

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

О.Б. Исаева

**Физика фракталов.  
Комплексная аналитическая динамика**

Учебно-методическое пособие  
для студентов 4 курса факультета нелинейных процессов

Саратов 2012

Автор-составитель:  
*Ольга Борисовна Исаева*

Пособие предназначено для использования при проведении занятий по курсу «Физика фракталов» у студентов 4 курса факультета нелинейных процессов. Может быть полезно как студентам, изучающим теорию фракталов, теорию динамических систем, теорию хаоса, нелинейную динамику и синергетику, так и преподавателям при чтении лекций, проведении семинаров и компьютерных практикумов по указанным курсам.

Работа представлена в авторской редакции.

© Исаева О.Б., 2012

# Раздел I

## Комплексные отображения и ассоциирующиеся с ними фрактальные объекты

### 1.1 Одномерные комплексные аналитические отображения как специальный класс динамических систем. Их связь с двумерными действительными отображениями. Условия Коши-Римана

Одна из наиболее популярных моделей нелинейной динамики — это дискретное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1.1)$$

Примером может служить известное логистическое отображение  $x_{n+1} = \lambda + x_n^2$ . Это отображение вещественное, однако переменная может быть и комплексной

$$z_{n+1} = f(z_n), z \in \mathbb{C}. \quad (1.2)$$

Далее мы будем изучать особые свойства таких отображений и возможности применения их к решению физических задач.

Из теории функций комплексного переменного:

Как известно, комплексные числа  $z = x + iy$ , где  $x$  и  $y$  — действительная ( $x = \operatorname{Re} z$ ) и мнимая ( $y = \operatorname{Im} z$ ) части  $z$ , а  $i$  — мнимая единица, можно рассматривать как плоские вектора и представлять в виде  $z = (x, y)$ , где  $x \cdot \mathbf{1}$  — вектор, направленный по оси абсцисс, а  $y \cdot \mathbf{i}$  — вектор, направленный по оси ординат. Соответственно  $\mathbf{1}$  и  $\mathbf{i}$  — единичные вектора. Длина вектора, определяющегося комплексным числом, называется его модулем  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а угол, образованный вектором с осью абсцисс, — аргументом  $\arg z = \arctg \frac{y}{x}$ . Можно записать  $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) = |z|e^{i \arg z}$ . Числа  $z$  и  $z^*$  называются комплексно-сопряженными, если их действительные части равны, а мнимые отличаются знаком.

Если каждому значению  $z = x + iy$  из некоторой области  $D$  комплексной плоскости поставлено в соответствие значение  $w = u + iv$ , то  $w$  есть функция  $z$ , то есть  $w = f(z)$ . Одномерная функция одного комплексного переменного эквивалентна двум действительным функциям двух действительных переменных  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ . Функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  является дифференцируемой в области  $D$  если для нее выполняются условия аналитичности (Коши-Римана):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Если еще раз продифференцировать последние выражения по  $x$  и по  $y$  получается уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (1.4)$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими, а гармонические функции, удовлетворяющие (1.3), – сопряженными. Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции являются сопряженными гармоническими функциями.

Дифференциал от аналитической функции можно брать, как от функции одной вещественной переменной, например  $D(z^2) = 2z$ , но тем не менее комплексные функции – двумерные. Таким образом, комплексные отображения выступают как специальный класс двумерных действительных отображений, удовлетворяющих условиям Коши-Римана и как мы убедимся далее, они обладают рядом уникальных свойств разрушающихся с переходом к двумерным отображениям общего вида.

Аналитические функции комплексного переменного могут быть как рациональными, так и трансцендентными. Рациональные функции представляются в виде отношений полиномов  $R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}$ . Примерами трансцендентных функций могут служить  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ ,  $\log z = \log |z| + i \arg z$ ,  $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ ,  $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ .

## 1.2 Множество Мандельброта и множества Фату и Жюлиа как феномены комплексной аналитической динамики

Рассмотрим итерации обобщенного на комплексный случай квадратичного отображения

$$z_{n+1} = f_\lambda(z_n) = \lambda - z_n^2, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}, \quad (1.5)$$

где  $\lambda$  – комплексный параметр,  $z$  – комплексная переменная. Обсудим вначале случай, когда  $\lambda = 0$ . Геометрически возведение комплексного числа в квадрат означает возведение в квадрат его модуля и удвоение аргумента. Нетрудно видеть, что если взять начальную точку  $z_0$  внутри единичного круга (т.е.  $|z_0| < 1$ ), то в процессе итерирования (1.5) она не покинет этого круга. Точка же взятая вне единичного круга убежит в бесконечность. Таким образом, существует два аттрактора – нуль и бесконечность, а плоскость комплексных чисел разбивается на два подмножества – бассейна притяжения. Граница между этими двумя множествами – единичная окружность. В этом простейшем примере граница является регулярной кривой, однако, при  $\lambda \neq 0$  отображение (1.5) может породить фрактальную границу. Эти границы называют множествами Жюлиа  $J$ , а их дополнения на

комплексной плоскости  $\mathbb{C} \setminus J$  – множествами Фату  $F^1$ . Совокупность ограниченных множеством  $J$  бассейнов притяжения, которая является подмножеством  $F$ , называется наполненным множеством Жюлиа  $P$ .

Наполненное множество Жюлиа достаточно просто построить с помощью компьютера<sup>2</sup>. Необходимо рассмотреть динамику точек плоскости начальных значений  $z_0$  при итерировании (1.5), определяя сходимость к ограниченному в фазовом пространстве периодическому аттрактору (в данном случае он только один). Чтобы определить, насколько большим должно стать  $z_n$  для убегания на бесконечность, при изучении ее бассейна притяжения, вводится величина

$$r(\lambda) = \max(|\lambda|, 2). \quad (1.6)$$

Если  $z_n$  превышает  $r(\lambda)$  по абсолютному значению, то можно говорить о том, что она убежала в бесконечность. Действительно, если  $|z_n| \geq \lambda$  и  $|z_n| \geq 2$ , то воспользовавшись правилом треугольника можно сделать простую оценку

$$|z_{n+1}| = |\lambda - z_n^2| \geq |z_n^2| - |\lambda| \geq |z_n|^2 - |z_n| = |z_n|(|z_n| - 1) \geq |z_n|. \quad (1.7)$$

Таким образом, наполненное множество Жюлиа можно определить как

$$P = \{z_0 \mid |f_\lambda^n(z_0)| < r(\lambda), n \rightarrow \infty\}. \quad (1.8)$$

На рис. 1.1 приведено изображение множества Фату на плоскости начальных значений переменной  $z$ . Черным цветом изображено наполненное множество Жюлиа, а различными оттенками серого изображены множества точек с различными временами убегания на бесконечность (или еще говорят с различным динамическим расстоянием до аттрактора на бесконечности), то есть с различным числом итераций, необходимых для убегания из круга радиуса  $r(\lambda)$ .

Вполне естественно, что вид множества Фату, а следовательно и множества Жюлиа, должен зависеть от выбора параметра  $\lambda$ . Меняя  $\lambda$ , можно получать невероятное разнообразие форм. Разделяют два основных типа множеств Жюлиа: некоторые из них являются цельными (точнее, связными), а другие представляют собой облака из точек (или обобщенные канторовы множества) (см. рис. 1.2). Тем самым появляется возможность ввести новое множество – множество значений  $\lambda$ , для которых  $J$  связно. Оно называется множеством Мандельброта  $M^3$ . Множество Жюлиа для

<sup>1</sup>Эти фрактальные множества названы в честь известных французских математиков – Гастона Жюлиа (1893-1978) и Пьера Фату (1878-1929), которые внесли значительный вклад в теорию комплексных отображений. В частности, Фату еще в 1906 году обнаружил наличие фрактального бассейна притяжения в виде канторова множества для рационального комплексного отображения. Более сложные фрактальные бассейны притяжения были построены гораздо позже Бенуа Мандельбротом.

<sup>2</sup>Методы построения непосредственно множества Жюлиа будут приведены в разделе 1.5

<sup>3</sup>Впервые это множество было построено в 1978 году при проведении простейшего компьютерного эксперимента французским ученым Бенуа Мандельбротом (р. 1924).

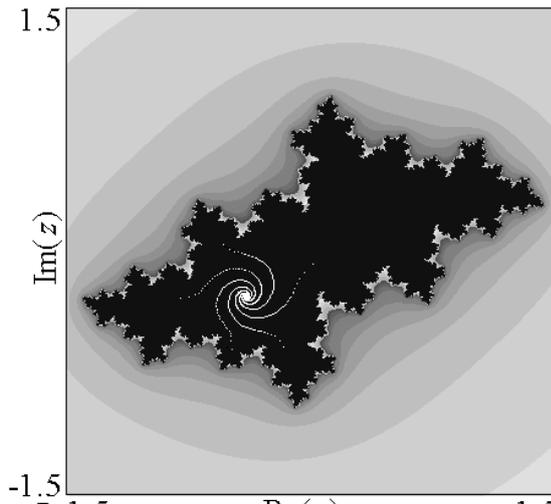


Рис. 1.1. Множество Фату на плоскости начальных значений комплексной переменной  $z$  отображения (1.5). Различными оттенками серого цвета обозначены области с различными временами убегания на бесконечность, черным цветом – наполненное множество Жюлиа. Представлено несколько траекторий (белый цвет), сходящихся ко второму аттрактору.

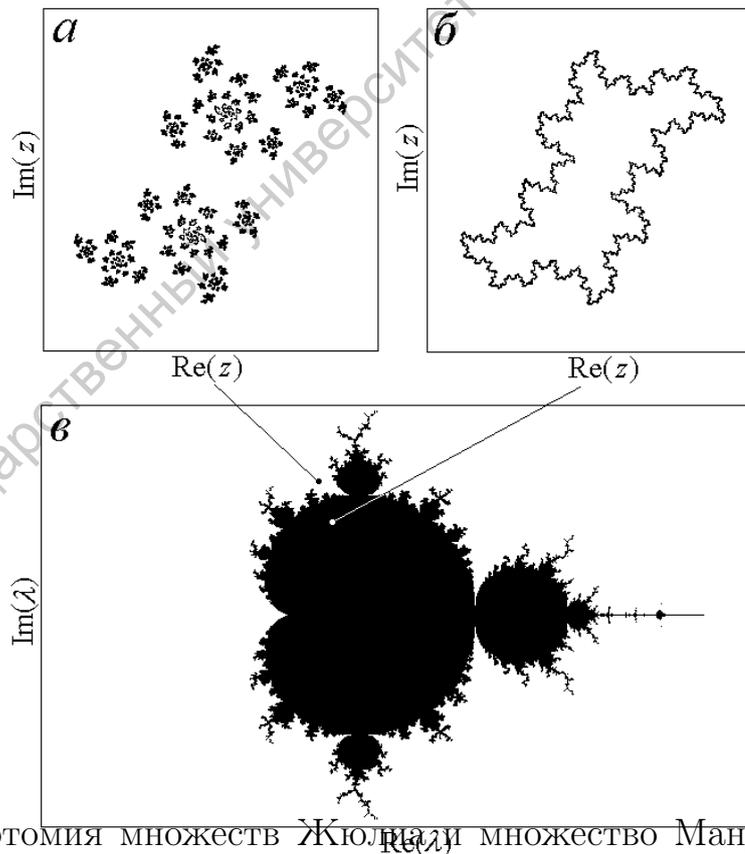


Рис. 1.2. Дихотомия множеств Жюлиа и множество Мандельброта. Для значений параметра, принадлежащих множеству Мандельброта (в) реализуются связанные множества Жюлиа (б), а для значений параметра вне множества Мандельброта – несвязные (а).

данного значения параметра является связным в том случае, если траектория, стартующая из экстремума отображения (в случае квадратичного отображения (1.5) это  $z = 0$ ) не убегает на бесконечность. Этот факт был доказан в фундаментальных работах Фату и Жюлиа. Таким образом, множество Мандельброта определяется как

$$M = \{\lambda \mid |f_\lambda^n(0)| < r(\lambda), n \rightarrow \infty\}. \quad (1.9)$$

Итак, поведение итерационного отображения зависит от параметра  $\lambda$  и от начальной точки  $z_0$ . Если зафиксировать  $\lambda$  и изменять  $z_0$  в поле комплексных чисел, то мы получим множество Жюлиа, а если зафиксировать  $z_0 = 0$  и изменять параметр  $\lambda$ , то получим множество Мандельброта.

На рис. 1.3 представлено множество Мандельброта и его увеличенные фрагменты, демонстрирующие удивительное многообразие составляющих его сложных узоров, спиралей и бесконечного числа подобных целому множеству  $M$  маленьких копий множества Мандельброта.

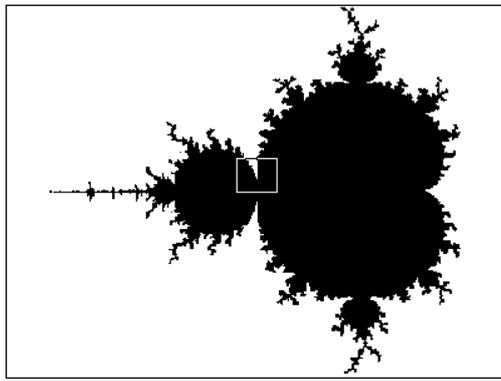
Следует отметить, что множество Мандельброта, как и множества Фату и Жюлиа, является фракталом, демонстрирующим ряд интересных свойств [1, 2, 25]. Так, несмотря на достаточно сложную структуру (см. рис. 1.3), множество Мандельброта является связным. Это утверждение было доказано Хаббардом и Дуади [26]. Аналоги множества Мандельброта (а также и множеств Жюлиа) были обнаружены и для других аналитических комплексных отображений, как рациональных так и трансцендентных [25, 27, 40]. Имеется большое количество работ, посвященных изучению свойств фрактальных объектов возникающих для различным образом комплексифицированных отображений – полиномиальных и рациональных [29–35], экспоненциальных [36, 37], двумерных отображений Эно [38, 39], отображений окружности и кольца [40], неявных отображений [41, 42], систем итерационных функций [43, 44] и т.д.

### 1.3 Бифуркационный анализ множества Мандельброта

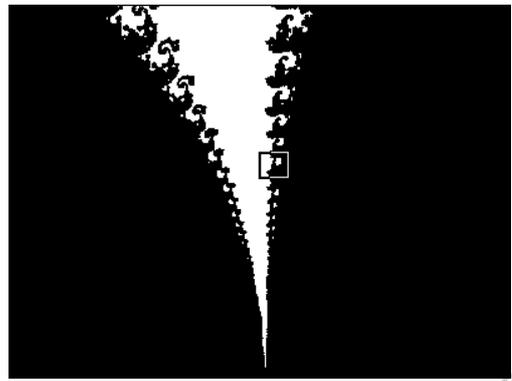
Как известно, простейшим объектом, демонстрирующим сложную динамику, является действительное квадратичное отображение

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2, \quad x_n, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

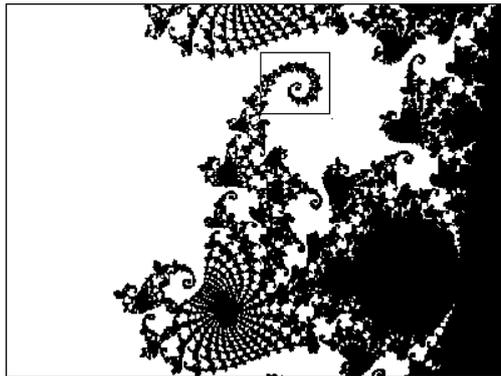
Динамика этого отображения характеризуется наличием последовательности бифуркаций удвоения периода. Точка накопления этих бифуркаций – критическая точка перехода к хаосу по Фейгенбауму. Вблизи нее имеет место скейлинг по параметру, характеризующийся некоей универсальной константой  $\delta_{(2)}$ , а фазовое пространство (одномерное) обладает скейлингом вблизи экстремума с некоей константой  $\alpha_{(2)}$ . Обобщение логистического отображения на комплексный случай (1.5) приводит к рассмотрению



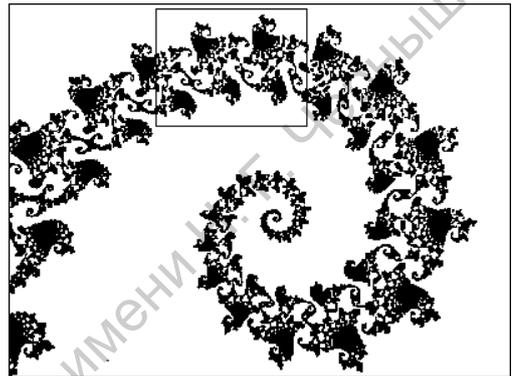
*a*



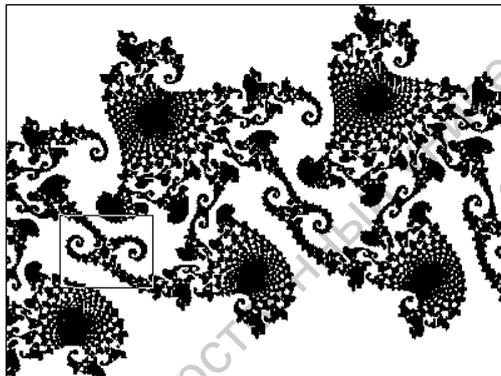
*б*



*в*



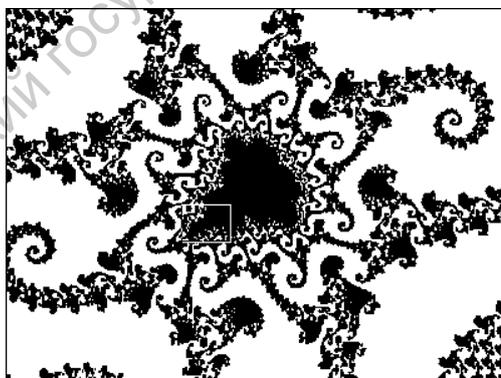
*г*



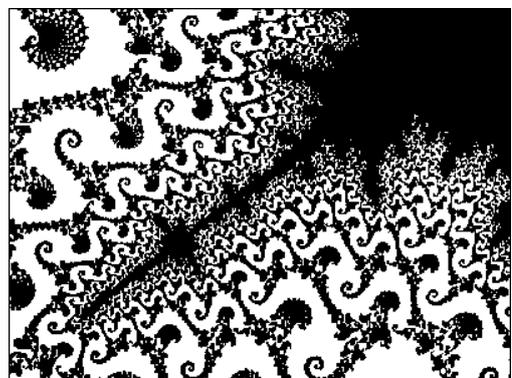
*д*



*е*



*ж*



*з*

Рис. 1.3. Множество Мандельброта (*a*) и его увеличенные фрагменты (*б*)-(*з*). Рисунки воспроизведены из [1].

множества Мандельброта и так называемого “кактуса Мандельброта” (обозначен на рисунке 1.4 серым цветом). “Кактус Мандельброта” – это множество, состоящее из связанных областей существования аттрактора, соответствующего неподвижной точке, и циклам, возникающим посредством всевозможных бифуркаций этой точки [45–47]. “Кактус Мандельброта” удобно использовать для изучения динамики отображений общего вида, когда условие “убегания на бесконечность” теряет смысл. В отличие от множества Мандельброта, “кактус Мандельброта” обладает свойством самоподобия. “Кактус Мандельброта” состоит из большой кардиоиды, соответствующей существованию устойчивой неподвижной точки и бесконечного количества “лепестков” круглой формы, соответствующих существованию устойчивых циклов всевозможных периодов (уравнения для кардиоиды или окружности получаются из условия равенства единице модуля мультипликатора неподвижной точки или соответствующего цикла). Например, вдоль действительной оси располагаются лепестки удваивающегося периода. Возможны и другие последовательности бифуркаций – утроения, учетверения и т.д. [46–48]. Таким образом, обобщение логистического отображения на комплексный случай приводит к возникновению новых последовательностей увеличения периода и соответствующих им критических точек (см. рис. 1.4), а также к возникновению новых универсальных законов скейлинга, отличных от Фейгенбаумовского. Универсальные константы  $\delta_{(n)}$  и  $\alpha_{(n)}$  для точек накопления таких бифуркаций были рассчитаны Цвитановичем и Мирхеймом [46, 47]. Эти константы являются комплексными и для демонстрации скейлинга “кактуса” Мандельброта выделенный вблизи критической точки фрагмент необходимо увеличить и повернуть. Кроме того, как оказалось, константы скейлинга удовлетворяют асимптотическим зависимостям, например  $|\delta_{(n)}| \rightarrow n^2$ .

Найдем границу области устойчивости неподвижной точки для отображения (1.5). Неподвижная точка находится из условия

$$z = \lambda - z^2, \quad (1.11)$$

то есть их две

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}. \quad (1.12)$$

Устойчивость определяется абсолютной величиной мультипликатора  $\mu = f'(z)$ . Если  $|\mu| < 1$ , то режим устойчивый, если  $|\mu| > 1$  – неустойчивый. В нашем случае мультипликаторы

$$\mu_{1,2} = -2z = 1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}. \quad (1.13)$$

в общем случае комплексные (при этом они не обязательно комплексно сопряженные). В случае с вещественными переменной и параметром возможны лишь ситуации, когда мультипликаторы действительные (один больше

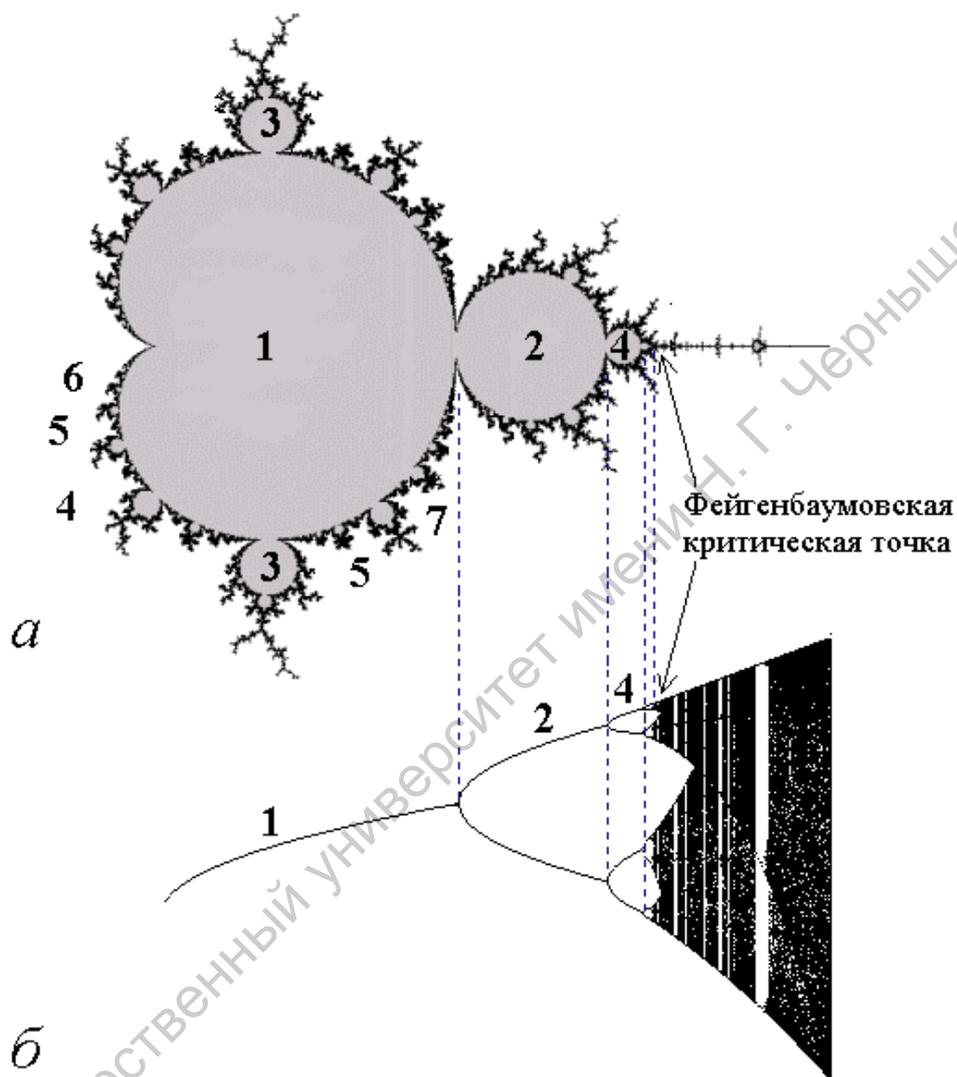


Рис. 1.4. Соотношение между множеством Мандельброта (*a*) и Фейгенбаумовским бифуркационным деревом (*б*). Множество Мандельброта построено на плоскости  $(\text{Re}\lambda, \text{Im}\lambda)$  для комплексного квадратичного отображения (1.5). Бифуркационное дерево построено на плоскости  $(\lambda, x_n)$  для действительного квадратичного отображения (1.10). Серым цветом на рисунке (*a*) обозначены области, которым соответствует существование периодической динамики (периоды указаны цифрами); черным цветом обозначены точки, в которых реализуется ограниченная в фазовом пространстве хаотическая динамика; белый цвет означает убегание траекторий на бесконечность.

1 другой меньше) или когда они комплексно сопряженные и по модулю больше единицы. Потеря устойчивости возможна лишь через бифуркацию удвоения периода (один из мультипликаторов  $\mu = -1$ ) или через касательную бифуркацию ( $\mu = +1$ ). В случае комплексного отображения граница устойчивости соответствует значениям комплексного мультипликатора

$$\mu = |\mu| \exp(2\pi i\phi), \quad (1.14)$$

лежащим на единичной комплексной окружности, то есть

$$\mu = \exp(2\pi i\phi) = \cos 2\pi\phi + i \sin 2\pi\phi. \quad (1.15)$$

Итак, граница устойчивости определяется как

$$\begin{aligned} 1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda} = e^{2\pi i\phi} &\Rightarrow 1 + 4\lambda = 1 + e^{4\pi i\phi} - 2e^{2\pi i\phi} \Rightarrow \\ \lambda &= \frac{1}{4}(e^{4\pi i\phi} - 2e^{2\pi i\phi}), \end{aligned} \quad (1.16)$$

или можно переписать как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda &= (1/4)(\cos(4\pi i\phi) - 2\cos(2\pi i\phi)), \\ \operatorname{Im}\lambda &= (1/4)(\sin(4\pi i\phi) - 2\sin(2\pi i\phi)). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Нетрудно видеть, что это уравнения кардиоиды (кривой, которую описывает точка на ободе колеса радиуса  $1/4$ , катящегося по внешней стороне колеса того же радиуса).

Бифуркация возникновения “лепестка”, соответствует потере устойчивости “родительского” цикла, комплексный мультипликатор которого в момент бифуркации имел единичный модуль  $|\mu|$  и рациональный (в единицах  $2\pi$ ) аргумент  $\phi$  (число вращения). Например, если мультипликатор принимает значение  $\mu = \exp(2\pi i/3)$ , то это отвечает возникновению лепестка периода 3. Если аргумент мультипликатора в момент потери устойчивости ( $|\mu| = 1$ ) иррационален, то возникает еще один интересный феномен КАД, связанный со своего рода квазипериодическим движением. В фазовом пространстве наблюдаются области с фрактальными границами, заполненные замкнутыми инвариантными кривыми – так называемые диски Зигеля [49–51]. Более подробная информация о дисках Зигеля представлена в разделе 1.4.

Одним из стимулов к изучению структуры множества Мандельброта  $M$  служит желание понять, как форма множества Жюлиа  $J$  связана с положением точки, определяющей значение параметра  $\lambda$ , в  $M$  [1, 2, 52]. На рисунках 1.5 б-и показаны множества Жюлиа, построенные при различных значениях комплексного параметра  $\lambda$ . Как уже говорилось, множество Жюлиа представляет собой границу между бассейнами притяжения аттрактора на бесконечности (белый цвет) и периодического движения (серый цвет) на плоскости комплексной переменной  $z$ . Различают несколько типов множеств Жюлиа:

- для значений  $\lambda$ , принадлежащих “кактусу Мандельброта”, множество Жюлиа является связным наполненным множеством, то есть имеющим внутреннюю область (рисунки 1.5 б-в, е-и);
- для значений  $\lambda$ , при которых реализуется хаотическая динамика, множество Жюлиа является связным ненаполненным множеством (дендритом) (рис. 1.5 г);
- для значений  $\lambda$ , не принадлежащих множеству Мандельброта, множество Жюлиа является несвязным (его также называют обобщенным канторовым множеством или пылью Фату) (рис. 1.5 д).

Обозначенный на рисунке 1.4, 1.5 а черным цветом фрактальный узор, окружающий “кактус Мандельброта”, отвечает существованию ограниченной в фазовом пространстве хаотической динамики. Будем называть его границей множества Мандельброта  $\partial M$ . При тщательном рассмотрении этой границы (см. рис. 1.3) можно обнаружить, что она состоит из множества фрактальных линий – “антенн”, на которые (всюду плотно [53, 54]) нанизано бесконечное множество малых копий множества Мандельброта (их размеры определяются асимптотическими зависимостями [55]). Простейшая, самая большая из антенн располагается на действительной оси. Нанизанные на нее множества Мандельброта соответствуют окнам периодичности на бифуркационном дереве вещественного квадратичного отображения (рис. 1.4). Остальные “антенны” являются фрактальными объектами (например две раздваивающиеся “антенны” в верхней и нижней части множества Мандельброта) и, по мере рассмотрения более глубоких уровней  $\partial M$ , приобретают все более сложный, разветвляющийся и закручивающийся в спирали вид (необходимо отметить, что граница  $\partial M$  не является самоподобным фрактальным объектом). На концах и в точках разветвления каждой “антенны” располагаются так называемые точки Мизюревича  $\lambda_M$  – точки, в которых реализуется предпериодическая динамика экстремума отображения, то есть существует цикл  $f_{\lambda_M}^n(z_0 = 0) = f_{\lambda_M}^{n+k}(z_0 = 0)$ ,  $n \geq 1$ ,  $k \geq 1$ , при этом сам экстремум  $z_0 = 0$  элементом этого цикла не является. Известно, что точки Мизюревича всюду плотны в  $\partial M$ , реализующийся в них цикл является неустойчивым, а соответствующие им множества Жюлиа являются дендритами [1]. Точки Мизюревича обладают еще одним удивительным свойством: множество Мандельброта и множество Жюлиа асимптотически самоподобны и подобны друг другу вблизи точек  $\lambda = \lambda_M$  и  $z = \lambda_M$ , соответственно (см. рис. 1.6). Это свойство было замечено еще Б. Мандельбротом, а далее было подробно исследовано и математически строго обосновано Тан Лей в работе [56]. Согласно этой работе, множество  $M$  и  $J$  обладают скейлинговыми свойствами с комплексной константой равной мультипликатору реализующегося цикла  $\mu(\lambda_M) = (f_{\lambda_M}^k)'(z_n)$ ,

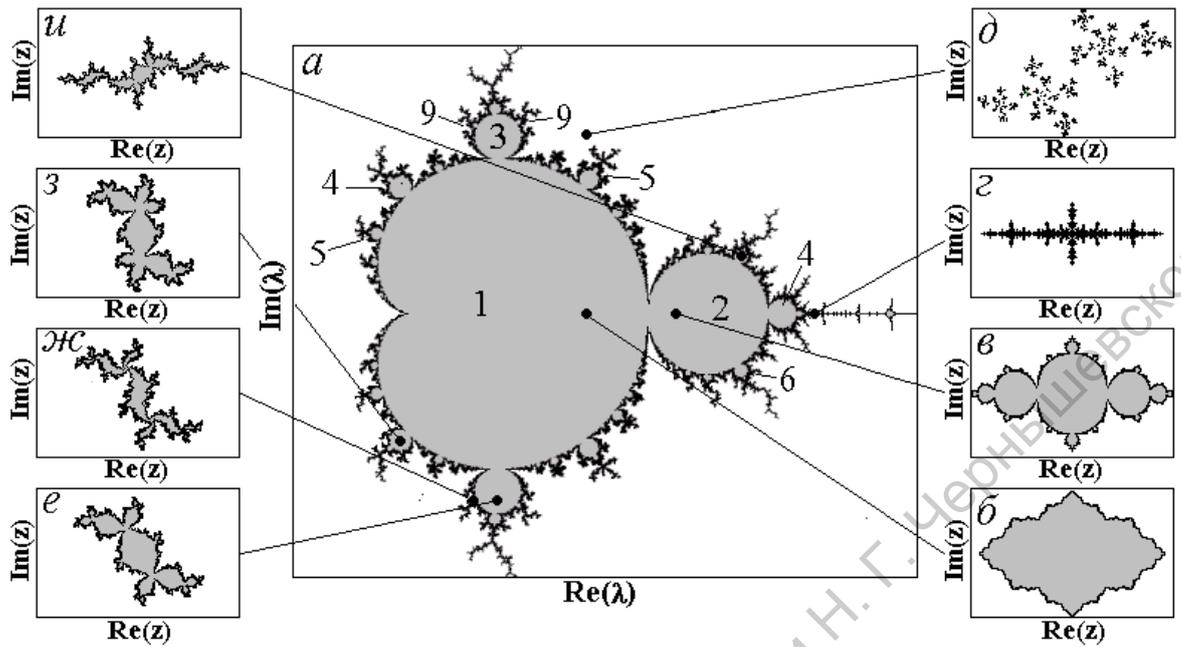


Рис.1.5. Множество Мандельброта (*a*) и множества Жюлиа для квадратичного комплексного отображения при различных значениях параметра:  $\lambda = 0.5$  (*б*),  $\lambda = 0.8$  (*в*),  $\lambda = 1.42$  (*г*),  $\lambda = 0.5 + 0.7i$  (*д*),  $\lambda = 0.123 - 0.745i$  (*е*),  $\lambda = 0.0315 - 0.7908i$  (*ж*),  $\lambda = -0.282 - 0.530i$  (*з*),  $\lambda = 1.16 + 0.25i$  (*у*).

Используются аналогичные рис. 1.4 цветовые обозначения.

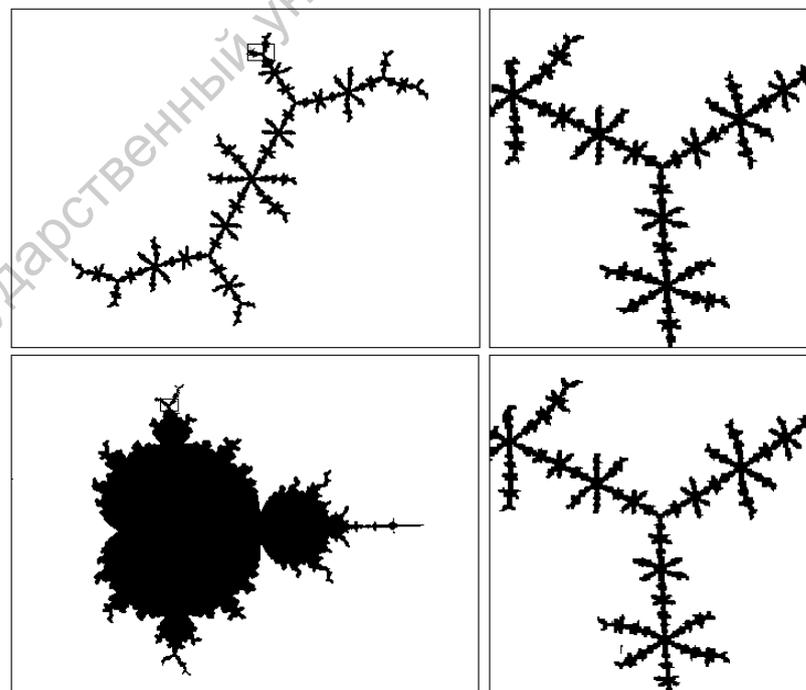


Рис. 1.6. Подобие множеств Мандельброта и множества Жюлиа вблизи точки Мизюревича  $\lambda_M = 0.1011 + 0.9563i$ .

а фрагмент множества  $J$  вблизи  $z = \lambda_M$  будет совпадать с фрагментом множества  $M$  вблизи  $\lambda = \lambda_M$  при умножении на комплексную константу подобия  $\nu = \frac{\frac{d}{dz} f_{\lambda_M}^n(z)|_{z=\lambda_M}}{\frac{d}{d\lambda} f_{\lambda}^n(\lambda)|_{\lambda=\lambda_M} - \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda)|_{\lambda=\lambda_M}}$ , где  $\alpha(\lambda)$  – первый элемент цикла ( $\alpha(\lambda) = f_{\lambda}^k(\alpha(\lambda))$ ,  $\alpha(\lambda_M) = f_{\lambda_M}^n(\lambda_M)$ ).

Точка сборки кардиоиды “кактуса Мандельброта” являются точками касательной бифуркации соответствующей  $\mu = +1^4$ . В этой точке возможен переход к хаосу через перемежаемость ламинарных и хаотических фаз [57–59]. Вблизи этих точек имеет место скейлинг – при уменьшении расстояния до точки касательной бифуркации  $\varepsilon$  в  $\delta_{(n)}$  раз длительность ламинарной фазы  $t$  увеличивается в  $n$  раз, причем  $\delta_{(n)} = n^2$  [59]. Более того, для отображения (1.5) вблизи точек сборки  $\sqrt{\varepsilon}t = \pi$  [1]. Аналогичное поведение было обнаружено также и вблизи точек возникновения лепестков. Например вблизи точки возникновения лепестка периода 2 при увеличении расстояния  $\varepsilon$  в направлении, перпендикулярном действительной оси выполняется соотношение  $\varepsilon t = \pi$  [1]. Таким образом переход к хаосу через перемежаемость для комплексных аналитических отображений возможен не только на действительной оси.

В 1991 году ученым Боллом было обнаружено удивительное свойство множества Мандельброта. Им был произведен численный эксперимент, в ходе которого он предпринял попытку доказать, что толщина перешейка между основной кардиоидой и диском периода 2 равна нулю. Для этого он вычислял эту толщину для различного количества итераций: брал значение параметра в комплексном квадратичном отображении равным  $3/4 + i\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$  и т.д. и измерял число итераций, необходимых для убегания на бесконечность. Оказалось, что эти количества итераций удивительным образом пропорциональны числу  $\pi$ .

Попытаемся определить откуда взялось число  $\pi$ ? Мы рассматриваем итерации отображения

$$z_{n+1} = z_n^2 + 1/4 + \varepsilon, \quad z_0 = 0. \quad (1.18)$$

Будем интерпретировать последовательность значений  $x$  как последовательность шагов Эйлера для соответствующего дифференциального уравнения

$$z'(t) = f_{\varepsilon}(z(t)). \quad (1.19)$$

Тогда последовательность итераций может быть записана в форме

$$z_{n+1} = x_n + hf_{\varepsilon}(z_n) \quad (1.20)$$

Если взять шаг  $h = 1$ , то

$$f_{\varepsilon}(z_n) = z_{n+1} - z_n = z_n^2 + 1/4 + \varepsilon - z_n. \quad (1.21)$$

<sup>4</sup>Заметим, что подобные точки сборки имеют место для каждой из бесконечного количества малых копий множества Мандельброта, располагающихся как на действительной оси, так и вне ее. Все приведенные ниже результаты справедливы и для малых копий  $M$ .

Возвращаясь к дифференциальным уравнениям имеем

$$z'(t) = z^2(t) = z(t) + 1/4 + \varepsilon. \quad (1.22)$$

Взяв начальные условия  $x(0) = 0$ , найдем время  $t$  за которое траектория  $x$  достигнет 1. Для этого проинтегрируем

$$\int_0^t \frac{z'(s)}{z'(s)^2 - z(s) + 1/4 + \varepsilon} ds = - \int_0^t ds \quad (1.23)$$

или

$$\int_0^{z(t)} \frac{dz}{z^2 - z + 1/4 + \varepsilon} = t. \quad (1.24)$$

Проинтегрировав, получим

$$t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg}\left(\frac{z(t)}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right). \quad (1.25)$$

При  $z(t) = 1$   $t\sqrt{\varepsilon} = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon}t = \pi$ .

#### 1.4 Классификация множеств Жюлиа. Диски Зигеля, кольца Эрмана, цветок Ло-Фату

Как уже говорилось, множество Жюлиа является границей бассейна притяжения устойчивой неподвижной точки (цикла)<sup>5</sup>. Вследствии этого, множества Жюлиа можно классифицировать в соответствии с типами этих точек. Как известно, неподвижная точка может быть неустойчивой, устойчивой, сверхустойчивой или нейтральной в зависимости от значения мультипликатора:  $|\mu| > 1$ ,  $|\mu| < 1$ ,  $\mu = 0$  и  $\mu = e^{2\pi i \varphi}$  соответственно. Для устойчивой и сверхустойчивых (гиперболических) точек множество Жюлиа является наполненным и связным. Случай нейтральных точек заслуживает более подробного описания. Если число вращения  $\varphi$  рациональное, то есть  $\varphi = m/n$ , то на плоскости параметров это соответствует точке рождения лепестка периода  $n$ , а на фазовой плоскости, вблизи (параболической) неподвижной точки множество Жюлиа образует структуру, изображенную на рис. 1.7 (б) и называемую иногда цветком Ло-Фату (более точное определение см. [23, 24]). Компоненты множества Фату (их  $n$  штук) образуют лепестки “цветка”, внутри которых траектории отображения асимптотически сходятся к неподвижной точке (для достижения неподвижной точки требуется бесконечное количество итераций). Эти лепестки называются областями непосредственного притяжения, а их совокупность - параболическим бассейном. Лепестки разделены между собой отталкивающими

<sup>5</sup>Далее будем говорить о неподвижных точках подразумевая, что все результаты могут быть перенесены и на случай циклов.

направлениями (их также  $n$  штук). Таким образом, в окрестности параболической неподвижной точки имеются чередующиеся притягивающие и отталкивающие направления, причем сама параболическая неподвижная точка принадлежит множеству Жюлиа. Можно провести сравнение с гиперболическими случаями. Например, на рисунках 1.7 (а) и (б) видно, что в окрестности гиперболических аттракторов, расположенных внутри своих бассейнов притяжения, имеют место лишь притягивающие траектории.

Рассмотрим теперь случай, когда число вращения  $\varphi$  для нейтральной неподвижной точки  $z^*$  полиномиального отображения  $z_{n+1} = f(z_n)$  — иррациональное. Можно поставить вопрос о существовании локальной замены координат  $z = h(w)$ , сопрягающей  $f$  с иррациональным вращением  $w \rightarrow \mu w$  так, что

$$f(h(w)) = h(\mu w) \quad (1.26)$$

вблизи  $z^*$  [2, 23, 24]. Это уравнение, называемое уравнением Шредера, означает, что каждая итерация  $f$  эквивалентна повороту на угол  $2\pi\varphi$  в некоторой области вблизи  $z^*$ . Действительно, такая замена в определенных случаях оказывается возможной (подробнее см. далее). Таким образом, вблизи иррациональной нейтральной точки существует область (диск Зигеля) заполненная бесконечным количеством инвариантных кривых (рис. 1.8) — точка, попавшая на одну из этих кривых, будет вращаться по ней бесконечно долго (точки, взятые внутри множества Жюлиа, но вне диска Зигеля, при итерировании рано или поздно попадают на инвариантные кривые). Вблизи  $z^*$  эти кривые представляют собой окружности, а по мере удаления от нее становятся все более искаженными. Нетрудно понять, что динамика на этих кривых соответствует квазипериодическому движению [51, 60]. Необходимо также заметить, что иррациональная нейтральная точка (для которой справедливо уравнение Шредера) не принадлежит множеству Жюлиа.

Граница диска Зигеля может быть построена при запуске траектории из одной из точек экстремума. Она представляет собой фрактальный объект, характеризующийся скейлинговыми свойствами [60–62]. Уидомом в работе [60] был развит ренормгрупповой анализ (см. также [63–65]).

На рис. 1.8 представлено множество Фату для отображения (1.5) при значении параметра  $\lambda$ , соответствующем существованию иррациональной нейтральной неподвижной точки с числом вращения, равным “золотому сечению”  $\varphi = (1 - \sqrt{5})/2$ . На рисунке указаны инвариантные кривые и граница диска Зигеля. Динамика и свойства дисков Зигеля для других полиномиальных отображений описаны в работах [66, 67].

В случае рациональных отображений могут также реализовываться так называемые кольца Эрмана [23]. В этом случае область заполненная инвариантными кривыми представляет собой кольцо с фрактальными границами окружающее область притяжения сверхпритягивающей точки. На

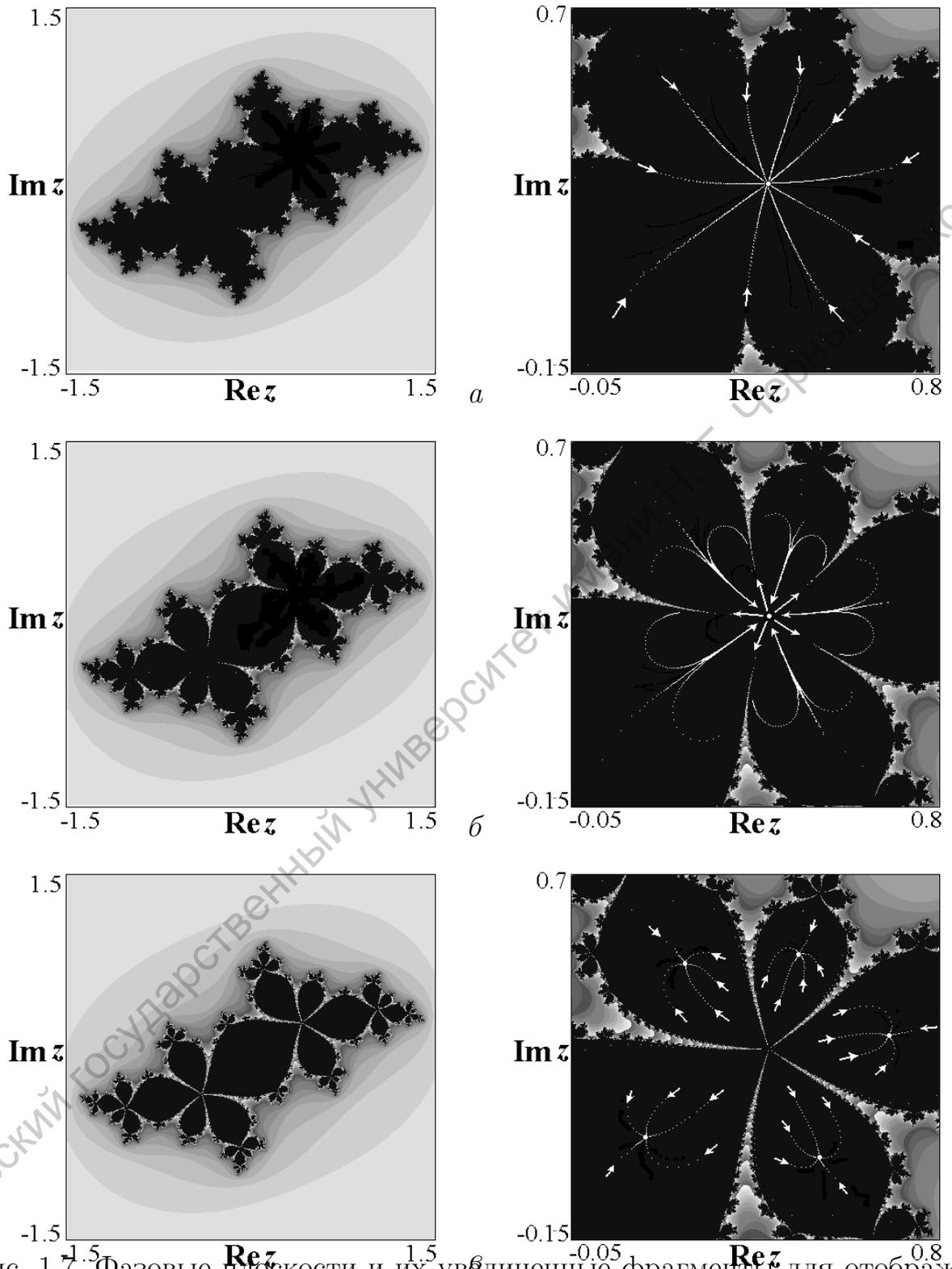


Рис. 1.7. Фазовые плоскости и их увеличенные фрагменты для отображения (1.5) при значениях параметра, соответствующих следующим значениям мультипликатора неподвижной точки:  $0.99e^{2\pi i(2/5)}$  (а),  $1.0e^{2\pi i(2/5)}$  (б),  $1.01e^{2\pi i(2/5)}$  (в). Кружками указаны неподвижные точки (циклы), а стрелками – направления траекторий.

рис. 1.9 продемонстрировано кольцо Эрмана на фазовой плоскости кубического рационального отображения  $z_{n+1} = e^{2\pi i(\sqrt{5}-1)/2} \frac{z_n^2(z_n-4)}{1-4z_n}$ . Оттенками серого обозначены бассейны притяжения бесконечности, однородным серым цветом – область сверхпритяжения, черным – все остальные точки. Границы кольца определяются траекториями экстремумов отображения. Доказано, что кольца Эрмана могут присутствовать только в рациональных отображениях, степень которых  $\geq 3$  и не могут реализовываться в полиномиальных отображениях [23].

Вернемся к дискам Зигеля и уравнению линеаризации Шредера. Известно, что это уравнение выполняется не для всех иррациональных чисел вращения [1, 2, 23, 24]. В зависимости от того выполняется или нет уравнение (1.26), иррациональная неподвижная точка называется точкой Зигеля или точкой Кремера<sup>6</sup>. Кремером было доказано, что для каждого  $\mu = e^{2\pi i\varphi}$  и данного  $d \geq 2$ , если величина  $1/|\mu^q - 1|^{1/d^q}$  неограничена при  $q \rightarrow \infty$ , то ни одна рациональная функция степени  $d$  не может быть локально линеаризована вблизи неподвижной точки с мультипликатором  $\mu$ . Обратное утверждение не верно. Однако, согласно теореме Зигеля, отображение будет линеаризуемым, если величина  $1/|\mu^q - 1|$  меньше некоторой полиномиальной функции аргумента  $q$ . Можно показать, что это условие эквивалентно тому, что число вращения должно быть диофантовым числом любого порядка  $\varphi \in \mathcal{D}(k)$ , Иррациональное число  $\varphi$  называется диофантовым числом порядка  $k$  ( $k$  – положительное, вещественное), если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $|\varphi - p/q| > \varepsilon/q^k$  для любого рационального  $p/q$ . Диофантовы числа порядка  $k$  являются корнями полиномиального уравнения степени  $k$  с целыми коэффициентами (теорема Лиувилля). Числа  $\mathcal{D}(2)$  называются числами ограниченного типа. К ним относятся квадратичные иррациональности (например “золотое сечение”). Неддиофантовые иррациональные числа называются числами Лиувилля. Структуру, образующуюся на фазовой плоскости в литературе иногда называют “монстрами Диувилля”.

Более сильный вариант теоремы Зигеля был доказан Брюно [69]: Если

$$\sum_n \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} < \infty, \quad (1.27)$$

где  $q_n$  – знаменатели подходящих цепных дробей  $p_n/q_n$  для числа вращения  $\varphi$ , то любое аналитическое комплексное отображение будет линеаризуемо в точке с мультипликатором  $\mu = e^{2\pi i\varphi}$ . Обратный результат (для квадратичного отображения) был доказан Йоккозом: Если сумма (1.27) расходится, то квадратичное отображение имеет локально нелинеаризуемую неподвижную точку, в окрестности которой присутствует бесконечно много периодических траекторий (малых циклов). Интуитивно, эти результаты можно объяснить следующим образом: При возрастании величины

<sup>6</sup>Точки Зигеля иногда называют “центрами”, а вопрос об их существовании – “проблемой центра”.

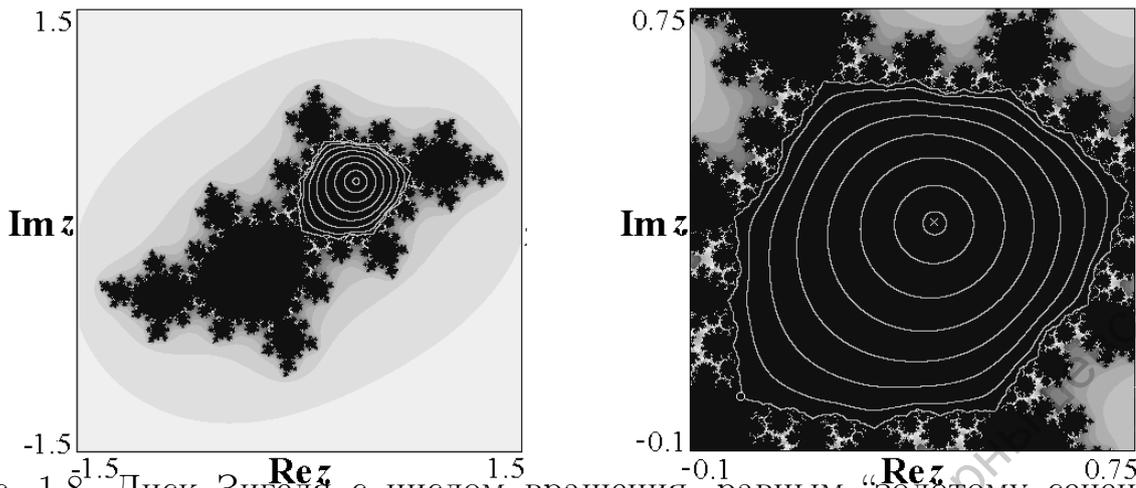


Рис. 1.8. Диск Зигеля с числом вращения, равным “золотому сечению”  $\varphi = (1 - \sqrt{5})/2$ . Крестиком обозначена неподвижная точка, а кружком экстремум отображения.

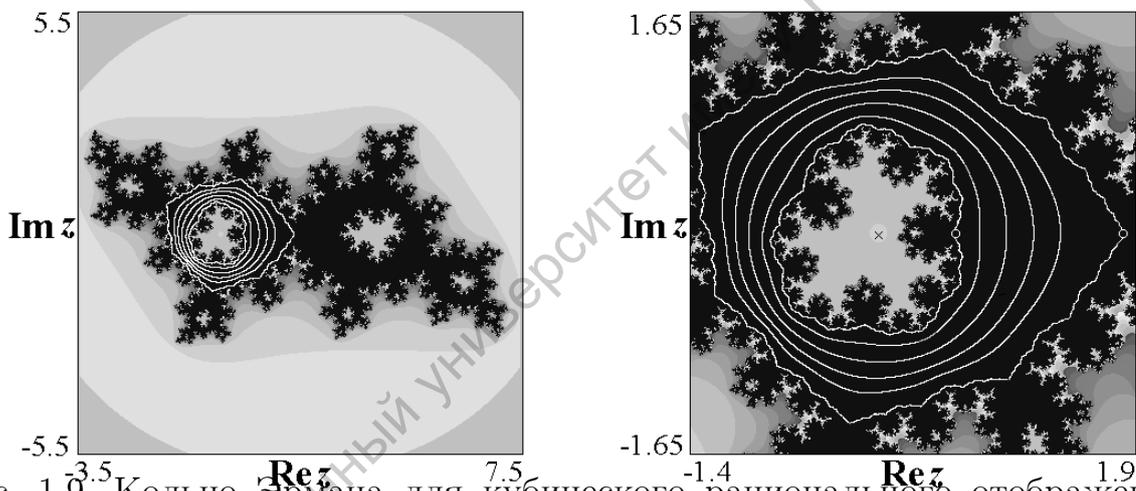


Рис. 1.9. Кольцо Эрмана для кубического рационального отображения. Кружками обозначены два экстремума, крестиком – сверхустойчивая неподвижная точка.

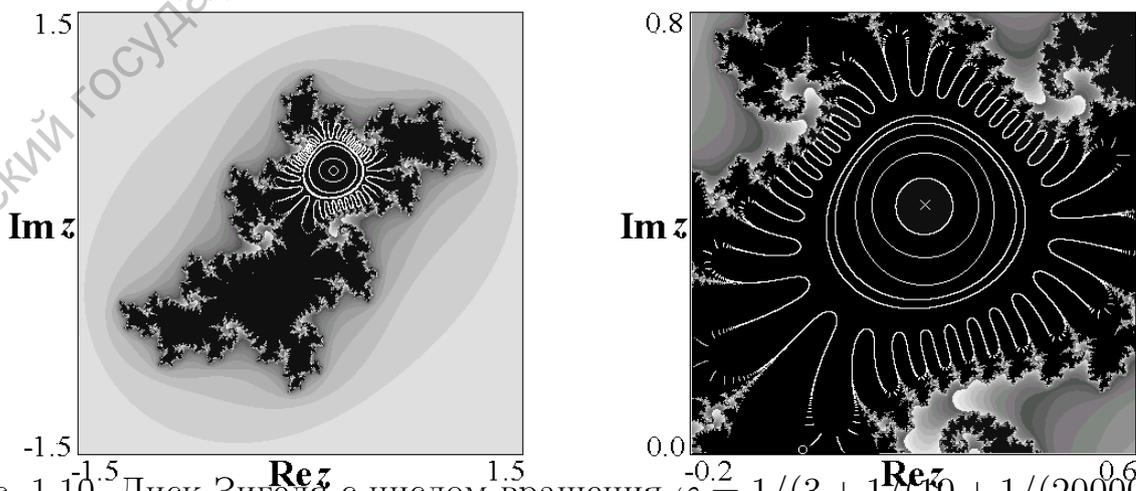


Рис. 1.10. Диск Зигеля с числом вращения  $\varphi = 1/(3 + 1/(10 + 1/(200000 + 1/...)))$  приближающимся к числам, удовлетворяющим условию Йоккоза.

$\ln(q_{n+1})/q_n$ , число вращения приближается к рациональному  $p_n/q_n$ , а множество Жюлиа будет все более походить на параболический случай с глубокими фьордами вдоль неустойчивых направлений вблизи неподвижной точки, которые будут все больше сжимать возможный диск Зигеля (см. рис. 1.10). Если сумма (1.27) бесконечная, то диск Зигеля вообще не существует. В работе [70] приведены численные оценки наименьшего радиуса дисков Зигеля в зависимости от числа вращения и от вида полиномиального отображения. Показано, что максимальное значение наименьшего радиуса для квадратичных отображений соответствует числу вращения, равному “золотому сечению”, тогда как для полиномов более высокой степени, максимальное значение радиуса может наблюдаться и при других числах вращения. Показано, также, что зависимость наименьшего радиуса от числа вращения для квадратичного отображения является фрактальной.

## 1.5 Основные свойства и методы построения множеств Жюлиа

Существует множество алгоритмов построения множества Жюлиа  $J$ . Все они основаны на нескольких его фундаментальных свойствах.

Как уже говорилось, у отображения (1.5) имеются два бассейна притяжения – устойчивой неподвижной точки или цикла и бесконечности, граница между которыми представляет собой множество Жюлиа. Заметим, что поиск прообразов любой точки, лежащей в области притяжения аттрактора, в результате обратного итерирования приведет, в пределе, к границе этой области. Таким образом, рассматривая обратные итерации отображения (1.5)  $z_n^{1,2} = \pm \sqrt{\lambda - z_{n+1}^2}$  в пределе  $n \rightarrow \infty$  получим  $J$ . На рисунке 1.11 представлен процесс конденсации облака начальных точек  $z_0$  (рис. а) на фрактальное множество Жюлиа при обратных итерациях, который представляет собой динамику ансамбля систем с различными начальными условиями. Видно, что уже при  $n = 20$  получается довольно точное приближение  $J$ , причем результат не зависит от выбора облака начальных значений. Серым цветом на рисунках изображено облако конденсирующихся точек. Цифрами в виде последовательностей 1 и 2 обозначены части облака, получающиеся в результате соответствующего выбора корней. По мере увеличения  $n$  таких чередующихся (перемещающихся) областей становится все больше и они все ближе прижимаются к множеству Жюлиа. Можно утверждать, что на множестве Жюлиа динамика является хаотической. В книге [71] обсуждается проблема эргодичности множества Жюлиа.

Само множество Жюлиа обладает свойством инвариантности как по отношению к прямому итерированию, так и при обратном итерировании (то есть точки множества Жюлиа при итерировании переходят вновь в точки множества Жюлиа). Таким образом стартовать при обратном ите-

рировании целесообразней непосредственно из точки, принадлежащей  $J$ , например, из неустойчивой неподвижной точки  $z_{1,2}^* = (-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda})/2$ ,  $f'(z^*) = |-2z^*| > 1$ . Корни 1 или 2 можно выбирать случайным образом.

Множество  $J$  содержит множество всех неустойчивых циклов. По мере увеличения периода циклов элементы получаемого множества точек приближаются друг к другу (рис. 1.12). При  $n \rightarrow \infty$  пространственное распределение этих элементов должно совпадать с множеством Жюлиа. Нахождение циклов периода  $n$  связано с построением всевозможных периодических последовательностей  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ , где  $\varepsilon_i$  принимает значения 1 или 2, что соответствует выбору первого или второго корня на  $i$ -той обратной итерации. В результате такого итерирования последовательность значений динамической переменной сходится к циклу определенного периода не превышающего период последовательности  $\varepsilon_i$ . На рис. 1.12 показаны точки множества  $J$  отвечающие неустойчивым циклам различных периодов. Видно, что с ростом периода рассматриваемых циклов получается все более полная картина множества  $J$ .

Наиболее эффективно представленные методы работают в случаях когда полученное множество точек равномерно распределено по  $J$ . Встречаются, однако, ситуации (например в параболическом случае), когда на  $J$  есть часто посещаемые окрестности (острия), а есть окрестности (глубокие фьорды), посещаемые крайне редко. В этом случае представленные методы не годятся. Более надежный метод сканирования границы, дающий удовлетворительные результаты для любых наполненных множеств Жюлиа, исходит из того, что множество Жюлиа является границей бассейнов притяжения. Выбирается квадратная решетка, покрывающая некоторую область комплексной плоскости, в которой необходимо получить множество  $J$ . Предположим, что некоторая ячейка пересекается с множеством Жюлиа, тогда она должна содержать точки как из бассейна притяжения аттрактора, так и из бассейна бесконечности. Если не все узлы ячейки принадлежат одному и тому же бассейну, то можно считать, что центральная точка ячейки принадлежит  $J$ . Очевидно, что точность изображения в этом случае сильно зависит не только от количества итераций, но и от разрешения сетки.

Можно также использовать модифицированный метод обратного итерирования. Необходимо на расчетную область сетку с ячейками малаго размера. Затем для каждой ячейки из этой решетки следует прекратить использование из нее точек для обратного итерирования, если определенное количество точек уже использовано. Этот метод требует сложных интерактивных и адаптивных алгоритмов подстройки оптимальных значений размера ячеек и максимального количества используемых из ячейки точек.

Перечислим основные свойства множеств Жюлиа [1, 2, 23, 24] (некоторые

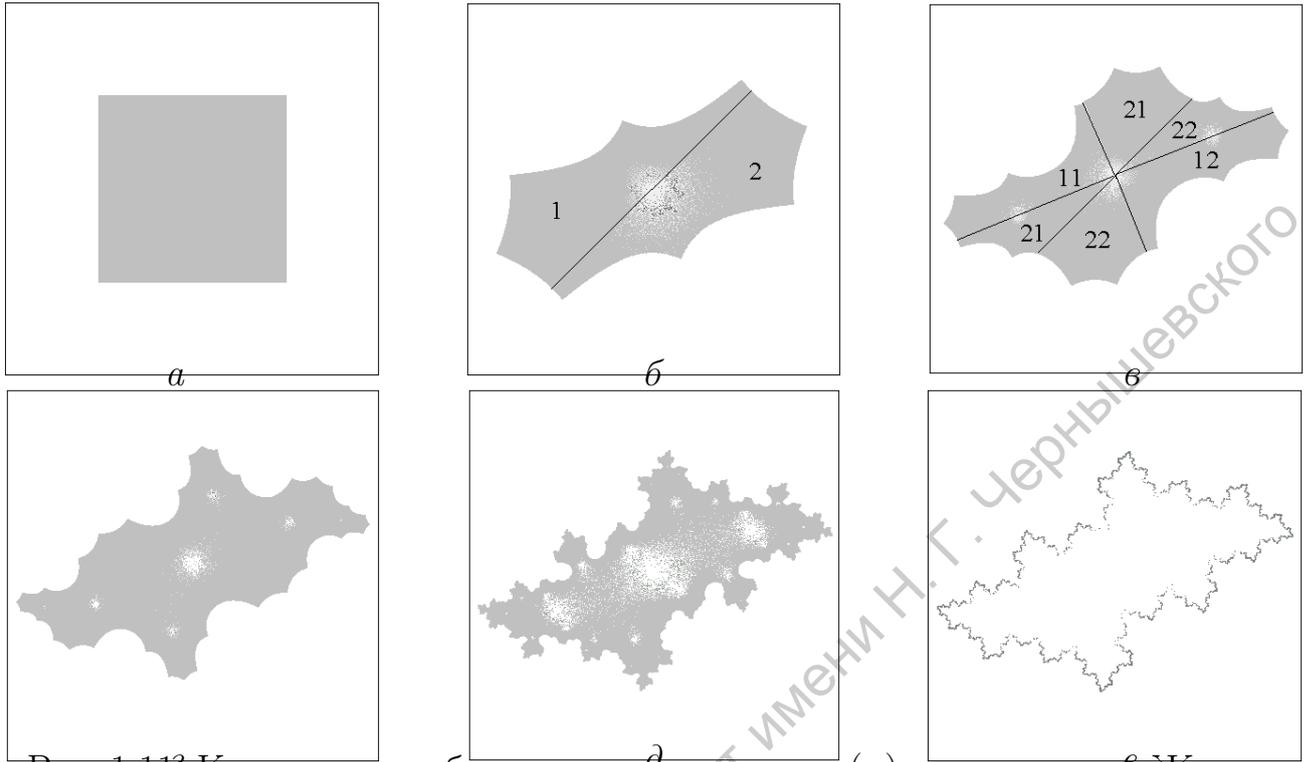


Рис. 1.11. Конденсация облака начальных точек (а) на множества Жюлиа отображения (1.5) для  $\lambda = 0.5 + 0.5i$  при 1 (б), 2 (в), 3 (г), 7 (д) и 20 (е) обратных итерациях.

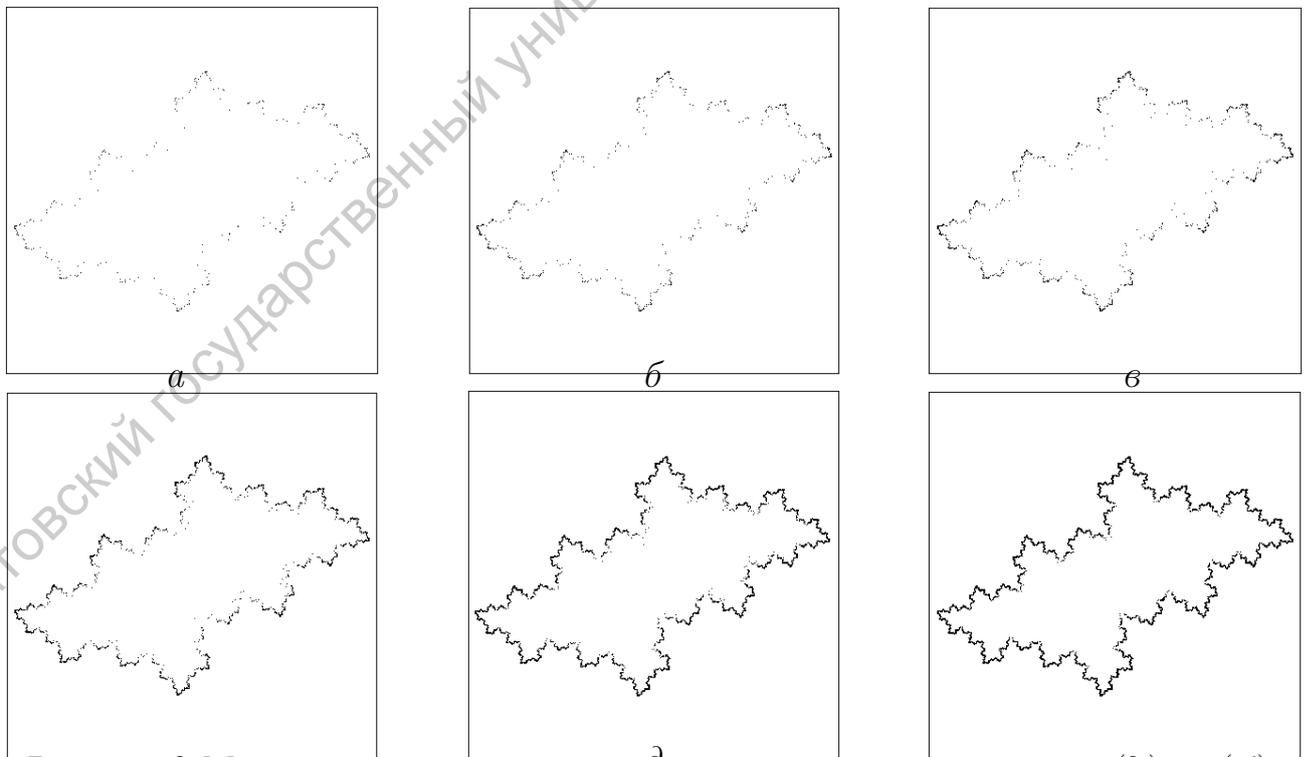


Рис. 1.12. Множества всех неустойчивых циклов периода  $n = 8$  (а), 9 (б), 10 (в), 12 (г), 15 (д), 20 (е) для отображения (1.5) при  $\lambda = 0.5 + 0.5i$ .

из них уже упоминались), а так же некоторые другие результаты:

- Множество всех неустойчивых циклов любого аналитического рационального отображения плотно в  $J$ ;
- Множество  $J \neq \emptyset$  и содержит более чем счетное количество точек;
- Множества Жюлиа отображений  $f$  и  $f^k$  идентичны;
- $f(J_f) = J_f = f^{-1}(J_f)$ ;
- Для некоторого значения  $z^* \in J$  обратная траектория  $O^-(z^*) = \{z \in \mathbb{C} \mid f^k(z) = z^*, k \rightarrow \infty\}$  плотна в  $J$ ;
- Если у отображения существует устойчивый цикл, то бассейн притяжения этого цикла содержится во множестве Фату, а его граница совпадает с  $J$ ;
- Если множество Жюлиа имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то оно представляет собой всю комплексную плоскость (примером может служить отображение  $z' \rightarrow ((z - 1)/z)^2$ );
- Если  $z^* \in J$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $J^* = \{z \in J \mid |z - z^*| < \varepsilon\}$ , то существует такое целое число  $n$ , что  $f^n(J^*) = J$ . Иными словами, множество Жюлиа может быть целиком воспроизведено по любой сколь угодно малой своей части.

Если  $f_n$  и  $f$  – непрерывные функции, причем  $f_n$  сходятся к  $f$  в некоторой области комплексной плоскости, то множества Жюлиа  $J(f_n)$  будут сходить к множеству  $J(f)$  [72] (некоторые обобщения классических результатов для случая дисков Зигеля приведены в работе [68]). Имеются однако некоторые исключения. Например в работе [73] приведены примеры аппроксимации полинома  $f$  трансцендентными функциями и полиномиальными функциями различных степеней, когда это утверждение не выполняется.

Множества Жюлиа для различных аналитических отображений могут выглядеть по-разному. В работе [74] утверждается, что для большого количества самоподобных фракталов существуют рациональные отображения, множества Жюлиа которых гомеоморфны этим фракталам. Например множество Жюлиа отображения  $z' \rightarrow (z^3 - \frac{16}{27})/z$  топологически эквивалентно “салфетке Серпинского”.

## 1.6 Потенциал множества Жюлиа и множества Мандельброта

Одним из замечательных свойств фрактальных объектов, связанных с комплексной аналитической динамикой, является возможность вычис-

ления их потенциала<sup>7</sup>. Будем считать, что множество Жюлиа является границей заряженного проводника, и попытаемся вычислить потенциал электростатического поля, создаваемого этим проводником. Объект будем полагать однородным в продольном направлении, что позволяет ограничиться решением двумерной задачи<sup>8</sup>. Начнем с потенциала для множества Жюлиа отображения (1.5) в случае  $\lambda = 0$ , соответствующего бесконечно-проводнику круглого сечения. Потенциал в данном случае, очевидно, описывается логарифмической функцией

$$U_0(z) = \log |z|, \quad (1.28)$$

а эквипотенциали являются концентрическими окружностями. Эта формула не учитывает коэффициент пропорциональности, зависящий от плотности заряда на проводнике. Однако это можно сделать, изменив основание логарифма. Рассмотрим эквипотенциали с потенциалами  $\log |z| = 2^k \log 2$  или  $\log_2 |z| = 2^k$ . Тогда при переходе от одной эквипотенциали к другой потенциал удваивается, а каждая эквипотенциаль ограничивает область

$$P_0^k = \{z | \log_2 |z| \leq 2^k\}. \quad (1.29)$$

Хаббардом и Дуади в работе [26] (см. также [1, 2]) был осуществлен переход от потенциала  $U_0$  к потенциалу  $U_\lambda$  исходя из тех соображений, что область, ограниченная множеством Жюлиа конформно отображается на круг. Этот переход возможен благодаря теореме Римана, которая позволяет установить взаимно однозначное соответствие между эквипотенциалими, а также и силовыми линиями диска и связного фрактального множества. Согласно теореме Римана, если функции  $f_1$  и  $f_2$  конформно отображают связные области  $D_1$  и  $D_2$  на круг  $E$  (см. рис. 1.13), то функция  $f = f_2^{-1} \circ f_1$  будет отображать  $D_1$  на  $D_2$  [21, 22].

Рассмотрим следующее множество точек

$$Q_\lambda^{(-n)} = \{z_0 | |z_n| \leq r\}, \quad z_n = f_\lambda^n(z_0), \quad (1.30)$$

которое при  $n \rightarrow \infty$  определяет область, ограниченную множеством Жюлиа, а при  $n = 0$  – это круг радиуса  $r$ , то есть

$$Q_\lambda^{(-n)} = \{z_0 | z_n \in E\}, \quad E = \{z | |z| \leq r\}. \quad (1.31)$$

Обозначим

$$Q_\lambda^{(n)}(D) = \{z_n | z_0 \in D\}. \quad (1.32)$$

<sup>7</sup>Результаты по расчету потенциала для некоторых других фрактальных множеств представлены в работах [75–77].

<sup>8</sup>По эмпирическому правилу Мандельброта, в котором утверждается, что если множество  $S$  является произведением двух независимых фрактальных множеств  $S_1$  и  $S_2$ , то размерность  $S$  будет равна сумме размерностей  $S_1$  и  $S_2$ , фрактальная размерность такого объекта будет равна  $D_J + 1$ , где  $D_J$  – размерность множества Жюлиа

$Q_\lambda^{(n)}$  можно понимать как полученный в результате  $n$  итераций образ (если  $n$  положительное) или праобраз (если  $n$  отрицательное) некоторого множества  $D$ . Тогда, множество точек, ограниченное  $k$ -той эквипотенциальной линией фрактального множества Жюлиа будет определяться как  $P_\lambda^k = Q_\lambda^{(-n)}(Q_0^{(n)}(P_0^k))$ . При этом  $n \rightarrow \infty$ , поскольку при  $\lambda \neq 0$  окружностью можно считать лишь эквипотенциаль бесконечно удаленную от фрактального множества. Таким образом

$$P_\lambda^k = \{z_0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 |z_n|^{1/2^n} \leq 2^k\}. \quad (1.33)$$

Можно показать, что для потенциала  $U_\lambda$  справедлива следующая формула

$$U_\lambda(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \ln |f_\lambda^n(z)|. \quad (1.34)$$

Воспользовавшись теперь равенством  $f_\lambda^n(z) = \lambda - (f_\lambda^{n-1}(z))^2$ , получим

$$U_\lambda(z) = \ln |z| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \left| \frac{\lambda}{(f_\lambda^{n-1}(z))^2} - 1 \right|, \quad (1.35)$$

где  $f_\lambda^{n-1}(z)$  – точка, в которую переходит точка  $z$  в результате  $n - 1$ -кратного применения к ней квадратичного итерационного отображения. Этот ряд будет быстро сходиться, и для численного расчета достаточно рассмотреть небольшое число его членов (к примеру для расчета потенциала с точностью до  $10^{-8}$  требуется порядка 10 членов ряда).

На рис. 1.14 представлены эквипотенциальные линии множеств Жюлиа при  $\lambda = -0.5 + 0.5i$  и  $\lambda = 0$ . При переходе от одной эквипотенциали к другой потенциал увеличивается в два раза. Видно, что при удалении от фрактального объекта (рис. 1.14б), эквипотенциали приобретают форму окружностей.

Аналогичным образом может быть рассчитан и потенциал электростатического поля для множества Мандельброта

$$U(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \ln |f_\lambda^n(z)|. \quad (1.36)$$

При этом, стартовать необходимо из точки экстремума  $z = 0$ .

## 1.7 Хаусдорфова размерность фрактальных объектов, возникающих в комплексной аналитической динамике

Известно, что самоподобные фрактальные объекты можно охарактеризовать так называемой фрактальной размерностью

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (1.37)$$

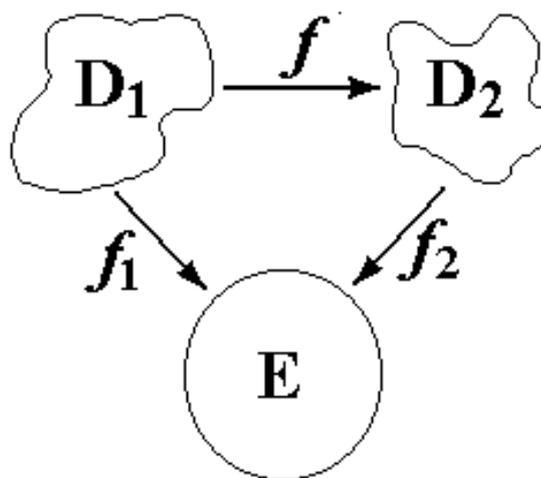


Рис. 1.13. Иллюстрация теоремы Римана о конформных отображениях связных областей на круг.

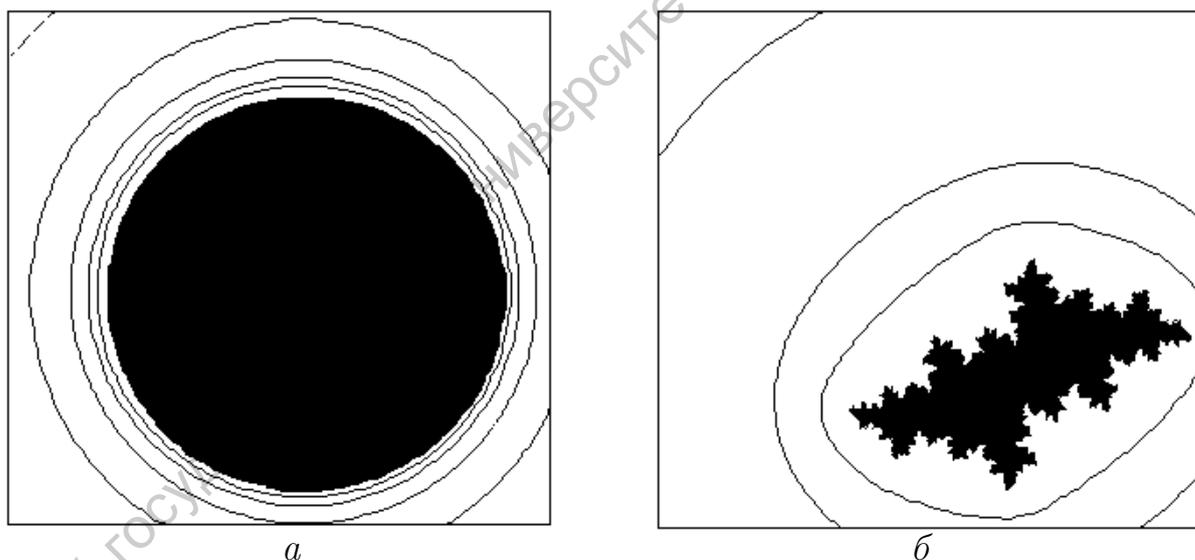


Рис. 1.14. Эквипотенциали множеств Жюлиа на комплексной плоскости  $z$  отображения (1.5) для  $\lambda = 0.0$  (*a*) и  $\lambda = 0.5 - 0.5i$  (*б*). Эквипотенциали гладкого множества Жюлиа (рис. *a*) представляют собой окружности. Эквипотенциали на рисунке *б* становятся все более неоднородными кривыми при приближении к фрактальному множеству Жюлиа, а на бесконечном удалении от него также представляют собой окружности. При переходе от одной эквипотенциали к другой потенциал удваивается. непосредственно на множестве Жюлиа потенциал равен нулю.

где  $\varepsilon$  – характерный размер одинаковых неперекрывающихся элементов, полностью покрывающих множество,  $N(\varepsilon)$  – количество этих элементов. Еще одной характеристикой фрактальных объектов является размерность Хаусдорфа  $D_H$ . Строгое определение размерности  $D_H$  выглядит следующим образом [1, 2, 58, 78]: пусть  $X$  – подмножество некоторого  $n$ -мерного евклидова пространства и  $d$  – положительное число. Рассмотрим покрытие этого множества элементами  $S_i$  произвольной формы и размера. Определим  $d$ -мерную внешнюю меру множества  $X$

$$\gamma_d(X) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum \varepsilon_i^d, \quad (1.38)$$

где нижняя грань берется по всем возможным конечным покрытиям множества  $X$  множествами  $S_i$  с диаметром  $\varepsilon_i$ , меньшим  $\varepsilon > 0$ . Величина  $\gamma_d(X)$  в зависимости от  $d$  может быть конечной или бесконечной. Существует единственное значение  $d$  равное размерности Хаусдорфа, при котором внешняя  $d$ -мера конечна. Это приводит к определению

$$D_H(X) = \sup [d \in R^+ : \gamma_d(X) = \infty]. \quad (1.39)$$

Для большого числа фрактальных множеств размерности  $D_0$  и  $D_H$  совпадают, но в общем случае  $D_H \leq D_0$ .

Большой интерес представляет расчет фрактальных размерностей объектов КАД. Первые результаты в этом направлении были получены в работах [49, 79, 80]. В этих работах разработана методика расчета хаусдорфовой размерности объектов КАД. О фрактальной размерности  $D_0$  множеств Жюлиа и Мандельброта практически ничего не известно.

Шишикура [79] доказал, что размерность Хаусдорфа границы множества Мандельброта, т.е. множества точек плоскости параметра, для которых реализуется ограниченная хаотическая динамика, для квадратичного комплексного отображения равна двум (такое предположение было сделано ранее Мандельбротом, а также в работе [81]). Хаусдорфова размерность границы “кактуса Мандельброта”  $D_H = 1.2393$  была получена в работе [82] при учете того, что лепестки “кактуса” представляют собой окружности, радиус которых определяется скейлинговыми константами. Результаты Шишикуры для границы множества Мандельброта были обобщены в работе [83] на случай многомерных пространств параметров полиномиальных отображений более высокого порядка. Показано, что размерность границ некоторых обобщенных множеств Мандельброта может равняться топологической размерности пространства параметров, например, для кубического полинома –  $D_H = 4$ .

Перейдем далее к обзору результатов для множеств Жюлиа. Д.Рюэлем в работе [80] была получена следующая замечательная формула для размерности Хаусдорфа множества Жюлиа описываемого квадратичным отображением: пусть  $J$  – множество Жюлиа отображения  $z' = f_c(z) = z^2 + c$ .

Тогда для  $|c| \ll 1$  справедлива формула

$$D_H(J) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \ln(2)} + O(|c|^3). \quad (1.40)$$

Приведем общие принципы получения этой формулы. Более подробное и строгое доказательство можно найти в [49, 80]. По теореме Рюэля размерность Хаусдорфа множества  $J$  может быть вычислена из условий

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(D_H(J)) = 1, \quad (1.41)$$

$$A_n(D_H(J)) = \sum_{z \in F_n} \left| \frac{df^n}{dz} \right|^{-D_H(J)} \quad (1.42)$$

где

$$F_n = \{z : f_c^n(z) = z_0, n = 0, 1, 2, \dots\} \quad (1.43)$$

множество всех неустойчивых циклов длины  $n$ .

Если  $c = 0$ , то множество Жюлиа является единичной окружностью и может быть параметризовано как  $z(t) = e^{2\pi i t}$ . Тогда

$$f_c(z(t)) = z(2t). \quad (1.44)$$

В случае когда  $c$  не равно нулю, но достаточно маленькое, то есть  $|c| \ll 1$  множество Жюлиа топологически эквивалентно окружности (является Жордановой кривой) и его можно параметризовать аналогичным образом. Следуя работе [49] запишем  $z(t)$  в виде ряда по степеням  $c$

$$z(t) = \exp(2\pi i t) \{1 + U_1(t)c + U_3(t)c^3 + \dots\}. \quad (1.45)$$

Подставляя этот ряд в формулу (1.44), получим уравнения

$$U_1(2t) - 2U_1(t) = e^{-2\pi i 2t}, \quad U_2(2t) - 2U_1(t) = U_1^2(t), \quad (1.46)$$

решениями которых являются выражения

$$U_1(t) = \phi(2t), \quad U_2(t) = \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \frac{\phi((2^{l_1+2^{l_2}})t)}{2^{l_1+2^{l_2}}}, \quad \dots \quad (1.47)$$

$$\phi(t) = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i 2^l t}}{2^{l+1}}.$$

Далее, рассчитав производные, можно получить выражение для  $A_n(D_H(J))$

$$A_n(D_H) = 2^{n(1-D_H)} \left( 1 + \frac{1}{4} n D_H^2 |c|^2 \right). \quad (1.48)$$

Условие, при котором будет существовать предел этой величины при  $n \rightarrow \infty$ , будет определять размерность Хаусдорфа и выглядеть как (1.40). В работе [84] было показано, что такой метод гарантированно приводит к удовлетворительным результатам лишь для аналитических полиномиальных

комплексных отображений. В случае неаналитических функций  $f$  размерность Хаусдорфа можно рассчитать методом возмущений, разложив в ряд по степеням  $|c|$  непосредственно производные  $df^n/dz$ . Однако для некоторых неаналитических отображений (например  $z' = f(z) = z^{*2} + c$ ), формула (1.40) будет оставаться справедливой. Как утверждает автор, это объясняется тем, что функция  $f^2(z) = f(f(z)) = (z^2 + c^*)^2 + c$  является аналитической, а множества Жюлиа  $J(f)$  и  $J(f^2)$  совпадают.

Напомним, что формула (1.40) справедлива лишь для малых по модулю значений параметра квадратичного отображения. Для хаусдорфовой размерности множества Жюлиа при других значениях параметра известны следующие результаты: В работе [79] показано, что хаусдорфова размерность ненаполненных связных множеств Жюлиа, реализующихся при значениях параметра, принадлежащих границе множества Мандельброта равна двум, а для гиперболических множеств Жюлиа, т.е. для всех значений параметра из “кактуса Мандельброта” – строго меньше 2 (этот результат обобщен на случай любых аналитических рациональных отображений [85–87]). Согласно [49], хаусдорфова размерность гиперболических множеств Жюлиа  $D_H \geq 1$  (некоторые обобщения на неаналитический случай см. в [88]). Внутри лепестков “кактуса Мандельброта” размерность  $D_H$  множеств Жюлиа является непрерывной функцией параметра (по крайней мере, для действительных значений параметра это подтверждено численно) [86, 89, 90] (см. также [91, 92]). Предположительно, в некоторых точках бифуркационных линий могут происходить разрывы  $D_H$ . Показано, однако, что в параболических точках (точках, связывающих между собой лепестки “кактуса Мандельброта”)  $D_H$  непрерывна [89], а в точках, для которых реализуются диски Зигеля  $D_H < 2$  [93]. Размерность границ дисков Зигеля, соответствующих “золотому сечению”, для некоторого семейства полиномиальных отображений, согласно [61, 62], не превышает 1.08523. В работе [90] подробно изучено поведение размерности Хаусдорфа, как функции параметра, для отображения  $z' = z^2 + c$ , вблизи точки сборки большой кардиоиды. Показано, что производная этой функции при приближении параметра к  $1/4$  стремится к бесконечности как  $D_H(1/4 + 0) \cong (1/4 - c)^{D_H(1/4) - 3/2}$ , а в точке  $1/4 - 0$  эта функция непрерывна.

Кроме описанного выше метода возмущений для расчета хаусдорфовой размерности, существует ряд других способов описания фрактальных свойств множества Жюлиа. Можно элементарно рассчитывать фрактальную размерность (1.37) методом покрытия прямоугольниками (“box-counting”) [94] Еще одной характеристикой фрактальности является скорость убегания на бесконечность [49]. Для ее определения необходимо рассмотреть динамику большого числа  $N_0$  начальных точек в некоторой области  $\Gamma$  вблизи множества Жюлиа. При итерировании, количество точек не покинувших  $\Gamma$

уменьшается по закону  $n_n \sim q^{-n}$ , где  $q$  есть параметр, характеризующий скорость убегания. Хаусдорфова размерность и скорость убегания являются независимыми друг от друга величинами. В отличие от размерности  $D_H$ , которая является чисто геометрической характеристикой [49, 95], скорость убегания отражает и динамические свойства  $J$ . Кроме того, существует основанный на аналогии с термодинамикой метод расчета фрактальных индексов [96–100].

Большинство фрактальных объектов, в том числе и возникающих в природе, не являются самоподобными (самоафинными) в строгом смысле. Их скейлинговые свойства не сводятся к простому афинному преобразованию, как например для кривой Коха. В связи с этим подобные фрактальные объекты характеризуются целым спектром скейлинговых характеристик. Это так называемые мультифракталы. К ним относятся и множества Мандельброта и Жюлиа. Для изучения таких фракталов вводятся обобщенные размерности Реньи (подробнее см. [5, 58, 59, 78]). Алгоритм для численного расчета обобщенных размерностей Реньи множества Жюлиа был предложен в работе [97]. В работах [96] предложен основанный на аналогии с термодинамикой подход для вычисления размерности Хаусдорфа и обобщенных размерностей множества Жюлиа полиномиального отображения  $z' \rightarrow z^q + \lambda \sum_{i=\delta}^q a_i z^{q-i}$ ,  $2 \leq \delta \leq q$  при малых  $\lambda$ .

## 1.8 Обобщения комплексных чисел

Как уже отмечалось ранее, комплексные числа ассоциируются с двумерными векторами [22]. Рассмотрим вопрос о возможности ввести операцию умножения таких объектов в общем виде, но так, чтобы выполнялись распределительный и переместительный законы. Тогда, должно быть справедливо соотношение

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) + i^2 y_1 y_2. \quad (1.49)$$

Умножение не должно выводить из класса плоских векторов, поэтому величина  $i^2 = i \cdot i$  тоже должна являться вектором, т.е.

$$i^2 = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.50)$$

Определенные подобным образом числа называются двух-компонентными. Нетрудно видеть, что при  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$  это обычные комплексные числа.

Далее, необходимо ввести операцию деления двух-компонентных чисел. Достаточным условием для нее является существование у вектора  $x_1 + iy_1$  обратного вектора  $x_2 + iy_2$  такого, что  $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = 1$ . Тогда получим систему уравнений относительно переменных  $x_2, y_2$

$$x_1 x_2 + \alpha y_1 y_2 = 1, \quad x_1 y_2 + x_2 y_1 + \beta y_1 y_2 = 0. \quad (1.51)$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = (x_1 + \frac{\beta}{2}x_2)^2 - (\alpha + \frac{\beta^2}{4})y_1^2. \quad (1.52)$$

Обозначим

$$\chi = \alpha + \frac{\beta^2}{4}. \quad (1.53)$$

Плоскость параметров  $\alpha, \beta$  делится параболой  $\chi = 0$  на три части определяя тем самым три системы обобщенных комплексных чисел:

- 1) В случае  $\chi < 0$  определитель  $\Delta$  обращается в нуль лишь при  $x_1 = y_1 = 0$ , то есть допустимо деление на любые вектора, кроме нулевых. Это так называемые эллиптические числа. К ним относится и система обычных комплексных чисел.
- 2) При  $\chi = 0$  определитель  $\Delta$  обращается в нуль на прямой  $x_1 + \frac{\beta}{2}y_1 = 0$ . В этой части плоскости  $\alpha, \beta$  реализуются так называемые параболические числа. Для этой системы, существуют отличные от нуля числа, произведение которых равно нулю.
- 3) При  $\chi > 0$  возможно деление на все числа кроме тех, которые располагаются на прямых  $x_1 + (\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\chi})y_1 = 0$ . Такая система чисел называется гиперболической.

Согласно [22, 101–105], выделяют три специальных случая:  $a = -1, b = 0$  – обычные комплексные числа,  $a = +1, b = 0$  – двойные числа,  $a = b = 0$  – двойственные числа. Перечисленные выше системы чисел изоморфны этим трем, а именно, эллиптические числа изоморфны комплексным, гиперболические – двойным, а параболические – двойственным. На рисунке 1.15 представлены множества Мандельброта для квадратичного отображения, переменная и параметр которого принадлежат одной из трех основных систем двухкомпонентных чисел – комплексных ( $a$ ), двойственных ( $b$ ) и двойных ( $v$ ). Из рисунков видно, что структуры множеств Мандельброта для различных систем чисел резко отличается друг от друга. Для двойных чисел множество Мандельброта представляет собой ромбовидную структуру, а для двойственных чисел – это совокупность полос. Комплексным числам соответствует классическое множество Мандельброта. Впервые множества Мандельброта для обобщенных комплексных чисел были построены в работе [101].

Как уже говорилось, обычная комплексная динамика основывается на аналитических функциях, удовлетворяющих условиям Коши-Римана (1.3) или уравнению Лапласа (1.4). Нетрудно убедиться, что обобщенные комплексные числа должны удовлетворять обобщенным условиям аналитичности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \beta \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

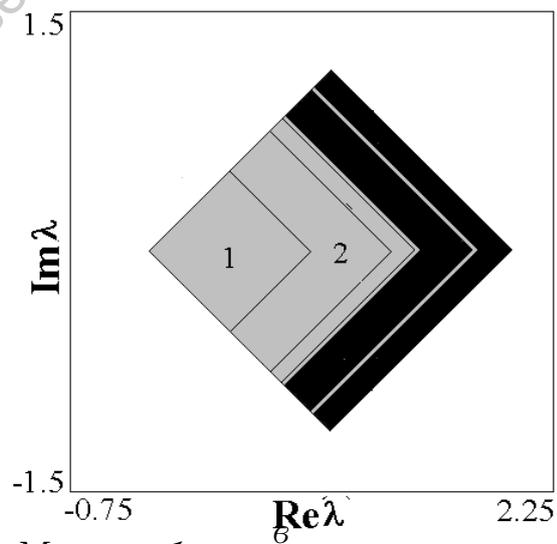
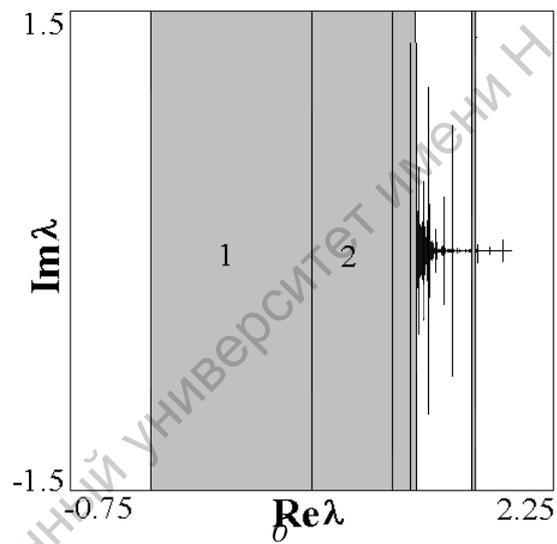
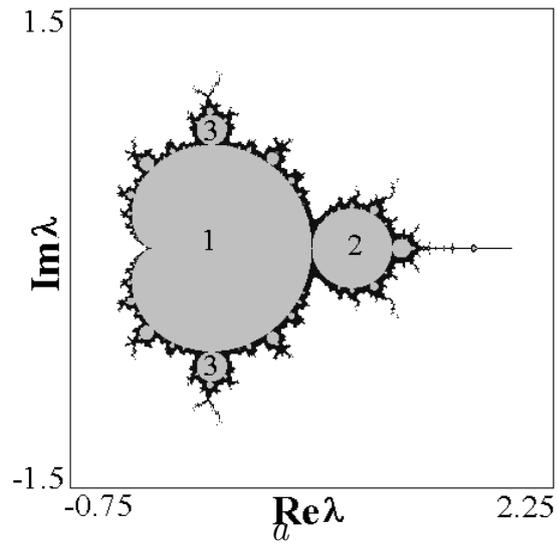


Рис. 1.15. Множества Мандельброта на плоскости комплексного параметра  $\lambda$  отображения (1.5) для комплексных ( $i^2 = -1$ ) (а), двойственных ( $i^2 = 0$ ) (б) и двойных ( $i^2 = 1$ ) (в) чисел.

В случае двойных чисел получаем волновое уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ . В связи с этим, гиперболические числа находят применение в гидродинамике и акустике [22].

Известны также многомерные обобщения комплексных чисел – это так называемые кватернионы (четырёхмерные комплексные числа) и октавы Кэли (восьмимерные комплексные числа). Однако, возможности подобных обобщений ограничены. Согласно теореме Фробениуса, эллиптические числа есть единственно возможное расширение поля действительных чисел с сохранением всех законов сложения и умножения [22]. При отказе от переместительного и сочетательного законов возникает возможность построения кватернионов и октав, соответственно. Например, кватернионы определяются следующим образом

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3, \\ i_1^2 &= i_2^2 = i_3^2, \\ i_1 i_2 &= -i_2 i_1 = i_3, \quad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1, \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2. \end{aligned} \tag{1.55}$$

В книге [1] приведены иллюстрации фрактальных множеств для кватернионов. В работах [106, 107] исследуются множества Мандельброта и Жюлиа для октав. Трёхмерное обобщение комплексных чисел, оказывается невозможным, что затрудняет решение пространственных задач.

## Раздел II

### Физические приложения комплексной аналитической динамики

#### 2.1 Возникновение множества Мандельброта при исследовании динамики движения частицы в магнитном поле

В последнее время исследователи задались вопросом о возможности наблюдения феноменов комплексной аналитической динамики в реальных системах в различных областях физики. Так, например, в работе Бека [15] обсуждается вопрос о возникновении множества Мандельброта при исследовании поведения следующей системы. Заряженная частица совершает движение на плоскости со скоростью  $\mathbf{v}(t) = (u(t), w(t))$ . Можно ввести комплексную переменную  $z(t) = u(t) + iw(t) = v(t)e^{i\phi(t)}$ . На частицу действует направленная вдоль вектора скорости нелинейная сила затухания

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2\mathbf{v}. \quad (2.1)$$

В моменты времени  $t_n$  частица подвергается импульсным воздействиям вида

$$u_n^+ = u_n^- + a, \quad w_n^+ = w_n^- + b, \quad (2.2)$$

где  $(u_n^-, w_n^-)$  и  $(u_n^+, w_n^+)$  – значения составляющих скорости до и после импульса соответственно. Причем, длительность временных интервалов  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$  зависит от модуля скорости  $v_n^+$ .

На частицу также действует направленное перпендикулярно плоскости движения частицы зависящее от времени магнитное поле  $\mathbf{B}$ , величина которого  $B_n$  остается постоянной в промежутках между импульсами, и зависит от  $\mathbf{v}_n^+$  и  $\tau_n$ .

Уравнение движения частицы между импульсами, выглядящее как

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2\mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.3)$$

можно переписать через комплексную переменную

$$\dot{z} = -(1 - iB)z + |z|^2z. \quad (2.4)$$

Пусть

$$\tau_n = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{1}{v_n^{+2}} \right), \quad (2.5)$$

$$B_n = \frac{\varphi_n^+}{\tau_n}. \quad (2.6)$$

Тогда, проинтегрировав уравнение движения (2.4) с использованием (2.5) и (2.6) можно получить

$$v_{n+1}^- = v_n^{+2}, \quad \varphi_{n+1}^- = 2\varphi_n^+, \quad (2.7)$$

что соответствует уравнению  $z_{n+1}^- = z_n^{+2}$ . С учетом импульсного воздействия можно записать

$$z_{n+1}^+ = z_n^{+2} + c, \quad c = a + ib. \quad (2.8)$$

Таким образом, получено комплексное логистическое отображение, комплексная переменная  $z$  которого соответствует вектору скорости заряженной частицы, а комплексный параметр  $c$ , на плоскости которого реализуется множество Мандельброта – амплитуде внешнего импульсного воздействия. Однако, реализация подобной системы в физическом эксперименте, в связи со сложностью ее построения, кажется довольно затруднительной.

## 2.2 Проблема сходимости метода Ньютона (задача Кэли)

Рассмотрим обобщенный на комплексный случай алгоритм Ньютона (метод касательных) для нахождения корней уравнения  $f(z) = 0$ ,  $f$  – непрерывна и дифференцируема. Согласно этому методу, если известно приближенное значение одного из корней уравнения  $z_0$ , то уточненные значения этого корня можно получить посредством итерационного отображения

$$z_{n+1} = z_n - h \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим случай, когда  $z_0$  произвольное. Это так называемая задача Кэли [1, 1, 2, 5, 6, 140]. Бассейны притяжения неподвижных точек отображения (2.9) (искомых корней) на плоскости начальных значений  $z_0$  будут определять области сходимости метода Ньютона, а множество Жюлиа отображения (2.9), являющееся границей бассейнов притяжения, будет определять имеющее нулевую меру множество точек  $z_0$ , которые не сходятся ни к одному из корней. Например, в простейшем случае квадратичного уравнения  $f(z) = z^2 - 1 = 0$ , имеющего два корня  $+1$  и  $-1$ , множество Жюлиа отображения (2.9) представляет собой мнимую ось, то есть множество равноудаленных от корней точек. Рассмотрим далее пример кубического уравнения  $z^3 - 1 = 0$ . Оно имеет три корня  $1$ ,  $e^{2\pi i/3}$  и  $e^{4\pi i/3}$ . По аналогии с квадратичным уравнением, можно ожидать, что множество Жюлиа отображения  $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}$  будет являться совокупностью трех лучей, исходящих из нуля под углами  $\pi/3$ ,  $\pi$  и  $5\pi/3$  (так называемый “пирог” Ньютона). Однако численный эксперимент демонстрирует фрактальный характер сложным образом переплетенных между собой бассейнов притяжения и их границ (см. рис. 2.1 (a)).

Объяснить подобное поведение можно свойством множеств Жюлиа аналитических отображений (доказанным еще Фату и Жюлиа). Согласно этому свойству, каждая точка исследуемого множества Жюлиа должна быть

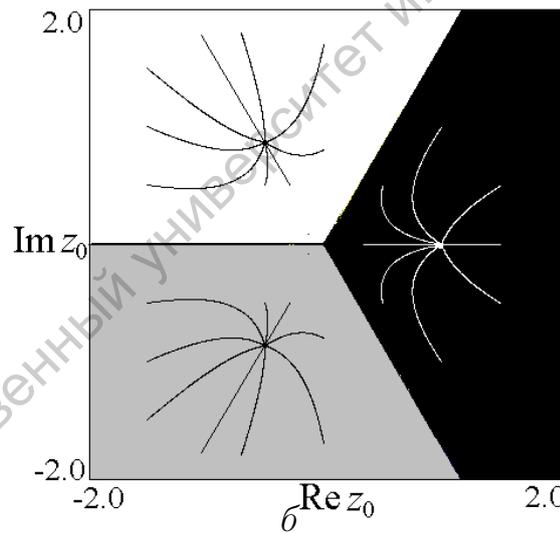
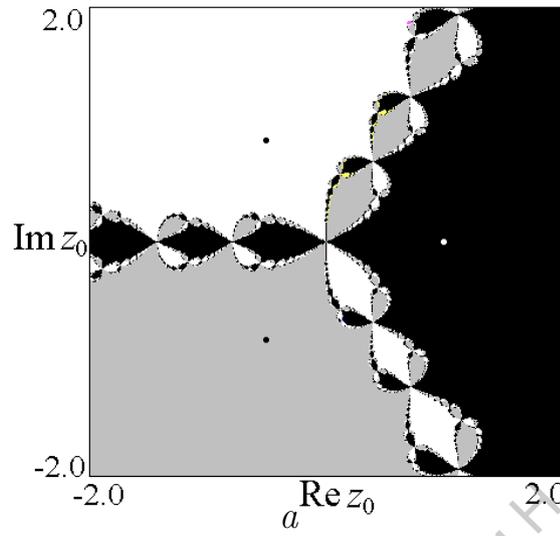


Рис. 2.1. Комплексные плоскости переменной  $z$  дискретного отображения (2.9) при  $h = 1$  (а) и дифференциального уравнения (2.10), соответствующего (2.10) при  $h \rightarrow 0$  (б) для  $f(z) = z^3 - 1$ . Точками указаны притягивающие неподвижные точки. Различными цветами указаны бассейны притяжения. Очевидно различие между фрактальной (а) и гладкой (б) границами бассейнов.

трехсторонней по отношению к бассейнам притяжения трех корней. Действительно, из рис. 2.1 (а) можно видеть, что к каждой точке границы одного из бассейнов притяжения примыкают области притяжения двух других корней, границы которых также составляют трехсторонние точки, и т.д.

Мы рассмотрели простейший пример появления фрактальной границы между областями сходимости метода Ньютона. Если обратиться к более общему случаю решения произвольного полиномиального уравнения, то кроме областей сходимости на фазовой плоскости могут возникнуть области, в которых метод Ньютона сходится к притягивающему циклу и, тем самым, не приводит к нахождению ни одного из корней. Эти области, а также области пространства параметров, в которых может реализоваться подобная ситуация, имеют фрактальный характер и могут принимать вид, сходный с классическими множествами Жюлиа и Мандельброта [2, 6]. Подобные фрактальные объекты могут также возникать на плоскости комплексифицированного параметра  $h$  [2]. Обобщение представленных результатов на случай систем двух комплексных уравнений произведено в работе [153].

Заметим, что отображение (2.9) можно рассматривать, как дискретную модель дифференциальной системы

$$\dot{z}(t) = -\frac{f(z(t))}{f'(z(t))}, z(0) = z_0, \quad (2.10)$$

построенную с помощью метода Эйлера. Нетрудно убедиться, что на фазовой плоскости подобной системы, в случае  $f(z) = z^3 - 1$ , имеют место три притягивающие неподвижные точки ( $f(z) = 0$ ), а сепаратрисса, разделяющая бассейны притяжения этих точек, является регулярной кривой (см. рис. 2.1 б), при этом, трехсторонней является лишь одна точка сепаратриссы –  $z = 0$ . Таким образом, дискретизация (при которой происходит переход к необратимой во времени системе) приводит к появлению фрактальных объектов КАД, и возникает вопрос о возможности реализации этих объектов в системах с непрерывным временем.

### 2.3 Множество Мандельброта для связанных систем. Экспериментальная реализация

Рассмотрим простой и универсальный метод, позволяющий получить множество Мандельброта и другие феномены комплексной аналитической динамики в реалистичных физических системах, а так же в эксперименте [193, 194]. Он основан на использовании связанных систем, способных демонстрировать переход к хаосу через удвоения периода. Как известно, такое поведение характерно для очень широкого класса нелинейных диссипативных систем различной физической природы.

Покажем, что одномерное комплексное квадратичное отображение оказывается эквивалентным системе двух связанных действительных квадратичных отображений при определенном способе введения связи. Отделим в комплексном уравнении  $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$  действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Re}z' \rightarrow \operatorname{Re}\lambda - (\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2, \quad \operatorname{Im}z' \rightarrow \operatorname{Im}\lambda - 2\operatorname{Re}z\operatorname{Im}z. \quad (2.11)$$

Далее, введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re}z + \beta\operatorname{Im}z, & x_2 &= \operatorname{Re}z - \beta\operatorname{Im}z, \\ \lambda_1 &= \operatorname{Re}\lambda + \beta\operatorname{Im}\lambda, & \lambda_2 &= \operatorname{Re}\lambda - \beta\operatorname{Im}\lambda. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тогда получим систему двух связанных логистических отображений

$$\begin{aligned} x_1' &\rightarrow \lambda_1 - x_1^2 + \varepsilon(x_2 - x_1)^2, \\ x_2' &\rightarrow \lambda_2 - x_2^2 + \varepsilon(x_1 - x_2)^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\varepsilon = (1 + \beta^2)/4\beta^2$  – параметр связи. Следует отметить специальный характер связи в этих уравнениях. Она может интерпретироваться как одинаковый одновременный сдвиг управляющих параметров в обеих парциальных системах на каждом шаге дискретного времени, пропорциональный квадрату разности динамических переменных.

Очевидно, что значение коэффициента  $\varepsilon = (1 + \beta^2)/4\beta^2$  для любых  $\beta$  больше  $1/4$ . Тем не менее, формально мы вправе исследовать систему (2.13) при произвольных  $\varepsilon$ .

На рисунке 2.2 представлены диаграммы на плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$  для связанных логистических отображений при различных значениях параметра  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0.5$  можно видеть обычное множество Мандельброта, повернутое на угол  $45^\circ$ . Для  $0.25 < \varepsilon < +\infty$  на плоскости параметров существует деформированное множество Мандельброта, лепестки кактуса которого отвечают периодическим режимам различного периода. При  $\varepsilon = 0.25$ , множество, отвечающее тому, что стартующая из начала координат точка не убегает на бесконечность, на плоскости параметров имеет вид системы полос (где реализуются циклы удваивающегося периода). При  $\varepsilon < 0.25$  она трансформируется в ромбовидную структуру, в частности, при  $\varepsilon = 0$  это квадрат.

Введенное обобщение, состоящее в том, что коэффициент связи может принимать любые действительные значения  $-\infty < \varepsilon < +\infty$ , соответствует использованию двух-компонентных чисел (см. раздел 1.8 и рис. 1.15). Как уже говорилось, двух-компонентные числа делятся на эллиптические, гиперболические и параболические числа, которые изоморфны трем специальным системам: обычным комплексным, двойным и двойственным числам, соответственно. Для значений параметра  $\varepsilon$  условия принадлежности к той или иной системе чисел выглядят следующим образом:

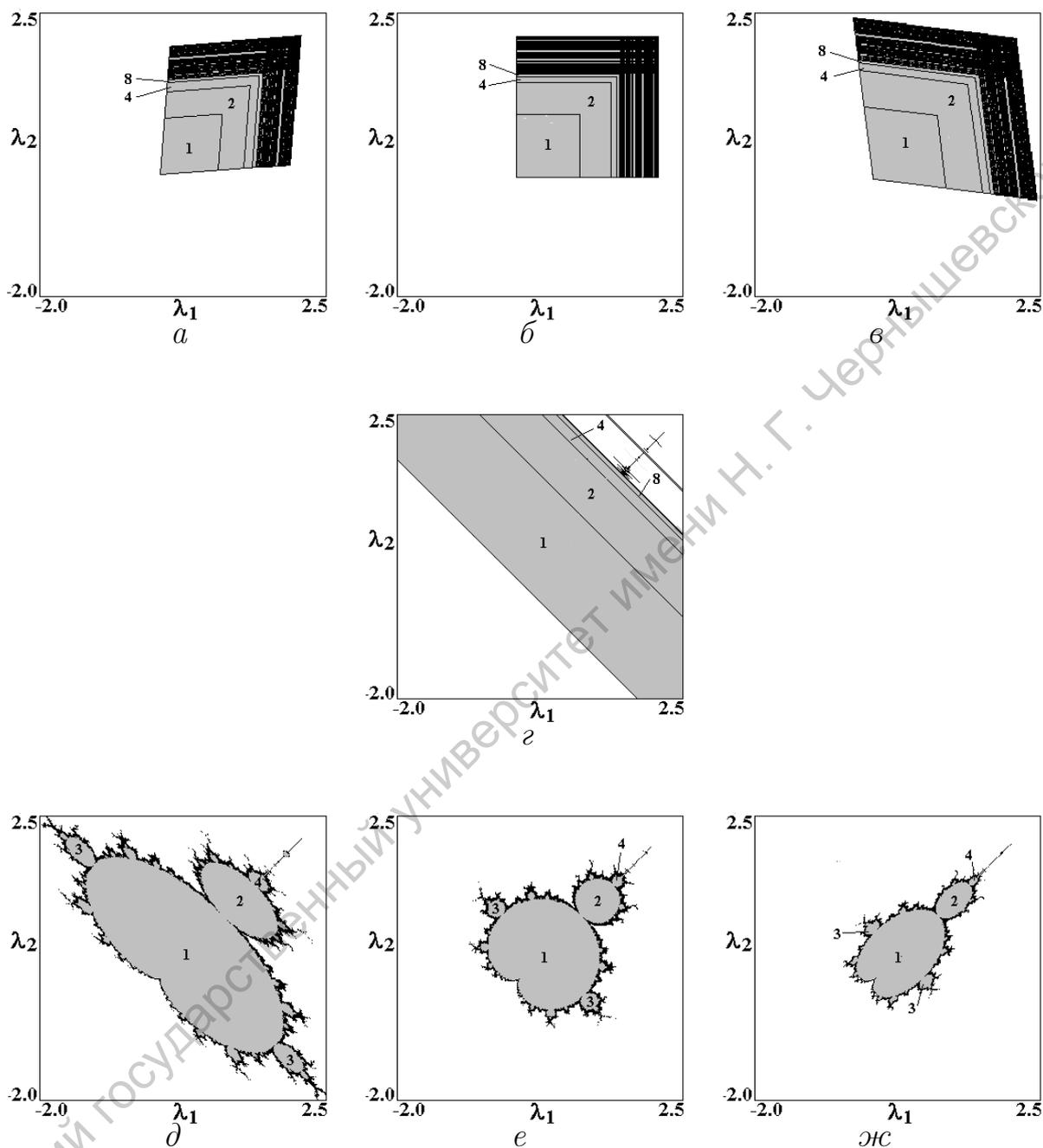


Рис. 2.2. Плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$  для связанных логистических отображений (2.13) при различных значениях параметра связи:  $\epsilon = -0.1$  (а),  $\epsilon = 0.0$  (б),  $\epsilon = 0.1$  (в),  $\epsilon = 0.25$  (г),  $\epsilon = 0.3$  (д),  $\epsilon = 0.5$  (е),  $\epsilon = 1.0$  (жз). Рисунки (а-в) соответствуют гиперболическим числам, рисунок (г) – параболическим, а рисунки (д-жз) отвечают эллиптическим числам.

- случай  $\varepsilon > 0.25$  соответствует эллиптическим числам, которые изоморфны комплексным, реализующимся при  $\varepsilon = 0.5$ ;
- случай  $\varepsilon < 0.25$  соответствует гиперболическим числам, которые изоморфны двойным, реализующимся при  $\varepsilon = 0$ ;
- случай  $\varepsilon = 0.25$  соответствует параболическим или двойственным числам.

Таким образом, существование на плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$  трех топологически разных типов структур, а именно, фрактальной структуры, подобной множеству Мандельброта, ромбовидной структуры и системы полос, объясняется существованием трех алгебраических систем чисел – эллиптической, гиперболической и параболической, соответственно.

Очевидно, что переход от комплексного уравнения к связанным двумерным действительным уравнениям того же вида возможен не только для квадратичного отображения. Однако функция связи для различных систем будет выглядеть по-разному. Например, кубическое комплексное отображение  $z' \rightarrow \lambda + z^3$  приводит к связанным отображениям

$$\begin{aligned} x'_1 &\rightarrow \lambda_1 + x_1^3 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2(2x_1 + x_2), \\ x'_2 &\rightarrow \lambda_2 + x_2^3 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2(2x_2 + x_1). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Комплексное отображение с нелинейностью четвертой степени  $z' \rightarrow \lambda + z^4$  приводит к действительным отображениям

$$\begin{aligned} x'_1 &\rightarrow \lambda_1 + x_1^4 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2(x_1 + x_2)(5x_1 - 2x_2), \\ x'_2 &\rightarrow \lambda_2 + x_2^4 - \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2(x_2 + x_1)(5x_2 - 2x_1). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Неаналитичное квадратичное отображение вида  $z' \rightarrow \lambda - (z^*)^2$  [167] может быть сведено к связанным квадратичным отображением, отличающимся от (2.13) лишь знаком функции связи:

$$\begin{aligned} x'_1 &\rightarrow \lambda_1 - x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2, \\ x'_2 &\rightarrow \lambda_2 - x_2^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1)^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Нетрудно доказать, что в общем виде, нелинейность вида  $z^n$  (или  $(z^*)^n$ ) будет давать функцию связи следующего вида

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \\ &= -\frac{1}{2^{n-1}} \{ \mathbf{C}_n^2(x_1 + x_2)^{n-2}(x_1 - x_2)^2 \pm \mathbf{C}_n^3(x_1 + x_2)^{n-3}(x_1 - x_2)^3 + \\ &\quad + \mathbf{C}_n^6(x_1 + x_2)^{n-6}(x_1 - x_2)^6 \pm \mathbf{C}_n^7(x_1 + x_2)^{n-7}(x_1 - x_2)^7 + \\ &\quad + \mathbf{C}_n^{10}(x_1 + x_2)^{n-10}(x_1 - x_2)^{10} \pm \mathbf{C}_n^{11}(x_1 + x_2)^{n-11}(x_1 - x_2)^{11} + \dots \}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{C}_n^k = n!/(k!(n-k)!)$  – число сочетаний из  $n$  по  $k$ . При этом знак “+” соответствует случаю  $z^n$ , а знак “–” – случаю  $(z^*)^n$ .

Сложнее получить функцию связи для уравнения с неполиномиальной нелинейностью, например, для трансцендентного экспоненциального отображения  $z' \rightarrow \exp(z)$  [36]. Проводя соответствующие выкладки, получаем

$$\begin{aligned} x'_1 &\rightarrow \exp(x_1) + \exp(x_1) \{ \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + x_1 - x_2) \exp(x_1) - 1 \}, \\ x'_2 &\rightarrow \exp(x_2) + \exp(x_2) \{ \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + x_2 - x_1) \exp(x_2) - 1 \}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким образом, метод представления комплексных отображений в виде связанных действительных применим для широкого класса систем. Введение выбранной определенным образом связи между двумя идентичными элементами любой природы, демонстрирующими удвоения периода, позволит наблюдать феномены комплексной аналитической динамики.

На основании описанной выше идеи о представлении комплексного квадратичного отображения в виде более реалистичной системы связанных логистических отображений, представляется возможным исследовать феномены комплексной динамики с помощью модели, допускающей физическую реализацию в эксперименте. В работах [168, 169] (см. также [170]) описывается специализированная аналоговая вычислительная машина на основе схем с переключаемыми конденсаторами, предназначенная для изучения поведения нелинейных динамических систем, описываемых дискретными отображениями (как одномерными, так и многомерными). В частности предложена схема пригодная для синтеза логистического отображения (см. рис. 2.3). На основании полученных в работах [168, 169] результатов, может быть разработана схема, представленная на рисунке 2.4, которая воспроизводит динамику связанных логистических отображений 2.13. Предложенная схема содержит следующие элементы:

- 4 ячейки выборки-хранения (по две для каждого логистического отображения), которые являются аналоговыми запоминающими устройствами. На рисунке 2.4 они обозначены пунктирными рамками и цифрами 11, 12, 21, 22. Каждая ячейка выборки-хранения состоит из аналогового ключа  $K$  и конденсатора  $C$ . В режиме выборки, конденсатор с помощью ключа подключается к источнику сигнала и заряжается до определенного напряжения. Далее, по команде (сигналу на управляющем электроде) ключ размыкается, и в течении некоторого времени на конденсаторе сохраняется напряжение – осуществляется режим хранения. Напряжение с конденсатора снимается через операционный усилитель  $A$ . Он имеет большое входное и малое выходное сопротивление, что позволяет конденсатору не разряжаться. Операционный усилитель в ячейке выборки-хранения работает в режиме повторителя, так что напряжение на его выходе равно напряжению на конденсаторе. Совокупность двух ячеек выборки-хранения, управление ключами которых осуществляется двумя последовательностями

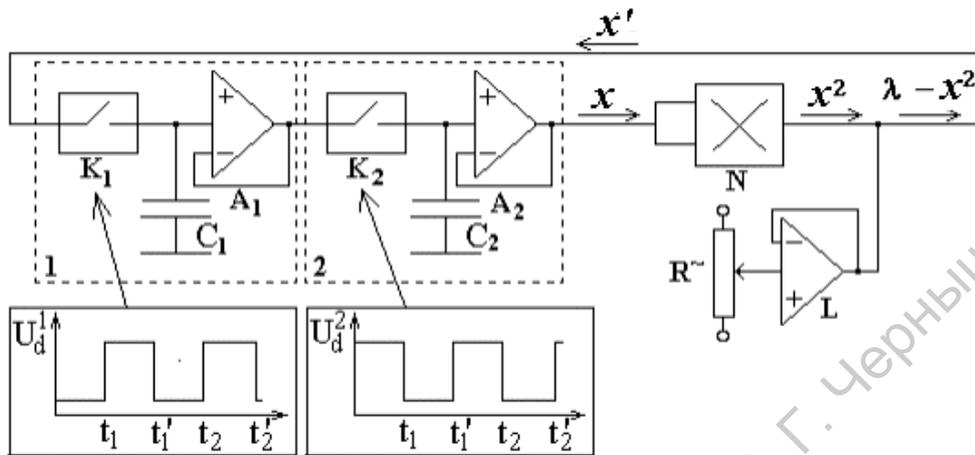


Рис. 2.3. Схема аналогового устройства демонстрирующего динамику дискретного логистического отображения. Пунктирными рамками обозначены две ячейки выборки-хранения, каждая из которых содержит операционный усилитель  $A_{1,2}$ , конденсатор  $C_{1,2}$  и аналоговый ключ  $K_{1,2}$ . Ключи управляются двумя последовательностями непрерывающихся импульсов  $U_d^{1,2}$  так, что когда ключ из первой ячейки открыт – ключ из второй ячейки закрыт и наоборот.

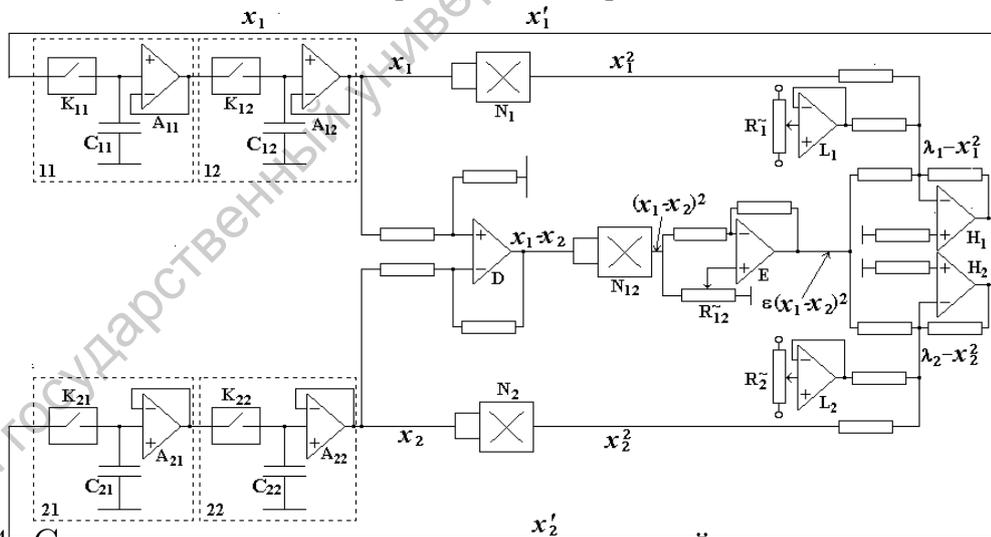


Рис. 2.4. Схема электронного аналогового устройства моделирующего динамику связанных логистических отображений (2.13). Пунктирными рамками обозначены ячейки выборки-хранения,  $K_{11}, K_{12}, K_{21}$  и  $K_{22}$  – аналоговые ключи,  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, L_1, L_2, E, H_1, H_2, D$  – операционные усилители,  $N_1, N_2$  и  $N_{12}$  – умножители.

неперекрывающихся тактовых импульсов (см. рис. 2.3) и нелинейного элемента делает возможным реализацию одномерного нелинейного дискретного отображения;

- 3 переменных сопротивления –  $R_1^{\sim}$ ,  $R_2^{\sim}$  и  $R_{12}^{\sim}$ , подключенных через усилители  $L_1$ ,  $L_2$  и  $E$ , осуществляющие изменение параметров  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\varepsilon$ , соответственно;
- 3 умножителя –  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_{12}$  обеспечивающие квадратичную нелинейность, то есть позволяющие получить величины  $x_1^2$ ,  $x_2^2$  и  $(x_1 - x_2)^2$ ;
- дифференциальные операционные усилители –  $D$ ,  $H_1$  и  $H_2$ , позволяющие реализовать разность, например  $(x_1 - x_2)$ .

Использование в экспериментальной установке осциллографа позволяет определить реализуется ли в системе ограниченная в области напряжений периодическая динамика или происходит скачок напряжений (что служит аналогом убегания траектории на бесконечность в квадратичном отображении).

Для демонстрации феноменов комплексной динамики в реальной физической системе приведем результаты экспериментального исследования электротехнической схемы, предложенной в предыдущем разделе.

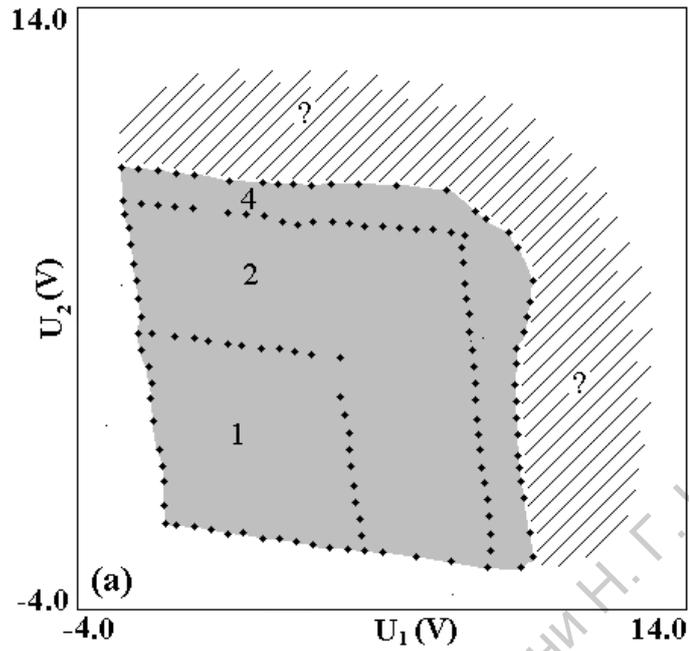
На рисунке 2.5 представлены две карты динамических режимов на плоскости напряжений  $(U_1, U_2)$ , которые регулируются переменными сопротивлениями  $R_1^{\sim}$  и  $R_2^{\sim}$ . Напряжения  $U_1$  и  $U_2$  соответствуют управляющим параметрам связанных логистических отображений как  $U_1(V) \sim 5\lambda_1$  и  $U_2(V) \sim 5\lambda_1$ . Значения параметра связи, определяющегося аналогичным образом, равны  $\varepsilon = 0.1$  (рис. 2.5 а) и  $\varepsilon = 0.5$  (рис. 2.5 б). Первый рисунок демонстрирует ромбовидную структуру, соответствующую рис. 2.2 в. На следующем рисунке наблюдается структура, сходная со множеством Мандельброта (рис. 2.2 е).

## 2.4 Система связанных нелинейных осцилляторов с гармоническим внешним воздействием

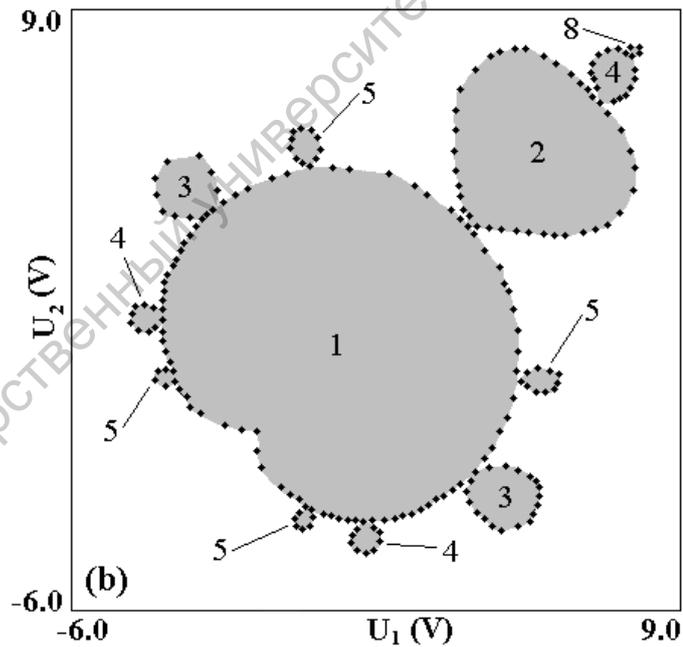
Одной из наиболее универсальных моделей, пригодных для описания многих реальных физических систем, служит нелинейный осциллятор. Рассмотрим квадратичный осциллятор с затуханием и гармоническим внешним воздействием

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \lambda + x^2 = F \cos \omega t, \quad (2.19)$$

где  $x$  – динамическая переменная,  $\gamma$  – параметр затухания,  $F$  и  $\omega$  – амплитуда и частота внешнего воздействия,  $\lambda$  – параметр нелинейности. Известно, что в подобной системе существует возможность перехода к хаосу



*a*



*б*

Рис. 2.5. Конфигурации множеств, возникающих на плоскости напряжений  $(U_1, U_2)$ , где  $U_1 \sim 5\lambda_1$ ,  $U_2 \sim 5\lambda_2$  при значениях параметра связи  $\varepsilon = 0.1$  (*a*) и  $\varepsilon = 0.5$  (*б*). Штриховкой на рис. *a* обозначена область со сложной динамикой.

через каскад бифуркаций удвоения периода, например путем изменения параметра  $\lambda$  при фиксированных  $F$ ,  $\omega$  и  $\gamma$  [176, 177] (см. рис. 2.6, 2.7).

Сконструируем систему двух связанных осцилляторов, демонстрирующую феномены комплексной аналитической динамики [193], на основе той же схемы по которой мы действовали в предыдущем разделе. Сначала комплексифицируем уравнение для квадратичного осциллятора так, чтобы управляющий параметр  $\lambda$  и переменная  $x$  были комплексными. Затем, сделаем замены

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \operatorname{Re}x \pm \beta \operatorname{Im}x, \\ \lambda_{1,2} &= \operatorname{Re}\lambda \pm \beta \operatorname{Im}\lambda, \\ \varepsilon &= (1 + \beta^2)/4\beta^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В результате получим систему связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \gamma \dot{x}_1 + \lambda_1 + x_1^2 - \varepsilon(x_1 - x_2)^2 &= F \cos \omega t, \\ \ddot{x}_2 + \gamma \dot{x}_2 + \lambda_2 + x_2^2 - \varepsilon(x_2 - x_1)^2 &= F \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.21)$$

На рис. 2.8 представлена диаграмма на плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Хотя возникающее на плоскости параметров образование отличается по виду от множества Мандельброта для квадратичного комплексного отображения или для связанных логистических отображений, однако, оно сохраняет такие его основные свойства, как наличие лепестков всевозможных периодов и их самоподобный характер. Различия же объясняются существованием области бистабильности для квадратичного осциллятора (см. рис. 2.7).

Очевидна аналогия между бассейнами притяжения периодических аттракторов для связанных осцилляторов, представленных на рис. 2.9, и множествами Жюлиа. При  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.8$  наблюдается фрактальный бассейн притяжения одной неподвижной точки (рис. 2.9 а). При  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.6$  наблюдается два бассейна притяжения двух различных неподвижных точек (рис. 2.9 б). При  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.575$  один из бассейнов разрушается (рис. 2.9 в), так, что при  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.5$  существует только одна притягивающая неподвижная точка (рис. 2.9 г). При  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.3$  (рис. 2.9 д) и  $\lambda_1 = -0.74$ ,  $\lambda_2 = -0.45$  (рис. 2.9 е) имеют место бассейны притяжения циклов периода 2 и 3.

Следует заметить, что на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  для неавтономных связанных осцилляторов может присутствовать множество бассейнов притяжения различных периодических и хаотических аттракторов. При этом с множеством Жюлиа ассоциируется лишь один из них, расположенный в центральной части рисунков.

Рисунок 2.10 демонстрирует аттракторы связанных подсистем на фазовых плоскостях  $(x_1, \dot{x}_1)$  и  $(x_2, \dot{x}_2)$  при значениях параметров таких же, как на рис. 2.9.

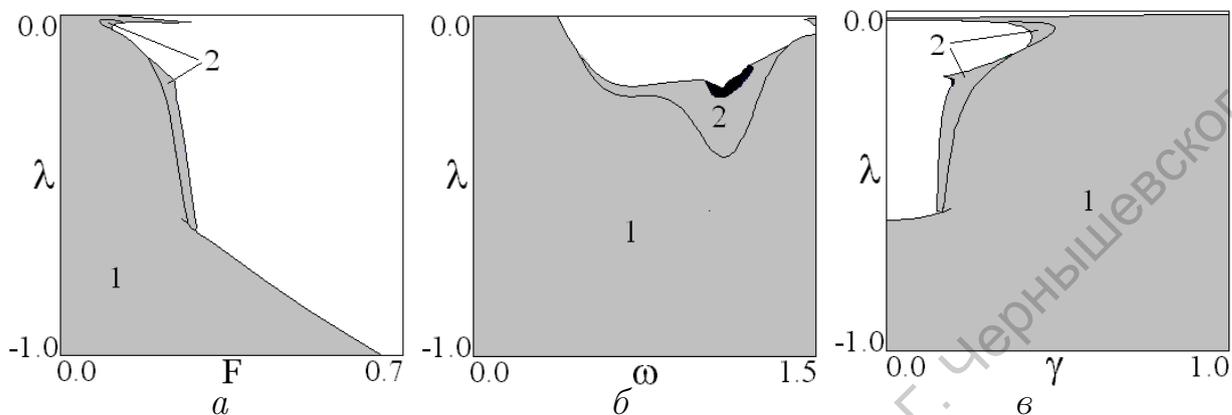


Рис. 2.6. Карты динамических режимов на плоскости параметров  $(\lambda, F)$  при  $\gamma = 0.2, \omega = 1$  (а);  $(\lambda, \omega)$  при  $\gamma = 0.2, F = 0.23$  (б);  $(\lambda, \gamma)$  при  $F = 0.23, \omega = 1$  (в) для осциллятора (2.19).

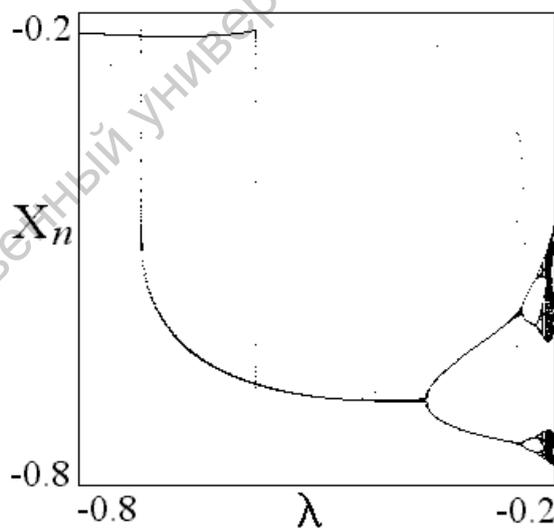


Рис. 2.7. Бифуркационное дерево для осциллятора (2.19) на плоскости  $(X_n, \lambda)$ , где  $X_n$  – это значения динамической переменной  $x$  в сечениях Пуанкаре, определяющихся условием  $t = 2\pi n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Наблюдается каскад удвоений периода и область мультистабильности.

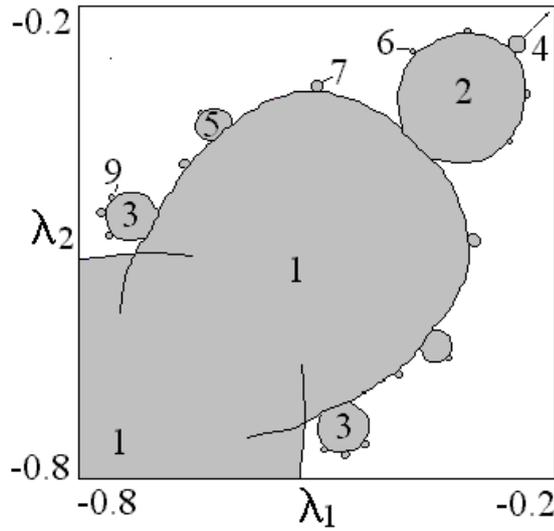


Рис. 2.8. Карта динамических режимов для системы связанных осцилляторов (2.21) при  $\gamma = 0.2$ ,  $F = 0.23$ ,  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ .

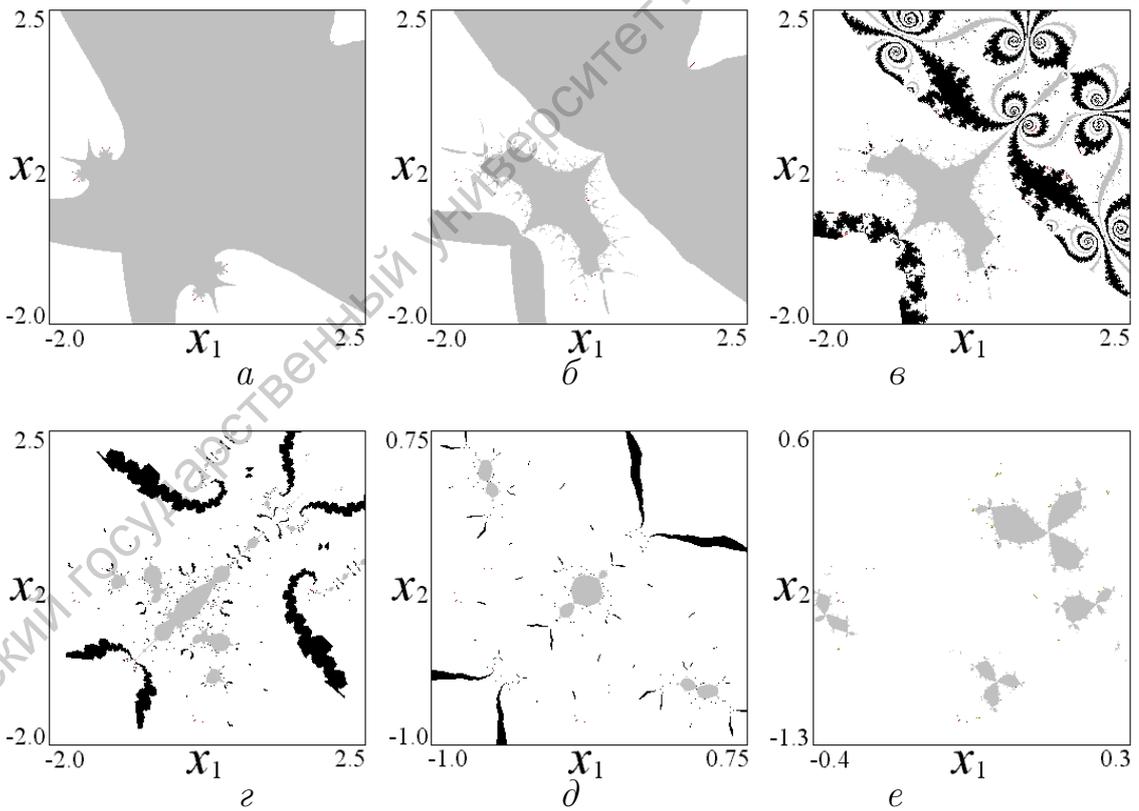


Рис. 2.9. Бассейны притяжения на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  для связанных квадратичных осцилляторов (2.21) при следующих значениях параметров:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.8$  (а),  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.6$  (б),  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.575$  (в),  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.5$  (г),  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.3$  (д),  $\lambda_1 = -0.74$ ,  $\lambda_2 = -0.45$  (е).

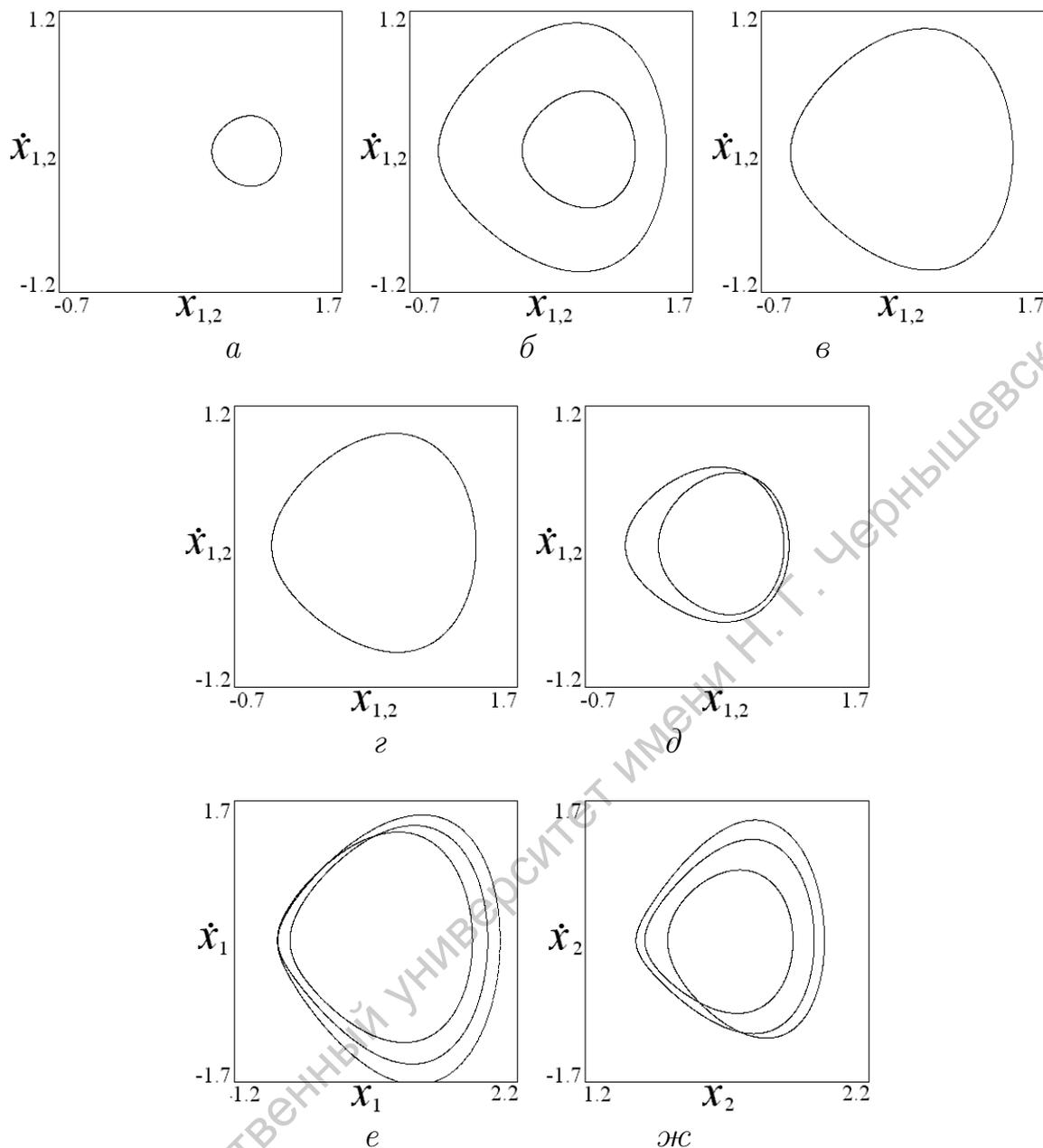


Рис. 2.10. Фазовые портреты для связанных квадратичных осцилляторов (2.21) при следующих значениях параметров:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.8$  (а),  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.6$  (б),  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.575$  (в),  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.5$  (г),  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.3$  (д),  $\lambda_1 = -0.74, \lambda_2 = -0.45$  (е, ж).



Рис. 2.11. Схема построения физической системы, демонстрирующей феномены КАД.

Итак, для того, чтобы сконструировать систему, демонстрирующую феномены КАД, необходимо взять два идентичных элемента с удвоениями периода, ввести между ними связь определенного вида, и синхронизовать их общим источником периодического сигнала (см. схему 2.11). Реализация множества Мандельброта в автономных потоковых системах пока остается открытым недостаточно изученным вопросом.

## 2.5 Электронная эмиссия с фрактального катода

Для вакуумной микроэлектроники большое значение имеют материалы, обладающие значительной автоэмиссионной способностью в относительно слабых полях [178, 179]. В последние годы появился ряд новых перспективных материалов, в частности, таких, как алмазоподобные пленки [180, 181], тубелены [182], пористый кремний [183–186] и т. д. Они демонстрируют эмиссию в рекордно низких электрических полях (порядка 10 В/мкм). Исследование структуры поверхности подобных материалов с помощью сканирующего туннельного микроскопа показывает, что она характеризуется множеством самоподобных микронеоднородностей, то есть, является фрактальной (рис. 2.12, 2.13). Многократное усиление поля на микронеоднородностях может объяснить столь низкие напряжения, необходимые для эмиссии, и ее неоднородный характер [188]. Как известно, величину плотности тока эмиссии с поверхности катода можно рассчитать по формуле Фаулера - Нордгейма

$$J = \frac{AE^2}{\varphi} \exp(-B\varphi^{3/2}/E), \quad (2.22)$$

где  $\varphi$  – работа выхода;  $A$  и  $B$  – величины, слабо зависящие от геометрии системы и работы выхода;  $E$  – напряженность поля.

Если эмиттер представляет собой острое высоты  $h$  и радиусом скругления  $r$ , то коэффициент усиления поля на вершине острия  $\beta$  может быть оценен как  $\beta \sim (1 + h/r)$ . В присутствии малой неоднородности, размеры которой много меньше размеров основного острия, можно получить выражение для  $\beta$  в виде произведения  $\beta \sim (1 + h/r)(1 + h_i/r_i)$  или  $\beta \sim \sqrt{(1 + h/r)(1 + h_i/r_i)}$  соответственно, где  $h_i$ , и  $r_i$  – параметры неоднородности. При наличии же самоподобных микронеоднородностей все более и более мелкого масштаба коэффициент усиления можно представить в виде произведения соответствующего числа сомножителей и, следовательно, он будет многократно возрастать. Эти качественные соображения подтверждаются рядом теоретических и экспериментальных исследований [190–192]. Малый размер неоднородностей обеспечивает высокий коэффициент усиления и малую эффективную площадь эмиссии. Вполне уместным является описание неоднородности поверхности реального эмиттера моделью фрактальной поверхности.

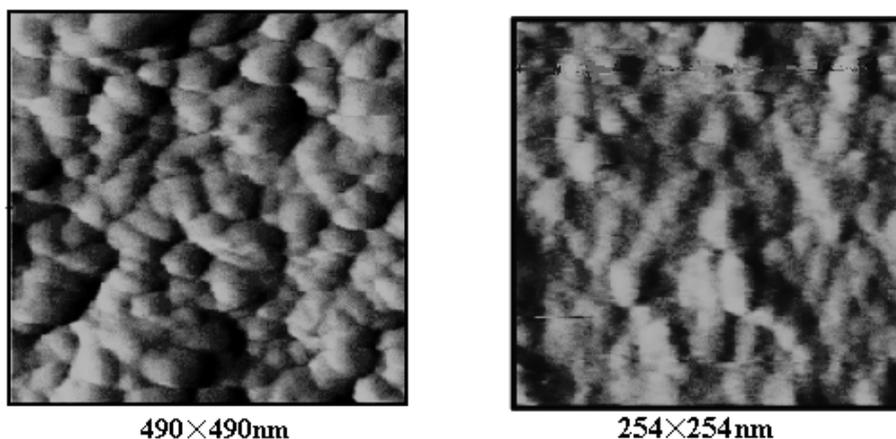


Рис. 2.12. Поверхности тонкопленочных плоских автоэмиссионных катодов, изготовленных из 80% пористого кремния. Изображения получены с помощью сканирующего силового микроскопа [184].

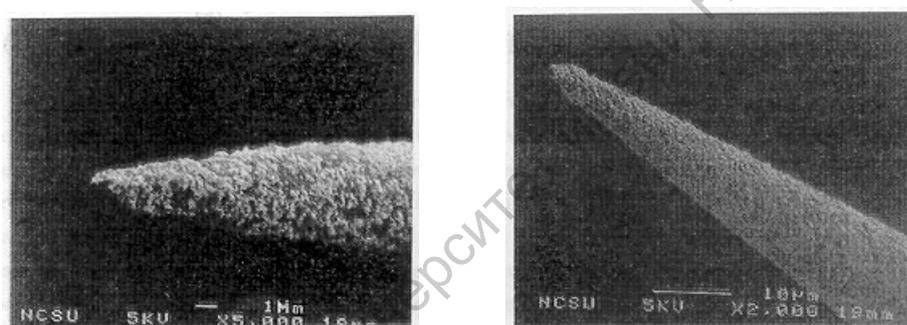


Рис. 2.13. Изображения молибденовых острых эмиттеров с алмазным покрытием, полученные с помощью сканирующего электронного микроскопа [181].

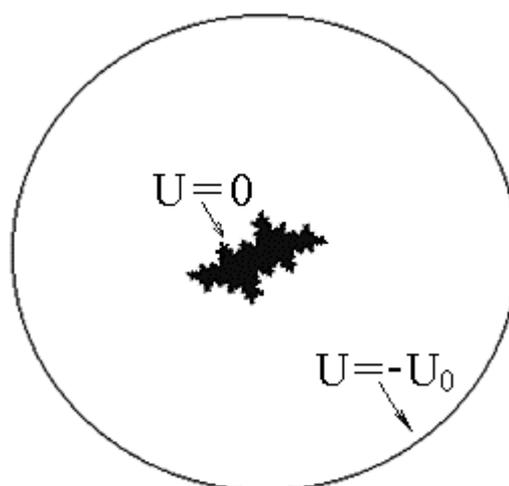


Рис. 2.14. Конфигурация расчетной области.

Действительно, в последние годы было опубликовано множество работ по исследованию структуры поверхностей, применяющих весь спектр методов физики (см. например [3, 4]). Согласно этим работам, поверхности различных природных и искусственно созданных объектов обладают фрактальными свойствами в определенном диапазоне масштабов.

Большой интерес представляет разработка средств компьютерного моделирования электростатических полей в системах с фрактальной границей и исследование влияния фрактальной структуры эмитирующей поверхности на процесс автоэлектронной эмиссии. Численное моделирование эмиссии с поверхности сложной формы, однако, значительно затруднено – требует огромных затрат машинного времени и сощности.

В недавних работах [195, 196]), для компьютерного моделирования автоэлектронной эмиссии с фрактальных поверхностей предложена оригинальная методика, основанная на замечательных свойствах фрактальных объектов комплексной аналитической динамики, таких как возможность быстрого расчета электростатических полей (см. раздел 1.6). Для численного расчета тока эмиссии с неоднородной поверхности может быть использована модель цилиндрического диода с шероховатой поверхностью внутреннего проводника, в виде бесконечного цилиндра, в качестве сечения которого задавались односвязные множества Жюлиа. Однородная в продольном направлении модель в виде бесконечного цилиндрического диода позволяет ограничиться рассмотрением двумерной расчетной области, а использование множества Жюлиа в качестве шероховатой поверхности и существование аналитической формулы для расчета его потенциала значительно упрощает вычисления (рис. 2.14).

## 2.6 Агрегация фрактальных кластеров

Одним из наиболее интересных механизмов образования фрактальных структур вещества является агрегация, простейшими моделями которой служат ограниченная диффузией агрегация (ОДА) и несколько отличающаяся от нее модель управляемого градиентом роста (УГР) (подробнее см. [3]). Этот механизм может быть применен к описанию таких процессов как образование гелей в растворе двуокиси кремния, образование вязких пальцев на границе раздела двух жидкостей с различными коэффициентами вязкости, электрический разряд на поверхности диэлектрика, образование трещин, образование частиц сажи в пламени, рост некоторых кристаллов, процесс слипания твердых частиц в растворах и парах ряда веществ [3, 7, 140, 141].

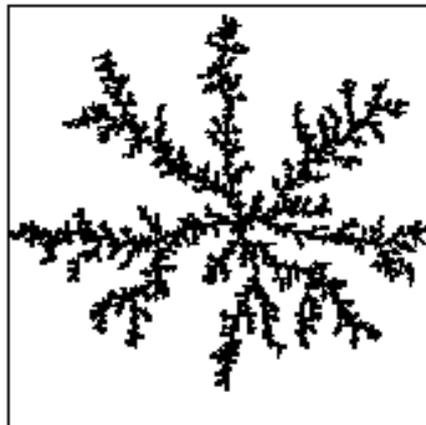
Модель ограниченной диффузией агрегации состоит в следующем. В некотором объеме находится затравочный кластер. В объем запускаются (по одной) частицы, движущиеся по некоторым траекториям. Частица, по-

павшая в область захвата кластера, прилипает к нему с некоторой вероятностью. В результате кластер растет, образуя сложный фрактальный объект – дендрит. На рисунке 2.15 (а) воспроизведен пример такого фрактала. В работе [18] было замечено, что эти объекты подобны связным ненаполненным множествам Жюлиа для значений параметра, соответствующим точкам Мизюревича. Например, на рисунке 2.15 (б) приведен фрагмент множества Жюлиа так же имеющий форму дендрита. При этом, электростатическое поле множества Жюлиа, которое может быть рассчитано аналитически (см. раздел 1.6), соответствует диффузионному полю (то есть вероятности прилипания), которое также удовлетворяет уравнению Лапласа [3].

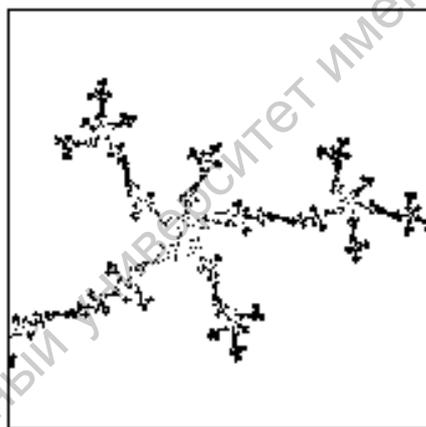
Замечено, что фрактальный агрегат быстро растет на концах ветвей и медленно в глубине фьордов, которые экранируются ветвями. Объясняется это неоднородностью распределения поля – на остриях оно значительно возрастает, а во впадинах оно исчезающе мало. Распределение поля довольно просто рассчитать для множества Жюлиа и практически невозможно для реального случайного фрактального объекта. Необходимо, однако подчеркнуть, что описание агрегатов с помощью множества Жюлиа позволяет выявить некоторые его фрактальные свойства (в работе [18], например, выявлены особенности скейлинг-спектра), но не позволяет описать динамику его роста, поскольку множество Жюлиа является статичным. Кроме того, кластеры, реализующиеся при ОДА, а также при УГР имеют более сложную структуру. В многочисленных работах [142–152] для описания процесса образования кластеров, как при ОДА так и при УГР, развит более совершенный метод конформных итерационных функций. Вводятся в рассмотрение некие специальные функции  $\Phi^n$ , которые позволяют отобразить границу кластера на единичную окружность. Этот метод дает возможность строить случайные кластеры и рассчитывать поле на каждом шаге построения кластера.

## 2.7 Теория фазовых переходов

В последние годы интенсивно изучается фазовый переход между магнитным и немагнитным состояниями вещества [2, 108–110]. В магнитной фазе, наблюдающейся при достаточно низких температурах, элементарные атомные магниты вещества стремятся расположиться параллельно друг другу, определяя тем самым упорядоченность системы. С ростом температуры, тепловые флуктуации возрастают, и этот порядок постепенно разрушается. При переходе через критическую точку – точку фазового перехода Кюри реализуется хаотическая ориентация элементарных магнитов, то есть возникает немагнитная фаза. Однако, вблизи критической точки элементарные магниты еще могут сохранять упорядоченность на определен-



*a*



*б*

Рис. 2.15. Кластер, возникающий в модели ограниченной диффузией агрегации (*a*) и фрагмент множества Жюлиа при  $\lambda = 0.636754 - 0.685031i$  (*б*), демонстрирующую аналогичную дендритную структуру.

ных расстояниях и в течении определенных промежутков времени, которые уменьшаются при увеличении температуры. Таким образом, вблизи точки Кюри сосуществуют области когерентности и области тепловых флуктуаций. Причем наблюдать области флуктуаций в магнитной фазе или области когерентности в немагнитной можно лишь в определенных масштабах, так как на достаточно больших масштабах система будет выглядеть соответственно полностью упорядоченной (как при нулевой температуре) или хаотической (как при бесконечной температуре). Если одну и ту же систему при фиксированной температуре рассматривать в различных масштабах, то она будет выглядеть так, как будто ее температуры различны. Масштабные преобразования можно связать с изменениями температуры – ввести перенормировку температуры. Допустим, имеется система из  $N$  атомов с межатомным расстоянием  $a$  при температуре  $T$ . Если рассматривать эту систему при достаточно грубом масштабе, при котором элементарная ячейка имеет характерный размер  $ba$  и содержит  $b^3$  атомов, то система будет выглядеть так, как будто она состоит из  $N/b^3$  атомов и имеет перенормированную температуру  $T' = R(T)$  ( $R$  – функция перенормировки). Непосредственно в точке фазового перехода тепловые флуктуации наблюдаются на любых масштабах. Они имеют согласованный характер и являются самоподобными.

Идея самоподобия была предложена в 1966 году Кадановым [111] и далее развита в метод перенормировок в работах Вильсона [112, 113] (см. также [109]). Концепции универсальности и скейлинга вблизи критической точки, метод перенормировок (метод ренормализационной группы) далее были перенесены в нелинейную динамику Фейгенбаумом [114, 115]. Обнаруженная им аналогия между переходом к хаосу и теорией фазовых переходов проявляется в увеличении временных и пространственных масштабов вблизи критической точки, подобии образований в широком интервале масштабов, возможности ренормгруппового анализа и существовании универсальных критических индексов и масштабных факторов, которые определяются самыми общими требованиями к типу системы [58, 116–118].

В 1952 году Ли и Янгом [119, 120] была развита теория, основанная на рассмотрении аналитических свойств некоторых термодинамических величин, в частности статистической суммы и термодинамических потенциалов, в зависимости от температуры, рассматриваемой формально как комплексная переменная. Эта теория оказалась плодотворной для понимания природы фазовых переходов и связанных с ними критических индексов. Представляется, что анализ, с аналогичных позиций, перехода к хаосу в динамических системах может оказаться полезным, как для углубления аналогии с фазовыми переходами, так и для выработки новых критериев, характеризующих сложность динамического поведения нелинейных систем.

Рассмотрим распространенную модель магнетика – модель Изинга. Выражение для статистической суммы выглядит следующим образом

$$Z_N(T, H) = \sum_{\{s_i\}} \exp\left(-\frac{E(s_i)}{kT}\right) = \sum_{\{s_i\}} \exp\left(\frac{J}{kT} \sum_{i,j} s_i s_j + \frac{H}{kT} \sum_i s_i\right), \quad (2.23)$$

где  $E$  – суммарная энергия конфигурации,  $H$  – внешнее магнитное поле,  $T$  – температура,  $k$  – постоянная Больцмана,  $s_i$  – спин, находящийся в  $i$ -том узле решетки и принимающий значения  $\pm 1$ . Спины взаимодействуют с магнитным полем и со своими ближайшими соседями. При  $J > 0$  взаимодействие ферромагнитное, а при  $J < 0$  – антиферромагнитное.

Выражение для статсуммы заменой переменной  $z = \exp(-2H/k)$  можно преобразовать к полиномиальному виду

$$Z_N = z^{-N/2} \sum_{n=0}^N p_n z^n. \quad (2.24)$$

Известно, что в точке фазового перехода должны существовать расходимости термодинамического потенциала (удельной свободной энергии)

$$f(H, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{kT}{N} \ln Z_N. \quad (2.25)$$

Отсюда видно, что в нулях статистической суммы представляющих собой решения полиномиального алгебраического уравнения возникают особенности, делающие их кандидатами на фазовые переходы. Однако, эти корни должны быть положительными и действительными, что невозможно из-за того, что все коэффициенты  $p_n > 0$ . Идея теории Янга-Ли заключается во введении комплексных температуры и магнитного поля [2, 119–121]. В этом случае уже комплексные нули статсуммы<sup>1</sup>, так называемые нули Янга-Ли, могут собираться вблизи действительной оси и тем самым определяют искомые особенности. Это становится возможным лишь в термодинамическом пределе, соответствующем бесконечному числу частиц  $N \rightarrow \infty$ . Действительно, в случае когда число частиц конечно, статсумма имеет конечное число нулей в комплексной плоскости. По мере роста числа частиц растет число нулей, при этом множество нулей становится все плотнее и все больше прижимается к действительной оси. Лишь в термодинамическом пределе они выстраиваются в одну линию пересекающую действительную ось в точке фазового перехода. При этом области разграниченные этой линией являются продолженными на комплексную плоскость областями той или иной фазы, а сама линия может быть интерпретирована как комплексная фазовая граница.

<sup>1</sup>Согласно теореме Гаусса полиномиальное уравнение  $\sum_{n=0}^N p_n z^n = 0$  должно иметь  $N$  штук комплексных корней

Для отыскания нулей Янга - Ли можно применить развитый Вильсоном метод ренормализационной группы, который заключается в последовательном уменьшении числа степеней свободы статистической суммы. Идея этого метода состоит в нахождении преобразования, выражающего  $N$ -частичную статсумму через  $N'$ -частичную ( $N' < N$ ). Ясно, что это преобразование не является взаимнооднозначным. Таким образом, для того, чтобы найти нули  $Z_N$  надо найти нули  $Z'_N$ , а затем получить их прообразы относительно преобразования перенормировки. Повторив эту процедуру соответствующее количество раз можно прийти к тривиальной двухчастичной статистической сумме. Предположим, что нули  $Z_2$  принадлежат бассейну притяжения некой неподвижной точки (например, соответствующей нулевой или бесконечной температуре). Тогда в термодинамическом пределе, что соответствует применению обратного преобразования перенормировки бесконечное количество раз, мы получим границу области притяжения, которая представляет собой множество Жюлиа. В результате устанавливается тождественность в термодинамическом пределе нулей Янга-Ли и множества Жюлиа преобразования перенормировки. Этот результат был получен в работе [122]. Однако, аналитическим образом функцию перенормировки удастся найти лишь для простейших моделей – иерархических решеток. Примером может служить одномерная модель со спинами Изинга (спины могут принимать значения  $+1$  и  $-1$ ), преобразование перенормировки которого выглядит как

$$x' = R(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right), \quad (2.26)$$

где  $x$  – некая переменная, соответствующая температуре. Причем, значение  $x = \infty$  отвечает нулевой температуре, а  $x = 1$  – бесконечной<sup>2</sup>.

Кроме простой модели Изинга, большой интерес представляют изображенные на рисунке 2.16 иерархические решетки со спинами Поттса (спин может иметь  $q$  различных состояний)<sup>3</sup>. Преобразования перенормировки для этих решеток имеют следующий вид

$$x' = R(x) = \left( \frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2} \right)^2, \quad (2.27)$$

$$x' = R(x) = \left( \frac{x^3 + 3(q-1)x + (q-1)(q-2)}{3x^2 + 3(q-2)x + q^2 + -3q + 3} \right)^2. \quad (2.28)$$

На рисунке 2.17 представлены множества Жюлиа (то есть множества нулей Янга-Ли) для преобразования перенормировки (2.27). Очевидно, что

<sup>2</sup>Для некоторых систем множества нулей статсуммы может быть получено и без использования метода перенормировок, например для одномерной и квадратной двумерной решеток Изинга. Решение для двумерной модели Изинга было получено Онзагером [123](см. также [124]).

<sup>3</sup>Существует также ряд других моделей иерархических решеток [5, 125–132]

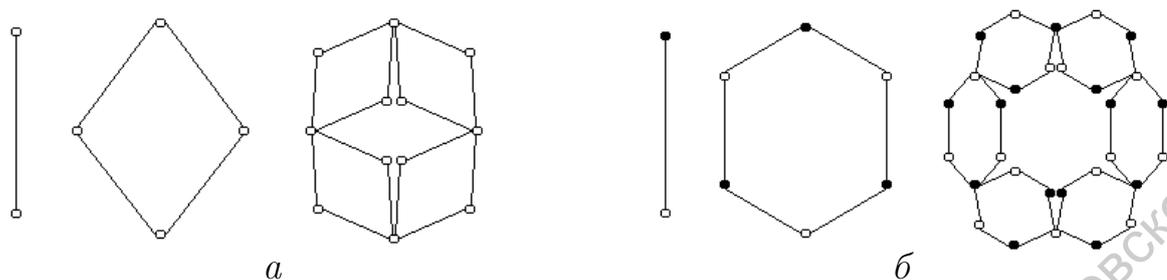


Рис. 2.16. Рекуррентная структура двух типов иерархических решеток со спинами Поттса, описываемых преобразованием перенормировки (2.27) (а) и (2.28) (б).

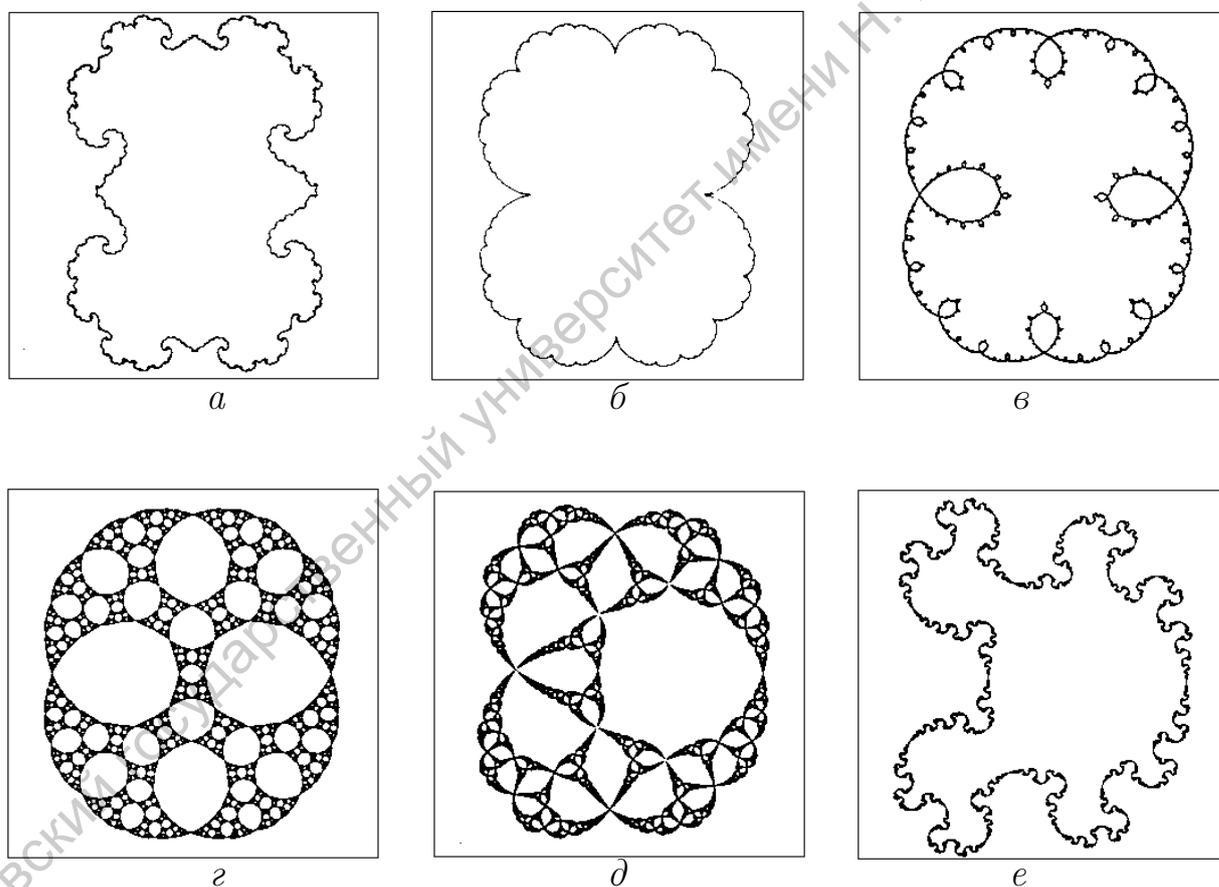


Рис. 2.17. Фрактальные фазовые границы для иерархической решетки 2.16 а на комплексной плоскости при различных значениях параметра  $q$ : -1 (а), 0 (б), 1 (в), 2 (г), 3 (д), 4 (е). При  $q \leq 0$  и  $q > 3$  имеются только два фазовых состояния, а при  $0 < q \leq 3$  может существовать бесконечно много фазовых состояний.

при  $q \leq 0$  и  $q > 3$  существует лишь две фазы – парамагнитная и ферромагнитная, так как фазовая граница делит комплексную плоскость на две части. При  $0 < q \leq 3$  наблюдается бесконечное количество разделенных фазовой границей областей, и существует вероятность появления новых фазовых состояний. Как показывают дополнительные исследования, иерархические решетки со спинами Поттса действительно описывают возникновение нового фазового состояния – антиферромагнитного, что определяется существованием третьего аттрактора (кроме 1 и  $\infty$ ) у преобразований перенормировки. Для выяснения вопроса о появлении нового фазового состояния полезно исследовать множество Мандельброта на плоскости параметров, выявляя области мультистабильности, соответствующие существованию нескольких фаз [2, 131]. Кроме того в качестве точек возникновения новых фаз (“модулированных фаз”) можно рассматривать точки на границе  $M$ , соответствующие существованию рациональных нейтральных точек (циклов) [125, 127–129, 132]. Фазовые переходы в системах с иррациональными числами вращения рассмотрены в [133, 134].

Следует заметить, что распределение удельной свободной энергии в зависимости от температуры соответствует распределению электростатического потенциала, создаваемого совокупностью точечных зарядов, расположенных в нулях статсуммы, то есть распределению потенциала множества Жюлиа, который в определенных случаях может быть достаточно легко вычислен (см. раздел 1.6). Таким образом, в точках фазового перехода наблюдается скачок производной термодинамического потенциала, то есть, в рамках аналогии, электростатического поля<sup>4</sup>.

В работах [97, 135, 136] приводятся результаты исследований множеств нулей Янга-Ли с точки зрения мультифрактального формализма. В работе [135] произведены расчеты спектров обобщенных размерностей Реньи и скейлинг-спектров множества Жюлиа для отображения (2.27), исследование структуры которых позволило выделить три специфические области значений параметра системы, соответствующие различным скейлинговым характеристикам. Вопрос о том, не является ли фрактальная структура фазовых границ следствием искусственно сконструированных иерархических решеток, остается до сих пор открытым.

## 2.8 Теория перколяции

Теория перколяции (протекания) это математическая теория, относящаяся к области стохастической геометрии, которая служит для описания определенного класса явлений, в том числе и физических<sup>5</sup>. Базовой мо-

<sup>4</sup>Имеются в виду точки фазовых переходов первого рода. Могут также иметь место фазовые переходы второго рода, при которых скачок имеет вторая производная потенциала.

<sup>5</sup>Принципы теории перколяции применимы для описания целого ряда физических систем и явлений, таких как процесс полимеризации в растворе [7], переход металл-диэлектрик, цепочки связанных

делью этой теории является обладающая некоторой симметрией решетка, каждый узел которой соединен связями со своими ближайшими соседями. Типичная физическая модель теории перколяции – иерархическая цепочка сопротивлений. Если все сопротивления (связи) целы, то каждый узел будет электрически связан со всеми остальными узлами, и цепочка будет иметь конечную ненулевую проводимость. Если определенная доля  $1 - p$  расположенных случайным образом связей разорвана, тогда для достаточно больших значений  $1 - p$  проводимость цепочки будет равна нулю. Существует критическое значение доли целых связей  $p_c$  такое, что при  $p > p_c$  существует ненулевая вероятность протекания цепочки. Это так называемая задача связей. Существует еще задача узлов, в которой считается, что в системе присутствует определенная доля перекрытых непроводящих узлов. Пороговое значение  $p_c$  для задачи узлов будет отличаться от  $p_c$  для задачи связей.

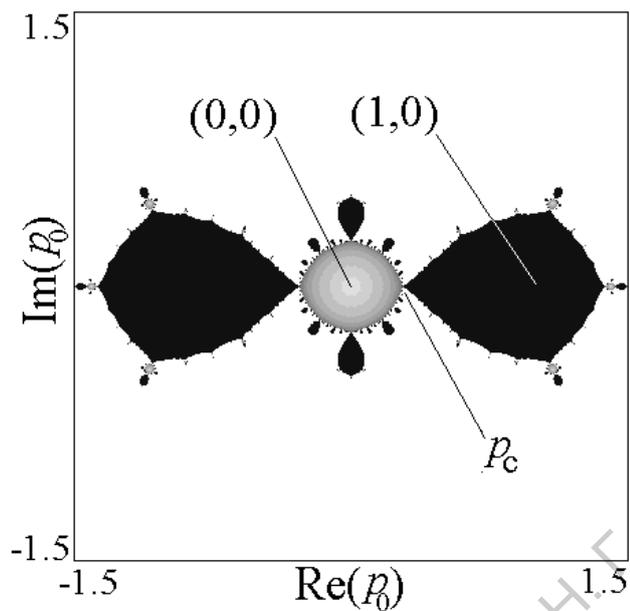
Рассмотрим  $D$ -мерную кубическую решетку с расстоянием между узлами  $a$ , каждый узел которой является открытым с вероятностью  $p_0$ . Кубическая ячейка со стороной  $2a$  будет протекать через одну из своих сторон с вероятностью  $p_1 = 1 - (1 - p_0^2)^{2^{D-1}}$ . Выражение для вероятности протекания ячейки со стороной  $2^{n+1}a$  будет представлять собой отображение степени  $2^D$  [16, 139]

$$p_{n+1} = f(p_n) = 1 - (1 - p_n^2)^{2^{D-1}}. \quad (2.29)$$

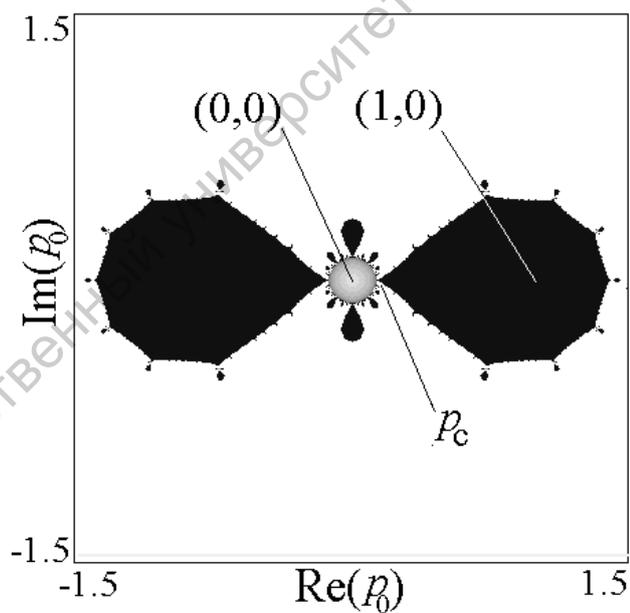
В области физических значений  $p$ , это отображение имеет две устойчивые неподвижные точки – 0 и 1, а также неустойчивую неподвижную точку  $p_c = (\sqrt{5} - 1)/2$ . При  $p_0 > p_c$  вероятность  $p_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , то есть бесконечная решетка не будет протекать. При  $p_0 < p_c$  вероятность протекания бесконечной решетки ( $n \rightarrow \infty$ ) стремится к нулю. Таким образом,  $p_c$  является порогом перколяции.

Функция  $p_n = f^n(p_0) = f(f(\dots f(p_0)))$  определяет вероятность протекания ячейки со стороной  $2^n a$ . Тогда, чтобы найти вероятность  $p_0$ , при которой в системе может существовать проводящий кластер с характерным размером  $2^n a$ , необходимо найти нули уравнения  $p_n = 0$ . По аналогии с теорией Янга-Ли для фазовых переходов, в работе [16] (и в более поздней работе [138]) было предложено рассматривать динамику отображения (2.29) на плоскости комплексной вероятности  $p_0$ . Тогда область, ограниченная множеством Жюлиа этого отображения, будет представлять собой совокупность значений  $p_0$ , обозначенных на рис. 2.18 черным цветом, при которых происходит протекание всей решетки ( $p_n \rightarrow 1$ ) и значений  $p_0$ , обозначенных на рис. 2.18 оттенками серого цвета, при которых протекание всей бесконечной решетки не происходит ( $p_n \rightarrow 0$ ). Градации серого на рисунке от более темного к более светлому отвечают уменьшению динамического рас-

импедансов, проводимость поликристаллов [137], протекание жидкости через пористую среду [138], моделирование эпидемий и лесных пожаров [5].



*a*



*б*

Рис. 2.18. Плоскость комплексной вероятности  $p_0$  протекания узлов двумерной квадратной решетки (*a*) и трехмерной кубической решетки (*б*). Бассейны притяжения 1, соответствующей протеканию всей решетки обозначены черным цветом. Оттенками серого цвета обозначены бассейны притяжения 0, соответствующего непротеканию.

стояния до аттрактора 0 (то есть количества итераций, необходимых для достижения аттрактора). Динамическое расстояние в данном случае имеет физический смысл характерного размера кластера, имеющего ненулевую вероятность протекания. Физической области вероятностей будет соответствовать отрезок  $(0, 1)$  действительной оси.

## 2.9 Динамика иерархических цепочек импедансов

Рассмотрим предложенные в работе [16] иерархические электрические схемы, изображенные на рис. 2.19. Элемент, обозначенный как  $i$  является емкостью  $C$  с импедансом  $Z = i/\omega C$  на частоте  $\omega$ . Начальный элемент иерархической структуры состоит из индуктивности  $L$  и активного сопротивления  $R$  и имеет импеданс  $Z_0 = -iL\omega + R$ . При переходе к безразмерным переменным  $z_n = \omega C Z_n$ ,  $z_0 = -iLC\omega^2 + RC\omega$  получим отображение

$$z_{n+1} = i \frac{2z_n + i}{z_n + i}, \quad (2.30)$$

для цепочки, изображенной на рис. 2.19 а и отображение

$$z_{n+1} = \frac{z_n(z_n + i)}{2z_n + i} \quad (2.31)$$

для рис. 2.19 б. Использование иерархически построенных  $RLC$  цепочек с импедансом  $Z(\omega)$ , где  $\omega$  – частота управляющего сигнала, для физической реализации феноменов КАД было ранее предложено в работе [17].

На рис. 2.20 представлена комплексная плоскость начального импеданса  $z_0$  для отображения (2.31). Различными оттенками серого цвета обозначены области с различным динамическим расстоянием до расположенного в нуле аттрактора этого отображения. Из рисунка видно, что даже в случае отсутствия поглощения ( $R = 0$ ), то есть при  $\text{Re}(z_0) = 0$  величина импеданса  $z_n$  является фрактальной зависимостью  $\text{Im}(z_0)$ , определяющейся частотой  $\omega$  [16, 137]. Аналогичным образом может быть исследована и схема рис. 2.19 б.

Таким образом, комплексные аналитические отображения могут возникать при описании иерархических электрических цепочек с комплексным импедансом, а построение множеств Фату этих отображений может быть полезным для изучения динамики подобных систем, в частности для выявления фрактальных зависимостей характеризующих систему величин.

## 2.10 Квантовое туннелирование в хаотической системе

В этом разделе будет дано краткое описание некоторых работ, в которых проведена попытка использовать феномены КАД (а именно множество Жюлиа) для рассмотрения некоторых задач квантовой теории.

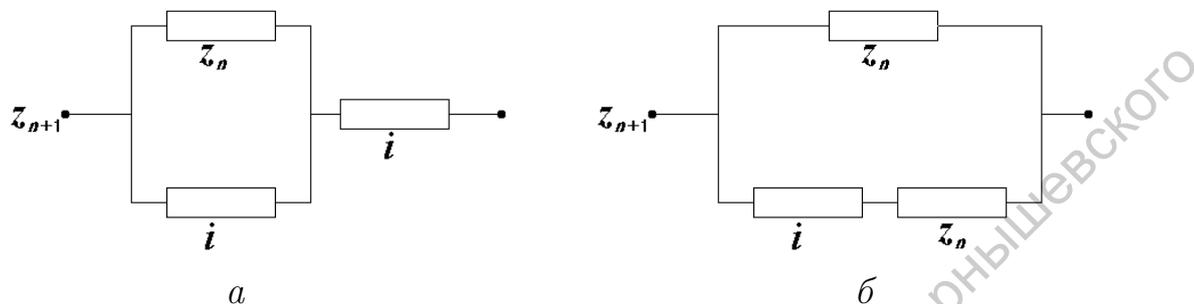


Рис. 2.19. Схемы иерархических цепочек импедансов соответствующие комплексным отображениям (2.30) (а) и (2.31) (б).

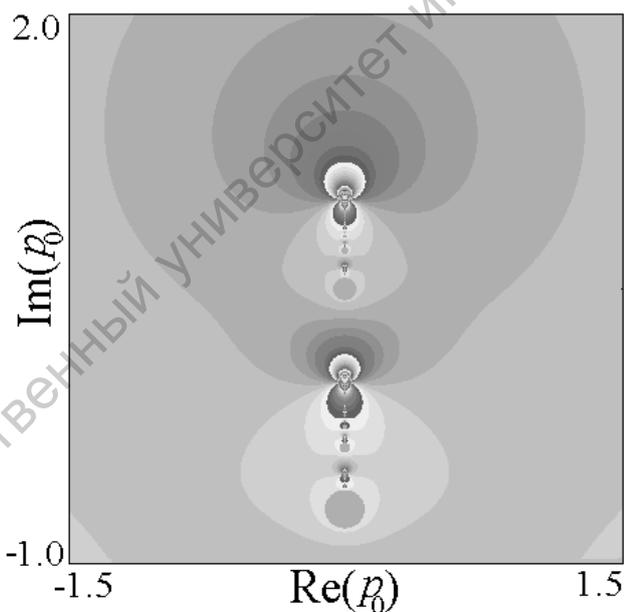


Рис. 2.20. Комплексная плоскость начальных импедансов для иерархической цепочки изображенной на рис. 2.19 б, на которой имеет место бассейн притяжения 0 для отображения (2.31). Различными оттенками серого цвета обозначены области с различным динамическим расстоянием до аттрактора.

В классической механике возможно сосуществование двух устойчивых положений равновесия с различными энергиями, например когда потенциальная функция представляет собой параболу четвертой степени с двумя минимумами на разной высоте. В квантовой механике положение равновесия с более высокой энергией становится неустойчивым благодаря туннелированию через потенциальный барьер.

Существует аналогия между квантовым туннелированием и динамическим хаосом [155–158]. Эта аналогия может быть углублена посредством исследования связи между квантовыми эффектами и траекториями в классических динамических системах. Согласно [19, 158–163], использование комплексных траекторий позволяет описать ряд аспектов, которые недоступны для вещественных величин (например в работе [163] изучается расщепление уровней энергии для симметричной потенциальной ямы, которое возможно лишь для комплексного фазового пространства). Известен метод, состоящий в предположении, что основной вклад в туннельный переход вносит классическая траектория частицы, движущейся в перевернутой потенциальной яме (подробнее см. [161]). С другой стороны, в хаотических системах в квазиклассическом приближении пучок комплексных траекторий может также вносить значительный вклад в туннелирование между областями, которое не может описываться классическими траекториями [19, 158]. В качестве модельной системы в этих работах рассматривается двумерное отображение сохраняющее площадь, временная эволюция которого в фазовом пространстве переменных  $(p, \theta)$  описывается как  $(p_{n+1}, \theta_{n+1}) = F(p_n, \theta_n) = (H'(p_n) - V'(\theta_n), \theta_n + H'(p_n) - V'(\theta_n))$ , где  $H(p) = p^2/2$  и  $V(\theta) = K \sin \theta$ . Ясно, что такая модельная система не может описывать прохождение сквозь потенциальный барьер, однако с ее помощью можно рассматривать туннелирование между квантовыми состояниями ассоциирующимися с областями с хаотической (или квазипериодической) динамикой в фазовом пространстве. Для исследования динамики системы рассчитывается пропагатор

$$\Psi_n(p_0, p_n) \approx \sum_{p_0=\alpha, p_n=\beta} A_n(p_0, \theta_0) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} S_n(p_0, \theta_0)\right\}, \quad (2.32)$$

где  $S_n(p_0, \theta_0) = \sum_{j=1}^n [H(\theta_j) - V(\theta_j) + \theta_j(p_j - p_{j+1})]$  – действие вдоль классической траектории, а  $A_n(p_0, \theta_0) = [2\pi\hbar(\partial p_n/\partial \theta_0)_{p_0}]^{-1/2}$  – амплитудный множитель, связанный с ее устойчивостью. Суммирование производится по всем начальным состояниям  $(p_0, \theta_0)$ , удовлетворяющим граничным условиям для импульса в начальный  $(p_0 = \alpha)$  и конечный  $(p_n = \beta)$  моменты времени. Далее комплексифицируется переменная  $\theta_0 = \xi + i\eta$  (переменная  $p_0$  остается вещественной). Совокупность комплексных траекторий

может быть тогда визуализирована как множество

$$\mathcal{M}_n = \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \mathcal{M}_n^\beta = \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \{(p, \theta) \in \mathbb{C}^2 | p_n = \beta\} \quad (2.33)$$

на комплексной плоскости  $\theta_0$  в сечении  $p_0 = \alpha$ . Это множество имеет сложный фрактальный вид и представляет собой множество Жюлиа. Оно образовано из самоподобных непересекающихся линий. Причем те из них, которые пересекают действительную ось, соответствуют траекториям, вносящим вклад в туннелирование.

## Литература

- [1] H.-O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saup. Chaos and fractals: new frontiers of science. Springer-Verlag, New-York, 1992.
- [2] H.-O. Peitgen, P.H. Richter. The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems. Springer-Verlag, New-York, 1986.
- [3] Фракталы в физике. Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9-12 сентября, 1985). М.: Мир, 1988.
- [4] Е. Федер. Фракталы. М.: Мир, 1991.
- [5] M. Schroeder. Fractals, chaos, power laws. Minutes from infinite paradise. W.H. Freeman, New-York, 1991.
- [6] С.В. Божокин, Д.А. Паршин. Фракталы и мультифракталы. Изд-во "РХД", Москва, Ижевск, 2001.
- [7] В.В. Зосимов, Л.М. Лямшев. Фракталы в волновых процессах. // УФН, Т. 165, № 4, 1995, Р. 361-402.
- [8] А.В. Батунин. Фрактальный анализ и универсальность Фейгенбаума в физике адронов. // УФН, Т. 165, № 6, 1995, С. 645-660.
- [9] А.И. Олемский, А.Я. Флат. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды. // УФН, Т. 163, № 12, 1993, С. 1-50.
- [10] S. Sears, M. Soljacic, M. Segev, D. Krylov, K. Bergman. Cantor set fractals from solitons. // Phys. Rev. Lett., V. 84, 2000, P. 1902-1905.
- [11] C.P. Dettmann, N.E. Francel, N.J. Cornish. Fractal basins and chaotic trajectories in multi-black-hole spacetimes. // Phys. Rev. D 50, No. 2, 1994, P. R618-R621.
- [12] B.B. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. Freeman, San-Francisko, 1982.
- [13] B.B. Mandelbrot. On the quadratic mapping  $z \rightarrow z^2 - \mu$  for complex  $\mu$  and  $z$ : The fractal structure of its  $M$  set, and scaling. // Physica 7D, 1983, P. 224-239.
- [14] B.B. Mandelbrot. Fractal aspects of iteration of  $z \rightarrow \lambda(1 - z^2)$  for complex  $\lambda, z$ . // Annals NY Acad. Sciences 357, 1980, P. 249-259.
- [15] C. Beck. Physical meaning for Mandelbrot and Julia set. // Physica D125, 1999, P. 171-182.

- [16] М.В. Энтин, Г.М. Энтин. Масштабная инвариантность в теории перколяции и фракталы. // Письма в ЖЭТФ, Т. 64, №6, 1996, С. 427-432.
- [17] M.F. Barnsley, S.G. Demko. // Proc. R. Soc. A40, 1985, P. 39.
- [18] T. Bohr, P. Cvitanović, M.H. Jensen. Fractal “aggregates” in the complex plane. // Europhys. Lett., V. 6, No. 5, 1998, P. 445-450.
- [19] A. Shudo, Y. Ishii, K.S. Ikeda. Julia set describes quantum tunnelling in the presence of chaos. // J. Phys. A: Math. Gen., V. 35, 2002, P. L225-L231.
- [20] M. Govin, H.R. Jauslin. Julia sets in iterative KAM methods for eigenvalue problems. // Chaos, Solitons & Fractals. V. 9, No. 11, 1998, P. 1835-1846.
- [21] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Проблемы гидродинамики и их математические модели. Москва, Наука, 1977.
- [22] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. Москва, Ленинград, Изд. технико-теоретической литературы, 1946.
- [23] Дж. Милнор. Голоморфная динамика. Изд-во “РХД”, Удмуртский госуниверситет, 2000.
- [24] J. Milnor. Dynamics in one complex variable. // Electronic preprint, IMS 90-5, 1990, available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [25] R.L. Devaney. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley studies in Nonlinearity, 1989.
- [26] A. Douady, J.H. Hubbard. Iteration des polynomes quadratiques complexes. // CRAS Paris 294:123-126 (On the dynamics of polinomial-like mappings. Electronic preprint. 1984)
- [27] K.M. Briggs, G.R.W. Quispel, C.J. Tomphson. Feigenvalues for Mandelsets. // J. Phys. A24, No. 14, 1991, P. 3363-3368.
- [28] P. Cvitanović, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia. Renormalization, unstable manifolds, and the fractal structure of the mode-locking. // Phys. Rev. Lett., V. 55, No. 4, 1985, P. 343-346.
- [29] J. Milnor. Remarks on iterated cubic maps. // Electronic preprint, IMS 90-6, 1990, available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [30] С.П. Кузнецов. Каскад удвоений периода в комплексном кубическом отображении. // Изв. Вузов. ПНД, Т. 4, № 4-5, 1996, С. 3-12.

- [31] A. Lakhtakia, V.V. Varadan, R. Messier, V.K. Varadan. On the symmetries of the Julia sets for the process  $z \rightarrow z^p + c$ . // J. Phys. A: Math. Gen., V. 20, 1987, P. 3533-3535.
- [32] J. Milnor. Remarks on the quadratic rational maps. // Electronic preprint, IMS 92-14, 1992, available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [33] J. Milnor. Hyperbolic components in spaces of polynomial maps. // Electronic preprint, IMS 92-3, 1992, available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [34] J. Rivera-Letelier. Rational maps with decay of geometry: rigidity, Thurston's algorithm and local connectivity. // Electronic preprint, IMS 00-09, 2000, available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [35] A.F. Beardon. Two examples of Julia sets. // Nonlinearity, V. 5, 1992, P. 771-775.
- [36] R.L. Devaney.  $e^z$ : Dynamics and bifurcations. // Int. J. of Bifurcation and Chaos, V. 1, No. 2, 1991, P. 287-308.
- [37] D. Schleicher. Attractive dynamics of exponential maps. // Electronic preprint, IMS 00-04, 2000, available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [38] J.H. Hubbard, R.W. Oberste-Vorth. Henon mappings in the complex domain II: projective and inductive limits of polynomials. // Electronic preprint, IMS 94-1, 1994, available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [39] O. Biham, W. Wenzel. Unstable periodic orbits and the symbolic dynamics of the complex Henon map. // Phys. Rev. A42, No. 8, 1990, P. 4639-4646.
- [40] P. Cvitanović, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia. Circle maps in the complex plane. // Fractals in Physics, 1986, P. 439-445.
- [41] S.R. Bullett, A.H. Osbaldestin, I.C. Percival. An iterated implicit complex map. // Physica 19D, 1986, P. 290-300.
- [42] S. Bullett. Dynamics of quadratic correspondences. // Nonlinearity, V. 1, 1988, P. 27-50.
- [43] H.F. Münzner, H.M. Rasch. Iterated algebraic functions and functional equations. // J. Bifurcation and Chaos, V. 1, No. 4, 1991, P. 803-822.

- [44] E.R. Vrscay. Mandelbrot sets for pair of affine transformations in the plane. // J. Phys. A: Math. Gen., V. 19, 1986, P. 1985-2001.
- [45] J. Milnor. Self-similarity and hairiness in the Mandelbrot set. // Computers in Geometry and Topology, V. 114, 1989, P. 211-257.
- [46] P. Cvitanović, J. Myrheim. Complex universality. // Commun. Math. Phys., V. 121, No. 2, 1989, P. 225-254.
- [47] P. Cvitanović, J. Myrheim. Universality for period  $n$ -tuplings in complex mappings. // Phys. Lett. A94, No. 8, 1983, P. 329-333.
- [48] А.И. Гольберг, Я.Г. Синай, К.М. Ханин. Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода. // УМН, Т. 38, №1, 1983, С. 159-160.
- [49] M. Widom, D. Bensimon, L. Kadamoff, S. Shenker. Strange objects in the complex plane. // J. Stat. Phys., V. 32, 1983, P. 443.
- [50] N.S. Manton, M. Nauenberg. Universal scaling behavior for iterated maps in the complex plane. // Comm. Math. Phys., V. 89, 1983, P. 557.
- [51] R.S. Mackay, I.C. Percival. Universal small-scale structure near the boundary of Siegel disks of arbitrary rotation number. // Physica 26D, 1987, P. 193-202.
- [52] A.F. Beardon, P.J. Rippon. A remark on the shape of quadratic Julia set. // Nonlinearity, V. 7, 1994, P. 1277-1280.
- [53] C.T. McMullen. Cusp are dense. // Anals of Math., V. 133, 1991, P. 217-247.
- [54] B. Branner. The Mandelbrot set. // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, V. 39, 1989, P. 75-105.
- [55] R. Delbourgo, P. Hughes. Islands of stability and complex universality relations. // J. Msth. Phys., V. 28, No. 1, 1987, P. 60-63.
- [56] Tan Lei. Similarity between Mandelbrot set and Julia sets. // Comm. Math. Phys., V. 134, 1990, P. 587-617.
- [57] Y. Pomeau, P. Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. // Comm. Math. Phys., V. 74, 1980, P. 189-197.
- [58] С.П. Кузнецов. Динамический хаос. М.: Наука. 2001.
- [59] A.V. Batunin. Generalities of intermittency generating functions. // Phys. Lett. A157, No.6-7, 1991, P. 361-364.

- [60] M. Widom. Renormalization group analysis of quasi-periodicity in analytic maps. // Commun. Math. Phys., V. 92, 1983, P. 121-136.
- [61] A.D. Burbanks, A.H. Osbaldestin, A. Stirnemann. Rigorous bounds on the Hausdorff dimension of Siegel disk boundaries. // Commun. Math. Phys., V. 199, 1998, P. 417-439.
- [62] A.D. Burbanks, A.H. Osbaldestin, A. Stirnemann. Fractal dimension of Siegel disc boundaries. // European Physical Journal B4, No. 3, 1998, P. 263-265.
- [63] A. Stirnemann. A renormalization proof of Siegel's theorem. // Nonlinearity, V. 7, 1994, P. 943-958.
- [64] A. Stirnemann. Existence of the Siegel disc renormalization fixed point. // Nonlinearity, V. 7, 1994, P. 959-974.
- [65] A. Burbanks, A. Stirnemann. Hölder continuous Siegel disc boundary curves. // Nonlinearity, V. 8, 1995, P. 901-920.
- [66] S. Zakeri. Dynamics of cubic Siegel polynomials. // Commun. Math. Phys., V. 206, 1999, P. 185-233.
- [67] J.T. Rogers, Jr. Diophantine conditions imply critical points on the boundaries of Siegel disks of polynomials. // Commun. Math. Phys., V. 195, 1998, P. 175-173.
- [68] T. Krüger, L.D. Pustyl'nikov, S. Troubetzkoy. The nonautonomous function-theoretic center problem. // Bol. Soc. Bras. Mat., V. 30, No. 1, 1999, P. 1-30.
- [69] А.Д. Брюно. Аналитическая форма дифференциальных уравнений. // Труды Моск. Мат. Общ., Т. 25, 1971, С. 119-262.
- [70] S. Marmi. A method for accurate stability bounds in a small denominator problem. // J. Phys. A: Math. Gen., V. 21, 1988, P. L961-L966.
- [71] F. Przytycki, M. Urbanski. Fractals in the plane – the ergodic theory methods. Cambridge University Press. Available at <http://www.math.unt.edu/~urbanski/book1.html>.
- [72] M. Kisaka. Local uniform convergence and convergence of Julia sets. // Nonlinearity, V. 8, 1995, P. 273-281.
- [73] B. Krauskopf, H. Kriete. A note on non-converging Julia sets. // Nonlinearity, V. 9, 1996, P. 601-603.
- [74] A. Kameyama. Julia sets of postcritically finite rational maps and topological self-similar sets. // Nonlinearity, V. 13, 2000, P. 165-188.

- [75] C.P. Dettmann, N.E. Frankel. Potential theory and analytic properties of a Cantor set. // J. Phys. A: Math. Gen., V. 26, 1993, P. 1009-1022.
- [76] C.J.G. Evertsz, B.B. Mandelbrot. Harmonic measure around a linearly self-similar tree. // J. Phys. A25, 1992, P. 1781-1797.
- [77] C.J.G. Evertsz, B.B. Mandelbrot, L. Woog. Variability of the form and of the harmonic measure for small off-off lattice diffusion limited aggregates. // Phys. Rev. A45, 1992, P. 5798.
- [78] T. Vicsek. Fractal growth phenomena. World Scientific, 1989.
- [79] M. Shishikura. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. // Annals of Mathematics, V. 147, No. 2, 1998, P. 225-267. (Electronic Preprint. IMS 1991/7).
- [80] D. Ruelle. Repellers for real analytic maps. // Ergod. Th. & Dynam. Sys., V. 2, 1982, P. 99-108.
- [81] C.T. McMullen. Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions. // Trans. Amer. Math. Soc., V. 300, 1987, P. 329-342.
- [82] Ruud Van Damme. On the dimension of a part of the Mandelbrot set. // J. Phys. A: Math. Gen., V. 22, 1989, P. 5249-5258.
- [83] Tan Lei. Hausdorff dimension of subsets of the parameter space for the families of rational maps. (A generalization of Shishikura's result). // Nonlinearity, V. 11, 1998, P. 233-246.
- [84] C. Tang. Fractal dimension of the Julia set for non-analytic maps. // Electronic Preprint, IMS 1997, Available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [85] F. Przytycki, S. Rohde. Porosity of Collet-Eckmann Julia sets. Electronic preprint, IMS 1996, Available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [86] C.T. McMullen. Frontiers in complex dynamics. // Bull. Amer. Math. Soc., V. 31, 1994, P. 155-172.
- [87] H. Sumi. On Hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic rational semigroups. // Electronic preprint, 1998.
- [88] J.J. Szczyrek. Hausdorff dimension of a limit set for a family of nonholomorphic perturbations of the map  $z \rightarrow z^2$ . // Nonlinearity, V. 12, 1999, P. 1439-1448.
- [89] C.T. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics III: Computation of dimension. // Amer. J. Math., V. 120, 1998, P. 283-320.

- [90] G. Havard, M. Zinsmeister. Thermodynamic formalism and variations of the Hausdorff dimension of quadratic Julia sets. // Commun. Math. Phys., V. 210, 2000, P. 225-247.
- [91] C.T. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics I: Kleinian groups and strong limits. // J. Diff. Geom., V. 51, 1999, P. 471-515.
- [92] C.T. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics II: Geometrically finite rational maps. // Comm. Math. Helv., V. 75, 2000.
- [93] C.T. McMullen. Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets. // Acta. Math., V. 180, 1998, P. 247-292.
- [94] D. Saupe. Efficient computation of Julia sets and their fractal dimension. // Physica 28D, 1987, P. 358-370.
- [95] K.J. Falconer, D.T. Marsh. Classification of quasi-circles by Hausdorff dimension. // Nonlinearity, V. 2, 1989, P. 489-493.
- [96] S. Abenda, P. Moussa, A.H. Osbaldestin. Multifractal dimensions and thermodynamical description of nearly-circular Julia sets. // Nonlinearity, V. 12, 1999, P. 19-40.
- [97] M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia. Scaling structure and thermodynamics of strange sets. // Phys. Rev. A36, No. 3, 1987, P. 1409-1420.
- [98] M.H. Jensen, G. Paladin, A. Vulpiani. Random fractals, phase transitions, and negative dimension spectra. // Phys. Rev. E50, No. 6, 1994, P. 4352-4356.
- [99] G. Servizi, G. Turchetti, S. Vaienti. Pressure and fractal indices for the Gibbs measures of hyperbolic Julia sets. // J. Phys. A: Math. Gen., V.21, 1988, P. L639-L643.
- [100] B. Stratmann, R. Vogt. Fractal dimensions for dissipative sets. // Nonlinearity, V.10, 1997, P. 565-577.
- [101] P. Senn. The Mandelbrot set for binary numbers // Am. J. Phys., V. 58, 1990, P. 1018.
- [102] I. P. Fjelstad. Extending relativity via the perplex numbers // Am. J. Phys., V. 54, 1986, P. 416.
- [103] A. Ronveaux. About 'perplex numbers' // Am. J. Phys., V. 55, 1987, P. 392.
- [104] V. Majernic. The perplex numbers are in fact binary numbers // Am. J. Phys., V. 56, 1988, P. 763.

- [105] W. Band. Comments on 'Extending relativity via the perplex numbers' // Am. J. Phys., V. 56, 1988, P. 469.
- [106] C.J. Griffin, G.C. Joshi. Octonionic Julia sets. // Chaos, Solitons & Fractals. V. 2, No. 1, 1992, P. 11-24.
- [107] C.J. Griffin, G.C. Joshi. Transition points in octonionic Julia sets. // Chaos, Solitons & Fractals. V. 3, No. 1, 1993, P. 67-88.
- [108] Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука. 1977.
- [109] Я.Г. Синай. Теория фазовых переходов: Строгие результаты. М.: Наука. 1980.
- [110] Р. Балеску. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир. 1978.
- [111] L.P. Kadanoff. Scaling laws for Ising models near  $T_c$ . // Physics 2, 1966, P. 263-272.
- [112] K.G. Wilson. Renormalization group and critical phenomena. // Phys. Rev. B4, 1971, P. 3174-3183.
- [113] K.G. Wilson. Renormalization group and critical phenomena. // Phys. Rev. B4, 1971, P. 3184-3205.
- [114] M.J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of non-linear transformations. // J. Stat. Phys., V. 19, No 1, 1978, P. 25-52.
- [115] M.J. Feigenbaum. The universal metric properties of non-linear transformations. // J. Stat. Phys., V. 21, No 6, 1979, P. 669-706.
- [116] Г.Г. Шустер. Детерминированный хаос. М.: Мир. 1988.
- [117] Г. Хакен. Синергетика. М.: Мир. 1980.
- [118] Г. Хакен. Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир. 1985.
- [119] C.N. Yang, T.D. Lee. Statistical theory of equations of state and phase transitions. 1. Theory of condensation. // Phys. Rev. 87, 1952, P. 404-409.
- [120] T.D. Lee, C.N. Yang. Statistical theory of equations of state and phase transitions. 2. Lattice gas and Ising model. // Phys. Rev. 87, 1952, P. 410-419.
- [121] D.W. Wood, R.W. Turnbull. Numerical experiments on Yang-Lee zeros. // J. Phys. A: Math. Gen., V. 19, 1986, P. 2611-2624.

- [122] B. Derrida, L. De Seze, C. Itzykson. Fractal structure of zeros in hierarchical models. // J. Stat. Phys., V. 33, No. 3, 1983, P. 559-569.
- [123] L. Onsager. Crystal statistics. 1. Two-dimensional model with an order-disorder transition. // Phys. Rev. 65, 1944, P. 117-149.
- [124] Wim van Saarloos, D.A. Kurtze. Location of zeros in the complex temperature plane: Absence of Lee-Yang theorem. // J. Phys. A: Math. Gen. 17, 1984, P. 1301-1311.
- [125] N.S. Ananikian, R.G. Ghulghazaryan. Yang-Lee and Fisher zeros of multisite interaction Ising models on the Cayley-type lattices. // Phys. Lett. A277, 2000, P. 249-256.
- [126] N.S. Ananikian, N.Sh. Izmailian, K.A. Oganessyan. An Ising spin-S model on generalized recursive lattice. // Physica A254, 1998, P. 207-214.
- [127] N.S. Ananikian, S.K. Dallakian, B. Hu, N.Sh. Izmailian, K.A. Oganessyan. Chaos in  $Z(2)$  gauge model on a generalized Bethe lattice of plaquettes. // Phys. Lett. A248, 1998, P. 381-385.
- [128] N.S. Ananikian, S.K. Dallakian. Multifractal approach to three-site antiferromagnetic Ising model. // Physica D107, 1997, P. 75-82.
- [129] N.S. Ananikian, S.K. Dallakian, B. Hu. The chaotic properties of Q-state Potts model on the Bethe-lattice:  $Q < 2$ . // Complex Systems, V. 11, 1997, P. 213-222.
- [130] A.Z. Akhayan, N.S. Ananikian. Global Renne lattice consideration of the spin-1 Ising model. // J. Phys. A: Math. Gen., V. 29, 1996, P. 721-731.
- [131] R.G. Ghulghazaryan, N.S. Ananikian, P.M.A. Sloom. Yang-Lee zeros of Q-state Potts model on recursive lattices. // Phys. Rev. E (in press); Electronic preprint arXiv:cond-mat/0202441 v2 14 May 2002.
- [132] R.G. Ghulghazaryan, N.S. Ananikian. Partition function zeros of the one-dimensional Potts model: The recursive method. // Electronic preprint arXiv:cond-mat/0204424 v1 19 Apr 2002.
- [133] R. Artuso, P. Cvitanovic. Phase transitions on strange irrational sets. // Phys. Rev. A 39, No. 1, 1989, P. 268-281.
- [134] N. Gupte, R.E. Amritkar. Exponential dimension: Thermodynamic formalism and inversion. // Phys. Rev. A 41, No. 8, 1990, P. 4285-4293.
- [135] B. Hu, B. Lin. Yang-Lee zeros, Julia sets, and their singularity spectra // Phys. Rev. A 39, 1989, P. 4789-4796.

- [136] D. Katzen, I. Procaccia. Phase transitions in the thermodynamic formalism of multifractals. // *Phys. Rev. Lett.* V. 58, No. 12, 1987, P. 1169-1172.
- [137] А.М. Дыхне. Проводимость двумерной двухфазной системы. // *ЖЭТФ*, Т. 59, 1970, P. 110-115.
- [138] H.A. Abdusalam. Renormalization group method and Julia sets. // *Chaos, Solitons and Fractals*, V. 12, 2001, P. 423-428.
- [139] А.К. Сарычев. Масштабная инвариантность и протекание в случайном поле. // *ЖЭТФ*, Т. 72, 1977, P. 1001-1004.
- [140] M.R. Schroeder. Self-similarity and fractals in science and art. // *J. Audio. Eng. Soc.* V. 37, No. 10, 1989, P. 795-808.
- [141] M.B. Hastings. The dielectric breakdown model at small  $\eta$ : Pole dynamics. // Electronic preprint arXiv:cond-mat/9910274, 1999.
- [142] M.B. Hastings. Renormalization theory of stochastic growth. // Electronic preprint arXiv:cond-mat/9607007, 1996.
- [143] M.B. Hastings, L.S. Levitov. Laplacian growth as one-dimensional turbulence. // *Physica D116*, 1998, P. 244-253.
- [144] M.G. Stepanov, L.S. Levitov. Laplacian growth with separately controlled noise and anisotropy. // *Phys. Rev.* E63, 2001, P. 061102-061115.
- [145] B. Davidovitch, A. Levermann, I. Procaccia. Convergent calculation of the asymptotic dimension of diffusion-limited aggregates: Scaling and renormalization of small clusters. // Electronic preprint arXiv:cond-mat/0008053 v1, 3 August 2000.
- [146] M.H. Jensen, A. Levermann, J. Mathiesen, B. Davidovitch, I. Procaccia. Thermodynamic formalism of the harmonic measure of diffusion-limited aggregates: Phase transition and converged  $f(\alpha)$ . // Electronic preprint arXiv:cond-mat/0107024 v3, 28 August 2001.
- [147] B. Davidovitch, H.G.E. Hentschel, Z. Olami, I. Procaccia, L.M. Sander, E. Somfai. Diffusion-limited aggregation and iterated conformal maps. // *Phys. Rev.* E59, 1999, P. 1368-1378.
- [148] B. Davidovitch, M.J. Feigenbaum, H.G.E. Hentschel, I. Procaccia. Conformal dynamics of fractal growth patterns without randomness. // *Phys. Rev.* E62, 2000, P. 1706-1715.
- [149] B. Davidovitch, I. Procaccia. Dimension of fractal growth patterns as a dynamical exponent. // *Phys. Rev. Lett.* V. 85, 2000, P. 3608-3611.

- [150] B. Davidovitch, A. Levermann, I. Procaccia. Convergent calculation of the asymptotic dimension of diffusion limited aggregates: Scaling and renormalization of small clusters. // Phys. Rev. E62, 2000, P. R5919-R5922.
- [151] F. Barra, B. Davidovitch, I. Procaccia. Iterated conformal dynamics and Laplacian growth. // Phys. Rev. E65, 2000, P. 046144-046156.
- [152] B. Duplantier. Conformally invariant fractals and potential theory. Phys. Rev. Lett, V. 84, 2000, P. 1363-1367.
- [153] J.H. Hubbard, P. Papadopol. Newton's methode applied to two quadratic equations in  $\mathbb{C}^2$  viewed as a global dynamical system. // Electronic preprint, IMS 00-01, 2000, available at <http://www.math.sunysb.edu/preprints.html>.
- [154] А. Лихтенберг, Б. Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
- [155] S. Tomsovic, D. Ullmo. Chaos-assisted tunnelling. // Phys. Rev. E50, 1994, P. 145-162.
- [156] E. Doron, S.D. Frischat. Semiclassical description of tunneling in mixed systems: Case of the annular billiard. // Phys. Rev. Lett., V. 75, 1977, P. 3661-3664.
- [157] S.C. Creagh, N.D. Whelan. The statistics of chaotic tunnelling. // Phys. Rev. Lett., V. 84, 2000, P. 4084-4087.
- [158] A. Shudo, K.S. Ikeda. Complex classical trajectories and chaotic tunnelling. // Phys. Rev. Lett., V. 74, 1995, P. 682-685.
- [159] T. Onishi, A. Shudo, K.S. Ikeda, K. Takahashi. Tunnelling mechanism due to chaos in a complex phase space. // Phys. Rev. E64, 2001, P. 025201-025205(R).
- [160] A. Shudo, K.S. Ikeda. Stokes phenomenon in chaotic systems: Pruning trees of complex paths with principle of exponential dominance. // Phys. Rev. E64, 2001, P. 025201-025205(R).
- [161] C.G. Callan. Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections. // Phys. Rev. D16, 1977, P. 1762-1766.
- [162] S. Creagh, N.D. Whelan. Homoclinic structure controls chaotic tunnelling. // Phys. Rev. Lett., V. 76, 1996, P. 4151-4154.
- [163] S. Creagh, N.D. Whelan. Complex periodic orbits and tunnelling in chaotic potential. // Phys. Rev. Lett., V. 77, 1996, P. 4975-4979.

- [164] J. Peinke, J. Parisi, B. Rohricht, O.E. RöSSLer. Instability of the Mandelbrot set. // Zeitsch. Naturforsch. A42, No. 3, 1987, P. 263-266.
- [165] M. Klein. Mandelbrot set in a non-analytic map. // Zeitsch. Naturforsch. A43, Nos. 8-9, 1988, P. 819-820.
- [166] B.B. Peckham. Real perturbation of complex analytic families: points to regions // Int. J. of Bifurcation and Chaos, V. 8, 1998, P. 73.
- [167] W.D. Crowe, R. Hasson, P.J. Rippon, P.E.D. Strain-Clark. On the structure of the Mandelbar set. // Nonlinearity 2, No 4, 1989, P. 541-553.
- [168] A. Rodriguez-Vazquez, J.L. Huertas, A. Rueda, B. Perez-Verdu, and L.O. Chua. // Proc. IEEE 75, 1987, P. 1090.
- [169] А. Родригес-Васкес, Х.Л. Хуэртас, А. Руэда, Б. Перес-Вердью, Л.О. Чжуа. Хаос в схемах на переключаемых конденсаторах. // ТИИЭР, Т. 75, №8, 1997, P. 124-140.
- [170] А.Б. Беспятов, В.И. Пономаренко. Сложная динамика схемы на переключаемых конденсаторах. Учебно-методическое пособие. Изд-во ГосУНЦ "Колледж". 1998.
- [171] M.J. Feigenbaum. Universality in chaos. // Physica D7, 1983, P. 16.
- [172] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Commun. Math. Phys., V.50, 1976, P. 69.
- [173] M.Hénon. On the numerical computation of Poincaréaps // Physica D5, 1982, P. 412-414.
- [174] В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астазов. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Изд. Саратовского университета. 1999.
- [175] J.F. Heagy. // Physica D57, 1992, P. 436.
- [176] Ф. Мун. Хаотические колебания. М.:Мир, 1990.
- [177] А.П. Кузнецов, А.Ю. Потапова. Особенности сложной динамики нелинейных осцилляторов с катастрофами Тома. // Изв. ВУЗов. ПНД, Т. 8, №6, 2000, С. 91.
- [178] Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев, Д.В. Соколов. Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике. - Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 1996.

- [179] I. Brodie, C.A. Spindt. Vacuum microelectronics. Adv Electronics. Electron Phys. 1992, 83:106.
- [180] M.W. Geis, J.C. Twichell, B.O. Nozler, et. al. Diamond field-emission cathodes. // VI Int. Vac. Microelectronics Conf. Tech. Digest. Newport, Rhode Island, 1993, P. 160-161.
- [181] W. B. Choi et. al // IX Int. Vac. Microelectronics Conf. Tech. Digest. St.-Petersburg, Russia, 1996, P. 288-292.
- [182] Yu.V. Gulyaev, N.I. Sinisyn, G.V. Torgashov et. al. Work function estimate for electrons emitted from nanotube carbon cluster films. // J. Vac. Sci. Technol. B15, (2), 1997, P. 422-424.
- [183] R.P. Wilshaw, E.C. Boswell. Field emission from pyramidal cathodes covered in porous silicon. // J. Vac. Sci. Technol. B12 (2), 1994, P. 662-665.
- [184] I. Kleps, D. Nikolaesku, N. Garsia, P. Serena, A. Gil, A. Zlatkin // 44th IFES, Tsukuba, Japan, 1997.
- [185] T. Wells et. al // IX Int. Vac. Microelectronics Conf. Tech. Digest. St.-Petersburg, Russia, 1996, P. 349-353.
- [186] L. G. Fleming et. al // IX Int. Vac. Microelectronics Conf. Tech. Digest. St.-Petersburg, Russia, 1996, P. 370-374.
- [187] J.H. Jung, B.K. Ju, Y.H. Lee, J. Jang, M.H. Oh. Enhancement of electron emission efficiency and stability of molybdenum-tip field emitter array by diamond-like carbon coating. // IEEE Electron Device Lett. V.18, No.5, 1997, P.197.
- [188] T. Habermann, A. Göhl, G. Müller, et. al. Uniform field-emission from poly-crystalline CVD-diamond films. // IX Int. Vac. Microelectronics Conf. Tech. Digest. St.-Petersburg, Russia, 1996, P. 258-262.
- [189] C.A. Spindt, I. Brodie, L. Humphrey, E.R. Westerberg. Physical properties of thin-film field emission cathodes with molybdenum cones. // J. Appl. Phys. V. 47, No 12, 1976, P. 5248-5263.
- [190] N.M. Ryskin, A.G. Rozhnev, D.I. Trubetskov. Theoretical study of field emission from non-uniform emitters. // Technical Digest of IVMC'97. Kyongju, Korea, 1997.
- [191] А.А. Солнцев. Нелинейные явления в вакуумных микроэлектронных структурах. // Изв. ВУЗов. ПНД. Т. 6, № 1, 1998, С. 70-72.

- [192] Yu.A. Grigoriev, A.I. Petrosyan, V.V. Penzyakov, et. al. Experimental study of matrix carbon field-emission cathodes and computer aided desing of electron guns for microwave power devices, exploring these cathodes. // J. Vac. Sci. Technol. B15, (2), 1997, P. 503-506.
- [193] О.Б. Исаева. О возможности реализации феноменов комплексной аналитической динамики в физических системах, построенных из связанных элементов, демонстрирующих удвоения периода. // ИЗВ. ВУЗов ПНД. Т. 9, №6, 2001, С. 129-146.
- [194] O.B. Isaeva, S.P. Kuznetsov, V.I. Ponomarenko. Mandelbrot set in coupled logistic maps and in an electronic experiment. // Phys. Rev. E. V. 64, 2001, 055201(R).
- [195] O.B. Isayeva, M.V. Eliseev, A.G. Rozhnev, N.M. Ryskin. Properties of electron field emission from fractal surface. // Solid State Electronics. V. 45, 2001, P. 871-877.
- [196] О.Б. Исаева, М.В. Елисеев, А.Г. Рожнев, Н.М. Рыскин. Моделирование автоэлектронной эмиссии с фрактальной поверхности. // ИЗВ. ВУЗов ПНД. 7, №5, 1999, С. 33-43.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Комплексные отображения и ассоциирующиеся с ними фрактальные объекты</b>	<b>3</b>
1.1	Одномерные комплексные аналитические отображения как специальный класс динамических систем. Их связь с двумерными действительными отображениями. Условия Коши-Римана . . . . .	3
1.2	Множество Мандельброта и множества Фату и Жюлиа как феномены комплексной аналитической динамики . . . . .	4
1.3	Бифуркационный анализ множества Мандельброта . . . . .	7
1.4	Классификация множеств Жюлиа. Диски Зигеля, кольца Эрмана, цветок Ло-Фату . . . . .	15
1.5	Основные свойства и методы построения множеств Жюлиа . . . . .	20
1.6	Потенциал множества Жюлиа и множества Мандельброта . . . . .	23
1.7	Хаусдорфова размерность фрактальных объектов, возникающих в комплексной аналитической динамике . . . . .	25
1.8	Обобщения комплексных чисел . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Физические приложения комплексной аналитической динамики</b>	<b>34</b>
2.1	Возникновение множества Мандельброта при исследовании динамики движения частицы в магнитном поле . . . . .	34
2.2	Проблема сходимости метода Ньютона (задача Кэли) . . . . .	35
2.3	Множество Мандельброта для связанных систем. Экспериментальная реализация . . . . .	37
2.4	Система связанных нелинейных осцилляторов с гармоническим внешним воздействием . . . . .	43
2.5	Электронная эмиссия с фрактального катода . . . . .	49
2.6	Агрегация фрактальных кластеров . . . . .	51
2.7	Теория фазовых переходов . . . . .	52
2.8	Теория перколяции . . . . .	58
2.9	Динамика иерархических цепочек импедансов . . . . .	61
2.10	Квантовое туннелирование в хаотической системе . . . . .	61
	<b>Литература</b>	<b>65</b>