Дмитриев Вадим Владимирович

# Лекции по многомерной гравитации



САРАТОВ
2012

# Содержание

# Введение

Предположение о том, что наше пространство может иметь более трех пространственных измерений, возникло еще в начале XX века и до сих пор привлекает большое внимание. Идея использовать дополнительное пятое измерение для объединения гравитации и электромагнетизма впервые появилась независимо у Нордстрема [1] и Калуцы [2]. Еще до создания общей теории относительности Нордстрем рассматривал скалярную теорию гравитации как составную часть максвелловской электродинамики в пятимерном пространстве. В отличие от него, Калуца уже воспользовался эйнштейновской теорией гравитации и показал, что пятимерная гравитация в вакууме содержит в себе четырехмерную гравитацию в присутствии электромагнитного поля и уравнения Максвелла. Практически все последующие попытки объединения с помощью дополнительных измерений исходили из этого замечательного результата.

Общей проблемой всех многомерных теорий является ненаблюдаемость дополнительных измерений в низкоэнергетическом приближении. Один из механизмов, который в неявном виде содержится в работе Калуцы, был выражен в явном виде и уточнен Клейном [3]. Модель Калуцы – Клейна (KK) предполагает, что дополнительные измерения компактны и имеют очень малый размер порядка длины Планка $l_{Pl} = 1/M_{Pl}$. На таких масштабах практическое обнаружение скрытых размерностей выходит за рамки современных экспериментальных возможностей.

К сожалению, оригинальная идея Калуца – Клейна оказалась нежизнеспособной, а многочисленные модификации этого подхода, предложенные Эйнштейном, Йорданом, Бергманом и другими [4], использовали не более пяти измерений вплоть до появления теории слабых и сильных взаимодействий, которые требовали включения новых дополнительных измерений. Тем не менее, исследования, направленные на разработку многомерных теорий, продолжались и привели к созданию скалярно-тензорной гравитации Бранса – Дикке [5]. При определенных значениях параметров теория Бранса – Дикке (BD) и ее современные модификации [6] вполне согласуются с экспериментальными данными и широко используются в различных космологических моделях.

В 60-х годах в спектре адронов были обнаружены частицы с линейной зависимостью квадрата энергии от углового момента (спина) – траектории Редже. Для описания всего спектра частиц было предложено получать их путем квантования одного единого объекта – струны, которая определялась действием Намбу – Гото. Процедура квантования приводила к тому, что последовательную теорию нельзя было сформулировать в четырех измерениях. Кроме того, в спектре замкнутой струны появлялась безмассовая частица со спином 2, которая отсутствовала в спектре адронов. Позже Шерк и Шварц показали [7], что теория струн – не просто теория сильного взаимодействия, а модель всех известных фундаментальных взаимодействий, в том числе и гравитации, причем безмассовое поле спина 2 отождествлялось с переносчиком гравитационного взаимодействия – *гравитоном*. Естественно необходимо было учитывать появление новых дополнительных полей, соответствующих другим струнным возбуждениям, а также некоторую модификацию взаимодействия, связанную с нелокальностью теории струн, которая поможет решить проблему построения квантовой теории свободной от расходимостей. Все это в дальнейшем было сделано Грином и Шварцем в *теории суперструн* [8].

Сравнительно недавно появились многомерные теории, в которых дополнительные измерения могут быть макроскопическими и даже некомпактными. При этом эффективная четырехмерность достигается за счет локализации материи в многомерном пространстве на его четырехмерных подмногообразиях, так называемых *бранах* (тогда как гравитация может распространяться во всем объеме).

Исследование таких сценариев с дополнительными измерениями было мотивировано в первую очередь проблемой иерархии взаимодействий. Эта проблема заключается в наличии огромного разрыва между масштабом электрослабого взаимодействия 1 *ТэВ* и планковским масштабом $10^{19}$ *ГэВ*. Данные модели могут быть грубо разделены на два типа. Первые из них берут начало от работ Аркани-Хамеда – Димопулоса – Двали (ADD) [9]. В них фундаментальный масштаб многомерного гравитационного взаимодействия может достигать *ТэВ*-ных энергий за счет больших дополнительных измерений. Другой тип – это собственно модели Рэндалл – Сундрума (RS) [10], в которых метрика, в отличие от моделей KK и ADD, не факторизуется (не является прямым произведением пространства Минковского и дополнительного измерения), а ее структура ведет к экспоненциальной иерархии между электрослабым и планковским масштабами. Таким образом, обе модели предсказывают сильное гравитационное взаимодействие в многомерном пространстве уже не при планковских энергиях, а при энергиях несколько и гравитационные эффекты можно будет наблюдать на ускорителях [11].

В основе модели Рэндалл – Сундрума с двумя бранами (RS1) лежит компактификация многомерного пространства на $S^1/Z_2$-орбифолде – такая же, как и в предложенном Хоравой и Виттеном механизме для некоторых типов струн [12]. Поэтому можно утверждать, что сценарии RS и их обобщения дают феноменологические модели, отражающие, по крайней мере, некоторые свойства М-теории. Кроме того, модель Рэндалл – Сундрума с одной браной RS2 может быть полезна для реализации голографического подхода, который является следствием Ads/CFT – соответствия [13].

Цель данного учебного пособия – познакомить студентов/аспирантов с основными фактами и понятиями теории суперструн и многомерных теорий гравитации.

Теоретические и практические результаты данной работы рекомендуются для использования при преподавании учебного курса «Квантовая гравитация» для магистров по профилю подготовки «Теоретическая физика».

# I. Обобщения общей теории относительности

В основе общей теории относительности (ОТО) лежат уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

В общем случае это система десяти нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент метрического тензора. Любое решение уравнений Эйнштейна описывает какое-то распределение материи, которое формирует гравитационное поле. Например, ОТО предсказывает существование таких экзотических объектов как черные дыры (статическая сферически-симметричная метрика Шварцшильда). Одним из следствий волнового характера уравнений ОТО, которого нет в теории тяготения Ньютона – гравитационные волны. Плоская гравитационная волна является квадрупольной и описывает безмассовое поле спина 2.

Совершенно естественно ожидать, что как любое волновое поле гравитация должна проявлять квантовые свойства (на малых масштабах). Однако наивные попытки проквантовать ОТО потерпели неудачу. Несовместимость кватновой механики с ОТО была указана еще Гейзенбергом – присутствие размерной константы взаимодействия делает невозможной процедуру перенормировки (диаграммы разных порядков нельзя складывать).

Еще одна проблема ОТО – это наличие сингулярностей, которые возникают в большинстве точных решений (в центре черной дыры и в космологических моделях). В этих особых точках пространство-время теряет гладкость и приводят к бесконечной плотности, давлению и т.д.

Все эти проблемы недвусмысленно указывают на то, что ОТО не является законченной теорией гравитации и имеет свои границы применимости. Основной подход к теориям, расширяющих ОТО, это стремление описать гравитацию как часть будущей «Теории Всего», объединяющей все возможные взаимодействия. Эти модели используют более сложные геометрические объекты, чем риманова геометрия, новые дополнительные физические поля помимо метрики. Многие из этих сценариев основаны на идеях Калуцы – Клейна, с которых мы и начнем наш обзор.

В дальнейшем будем работать в «естественной» системе единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

## *1. Сценарий Калуцы – Клейна*

Калуца предложил объединить гравитацию и электродинамику, используя одно дополнительное измерение. Предполагая, что никакие величины не зависят от пятой координаты («цилиндрическое условие»), можно опустить производные по координате дополнительного измерения. Позже Клейн заметил, что дополнительное измерение может быть компактифицировано на масштабах порядка длины Планка, тогда это обеспечит его эффективную ненаблюдаемость. Эта объединенная модель и называется теорией Калуцы – Клейна.

Рассмотрим пятимерное обобщение действия Эйнштейна

$$S_5 = \frac{1}{16\pi G_5} \int \hat{R} \sqrt{-\hat{g}}\, d^4 x dy, \tag{2.2}$$

где $y$ – пятая координата, а $G_5$ – пятимерная гравитационная постоянная. Метрический тензор запишем в виде

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2\phi^2 A_\mu A_\nu & \kappa^2\phi^2 A_\nu \\ \kappa\phi^2 A_\mu & \phi^2 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Мы видим, что в теории присутствует четырехмерные гравитационное поле $g_{\mu\nu}$, векторное поле $A_\mu$, подчиняющееся уравнениям Максвелла, и безмассовое скалярное поле $\phi$. Если дополнительное измерение компактифицировано на окружность $S^1$ длины $2\pi L$.

$$y \leftrightarrow y + 2\pi nL, \quad n = 0,1,2,3\ldots,.$$

то несложно показать, что масса четырехмерной КК-моды $n$ определяется выражением

$$m_n^2 = \frac{n^2}{L^2}. \tag{2.4}$$

Очевидно, что в масштабе энергий $E < 1/L$ даже первый массивный уровень КК-спектра не может быть возбужден и соответствующее компактное измерение ненаблюдаемо.

Интегрируя действие (2.2) по координате $y$ в пределах от 0 до $2\pi L$, получаем

$$S = \frac{2\pi L}{16\pi G_5}\int d^4x\sqrt{-g}\phi\left[R - \frac{1}{4}\kappa^2\phi^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{2\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi}{3\phi^2}\right]. \tag{2.5}$$

Сравнивая выражение (2.5) с четырехмерным действием Эйнштейна

$$S_4 = \frac{1}{16\pi G_4}\int d^4x R\sqrt{-g}\,. \tag{2.6}$$

мы находим соотношение между пятимерной гравитационной постоянной $G_5$ и четырехмерной гравитационной постоянной $G_4$

$$G_5 = G_4\,(2\pi L). \tag{2.7}$$

Если положить $\phi = const$, тогда первые две компоненты действия (2.5) представляют из себя просто действие для гравитационного и электромагнитного поля. Третья компонента – это действие для безмассового скалярного поля Клейна – Гордона. Рассмотрим теперь случай, когда электромагнитное поле отсутствует $(A_\mu = 0)$. Тогда действие (2.5) принимает вид

$$S = \frac{1}{16\pi G_4}\int d^4x\sqrt{-g}R\phi\,. \tag{2.8}$$

А это, в свою очередь, является частным случаем $\omega = 0$ действия Бранса – Дикке

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R\phi}{16\pi G_4} - \omega\frac{\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi}{\phi}\right). \tag{2.9}$$

где $\omega$ – безразмерный параметр Бранса – Дикке (значение этого параметра должно быть больше $\sim 3600$, поэтому такая простая модель нежизнеспособна).

Несмотря на успешное объединение гравитации и электродинамики, теория Калуца – Клейна имеет ряд недостатков. Теория не может объяснить, почему гравитация намного слабее электромагнетизма и почему дополнительные размерности должны быть очень маленькими. Теория Калуца – Клейна также не может объединить гравитацию с квантовой теорией. Тем не менее, идеи Калуцы

– Клейна получили дальнейшее развитие в современной физике. Более подробно о теории Калуца – Клейна можно посмотреть в работе [14].

## 2. Скалярно-тензорная гравитация Бранса – Дикке

Скалярно-тензорная теория Бранса – Дикке описывается лагранжианом с неминимальным взаимодействием (здесь и далее $M_{Pl}^2 = 1$)

$$L = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\xi\phi^2 R - \frac{1}{2}\varepsilon\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + L_{matter}\right), \tag{2.10}$$

где оригинальный параметр $\omega$ выражен в терминах $\xi$ ($\varepsilon = \mathrm{sign}\,\omega$)

$$\varepsilon\xi^{-1} = 4\omega\,. \tag{2.11}$$

Для космологических моделей удобно также использовать другое скалярное поле $\varphi = 1/2\xi\phi^2$. Второе слагаемое в (2.10) обусловлено «минимальным» взаимодействием с гравитацией, а первое слагаемое исчезает в плоском пространстве Минковского и поэтому называется *неминимальным*.

Уравнение поля имеют следующий вид

$$2\varphi G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^{\phi}_{\mu\nu} - 2(g_{\mu\nu}\mathrm{D} - \nabla_\mu\nabla_\nu)\varphi\,, \tag{2.12}$$

$$\mathrm{D}\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) = \zeta^2 T\,, \tag{2.13}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0\,, \tag{2.14}$$

где $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материи (без скалярного поля !), $\mathrm{D}$ – оператор Д'Аламбера, $\nabla_\mu$ – ковариантная производная, а тензор энергии-импульса скалярного поля

$$T^{\phi}_{\mu\nu} = \varepsilon(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi)\,. \tag{2.15}$$

Уравнение (2.13) можно представить в виде

$$2\varphi R + \varepsilon\phi\mathrm{D}\phi = 0\,, \tag{2.16}$$

с другой стороны $g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -R$, окончательно получаем

$$\mathrm{D}\varphi = \zeta^2 T\,, \tag{2.17}$$

где $\zeta$ определяется выражением

$$\zeta^{-2} = 6 + \varepsilon\xi^{-1} = 6 + 4\omega\,. \tag{2.18}$$

Из уравнений (2.17) и (2.18) взаимодействие материи со скалярным полем исчезает при $\xi \to 0$ или $\omega \to \infty$. Восстанавливая размерность

$$\zeta^2 = M_{Pl}^{-2}\frac{1}{6 + \varepsilon\xi^{-1}} = \frac{4\pi G}{3 + 2\omega}\,, \tag{2.19}$$

получаем в этом пределе теория Бранса и Дикке в точности переходит в теорию Эйнштейна.

Отметим, что роль скалярного поля в теории Бранса и Дикке сводится к модифицированию уравнений гравитационного поля. Если метрический тензор известен, то воздействие гравитации на произвольные физические системы определяется также как и в ОТО.

Исходя из астрофизических наблюдений в Солнечной системе взаимодействие скалярного поля с материей ограничено параметрами [15]

$$\omega \geq 3.6 \times 10^3 \text{ или } \xi \leq 7.0 \times 10^{-5}. \tag{2.20}$$

Не касаясь оригинальных работ Йордана, Бранса и Дикке, отметим что скалярные поля естественным образом получаются при размерной редукции многочисленных многомерных теорий гравитации.

## 3. *Альтернативные теории гравитации*

Помимо минимального или неминимального объединения гравитации со скалярным или векторным полем в настоящее время пользуются популярностью такой вариант расширения ОТО, как *f(R)* теории [16]. Он заключается в добавлении в лагранжиан помимо скалярной кривизны *R*, какой-либо функции от *R* или других инвариантов кривизны. В уравнениях поля появляются производные от метрического тензора четвертого порядка и выше (в ОТО не выше второго порядка), что является прямым следствием квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени. В зависимости от вариационного принципа различают метрическую *f(R)* гравитацию (второго порядка) и *f(R)* в формализме Палатини (первого порядка).

В метрическом формализме *f(R)* гравитация описывается действием со связностями Леви-Чевита

$$S_{met} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\, f(R) + S_{matter}\ , \tag{2.21}$$

вариация которого по метрике приводит к уравнению

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\mathrm{D}) f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.22}$$

где штрих – производная по всему аргументу и $\mathrm{D} \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$. Используя след уравнения (2.22)

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\mathrm{D}f' = \kappa T, \tag{2.23}$$

нетрудно показать, что из $T = 0$ больше не следует $R = 0$ или даже *const*. Можно также записать уравнения поля в форме уравнений Эйнштейна, используя эффективный тензор энергии-импульса

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu}\frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} + \\ + \frac{\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\mathrm{D}f'(R)}{f'(R)} \equiv \frac{\kappa}{f'(R)}\left(T_{\mu\nu} + T^{eff}{}_{\mu\nu}\right), \end{aligned} \tag{2.24}$$

где по аналогии со скалярно-тензорной гравитацией можно ввести эффективную гравитационную постоянную $G_{eff} \equiv G / f'(R)$.

В формализме Палатини тензор Риччи $\hat{R}_{\mu\nu}$ (и соответственно скалярная кривизна $\hat{R} = g^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu}$) строится с помощью независимых связностей, а действие имеет вид

$$S_{pal} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\, f(\hat{R}) + S_{matter} \tag{2.25}$$

и приводит к простым уравнениям поля

$$f'(\hat{R})\hat{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} f(\hat{R})g_{\mu\nu} = \kappa G T_{\mu\nu}, \tag{2.26}$$

$$\hat{\nabla}_{\lambda} \left(\sqrt{-g}\, f'(\hat{R}) g^{\mu\nu}\right) = 0. \tag{2.27}$$

Из уравнения (2.27) несложно получить отношения между связностями

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \frac{1}{f'(\hat{R})^2} (\nabla_{\mu} f'(\hat{R}))(\nabla_{\nu} f'(\hat{R})) - \frac{1}{f'(\hat{R})} (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathrm{D}) f'(\hat{R}). \tag{2.28}$$

Основные свойства *f(R)* гравитации в формализме Палатини:

> *когда* $f(\hat{R}) = \hat{R}$, *теория переходит в ОТО;*
>
> *для материи с* $T = 0$ *величины* $\hat{R}$, $f(\hat{R})$, $f'(\hat{R})$ *являются константами и теория переходит в ОТО с космологической постоянной;*
>
> *в общем случае* $T \neq 0$ *в уравнениях поля появятся производные от ТЭИ (в отличие от ОТО).*

Другим интересным обобщением ОТО является метрическое обобщение используемой Эйнштейном римановой геометрии – это так называемая финслерова геометрия [17]. Основная идея состоит в замене интервала (длина $N$ – вектора $r^p$) как квадратного корня из квадратичной формы на более общую финслерову метрическую функцию $F(r^p)$, обладающей свойством однородности, гладкости и не сингулярной в рассматриваемой области.

Финслерова метрическая функция (ФМФ) определяет метрический тензор

$$g_{pq}(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(r)}{\partial r^p \partial r^q}. \tag{2.29}$$

ФМФ очевидно сводится к (псевдо)евклидовой, когда (2.29) не зависит от аргумента $r^p$, т.е. равен нулю так называемый картановский тензор кручения

$$C_{pqs}(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pq}(r)}{\partial r^s}. \tag{2.30}$$

Кроме того, ФМФ определяет ($N$-1) – мерную гиперповерхность (индикатрису), задаваемую уравнением $F(r) = 1$.

Финслерова геометрия применяется для изучения эффектов, связанных с нарушением лоренц-инвариантности и анизотропией пространства времени, а также является вполне самостоятельной областью дифференциальной геометрии.

# II. Теория суперструн и М-теория

Классическая теория релятивистских струн является основой для построения квантовой теории струн. Понятие об одномерном объекте (струне), движущемся в D-мерном пространстве-времени, является естественным обобщением понятия о точечном объекте (частице). Поэтому одним из способов построения классической релятивистской теории струны является геометрическое обобщение теории, описывающей движение релятивистской частицы. Действие для свободной материальной частицы

$$S = -mc^2 \int_{t1}^{t2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,, \tag{3.1}$$

где интеграл берется вдоль мировой линии между двумя заданными событиями.

## *1. Бозонная струна*

Струна описывает при своем движении в $D$-мерном плоском пространстве-времени двумерную поверхность, называемую мировым листом. Пространственно-временная эволюция струны характеризуется $D$ функциями $x'^{\mu}(\sigma,\tau),\ \mu = 0,1,\dots,D-1,$ задающими отображение мирового листа $(\sigma,\tau)$ в пространство-время $(x^{\mu})$.

$$x'^{\mu}(\sigma,\tau) \equiv \frac{\partial x^{\mu}(\sigma,\tau)}{\partial \sigma},\quad \dot{x}^{\mu}(\sigma,\tau) \equiv \frac{\partial x^{\mu}(\sigma,\tau)}{\partial \tau}\,. \tag{3.2}$$

Здесь $\sigma$ – это координата точки на струне, а $\tau$ является параметром эволюции. Одним из основных принципов построения теории струн является идея репараметризационной инвариантности (R – инвариантности) относительно преобразований:

$$\tau \to \tau = f_{\tau}(\sigma,\tau),\ \sigma \to \sigma = f_{\sigma}(\sigma,\tau)\,. \tag{3.3}$$

Этот важный геометрический принцип заключается в том, что динамика струны должна зависеть лишь от внутренней геометрии мирового листа, а не от выбора координат.

Чтобы отдельные точки струны не двигались со скоростью, большей скорости света, потребуем, чтобы вектор $\dot{x}^{\mu}(\sigma,\tau)$ на мировом листе был времениподобным, а вектор $x'^{\mu}(\sigma,\tau)$ – пространственноподобным. Удобно использовать заглавные буквы $X^{\mu}$ для координат на струне, тогда можно не писать аргументы $(\sigma,\tau)$.

Геометрическим аналогом длины мировой линии частицы для струны является площадь поверхности мирового листа. Поэтому простейшее действие для струны имеет вид

$$S = -\frac{T_0}{c}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X}^{\mu}\cdot X'_{\mu})^2 - (\dot{X}^{\mu})^2 (X'^{\mu})^2}\,. \tag{3.4}$$

Чтобы показать геометрический смысл действия, введем двумерную метрику $\gamma_{\alpha\beta}(\xi)$, индуцированную на мировом листе:

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X \equiv \eta_{\mu\nu}\, \partial_\alpha X^\mu \cdot \partial_\beta X^\nu \equiv (\xi^1, \xi^2)\,; \quad \alpha\,, \beta = 1\,, 2$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (\dot{X}^\mu)^2 & \dot{X}^\mu \cdot X'^\mu \\ \dot{X}^\mu \cdot X'^\mu & (X'^\mu)^2 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

При этом можно записать действие (3.4) в виде:

$$S_{NG} = -\frac{T_0}{c}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, d\sigma\, \sqrt{-\gamma}\,, \quad \gamma = det(\gamma_{\alpha\beta})\,. \tag{3.6}$$

Таким образом, действие струны пропорционально площади поверхности мирового листа и R-инвариантно по построению. Действие известно в литературе как действие Намбу – Гото [18].

## 2. *Суперсимметричная струна*

У бозонной струны нет фермионных состояний и, следовательно, она не может быть использована в качестве единой теории физики элементарных частиц и гравитации. Один из способов, представить фермионные состояния, известен как струны Рамона – Невё – Шварца (RNS струны). В этой модели вводятся новые динамические поля $\psi^\mu = (\psi^\mu_A)$ на мировых листах, их вектора относятся к пространству-времени, но спиноры относятся к мировым листам. Наличие таких полей в сочетании с определенным выбором граничных условий дает состояния, в которых спиноры относятся к пространству-времени.

Модель RNS содержит пространственно-временные бозоны и фермионы, но также присутствует тахионное состояние. Есть проекции спектра которая одновременно убирает тахион и делает теорию пространства-времени суперсимметричной. При более внимательном рассмотрении видно, что эти проекции являются обязательными, но требует согласованности на квантовом уровне. Таким образом, получается три последовательные теории суперсимметричных струн, называемые тип I, тип IIA и типа IIB. Есть еще два типа, так называемых, теорий гетеротических струн, которые являются результатом сочетания типа II и бозонной струны [19].

Обсудим теперь классические и квантовые свойства RNS струн. Действие модели RNS получается из действия Полякова [20]

$$S_{Pol} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma \sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

распространением его на действия с суперсимметрией на мировом листе. Суперсимметрия мирового листа отличается и не означает суперсимметрии в пространстве-времени. Действие RNS модели также содержит локальную симметрию Вейля и локальную фермионную симметрию, которые делают его локально суперконформным. В суперконформной калибровке действие сводится к формуле

$$S_{RNS} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma(\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu + i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu)\,. \tag{3.8}$$

Поля $\psi^\mu = (\psi^\mu_A)$, $A = \pm$ являются майорановскими спинорами в отношении мирового листа и вектором в отношении пространства-времени, в то время как $\rho^\alpha = (\rho^\alpha_{AB})$ является двумерной спиновой матрицей. Действие (3.8) инвариантно относительно глобальных преобразований с суперсимметрией мирового листа

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon}\psi^\mu \,,\ \delta\psi^\mu = -i\rho^\alpha \varepsilon \partial_\alpha X^\mu \,. \tag{3.9}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\partial^2 X^\mu = 0\,,\ \ \rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu = 0\,. \tag{3.10}$$

Необходимо еще добавить ограничения, которые появляются из локального суперконформного действия. В этом действии суперсимметричный партнер метрики мирового листа есть – гравитон. Это поле не является динамическим в двух измерениях и равно нулю в суперконформной калибровке. Уравнение движения для метрики подразумевает, что тензор энергии-импульса обращается в нуль

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{2}\bar{\psi}^\mu \rho_\alpha (\partial_\beta)\psi_\mu - \mathrm{trace} = 0\,. \tag{3.11}$$

Уравнение движения для гравитона означает, что сверхток мирового листа $J_\alpha$ обращается в нуль

$$J_\alpha = \frac{1}{2}\rho^\beta \rho_\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu = 0\,. \tag{3.12}$$

Для нахождения решения удобно выбрать следующие спиновые матрицы (матрицы Дирака $\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$) в явном виде

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \ \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Используя киральность матрицы $\bar{\rho} = \rho^0 \rho^1$, мы видим, что компоненты $\psi_\pm^\mu$ из $\psi^\mu$, определенные

$$\psi_\mu = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

относительно (3.13) являются майорана-Вейля спинорами. Уравнение движения (3.12) «расцепилось»

$$\partial_- \psi_+^\mu = 0, \quad \partial_+ \psi_-^\mu = 0 \tag{3.15}$$

и имеет общее решение

$$\psi_+^\mu = \psi_+^\mu(\sigma^+), \quad \psi_-^\mu = \psi_-^\mu(\sigma^-)\,. \tag{3.16}$$

Далее необходимо наложить граничные условия. Требование равенства нулю границы при вариации действия предполагает

$$(\psi_-^\mu \delta\psi_{\mu-} - \psi_+^\mu \delta\psi_{\mu+})\big|_{\sigma^1=0} = (\psi_-^\mu \delta\psi_-^\mu - \psi_+^\mu \delta\psi_{\mu+})\big|_{\sigma^1=\pi}\,. \tag{3.17}$$

Для открытых струн мы полагаем

$$\psi_+^\mu(\sigma^0, \sigma^1 = 0) = \psi_-^\mu(\sigma^0, \sigma^1 = 0)\,, \tag{3.18}$$

$$\psi_+^\mu(\sigma^0, \sigma^1 = \pi) = \pm\psi_-^\mu(\sigma^0, \sigma^1 = \pi)\,. \tag{3.19}$$

Это пары $\psi_+^\mu$ и $\psi_-^\mu$ на границах. В зависимости от выбора знака в (3.19), мы получаем граничные условия Рамона (“+”) или граничные условия Невё – Шварца (“–”)

$$\psi^\mu(\sigma^0, \sigma^1) = \begin{cases} \psi_-^\mu(\sigma^0,\ -\sigma^1), & -\pi \le \sigma^1 \le 0 \\ \psi_+^\mu(\sigma^0,\ \sigma^1), & 0 \le \sigma^1 \le \pi \end{cases}. \tag{3.20}$$

является периодической для R (Рамона) – граничных условий и антипериодической для NS (Невё – Шварца) – граничных условий на двойном мировом листе. Согласованность на петлевом уровне требует, чтобы присутствовали оба типа граничных условий. Гильбертово пространство имеет и NS-сектора и R-сектора.

RNS модель решает проблемы описания пространства-времени фермионов, но в ней присутствует тахион. Глиоцци, Шерк и Олив [21] отметили, что можно сделать проекцию спектра, которая удаляет тахион. Кроме того, результирующий спектр суперсимметричен в пространственно-временном смысле. Это так называемая GSO проекция не является обязательной на классическом уровне, но она становится обязательной на квантовом уровне.

## *3. 5 типов суперструн*

Приступим к рассмотрению всех согласованных суперсимметричных теорий струн. Есть следующие возможные варианты – струны могут быть:

> (I) *открытыми или закрытыми,*
>
> (II) *ориентированные или не ориентированные,*
>
> (III) *можно сделать GSO проекцию двумя неэквивалентными вариантами (типа* A *и* B*) для замкнутых струн,*
>
> (IV) *можно выбрать калибровочные группы для открытых струн: U(n) для ориентированных и SO(n), или USP(2n) для неориентированных струн.*

Мы уже видели, что не все комбинации из этих вариантов допустимы на квантовом уровне. Так как теории открытых струн имеют полюса закрытых струн в петлевых диаграммах, мы имеем либо закрытые, либо закрытые и открытые струны.

Скажем несколько слов об ориентируемости струн. Ориентируемость струны проще всего определить по тому какую поверхность она заметает при своем движении – ориентируемую или нет. Например, открытая струна очевидно – неориентируема, т.к. при своем движении ничто не мешает ей перевернуться и образовать неориентируемую поверхность – лист Мёбиуса.

Рассмотрим коротко замкнутые суперструны. Здесь нет граничных условий (3.18) и (3.19) на концах струны и единственным условием является требование периодичности полей по $\sigma$

$$\psi_A^\mu(\sigma+\pi,\tau)=\psi_A^\mu(\sigma,\tau), \quad A=\pm. \tag{3.21}$$

Отсюда следует, что $\psi_+^\mu$ и $\psi_-^\mu$ никак не связаны между собой и могут иметь как одинаковую, так и разную киральность. Если их киральность одинакова, т.е. система инвариантна относительно перестановок $\psi_+^\mu \leftrightarrow \psi_-^\mu$, то это сектор по-прежнему имеет только $N$=1 суперсимметрию. Такие замкнутые струны возникают при взаимодействии открытых струн (соединение концов) и вместе с ними образуют суперструну типа I. Посредством механизма Чана – Патона (кварки на концах) в теории типа I можно ввести квантовые числа. В модели присутствуют все три типа аномалий: калибровочная, гравитационная и смешанная.

Замкнутые струны сами по себе образуют отдельный сектор – суперструны II типа, для них полностью реализуются независимость $\psi_+^\mu$ и $\psi_-^\mu$, и этот сектор имеет уже $N$=2 суперсимметрию. Этот сектор можно разбить на 2 подсектора IIA – с разными киральностями, IIB – с одинаковыми киральностями. Суперструна IIA (по сути некиральная) относится к числу так называемых вектороподобных теорий, свободных от аномалий, поскольку правые и левые киральные фермионы в точности сокращаются. В теории типа IIB (действительно киральной) есть гравитационные аномалии, но они в точности сокращаются.

Существует еще один тип суперсимметричных теорий струн. Он сочетает в себе бозонную струну и суперструну типа II и называется *гетеротические* струны. Праводвижущийся сектор берется от суперструны типа II, в то время как леводвижущийся сектор берется из бозонной струны. Для получения модульной инвариантности теории, шестнадцать дополнительных леводвижущихся координат должны быть определены периодически

$$X^I \cong X^I + \omega^I_{(i)}, \quad I = 1,...,16. \tag{3.22}$$

Вектора $\omega_{(i)} = (\omega^I_{(i)})$, $i$=1,…,16 генерируют шестнадцатимерную решетку $\Gamma_{16}$. Модульная инвариантность требует, чтобы $\Gamma_{16}$ была самодуальной решеткой. По модулю вращения, есть только два типа таких решеток, $E_8 \times E_8$ и решетка сгенерированная из Майорана-Вейля спинорных представлений SO(32). Таким образом, есть две различные гетеротические теории суперструн.

Бозонные безмассовые состояния берутся из NS-сектора, и принимают форму

$$\alpha^{\mu}_{-1}\tilde{b}^{\nu}_{-1/2}|k\rangle, \quad \alpha^{I}_{-1}\tilde{b}^{\nu}_{-1/2}|k\rangle, \quad \alpha^{ik^{(i)}_I x^I_L}_{-1}\tilde{b}^{\nu}_{-1/2}|k\rangle. \tag{3.23}$$

Здесь $\alpha^I_{-1}|k\rangle$, бозонные состояния, соответствующие шестнадцати дополнительным леводижущимся перемещениям. Вектора $k^{(i)} = (k^{(i)}_I)$ являются дискретными векторами импульса в дополнительных измерениях. Две решетки $\Gamma_{16}$ имеют 480 таких векторов, соответствующих группам калибровочной симметрии $E_8 \times E_8$ и SO(32). Безмассовые фермионные состояния образуются путем замены $\tilde{b}^{\nu}_{-1/2}|k\rangle$ правого основного состояния $|\alpha_+\rangle$. В общем случае получаем $N$=1 мультиплет супергравитации плюс вектор мультиплета в присоединенном представлении $E_8 \times E_8$ или SO(32). Интересно, что уже на первом массивном уровне обнаруживается 18883584 физических степеней свободы!

Безмассовые сектора пяти суперсимметричных теорий струн соответствуют четырем различным теориям супергравитации. Типа I и гетеротическая струна калибровочной группы SO(32) имеют одинаковый безмассовый спектр, но их массовые спектры и взаимодействия различны.

Запишем в таблицу свойства пяти теорий суперструн

| Тип | Тип струн | Ориентирована | Киральность | Суперсимметрия | Калибровочная группа | D – браны |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | открытые замкнутые | нет | да | $N$=1 | SO(32) | 1,5,9 |
| IIA | замкнутые | да | нет | $N$=2A | - | 0,2,4,6,8 |
| IIB | замкнутые | да | да | $N$=2B | - | 1,3,5,7 |
| гетер. | замкнутые | да | да | $N$=1 | E8 × E8 | нет |
| гетер. | замкнутые | да | да | $N$=1 | SO(32) | нет |

# 4. D*p* – *браны*

Дальнейшее изучение свойств струны показало, что существуют решения, которые можно интерпретировать как поля «запертые» в гиперповерхностях, т.е. аналог солитоноподобных решений из обычной локальной теории поля. Такие решения были названы ~~мем~~бранами. Идею локализации фермионов на доменной стенке была предложена еще Рубаковым и Шапошниковым [22] и забыта вплоть до всплеска интереса к RS моделям линеаризованной гравитации Рэндэлл и Сундрума. Выяснилось, что поскольку D-браны – объекты теории струны, содержащие на своей мировой поверхности концы открытых струн, то одним из способов описания динамики таких бран является рассмотрение струны с граничными условиями, заданными на этих гиперповерхностях. Точнее, если рассматривать струну, на ($p+1$) пространственно-временную координату которой наложены условия Неймана, а на остальные координаты граничные условия Дирихле, то Дирихле **брана** (**D-брана**) будет той самой ($p+1$) мерной гиперповерхностью, на которой находятся концы струны. При этом обычные струнные возбуждения находятся на бране.

Таким образом, D$p$-брана – это протяженный объект, где p – количество пространственных измерений. В бозонной теории струн, где число пространственных измерений 25, пространство заполняют D25-браны.

В D-бране, концы открытой струны должны находиться на бране. Это требование накладывает число граничных условий на движение открытых концов струны.

Не все протяженные объекты, в теории струн – D-браны. Струны, например, это 1-браны, потому что они протяженные объекты с одной пространственной размерностью, но они не D1-браны. Браны с $p$ пространственных измерений в общем случае называются $p$-браны. 0-браны это разновидность частиц. Так же, как мировые линии частицы одномерный, мировой объем $p$-браны является ($p$+1)-мерным. Из $p$+1 измерений, одно временное и остальные p пространственные измерения.

Обозначим через $d$ общее количество пространственных измерений, в данном случае, $d$=25. Общее число пространственно-временных измерений D=$d$+1=26. D$p$-браны при $p < 25$ распространяется на p-мерное подпространство в 25-мерном пространстве. Мы сосредоточимся на простых D$p$-бранах – $p$-мерные гиперплоскостях в d-мерном пространстве. Для определения данных гиперповерхностей, необходимо ($d$-$p$) линейных условий. В трех пространственных измерениях ($d$=3), 2-брана ($p$=2) это плоскость, задается одним линейным условием ($d$-$p$=3-2=1). Например, $z=0$ определяет плоскость $xy$, а струна вдоль оси ($z=1$) задается двумя линейными условиями ($d$-$p$=3-1=2): $x=0$ и $y=0$. Нам требуется столько условий, сколько пространственных координат нормали к бране.

# 5. *AdS/CFT – соответствие и голографический принцип*

Основная идея AdS/CFT – дуальности [23] и ее обобщения – это эквивалентность теории суперструн или M-теории вблизи пересечения D – бран и низкоэнергетической теории мирового объема этих бран.

AdS/CFT – соответствие (для случая D3 – бран) означает, что суперструны типа IIB в фоне пространстве $AdS_5 \times S^5$ дуальна $N$=1, D=4 супер Янг-Миллсу (ЯМ) с калибровочной группой SU(N). Рассмотрим набор N параллельных D3 – бран в IIB теории, которые пересекаются в $x_4 = ... = x_9 = 0$ и заполняют пространство в $0,...,3$. Несложно показать, что в низкоэнергетическом пределе образуются Рамон – Рамоновские супегравитационные солитоны – самодуальные D3 – браны (которые являются многомерными аналогами четырехмерной критической черной дыры Рейснера – Нордстрема), причем

$$R_3^4 = 4\pi g_s N\alpha'^2 . \tag{3.24}$$

Классическое описание супергравитации применимо, когда $R_3 >> \sqrt{\alpha'}$ или $g_s N >> 1,\ g_s \to 0$ иначе струнные поправки деформируют солитон. Солитон имеет асимптотически плоские граничные условия на бесконечности и описывается метрикой

$$ds^2 = \frac{r^2}{R_3^2} dx_m dx^m + \frac{R_3^2}{r^2} dr^2 + R_3^2 d\Omega_5^2, \quad \exp[-\Phi] = const . \tag{3.25}$$

Метрика (3.25) имеет постоянную скалярную кривизну $R_3$ и описывает геометрию пространства $AdS_5 \times S^5$, где $AdS_5$ – пятимерное пространство анти-де-Ситтера, а $S^5$ – пятимерное пространство де-Ситтера (сфера). Как известно оба этих пространства имеют постоянную кривизну и являются решениями пятимерных уравнений Эйнштейна с отрицательной и положительной космологической постоянной соответственно. Отметим, что теория супергравитации в пространстве $AdS_5$ инвариантна относительно глобальной SO(4,2) – симметрии. Кроме того, теория в горловине (3.25) D3 – браны инвариантна относительно $N$=8 суперсимметрии.

D3 – браны можно описать при помощи суперсимметричной $N$=4 четырехмерной теории ЯМ

$$\begin{gathered} S = \frac{1}{4\pi g_s}\int d^4xTr\{\frac{1}{2}\hat{f}_{mn}^2 + \frac{1}{2}\left|D_m\hat{\phi}_i\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i>j}^{6}[\hat{\phi}_i,\hat{\phi}_j]^2 + \\ + \frac{i}{2}\sum_{I=1}^{4}\hat{\bar{\Psi}}^I\hat{D}\hat{\Psi}_I - \frac{i}{2}\hat{\Psi}^I[\hat{\phi}_{IJ},\hat{\bar{\Psi}}^J] + c.c.\} \end{gathered} \tag{3.26}$$

Из формулы (3.26) видно, что $4\pi g_s = g^2$, поэтому в пределе $g_s \to 0$ пертурбативное разложение в суперсимметричном ЯМ хорошо определено. Т.е. $g$ – просто не получающая квантовых поправок константа и при любом $g$ теория конформно инвариантна относительно четырехмерных преобразований из SO(4,2).

Таким образом, квазиклассическая слабовзаимодействующая теория в многомерном объеме порождает (или наоборот) на его границе квантовую теорию в режиме сильной связи т.е. демонстрирует явление голографии, которое может быть важно для понимания квантовой гравитации.

# III. Модели мира на бране

В моделях мира на бране эффективная четрехмерность при низких энергиях объясняется тем, что вещество локализовано на бране. Гравитационное же взаимодействие учитывается по-разному.

## *1. Модель Аркани-Хамеда – Димопулоса – Двали*

В сценарии, предложенным Н.Аркани-Хамедом, С.Димопулосом и Дж.Двали [9] (ADD) пренебрегают натяжением браны (плотностью энергии на единицу пространственного объема браны) и рассматривают компактные дополнительные измерения. Но размер дополнительных измерений не обязательно должен быть микроскопическим как в теории Калуцы-Клейна.

В модели ADD четырехмерная гравитационная постоянная

$$G_4 = 1/M_{Pl}^2 \tag{4.1}$$

не является фундаментальной. Наоборот, фундаментальным является $D$ -мерное гравитационное действие

$$S = \frac{1}{16\pi G_D}\int d^D X G^{1/2} R^{(D)} \tag{4.2}$$

где

$$G_D = \frac{1}{M^{D-2}} \equiv \frac{1}{M^{d+2}} \tag{4.3}$$

есть фундаментальная $D$ -мерная гравитационная постоянная, выраженная через фундаментальный энергетический масштаб теории $M$, существенно отличный от $M_{Pl}$, $d=D-4$ –- число дополнительных измерений, $d^D X = d^4 x d^d y$ , и характерный размер дополнительных измерений конечен и равен $L$.

Если ограничиться низкоэнергетическим приближением, основной вклад в который дают нулевые моды гравитационного поля, не зависящих от дополнительных координат $y$, то в формуле (4.2) интеграл по $y$ факторизуется в виде объема внутреннего пространства.

$$\int d^D X \equiv \int d^d y \int d^4 x . \tag{4.4}$$

При этом эффективное действие для четырехмерной гравитации имеет вид

$$S_{eff} = \frac{L^d M^{d+2}}{16\pi}\int d^4 x g^{1/2} R \ , \tag{4.5}$$

с гравитационной постоянной $G_4$ и соответствующей планковской массой

$$G_4 = \frac{G_D}{L^d}, \quad M_{Pl} = M (ML)^{d/2} \ . \tag{4.6}$$

Таким образом, наблюдаемый планковский масштаб зависит только от фундаментального $D$ -мерного масштаба и размера дополнительных измерений. Этот механизм позволяет решить проблему иерархий, если, скажем, предположить, что фундаментальный масштаб гравитационного взаимодействия того же порядка, что и масштаб электрослабых взаимодействий $M$ ~ 1 ТэВ. Тогда разница между $M_{Pl}$ и $M_{EW}$ будет обусловлена только большим размером дополнительных измерений. Заметим, что это было бы невозможно в рамках стандартной модели Калуцы-Клейна, поскольку потребовало бы введения достаточно легких КК -партнеров частиц материи, запрещенных современными коллайдерными экспериментами. Но так как в бранных моделях КК-партнеры отсутствуют в принципе, такого экспериментального ограничения не существует.

Возможные ограничения на размер дополнительного измерения следуют из экспериментов по проверке ньютоновского закона притяжения пробных масс. Этот закон хорошо проверен в масштабах небесной механики, однако в миллиметровом масштабе может иметь и отклонения. В настоящее время закон притяжения хорошо проверен до расстояний 0.2 мм. [24], что дает нам оценку на размер дополнительных измерений

$$L < 0.2\,\mathrm{mm}\ . \tag{4.7}$$

Оценку (4.7) можно применить для установления ограничений на число дополнительных измерений. Используя (4.6) и характерное значение $M \sim 1$ ТэВ, получаем следующие оценки для масштаба компактификации $L$:

$$\begin{aligned} d &= 1, \quad L : 10^{15}\ \mathrm{cm}, \\ d &= 2, \quad L : 10^{-1}\ \mathrm{cm}, \\ d &= 3, \quad L : 10^{-6}\ \mathrm{cm}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Как мы видим, случай одного дополнительного измерений исключается экспериментальными данными по небесной механике. Более реалистичный случай $d$=2 как раз находится в области современных экспериментов по поиску отклонений от закона Ньютона. Ну а последний случай и случаи пространств с большой размерностью вообще находятся за гранью современных экспериментальных возможностей проверки отклонений от закона притяжения. Хотя если размеры дополнительных измерений разные – для некоторых больше, для некоторых меньше, то – может сложиться ситуация, когда при $d$>2, $L$~1-10 мкм.

Главным достоинством модели является ее простота, а недостатком - пренебрежение гравитационным полем, которое порождается браной. Более подробно ADD-сценарий можно посмотреть, например, в [25], а флуктуации на фоне плоской пятимерной метрики и возникающие из них физические поля достаточно подробно изучены в работе [26]. Отметим, что механизм локализации полей на бране не учитывается в этой модели, как и в других моделях, которые будут рассмотрены ниже.

## *2. Модели Рэндалл – Сундрума*

В работе [10] был предложен новый механизм для решения проблемы иерархии взаимодействий. Первоначально была рассмотрена система из двух бран, взаимодействующих с гравитацией в пятимерном пространстве-времени. Эта модель известна как модель Рэндалл-Сундрума (обычно используется сокращение RS1-модель), и она широко обсуждается в литературе (см. [27] для обзоров и ссылок).

Считается, что наш мир расположен на бране с отрицательным натяжением. Гравитация же является сильной на скрытой бране с положительным натяжением. Геометрия анти-де-Ситера (*AdS*), введение которой было мотивировано феноменологией модели Хоравы-Виттена [12], обеспечивает экспоненциальное уменьшение гравитационного взаимодействия с планковского масштаба до ТэВных значений. Таким образом и решается проблема иерархии. Модель Рэндалл-Сундрума с одной (RS2) и двумя бранами (RS1) с материей на бранах была рассмотрена в работе [28]. Однако в этой работе использовались гауссовы нормальные координаты и формализм «изогнутой браны». В работе [29] была показана непоследовательность этого подхода для RS2-модели. Кроме того, использование гауссовых нормальных координат «перемешивает» вклады полей радиона и гравитона в четырехмерное гравитационное поле, что мешает нам использовать специальную удобную подстановку из работы [30], которая расцепляет уравнения для полей гравитона и радиона во всем пространстве. В следующей главе мы получим линеаризованные уравнения движения для RS1-модели с материей на бранах из действия модели и воспроизведем выражение для метрического тензора из работы [31], которое и будет использовано для расчета гравитационных эффектов.

Рассмотрим сначала модель Рэндалл-Сундрума с двумя бранам. Обозначим координаты в этом пространстве $\{x^M\} \equiv \{x^\mu, x^4\}$, $M = 0,1,2,3,4; \mu = 0,1,2,3$, где $\{x^\mu\} \equiv x$, а координата $x^4 \equiv y$ соответствует пятому дополнительному пространственному измерению. Оно образует орбифолд $S^1/Z_2$, представляющий собой окружность диаметра $2L/\pi$ с отождествленными точками $y$ и $-y$. В дополнение к этому мы имеем обычное условие периодичности, которое отождествляет точки $(x,y)$ и $(x,y+2L)$. В соответствие с этим метрика $g_{MN}$ удовлетворяет условиям симметрии орбифолда

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x,-y) &= g_{\mu\nu}(x,y), \\ g_{\mu4}(x,-y) &= -g_{\mu4}(x,y), \\ g_{44}(x,-y) &= g_{44}(x,y). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Браны расположены в неподвижных точках орбифолда $y$=0 и $y$=L.

Действие этой модели имеет вид

$$S = S_E + S_1 + S_2. \tag{4.10}$$

где $S_E$, $S_1$ и $S_2$ записываются в виде

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{1}{16\pi G_5}\int_E (R - \Lambda)\sqrt{-g}\, d^4x dy, \\ S_1 &= V_1\int_E \sqrt{-\tilde{g}}\,\delta(y) d^4x dy, \\ S_2 &= V_2\int_E \sqrt{-\tilde{g}}\,\delta(y-L) d^4x dy. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь $\tilde{g}_{\mu\nu}$ – индуцированная метрика на бранах, а индексы 1 и 2 различают браны. Решение Рэндалл-Сундрума для метрики имеет вид

$$ds^2 = \gamma_{MN} dx^M dx^N = e^{2\sigma(y)}\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \tag{4.12}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – это метрика Минковского и функция $\sigma(y) = -k\,|\,y\,|$ в интервале $-L \le y \le L$ обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y} = -k\,sgn(y), \quad \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} = -2k(\delta(y) - \delta(y-L)). \tag{4.13}$$

Параметр $k$ положителен и имеет размерность массы, а параметры $\Lambda$ и $V_1$, $V_2$ выражаются через него следующим образом:

$$\Lambda = -12k^2, \quad V_1 = -V_2 = -\frac{3k}{4\pi G_5}. \tag{4.14}$$

Отсюда следует, что брана 1 имеет положительную плотность энергии (натяжение), а брана 2 - отрицательную.

Вообще говоря, в RS1-модели размер дополнительного измерения не определяется параметрами модели, и поэтому в принципе может принимать любое значение. Эта проблема устраняется в так называемых стабилизированных моделях Рэндалл-Сундрума. Предпосылки для такой модификации теории, как следует из работ [32], связаны с тем, что на бране с отрицательным натяжением поле *радиона*, соответствующее 44-компоненте флуктуаций метрики и являющееся скаляром с четырехмерной точки зрения, очень сильно взаимодействует с материей, что полностью противоречит имеющимся экспериментальным данным. В частности, для закона Ньютона на «нашей» бране вклад радиона в $e^{2kL}$ раз сильнее, чем вклад безмассового гравитона. Стабилизация размера дополнительного измерения приводит к возникновению массового члена для поля радиона, и ожидается, что при соответствующем значении массы это решит проблему практически скалярной гравитации на бране в нестабилизированном случае. В работе [33] показано, что с учетом скалярных полей Голдбергера-Вайза проблема воспроизведения закона Ньютона на бране с отрицательным натяжением решена, однако для произвольного распределения материи на бранах проблема все еще остается актуальной.

В модели Рэндалл-Сундрума с одной браной (или RS2-модель) рассматривается только одна брана с положительным натяжением. Решение для фоновой метрики в данной модели получается из решения для фоновой метрики RS1-модели, если брану с отрицательным натяжением «отодвинуть» на бесконечность $L \to \infty$. Как и ранее, материя локализована на бране, а гравитация может распространяться во всем пятимерном пространстве. Полное пятимерное пространство обладает $Z_2$ - симметрией относительно плоскости браны, которая расположена в точке $y$=0, и все поля подчиняются соответствующим условиям симметрии по отношению к зеркальной симметрии $y \leftrightarrow -y$. В явном виде симметрия определяется формулой (4.9). В данном случае суть этой симметрии может быть легко понята даже без рассмотрения RS1-модели: пространство-время справа от браны (при $y$>0) может быть получено зеркальным отражением его полупространства (при y<0).

RS2-модель не может решить проблему иерархий, однако она пользуется большой популярностью как наиболее простая модель мира на бране с нефакторизуемой геометрией. Кроме того, за счет локализации на бране безмассовой с четырехмерной точки зрения моды гравитационного взаимодействия в модели воспроизводится эйнштейновская гравитация на больших расстояниях. Сценарий Рэндалл-Сундрума с одной браной и его обобщения широко используется в различных космологических моделях.

Как мы уже показали ранее, среди степеней свободы RS1-модели есть безмассовое скалярное поле – радион, которое описывает колебания бран друг относительно друга. Казалось бы, что эта степень свободы должна исчезать из модели, если одна из бран «отодвинута» на бесконечность. Это предположение было сделано в работах [29, 34], где утверждается, что 44-компонента флуктуаций метрики, соответствующая скалярной моде, может быть полностью выкалибрована. В этой калибровке брана не является плоскостью $y$=0, а расположена в точке $y = \zeta(x)$. В работе [29] было показано, что такой формализм «изогнутой браны» разрушает симметрию (4.9) и делает подход, основанный на этой калибровке, непоследовательным. Даже если использовать формализм «плоской браны», то все равно нельзя выкалибровывать поля радиона, так как при наличии на бране материи это ведет к нефизическим решениям, которые возрастают на бесконечности.

Действие RS2-модели имеет вид

$$S = \frac{1}{16\pi G_5}\int (R - \Lambda)\sqrt{-g}\, d^4x dy + V\int\sqrt{-\tilde{g}}\,\delta(y) d^4x dy \ . \tag{4.15}$$

где космологическая постоянная $\Lambda$ и натяжение V связаны с параметром $k$ условием тонкой подстройки

$$\Lambda = -12k^2, \quad V = -\frac{3k}{4\pi G_5} \ . \tag{4.16}$$

Очевидно, что брана имеет положительное натяжение. А функция $\sigma$, в отличие от случая RS1-модели (4.13), имеет следующие свойства

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y} = -k\,sgn(y), \quad \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} = -2k\delta(y)\,. \tag{4.17}$$

## 3. Модель Двали – Габададзэ – Поррати и другие

Модели индуцированной на бране гравитации широко обсуждаются в литературе последние несколько лет. Начало было положено работой [35] (DGP-модель), в которой было высказано предположение, что благодаря радиационным поправкам материя на бране может индуцировать дополнительный член кривизны, локализованный на бране – в полной аналогии с работами по индуцированной гравитации [36]. В этой модели имеется одна брана как и в случае RS2, но отсутствует космологическая постоянная, и натяжение браны равно нулю. Вместо этого действие содержит четырехмерный эйнштейновский член с гравитационной постоянной $G_4$ , существенно отличной от пятимерной постоянной $G_5$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G_5}\int d^4dy\sqrt{-g}R + \frac{1}{16\pi G_4}\int_{brane} d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R} = \\ &= M_*^3\int d^4xdy\sqrt{-g}R + M_{Pl}^2\int_{brane} d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

где действие на бране зависит только от значений индуцированной метрики на бране $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $M_*$ – пятимерная масса Планка, а $M_{Pl}$ – четырехмерная масса Планка. Наиболее интересный случай возникает при $M_* \sim 10^{-3}$ эВ, когда на расстояниях, больших $10^{28}$ см., гравитация становится эффективно пятимерной, что может быть интересным с точки зрения решения проблемы космологической постоянной. Данная модель интересна тем, что предлагает простой механизм космологического ускорения и способна воспроизводить стандартную космологию на ранних временах.

Однако в модели есть существенные недостатки. Например, возникает сильная связь на неприемлемо малых расстояниях [37]. Сильно взаимодействующая мода есть не что иное, как 44-компонента флуктуаций метрики (радион). Другой существенный недостаток – тензорная зависимость от $T_{\mu\nu}$ не совпадает с общерелятивистской, как и в случае четырехмерной массивной гравитации. Сильная связь в DGP-модели также аналогична сильной связи в четырехмерной массивной гравитации [38]. Отметим, что в DGP-модели мода радиона не обеспечивает восстановление правильного тензорного закона, как это было в RS2 теории. Это расхождение остается также в пределе исчезающей массы и составляет природу так называемой проблемы Ван Дама-Вельтмана-

Захарова (vDVZ) [39]: безмассовый предел модели не соответствует эйнштейновской теории безмассового гравитона. Проблема vDVZ напрямую связана с наличием достаточно низкого масштаба сильной связи. Такой результат феноменологически неприемлим, потому что при сколь угодно малой массе гравитона приводит к неправильному искривлению лучей в поле Солнца и неправильному смещению перигелия Меркурия. К сожалению, все это не позволяет рассматривать DGP-модель в качестве реального кандидата для описания гравитации.

Были попытки объединить DGP-предположение и модели с неплоской геометрией для получения модификации гравитации на больших расстояниях. Однако по ряду причин такие модели были отклонены, в основном из-за негативного влияния поля радиона. Тем не менее, модели с членами кривизны, локализованными на бранах, могут быть интересны и с другой точки зрения: в работах [40] был получен спектр КК гравитонов в модели Рэндалл-Сундрума с членами кривизны на бранах для разных значений параметров, также были получены некоторые ограничения, следующие, например, из ускорительных экспериментов. К сожалению, поле радиона не было принято во внимание, а его наличие, как мы уже обсуждали, может значительно повлиять на ограничения на параметры модели.

Другие способы получить гравитацию, на больших расстояниях отличную от эйнштейновской, были предприняты и без введения индуцированных членов кривизны, например, в модели Грегори-Рубакова-Сибирякова (GRS) [41]. В этой модели закон тяготения и распространения гравитационных волн на бране является четырехмерным общерелятивистским только на промежуточных расстояниях, а на очень больших расстояниях сменяется пятимерным законом. К сожалению GRS-модель страдает от духовых состояний с отрицательной энергией [42], в то время как DGP-модель от духов свободна.

# Заключение

Итак, в данной работе мы подробно рассмотрели модели мира на бране, основанных на современной теории суперструн или М-теории. Несмотря на свою экзотичность, данные модели могут служить серьезными кандидатами на объяснение проблем современной Вселенной либо сами по себе, либо как модели, подсказывающие новые механизмы, выходящие за рамки бранной или струнной концепции. В рамках модели возникает возможность рассмотреть(предсказать) множество интересных феноменологических вопросов: возможность кажущегося несохранения энергии (утечка гравитонов на БАК) и электрического заряда, естественность малого нарушения лоренц инвариантности или возможные проявления конформного сильного взаимодействующего сектора, который связан с полями Стандартной модели и др.

Естественно М-теория и концепция бран ждет своего экспериментального подтверждения. Как прямого – обнаружение отклонения от закона притяжения Ньютона на малых или очень больших расстояниях или наблюдение космических струн, так и косвенного – непосредственное обнаружение суперсимметричных партнеров частиц Стандартной модели на Большом Адронном Коллайдере. Описание экспериментов уже выходит за рамки данной квалификационной работы, целью которой является ознакомить читателя с современными концепциями теоретической физики и дать обширный литературный обзор по многомерным теориям гравитации.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Nordstrom G.* Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitatsprinzips // Ann. Phys. Lpz. 1913. Vol. 42. Pp. 533–554.
2. *Калуца Т.* К проблеме единства физики. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Москва, Мир, 1979 С. 529.
3. *Klein O.* Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie // Zeits. Phys. 1926. Vol. 37. Pp. 895–906.
   *Klein O.* The atomicity of electricity as a quantum theory law // Nature 1926. Vol. 118. P. 516.
4. *Einstein A., Bergmann P.* On a generalization of Kaluza's theory of electricity // Ann. Math. 1938. Vol. 39. P. 683
   *Jordan P.* Erweiterung der projektiven Relativit.atstheorie // Ann. Phys. (Leipzig) 1947. Vol. 1. P. 219.
   *Bergmann P.* Unified field theory with fifteen field variables // Ann. Math. 1948. Vol. 49. P. 255.
5. *Brans C., Dicke R.H.* Mach's principle and a relativistic theory of gravitation // Phys. Rev. 1961. Vol. 124. Pp. 925–935.
6. *Will C.M., Yunes N.* Testing alternative theories of gravity using LISA // Class. Quant. Grav. 2004. Vol. 21. Pp. 4367–4381.
7. *Scherk J., Schwarz J.H.*, Dual models for non- hadrons, Nucl. Phys. B81, 118 (1974).
8. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. Введение М.: Мир, 1990.- 520с.
9. *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.* The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // Phys. Lett. B. 1998. Vol. 429. Pp. 263–272.
10. *Randall L., Sundrum R.* Large mass hierarchy from a small extra dimension // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. Pp. 3370–3373.
11. *Loren-Aguilar P., Garcia-Berro E., Isern J., Kubyshin Y.A.* Time variation of G and R within models with extra dimensions // Class. Quant. Grav. 2003. Vol. 20. Pp. 3885–3896.
12. *Horava P., Witten E.* Heterotic And Type I String Dynamics From Eleven Dimensions // Nucl. Phys. B. 1996. Vol. 460. P. 506.
13. *Arkani-Hamed N., Porrati M., Randall L.* Holography and phenomenology. arXiv:hep-th/0012148.
14. *Overduin J.M., Wesson P.S.* Kaluza-Klein gravity // Phys. Rept. 1997. Vol. 283. Pp. 303–380.
15. *Eubanks T. M. et al.* Advances in solar system tests of gravity // Online preprint, (1999). casa.usno.navy.mil/navnet/postscript/prd 15.ps
16. *Sotiriou T.P., Faraoni V.* f(R) theories of gravity // Rev. Mod. Phys. 82, 451–497 (2010).
17. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств М.: Наука, 1981.
18. *Бринк Л. Энно М.* Принципы теории струн М.: Мир, 1991.- 298с.
19. *Polchinski J.* String theory (volume 1). An introduction to the bosonic string CUP, 1998.
20. *Поляков А.М.* Калибровочные поля и струны М.: РХД , 1999.- 315с.
21. *Gliozzi, F., Scherk, J., & Olive, D.* Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model. Nuclear Physics B, 122, 253-290 (1977).
22. *Rubakov V.A., Shaposhnikov M.E.* Do we live inside a domain wall? // Phys. Lett. B. 1983. Vol. 125. Pp. 136–138.
   *Rubakov V.A., Shaposhnikov M.E.* Extra space-time dimensions: Towards a solution to the cosmological constant problem // Phys. Lett. B. 1983. Vol. 125. Pp. 139–143.
23. *Maldacena J.M.* The Large N limit of superconformal field theories and supergravity Advances in Theoretical and Mathematical Physics 2: 231–252 (1998).

24. *Hoyle C.D., Schmidt U., Heckel B.R., Adelberger E.G., Gundlach J.H., Kapner D.J., Swanson H.E.* Submillimeter test of the gravitational inverse-square law: a search for "large" extra dimensions // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. Pp. 1418–1421.
25. *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.R.* Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59. P. 086004.
26. *Han T., Lykken J.D., Zhang R.J.* Kaluza-Klein states from large extra dimensions // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59. P. 105006.
27. *Kubyshin Y.A.* Models with extra dimensions and their phenomenology. arXiv:hep-ph/0111027.
28. *Garriga J., Tanaka T.* Gravity in the Randall-Sundrum brane world // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. Pp. 2778–2781.
29. *Aref'eva I.Ya., Ivanov M.G., Muck W., Viswanathan K.S., Volovich I.V.* Consistent linearized gravity in brane backgrounds // Nucl. Phys. B. 2000. Vol. 590. Pp. 273–286.
30. *Волобуев И.П., Смоляков М.Н.* Точные решения для линеаризованной гравитации в модели Рэндалл-Сундрума // ТМФ 2004. Т. 139. №. 1. С. 12-28.
31. *Волобуев И.П., Смоляков М.Н.* Гравитация в модели Рэндала-Сундрума // ТМФ 2003, Т. 4. С. 29-52.
32. *Arnowitt R., Dent J.* Gravitational forces in the brane world // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 71. P. 124024.
33. *Arnowitt R., Dent J.* Gravitational Forces in the Randall-Sundrum Model with a Scalar Stabilizing Field. arXiv:hep-th/050908.
34. *Giddings S.B., Katz E., Randall L.* Linearized gravity in brane backgrounds // JHEP. 2000. Vol. 0003. P. 023.
35. *Dvali G.R., Gabadadze G., Porrati M.* 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space // Phys. Lett. B. 2000. Vol. 485. Pp. 208–214.
36. *Adler S.L.* Einstein gravity as a symmetry-breaking effect in quantum field theory // Rev. Mod. Phys. 1982. Vol. 54, Pp. 729–766.
    *Zee A.* Calculation of Newton's gravitational constant in infrared-stableYang-Mills theories // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. Pp. 295–298.
37. *Luty M.A., Porrati M., Rattazzi R.* Strong interactions and stability in the DGP model // JHEP. 2003. Vol. 0309. P. 029.
    *Rubakov V.A.* Strong coupling in brane-induced gravity in five dimensions. arXiv:hep-th/0303125.
38. *Arkani-Hamed N., Georgi H., Schwartz M.D.* Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space // Annals Phys. 2003. Vol. 305. Pp. 96–118.
39. *van Dam H., Veltman M.J.* Massive and mass-less Yang-Mills and gravitational fields // Nucl. Phys. B. 1970. Vol. 22. Pp. 397–411.
40. *Kiritsis E., Tetradis N., Tomaras T.N.* Induced gravity on RS branes // JHEP. 2002. Vol. 0203. P. 019.
    *Davoudiasl H., Hewett J.L., Rizzo T.G.* Brane localized curvature for warped gravitons // JHEP. 2003. Vol. 0308. P. 034.
41. *Gregory R., Rubakov V.A., Sibiryakov S.M.* Opening up extra dimensions at ultralarge scales // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. Pp. 5928–5931.
42. *Pilo L., Rattazzi R., Zaffaroni A.* The fate of the radion in models with metastable graviton // JHEP. 2000. Vol. 0007, P. 056.