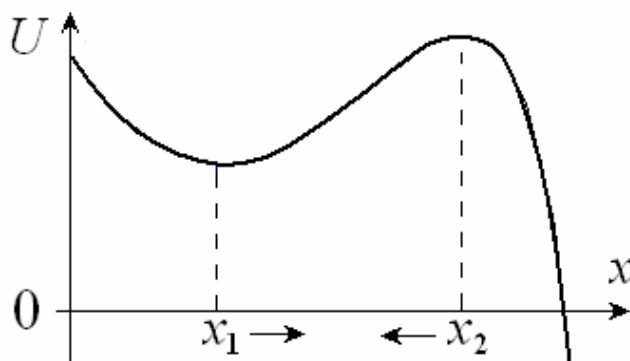


Рис.31

Таим образом, имеются два экстремума – минимум и максимум, и первое равновесие является устойчивым, а второе – неустойчивым. При вариации параметра ε они сближаются, как показано стрелками на рисунке, и при $\varepsilon = 1$ в системе происходит катастрофа складки.

С физической точки зрения наблюдается следующая картина. Если медленно увеличивать ток, то проводник на пружине будет постепенно приближаться к неподвижному проводнику (считаем, что возможные колебания гасятся за счет диссипации). При достижении критического значения тока в точке $x = L/2$ равновесие исчезнет, и подвижный проводник резко притянется к неподвижному. Произойдет качественное изменение состояния системы.

Приведем теперь потенциал к каноническому виду для катастрофы складки. Удобно предварительно привести выражение для потенциала к безразмерному виду. Введем безразмерный параметр ε и безразмерную координату $y = x/L$. Тогда

$$U = \frac{\varepsilon kL^2}{4} \ln|L(1-y)| + \frac{kL^2}{2} y^2 = \frac{\varepsilon kL^2}{4} [\ln|1-y| + \ln L] + \frac{kL^2}{2} y^2.$$

Отбрасывая несущественную часть в виде константы и вводя безразмерный потенциал $W = \frac{2U}{kL^2}$, получаем искомое соотношение:

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \ln|1-y| + y^2.$$

Вблизи точки катастрофы следует положить $\varepsilon = 1 + \tilde{\varepsilon}$ и $y = 1/2 + \tilde{y}$. (Мы учитываем два обстоятельства: что параметр близок к критическому значению, а

координата близка к точке слияния экстремумов $x = L/2$.) В результате получаем

$$W = \frac{(1 + \tilde{\varepsilon})}{2} \ln|1/2 - \tilde{y}| + (1/2 + \tilde{y})^2.$$

Преобразуем логарифм, используя формулу для разложения в ряд до кубических членов и отбрасывая несущественную постоянную часть:

$$\ln|1/2 - \tilde{y}| = \ln|1 - 2\tilde{y}| + const = (-2\tilde{y}) - (-2\tilde{y})^2/4 + (-2\tilde{y})^3/3 + \dots = -2\tilde{y} - \tilde{y}^2/2 - 8\tilde{y}^3/3 + \dots$$

Подставляя это в выражение для потенциала, находим:

$$W = -\frac{4}{3}\tilde{y}^3 - \tilde{\varepsilon}\tilde{y} - \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}\tilde{y}^2 + const + \dots$$

Как и следовало ожидать, члены первого и второго порядка по возмущению координаты взаимно сократились. Чтобы первый не исчезающий по параметру $\tilde{\varepsilon}$ член был существенен, необходимо, чтобы члены $\frac{4}{3}\tilde{y}^3$ и $\tilde{\varepsilon}\tilde{y}$ были одного порядка. Это означает, что $\tilde{\varepsilon} \propto \tilde{y}^2$. Следовательно, член $\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}\tilde{y}^2$ имеет более высокий порядок и его можно отбросить. Таким образом:

$$W = -\frac{4}{3}\tilde{y}^3 - \tilde{\varepsilon}\tilde{y} + const + \dots$$

Мы получили каноническую форму для катастрофы складка с точностью до переобозначения параметров и переменной.

40. Потенциальная энергия шарика складывается из энергии в поле тяготения mgx и в горизонтальном электрическом поле $-qEx$. (Поле считаем направленным вдоль оси x , рис.32.)

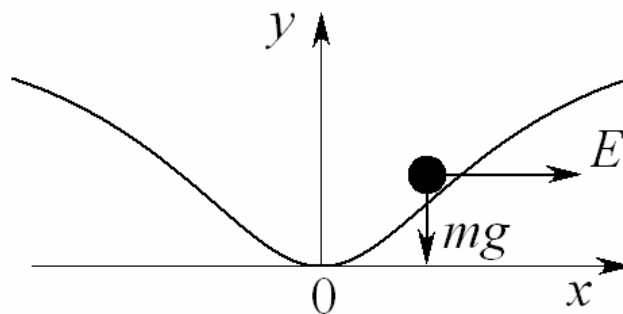


Рис.32

Суммарная энергия

$$U(x) = mga \ln(1 + x^2/a^2) - qEx.$$

Отметим, что потенциальная энергия в поле тяжести имеет при $x = 0$ квадратичный минимум, поскольку $\ln(1 + x^2/a^2) = x^2/a^2 + \dots$. Таким образом, частица

находится в «лунке». Внешнее электрическое поле сместит это равновесие вправо. Если поле достаточно велико, то устойчивое равновесие может исчезнуть.

Найдем положения равновесия при наличии электрического поля. Для этого вычислим силу $F(x)$ и приравняем ее нулю:

$$F(x) = U'(x) = 2mg \frac{x/a}{x^2/a^2 + 1} - qE = 0.$$

Введем безразмерный параметр $\varepsilon = \frac{mg}{qE}$, характеризующий соотношение силы тяжести и электрического поля, и безразмерную координату $z = x/a$. Тогда уравнение для состояний равновесия можно переписать в виде

$$z^2 - 2\varepsilon z + 1 = 0.$$

Решая его, находим два возможных состояния равновесия

$$z_{1,2} = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Нетрудно показать, что одно из них – z_1 , расположенное ближе к началу координат, устойчиво. Для этого можно построить соответствующий график потенциальной энергии. А можно просто обратить внимание, что при маленьком внешнем поле $\varepsilon \gg 1$, и $z_1 \approx 0$ отвечает шарик в центре лунки, и устойчивому равновесию. Соответственно, второе равновесие будет неустойчивым. При $\varepsilon = 1$ происходит катастрофа складки, когда равновесия сливаются и исчезают. Это происходит в точке с координатой $z = \varepsilon$, т.е. на правом «склоне» рельефа.

41. Пусть маятник отклонили на угол φ . Тогда на него будет действовать сила тяжести, создающая момент $mgl \sin \varphi$ относительно точки подвеса. Пружина создает дополнительный момент $M = \mu\varphi$. Таким образом, условие равновесия маятника можно записать как

$$mgl \sin \varphi + \mu\varphi = 0,$$

или, если ввести безразмерный параметр $k = \frac{\mu}{mgl}$, характеризующий жесткость пружины, то

$$\sin \varphi + k\varphi = 0.$$

Обратимся к графику этого уравнения, рис.33. Из рисунка можно видеть, что число состояний равновесия зависит от параметра k , и с его уменьшением появляются все новые состояния равновесия, когда график прямой пересекает синусоиду во все более далеких точках.

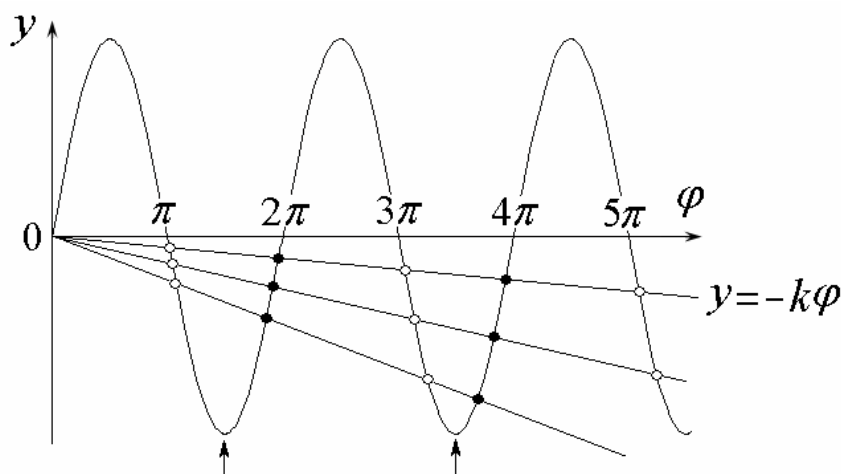


Рис.33

Проанализируем возможные решения. Пусть параметр k стремится к нулю, т.е. пружина очень «мягкая» и почти не оказывает влияния на систему. Как видно из рисунка, решения в этом случае стремятся к значениям угла π , 2π , 3π , 4π и т.д. Это положения равновесия свободного маятника. Если угол равен π , 3π , ..., то маятник вертикален, и груз находится в верхней точке. Так что это неустойчивые равновесия. Если угол равен 2π , 4π ..., то маятник находится в нижней точке и равновесия устойчивы. На рис.56 устойчивые состояния равновесия отмечены жирными точками, а неустойчивые – кружочками.

Будем теперь медленно увеличивать жесткость пружины, что отвечает на графике увеличению наклона прямой. Можно видеть, что устойчивые и неустойчивые состояния равновесия будут попарно двигаться навстречу друг другу. При некоторых значениях параметра они также попарно будут сливаться и исчезать, то есть будут иметь место последовательные катастрофы складки.

Моменты слияния и исчезновения равновесий близки к точкам $3\pi/2$, $7\pi/2$... Эти значения отмечены на рисунке стрелками. Физически это тоже понятно: повернем маятник на угол, чуть больший π , т.е. перейдем через верхнюю точку. Тогда сила тяжести начнет создавать момент, противоположный возвращающему моменту пружины. Максимальный момент силы тяжести как раз отвечает повороту на 270° , или $3\pi/2$. Именно в окрестности этой точки и возможна первая бифуркация. Такая же ситуация имеет место при углах около $7\pi/2$ и т.д.

Найдем теперь значения параметра, отвечающие слиянию положений равновесия. В таких точках прямая на рис.56 является касательной к графику синуса, и поэтому выполняется как соотношение $\sin \varphi + k\varphi = 0$, так и продифференцированное соотношение $\cos \varphi + k = 0$. Отсюда получаем уравнение

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi.$$

Его можно решить приближенно. Положим $\varphi = \alpha - \delta$, где α равно $3\pi/2, 7\pi/2, \dots$. Тогда для малой величины δ справедливо уравнение

$$\operatorname{ctg}\delta = \alpha - \delta,$$

Далее можно использовать, что $\operatorname{ctg}\delta \approx \frac{1 - \delta^2/2}{\delta}$, и тогда получаем уравнение

$$\delta^2 - 2\alpha\delta + 2 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\delta = \alpha \left(1 - \sqrt{1 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} \right).$$

Полученная приближенная формула должна работать тем лучше, чем более далекие корни мы рассматриваем.

Для определения параметра k следует воспользоваться соотношением $k = -\cos\varphi$. Если мы используем, что $\varphi = \alpha - \delta$, то $k = \sin\delta$, и при малых δ можно полагать

$$k \approx \delta.$$

Перейдем теперь к численным оценкам. Для случая $3\pi/2$ приближенные соотношения дают $\delta_1 \approx 0,21721\dots$, и соответственно

$$\varphi_1 = 4,49518\dots = 1,43086\pi \text{ (точное значение } 4,49341\dots),$$

$$k_1 = 0,21721\dots \text{ (точное значение } 0,21723\dots).$$

Здесь в скобках приведены точные значения, найденные методом Ньютона.

Для второй точки $\alpha = 7\pi/2$ получаем $\delta_2 \approx 0,09132\dots$ и

$$\varphi_2 = 10,90425\dots = 3,47093\pi$$

$$k_2 = 0,09132\dots$$

При этом точность настолько высока, что метод Ньютона дает такие же значения. В этом случае уже хорошо работает и более простая аппроксимация $k \approx \frac{1}{\alpha}$.

42. У качалки будет одно устойчивое равновесие и одно нейтральное состояние, которое очень близко к равновесию, но в реальном эксперименте зафиксировать точно это положение очень сложно.

43. Пусть в начальном состоянии давление газа равно P . Тогда условие равновесия поршня имеет вид

$$P_0 + \rho g(l - l_0) + mg = P,$$

где ρ – плотность ртути, а $m = \frac{M}{S}$ – нормированная на площадь масса поршня.

Обозначим через y высоту пробирки, занятую газом после нагревания до температуры T . Тогда условие равновесия поршня после нагрева имеет вид

$$P_0 + \rho g(l - y) + mg = P'.$$

Давление газа P' при температуре T можно найти из уравнения состояния идеального газа

$$P' = \frac{l_0 T}{y T_0} P_0.$$

Комбинируя эти соотношения вместе, получим

$$P_0 + \rho g(l - y) + mg = \frac{l_0 T}{y T_0} (P_0 + \rho g(l - l_0) + mg).$$

Далее удобно ввести два существенных параметра: некоторую величину с размерностью длины

$$L = l + \frac{P_0 + mg}{\rho g}$$

и безразмерную температуру

$$\tau = \frac{T}{T_0}.$$

Тогда полученное нами уравнение можно переписать в виде

$$(L - y)y = \tau(L - l_0)l_0.$$

Отсюда следует, что координата поршня после нагревания удовлетворяет квадратному уравнению

$$y^2 - Ly + \tau(L - l_0)l_0 = 0.$$

Оно, соответственно, имеет два решения

$$y_{1,2} = \frac{L \mp \sqrt{L^2 - 4\tau(L - l_0)l_0}}{2}.$$

Если температура равна начальной и $\tau = 1$, то $y_1 = l_0$, а $y_2 = L - l_0$. По условию начальная высота поршня равна l_0 , поэтому положение равновесия поршня определяется первым корнем. Пусть мы постепенно повышаем температуру τ . Тогда подкоренное выражение будет постепенно уменьшаться, при этом координата y_1 растет, и поршень постепенно поднимается вверх. При условии

$$L^2 - 4\tau(L - l_0)l_0 = 0,$$

происходит катастрофа складки: решения y_1 и y_2 сливаются друг с другом и исчезают. Физически это означает, что равновесие поршня станет невозможным при достижении температурой критического значения

$$\tau_c = \frac{L^2}{4(L - l_0)l_0}.$$

Поршень самопроизвольно начнет двигаться вверх, выталкивая ртуть, пока не выбросит ее всю. Произойдет качественное изменение состояния системы.

Физический анализ задачи, однако, на этом не заканчивается. Координата поршня в момент катастрофы в системе

$$y = \frac{L}{2}.$$

Но в системе есть еще один параметр – длина пробирки l . Описанный нами сценарий развития событий реализуется, если слияние корней произойдет внутри пробирки, т.е. при условии $\frac{L}{2} < l$. Используя определение L , это условие можно переписать в виде

$$P_0 + mg < \rho gl.$$

Если это условие заменить на противоположное, то слияние корней произойдет вне пробирки, что не имеет физического смысла. Таким образом, если $\frac{L}{2} > l$, то при возрастании температуры ртуть будет постепенно вытекать из пробирки вплоть до самого ее верха, и никакого «скачка» не произойдет.

Результат нашего анализа удобно представить на плоскости безразмерных параметров. В качестве одного из них выбираем $\varepsilon = \frac{L}{l}$, который «управляется» массой поршня, атмосферным давлением и плотностью наливаемой жидкости. По своему определению всегда $\varepsilon > 1$. Второй параметр – безразмерная температура τ . Критической температуре отвечает линия

$$\tau_c = \frac{\varepsilon^2}{4(\varepsilon - \mu)\mu}.$$

Здесь $\mu = \frac{l_0}{l}$ – еще один безразмерный параметр, отвечающий соотношению газа и ртути в начальном состоянии системы. По своему определению $\mu < 1$, так что знаменатель в приведенном соотношении всегда положителен.

Резкий выброс ртути возможен, как мы отмечали, при условии $\frac{L}{2} < l$, или, в наших безразмерных параметрах, при $\varepsilon = \frac{L}{l} < 2$. При противоположном условии $\varepsilon > 2$ газ постепенно вытеснит ртуть до самого верхнего края пробирки.

Интересно отметить, что график критической температуры $\tau_c = \frac{\varepsilon^2}{4(\varepsilon - \mu)\mu}$ имеет минимум при условии $\varepsilon = 2\mu$, причем критическая температура в этом случае точно равна единице, $\tau_c = 1$. (В этом легко убедиться, продифференцировав функцию $\tau = \tau(\varepsilon)$ и приравняв нулю производную.) Эта ситуация отвечает тому, что начальное состояние уже является критическим – малейшее изменение температуры приводит к выбросу ртути. Ей отвечает условие $L = 2l_0$. Поскольку всегда $\varepsilon > 1$, то такая ситуация возможна лишь если $\mu > 0,5$. Таким образом, возможно два типа устройства плоскости параметров.

Разбиение плоскости параметров (ε, τ) на характерные области для $\mu = 0,25$ и $\mu = 0,75$ показано на рис.34 слева и справа. Можно выделить три характерных области:

- Ртуть резко поднимается вверх и выталкивает поршень, цифра 1.
- Поршень приподнялся и находится внутри пробирки, цифра 2.
- Поршень выдавлен из пробирки при медленном, без скачка подъеме ртути, цифра 3.

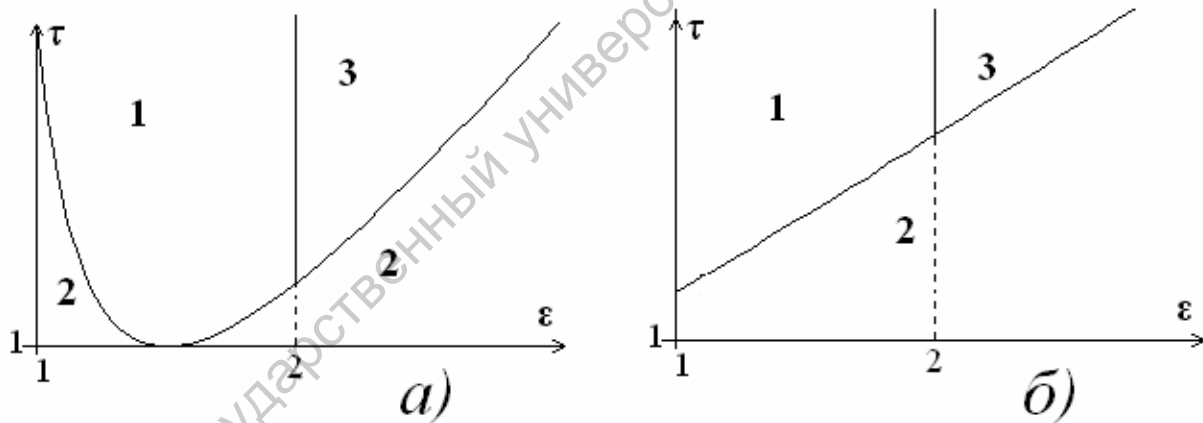


Рис.34

Обсудим еще один вопрос. В начальном состоянии второй корень y_2 располагается вне пробирки. Но, как мы отметили, возможно слияние корней внутри нее. Можно показать, что решению y_1 отвечает устойчивое состояние равновесия, а y_2 – неустойчивое. Действительно, пусть поршень слегка сместился вверх на величину dy при неизменной температуре системы. Тогда часть ртути выльется и оказываемое ей давление на поршень уменьшится на величину $dP = \rho g dy$. В свою очередь, по закону Бойля-Мариотта давление газа также упадет, но на величину $dP = \frac{P}{y} dy$. Чтобы равновесие было устойчивым, первая ве-

личина должна быть меньше второй, т.е. $\rho g < \frac{P}{y}$. Однако по условию равновесия $P_0 + \rho g(l - y) + mg = P$. Тогда

$$y < \frac{P_0 + \rho gl + mg}{2\rho g} = \frac{L}{2},$$

что всегда выполняется для первого положения равновесия и не выполняется для второго.

Бифуркация вилка

44. Найдем потенциальную энергию систему. Поместим начало координат в верхнее положение маятника. Для энергии в поле тяжести тогда имеем: $U_m(x) = mgl(1 - \cos \alpha)$, где α – угол отклонения от вертикали. Пусть это отклонение мало. Тогда

$$U_m(x) = mgl(\cos \alpha - 1) \approx -mgl\alpha^2/2,$$

поскольку $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ и $\alpha \approx x/2$.

Нелинейная пружина характеризуется энергией упругой деформации $U_y(x) = \int F(x)dx = kx^2/2 + cx^4/4$. Таким образом, суммарная энергия

$$U(x) = ax^2/2 + cx^4/4,$$

где $a = (k - mg/l)$ – параметр, характеризующий соотношение упругости в рамках закона Гука и силы тяжести.

Потенциальная энергия представляет собой полином четвертой степени относительно координаты x . При этом ее график обладает симметрией относительно вертикальной оси, поскольку содержит только четные степени x . С точки зрения исходной системы, наличие симметрии связано с равноправием отклонения маятника в ту или иную сторону.

Для анализа свойств функции $U(x) = ax^2/2 + cx^4/4$ удобно заметить, что вблизи начала координат $U(x) \approx ax^2/2$, поскольку $x^4 \ll x^2$. Поэтому, если $a > 0$, то функция $U(x)$ в начале координат имеет единственный квадратичный минимум, отвечающий устойчивому равновесию системы, рис.35а. Если же $a < 0$, то вблизи начала координат минимум сменяется максимумом. Вдали от начала координат начинает доминировать член четвертой степени x^4 , поэтому ветви графика в этой области идут «вверх». Значит, функция $U(x)$ при $a < 0$ должна иметь также два локальных минимума, рис.35в. Отметим, что такой потенциал часто называют «двухъямным потенциалом» в силу его характерной формы.

Найдем координаты равновесий, для чего приравняем нулю силу, являющуюся производной от потенциальной энергии:

$$F(x) = U'(x) = \frac{mg}{l}x - kx - cx^3 = 0.$$

Отсюда следует, что равновесия отвечают значению $x_1 = 0$, а также

$$x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{mg - kl}}{\sqrt{lc}}.$$

Последнее решения существует лишь при $mg > kl$.

Таким образом, функция $U(x)$ может демонстрировать два качественно разных случая: единственный минимум в начале координат и два минимума, между которыми расположен максимум. Перестройка от одного типа функции к другому происходит в результате бифуркации вилка через вырожденный случай $a = 0$, которому отвечает минимум четвертой степени, рис.35б. Подчеркнем, что такой тип перестройки характерен для систем с симметрией.

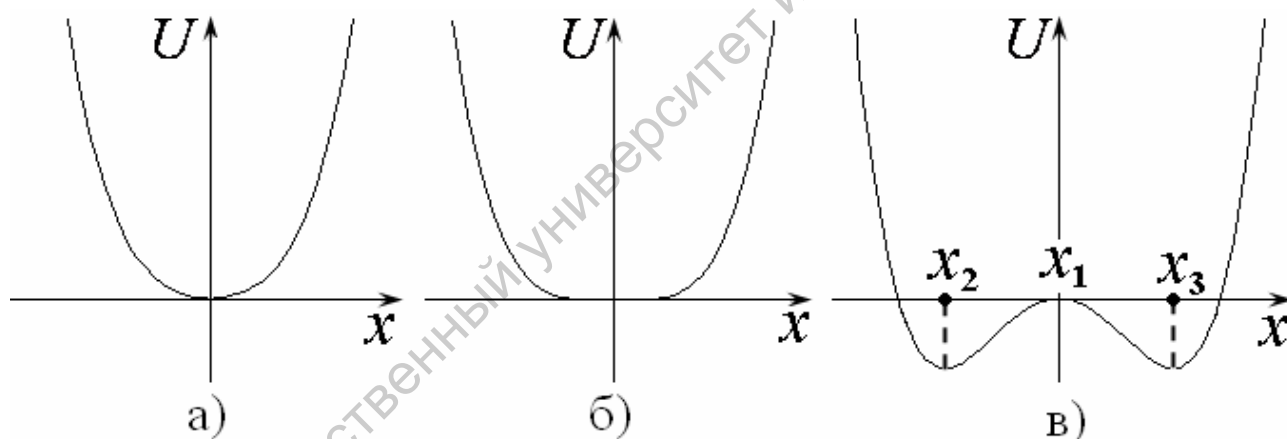


Рис.35

Итак, если $mg < kl$, то вертикальное положение маятника устойчиво – пружина стабилизирует неустойчивость вертикально расположенного маятника. Если $mg > kl$, то упругости пружины недостаточно для стабилизации, и равновесие неустойчиво. В этом случае сколь угодно малое воздействие выведет маятник из состояния равновесия, и он отклонится либо налево, либо направо. При этом «выбор» состояния равновесия будет определяться направлением малого воздействия и, фактически, будет во многом случайным. Подчеркнем, что стабилизация маятника в этом случае связана с нелинейностью пружины. Если пружина подчиняется закону Гука ($c = 0$), то при $mg > kl$ в системе останется только неустойчивое равновесие в начале координат.

45. Нетрудно получить следующее выражение для потенциальной энергии:

$$U(x) = \frac{k(\sqrt{a^2 + x^2} - l)^2}{2},$$

где $\sqrt{a^2 + x^2} - l$ – найденное с помощью теоремы Пифагора удлинение пружины. Силу находим, дифференцируя потенциал по координате:

$$F(x) = \frac{dU(x)}{dx} = \frac{k(\sqrt{a^2 + x^2} - l)x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

В состояниях равновесия сила, равна нулю, так что из $F(x) = 0$ легко находим:

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{l^2 - a^2}.$$

Первое решение располагается в начале координат. Два вторых возможны только при условии $a < l$.

Эти решения легко понять из физических соображений. Если отвести стержень далеко от пружины ($a > l$), то равновесия в начале координат будет единственным, и устойчивым за счет сильной деформации пружины. Будем уменьшать расстояние до точки прикрепления пружины a . Если расстояние a станет меньше длины недеформированной пружины $a < l$, пружина станет «выпучиваться» в стороны, и положение равновесия в начале координат станет неустойчивым. Появятся два симметричных устойчивых равновесия $x_{2,3}$. Они отвечают недеформированной пружине, так что по теореме Пифагора $x_{2,3}^2 + a^2 = l^2$, что соответствует найденному решению. Описанная перестройка является бифуркацией вилка.

Полезно получить разложение потенциала в ряд Тейлора в окрестности начала координат. Используем

$$U(x) = \frac{k(\sqrt{a^2 + x^2} - l)^2}{2} = \frac{k}{2} \left(a^2 + l^2 + x^2 - 2la\sqrt{1 + x^2/a^2} \right),$$

и разложение в ряд Тейлора:

$$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$$

Тогда получаем полином четвертой степени:

$$U(x) = \frac{k}{2} \left[(a-l)^2 + \left(1 - \frac{l}{a}\right)x^2 + \frac{l}{4a^3}x^4 \right]$$

Такой потенциал был проанализирован в предыдущей задаче.

46. Обозначим расстояние между кольцами через a . Рассмотрим сначала некоторые асимптотические ситуации. Если расстояние между кольцами равно нулю, то они сольются вместе, и будут создавать потенциал как одно кольцо удвоенного заряда. В этом случае, очевидно, будет иметь место единственное

состояние равновесия в начале координат, которое будет устойчивым, рис.36а. Пусть теперь кольца разнесены очень далеко, т.е. $a \gg R$. Тогда каждое кольцо фактически изолировано и создает локальный минимум потенциала, рис.36б.

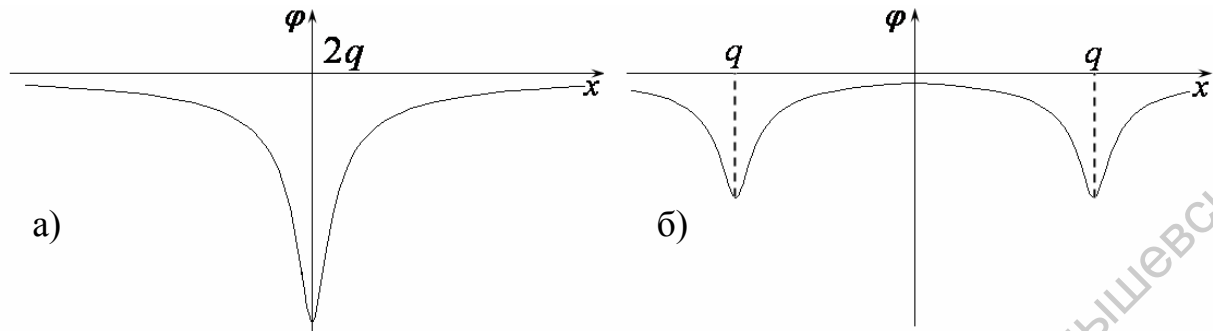


Рис.36

Таким образом, в соответствии с рис.36б будут иметь место два устойчивых состояния равновесия и одно неустойчивое, расположенное в начале координат. Следовательно, если медленно увеличивать параметр a , будет наблюдаться бифуркация вилка: при некотором значении a находящееся в начале координат положение равновесия потеряет устойчивость, и от него отделятся два неустойчивых.

Найдем соответствующее критическое значение расстояния между кольцами. Поместим начало координат точно посередине между зарядами. Тогда потенциал, создаваемый кольцами, можно записать в виде

$$\varphi(xa) = \frac{Q}{((x-a)^2 + R^2)^{1/2}} + \frac{Q}{((x+a)^2 + R^2)^{1/2}},$$

где первое слагаемое отвечает полю, созданному первым зарядом, а второе – вторым. Вычислим первую производную от этого выражения по координате, что соответствует полю, действующему на заряд q :

$$E(x) = \varphi'(x) = -\frac{(x-a)Q}{((x-a)^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{(x+a)Q}{((x+a)^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Очевидно, что

$$E(0) = \varphi'(0) = 0,$$

что отвечает тому, что в начале координат в любом случае имеет место положение равновесия.

Для исследования его на устойчивость вычислим вторую производную от потенциала

$$\varphi''(x) = Q \frac{2(x-a)^2 - R^2}{((x-a)^2 + R^2)^{5/2}} + Q \frac{2(x+a)^2 - R^2}{((x+a)^2 + R^2)^{5/2}}.$$

Таким образом,

$$\varphi''(0) = 2Q \frac{2a^2 - R^2}{(a^2 + R^2)^{5/2}}.$$

Нетрудно видеть, что при $a < R/\sqrt{2}$ вторая производная отрицательна, а при противоположном условии – положительна. Таким образом, при $a = R/\sqrt{2}$ в системе наблюдается бифуркация вилка.

47. Очевидно, что вертикальное положение стержня всегда будет положением равновесия, однако оно не всегда устойчиво. Это легко понять, представив два противоположных предельных случая – очень тяжелый и очень легкий стержень.

Проведем анализ устойчивости этого положения. У вертикально висящего стержня длина подводной части составляет $(l - h)$, ее центр масс расположен на

расстоянии $\frac{1}{2}(l + h)$ от точки прикрепления, а центр масс всего стержня – на

расстоянии $\frac{1}{2}l$ от той же точки. Если стержень отклонился на очень маленький

угол, то сила тяжести создаст момент, пропорциональный $\rho \frac{l^2}{2}$, а архимедова

сила – момент, пропорциональный $\frac{1}{2}\rho_A(l + h)(l - h)$. Таким образом, стержень

будет устойчивым, если первый момент превысит второй, т.е. $\rho l^2 > \rho_A(l + h)(l - h)$. Отсюда следует, что вертикальное равновесие устойчиво при

$$\rho = \rho_A(1 - h^2/l^2).$$

Пусть теперь стержень в положении равновесия отклонился на угол α от вертикали, рис.37. Тогда расстояние от точки прикрепления до поверхности воды вдоль стержня

составит $\frac{h}{\cos \alpha}$, а длина погруженной в воду части

стержня равна $l - \frac{h}{\cos \alpha}$. Центр этой погруженной

части расположен на расстоянии

$L = \frac{h}{\cos \alpha} + \frac{1}{2}(l - \frac{h}{\cos \alpha}) = \frac{1}{2}(l + \frac{h}{\cos \alpha})$ от точки

прикрепления.

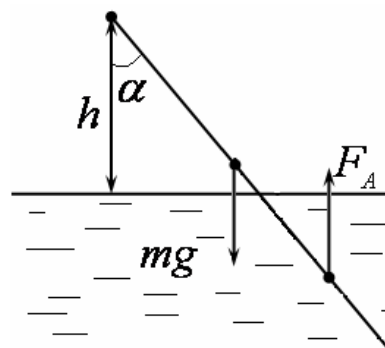


Рис. 37

Условие равновесия стержня можно записать как равенство моментов силы тяжести, приложенной к центру стержня, и силы Архимеда, приложенной к центру погруженной части. Это приводит к следующему уравнению

$$\frac{1}{2}\rho l^2 = \frac{1}{2}\left(l + \frac{h}{\cos\alpha}\right)\left(l - \frac{h}{\cos\alpha}\right)\rho_A.$$

Отсюда можно выразить косинус искомого угла:

$$\cos\alpha = \frac{h}{l\sqrt{1 - \rho/\rho_A}}.$$

Таким образом, при условии $\rho = \rho_B(1 - h^2/l^2)$ вертикальное равновесие становится неустойчивым, происходит бифуркация вилка, и от него отделяются два других равновесия, отвечающих полученной формуле.

Катастрофа коразмерности два – сборка

48. Потенциалу $U(x) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx$ отвечают условие равновесия $x^3 + ax + b = 0$. Последнее уравнение задает в пространстве (a, b, x) поверхность, качественно показанную на рис.38. Ее проекция на плоскость параметров дает бифуркационное множество.

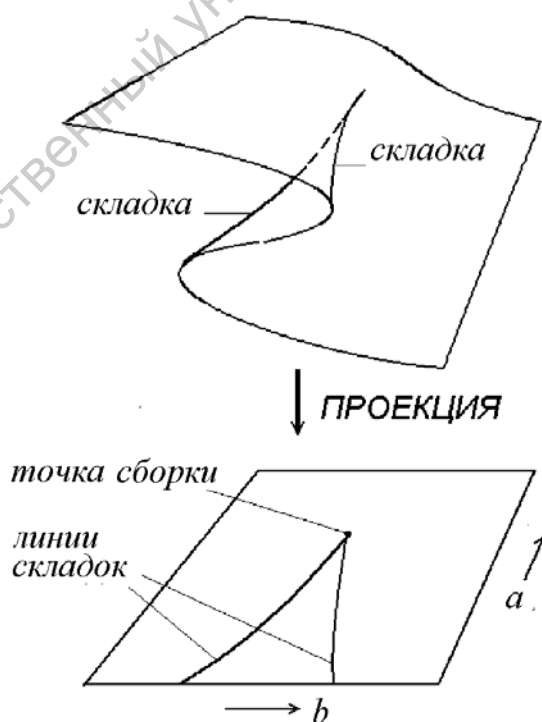


Рис.38

49. Обратите внимание, что в эксперименте получаются две точки сборки с общими линиями складок.

50. Картину переходов удобно анализировать, используя трехмерное представление сборки, рис.39. В случае а) мы сначала движемся по верхнему листу поверхности. В точке A происходит жесткий переход на нижний лист в точку A' . Затем обходим точку сборки C снизу, и вновь оказываемся на верхнем листе. Поэтому один оборот вокруг точки сборки дает один жесткий переход.

Для маршрута б) жесткий переход произойдет при первом пересечении левой складки, затем точка уходит под поверхность без жесткого перехода, выходит из-под него и снова возвращается. Следующий жесткий переход произойдет только на левой складке. В случае в) будет иметь место всего один жесткий переход.

Мы представили обсуждение для ситуации, когда начальная точка лежит на «верхнем» листе поверхности. Рассмотрите самостоятельно случай, когда начнем с нижнего листа.

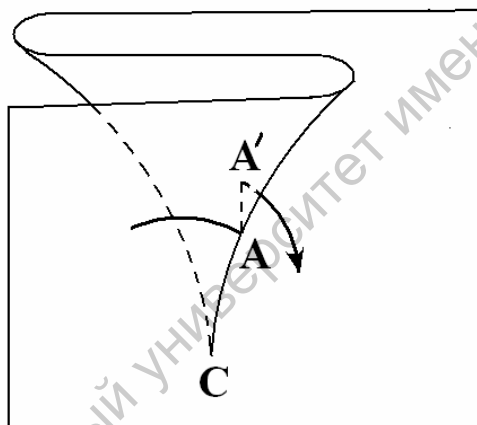


Рис.39

51. Качалка будет иметь единственное равновесие, но с «аномально» устойчивым характером, отвечающим потенциалу четвертой степени.

52. Задачу удобно решать во вращающейся системе отсчета. В этой системе действует центробежная сила $m\omega^2 r$, которой можно сопоставить потенциальную энергию $U = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$, где r – радиус вращения. Проведем вертикальную ось системы координат так, чтобы она проходила через центр окружности. Тогда, очевидно, $r = x + a$. В свою очередь, потенциальная энергия дается выражением

$$U = -mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Таким образом, суммарная потенциальная энергия

$$U(x) = -\frac{m\omega^2 (x + a)^2}{2} - mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Перейдем к безразмерным переменным и параметрам. Введем безразмерную энергию $W = \frac{U}{m\omega^2 R}$ и параметры: $\varepsilon = \frac{g}{\omega^2 R}$, характеризующий скорость вращения системы, и $\alpha = \frac{a}{R}$, характеризующий степень смещения оси вращения относительно центра системы. Тогда

$$W(x) = -\frac{(x + \alpha)^2}{2} - \varepsilon\sqrt{1 - x^2}.$$

(Мы сохранили для координаты, нормированной на радиус кольца, обозначение x .)

При вариации двух существенных параметров $\alpha = \frac{a}{R}$ и $\varepsilon = \frac{g}{\omega^2 R}$ потенциальная энергия, как функция координаты, может испытывать определенные метаморфозы.

Рассмотрим сначала случай малых x . Разлагая $W(x)$ в ряд Тейлора, получим выражение для потенциала в виде полинома четвертой степени:

$$W(x) = const - \alpha x + \frac{\varepsilon - 1}{2}x^2 + \frac{\varepsilon}{8}x^4 + \dots$$

В случае $\alpha = 0$, при котором ось вращения проходит через центр окружности, возможен симметричный двухъямный потенциал, и наблюдается бифуркация вилка. Если этот параметр отличен от нуля, то возникает асимметрия графика. В результате глубина двух потенциальных минимумов может быть разной. При этом, варьируя параметр α , можно добиться ситуации катастрофы складка слияния максимума и одного из минимумов, рис.40.

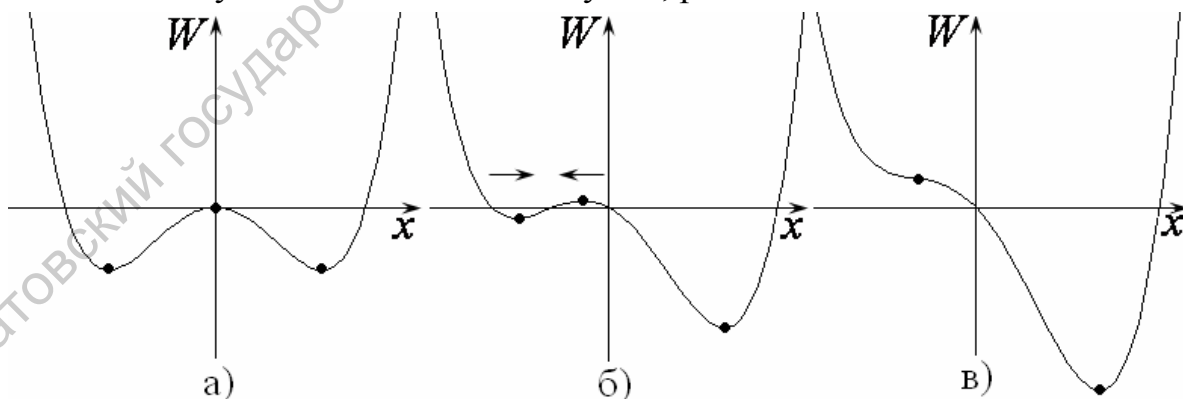


Рис.40

Найденный нами потенциал отвечает канонической форме катастрофы сборки (с точностью до перенормировки). Соответственно можно найти линии складок. Критические точки отвечают равенству нулю первой производной от потенциала, а катастрофы складки – второй производной. Тогда

$$W'(x) = -\alpha + (\varepsilon - 1)x + \frac{\varepsilon x^3}{2} = 0,$$

$$W''(x) = \varepsilon - 1 + \frac{3\varepsilon x^2}{2} = 0.$$

После несложных преобразований, находим $x = \pm \sqrt{\frac{2(1-\varepsilon)}{3\varepsilon}}$. Подставляя в первое соотношение, получаем условие для линий складок.

$$\alpha = \pm \left(\frac{2(1-\varepsilon)}{3\varepsilon} \right)^{3/2}.$$

Проведем теперь рассмотрение более аккуратно, не ограничиваясь предположением о малых x , а используя строгое выражение для потенциала

$$W(x) = -\frac{(x + \alpha)^2}{2} - \varepsilon \sqrt{1 - x^2}.$$

Вычисляя соответствующие производные, получаем

$$W'(x) = -x - \alpha + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

$$W''(x) = -1 + \frac{\varepsilon}{(1 - x^2)^{3/2}} = 0.$$

После несложных преобразований, находим:

$$x = \pm \sqrt{1 - \varepsilon^{2/3}},$$

и

$$\alpha = \pm (1 - \varepsilon^{2/3})^{3/2}.$$

Линии складок, заданные этим уравнением, показаны на рис.41 вместе с характерными конфигурациями потенциала. Можно видеть, что линии складок сходятся в точке сборки $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$. В ее окрестности имеет место полукубическое острие. Действительно, используя $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$, и, соответственно, $\varepsilon^{2/3} = (1 - \Delta\varepsilon)^{2/3} \approx 1 - \frac{2}{3}\Delta\varepsilon$, получаем

$$\alpha \approx \pm \left(\frac{2}{3}\Delta\varepsilon \right)^{3/2},$$

то есть уже полученное выше соотношение.

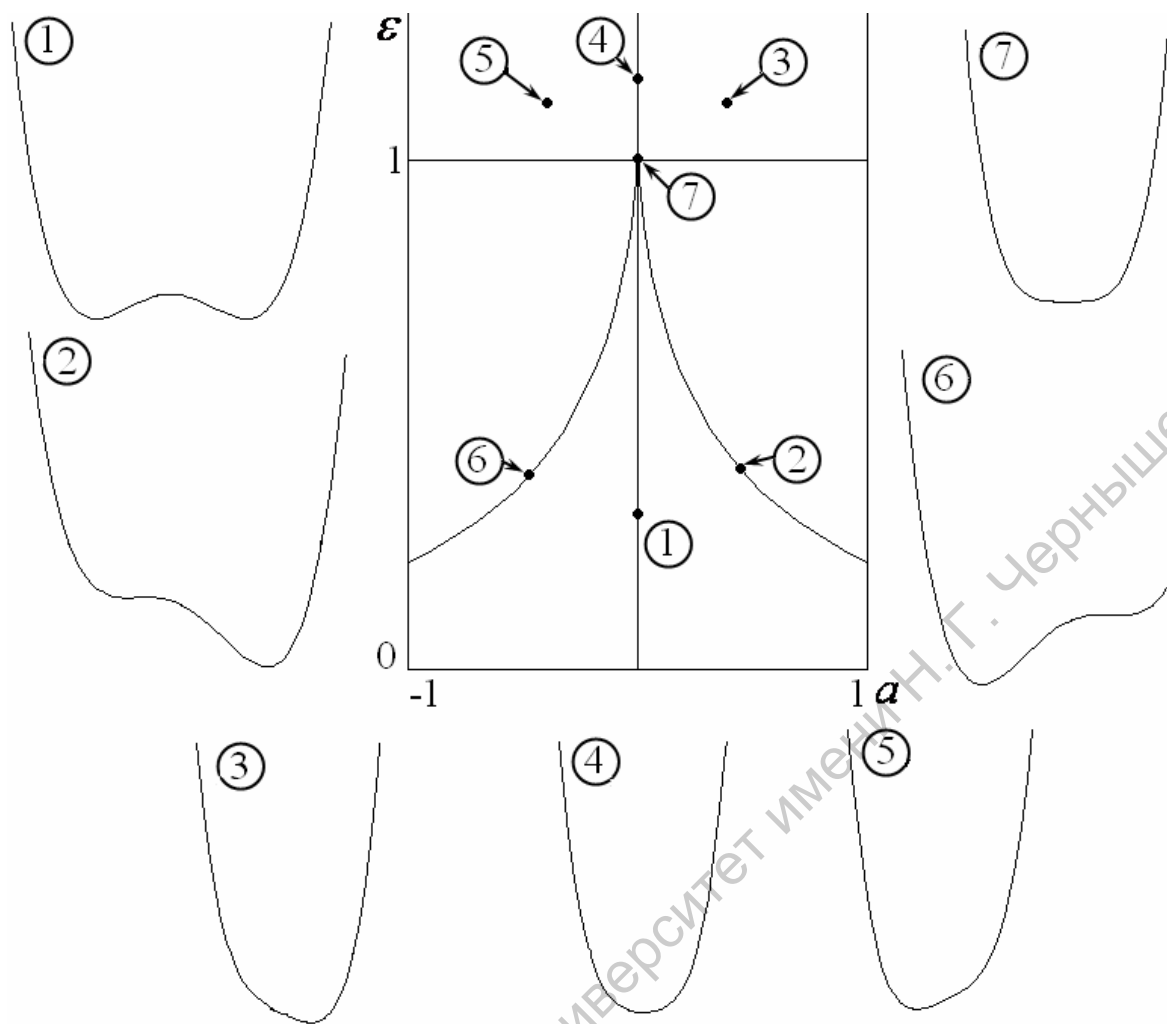


Рис.41

53. Решение этой задачи аналогично предыдущей. В системе координат, связанной со стержнем (ось ox направлена вдоль стержня, ось oy – перпендикулярно к нему и проходит через точку крепления пружины), нетрудно получить следующее выражение для потенциальной энергии:

$$U(x) = \frac{k(\sqrt{a^2 + x^2} - l)^2}{2} + mgx \sin \alpha .$$

где $\sqrt{a^2 + x^2} - l$ – найденное с помощью теоремы Пифагора удлинение пружины.

Переходя к безразмерным переменным и параметрам, получаем

$$W(x) = (\sqrt{\varepsilon^2 + x^2} - 1)^2 + \mu x ,$$

или

$$W(x) = \varepsilon^2 + 1 + x^2 - 2\sqrt{\varepsilon^2 + x^2} + \mu x .$$

Здесь $W = \frac{U}{kx^2/2}$ – безразмерная энергия, $\varepsilon = \frac{a}{l}$ и $\mu = \frac{2mg \sin \alpha}{kl}$ – безразмерные управляющие параметры, причем первый из них характеризует расстояние

от точки прикрепления пружины до стержня. Координата x нормирована на длину l . При малых x из этого соотношения можно получить

$$W(x) = const + \mu x + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} x^2 + \frac{1}{4\varepsilon^3} x^4 + \dots$$

Таким образом, метаморфозы потенциала при малых x качественно аналогичны случаю предыдущей задачи.

Найдем теперь разбиение плоскости параметров на характерные области, не ограничиваясь случаем малых x . Вычисляя соответствующие производные, имеем:

$$W'(x) = 2x - \frac{2x}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}} + \mu = 0,$$

$$W''(x) = 2 - \frac{2\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + x^2)^{3/2}} = 0.$$

После некоторых преобразований получаем для линий складок

$$\mu = \pm 2(1 - \varepsilon^{2/3})^{3/2}.$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае имеется полукубическая особенность — точка сборки.

54. Запишем закон Ома для данной системы:

$$IR + U = E.$$

Здесь I и U — ток и напряжение на диоде. Используя выражение для их зависимости, получаем:

$$[a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c]R + U = E.$$

Удобно ввести замену переменной $y = U - U_0$. Тогда из нашего уравнения следует

$$aRy^3 - bRy + cy + y = E - U_0,$$

или

$$y^3 + \frac{1 - bR}{aR}y + \frac{U_0 - E + cR}{aR} = 0.$$

Вводя параметры $p = \frac{1 - bR}{aR}$ и $q = \frac{U_0 - E + cR}{aR}$, приходим к кубическому уравнению

$$y^3 + py + q = 0.$$

Это каноническое уравнение для многообразия катастрофы сборки. Оно может иметь один или три действительных корня, причем разграничительная линия задается уравнением

$$q = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} (-p)^{3/2}.$$

(См. задачу 10.) Возвращаясь к физическим переменным, находим

$$E = U_0 + cR \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{(bR-1)^{3/2}}{\sqrt{aR}}.$$

Это линия сложной формы на плоскости физических параметров – э.д.с. E и регулируемое сопротивление R . Можно отметить, однако, что она имеет вид «острия» с особенностью «три вторых», с вершиной в точке

$$R = \frac{1}{b}, \quad E = U_0 + \frac{c}{b}.$$

При этом область, где возможно три решения, располагается при $R > \frac{1}{b}$. Заметим, что предыдущие примеры дают возможность предположить, и это действительно оказывается так, что из трех решений два – устойчивы, а одно неустойчиво.

55. Уравнение Ван-дер-Ваальса имеет вид:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

В пространстве (T, P, V) оно задает поверхность, при проектировании которой на плоскость (T, P) возникает точка сборки с отходящими от нее линиями складок.

Точку сборки ищем, приравнявая нулю первую и вторую производные функции $P(V)$:

Совместно с уравнением Ван-дер-Ваальса из этих соотношений получаем координаты точки сборки, которая в молекулярной физике называется критической точкой:

$$P_c = \frac{a}{27b^2}, \quad V_c = 3b, \quad T_c = \frac{8a}{27bR}.$$

Для поиска линий складок удобно перейти к безразмерным переменным:

$$P \rightarrow P/P_c, \quad V \rightarrow V/V_c = 3b, \quad T \rightarrow T/T_c.$$

Тогда уравнение Ван-дер-Ваальса примет вид:

$$P = \frac{8T}{3V-1} - \frac{3}{V^2}.$$

Дифференцируя его по объему и приравнявая производную нулю, получаем уравнение линий складок в параметрической форме:

$$T = \frac{(3V - 1)^2}{4V^3},$$

$$P = \frac{3V - 2}{V^3}.$$

Две ветви линии складок на плоскости нормированных температуры и давления (T, P) сходятся в точке сборки $T = 1, P = 1$, рис.42. В этой точке линии складок имеют полукубическое острие. Можно показать, что центральная линия этого острия имеет некоторый наклон.

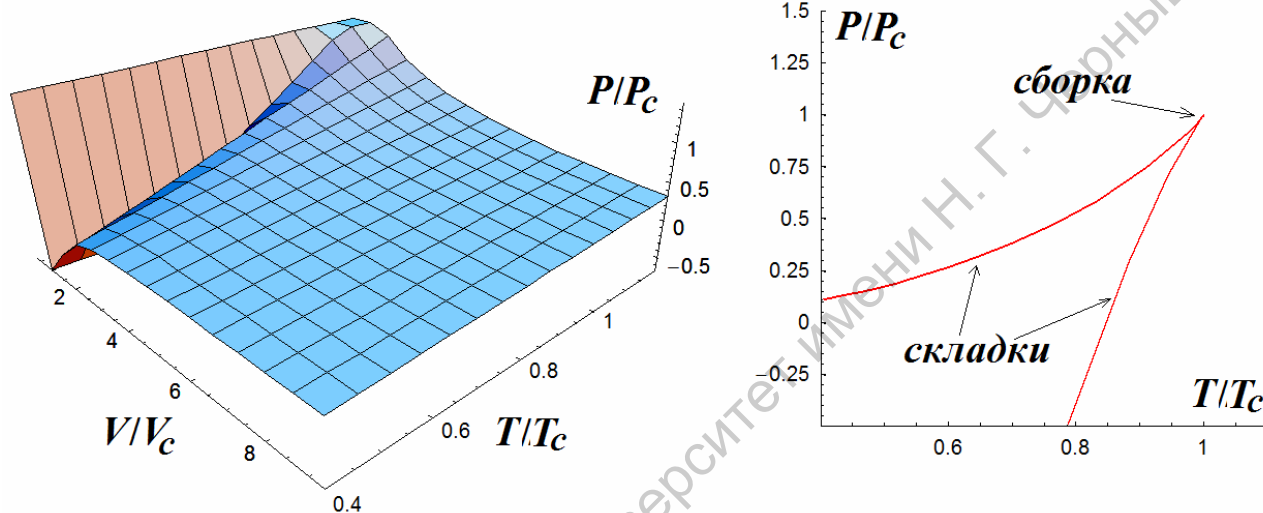


Рис.42

56. В случае двойственной сборки будет наблюдаться ситуация неустойчивого равновесия, либо сосуществование двух неустойчивых и одного устойчивого равновесия.

57. Траекторией точки на ободе катящегося колеса является циклоида:

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t).$$

В нижней точке траектории параметр $t = 0$. Считая t малым, разлагаем синус и косинус в ряд Тейлора: $\sin t = t - t^3/6$, $\cos t = 1 - t^2/2$. Подставляя в уравнения, получаем:

$$x = at^3/6,$$

$$y = at^2/2.$$

Отсюда следует уравнение в виде полукубического острия: $x = \pm(2y)^{3/2}/6a^{1/2}$.

Катастрофа коразмерности три – ласточкин хвост

58. Линии сборок даются условиями $U'(x) = 0$, $U''(x) = 0$, $U'''(x) = 0$, что приводит к следующим уравнениям:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

$$4x^3 + 2ax + b = 0,$$

$$6x^2 + a = 0.$$

Исключая из этих уравнений $x = (-a/6)^{1/2}$, получаем следующие уравнения для сборок:

$$b = \pm \left(-\frac{2}{3}a\right)^{3/2}, \quad c = -\frac{a^2}{12}.$$

В пространстве параметров (a, b, c) линии сборок имеют вид изогнутого клюва с вершиной в начале координат. Рекомендуем самостоятельно построить соответствующий рисунок.

59. Поверхности складок даются уравнениями $U'(x) = 0$, $U''(x) = 0$, что приводит к уравнениям

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

$$4x^3 + 2ax + b = 0.$$

Умножая второе уравнение на x и вычитая из первого получаем уравнение поверхности складок в параметрическом виде:

$$c = 3x^4 + ax^2,$$

$$b = -4x^3 - 2ax.$$

Дифференцируя по параметру, получаем

$$c'(x) = 12x^3 + 2ax,$$

$$b'(x) = -12x^2 - 2a.$$

Как показано в предыдущей задаче, для точек сборки $x = (-a/6)^{1/2}$, поэтому $c'(x) = b'(x) = 0$. Можно показать, что в точках сборки линии складок имеют наклоненное острие «трех вторых».

60. Сечения плоскостью $a = \text{Const}$ показаны на рис. 43. Сечение $a = -1$ имеет вид двух линий складок с точками сборки (см. предыдущие задачи). Линии складок имеют точку самопересечения, которую легко находим совмещая два уравнения для линий складок: $b = 0$, $c = -a^2/4$. На этом же рисунке приведено сечение $a = 1$, на котором присутствует линия складки, параболической формы. См., также, характерные конфигурации потенциала.

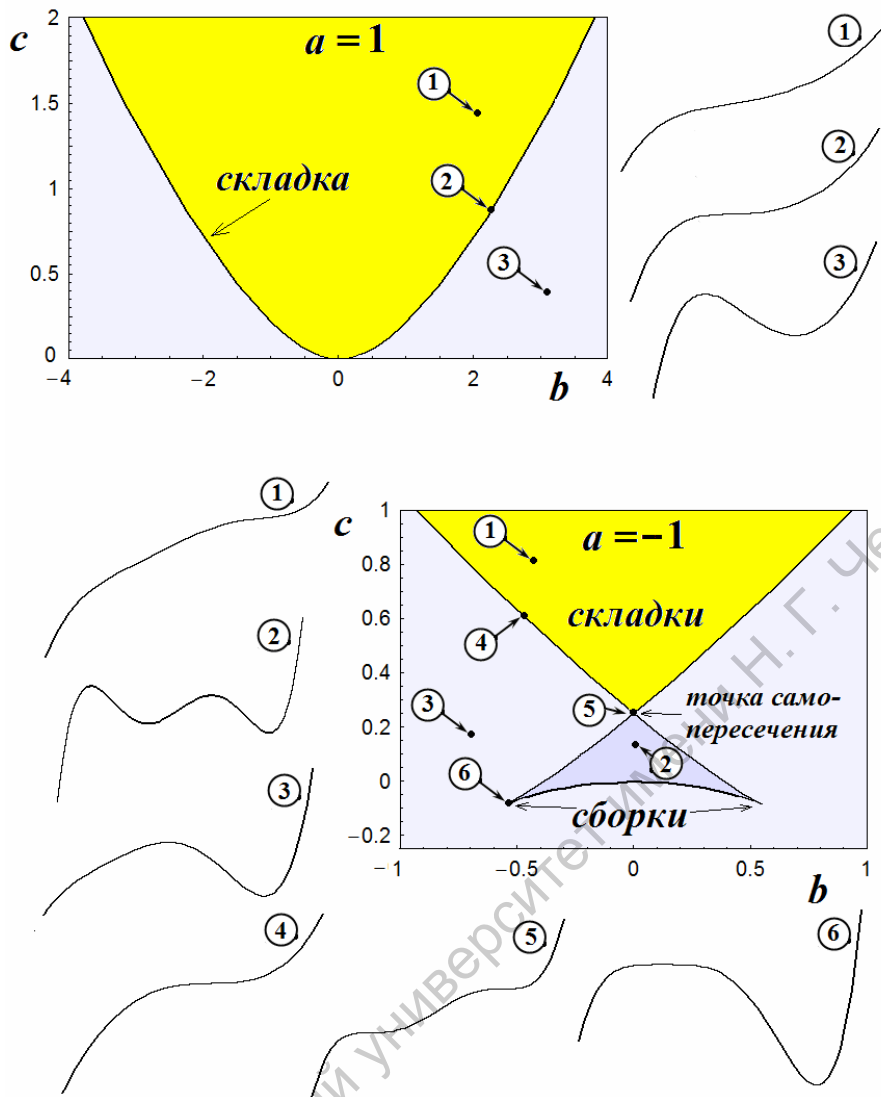


Рис.43

61. Уравнения для поверхностей складок, линии самопересечения и линий сборок в пространстве трех параметров (a, b, c) приведены в предыдущих задачах. Суммарная картина показана на рис.44.

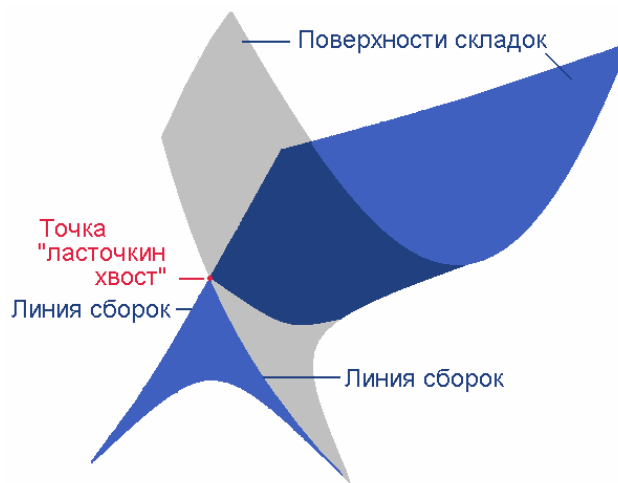


Рис.44

62. Исходя из значений коразмерности соответствующих объектов, получаем, что складки образуют поверхности, сборки и «линия самопересечения» – линии, ласточкин хвост – точку.

63. Условием катастрофы самой высокой коразмерности в данной системе – ласточкин хвост является обращение в ноль четырех производных: $U'(x) = 0$, $U''(x) = 0$, $U'''(x) = 0$, $U^{IV}(x) = 0$. Вычисляя производные и приравнявая их нулю, приходим к соответствующему условию

64. В этом случае получаем выражение для потенциальной энергии в поле тяжести, аналогичное задаче 44: Необходимо только учесть смещение положения точки прикрепления пружины на x_0 , рис.14.

Тогда

$$U_m(x) = \frac{cx^4}{4} + \frac{k}{2}x^2 - \frac{mg(x+x_0)^2}{l}x = \frac{cx^4}{4} + \frac{k-mg/l}{2}x^2 - \frac{mgx_0}{l}x.$$

Здесь появляется дополнительный член, обусловленный смещением точки прикрепления пружины x_0 . Этот член приводит к асимметрии, и соответственно, к канонической для точки сборки форме потенциала.

Добавление электрических зарядов приводит к следующей форме потенциала:

$$U_m(x) = \frac{cx^4}{4} + \frac{k-mg/l}{2}x^2 - \frac{mgx_0}{l}x - \frac{qQ}{a+x}.$$

Она характеризуется более сложной зависимостью от координаты и большим числом параметров. Найдем точку катастрофы ласточкин хвост. Для этого приравняем нулю все производные, до четвертой включительно:

$$U'(x) = cx^3 + (k-mg/l)x - \frac{mgx_0}{l} + \frac{qQ}{(a+x)^2} = 0,$$

$$U''(x) = 3cx^2 + (k-mg/l) - \frac{2qQ}{(a+x)^3} = 0,$$

$$U'''(x) = 6cx + \frac{6qQ}{(a+x)^4} = 0,$$

$$U^{IV}(x) = 6c - \frac{24qQ}{(a+x)^5} = 0,$$

Эту систему следует решать «снизу вверх». Из последнего уравнения получаем $x+a = (4qQ/c)^{1/5}$. Для дальнейшего удобно обозначить $\theta = (4qQ/c)^{1/5}$, так что $x+a = \theta$.

Подставляя это выражение в третье соотношение, получаем, что

$$x = -\frac{\theta}{4} \text{ и } a = \frac{5\theta}{4}.$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение для второй производной, находим:

$$k - mg/l = \frac{5}{16}c\theta^2.$$

Наконец, из уравнения для первой производной:

$$\frac{mgx_0}{l} = \frac{5qQ}{32}\theta^2c.$$

65. Необходимо разложить в ряд Тейлора только электростатическую энергию $U_s = -\frac{qQ}{a+x}$. Воспользуемся разложением в ряд:

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^5}{a^6} + \dots$$

Тогда для суммарной энергии

$$U_m(x) = qQ\frac{x^5}{a^6} + \left(\frac{c}{4} - \frac{qQ}{a^5}\right)x^4 + \frac{qQx^3}{a^4} + \left(\frac{k - mg/l}{2} - \frac{qQ}{a^3}\right)x^2 + \left(\frac{qQ}{a^2} - \frac{mgx_0}{l}\right)x + const.$$

Мы получили полином пятой степени, аналогичный задаче 63 с точностью до множителя $\frac{qQ}{a^6}$. Условия катастрофы ласточкин хвост получаются подстановкой соответствующих коэффициентов в решение задачи 63. Например, условие на второй и третий коэффициенты $B = 2A^2/5$ после некоторых преобразований приводит к

$$a = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)^{1/5} \theta.$$

Это близко к точному значению $a = \frac{5\theta}{4} = 1,25\theta$. Тем не менее получилось не точное, а приближенное значение. Для того, чтобы получить точные значения необходимо использовать разложения в ряды непосредственно в точке катастрофы.