

Министерство образования и науки Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

С.А. Куркин

**НЕПРЕРЫВНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ В ФИЗИКЕ  
ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ**

Учебно-методическое пособие

Саратов – 2012

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Общие сведения о вейвлетах</b>	<b>6</b>
1.1 От Фурье–анализа к вейвлетам . . . . .	6
1.2 Основные понятия и определения. Свойства непрерывного вейвлетного преобразования . . . . .	22
1.3 Базовые материнские вейвлеты . . . . .	29
1.4 Практические вопросы расчета непрерывного вейвлетного преобразования . . . . .	36
1.4.1 Метод эффективной численной реализации вейвлетного преобразования, исходя из определения НВП .	37
1.4.2 Область влияния краевых условий в вейвлетном спектре . . . . .	40
1.4.3 Соотношение между масштабами вейвлетного преобразования и частотами гармонического анализа .	42
1.4.4 Проблема нормировки вейвлетного спектра . . . . .	43
1.4.5 Реконструкция сигнала по его вейвлетному спектру	44
1.5 Визуализация результатов вейвлетного преобразования . .	46
1.6 Фаза вейвлетного преобразования . . . . .	50
<b>2 Дополнительная литература</b>	<b>57</b>
<b>3 Методические указания</b>	<b>58</b>
<b>4 Контрольные вопросы</b>	<b>59</b>
<b>5 Задания</b>	<b>61</b>
<b>6 Краткое описание экспериментальных сигналов</b>	<b>65</b>
<b>Рекомендуемая литература</b>	<b>73</b>

## Введение

Терминология “вейвлетов” (от англ. *wavelet*, что в дословном переводе означает “маленькая волна”) сформировалась в восьмидесятых годах двадцатого века [1, 2, 3]. Первоначально данный математический аппарат был предложен в качестве альтернативы классическому спектральному анализу, основанному на преобразовании Фурье. Возникновение теории вейвлетов считается одним из важнейших событий в математике за последние десятилетия, поскольку это, пожалуй, единственная новая математическая концепция, которая сразу же после ее появления стала восприниматься в качестве инструмента *прикладных* исследований практически во всех естественных науках и многих областях техники [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Следует отметить, что и само возникновение теории вейвлетов не было внезапным, а было связано с реальными потребностями экспериментальных исследований. В его сегодняшнем виде вейвлетный анализ представляет собой синтез многих существовавших ранее идей и методов. Так, быстрые алгоритмы вейвлетного преобразования используют известную в радиотехнике идеологию субполосного кодирования [14]. Часть идей была заимствована из физики (когерентные состояния [15] и др.) и математики (например, изучение интегральных операторов Зигмунда-Кальдерона [16]). Имеется определенная связь между вейвлетным анализом и теорией диффузионных дифференциальных уравнений [17].

В настоящее время вейвлеты широко используются для анализа и синтеза различных сигналов, для обработки изображений, для сжатия больших объемов информации и цифровой фильтрации, для распознавания образов, при изучении сильно развитой турбулентности, при решении некоторых дифференциальных уравнений. Причем, этот список можно еще долго продолжать [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 17]. Интерес к новому направлению был очень большим непосредственно с момента его появления. Согласно исследованиям [4], начиная с 1990-х годов ко-

личество научных работ по изучению физических явлений с помощью вейвлетов демонстрирует постоянный рост. Число ссылок на источники в сети Интернет, в которых упоминается термин “вейвлет”, уже достигло нескольких миллионов. Основной областью применения данного математического аппарата в естествознании является обработка нестационарных во времени или неоднородных в пространстве сложных нелинейных процессов. Именно поэтому вейвлетный анализ представляет значительный интерес для исследования структуры сигналов живых систем, так как большинство классических методов цифровой обработки данных применимы лишь к процессам с постоянными во времени (или пространстве) характеристиками. Но несмотря на то, что вейвлетный анализ давно стал восприниматься как стандартный инструмент исследования сложных процессов, его активное использование в нейрофизиологии и медицине, по сути, только начинается, хотя достигнутые успехи уже дают основание для оптимизма. Закономерности, обнаруженные с помощью вейвлетного анализа, часто являются первыми шагами на пути понимания природы исследуемых явлений. Более интенсивная работа в этом направлении может способствовать усилению междисциплинарных взаимодействий и дальнейшему взаимному развитию и взаимообогащению физики, радиофизики, прикладной математики и нейрофизиологии.

К настоящему времени существует целый ряд монографий, сборников статей и обзоров, которые обобщают методы, основанные на вейвлетном анализе, а также результаты их применения в различных конкретных областях науки и техники – физике, геофизике, биологии, медицине, экономике и т.д. [27, 28, 29, 30, 12, 31, 10, 32, 20]. Все это говорит о том, что вейвлетный анализ прочно вошел в “обязательный” набор математических инструментов, которые обеспечивают эффективный подход к решению технически сложных задач, связанных с анализом и диагностикой сложных нелинейных процессов, а также обработкой цифровых сигналов в самых различных областях естествознания. Ярким приме-

ром взимообогащающего междисциплинарного сотрудничества является применение вейвлетов при анализе биологических данных, в частности, в нейродинамике и нейрофизиологии, где вейвлетный анализ все чаще используется для анализа нейрофизиологических данных и диагностики нормальных и патологических процессов, протекающих в нервной системе, и таким образом популяризуется в научной среде, связанной с прикладной математикой.

Данное учебное пособие посвящено изложению основ вейвлетного (частотно - временного анализа), в частности, применительно к анализу биологических данных. Пособие содержит краткое математическое введение в вейвлетный анализ, где на основании хорошо известных математических представлений и примеров объясняются принципы непрерывного вейвлетного преобразования, методика эффективной численной реализации вейвлетного анализа и возможность его применения для анализа сложных нестационарных сигналов, с которыми часто сталкивается экспериментатор, например, в биомедицинской практике. Пособие также содержит набор индивидуальных практических заданий для студентов по этой теме и вопросы для самопроверки.

В случае возникновения необходимости студент может получить дополнительную информацию о рассмотренных вопросах из рекомендуемой литературы, список которой приведен в разделе “Рекомендуемая литература” настоящего пособия, а конкретные ссылки указаны в конце главы, посвященной изложению теоретических основ вейвлетного анализа.

Учебное пособие представляет собой дополнение к лекционным курсам “Физика открытых нелинейных систем” и “Самоорганизация в открытых системах” и предназначено для студентов старших курсов факультета нелинейных процессов ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”, обучающихся по специальностям “Физика открытых нелинейных систем” и “Радиофизика”. Пособие

бие может быть рекомендовано также в качестве дополнительной литературы при подготовке курсовых и дипломных работ студентами, обучающимися на факультете нелинейных процессов, а также других факультетах и вузах, осуществляющих подготовку специалистов по смежным специальностям и направлениям.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

# 1 Общие сведения о вейвлетах

## 1.1 От Фурье–анализа к вейвлетам

Известно, что самый простой способ усвоения новых методов и подходов — это знакомство с ними с использованием уже знакомых понятий и представлений. Поэтому мы начнем наше рассмотрение со знакомого читателю спектрального (Фурье) анализа, и оттолкнемся от него, как от основы, являющейся, в какой-то мере, предшественником и базой вейвлетного анализа.

Прежде всего следует остановиться на вопросе: “А для чего нужен вейвлетный анализ?”. Существует ведь хорошо себя зарекомендовавший, эффективный и привычный аппарат спектрального анализа [33, 34, 28, 35], использующий ряды и/или интегралы Фурье. Вейвлетный анализ представляется более сложным и не столь интуитивно понятным аппаратом по сравнению с преобразованием Фурье. Оправданы ли эти дополнительные сложности, и так ли уж необходим аппарат вейвлетного преобразования для исследования тех или иных процессов? Как будет показано далее, привычный спектральный анализ не всегда помогает понять, как устроен анализируемый нестационарный сигнал.

Рассмотрим в качестве простого примера сигнал, являющийся суммой двух гармонических функций времени с разными круговыми частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t). \quad (1)$$

Фурье–спектр такого сигнала будет иметь два пика (рис. 1а) на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .<sup>1</sup> Когда обе гармоники присутствуют в сигнале постоянно,

---

<sup>1</sup> Следует оговориться, что в дальнейшем рассматривается диапазон положительных значений частот. Отрицательный диапазон в рассматриваемом случае, по сути дела, является зеркальным отражением положительного и не несет никакой дополнительной смысловой нагрузки.

спектральный подход четко определяет существующие в сигнале частоты, предоставляя исследователю полную информацию об “устройстве” исследуемого сигнала.

Рассмотрим теперь сигнал, в котором гармоники появляются и исчезают с течением времени:

$$f(t) = (1 - H(t)) \cos(\omega_1 t) + H(t) \cos(\omega_2 t), \quad (2)$$

где функция

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

носит название функции Хевисайда. Спектральный анализ такого сигнала (см. рис. 1б) не дает полной информации: Фурье-спектр сигнала (2) не несет информации о том, какие частоты присутствовали в сигнале в тот или иной момент времени.

Спектральное представление сигнала  $|S(\omega)|$  не позволяет судить о том, являлся ли он суммой двух гармонических функций (см. рис. 1а) или же состоял из двух неперекрывающихся во времени частотных составляющих (т.е. частоты существовали отдельно в разные моменты времени, см. рис. 1б).

Из рассмотренного простого примера следует, что спектральный анализ позволяет детектировать присутствие в сигнале различных гармоник, однако не дает информации об их сосредоточенности во времени. Таким образом, Фурье анализ является эффективным средством исследования временных реализаций, частотный состав которых не изменяется с течением времени, либо когда временная динамика не важна. В тех же случаях, когда важно знать не только о присутствии тех или иных гармоник в сигнале, но и их временную составляющую, когда в сигнале возникают (или исчезают) гармоники, как, например, в случае, описываемом соотношением (2), или частота гармоник плавно изменяется с течением времени (см. рис. 2, на котором представлен спектр мощности сигнала, у которого медленно меняется частота:  $f(t) = \cos(\omega t)$ , где



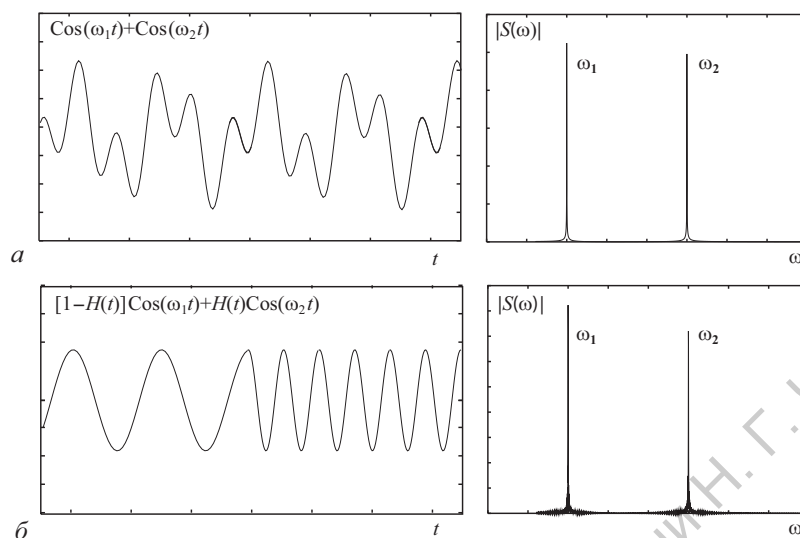


Рис. 1: Сигнал, представляющий собой суперпозицию двух гармонических функций с частотами  $\omega_2 = 2.5\omega_1$  (а), и сигнал, у которого резко изменяется частота с величины  $\omega_1$  на  $\omega_2 = 2.5\omega_1$  (б). Справа показаны Фурье-спектры сигналов, которые практически идентичны и не несут информации о динамике частот и о моменте перехода от одной частоты к другой. Шкала амплитуд на спектрах Фурье нелогарифмическая

$\omega = \omega_1 + a(\omega_2 - \omega_1)t$ , необходим иной, хотя, может быть, в чем-то похожий на спектральный, метод анализа.

Причина того, что невозможно отследить изменение во времени частотных составляющих сигнала кроется в самом механизме спектрального анализа, а именно: при преобразовании Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

интегрирование проводится по всей длине временной реализации (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ) и каждая гармоника, присутствующая во временной реализации в тот или иной интервал времени, накладывает свой “отпечаток” на общий вид спектра. Расчет Фурье-спектра сигнала  $f(t)$  даёт возможность

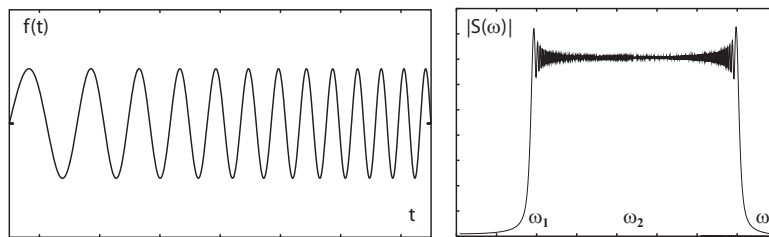


Рис. 2: Сигнал, частота которого линейно возрастает с течением времени:  $\omega = \omega_1 + a(\omega_2 - \omega_1)t$  и его Фурье спектр. Анализируя только спектр Фурье (справа), можно предположить, что в исходном сигнале присутствуют все гармоники, частоты которых попадут в диапазон  $[\omega_1; 2\omega_2 - \omega_1]$ .

определить частотный состав рассматриваемого процесса и выявить характерные ритмы колебаний. Такой расчет позволяет установить факт наличия колебаний определенной частоты, но не дает ответа на вопрос, когда существовали эти колебания – на протяжении всего времени регистрации сигнала или только на каком-то участке? Итак, спектр Фурье не содержит информации о временной локализации этих колебаний, т.е. не даёт возможности определить момент их начала и длительность их существования. Бесконечно осциллирующие функции — гармонические функции  $\sin$  и  $\cos$ , используемые при Фурье-анализе — не могут использоваться для проведения *локализованного* спектрального анализа [6, 36].

Следовательно, если необходимо определить, как менялся частотный состав сигнала с течением времени, следует отказаться от интегрирования по всему временному интервалу  $(-\infty, +\infty)$  и рассматривать некоторый диапазон или “окно”<sup>2</sup> длительностью  $2T$   $[t_0 - T; t_0 + T]$ , где  $t_0$  — интересующий нас момент времени, в который мы хотим *локально* опре-

<sup>2</sup>Здесь для упрощения изложения мы намеренно выбрали так называемое *прямоугольное окно*. В более общем случае, известном также как преобразование Габора, в качестве окна выбирается локализованная в частотном и временном диапазоне функция  $g(t)$ .

делить частотные составляющие, присутствующие в сигнале:

$$S(\omega, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4)$$

Для того, чтобы составить представление о динамике частотного состава на протяжении всего времени регистрации сигнала, необходимо сдвигать “окно” вдоль временной реализации. В этом случае, в зависимости от выбора  $t_0$ , получается *локальный* спектр, изменяющийся по мере того, как “окно” Фурье–преобразования перемещается вдоль реализации (рис. 3). В (4)  $t_0$  является переменной величиной, и спектр представляется в виде двухмерной функции  $S(\omega, t_0)$ .

Однако подобный подход, называемый оконным преобразованием Фурье с прямоугольным окном, тоже не очень хорош (см., например, работу [5]). Все дело в том, что при преобразовании Фурье спектр гармонического сигнала имеет вид  $\delta$ -функции только в том случае, если этот сигнал постоянной частоты имеет бесконечную длительность (т.е. начинается в момент времени  $t = -\infty$  и заканчивается в  $t = +\infty$ ), и интегрирование проводится по этому же бесконечному интервалу времени. В случае, если же сигнал имеет конечную длительность, (или, что почти то же самое, интегрирование ведется по конечному интервалу времени), его спектральный образ имеет конечную ширину, и чем меньше длительность сигнала, тем большую ширину в пространстве частот имеет его Фурье–образ. Таким образом, при использовании оконного преобразования Фурье, с одной стороны, необходимо выбирать ширину окна  $2T$  как можно меньше, чтобы четко выявить момент времени появления или исчезновения частотных составляющих сигнала; с другой стороны, при этом падает разрешение метода в частотном диапазоне. Иначе говоря, более или менее точно определяя момент появления какой-либо частоты, мы не можем получить точную информацию о значении частоты этой компоненты, т.е. не можем сказать: появилась ли эта частотная составляющая одна, или же одновременно возникло несколько составля-

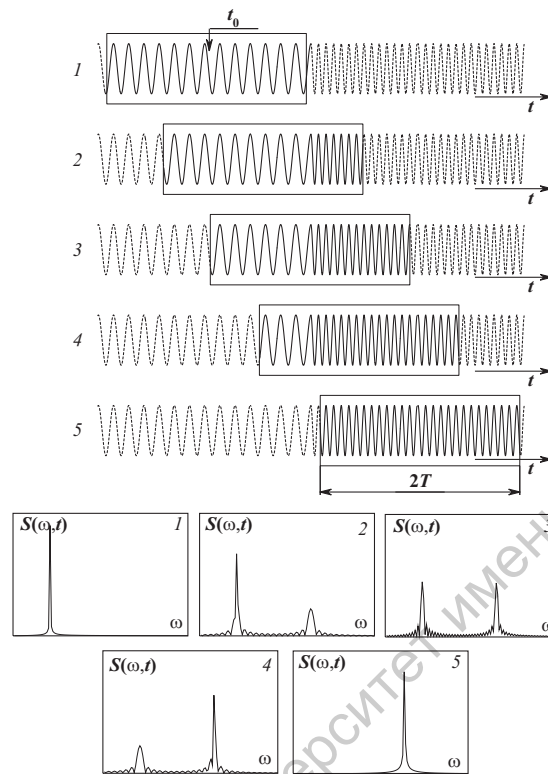


Рис. 3: Оконное преобразование Фурье временного сигнала (2), представляющего собой два последовательных участка гармонических сигналов с разными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Показано пять положений окна (прямоугольник). Сдвиг окна вдоль временной реализации приводит к трансформации спектра (нижняя часть рисунка).

ющих, близких по частоте. Попытка же улучшить разрешение метода в частотном диапазоне приводит к ухудшению временного разрешения — идеальным случаем, с точки зрения выявления частот, является само преобразование Фурье (3), но, как мы уже видели, с точки зрения анализа временной динамики частотных составляющих, оно является малоэффективным.

Рис. 4 иллюстрирует сказанное выше. Анализируемый сигнал представляет собой четыре синусоидальных процесса с разными частотами, последовательно сменяющими друг друга. На рис. 4а, б и в показана по-

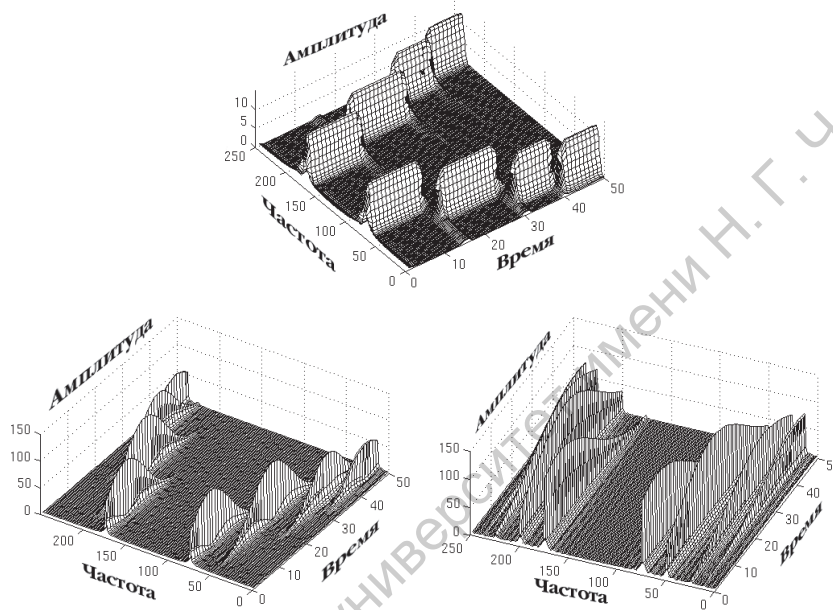


Рис. 4: Спектро-хронограммы (полученные с помощью оконного преобразования Фурье) сигнала, представляющего собой “набор” четырех синусоид, существовавших в различные интервалы времени (в интервал времени от 0 до 250 миллисекунд частота синусоидального сигнала составляла  $f = 300$  Гц, затем от 250 до 500 миллисекунд —  $f = 200$  Гц, от 500 до 750 миллисекунд —  $f = 100$  Гц и от 750 до 1000 миллисекунд —  $f = 50$  Гц). Различные рисунки соответствуют различной ширине окна. Видно, что чем лучше локализована частота сигнала, тем менее четко удастся определить момент ее появления, и наоборот (из работы [37])

верхность  $|S(\omega, t)|$ , построенная для различных величин ширины окна  $2T$ . Видно, что не удастся одновременно четко определить характер сигнала в частотной и во временной областях. Следовательно, оконное преобразование Фурье не всегда эффективно для анализа сигналов, частотный состав которых меняется с течением времени.

Таким образом, необходимо модифицировать оконное преобразование Фурье (4), чтобы сохранить возможность отслеживать изменения, происходящие во времени, и, по возможности, уменьшить недостатки, связанные с неточностью определения частот. Безусловно, читатель понимает, что теперь, по логике вещей, авторы должны ввести определение вейвлетного преобразования и показать, что оно (преобразование) лучше справляется с поставленными задачами, нежели оконное преобразование Фурье. Тем не менее, мы позволим себе еще на некоторое время отодвинуть момент, когда появится формальное определение вейвлетного преобразования, и постараемся “плавно” подвести к нему читателя. Подумаем немного над тем, как можно было бы, используя оконное преобразование Фурье (4), получить более или менее полную информацию о динамике частотных составляющих в исследуемом сигнале.

Обратим внимание на то, что хотя оконное преобразование Фурье, выполненное один раз, не дает полной информации о сигнале, совокупность подобных преобразований одного и того же сигнала, выполненных с различной шириной окна  $2T$ , оказывается гораздо более информативной (см. рис. 4а–в). Можно использовать результаты оконного преобразования с малой шириной окна для определения моментов времени, когда происходят изменения спектрального состава сигнала, а преобразования с большой шириной окна — для выделения соответствующих спектральных компонент. Другое дело, что подобный подход оказывается неудобным. Фактически, у нас возникает необходимость рассматривать функцию не двух переменных  $S(\omega, t_0)$  (4), а трех —  $S(\omega, t_0, T)$ , которая требует представления в четырехмерном пространстве, а это ве-

дет к вполне понятным сложностям.

Для уменьшения числа переменных, можно связать каким-либо образом частоту анализирующего гармонического заполнения  $\omega$  с длительностью окна  $T$ , например, для каждого временного масштаба  $T$  положить  $\omega = \omega_n = 2\pi n/T$ , где  $n \in \mathbb{N}$  — количество периодов заполнения, укладываемое на ширине окна. Тогда преобразование Фурье (4) будет иметь вид

$$S(T, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) \exp \left\{ -j \frac{2\pi n}{T} t \right\} dt, \quad n > 0. \quad (5)$$

Фактически, в трехмерном пространстве  $(\omega, t_0, T)$ , где определена функция  $S(\omega, t_0, T)$ , выделяется некоторая поверхность  $\sigma$ , в точках которой и рассматривается вышеописанная функция  $S$ . Понятно, что часть информации в этом случае теряется, но оставшейся части вполне достаточно, чтобы составить представление об особенностях анализируемой временной реализации  $f(t)$ , поскольку введенная в рассмотрение поверхность  $\sigma$  охватывает как весь частотный, так и временной диапазоны (рис. 5).

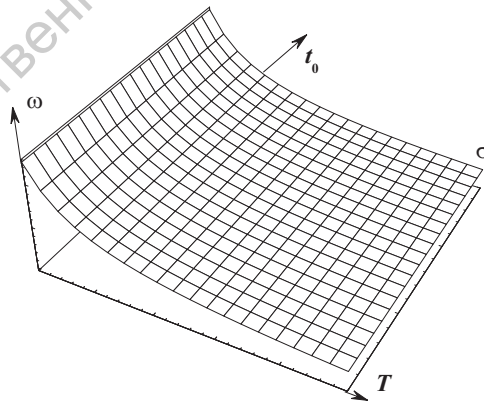


Рис. 5: Поверхность  $\sigma$ , определенная в трехмерном пространстве “частота–время–ширина окна”  $(\omega, t_0, T)$

Более того, размер окна, оптимальный для выделения различных ча-

стотных составляющих сигнала, определяется соответствующими временными масштабами: для выявления низкочастотных гармоник необходимо проанализировать большой отрезок временной реализации по сравнению с тем, который необходим для анализа высокочастотных гармоник. Соотношение  $\omega_n = 2\pi n/T$  обеспечивает разумное соотношение анализируемой частоты  $\omega_n$  и ширины анализирующего окна  $T$ .

Рассмотрим результат преобразования (5) для временной реализации  $f(t) = \sin(\omega t)$ . В этом случае несложные, но достаточно громоздкие выкладки дают

$$S(T, t_0) = \frac{2T \sin(\omega T)}{\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2} [\omega T \sin(\omega t_0) - j2\pi n \cos(\omega t_0)] \exp \left\{ -j2\pi n \frac{t_0}{T} \right\}. \quad (6)$$

Точно также, как и при спектральном анализе, результат преобразования имеет как действительную, так и мнимую части. По аналогии с преобразованием Фурье, имеет смысл рассматривать квадрат модуля величины  $S$ :

$$|S(T, t_0)|^2 = \frac{4T^2 \sin^2(\omega T)}{(\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2)^2} [\omega^2 T^2 \sin^2(\omega t_0) + 4\pi^2 n^2 \cos^2(\omega t_0)]. \quad (7)$$

Можно убедиться, что в рассматриваемом случае величина  $|S(T, t_0)|^2$  принимает максимальное значение при  $T \rightarrow 2\pi n/\omega$ , равное  $n^2/\omega^2$  (рис. 6). Таким образом, в данном примере, аналогично Фурье-анализу, происходит выделение временного масштаба  $T$  (связанного с частотой), соответствующего частоте анализируемого сигнала.

Здесь следует обратить внимание на несколько важных моментов.

*Во-первых*, для одного и того же сигнала  $f(t) = \sin(\omega t)$  при разных значениях параметра  $n$  (характеризующего число полных периодов анализирующей синусоиды соответствующей частоты, “умещающихся” в окно шириной  $T$ ), значение ширины окна, при котором величина  $|S(T, t_0)|^2$  является максимальной, оказывается различной (см. рис. 6а, б). Этот факт становится вполне понятным, если учесть, что



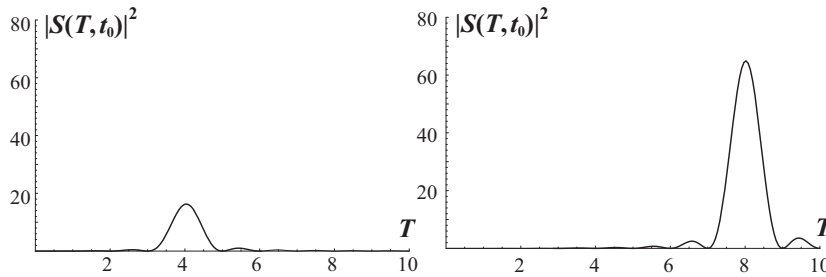


Рис. 6: Результат преобразования (5) сигнала  $f(t) = \sin(\omega t)$  ( $\omega = \pi$ ,  $t_0 = 0$ ) для (а)  $n = 2$ , (б)  $n = 4$

величина  $|S(T, t_0)|^2$  достигает максимума при такой ширине окна, когда гармоническое (синусоидальное) заполнение этого окна имеет ту же самую частоту  $\omega$ , что и анализируемый сигнал  $f(t)$  (рис. 7). Иными словами, величина  $|S(T, t_0)|^2$  максимальна, когда  $T = 2\pi n/\omega$ , где  $\omega$  — частота анализируемого сигнала  $f(t)$ . Фактически, то же самое происходит и при спектральном анализе, однако значение переменной, при котором исследуемая функция имеет максимум, зависит от того, каким образом “устроено” анализирующее окно, и не всегда совпадает с соответствующим временным масштабом, присутствующим в сигнале. Следует также заметить, что чем большее число периодов укладывается в окне интегрирования (чем больше величина  $n$ ), тем отчетливее выражена данная гармоника в  $|S(T, t_0)|^2$  (ср. рис. 6а и 6б). Однако, как следствие этого, ширина окна, при котором  $|S(T, t_0)|^2$  принимает максимальное значение, также увеличивается (рис. 6а, б), что, как было указано выше, ведет к ухудшению разрешающих свойств преобразования во временном диапазоне.

*Во-вторых*, следует помнить, что получающаяся в результате преобразования (5) величина  $S(T, t_0)$  является функцией двух переменных —  $T$  и  $t_0$ . Величина  $T$  определяет временной диапазон, по которому осуществляется интегрирование в формуле (5) и одновременно частоту анализирующего гармонического заполнения. Таким образом, частота ана-

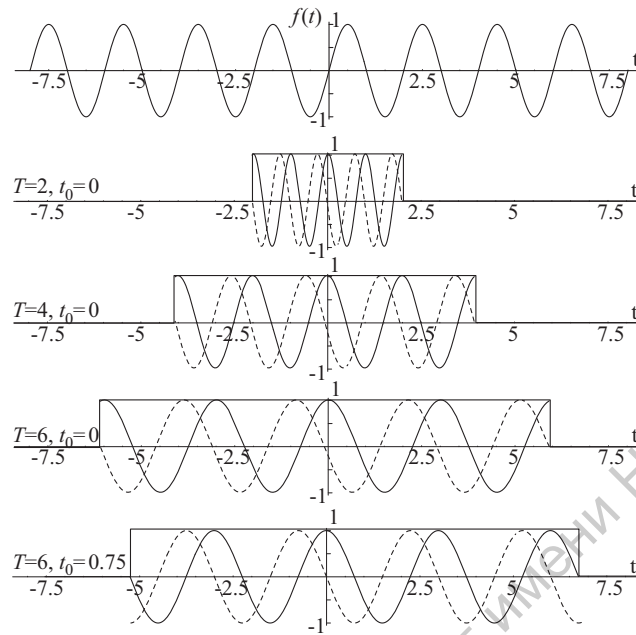


Рис. 7: (а) Временная реализация  $f(t) = \sin(\pi t)$  и несколько окон интегрирования (б–г) различной ширины  $2T$  с анализирующим гармоническим заполнением  $\exp(-j2\pi n/T)$ . Действительная часть заполнения показана сплошной линией, мнимая — пунктирной. Максимальное значение спектральной мощности  $|S(T, t_0)|^2$  достигается при  $T = 4$  (случай (в)), когда частота заполнения совпадает с частотой сигнала. Рисунок (д) иллюстрирует сдвиг окна интегрирования на величину, определяемую второй переменной  $t_0$

лизирующего гармонического заполнения оказывается жестко связана с шириной окна  $T$ . При этом переменная  $t_0$  определяет момент времени, в который осуществляется описываемое преобразование; фактически,  $t_0$  определяет сдвиг окна интегрирования вдоль оси времени. Но когда окно интегрирования сдвигается, анализирующее гармоническое заполнение “остается на месте” (см. рис. 7г, д), иными словами, фаза заполнения непрерывно изменяется по мере сдвига окна вдоль оси времени. Чтобы избежать данной проблемы, можно зафиксировать фазу заполнения

относительно анализирующего окна, для чего следует модифицировать преобразование (5):

$$S(T, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) \exp \left\{ -j \frac{2\pi n}{T} (t - t_0) \right\} dt. \quad (8)$$

Изменение фазы заполнения не оказывает влияния на величину  $|S(T, t_0)|^2$ , поскольку влияет только на аргумент комплексной функции  $S(T, t_0)$ . Для гармонического сигнала  $f(t) = \sin(\omega t)$  соотношение (8) дает

$$S(T, t_0) = \frac{2T \sin(\omega T)}{\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2} [\omega T \sin(\omega t_0) - j2\pi n \cos(\omega t_0)]. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что все различие между соотношениями (6) и (9) состоит лишь в множителе  $\exp(-j2\pi n t_0/T)$ .

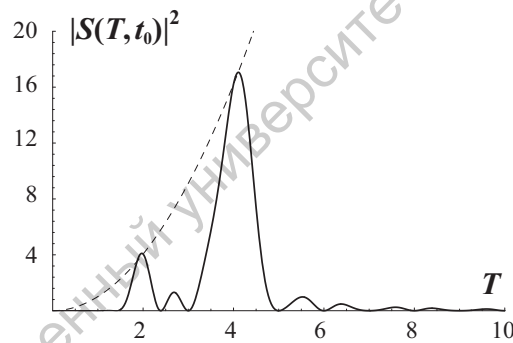


Рис. 8: Преобразование (8) для сигнала  $f(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$ ,  $\omega_1 = \pi$ ,  $\omega_2 = 2\pi$ . Пунктирной линией показана парабола  $T^2$ , характеризующая положение максимумов гармоник соответствующих частот и единичной амплитуды

*В-третьих*, необходимо обратить внимание на тот факт, что две гармоники исходного сигнала с различными частотами, но с одинаковой амплитудой, выделяются преобразованием (8) в виде двух максимумов различной высоты (рис. 8). Квадраты этих максимумов соотносятся как

$$\frac{|S_1|^2}{|S_2|^2} = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2, \quad (10)$$

что следует из формулы (7). Иными словами, чем больше частота гармоники, тем меньше ее вклад в общий спектр по сравнению с гармониками меньших частот. Из вышесказанного следует, что если в анализируемом сигнале присутствуют две гармоники с сильно различающимися частотами, то гармонику с большей частотой при анализе с помощью соотношения (8) можно просто не заметить, если не предпринять соответствующих мер.

Заметим, что выражение (8) можно переписать в более общем виде

$$S(T, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t - t_0}{T} \right) dt, \quad (11)$$

где  $\psi(\xi)$  — анализирующая функция (рис. 9)

$$\psi(\xi) = [H(\xi + 1) - H(\xi - 1)] e^{j2\pi\xi} \quad (12)$$

(звездочка здесь и далее обозначает комплексное сопряжение). Фактически, преобразование (11) уже является вейвлетным преобразованием (с некоторыми поправками). Таким образом, мы осуществили плавный переход от спектрального анализа к вейвлетному преобразованию.

Преобразование (11) осуществляется растяжением и сдвигом функции  $\psi(\xi)$  так, как это было описано выше и показано на рис. 7. В этом случае величина  $T$  описывает растяжение, а  $t_0$  — сдвиг анализирующей функции. Функция (12), с точностью до нормировочного коэффициента, называется “материнским” или “базовым” вейвлетом (“mother wavelet”), из которого получаются все остальные вейвлеты других масштабов  $\psi((t - t_0)/T)$  путем сдвига и растяжения. Для удобства на материнский вейвлет накладывается условие единичной нормы в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\|\psi\|_{L^2} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \psi^*(\xi) d\xi \right)^{1/2} = 1. \quad (13)$$

С учетом соотношения (13) рассматриваемый “материнский вейвлет” (будем обозначать его как  $\psi_0$ ) имеет вид

$$\psi_0(\xi) = \frac{H(\xi + 1) - H(\xi - 1)}{\sqrt{2}} e^{j2\pi\xi}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что вейвлетные функции для других масштабов  $\psi_0((t - t_0)/T)$ , полученные “растяжением” и сдвигом материнского вейвлета  $\psi_0$ , не удовлетворяют соотношению (13). Для того, чтобы оно выполнялось, необходимо на соответствующем временном масштабе  $T$  ввести корректирующий коэффициент, зависящий от этого масштаба. Тогда и в преобразовании (11) следует использовать функцию  $\psi_0((t - t_0)/T)$

$$\psi_{T,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \psi_0\left(\frac{t - t_0}{T}\right) \quad (15)$$

и преобразование (11) принимает вид

$$S(T, t_0) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_0^*\left(\frac{t - t_0}{T}\right) dt. \quad (16)$$

Это соотношение соответствует непрерывному вейвлетному преобразованию, так, как оно обычно вводится в литературе [11, 38, 35, 30, 7, 39, 40, 41, 36]. Единственное, что еще следует отметить, это обозначения. Для вейвлетного преобразования традиционно принято обозначать временной масштаб через  $s$  (то есть  $T \equiv s$ ), а само преобразование через  $W(s, t_0)$ :

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t - t_0}{s}\right) dt. \quad (17)$$

Часто удобнее работать не с временными масштабами  $s$ , а частотами  $f = 1/s$  ( $\omega = 2\pi/s$ ), которые имеют тот же смысл, что и частоты преобразования Фурье.

Итак, нам удалось осуществить плавный переход от преобразования Фурье к вейвлетному преобразованию, так, чтобы стала понятна его суть

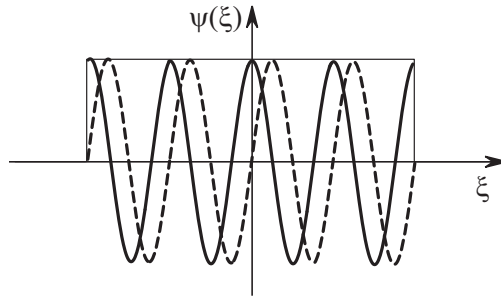


Рис. 9: Действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части Sin-вейвлета

и основная идея. По аналогии с преобразованием Фурье, вейвлетное преобразование сигнала  $f(t)$  состоит в его разложении по некоторому базису. Отличие заключается в том, что при вейвлетном преобразовании происходит разложение по другому функциональному базису, отличному от базиса Фурье-преобразования, заданного гармоническими функциями  $\sin$  и  $\cos$ . В качестве базисных функций выступают “солитоноподобные”, хорошо локализованные во временной и частотной областях функции  $\psi_{s,t_0}$ , получающиеся растяжением и сдвигом материнского вейвлета  $\psi_0$ . Использование подобных локализованных функций (вейвлетов) позволяет проводить анализ процессов, статистические характеристики которых меняются во времени или пространстве (нестационарные процессы), и обеспечивает двумерную развертку сигнала  $f(t)$ , при которой время и частота воспринимаются как независимые переменные [11].

Материнский вейвлет (14), полученный плавным переходом от Фурье-преобразования, показан на рис. 9. Будем называть эту вейвлетную функцию Sin-вейвлетом. Этот вейвлет не имеет широкого применения на практике и был введен исключительно из методологических соображений, чтобы проиллюстрировать переход от спектрального анализа к вейвлетному преобразованию. В частности, данный вейвлет плохо локализован в частотной области. Однако важной отличительной чертой вейвлетного преобразования является тот факт, что в качестве материнско-

го вейвлета для непрерывного вейвлетного анализа может быть выбрана *любая* функция, удовлетворяющая определенным условиям, включающим: локализацию функции по времени и по частоте; нулевое среднее; конечную энергию; автомодельность (самоподобие базиса), которые будут подробно рассмотрены ниже в разделе 1.2.

Следует также отметить, что существуют непрерывное вейвлетное преобразование (НВП) и дискретное вейвлетное преобразование (ДВП). В данном учебном пособии акцентируем наше внимание на непрерывном вейвлетном преобразовании. Подробнее ознакомиться с дискретным вейвлетным преобразованием можно в работах [4, 39].

## 1.2 Основные понятия и определения. Свойства непрерывного вейвлетного преобразования

Для последующего изложения ограничим класс исследуемых функций (сигналов)  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Пространство  $L^2$  содержит сигналы с ограниченной энергией, то есть с конечной нормой  $\|f\|_{L^2}$ .

Непрерывное вейвлетное преобразование осуществляется путем свертки анализируемой функции  $f(t)$  с двухпараметрической вейвлетной функцией  $\psi_{s,t_0}(t)$

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s,t_0}^*(t) dt, \quad (18)$$

Вейвлетная функция получается из материнского вейвлета  $\psi_0(t)$  путем его растяжения и сдвига:

$$\psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_0\left(\frac{t-t_0}{s}\right). \quad (19)$$

Параметр  $s$ , называемый масштабом вейвлетного преобразования ( $s \in \mathbb{R}^+$ ), определяет ширину вейвлета, а  $t_0 \in \mathbb{R}$  — параметр сдвига — определяет положение вейвлета на оси  $t$ . Множитель  $1/\sqrt{s}$  в соотношении (19)

введен для того, чтобы все вейвлетные функции  $\psi_{s,t_0}$  имели постоянную (единичную) норму в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$

$$\|\psi_{s,t_0}\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2} = 1. \quad (20)$$

Напомним, что норма в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$  определяется как

$$\|f\|_{L^2} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Отметим, что выполнение условия (20), в силу теоремы Парсеваля, приводит к

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = 1, \quad (22)$$

где  $\hat{\psi}(\omega)$  — Фурье-образ вейвлетной функции.

Из последних соотношений, в частности, следует, что непрерывное вейвлетное преобразование изометрически отображает пространство функций одной переменной в двумерное вейвлетное (в общем случае, комплексное) пространство:

$$W : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

и, следовательно, информация, содержащаяся в коэффициентах вейвлетного преобразования, является избыточной. Отсюда следует, например, тот факт, что непрерывное вейвлетное преобразование случайного сигнала (шума) будет показывать наличие корреляции, которой нет в сигнале, но которая естественным образом присутствует в самом преобразовании. Это является достаточно существенным недостатком вейвлетного преобразования, и его необходимо учитывать при интерпретации вейвлетных спектров.

Материнский вейвлет  $\psi_0$  может быть выбран достаточно произвольно, однако, при этом он должен удовлетворять ряду условий.



Прежде всего, следует назвать *условие ограниченности*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(t)|^2 dt < \infty. \quad (23)$$

В качестве оценки хорошей локализации и ограниченности могут служить соотношения  $|\psi_0(t)| < 1/(1 + |t|^n)$  или  $|\hat{\psi}_0(\omega)| < 1/(1 + |\omega - \omega_0|^n)$ , где  $\omega_0$  — доминантная частота вейвлета, а величина параметра  $n$  должна быть как можно больше [8].

*Условие локализации.* Базисная вейвлетная функция (материнский вейвлет)  $\psi_0$  должна быть локализована как во временном, так и в частотном представлении. Для этого необходимо, чтобы  $\psi_0$  спадала достаточно быстро на бесконечности и обладала достаточной регулярностью.

*Условие допустимости.* Материнский вейвлет должен быть выбран таким образом, чтобы его Фурье-образ  $\hat{\psi}_0(\omega)$  удовлетворял условию

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}_0(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty. \quad (24)$$

Отметим, что для практического применения часто достаточно рассмотрения только положительных частот (следствие разумного условия  $s > 0$ ), поэтому материнский вейвлет должен удовлетворять соотношению

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}_0(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}_0(-\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty. \quad (25)$$

Подчеркнем также, что для всех практических целей условие (24) эквивалентно требованию *нулевого среднего* (следствие (22))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(t) dt = 0 \quad (26)$$

или

$$\hat{\psi}_0(0) = 0. \quad (27)$$

Иногда бывает необходимым, чтобы не только нулевой момент (26) обращался в ноль, но и все первые  $m$  моментов были равны нулю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi_0(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (28)$$

Такие вейвлеты ( $m$ -ого порядка) позволяют анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка, игнорируя при этом наиболее регулярные (полиномиальные) составляющие сигнала. В этом случае коэффициенты вейвлетного преобразования будут малы в областях, где функция имеет гладкость до порядка обращаящихся в нуль моментов, и вейвлетное преобразование будет реагировать только на изменения, описываемые функциями более высокого порядка. Действительно, раскладывая в вейвлетном преобразовании (18) функцию  $f(t)$  в ряд Тейлора в окрестности  $t_0$ , получим

$$\begin{aligned} W(s, t_0) = & \frac{1}{\sqrt{s}} \left[ f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^* \left( \frac{t-t_0}{s} \right) dt + \right. \\ & + f'(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0) \psi_0^* \left( \frac{t-t_0}{s} \right) dt + \dots + \\ & \left. + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0)^n \psi_0^* \left( \frac{t-t_0}{s} \right) dt + \dots \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

В этом случае первые  $m$  слагаемых соотношения (29) в силу (28) обращаются в ноль и, таким образом, не дают вклад в  $W(s, t_0)$ . Заметим, что для практических целей иногда оказывается достаточным, чтобы условие (28) выполнялось приблизительно.

В том случае, если условие допустимости (24) выполняется, существует *обратное вейвлетное преобразование*

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 \sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0 \left( \frac{t-t_0}{s} \right) W(s, t_0) dt_0. \quad (30)$$

По аналогии со спектром мощности Фурье–преобразования  $P(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$  также можно ввести мгновенное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (31)$$

и интегральный усредненный во времени вейвлетный спектр или *скалограмму*

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0. \quad (32)$$

Интегральное распределение энергии по масштабам для вейвлетного преобразования связано с Фурье–спектром мощности [11] соотношением вида

$$\langle E(s) \rangle \sim s \int P(\omega) |\hat{\psi}_0(s\omega)|^2 d\omega, \quad (33)$$

из чего следует, что распределение энергии по масштабам  $\langle E(s) \rangle$  представляет собой сглаженный спектр мощности Фурье–преобразования, причем характер сглаживания определяется Фурье–образом материнского вейвлета  $\psi_0$ .

Рассмотрим важный вопрос о возможности вейвлетного анализа выделять информацию о локальных свойствах сигнала. Как уже обсуждалось в предыдущем разделе 1.1, для получения точной информации о высокочастотных составляющих сигнала с высоким разрешением во времени достаточно коротких интервалов, в то время как информацию о низкочастотной части спектра возможно получить только анализируя достаточно длительные интервалы времени. На рис. 10 представлена схема, иллюстрирующая возможности частотно–временной локализации четырех различных преобразований. На рис. 10а показана схема разбиения пространства пространстве “время  $t$  — частота  $\omega$ ” для выборки дискретных значений сигнала, где в качестве базисной функции служит  $\delta$ -функция (преобразование Шеннона). В этом случае получаем,

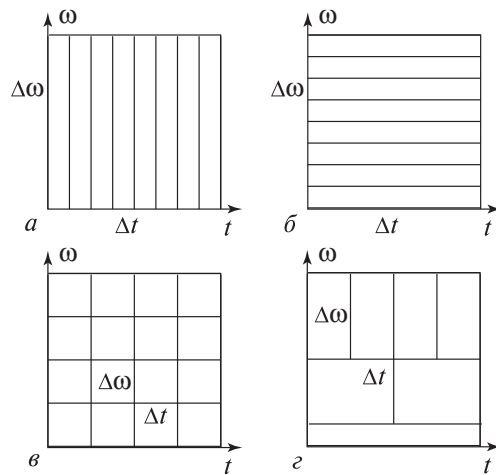


Рис. 10: Частотно–временная локализация в пространстве “время  $t$  — частота  $\omega$ ” для различных преобразований: (а) дискретная выборка (преобразование Шеннона), (б) преобразование Фурье, (в) оконное Фурье–преобразование, (г) непрерывное вейвлетное преобразование

что сигнал хорошо локализован во времени и совершенно не разрешен по частоте. Из рис. 10б, соответствующего преобразованию Фурье, видно, что мы имеем хорошее разрешение по частоте, но при этом отсутствует локализация во времени. Рис. 10в соответствует оконному преобразованию Фурье. В данном случае временное разрешение на больших и малых масштабах постоянно и определяется размером окна. В случае же вейвлетного преобразования (рис. 10г) базисные функции имеют уменьшающееся с увеличением масштаба  $s$  (с уменьшением частоты) временное разрешение (определяемое шириной вейвлетной функции  $\psi(t/s)$ ) и увеличивающееся с масштабом разрешение по частоте (определяемое шириной Фурье–образа вейвлетной функции  $\hat{\psi}(s\omega)$ ). Это дает хорошую временную локализацию на малых масштабах и хорошее частотное разрешение на больших масштабах (рис. 10г).

Итак, *основным свойством* вейвлетного преобразования, принципиальным для анализа сложных нестационарных процессов, является спо-

способность сохранять локальность представления сигнала, и, как следствие, локально реконструировать сигнал. Важно, что непрерывное вейвлетное преобразование дает возможность выделить вклад определенного масштаба в тот или иной момент времени или реконструировать только часть сигнала. Фактически имеет место связь между локальными свойствами сигнала и локальным поведением коэффициентов его вейвлетного преобразования. Под локальностью понимается то, что для реконструкции части сигнала необходимо рассматривать коэффициенты вейвлетного преобразования, относящиеся только к подобласти вейвлетного пространства (см. рис. 11а), так называемого угла влияния. Если базовая вейвлетная функция  $\psi_0$  хорошо локализована в интервале  $\Delta T$  для  $s = 1$ , то коэффициенты вейвлетного спектра, соответствующие моменту времени  $t'_0$ , будут содержаться в конусе влияния, ограниченным прямыми  $s = 2(t'_0 - t_0)\Delta T$  и  $s = 2(t_0 - t'_0)\Delta T$ . Заметим, что, в свою очередь, коэффициент  $W(s', t'_0)$  в точке  $(t'_0, s')$  зависит от значений временного ряда из определяемого тем же углом влияния временного диапазона около значения  $t'_0$  (рис. 11б). Диапазон этот тем больше, чем больше анализируемый масштаб  $s'$ , то есть высокочастотная (или, что то же самое, мелкомасштабная) информация вычисляется на основе малых по длительности отрезков сигнала, а низкочастотная — больших. Одновременно, если  $\psi_0$  хорошо локализована и в Фурье-пространстве, то есть, материнская функция сосредоточена в частотном интервале  $\Delta\Omega$  вокруг доминантной частоты  $\omega_0$  для  $s = 1$ , то коэффициенты вейвлетного преобразования, соответствующие частоте  $\omega'$  сигнала, будут находиться в полосе  $[\omega_0/(\omega' + \Delta\Omega/2s), \omega_0/(\omega' - \Delta\Omega/2s)]$ .

Например, если функция  $f(t)$  локально гладкая, то соответствующие коэффициенты вейвлетного преобразования остаются малыми. Если же  $f(t)$  содержит сингулярность (например, имеет разрыв), тогда в ее окрестности амплитуда вейвлет-коэффициентов существенно возрастает.

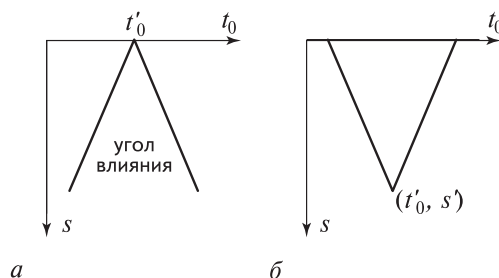


Рис. 11: Угол влияния вейвлетного преобразования на плоскости  $(t_0, s)$

ет<sup>3</sup>. Отметим также, что если вейвлет-коэффициенты, по тем или иным причинам, содержат случайные ошибки, то они будут действовать на реконструируемый сигнал только локально вблизи возмущения, в то время как преобразование Фурье будет распространять ошибки по всему реконструируемому сигналу.

### 1.3 Базовые материнские вейвлеты

Одним из наиболее важных моментов является выбор конкретного материнского вейвлета  $\psi_0$ , с помощью которого будет проводиться анализ интересующего нас процесса. Этот выбор зависит от решаемой задачи и от характеристик анализируемых сигналов. Например для определения фазы колебательного процесса на основе вейвлетного преобразования используются *комплексные вейвлеты*. Для анализа свойств самоподобия процесса на разных масштабах целесообразно применять *вещественные вейвлеты*. При выборе вейвлета большую роль играет интуиция и практический опыт исследователя, а также существующие традиции использования тех или иных функций при решении определенного круга задач. Это вовсе не означает, что с другим вейвлетом нельзя получить схожие результаты. Выбор разных базисных функций можно интерпретировать как выбор разных объективов для микроскопа: если данный объектив

<sup>3</sup>Изящный пример применения данного свойства вейвлетов для автоматической настройки резкости микроскопа описан в работе [9].

позволяет рассмотреть нужные детали, то он подходит для решаемой задачи. С другой стороны, слишком большое увеличение объектива не даст возможности увидеть объект как целое (лишь отдельную часть), а слишком малое увеличение не позволит увидеть детали объекта. Иногда также используют аналогию с разными системами исчисления. Применение десятичной или двоичной системы определяется зачастую удобством и традициями. В зависимости от выбора системы исчисления решение конкретной задачи может потребовать больших или меньших усилий, и интуиция при этом играет важную роль. В то же время существуют системы исчисления, применение которых просто исключено при проведении расчетов (например, римские цифры не подходят, если нужно осуществлять операции умножения). Ситуация с выбором материнского вейвлета, действительно, в чем-то аналогичная.

Рассмотрим в данном разделе наиболее часто используемые на практике "стандартные" материнские вейвлеты. Напомним, что непрерывное вейвлетное преобразование осуществляется с единственной материнской вейвлетной функцией  $\psi_0$ , которая, в частности, хорошо локализована во времени, то есть быстро стремится к нулю. Данная функция должна быть подвергнута двум математическим преобразованиям, а именно изменению масштаба (сжатию или растяжению) и смещению (сдвигу) вдоль анализируемого сигнала благодаря чему покрывается вся временная ось (рис. 12).

Пусть для простоты такие смещения вейвлетной функции происходят на целые интервалы, то есть рассматриваются сдвиги вида  $\psi(\eta - k)$ , где  $k$  – целое число. Введем тогда аналог частоты, которую традиционно для удобства записывают через степени двойки  $2^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Тогда сдвиги и растяжения вейвлетной функции можно представить в виде:  $\psi(2^j\eta - k)$ . Учитывая вышесказанное, с помощью масштабных преобразований  $(1/2)^j$  и сдвигов  $k/2^j$  возможно описать все частоты и покрыть всю ось, используя единственную базовую вейвлетную функцию. Заметим, что норма

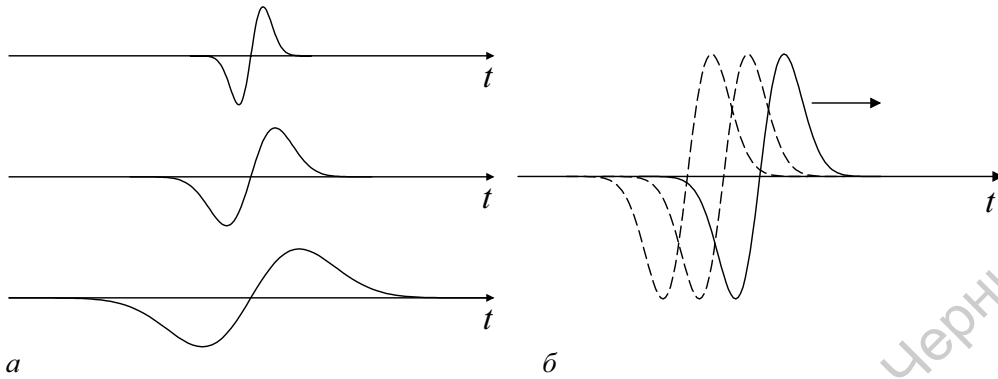


Рис. 12: Математические преобразования материнского вейвлета – изменение масштаба (а) и смещение (сдвиг) вдоль сигнала (б)

(13) вейвлетной функции  $\|\psi_0(2^j\eta - k)\|_{L^2} = 2^{-j/2}\|\psi_0(\eta)\|_{L^2}$ , поэтому, если базисная вейвлетная функция  $\psi_0(\eta)$  имеет единичную норму, то все функции  $\{\psi_{jk}\}$ , порождаемые ею

$$\psi_{jk}(\eta) = 2^{j/2}\psi_0(2^j\eta - k), \quad (34)$$

также будут иметь единичную норму.

Базисная вейвлетная функция называется ортогональной и составляет ортонормированный базис в том случае, если

$$\langle \psi_{jk} | \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}. \quad (35)$$

Один из примеров ортогонального вейвлета будет приведен чуть ниже. Обычно ортогональные вейвлетные базисы используют для проведения анализа в рамках дискретного вейвлетного преобразования [39].

Конкретный выбор анализирующего материнского вейвлета определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждая базовая вейвлетная функция  $\psi_0$  характеризуется различными свойствами, что позволяет, используя разные вейвлетные функции, выявить различные особенности анализируемого сигнала  $f(t)$ . На рис. 13 приведены наиболее часто используемые базовые вейвлетные функции  $\psi_0(\eta)$  и их



Фурье-образы. В таблице 1 находится ряд других важных характеристик, которые будут рассмотрены далее.

Одним из наиболее часто используемых комплексных материнских вейвлетов для анализа частотно-временной структуры сигналов является вейвлет Морле [3] (см. рис. 13а,б)

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} \left( e^{j\omega_0\eta} - e^{-\omega_0^2/2} \right) e^{-\eta^2/2}, \quad (36)$$

где  $\omega_0$  – параметр вейвлета, называемый центральной частотой (наиболее часто рассматривается значение  $\omega_0 = 2\pi$ ). Второе слагаемое в скобках осуществляет корректировку при проведении вейвлетного преобразования сигналов с ненулевым средним значением. В случае  $\omega_0 \gg 0$  им можно пренебречь.

Морле-вейвлет, фактически, является аналогом Sin-вейвлета, рассмотренного в разделе 1.1. Вейвлет Морле представляет собой синусоидальную функцию, модулированную функцией Гаусса, а Sin-вейвлет — прямоугольным импульсом. Базис, построенный на основе вейвлета Морле, является хорошо локализованным во временной области и Фурье-пространстве, причем с увеличением  $\omega_0$  растет разрешение в Фурье-пространстве, но ухудшается локализация во времени. Это хорошо видно из сравнения Фурье-образов вейвлета Морле с центральными частотами  $\omega_0 = 2\pi$  и  $\omega_0 = 16$  на рисунках 13а и 13б. В последнем случае ширина Фурье-образа намного меньше, что и свидетельствует о лучшей разрешающей способности в частотной области. Одновременно, разрешающая способность во временной области падает.

Еще одним примером комплексных вейвлетов является вейвлет Паула [42] (см. рис. 13г)

$$\psi_0(\eta) = \frac{2^m j^m m!}{\sqrt{\pi}(2m!)} (1 - j\eta)^{-(m+1)}, \quad (37)$$

где  $m$  – порядок вейвлета, который соответствует количеству нулевых моментов.

В качестве действительных базовых вейвлетных функций широко используется семейство DOG вейвлетов [43], которые конструируются на базе производных функции Гаусса (см. рис. 13в):

$$\psi_0(\eta) = \frac{(-1)^{m+1}}{\left[\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\right]^{0.5}} \frac{d^m}{d\eta^m} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right). \quad (38)$$

Материнский вейвлет, соответствующий  $m = 1$ , называется WAVE-вейвлетом:

$$\psi_0(\eta) = \eta e^{-\eta^2/2}, \quad (39)$$

$m = 2$  — МНАТ-вейвлетом (*Mexican Hat* — “Мексиканская шляпа”):

$$\psi_0(\eta) = (1 - \eta^2) e^{-\eta^2/2}, \quad (40)$$

Часто в качестве действительного материнского вейвлета также применяется дискретный ФНАТ-вейвлет, более известный под названием “Французская шляпа” (*French hat*) (см. рис. 13д)

$$\psi_0(\eta) = \begin{cases} 1, & |\eta| < 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |\eta| \leq 1, \\ 0, & |\eta| > 1. \end{cases} \quad (41)$$

Примером ортогональной дискретной базисной вейвлетной функции, порождающей ортонормированный базис, является вейвлет Хаара:

$$\psi_0(\eta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \eta < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq \eta < 1, \\ 0, & \eta < 0, \eta \geq 1. \end{cases} \quad (42)$$

Легко показать, что любые две функции  $\psi_{jk}$  и  $\psi_{lm}$ , полученные с помощью материнской вейвлетной функции (42) по формуле (19) с помощью масштабных преобразований  $2^{-j}$ ,  $2^{-l}$  и сдвигов  $k/2^j$ ,  $m/2^l$ , ортогональны и имеют единичную норму.

Недостатком ФНАТ-вейвлета и вейвлета Хаара является их негладкость — они имеют резкие границы, вследствие чего возникают бесконечные (убывающие как  $1/\omega$ ) хвосты Фурье-образов вейвлетных функций.

Таблица 1: Наиболее часто используемые на практике стандартные материнские вейвлеты и их основные свойства

Вейвлет	$\psi_0(\eta)$	$\hat{\psi}_0(s\omega)$	$\tau_s$	$f/f_s$
Морле	$\pi^{-1/4} e^{j\omega_0\eta} e^{-\eta^2/2}$	$\pi^{-1/4} H(\omega) e^{(s\omega - \omega_0)^2/2}$	$\sqrt{2}s$	$\frac{1}{4\pi} (\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2})$
Паул	$\frac{2^m j^m m!}{\sqrt{\pi(2m!)}} (1 - j\eta)^{-(m+1)}$	$\frac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)}} H(\omega) (s\omega)^m e^{-s\omega}$	$s/\sqrt{2}$	$\frac{1}{4\pi}(2m + 1)$
DOG	$\frac{(-1)^{m+1}}{[\Gamma(m+\frac{1}{2})]^{1/2}} \frac{d^m}{d\eta^m} e^{-\frac{\eta^2}{2}}$	$\frac{j^m}{[\Gamma(m+\frac{1}{2})]^{1/2}} (s\omega)^m e^{-\frac{(s\omega)^2}{2}}$	$\sqrt{2}s$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{m + 1/2}$
FNAT	$\begin{cases} 1, &  \eta  < 1/3, \\ -1/2, & 1/3 <  \eta  \leq 1, \\ 0, &  \eta  > 1 \end{cases}$	$3H(s\omega) \left( \frac{\sin(s\omega)}{s\omega} - \frac{\sin(3s\omega)}{3s\omega} \right)$	$\sqrt{2}s$	$3/4$

Здесь  $H(x)$  – функция Хевисайда;  $f$  – частота Фурье–преобразования,  $f_s$  – частота вейвлетного преобразования ( $f_s = 1/s$ ),  $\tau_s$  – ширина области краевых эффектов

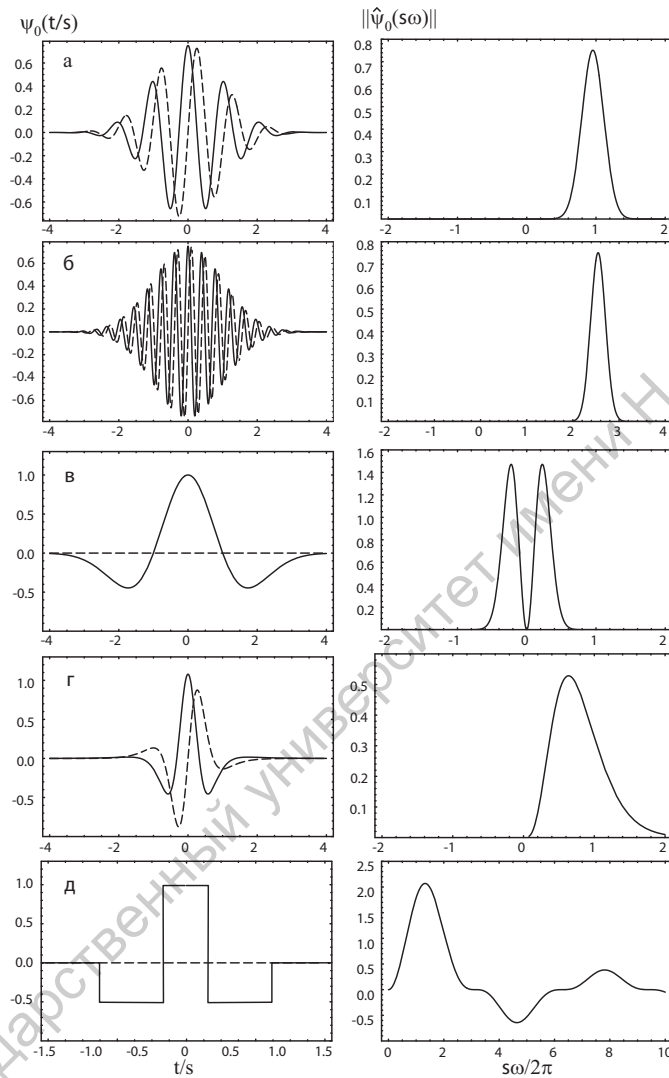


Рис. 13: Примеры базисных вейвлетных функций. Представлены действительные (сплошные линии) и мнимые (пунктирные линии) части материнских вейвлетов (слева) и их Фурье-образы (справа): (а) Вейвлет Морле с центральной частотой  $\omega_0 = 2\pi$ ; (б) — вейвлет Морле с  $\omega_0 = 16$ ; (в) — МНАТ вейвлет (DOG-вейвлет с  $m = 2$ ); (г) — вейвлет Паула с  $m = 4$  и (д) — FHAT вейвлет

Для вейвлета Хаара также следует отметить несимметрию его образа в Фурье–пространстве. Для ряда приложений эти особенности не существенны, а иногда могут являться достоинствами выбранных функций [8].

Конечно же, количество базовых вейвлетов не ограничивается рассмотренными в данном разделе. Здесь лишь собраны наиболее часто используемые материнские вейвлеты. Для различных приложений были предложены и успешно применены другие базовые вейвлетные функции. В работах [44, 45, 46, 47, 48, 11] можно найти дополнительные примеры материнских вейвлетов, а также различные способы их конструирования.

#### 1.4 Практические вопросы расчета непрерывного вейвлетного преобразования

Рассчитать аналитически вейвлетные спектры возможно только для простейших модельных сигналов  $f(t)$ . Поэтому на практике при вейвлетном анализе сигналов, полученных в результате экспериментальной регистрации тех или иных процессов, используются методы численного расчета вейвлетного преобразования.

При численном анализе мы имеем дело с временной реализацией интересующей нас физической величины  $x(t)$ , заданной в дискретные моменты времени. Будем рассматривать случай, когда значения величины заданы через равные интервалы времени<sup>4</sup>. Тогда для проведения вейвлетного анализа мы располагаем временным рядом величины  $\{x_n\}$ , где каждое из значений  $x_n$  задано с одинаковым временным интервалом  $h$ , то есть,  $x_n = x(hn)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ , где  $N$  – число отсчетов в исследуемом ряду.

Непрерывное вейвлетное преобразование некоторой дискретной по-

---

<sup>4</sup> Это наиболее типичный случай, встречающийся при анализе экспериментальных данных.

следовательности  $\{x_n\}$  определяется как свертка этой последовательности и базисной вейвлетной функции  $\psi(\eta)$  (18), которая соответствующим образом перенормируется с масштабом  $s$  и сдвигается по временной шкале на интервал  $nh$ :

$$W(n, s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \psi^* \left( \frac{(n' - n)h}{s} \right). \quad (43)$$

Тогда, изменяя масштабный коэффициент (также на дискретном интервале) и величину сдвига во времени вейвлетной функции  $nh$ , можно восстановить и локализовать динамику любых особенностей процесса  $\{x\}$  в пространстве масштабов  $s$ , то есть определить как мгновенную амплитуду колебаний на данном временном масштабе, так и особенности динамики каждого из масштабов с течением времени. Фактически, выражение (43) является дискретным аналогом выражения (18), где для численного интегрирования используется хорошо знакомый из вычислительной математики метод прямоугольников.

#### 1.4.1 Метод эффективной численной реализации вейвлетного преобразования, исходя из определения НВП

Расчет вейвлетного преобразования с непосредственным использованием соотношения (43) не является оптимальным. Наиболее простым и универсальным способом оптимизировать расчет вейвлетного преобразования (43) является метод, который принимает во внимание одну важную особенность материнского вейвлета, а именно его способность выделять информацию о локальном поведении сигнала во времени (см. рис. 11). Эта возможность основана на условии локализации вейвлетной функции в некотором интервале  $t \in [t_0 - T(s), t_0 + T(s)]$ , где  $T(s)$  – интервал времени, на котором можно считать, что вейвлетная функция спадает до нуля. Следует обратить внимание, что вейвлетная функция масштабируется (сжимается и растягивается), следовательно, при вычислении преобразования на различных временных масштабах интервал  $T = T(s)$

зависит от масштаба  $s$ . Вне этого интервала мы можем считать, что вейвлетная функция  $\psi$  близка к нулю с высокой степенью точности. Таким образом, практически без потери точности выражение (18) может быть заменено на выражение:

$$W(s, t_0) \simeq \int_{t_0 - T(s)}^{t_0 + T(s)} f(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt. \quad (44)$$

Величина  $T(s)$  зависит от вида материнского вейвлета и может быть определена экспериментально при заданной точности расчета вейвлетного преобразования. Единственное, что можно отметить: чем больше  $T$ , тем точнее будет рассчитан вейвлетный спектр. Например, для часто используемого вейвлета Морле оптимальная величина временного интервала, представляющая компромис между точностью и скоростью вычислений, может быть определена как  $T(s) = 4s$ .

В дискретном виде соотношение (44) переписывается в виде

$$W(n, s) = \sum_{n' = n - 4s/h}^{n + 4s/h} x_{n'} \psi^* \left( \frac{(n' - n)h}{s} \right). \quad (45)$$

Отсюда видно, что, каковы бы ни были значения дискретной функции  $\{x_n\}$ , значения вейвлетной функции во все моменты  $n$  будут оставаться постоянными, а значит их возможно вычислить один раз в дискретные моменты времени с шагом дискретизации  $h$  из интервала  $[-T(s), T(s)]$ :

$$y_{s,i} = \psi^*(ih/s), i \in [-T(s)/h, T(s)/h] \quad (46)$$

и сохранить матрицу  $\{y_{s,i}\}$  в памяти.

Таким образом, вычислительная задача определения коэффициентов вейвлетного преобразования сводится к перемножению двух матриц:

$$W(n, s) = \sum_{i = -T(s)/h}^{T(s)/h} x_{i+n} y_{s,i} \quad (47)$$

которое на современных компьютерах может быть выполнено очень быстро.

При расчете непрерывного вейвлетного преобразования без каких-либо численных “ухищрений” процедура (43) должна быть проделана  $N$  раз для каждого значения масштаба  $s$ , где  $N$  – число точек временной реализации. Если предположить, что  $\{x_n\}$  – комплексная последовательность, а вейвлетная функция заранее вычислена во всем интересующем нас диапазоне значений, то в этом случае требуется совершить  $\mathcal{L} \times 8N^3 + O(N)$  арифметических операций, здесь  $\mathcal{L}$  – число масштабов  $s$ , на которых осуществляется расчет выражения (43). Действительно, в каждой точке дискретного пространства  $(n, s)$ , размерность которого  $N \times \mathcal{L}$ , требуется в соответствии с соотношением (43) совершить  $N$  комплексных умножений (по 6 арифметических операций) и  $N - 1$  комплексное сложение (2 арифметические операции).

С использованием соотношения (47) число необходимых операций резко уменьшается, так как теперь необходимо выполнить — всего  $\mathcal{L} \times 8N \times \sum_{i=s_{\min}/\Delta s}^{s_{\max}/\Delta s} T(i * \Delta s)/h)^2 + O(N)$ , где  $s_{\min}$  и  $s_{\max}$  – минимальное и максимальное значение анализируемого диапазона масштабов,  $\Delta s$  – шаг по масштабам. Если  $T(s)/h \ll N$ , то получается значительный выигрыш в объеме вычислений. В случае использования вейвлета Морле число необходимых операций можно оценить как  $\mathcal{L} \times 512N \times \sum_{i=s_{\min}/\Delta s}^{s_{\max}/\Delta s} (i\Delta s/h)^2 + O(N)$ .

Процесс вычисления коэффициентов вейвлетного преобразования также может быть существенно ускорен (то есть может быть уменьшено число машинных операций, которые необходимо выполнить) за счет перехода от вейвлетного преобразования (43) к выражению, использующему Фурье-образы исходного сигнала  $\hat{x}_k$  и вейвлетной функции  $\hat{\psi}$ , с применением быстрого преобразования Фурье [49, 12, 11].



### 1.4.2 Область влияния краевых условий в вейвлетном спектре

Осуществление вейвлетного преобразования конечной временной реализации приводит к тому, что вблизи границ вейвлетного спектра по оси времени  $n$  ( $n = 0$  и  $n = N - 1$ ) появляются ошибки в расчетах функции  $W(n, s)$ , что приводит к искажению частотно-временного представления сигнала. Это связано с тем, что вейвлетная функция  $\psi((n' - n)h/s)$  на данном конкретном масштабе  $s$  при сдвигах вдоль анализируемого сигнала при приближении к границе начинает выходить за пределы временного ряда, и расчет значений  $W(n, s)$  вблизи границ становится некорректным. Как следствие, область влияния краевых условий должна расширяться в сторону больших временных масштабов  $s$  (меньших частот  $f = 1/s$ ).

Ширина области краевых эффектов  $\tau_s$  определяется интервалом  $T(s)$ , введенным нами ранее (см. формулу (44)). Для вейвлета Морле в этом случае ширина области влияния краевых условий на границе ряда равна

$$\tau_s = T(s) = 4s. \quad (48)$$

Разработан ряд математических процедур, направленных на подавление нежелательных краевых эффектов [49, 50, 11]. Одним из наиболее эффективных решений данной проблемы является создание новой временной реализации  $x'_n$  длиной  $2N$ , в которой первые  $N$  отсчетов соответствуют исходному сигналу  $x_n$ , а следующие  $N$  позиций начиная с  $n = N$  заполняются нулями. Вейвлетное преобразование производится над новой суррогатной временной реализацией  $x'_n$ .

Использование заполненной наполовину нулями суррогатной временной реализации  $x'_n$  при вейвлетном анализе приводит к появлению сильной неоднородности на границах исходного временного ряда  $x_n$ . Однако, благодаря тому, что половина суррогатного временного ряда состоит из постоянной во времени величины (равной нулю), возмущения, вносимые этой неоднородностью, лежат в области очень больших временных

масштабов, в то время как спектр исходной неоднородности (которая формально существенно меньше внесенной) лежал бы в области масштабов анализируемого сигнала. Поэтому внесение такой неоднородности приводит к уменьшению амплитуды  $W$  около границ исходного ряда. Очевидно, чем больше будет длина части суррогатного ряда, заполненной нулями, тем меньше влияние краевых эффектов. Использование для анализа ряда, в котором длина последовательности нулей равна длине исходного сигнала, видимо, является оптимальной в смысле баланса скорости вычислений, затрат машинной памяти и точности осуществления вейвлетного преобразования вблизи границ исходного временного ряда [49, 51].

Под *областью влияния краевых условий* будем понимать область вейвлетного спектра  $W(n, s)$  на плоскости  $(n, s)$ , где краевые эффекты становятся важными, и ими уже нельзя пренебречь. Следуя работе [49], определим область влияния краевых эффектов через эффективную ширину  $\tau_s$  автокорреляционной функции, рассчитанной по мощности вейвлетного преобразования, на каждом из временных масштабов  $s$ . Величина  $\tau_s$  равна смещению относительно границы, при котором мощность вейвлетного преобразования ряда с краевой неоднородностью спадает в логарифмической шкале в 2 раза<sup>5</sup>. Такой выбор границы области влияния краевых эффектов гарантирует нам, что краевые эффекты пренебрежимо малы уже на временах  $(N - n)h > \tau_s$  и  $nh > \tau_s$  на соответствующих масштабах  $s$ .

В табл. 1 приведены результаты оценки ширины области  $\tau_s$  влияния краевых эффектов при расчете непрерывного вейвлетного преобразования с использованием суррогатного временного ряда для различных стандартных базовых вейвлетов. Сравнивая величину  $\tau_s$ , полученную для вейвлета Морле, с величиной ширины области влияния краевых эффектов без подавления граничных эффектов (48), можно видеть, что

---

<sup>5</sup> Это соответствует уменьшению мощности в линейной шкале в  $e^2$  раз.

метод суррогатного ряда оказывается достаточно эффективным, позволяя существенно снизить влияние краевых эффектов.

Заметим также, что величина  $\tau_s$ , характеризующая область влияния краевых эффектов, определяет также характерное время влияния на форму вейвлетного спектра мощности единичного, выброса большой амплитуды (пика) на временной реализации процесса. Исследуя характерную ширину пика в спектре мощности вейвлетного преобразования, можно отличить “быстрый” выброс большой амплитуды на временной реализации, появление которого может быть связано, например, со случайными шумовыми процессами в исследуемой системе, от постоянной гармонической компоненты с эквивалентным Фурье-периодом.

#### 1.4.3 Соотношение между масштабами вейвлетного преобразования и частотами гармонического анализа

Из анализа рис. 13 следует, что в общем случае максимум Фурье-образа базовой вейвлетной функции  $\hat{\psi}(s\omega)$  не приходится на частоту  $f_s = 1/s$ , то есть не существует равенства между частотами  $f$  Фурье- и  $f_s$  вейвлетного преобразований, причем каждая базисная функция имеет свой собственный вид зависимости  $f(f_s)$  (см. табл. 1). Используя приведенные данные, можно проанализировать соотношения между Фурье-частотами  $f$  и частотами  $f_s$  вейвлетного преобразования различных типов вейвлетов. Так для вейвлета Морле с центральной частотой  $\omega_0 = 2\pi$  величина  $f \approx f_s$ , то есть в данном частном случае масштаб вейвлетного преобразования практически эквивалентен Фурье-периоду. Однако уже для  $\omega_0 = 16$  частоты соотносятся как  $f/f_s = 2.5527$ . Для МНАТ-вейвлета Фурье-частота примерно в 4 раза меньше, чем частота вейвлетного преобразования ( $f/f_s = 0.2518$ ), для вейвлета Паула с  $m = 4$ , как несложно видеть,  $f/f_s = 0.7166$ . Эти соотношения  $f/f_s$  необходимо учитывать при

сравнении и анализе результатов Фурье и вейвлетного преобразований<sup>6</sup>.

#### 1.4.4 Проблема нормировки вейвлетного спектра

В рамках классического спектрального анализа мощность колебаний равна площади под кривой функции спектральной плотности  $S(f)$  (3), а величина спектрального пика позволяет определить амплитуду колебаний на соответствующей частоте. В случае вейвлетного анализа ситуация несколько усложняется – при корректной оценке полной энергии колебаний по полученному спектру не удастся правильно вычислить амплитуду, и наоборот. В зависимости от того, какую характеристику необходимо вычислить, проводятся различные нормировки плотности энергии  $E(s, t) \sim |W(s, t)|^2$ . Для иллюстрации рассмотрим, как меняется спектр гармонической функции при разных значениях частоты  $f$  (рис. 14). Воспользуемся вейвлетом Морле с  $\omega_0 = 2\pi$  для которого  $f \approx 1/s$ . С увеличением частоты спектральный пик “расплывается”. Если необходимо вычислить энергию колебаний в фиксированной полосе частот, то данный эффект не является принципиальным – увеличение ширины спектрального пика сопровождается уменьшением его амплитуды, и энергия колебаний (площадь под кривой  $E(f)$  на рис. 14) сохраняется неизменной. Однако оценка амплитуды для каждой синусоиды (как корень квадратный из величины энергии на данной частоте) дает разные результаты – амплитуда будет уменьшаться с ростом  $f$ .

Для корректной оценки соотношений между амплитудами колебательных процессов необходимо провести специальную нормировку. С этой целью можно заменить множитель  $1/\sqrt{s}$ , фигурирующий в определении вейвлетной функции (19) на множитель  $1/s$ . Это позволит правильно определить амплитуды ритмических процессов с разными периодами (с точностью до некоторой константы, если сравнивать с Фурье–

---

<sup>6</sup> В первую очередь это касается спектров мощности, определяемых вейвлетными преобразованиями с различными базовыми вейвлетными функциями.

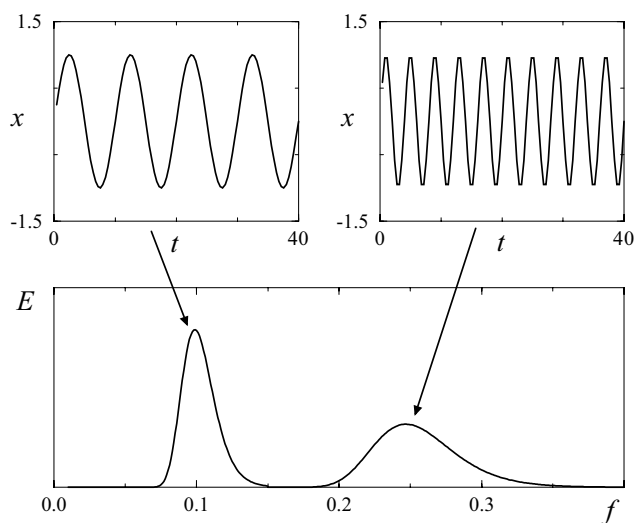


Рис. 14: Спектр двух гармонических функций с единичной амплитудой и разной частотой, вычисленный на основе вейвлетного преобразования с базовым Морле-вейвлетом ( $\omega = 2\pi$ )

анализом), но приведет к нарушению энергетических характеристик. Суммируя вышесказанное, можно заключить, что в случае НВП значения энергии колебаний в некотором частотном диапазоне и амплитуды характерных ритмов целесообразно рассматривать отдельно, выбирая тот вариант нормировки, при котором можно корректно вычислить требуемую характеристику.

#### 1.4.5 Реконструкция сигнала по его вейвлетному спектру

Вейвлетное преобразование (18) или (43) (для дискретного по времени сигнала) может рассматриваться как полосно-пропускающий фильтр с известной частотной характеристикой (вейвлетной функцией  $\psi$ ). Поэтому возможна реконструкция исходного сигнала по известному вейвлетному спектру  $W(n, s)$ , используя либо обращение свертки (18), либо конструируя обратный фильтр. Такие операции достаточно просты при работе с ортогональным вейвлетным преобразованием, при котором разло-

жение сигнала происходит по базису ортогональных функций. Однако в случае непрерывного вейвлетного анализа реконструкция исходного сигнала  $x(t)$  является сложной проблемой из-за избыточности информации об исследуемом сигнале, которая содержится в коэффициентах вейвлетного спектра. В работах [43, 52] предложена простая процедура реконструкции исходного сигнала, основанная на знании вида вейвлетного преобразования некоторой известной функции, наиболее простая из которых есть  $\delta$ -функция. В этом случае, реконструируемый временной ряд  $x_n$  может быть представлен как сумма всех коэффициентов вейвлетного преобразования на всех рассматриваемых временных масштабах [49, 11]:

$$x_n = \frac{\Delta s \sqrt{h}}{K_\delta \psi_0(0)} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \frac{W(n, s_l)}{\sqrt{s_l}}, \quad (49)$$

где коэффициенты  $\psi_0(0)$  и  $1/\sqrt{s}$  введены для осуществления “обратной” перенормировки базисной вейвлетной функции для получения единичной энергии на каждом из временных масштабов  $s$ . Для действительного сигнала  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$  формула реконструкции (49) принимает вид:

$$x_n = \frac{\Delta s \sqrt{h}}{K_\delta \psi_0(0)} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \frac{\operatorname{Re} \{W(n, s_l)\}}{\sqrt{s_l}}. \quad (50)$$

Коэффициент  $K_\delta$ , фигурирующий в формулах (49) и (50), находится из реконструкции  $\delta$ -функции по ее вейвлетному спектру, построенному с материнским вейвлетом  $\psi_0(\eta)$ . Параметр  $K_\delta$  не зависит от временного масштаба  $s$  и является константой для каждой базисной вейвлетной функции  $\psi_0$ . В табл. 2 приведены значения  $K_\delta$  и  $\psi_0(0)$  для наиболее часто используемых материнских вейвлетных функций.

Полная энергия сигнала должна остаться неизменной после осуществления вейвлетного преобразования. Отсюда следует аналог теоремы Парсеваля для вейвлетного преобразования, который в случае дискретно заданного сигнала  $\{x\}$  записывается в виде:

$$\sigma^2 = \frac{\Delta s h}{K_\delta N} \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \frac{|W(n, s_l)|^2}{s_l}, \quad (51)$$

Таблица 2: Характеристики базисных вейвлетных функций, необходимые для реконструкции сигнала по вейвлетному спектру

Вейвлет	$K_\delta$	$\psi_0(0)$
Морле ( $\omega_0 = 2\pi$ )	0.776	$\pi^{-1/4}$
Паул ( $m = 4$ )	1.132	1.079
DOG ( $m = 2$ )	3.541	0.867
DOG ( $m = 6$ )	1.966	0.884

где  $\sigma^2$  – среднеквадратичное отклонение значений переменной временного ряда. В соотношении (51) предполагается, что для реконструкции исходного сигнала используется  $\delta$ -функция.

Соотношения (49) и (51) могут быть использованы для проверки точности численной реализации вейвлетного преобразования. На основе полученной информации о точности расчета вейвлетного спектра можно достаточно адекватно выбрать величины наименьшего масштаба  $s_0$  и шага  $\Delta s$ , которые будут удовлетворять необходимой точности анализа.

## 1.5 Визуализация результатов вейвлетного преобразования

Вейвлетный спектр  $W(t_0, f_s) = |W(t_0, f_s)|e^{-j\varphi_W(t_0, f_s)}$  одномерного сигнала  $x(t)$  в общем случае можно представить в виде двух поверхностей амплитуды  $|W|$  и фазы  $\varphi_W$  коэффициентов вейвлетного преобразования в трехмерном пространстве (вейвлетная частота  $f_s$  – время  $t$  – амплитуда/фаза вейвлетного преобразования). В случае, когда материнский вейвлет и сигнал представляют собой действительные функции, вейвлетный спектр является чисто действительным, и фаза  $\varphi_W(t_0, s)$  не вводится. В данном разделе мы будем обсуждать только амплитудный спектр  $|W(t_0, s)|$  вейвлетного преобразования.

В качестве простейшего примера рассмотрим гармоническую функцию  $x(t) = \sin(2\pi ft)$  и проведем расчеты с использованием *действительного* МНАТ-вейвлета. Результаты такого анализа показаны на рис. 15 (частота  $f$  для определенности была выбрана равной 10).

На рисунке 15а вейвлетный спектр представлен в виде трехмерной поверхности. Однако такой способ визуализации обычно не используется в силу малой наглядности и сложности интерпретации. Типичным является представление амплитудного вейвлетного спектра как проекций вейвлетной поверхности на плоскость  $(t_0, f_s)$ , которые представляются либо в виде градаций серого (или различных цветов), либо в виде линий уровня, как показано на рисунке 15б и в, соответственно.

Также часто достаточно информативным оказывается рассмотрение интегрального  $\langle E(f_s) \rangle$  (32) распределения энергии по масштабам вейвлетного преобразования, которое показано на рис. 15г. Обратим внимание, что максимум распределения приходится на частоту вейвлетного преобразования  $f_s \approx 40$ , что согласуется с представленным в разделе 1.4 соотношением между частотами Фурье- и вейвлет-преобразования для МНАТ вейвлета.

Визуальный анализ поверхности вейвлетных коэффициентов даёт довольно полную информацию об особенностях структуры сигнала — мы видим лишь один характерный масштаб, который не меняется во времени. Для многочастотных и нестационарных процессов анализ соответствующих проекций поверхности  $W(s, t)$  оказывается более сложным. Чередование светлых и темных “эллипсов” в окрестности каждого ее локального максимума или минимума загромождает вейвлетный спектр большим количеством деталей, которые на самом деле не нужны для того, чтобы разобраться в частотно-временной структуре анализируемого процесса.

Результаты, аналогичные рис. 15, можно получить и с применением других действительных вейвлетов. Чтобы упростить визуальный анализ,



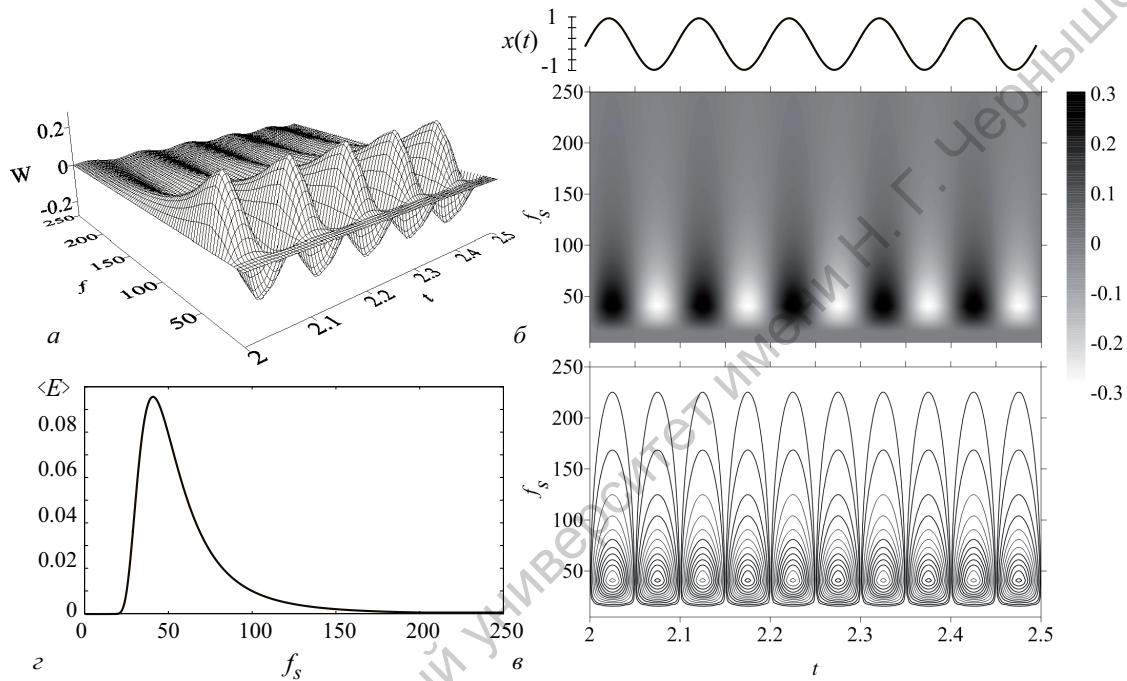


Рис. 15: Способы визуализации вейвлетных спектров. Приведены результаты вейвлетного преобразования гармонического сигнала с частотой  $f = 10$  с базовым МНАТ-вейвлетом: (а) трехмерное представление, (б) проекция и (в) линии уровня поверхности вейвлетных коэффициентов  $W(f_s, t)$ . (г) Интегральное распределение энергии  $\langle E(f_s) \rangle$  по масштабам вейвлетного преобразования. Ширина спектрального пика весьма велика, что связано с большой шириной Фурье-образа МНАТ-вейвлета

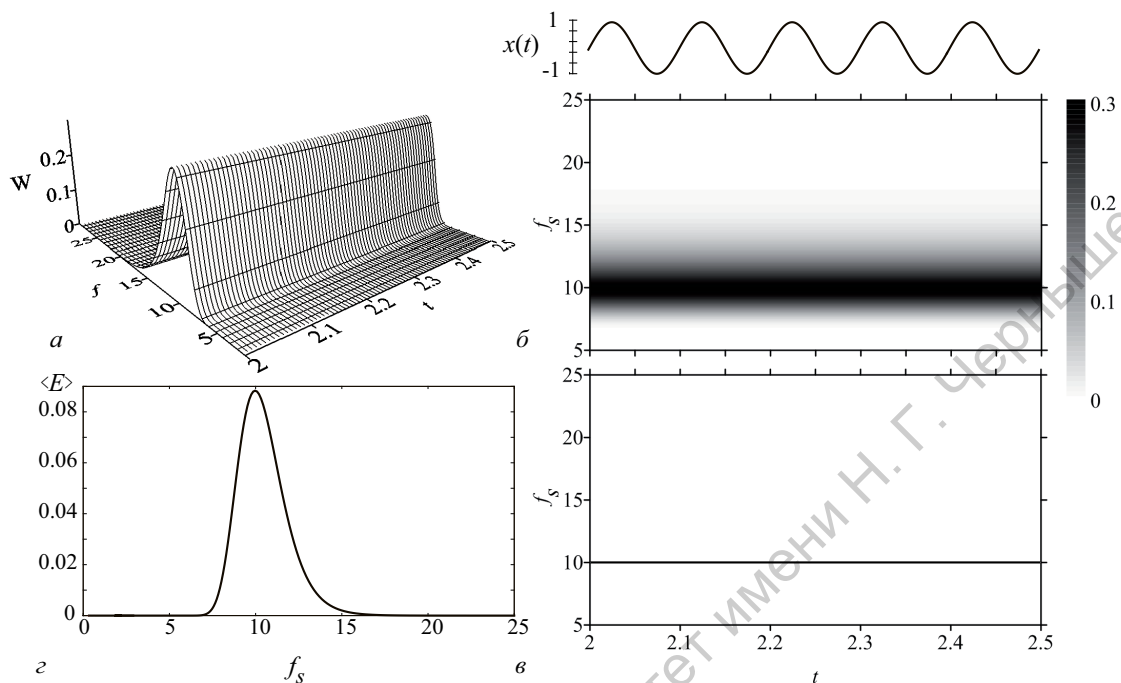


Рис. 16: Результаты вейвлетного преобразования гармонического сигнала с частотой  $f = 10$  с базовым вейвлетом Морле: (а) трехмерное представление, (б) проекция и (в) скелет поверхности модуля вейвлетных коэффициентов  $|W(f_s, t)|$ . (г) Интегральное распределения энергии  $\langle E(f_s) \rangle$  по масштабам вейвлетного преобразования

целесообразно выбрать комплексную базисную функцию и исключить информацию о фазе за счет рассмотрения модулей  $|W(t_0, f)|$  вейвлетных коэффициентов. В частности, для анализа нестационарных многочастотных колебаний и изучения особенностей динамики ритмов удобно пользоваться *комплексным* вейвлетом Морле (36). Соответствующий вейвлетный спектр гармонического сигнала с той же частотой  $f = 10$  в различных представлениях показан на рис. 16. Видно, что структура поверхности в данном случае намного проще, чем в случае действительного вейвлета: максимум на вейвлетной поверхности соответствует единственному ритму сигнала с частотой  $f = 10$ . В данном случае иллюстриро-

вать структуру вейвлетного спектра линиями уровня неудобно. Удачной альтернативой рассмотрению теневой проекции вейвлетного спектра для комплексных вейвлетов является построение так называемого *скелетона*.

Скелетон строится путем поиска локальных экстремумов  $E(f, t)$  для фиксированных  $t$  и варьировании частоты  $f$ , то есть путем поиска пиков локальных спектров. В последнем случае результаты оказываются более простыми и наглядными. На рис. 16в показан скелетон, вычисленный по поверхности вейвлетного спектра, то есть зависимость мгновенной частоты синусоиды от времени. Таким образом, рассматриваемый метод позволяет перейти от изучения исходных сигналов к рассмотрению временных характеристик мгновенных частот (или амплитуд) ритмических процессов.

Следует отметить, что по вертикальной оси масштабов вейвлетного преобразования  $s$  (или  $f_s = 1/s$ ) часто выбирается логарифмический масштаб, который позволяет представить результаты вейвлетного преобразования в достаточно широком диапазоне масштабов (частот).

Выше мы детально рассмотрели простейший случай, который в некоторой мере позволяет оценить возможности, которые предоставляет вейвлет-анализ. Чтобы лучше понять преимущества вейвлетов по сравнению с классическим спектральным анализом и ознакомиться с практикой вейвлетного анализа, в данном учебном пособии в разделе 5 будет предложен ряд примеров нестационарных модельных и экспериментальных сигналов для самостоятельного исследования с использованием вейвлетного анализа. Часть из предложенных сигналов имеет особенности, встречающиеся в эксперименте.

## 1.6 Фаза вейвлетного преобразования

Выше мы уделили основное внимание “амплитудным” и “энергетическим” характеристикам вейвлетных спектров. В то же самое время, если в каче-

стве материнского вейвлета используются комплексные вейвелеты, то результат вейвлетного преобразования также является комплексной функцией, а значит, величина  $W(s, t)$  помимо амплитуды характеризуется еще и фазой

$$\varphi(s, t) = (\arg W(s, t)). \quad (52)$$

Очень часто при вейвлетном анализе сигналов фазу исключают из рассмотрения, анализируя только амплитуду  $|W(s, t)|$ , при этом происходит это как бы само собой разумеющимся образом, очень часто, что называется, “не задумываясь”. Однако, в фазовой составляющей вейвлетного спектра также содержится важная информация о сигнале, причем грубо говоря, можно утверждать, что в этой составляющей содержится половина всей информации о характере сигнала, и эта информация не тождественна информации, содержащейся в амплитудной части.

Отчего так происходит? Отчасти, это имеет место из-за того, что с амплитудной составляющей вейвлетного спектра проще и удобнее работать, она имеет более наглядную и понятную интерпретацию; отчасти из-за того, что в значительном ряде случаев амплитудной составляющей вейвлетного спектра оказывается вполне достаточно для решения конкретных задач. Но это вовсе не означает, что фаза не играет никакой роли, и на нее не следует обращать внимания. Как раз наоборот, существует обширный круг проблем (прежде всего, связанных с задачами о синхронизации колебаний), где именно фазовая составляющая вейвлетного спектра оказывается чрезвычайно важной. В данном разделе мы коснемся понятия фазовой составляющей вейвлетного спектра.

Поскольку вейвлетная поверхность является комплексной (разумеется, при использовании комплексного материнского вейвлета)

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)|e^{j\varphi(s, t_0)} \quad (53)$$

и характеризует поведение системы на каждом временном масштабе  $s$  в любой момент времени  $t_0$ , то при использовании вейвлетного преобразо-

вания (18) для каждого временного масштаба  $s$  естественным образом определена непрерывная фаза

$$\varphi(s, t) = \arg W(s, t). \quad (54)$$

Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба  $s$  с помощью ассоциированной с ним фазы  $\varphi(s, t)$ , являющейся непрерывной функцией временного масштаба  $s$  и времени  $t$ . Таким образом, семейство фаз наиболее полно характеризует динамику связанных систем и дает возможность описать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы  $\varphi(s, t)$ .

Как и в случае фазы хаотического сигнала, фаза, вводимая с помощью вейвлетного преобразования, также может быть представлена как в интервале значений  $\varphi \in (-\infty; \infty)$ , так и в полосе шириной  $2\pi$  ( $\varphi \in [-\pi; \pi)$  или  $\varphi \in [0; 2\pi)$ ). При использовании соотношения (54) фаза будет принимать значения, лежащие в полосе шириной  $2\pi$ , однако не составляет труда перейти к представлению фазы на бесконечном интервале значений.

Рассмотрим сначала простой случай, когда осуществляется вейвлетное преобразование гармонического сигнала  $f(t) = \sin(\omega t + \phi)$  с материнским вейвлетом Морле. В этом случае вейвлетная поверхность будет определяться соотношением

$$\begin{aligned} W(s, t) &= \sqrt{2\pi s} \pi^{1/4} \sin(\omega t + \phi - i\omega\omega_0 s) e^{-\frac{1}{2}(s^2\omega^2 + \omega_0^2)} \approx \\ &\approx \pi^{1/4} \sqrt{\frac{s}{2}} e^{-\frac{(\omega s - \omega_0)^2}{2}} e^{i(\omega t + \phi - \pi/2)}, \end{aligned} \quad (55)$$

откуда  $\varphi(s, t) = \omega t + \phi - \pi/2$ .

Как видно из (55), фаза вейвлетного преобразования не зависит от масштаба и повторяет фазу исходного синусоидального сигнала ( $\varphi_{\sin} = \omega t + \phi$ ) со сдвигом на  $-\pi/2$ . Особо следует отметить, что в случае гармонического сигнала, фаза ведет себя одинаковым образом *на всех* временных масштабах. Важно заметить, что, как и в случае фазы Фурье-преобразования,

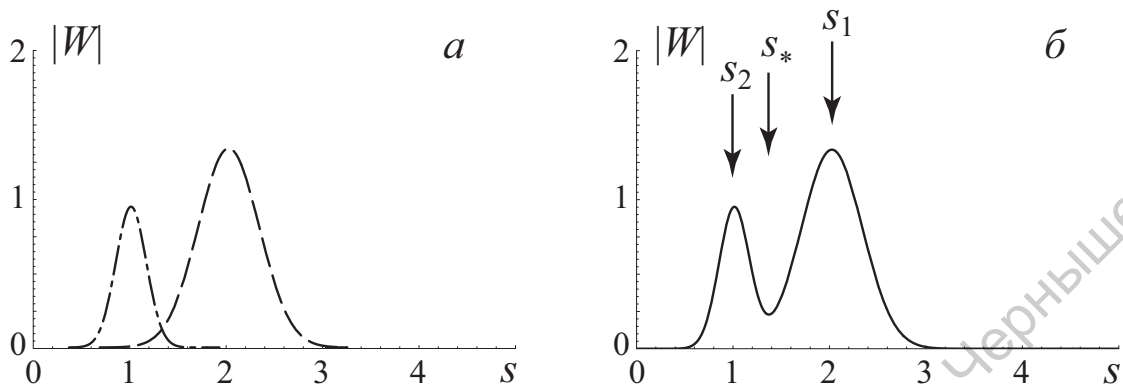


Рис. 17: Абсолютные величины вейвлетных спектров каждой из составляющих сигнала (56) по отдельности (а) и всего сигнала в целом (б). Вейвлетный спектр сигнала с частотой  $\omega_1 = \pi$  на рисунке (а) показан пунктиром, с частотой  $\omega_2 = 2\pi$  — штрихпунктиром

сдвиг анализируемого сигнала  $f(t)$  относительно начала отсчета также приведет к изменению фазы  $\varphi(s, t)$ .

Рассмотрим теперь, что происходит, если анализируемый сигнал представляет собой алгебраическую сумму двух синусоидальных сигналов

$$f(t) = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t, \quad (56)$$

где для простоты полагается, что  $\omega_1 = \pi$ ,  $\omega_2 = 2\pi$  (см. рис. 17).

В силу линейности операции вейвлетного преобразования вейвлетный спектр сигнала (56) определяется соотношением

$$\begin{aligned} W(s, t) &= \sqrt{2\pi s} \pi^{1/4} \sin(\omega_1 t - i\omega_1 \omega_0 s) e^{-\frac{1}{2}(s^2 \omega_1^2 + \omega_0^2)} + \\ &\quad \sqrt{2\pi s} \pi^{1/4} \sin(\omega_2 t - i\omega_2 \omega_0 s) e^{-\frac{1}{2}(s^2 \omega_2^2 + \omega_0^2)} \approx \\ &\quad \approx \pi^{1/4} \sqrt{\frac{s}{2}} \left( e^{-\frac{(\omega_1 s - \omega_0)^2}{2}} e^{i(\omega_1 t - \pi/2)} + e^{-\frac{(\omega_2 s - \omega_0)^2}{2}} e^{i(\omega_2 t - \pi/2)} \right), \end{aligned} \quad (57)$$

и очевидно, что в данном случае ситуация становится более сложной. На рис. 17, а показаны абсолютные величины вейвлетных спектров каждого составляющего сигнала по отдельности, а на рис. 17, б — модуль вейвлетной поверхности суммарного сигнала (56). Видно, что каждой

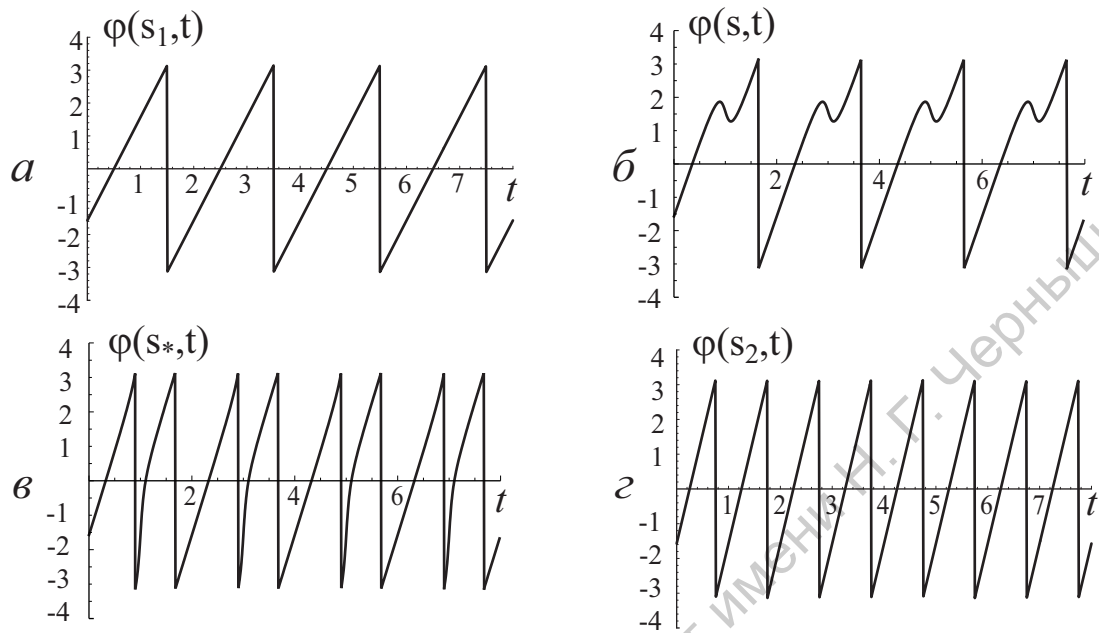


Рис. 18: Зависимость фазы вейвлетной поверхности  $W(s, t)$  от времени для различных временных масштабов  $s$ : (а)  $s_1 = 2.0$ , (б)  $s = 1.35$ , (в)  $s_* = 1.325$ , (г)  $s_2 = 1.0$

компоненте сигнала  $f(t)$  соответствует свой максимум на вейвлетной поверхности  $|W(s, t)|$ , при этом, в силу причин, рассмотренных ранее (см подраздел 1.4.4), высоты этих максимумов различаются, несмотря на то, что интенсивности компонент, составляющих сигнал  $f(t)$ , оказываются одинаковыми.

Перейдем теперь к рассмотрению динамики фазы  $\varphi(s, t)$  сигнала (56). Интуитивно понятно, что если в сигнале присутствуют несколько спектральных составляющих, то фаза вейвлетного преобразования будет зависеть от масштаба наблюдения. Это очевидное утверждение иллюстрирует рисунок 18, на котором показаны зависимости фазы вейвлетной поверхности  $W(s, t)$  от времени для различных временных масштабов  $s$ . На рисунке 18, а показано, как меняется фаза с течением времени на временном масштабе  $s_1 = 2.0$  (см. также рис. 17, б), что соответствует меньшей

частоте  $\omega_1 = \pi$ . Точно такая же зависимость, только с другой частотой, наблюдается на втором временном масштабе  $s_2 = 1.0$ , соответствующем второй частоте  $\omega_2$  (рис. 18, *г*). Очевидно, что в промежуточном диапазоне значений временных масштабов  $s \in (s_2, s_1)$  должен наблюдаться переход от зависимости, изображенной на рис. 18, *г* к зависимости, показанной на рис. 18, *а*.

Этот переход показан на рис. 18, *б, в*. Видно, что по мере уменьшения анализируемого временного масштаба, амплитуда вейвлетной поверхности уменьшается, что соответствует движению от временного масштаба  $s_1$ , соответствующего основной частоте  $\omega_1$ , в сторону временного масштаба  $s_2$  (отвечающего частоте  $\omega_2$ ). Одновременно, на зависимости фазы от времени появляются убывающие участки (рис. 18, *б*), обусловленные влиянием второй гармоники (с частотой  $\omega_2$ ) сигнала  $f(t)$ , но преобладающее влияние, по-прежнему, оказывает составляющая сигнала с частотой  $\omega_1$ . Затем (рис. 18, *в*), на временном масштабе  $s_*$ , фактически, разделяющем области, в которых динамика фазы определяется составляющей сигнала с частотой  $\omega_1$  или  $\omega_2$ , соответственно, наблюдается такое поведение фазы  $\varphi(s_*, t)$  во времени, в котором обе составляющие  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вносят равный вклад. Наконец, в области значений временных масштабов  $s \in (s_2, s_*)$  динамика фазы вейвлетного преобразования обуславливается составляющей сигнала с частотой  $\omega_2$ .

Таким образом, говоря о фазе вейвлетного преобразования, можно отметить следующее:

- Для каждого временного масштаба  $s$  рассматриваемого сигнала естественным образом определена непрерывная фаза (54), зависящая от времени.
- Для временного масштаба  $s$  динамика фазы определяется не только частотной составляющей сигнала, соответствующей данному масштабу, но и другими частотными составляющими, которые в спектре сигнала находятся достаточно близко и имеют достаточно боль-



шую амплитуду. Иными словами, на фиксированном временном масштабе  $s'$  поведение фазы может обуславливаться составляющими сигнала из некоторого частотного диапазона.

Важно отметить также, что рассматривая вейвлетный спектр анализируемого сигнала (56), можно предположить, что в сигнале сосуществуют две частотные составляющие, и определить эти частоты (см. рис. 17, б). Однако, может сложиться и такая ситуация, когда с помощью амплитудной составляющей вейвлетного спектра не удастся обнаружить присутствие двух частотных составляющих в сигнале. Подобная ситуация приведена на рис. 19, а для двучастотного сигнала

$$f(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t, \quad (58)$$

где  $A_1 = 0.5$ ,  $\omega_1 = 0.9\pi$ ,  $A_2 = 1.25$ ,  $\omega_2 = \pi$ .

Видно, что поскольку вейвлетное преобразование обладает ограниченным разрешением в частотной области, а частотные составляющие в анализируемом сигнале (58) достаточно близки друг к другу и, к тому же, различаются по амплитуде, зависимость амплитуды вейвлетной поверхности от временного масштаба имеет один максимум, точно также, как это имеет место в случае одночастотного (например, синусоидального сигнала). В то же самое время, анализ фазовой динамики позволяет достаточно легко установить, что в данном случае сигнал не является гармоническим, поскольку в области временных масштабов  $s < s_*$  и  $s > s_*$  (см. рис. 19, б) динамика фазы оказывается различной.

Это связано с тем, что на временном масштабе  $s_2 = 2$  превалирует компонента сигнала  $f(t)$  с частотой  $\omega_2$  (пунктирная линия), поэтому динамика фазы на этом масштабе будет соответствовать именно этой частотной компоненте. С другой стороны, на временном масштабе  $s_1 = 3$  доминирует компонента сигнала с частотой  $\omega_1$  (штрихпунктирная линия), и, соответственно, динамика фазы обусловлена этой частотной составляющей сигнала.

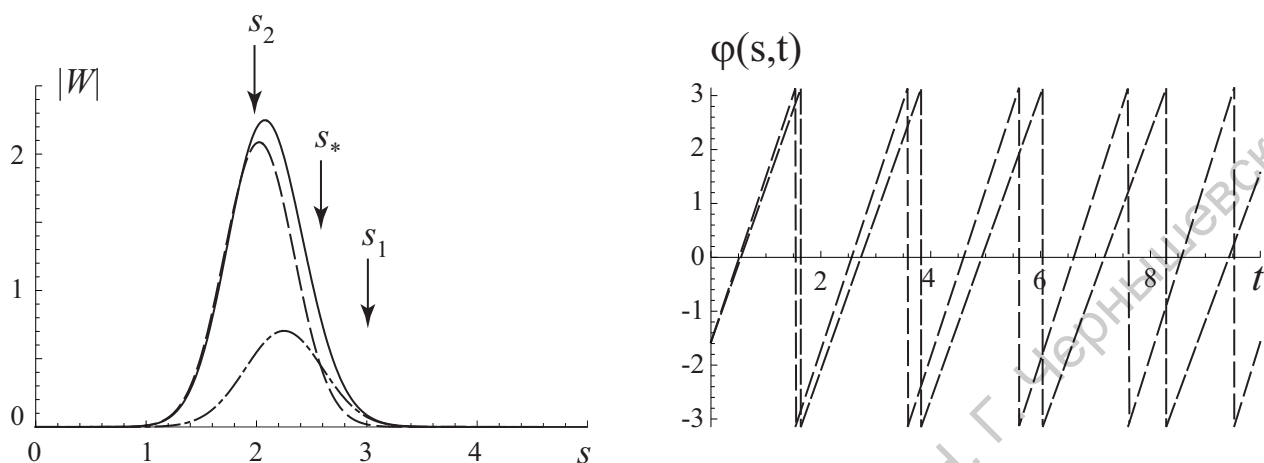


Рис. 19: (а) Абсолютные величины вейвлетных спектров каждой из составляющих сигнала (58) по отдельности (вейвлетный спектр сигнала с частотой  $\omega_1 = 0.9\pi$  на рисунке показан штрихпунктиром, с частотой  $\omega_2 = \pi$  — пунктиром) и всего сигнала в целом (показан сплошной линией). (б) Зависимость фазы  $\varphi(s, t)$  от времени для временного масштаба наблюдения  $s_2 = 2$  (пунктирная линия) и  $s_1 = 3$  (штрихпунктирная линия)

Таким образом, наряду с изучением амплитудной составляющей вейвлетного спектра сигнала, анализ динамики фазы (и, что используется гораздо чаще, разности фаз взаимодействующих систем) на различных временных масштабах оказывается весьма эффективным инструментом при изучении поведения систем.

## 2 Дополнительная литература

[11, 19, 9, 7, 34]

### 3 Методические указания

Для получения зачета по компьютерному практикуму к курсам “Физика открытых нелинейных систем”, “Самоорганизация в открытых системах” (допуска к экзамену) по теме “Вейвлетный анализ в физике открытых систем” студенту необходимо, во-первых, пользуясь теоретической справкой, представленной в учебном пособии, тщательно ознакомиться с основами теории вейвлетного анализа и ответить на предлагаемые контрольные вопросы (см. ниже). Во-вторых, полностью выполнить предлагаемые задания.

Выполнение работ по компьютерному практикуму предусматривает написание программных модулей, производящих генерацию сигналов и вейвлет-анализ. Язык программирования оставляется на выбор студента. Для визуализации данных рекомендуется использовать такие продукты как Gnuplot, Grapher, Surfer и подобные графические пакеты для научно-технических задач. Акцент в выполнении заданий необходимо ставить на понимание полученных результатов и их возможное использование, а отнюдь не на оптимизацию расчета характеристик.

## 4 Контрольные вопросы

1. Каковы области применения вейвлетного анализа?
2. В чем заключаются основные недостатки Фурье-анализа?
3. Расскажите об оконном преобразовании Фурье. Каковы его недостатки?
4. Поясните логику перехода от преобразования Фурье (спектрального анализа) к вейвлетному преобразованию.
5. Запишите основное соотношение для непрерывного вейвлетного преобразования. Сделайте пояснения относительно переменных, входящих в данное соотношение. Что такое вейвлетная функция?
6. Что такое материнский вейвлет? Как вейвлетные функции связаны с материнским вейвлетом?
7. Расскажите о наиболее известных базовых материнских вейвлетах, охарактеризуйте каждый из них (нарисуйте вид материнской вейвлетной функции, перечислите её основные свойства и т.п.). Почему существуют и используются различные материнские вейвлеты?
8. Как связано интегральное распределение энергии по масштабам для вейвлетного преобразования с Фурье-спектром мощности?
9. Каков существенный недостаток вейвлетного преобразования?
10. Каким условиям должна удовлетворять материнская вейвлетная функция? Запишите данные условия.
11. Как связан порядок материнского вейвлета с его способностью анализировать мелкомасштабные флуктуации?

12. Расскажите об основных преимуществах вейвлетного преобразования и его локализации во временной и частотной областях. Что такое угол влияния вейвлетного преобразования?
13. Запишите выражение для непрерывного вейвлетного преобразования дискретного сигнала. Как данное выражение может быть использовано для численного расчета вейвлетного спектра сигнала?
14. Исходя из определения непрерывного вейвлетного преобразования, расскажите о методе эффективной численной реализации данного преобразования. Какие существуют способы визуализации вейвлетного спектра?
15. Расскажите о связи между частотами Фурье- и вейвлетного преобразований сигнала. В чем заключается особенность нормировки вейвлетного спектра?
16. Что такое область влияния краевых условий в вейвлетном спектре? Как можно уменьшить влияние краевых эффектов?
17. Где и когда может быть полезен анализ фазовой составляющей вейвлетного спектра?

## 5 Задания

1. Численно сгенерируйте предложенные сигналы. Постройте временные зависимости исследуемых сигналов, при необходимости постройте фазовые портреты (для сигналов 9).

Обратите внимание на то, что для упрощения дальнейшего анализа полученных сигналов, необходимо реализовать запись полученных временных рядов в текстовые файлы с записью как времени  $t$ , так и рассчитанных переменных  $f$ , либо  $x, y, z$ . Кроме того, не забудьте, что любой прикладной метод анализа данных (в том числе, и вейвлетный анализ) не «работает» для слишком коротких временных рядов.

Для обеспечения корректного сравнения результатов анализа различных сигналов дискретные временные ряды данных должны содержать значения, рассчитанные как с одной и той же степенью точности, так и взятые через равные промежутки времени (с одинаковыми временными шагами). Для хорошего качества дискретизации получаемых сигналов следует выбирать достаточно малые шаги по времени.

### Сигналы для исследования:

1. Периодический одночастотный сигнал
2. Периодический сигнал с двумя частотами
3. Периодический сигнал с двумя частотами, заменяющими друг друга с течением времени:

$$f(t) = (1 - H(t)) \cos(\omega_1 t) + H(t) \cos(\omega_2 t),$$

$H(t)$  — функция Хевисайда,  $H(t) = 0$  при  $t \leq 0$  и  $H(t) = 1$  при  $t > 0$ .

4. Сигнал, частота которого линейно возрастает с течением времени:

$$f(t) = \cos(\omega t),$$

где  $\omega = \omega_1 + a(\omega_2 - \omega_1)t$

5. Квазипериодический сигнал
6. Сигнал в виде последовательности прямоугольных импульсов
7. Шумовые сигналы с равномерной и нормальной функциями распределения вероятности
8. Экспериментальный сигнал — биологические данные (см. раздел 6; файлы с экспериментально снятыми временными рядами прилагаются к учебному пособию)
9. Хаотический сигнал, порожденный какой-либо из нижеприведенных систем (студент исследует две системы, указанные преподавателем)

(a) система Рёсслера

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b - rz + xz;\end{aligned}$$

(b) система Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy;\end{aligned}$$

(c) осциллятор Уеды или осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = A \sin \Omega \tau;$$

(d) генератор Кияшко-Пиковского-Рабиновича

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2hx + y - gz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \varepsilon \dot{z} &= x - f(z),\end{aligned}$$

где  $\varepsilon = 0.2$ , нелинейная характеристика  $f(z)$  задается кубической параболой:

$$f(z) = 8.592z - 22z^2 + 14.408z^3;$$

(e) генератор с инерционной нелинейностью

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \varepsilon \dot{z} &= -gz + 1(x)x^2,\end{aligned}$$

где  $1(x)$  обозначает ступенчатую функцию Хевисайда,  $1(x) = 0$  при  $x \leq 0$  и  $1$  при  $x > 0$ . Параметр  $g$  считается положительным.

(f) кольцевой генератор Дмитриева-Кислова

$$\begin{aligned}T\dot{x} + x &= Mz \exp(-z^2), \\ \dot{y} &= x - z, \\ \dot{z} &= y - \frac{z}{Q},\end{aligned}$$

где величину  $Q$  будем считать положительной и равной 10, параметры  $T$  и  $M$  считаем положительными.

(g) схема Чуа

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y,\end{aligned}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные параметры, а функция  $h(x)$  традиционно задается в виде:

$$h = \begin{cases} \frac{2x+3}{7}, & x \leq -1, \\ -\frac{x}{7}, & -1 < x < 1, \\ \frac{2x-3}{7}, & x \geq 1; \end{cases}$$



Хаотические динамические системы должны быть тщательно численно проинтегрированы, выбор алгоритма численного интегрирования и точность алгоритма должны быть обоснованы. Также не забывайте про то, что любая динамическая система не попадает на аттрактор (режимы стационарной динамики) сразу же после старта с произвольного начального условия. Подумайте о том, каким образом исключить из рассмотрения переходной процесс.

2. Проведите вейвлетный анализ для предложенных сигналов, постройте проекции распределения амплитуды  $|W(s, t_0)|$  вейвлетного преобразования, распределение энергии по масштабам, полученные с помощью различных базисных вейвлетов: 1. Морле 2. Паул 3. DOG Особое внимание уделите экспериментальному сигналу. Какой базисный вейвлет дает лучший результат при анализе энцефалограммы? В чем принципиальное различие Морле- и DOG- вейвлетов? Для каких сигналов применение вейвлет-анализа дает более полную информацию? Почему?

Для двухчастотных сигналов (постоянно две частоты в сигнале и сигнал с заменой частот) проведите анализ фазовой части вейвлетных спектров. Какую информацию о сигнале удастся получить при проведении такого анализа?

## 6 Краткое описание экспериментальных сигналов

В данном учебном пособии студентам предлагается исследовать с применением вейвлетного анализа экспериментальные ряды, представляющие собой энцефалограммы (ЭЭГ), снятые с различных частей головного мозга крыс, генетически предрасположенных к абсанс-эпилепсии (крысы линии WAG/Rij). Остановимся немного подробнее на описании данной задачи и её актуальности.

С точки зрения физики, головной мозг – это крайне сложный объект, состоящий из большого числа элементов (нейронов), обладающих сложной собственной колебательной динамикой и объединенных в сети с чрезвычайно сложной топологией [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60]. Традиционным и весьма эффективным методом исследования электрической активности головного мозга является регистрация электроэнцефалограмм (ЭЭГ), которые представляют собой усредненную сумму электрических полей, генерируемых синаптическими токами большой группы нейронов в окрестности регистрирующего электрода. У человека запись ЭЭГ проводится обычно посредством электродов, размещаемых на коже головы. У животных традиционно используется метод вживленных электродов, который даёт возможность получить более детальную информацию об электрической активности относительно небольших популяций нейронов коры головного мозга и подкорковых структур.

Следует отметить, что разработка и внедрение современных методов обработки большого количества данных при многоканальной записи нейронной электрической активности мозга (ЭЭГ) являются одним из наиболее активно развиваемых, актуальных и высокоприоритетных направлений современной нейрофизиологии. Реализация этого подхода позволяет выявить и проанализировать основные связи между различными областями головного мозга, механизмы и закономерности формирова-

ния разных типов ритмической активности, и, в конечном счете, лучше понять принципы функционирования головного мозга в целом. Отметим, что на ЭЭГ можно выделить большое количество разнообразных ритмов и периодических колебаний, частоты которых являются важными характеристиками функциональной активности нервных структур [55, 61, 62, 63, 64]. Частотный состав ЭЭГ, характеризующий электрическую активность локальной области головного мозга, может изменяться в зависимости от функциональной активности данной области и от характера её взаимодействий с другими областями. Помимо того, что разработка методов исследования различных типов ритмической активности головного мозга имеет важное фундаментальное научное значение, связанное с изучением когнитивных функций головного мозга, оно важно и с прикладной точки зрения, в частности, для разработки новых методов диагностики и анализа функциональных состояний головного мозга, создания систем мониторинга патологической активности (например, при эпилепсии или болезни Паркинсона) головного мозга в медицинской практике, а также для создания специфических интерфейсов мозг-компьютер [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72].

Остановимся немного подробнее на термине “ЭЭГ”. ЭЭГ — акроним слова электроэнцефалогамма (от “electro” – электрический сигнал, “encephalo” – головной мозг, “graph” – запись). Это понятие можно охарактеризовать следующими определениями:

*Электроэнцефалогамма* — запись электрической активности головного мозга, полученная с помощью электродов, расположенных на поверхности головы (в особых случаях - из глубоких структур) [73].

*Электроэнцефалогамма* — электрический потенциал, зарегистрированный непосредственно от поверхности головного мозга или сквозь покрывающие его ткани [74].

Электроэнцефалография имеет более чем столетнюю историю (цитируется по обзору [75]). В 1875 году ливерпульский врач и преподаватель медицинской школы Ричард Кэтон (Richard Caton) впервые продемонстрировал записи электрического сигнала, зарегистрированные непосредственно от поверхности головного мозга собаки. Основателем современной клинической электроэнцефалографии по праву считается немецкий психиатр Ханс Бергер (Hans Berger), который провел первые исследования электрической активности мозга человека и ввел в обиход термин “электроэнцефалогамма”. Первая публикация, посвященная ЭЭГ человека, увидела свет в 1929 году [76]. В этой работе Ханс Бергер представил 73 записи ЭЭГ человека.

В преддверии известных экспериментов Х. Бергера, Адольф Бек (Adolph Beck) показал, что сенсорные стимулы (вспышка света или звук) вызывают изменения электрического потенциала головного мозга в форме медленноволнового ответа (1890 г.), что, фактически, было описанием вызванного потенциала. Важную роль в развитии электрофизиологии сыграл русский физиолог Василий Яковлевич Данилевский, который охарактеризовал электрическую активность головного мозга собак (1877 г.). Другой русский физиолог, Николай Евгеньевич Введенский (1884), предложил новый способ записи электрической активности периферической и центральной нервной системы (отдельных нервных волокон и участков головного мозга) с помощью телефона. В 1913 году Владимир Правдич-Неминский (Vladimir V. Pravdich-Neminsky) опубликовал фотоизображения электрической активности головного мозга у собак и ввел в употребление термин *электроцереброграмма* (electrocerebrogram). Эти ученые внесли значительный вклад в развитие экспериментальной физиологии, но их имена оказались практически забытыми.

В настоящее время ЭЭГ является незаменимым источником информации в клинической практике, в нейробиологии и смежных науках. Обычно регистрируется не один, а несколько одновременно сигналов

электрической активности мозга, снимаемые из различных точек на поверхности головы или из различных внутренних областей головного мозга (так называемые, многоканальные записи ЭЭГ). Методы ЭЭГ широко используют для исследования активности головного мозга человека и животных в спокойном состоянии и при различных функциональных нагрузках; во время естественного и медикаментозного сна, для оценки глубины и качества анестезии; для анализа процессов восприятия сенсорных стимулов и т.д. В наши дни исследования ЭЭГ проводят с целью диагностики и мониторинга многих нервных болезней, среди которых эпилепсия стоит на первом месте.

Как мы уже обсуждали выше, в структуре ЭЭГ можно выделить разные формы ритмической активности и осцилляторных паттернов, которые отражают характер нейронной активности, а следовательно, и функциональные состояния головного мозга. Важно, что многие патологические процессы в головном мозге также могут находить свое отражение на ЭЭГ. Так, например, во время эпилепсии, которая характеризуется гиперсинхронной активностью нейронов головного мозга [77, 78], на ЭЭГ появляются высокоамплитудные разряды характерной формы [79, 80].

Существует множество видов эпилептических расстройств (более 30), и каждому из них соответствует определенный эпилептический паттерн на ЭЭГ. Несмотря на это, отмечаются трудности при диагностике некоторых видов эпилепсий, и эти заболевания остаются незамеченными. По данным Всемирной организации здравоохранения, около 1% населения земного шара страдает от эпилепсии и более 30% больных не получает при этом медицинской помощи [81, 80]. В настоящей работе мы остановимся на абсанс-эпилепсии (*petit mai* или *детская абсансная эпилепсия*), одном из распространенных неврологических заболеваний, основным клиническим проявлением которого служит кратковременная потеря сознания (*absence*) при полном отсутствии конвульсивного компонента (возможно появление автоматизмов мимической му-

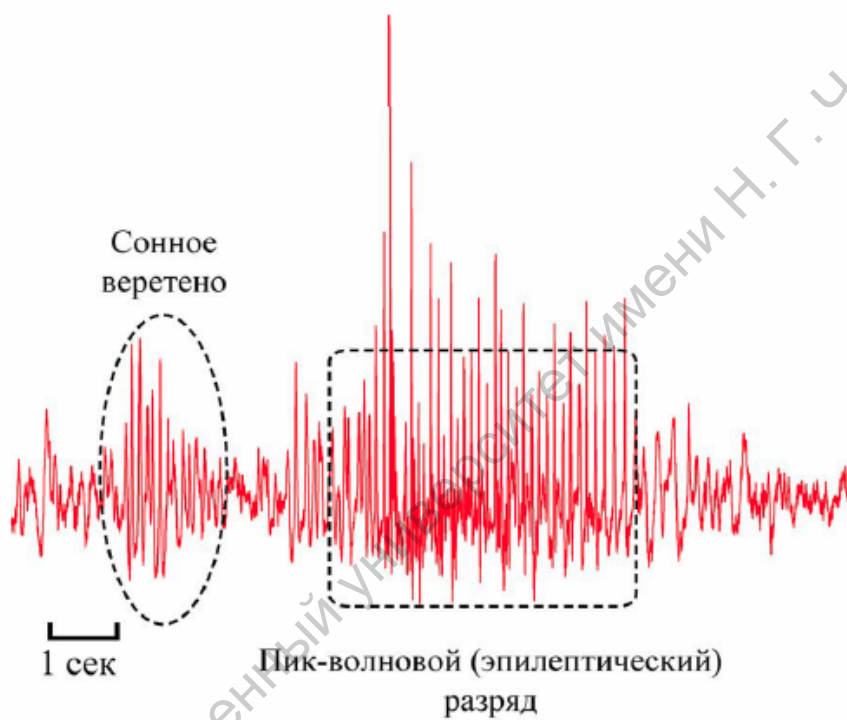


Рис. 20: Отрезок исследуемого временного ряда электроэнцефалограммы крысы линии WAG/Rij, больной абсанс эпилепсией. На ЭЭГ, снятой из области фронтальной коры, на фоне нормальной активности головного мозга наблюдаются характерные временные паттерны – сонное веретено и пик-волновой разряд

скулатуры) [79, 81]. Приступ абсанс-эпилепсии или абсанс (снижения уровня сознания) может длиться от нескольких секунд до десятков секунд. Приступ эпилепсии сопровождается появлением высокоамплитудных пик-волновых разрядов на ЭЭГ [81, 80]. Пик-волновые разряды состоят из относительно высокочастотного импульсного (“пики”) компонента и низкочастотной “волны”, амплитуда пик-волнового комплекса в несколько раз превышает фоновую [82]. Существует несколько линий крыс с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии, к которым принадлежит объект предполагаемого исследования — крысы линии WAG/Rij [78]. Электроэнцефалографические и клинические признаки абсанс-эпилепсии наблюдаются у 90% крыс этой линии [78], болезнь прогрессирует по мере старения животных. Несмотря на некоторые отличия в клиническом проявлении абсанс-эпилепсии у крыс WAG/Rij и человека (разная возрастная динамика и частота пик-волнового разряда), модель считается адекватной, поскольку клинические проявления и реакция на лекарственные препараты у крыс WAG/Rij и у больных абсанс-эпилепсией идентичны [78].

С помощью вейвлет-анализа удается провести диагностирование динамического поведения в случае спонтанной судорожной активности неконвульсивного типа. Для этой цели используется долговременная регистрация пароксизмальной активности у животных, генетически предрасположенных к абсанс-эпилепсии (крысы линии WAG/Rij). Судорожная активность оценивалась экспертом по электрокортикограмме (ЭКоГ – сигнал из глубинных частей головного мозга), записанной у интактных свободно-подвижных животных с хронически вживлёнными (в возрасте около 1 года) электродами, как описано в [79]. Длительность ЭКоГ записей варьировалась от 6 часов до 4х суток. В работе использовались как самцы, так и самки данной линии крыс.

Фрагмент типичного временного ряда (энцефалограммы) представлен на рисунке 20. Видно, что судорожный разряд пик-волнового типа,

характерный для этого вида эпилепсии [79], представляет из себя вспышку генерализованной синхронной активности участков головного мозга, что находит свое отражение в увеличении амплитуды регистрируемых колебаний.

Таким образом, типичная энцефалограмма, регистрируемая в ходе наших наблюдений, представляет собой чередование низкоамплитудных полиритмических участков ЭКоГ, соответствующих “нормальному” функционированию головного мозга (будем называть такие участки ламинарными), и участков высокоамплитудной генерализованной активности с относительно стабильной несущей частотой и высокой амплитудой (условимся называть эти участки турбулентными фазами), соответствующих эпилептическим припадкам.

Подробное исследование аналогичных временных рядов проводится в [83].

**К заданию.** С использованием инструмента вейвлетного анализа возможно разработать алгоритм, позволяющий с хорошей точностью отделить на временных рядах участки, соответствующие сонным веретенам и пик-волновым разрядам. Опираясь на опыт, полученный при вейвлетном анализе простых сигналов, подумайте, как это можно сделать. Особое внимание необходимо уделить обоснованию того, почему именно вейвлетное преобразование является наиболее подходящим инструментом для такого алгоритма.



## Исследуемые экспериментальные временные ряды (энцефалограммы)

1. Frl-time.txt — сигнал с левой фронтальной коры головного мозга крысы;
2. vibl-time.txt — сигнал с левой сенсорной коры вибрисс;
3. HLL-time.txt — сигнал с левой сенсорной коры задней конечности;
4. EMGR-time.txt, EMGL-time.txt — записи мышечной активности мышц, отвечающих за движение усов крысы (справа и слева);
5. HipK-time.txt, HipL-time.txt — сигналы из гиппокампа справа и слева;
6. OcL-time.txt, OcR-time.txt, Oc2L-time.txt, Oc2R-time.txt — сигналы из различных областей затылочной коры справа и слева.

## Список литературы

- [1] J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau, D. Giard, Wave propagation and sampling theory—part ii: Sampling theory and complex waves, *Geophysics* 47 (2) (1982) 222–236.
- [2] J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau, D. Glard, Wave propagation and sampling theory—part i: Complex signal and scattering in multilayered media, *Geophysics* 47 (2) (1982) 203–221.
- [3] A. Grossman, J. Morlet, Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* 15 (4) (1984) 273.
- [4] P. S. Addison, *The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science Engineering, Medicine and Finance*, Bristol: Institute of Physics Publishing, 2002.
- [5] G. Kaiser, *A friendly guide to wavelets*, Springer Verlag, 1994.
- [6] S. G. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, New York: Academic Press, 1998.
- [7] Н. М. Астафьева, Вейвлет–анализ: основы теории и примеры применения, *УФН* 166 (11) (1996) 1145.
- [8] Н. М. Астафьева, Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений (основы теории и примеры применения), *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика* 4 (2) (1996) 3–39.
- [9] И. М. Дремин, О. В. Иванов, В. А. Нечитайло, Вейвлеты и их применение, *УФН* 171 (5) (2001) 465–501.
- [10] *Wavelets in Physics*, van den berg, j. c. Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

- [11] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения, М.: Физматлит, 2003.
- [12] В. Г. Анфиногентов, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы, Изв. РАН, сер. физич. 64 (12) (2000) 2383–2390.
- [13] B. Torresani, Continuous wavelet transform, Paris: Savoie, 1995.
- [14] M. Vetterli, J. Kovacevic, Wavelets and subband coding, NY, Prentice Hall, 1995.
- [15] S. T. Ali, J. P. Antoine, J.-P. Gazeau, Coherent states, wavelets and their generalizations, New York: Springer, 1999.
- [16] Y. Meyer, R. Coifman, Calderon-Zygmund and multilinear operators, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [17] Е. Б. Постников, Вычисление непрерывного вейвлет-преобразования как решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 46 (1) (2006) 77–82.
- [18] J. J. Benedetto, M. Frazier, Wavelets: mathematics and applications, Boca Raton, CRC Press, 1994.
- [19] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики, Саратов: изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2002.
- [20] R. Gencay, F. Selcuk, B. Whitcher, An introduction to wavelets and other filtering methods in finance and economics, San Diego, Academic Press, 2001.

- [21] T. Strutz, Bilddatenkompression. Grundlagen, codierung, JPEG, MPEG, wavelets, Wiesbaden: Vieweg Braunschweig, 2002.
- [22] J. S. Walker, A primer on wavelets and their scientific applications, Boca Raton, CRC Press, 1999.
- [23] C. L. Fontoura da, J. R. M. Cesar, Shape analysis and classification: theory and practice, Boca Raton, CRC Press, 2001.
- [24] S. Jaffard, Y. Meyer, R. Ryan, Wavelets: tools for science and technology, Philadelphia, S.I.A.M., 2001.
- [25] M. V. Wickerhauser, Adapted wavelet analysis from theory to software, Wellesley: Peters, 1994.
- [26] E. B. Postnikov, E. A. Lebedeva, Decomposition of strong nonlinear oscillations via modified continuous wavelet transform, Phys. Rev. E 82 (5) (2010) 057201.
- [27] M. Holschneider, Wavelets: An analysis tool, Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [28] M. Farge, J. C. Hunt, J. C. Vassilicos, Wavelets, Fractals and Fourier Transforms, Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [29] A. Aldroubi, M. Unser, Wavelets in Medicine and Biology, CRC-Press, 1996.
- [30] R. T. Ogden, Essential wavelets for statistical applications and data analysis, Birkhäuser, Boston, Berlin, 1997.
- [31] D. A. Yuen, A. P. Vincent, M. Kido, L. Vecsey, Geophysical applications of multidimensional filtering with wavelets, Pure and Applied Geophysics 159 (2001) 2285.

- [32] А. Е. Филатова, С. А. Артемьев, А. А. Короновский, А. Н. Павлов, А. Е. Храмов, Успехи и перспективы применения вейвлетных преобразований для анализа нестационарных нелинейных данных в современной геофизике, Известия Вузов. Прикладная нелинейная динамика 18 (3) (2010) 3–23.
- [33] А. Анго, Математика для электро- и радиоинженеров, М.: Наука, 1967.
- [34] Р. Отнес, Л. Эноксон, Прикладной анализ временных рядов, М.: Мир, 1982.
- [35] R. Carmonia, Practical Time-Frequency Analysis, Academic Press, 1998.
- [36] M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. G. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael, Wavelets and their applications and data analysis, Boston, Jones and Bartlett, 1992.
- [37] R. Polikar, The wavelet tutorial, Electronic publication in the Internet: [http:// www.public.iastate.edu/ rpolikar/ WAVELETS/ WTtutorial.html](http://www.public.iastate.edu/~rpolikar/WAVELETS/WTtutorial.html) (1997).
- [38] C. Blatter, Wavelets: A Primer, Natick, Mass.: A.K. Peters, 1998.
- [39] Y. Meyer, Wavelets: Algorithms and Applications, Philadelphia: SIAM, 1993.
- [40] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [41] Y. Meyer, Wavelets and Operators, Cambridge, Cambridge University Press, 1992.
- [42] T. Paul, Function analitic on half-plane as quantum mechanical states, J. Math. Phys. 24 (25) (1984) 136.

- [43] M. Farge, Wavelet transform and their applications to turbulence, *Annu. Rev. Fluid. Mech* 24 (1992) 395.
- [44] I. Daubechies, The wavelet transform, time–frequency localization and signal analysis, *IEEE Trans. Inform. Theory* 36 (961–1004).
- [45] S. G. Mallat, Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $l_2(\mathbb{R})$ , *Trans. Amer. Math. Soc.* 315 (1989) 69.
- [46] P. G. Lemarie, Y. Meyer, Ondeteless et bases hilbertinennes, *Rev. Math. Ibero-Americana* 2 (1).
- [47] G. Battle, A block spin construction of ondeletters. part 1., *Com. Math. Phys* 110 (607).
- [48] В. А. Гусев, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Применение адаптивных вейвлетных базисов к анализу нелинейных систем с хаотической динамикой, *Письма в ЖТФ* 29 (18) (2003) 61–69.
- [49] C. Torrence, G. P. Compo, A practical guide to wavelet analysis, *Bulletin of the American Meteorological Society* 79 (1998) 61.
- [50] S. D. Meyers, B. G. Kelly, J. J. O'Brien, An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: With application to the dispersion of yanai waves, *Mon. Wea. Rev* 121 (1993) 2858.
- [51] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 1. Основные положения, численная реализация и модельные сигналы, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* 9 (4,5) (2001) 3–43.
- [52] M. Farge, E. Coirand, Y. Meyer, F. Pascal, Improved predictability of two dimensional turbulent flows using wavelet packet compression, *Fluid Dyn. Res.* 10 (1992) 229.

- [53] G. Buzsaki, A. Draguhn, Neuronal oscillations in cortical networks, *Science* 304 (2004) 1926–1929.
- [54] В. И. Некоркин, Нелинейные колебания и волны в нейродинамике, *Успехи физических наук* 178 (3) (2008) 313.
- [55] Г. Д. Абарбанель, М. И. Рабинович, А. Селверстон, М. В. Баженов, Р. Хуэрта, М. М. Сущик, Л. Л. Рубчинский, Синхронизация в нейронных ансамблях, *Успехи физических наук* 166 (4) (1996) 363–390.
- [56] D. M. Zenett, A. S. Mikhailov, Mutual synchronization in ensembles of globally coupled neural networks, *Phys. Rev. E* 58 (1) (1998) 872.
- [57] S. H. Strogatz, Exploring complex networks, *Nature* 410 (2001) 268–276.
- [58] S. Boccaletti, V. Latora, V. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang, Complex networks: Structure and dynamics, *Physics Reports* 424 (2006) 175–308.
- [59] A. Destexhe, T. J. Sejnowski, *Thalamocortical assemblies*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [60] L. S. Fernando da, Neural mechanisms underlying brain waves: from neural membranes to networks, *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology* 79 (1991) 81–93.
- [61] М. Н. Ливанов, *Пространственная организация процессов головного мозга*, М.: Наука, 1972.
- [62] *Успехи физических наук* 141 (1983) 103.
- [63] Н. Е. Свидерская, *Синхронная электрическая активность мозга и психические процессы*, М.: Наука, 1987.
- [64] Н. Е. Свидерская, *Пространственная организация электроэнцефалограммы*, М., Воронеж: Изд.-во ВГМА, 2008.

- [65] Б. М. Величковский, Когнитивная наука. Основы психологии познания, М.: Академия, 2006.
- [66] Р. Наатанен, Внимание и функции мозга, М.: Изд.-во МГУ, 1998.
- [67] Н. Е. Свидерская, Т. Н. Дацинская, Г. В. Таратынова, Пространственная организация ээг при активизации творческих процессов, Журн. высш. нерв. деят 51 (2001) 393.
- [68] J. R. Wolpaw, N. Birbaumer, D. J. McFarland, G. Pfurtscheller, T. M. Vaughan, Brain-computer interfaces for communication and control, Clinical Neurophysiology 113 (2002) 767–791.
- [69] C. Guger, G. Edlinger, W. Harkam, I. Niedermayer, G. Pfurtscheller, How many people are able to operate an eeg-based brain-computer interface (bci)?, IEEE Trans. Rehab. Eng 11 (2003) 145.
- [70] Г. А. Иваницкий, Р. А. Наумов, А. О. Роик, А. М. Иваницкий, Вопросы искусственного интеллекта 1 (2008) 93.
- [71] A. Kaplan, J. J. Lim, K. S. Jin, B. W. Park, J. G. Vyeon, S. U. Tarasova, Intern. J. Neurosci 115 (2005) 781.
- [72] Е. Ю. Ситникова, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика 19 (6).
- [73] International Federation of Societies for Electroencephalography and Clinical Neurophysiology. A glossary of terms most commonly used by clinical electroencephalographers, Vol. 37 of Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol., 1974, Ch. 0, p. 538.
- [74] L. da Silva FH, Encyclopedia of the human brain., Elsevier Science, 2002, Ch. 0, pp. 146–147.



- [75] E. S. Goldensohn, R. J. Porter, P. A. Schwartzkroin, The american epilepsy society: an historic perspective on 50 years of advances in research, *Epilepsia* 38 (1) (1997) 124–150.
- [76] H. Berger, *Arch. Psychiatr. Nervenkr* 87 (1929) 527.
- [77] J. Laidlaw, A. Richens, D. Chadwick, *A text book of epilepsy* (4th ed.), London: Churchill Livingstone, 1993.
- [78] A. M. Coenen, E. L. Van Luijtelaar, The wag/rij rat model for absence epilepsy: age and sex factors, *Epilepsy Res.* 1 (5) (1987) 297–301.
- [79] E. L. Van Luijtelaar, A. M. Coenen, Two types of electrocortical paroxysms in an inbred strain of rats, *Neurosci. Lett* 70 (3) (1986) 393–397.
- [80] N. I. N. Disorders of Stroke, Seizure and epilepsy: hope through research / Available from: [http://www.ninds.nih.gov/health\\_and\\_medical/pubs/seizures\\_and\\_epilepsy\\_htr.htm](http://www.ninds.nih.gov/health_and_medical/pubs/seizures_and_epilepsy_htr.htm), MD, 2001.
- [81] R. J. Porter, Classification of epileptic seizures and epileptic syndromes, in: *A text book of epilepsy* 4th ed. / Laidlaw J, Richens A, Chadwick D (editors), London: Churchill Livingstone, 1993, pp. 1–22.
- [82] E. Sitnikova, E. L. Van Luijtelaar, Cortical and thalamic coherence during spike-wave seizures in wag/rij rats, *Epilepsy Res* (71) (2006) 159–180.
- [83] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, I. S. Midzyanovskaya, E. Sitnikova, C. M. Rijn, On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy, *Chaos* 16 (2006) 043111.