Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского»

Балашовский институт (филиал)

Белокобыльский А.С.

Стартовые элементы комбинаторики и теории вероятностей

Учебно-методическое пособие
для студентов факультета математики, экономики и информатики

Балашов 2012

УДК 519.2
ББК 22.17

Учебно-методическое пособие преподавателя кафедры математики Балашовского института Саратовского государственного университета Белокобыльского Александра Сергеевича предназначено для студентов факультета математики, экономики и информатики направления 050100 «Педагогическое образование», профилей подготовки «Математика», «Информатика» и направлено на формирование навыков осознанного использования ключевых понятий и алгоритмов решения задач комбинаторики и теории вероятностей.

Рекомендуется к опубликованию в электронной библиотеке кафедрой математики Балашовского института (филиала) Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского.

Работа представлена в авторской редакции.

Оглавление

Введение

Чем явственнее человек сможет представить себе все многообразие вариантов развития событий в рассматриваемой ситуации и чем точнее сумеет он спрогнозировать степень возможности реализации каждого из этих вариантов при данных конкретных обстоятельствах, тем вернее удастся ему достигнуть поставленной цели. Справедливость этого утверждения очевидна. Решению первой из указанных выше задач способствует комбинаторика, справиться со второй позволяет теория вероятностей.

Таким образом возникает необходимость раннего ознакомления с основными элементами теории вероятностей и комбинаторики. Отсюда и проистекает вполне понятный интерес к этим дисциплинам, занимающим значимое место уже и в школьном курсе математики.

Данное пособие предназначено прежде всего для решения часто возникающей проблемы, состоящей в необходимости распознавания и сознательного применения стандартных приемов и формул при работе с задачами, имеющими отношение к теории вероятностей или комбинаторике.

Упор сознательно сделан на рассмотрение прежде всего начальных разделов этих дисциплин, поскольку неумение наметить возможное движение к решению задачи и спрогнозировать его развитие по характерным особенностям условия уже на этой стадии изучения предмета почти гарантированно приводит к чисто формальному использованию изученных фактов и соотношений в дальнейшем.

Упомянутый выше формализм проявляется как правило в том, что исполнитель стремится найти решение задачи путем бессистемного перебора известных ему формул и фактов и зачастую оказывается не в состоянии установить логическую связь между значимыми элементами условия задачи и учитывающими их фрагментами теории, что естественным образом приводит не только к неоправданным затратам времени и сил , но и к невозможности достигнуть приемлемого результата.

В данном пособии некоторые правила и определения предложены в упрощенной форме, чтобы не отвлекать внимание читателя от основной сути этих утверждений чеканной строгостью «высоконаучных» формулировок. Предлагаемые задачи не сопровождаются ответами во избежание самой возможности примитивной «подгонки» решения к ним. Хотя поводом для написания данного пособия и послужила элементарная нехватка учебной литературы, хочется надеяться, что оно тем не менее окажется полезным для решения указанных выше проблем изучения и преподавания основ комбинаторики и теории вероятностей.

ГЛАВА 1. Элементы комбинаторики

§1. Краткие сведения о комбинаторике. Правила суммы и произведения

Комбинаторика - самостоятельный раздел математики, рассматривающий задачи по отысканию числа способов выполнения каких-либо действий.

Существует два основных типа объектов, с которыми работает комбинаторика – **множества** и **кортежи.**

Множество – группа объектов произвольной природы, обладающих неким общим для них свойством. Такие объекты называются **элементами множества**, а общее их свойство – **характеристическим.**

Два множества называют равными, если каждый элемент первого множества принадлежит второму и при этом всякий элемент второго множества принадлежит первому.

Отсюда **изменение порядка записи или упоминания элементов рассматриваемого множества не приводит к появлению нового множества.**

Множества обычно обозначают заглавными латинскими буквами и, если количество их элементов конечно, записывают с помощью перечисления всех таких элементов в фигурных скобках: A={7,8,5,6}; D={f, g, r }.

Кортежем длины **к** называют упорядоченный набор, составленный из **к** элементов некоторого множества.

Для обозначения кортежа перечисляют в строго определенном порядке все его элементы, заключая список в круглые скобки: (4,5,6) , (а, в, с), («Локомотив», «Спартак», ЦСКА).

Два кортежа называют равными, если на позициях с одинаковыми номерами в обоих кортежах каждый раз находятся одинаковые же элементы и при этом длины этих кортежей равны. Значит, **два кортежа различны**, если **отличаются они хотя бы порядком следования элементов в них или длиной кортежа.**

Задачи по отысканию числа способов выполнения каких-либо действий называются комбинаторными. Их решение может быть получено с помощью двух основных правил комбинаторики - правил суммы и произведения.

Правило произведения: если количества способов выполнения действий A_1, A_2, …, $A_к$ равны соответственно x_1, x_2, …, $x_к$, то выполнить **последовательность всех этих действий**, одного за другим, можно $x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_к$ способами.

Правило суммы: если количества способов выполнения действий A_1, A_2, …, $A_к$ равны соответственно x_1, x_2, …, $x_к$, то выполнить **только одно (и притом любое!)** из упомянутых действий можно $x_1+x_2+\ldots+x_к$ способами.

<u>**Пример.**</u> Для подъема на вершину горы и спуска с нее разработаны 5 маршрутов. Сколькими способами можно осуществить подъем на вершину с последующим спуском?

Решение: Подъем и спуск можно осуществить по различным маршрутам. Для этого нужно выполнить <u>последовательность</u> 2 действий:

1) взойти на вершину (реализуется 5 способами);
2) спуститься вниз (реализуется также 5 способами).

Тогда по правилу произведения все путешествие выполнимо $5 \bullet 5=25$ способами.

<u>**Пример.**</u> На книжной полке стоят 4 сборника стихов, 5 книг из разряда художественной прозы и 7 учебников. Сколькими способами можно взять с полки книгу, не относящуюся к учебникам?

Решение: Для выбора художественной книги достаточно выполнить <u>только одно из двух возможных действий</u>:

1) выбрать сборник стихов (реализуется 4 способами);
2) выбрать книгу из разряда художественной прозы (реализуется 5 способами).

Тогда по правилу суммы взять с полки книгу, не относящуюся к учебникам, можно $4+5=9$ способами.

Правила суммы и произведения потому и являются основными, что позволяют решать широкий спектр комбинаторных задач, хотя решение может потребовать от исполнителя и многократного применения этих правил .

<u>**Пример.**</u> Сколько можно составить четырехзначных чисел, обязательно имеющих четные цифры в количестве не более двух, из неповторяющихся цифр 1,2,3,4,5,6,7 ?

Решение: Для получения требуемого четырехзначного числа достаточно реализовать только один из двух возможных вариантов:

а) выбрать одну четную цифру и три нечетных;

б) выбрать 2 четных и 2 нечетных цифры.

Тогда по правилу суммы ответом будет служить сумма числа способов реализации варианта а) и числа способов реализации варианта б).

Для варианта а) четырехзначное число формируется в результате последовательного выполнения 4 действий:

1) выбор четной цифры (реализуется из набора 2,4,6 тремя способами);
2) выбор 1-ой нечетной цифры (реализуется 4 способами);
3) выбор 2-ой нечетной цифры (реализуется уже 3 способами, ведь одна нечетная цифра уже использована);
4) выбор 3-ей нечетной цифры (реализуется 2 способами , ведь использованы уже 2 нечетные цифры).

Тогда по правилу произведения вариант а) реализуем ровно 3•4•3•2=72 способами. Аналогично получаем, что и вариант б) реализуем 72 способами.

Поскольку для получения требуемого четырехзначного числа достаточно реализовать только один (и притом любой) из рассмотренных вариантов а) или б), то по правилу суммы существует 72+72=144 способа составить нужное нам число.

Ответ: 144 числа.

Несложно заметить, что приведенное решение достаточно громоздко, да и подобный стиль его изложения хорош лишь на момент отработки навыков владения правилами суммы и произведения, но никак не в ситуации, где такого рода задачи являются вспомогательными при решении задачи более серьезного характера.

Для преодоления проблемы излишней детализации решения вводятся так называемые стандартные комбинаторные соединения элементов, обладающие особыми отличительными признаками, выявление которых в условии задачи способствует ее более оперативному решению. К таким соединениям относят сочетания без повторений, сочетания с возможными повторениями элементов, размещения с повторениями, размещения без повторений, перестановки и размещения заданного состава (которые часто называют еще и перестановками с повторениями).

§2. Размещения с возможным повторением элементов

Размещением с повторениями из n элементов по k элементов называют упорядоченный набор из **k** элементов некоторого **n**-элементного множества, **допускающий повтор одного и того же элемента на различных позициях такого набора.** Число размещений с повторениями из n элементов по k элементов обозначают $\overline{A_n^k}$.

Отличительный признак размещений с повторениями - допустимость повтора элементов и важность порядка их следования при отсутствии четкого указания количества повторов.

К примеру, зафиксированный в футбольном матче «Луч»-«Восход» счет является размещением с повторениями, так как возможный ничейный результат (например, 3:3) допускает и даже гарантирует равенство (т.е. повтор) количеств забитых командами голов, а изменение порядка расположения цифр счета игры может означать изменение ее результата (например, счет матча 4:3 означает победу команды «Луч», в то время как счет 3:4 – победу «Восхода») .

Покажем, что верна формула : $\overline{A_n^k} = n^k$.

Доказательство: Представим себе **k** пустых позиций, которые нужно заполнить элементами некоторого **n**-элементного множества X. Повтор элементов на разных позициях такого упорядоченного набора допустим. Тогда по определению всякий такой упорядоченный набор является размещением с возможными повторениями из **n** элементов по **k** элементов.

Формирование любого такого размещения состоит в последовательном заполнении каждой из **k** позиций элементом **n**-элементного множества X , при этом заполнение каждой из этих позиций возможно **n** способами из-за допустимости повтора элементов на разных позициях размещения .Отсюда по правилу произведения число размещений с повторениями из n элементов по k элементов равно произведению **k** множителей, каждый из которых равен **n** . Значит, $\overline{A_n^k} = n^k$.

<u>Пример.</u> На аукционе, в котором участвуют 7 человек, выставлены для продажи 3 картины. Сколькими способами эти картины могут распределиться среди участников аукциона?

Решение: Поставим в соответствие каждой картине ее покупателя. Возникнет набор из 3 фамилий, допускающий повтор покупателей (разные картины могут быть приобретены одним лицом). Изменение порядка следования покупателей в таком наборе приводит к появлению нового способа распределения картин (роль порядка элементов важна). Искомое число способов равно числу кортежей длины 3 , составленных из допускающих повторение элементов 7-элементного множества покупателей, то есть числу $\overline{A_7^3}$ размещений с повторениями из 7 элементов по 3 элемента.

Ответ: 7^3 , то есть 343 способа.

§3. Размещения без повторений из n элементов по k элементов

Размещением без повторений из **n** элементов по **k** элементов называют **упорядоченный набор из k не повторяющихся** на позициях этого набора элементов некоторого **n**-элементного множества.

Отличительным признаком размещений без повторений является недопустимость повтора элементов и важность порядка их следования.

В частности, размещением без повторений из 5 элементов по 3 элемента является последовательность, в которой турист может посетить 3 из 5 наиболее популярных достопримечательностей города.

Факториалом натурального числа n называют произведение всех натуральных чисел от 1 до **n** включительно. Факториал натурального числа n обозначают так: n ! . Значит, n!=1•2• 3 •…• n. При этом считается, что 0!=1.

Например, согласно определению факториала 4!=1•2•3•4=24, а 5!=1•2•3•4•5=4!•5=24•5=120. Даже этот простейший пример убеждает нас в справедливости очень полезного при организации вычислений равенства общего характера **(n+1) ! = n ! •(n+1) .**

Число размещений без повторений из n элементов по k элементов обозначают A_n^k.

Покажем, что $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Доказательство: Вновь представим себе **k** пустых позиций упорядоченного набора, которые нужно заполнить элементами некоторого n-элементного множества X. Теперь повтор элементов на разных позициях такого упорядоченного набора недопустим. Тогда по определению всякий такой упорядоченный набор является размещением без повторений из **n** элементов по **k** элементов. Формирование любого такого размещения состоит в последовательном заполнении каждой из **k** позиций элементом n-элементного множества X . При этом определяющим является тот факт, что такое размещение формируется в результате последовательного выполнения следующих действий:

1) заполнение 1-й позиции набора (выполнимо n способами) ;
2) заполнение 2-й позиции (выполнимо n-1 способами);
3) заполнение 3-й позиции (выполнимо n-2 способами) и т.д.;

к) заполнение последней к-й позиции набора (выполнимо n-k+1 способами).

Тогда по правилу произведения искомое число размещений A_n^k равно произведению n•(n-1)•(n-2)•…•(n-к+1).

Умножим и одновременно разделим полученный результат на произведение вида (n–к)•(n-к-1)•…•3•2•1. Читая числитель и знаменатель полученной дроби справа налево, имеем $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

<u>Пример.</u> Для оформления аллеи ботанического сада решили высадить вдоль одной из ее сторон в ряд 7 из 10 деревьев десяти различных пород. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Различие любых двух деревьев автоматически означает, что изменение порядка их взаимного расположения вдоль аллеи приводит к появлению нового способа оформления аллеи деревьями. Тогда всякое расположение деревьев есть кортеж длины 7 из неповторяющихся элементов 10-тиэлементного множества.

В итоге искомое число способов совпадает с числом размещений без повторений из десяти элементов по семь элементов и равно $A_{10}^{7} = \frac{10!}{7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720$.

Ответ: деревья вдоль аллеи можно высадить 720 способами.

§4. Перестановки без повторений элементов

Перестановкой без повторений из **n** элементов называют упорядоченный набор **из всех** n элементов данного **n-**элементного множества**.**

Так ,например, построение команды из 10 человек в одну шеренгу является перестановкой без повторений из 10 элементов, так как таком построении задействованы все члены команды, повтор этих людей в строю по понятным причинам невозможен, а изменение порядка следования спортсменов в строю проводит к появлению уже другого их построения в одну шеренгу.

Отсюда **отличительным признаком** перестановки без повторений наряду с невозможностью повтора и важной ролью порядка элементов является **совпадение числа заполняемых элементами некоторого множества X позиций с общим количеством элементов в множестве X.**

Число перестановок без повторений из n элементов обозначают P_n.

Докажем, что $P_n = n!$

Доказательство: Фактически, **каждая перестановка без повторений из n элементов представляет собой размещение без повторений из n элементов по n элементов.** Отсюда верно равенство: $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$.

<u>Пример.</u> Пусть в предыдущей задаче было решено украсить аллею, высадив в ряд по одну сторону аллеи не 7, а все 10 деревьев. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: При изменении порядка расположения деревьев изменится внешний вид аллеи, следовательно, роль порядка элементов в комбинаторном соединении важна. Повтор же элементов невозможен, так как все саженцы относятся к разным породам деревьев.

Отсюда всякое расположение деревьев есть кортеж длины 10 из неповторяющихся элементов 10-тиэлементного множества. Тогда искомое число способов совпадает с числом перестановок из десяти элементов и равно $P_{10} = 10!$.

Ответ: число способов оформления аллеи высаживаемыми деревьями равно 10!.

§5. Сочетания из n элементов по k элементов без повторений

Множество **А** назовем п**одмножеством** множества В, если каждый элемент множества А принадлежит множеству В.

Сочетанием из n элементов по k элементов называют любое **k-**элементное **подмножество n-**элементного множества.

Например, сочетанием из 12 элементов по 8 элементов без повторений служит состав команды из восьми человек, выбираемых из числа 12 студентов группы.

Отличительным признаком сочетания вместе с недопустимостью повтора элементов в нем является тот факт, что в сочетании **важен лишь состав элементов**, а изменение порядка их следования никак не изменяет само сочетание и нового комбинаторного соединения не дает.

Число сочетаний из n элементов по k элементов без повторений обозначают C_n^k.

Докажем, что $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ **.**

Доказательство: Рассмотрим всевозможные сочетания из n элементов по k элементов без повторений. Их количество равно C_n^k и при произвольной перестановке элементов каждого отдельно взятого сочетания всякий раз образуется размещение без повторений из n элементов по k элементов.

Поскольку **k** элементов сочетания могут быть переставлены друг с другом **k!** различными способами, то количество таких размещений без повторений из n элементов по k элементов A_n^k ровно в **k!** раз больше, чем C_n^k. Значит, $A_n^k = C_n^k \cdot k!$ и верна формула

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$ **.**

<u>Пример.</u> Сколькими способами группа из 12 человек может выбрать команду из 8 человек для участия в конкурсе?

Решение: Ясно, что важен прежде всего состав команды, а не порядок упоминания ее членов. Естественно, что повтор участников в составе команды невозможен. Значит, число способов ее формирования равно числу сочетаний из 12 элементов по 8 элементов, то есть

$$C_{12}^8 = \frac{12!}{8!\cdot(12-8)!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{8!\cdot 4!} = 495 \text{ способов}.$$

§6. Размещения заданного состава (перестановки с повторениями)

Пусть из элементов x_1, x_2, …, $x_к$ множества X следует сформировать упорядоченный набор длины n , на позициях которого элемент x_1 повторяется n_1 раз (то есть занимает n_1 позиций этого набора), элемент x_2 повторяется n_2 раз, элемент x_3 повторяется n_3 раз, и так далее, наконец, элемент $x_к$ повторяется $n_к$ раз. При этом очевидно, что $n = n_1+n_2+…+n_k$.

Всякий такой упорядоченный набор называют **перестановкой с повторениями длины n** или **перестановкой заданного состава**, подчеркивая тот факт, что четко указано количество повторений каждого элемента рассматриваемого множества на позициях такой перестановки.

Количество таких размещений заданного состава длины n обозначают $\mathbf{P_n(n_1,n_2,…,n_k)}$, показывая этой записью, что из n позиций перестановки n_1 позиций заняты элементом x_1, n_2 позиций заняты элементом x_2, …, $n_к$ позиций заняты элементом $x_к$ рассматриваемого множества X.

Для множества X={ладья, конь, слон, ферзь, король} шахматных фигур одного цвета расположение всех этих фигур на шахматной горизонтали есть перестановка длины 8 заданного состава , в которой ладья, конь и слон повторяются дважды, а король и ферзь задействованы в единственном экземпляре. Количество таких перестановок равно числу способов расположения на одной горизонтали всех этих шахматных фигур и обозначается $P_8(2,2,2,1,1)$.

Докажем, что при $n = n_1+n_2+…+n_k$ верна формула

$$P_n\,(n_1, n_2,..., n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}.$$

Доказательство. Будем считать в каждом из $P_n(n_1,n_2,…,n_k)$ размещений заданного состава повторяющиеся экземпляры одного и того же элемента **различными**. Если при этом взяв каждое из $P_n(n_1,n_2,…,n_k)$ наших размещений заданного состава, мы n_1 экземпляров первого элемента поменяем местами друг с другом $n_1!$ способами, затем n_2 экземпляра второго элемента поменяем местами друг с другом $n_2!$ способами, и так далее, пока не завершим процесс, переставив $n_k!$ способами все экземпляры последнего k $^{\underline{ого}}$ элемента множества X.

Выполнив последовательность всех этих действий, мы получим все возможные n! перестановок длины n из уже не повторяющихся **различных** экземпляров наших элементов. Но тогда согласно правилу произведения справедливым будет равенство $n! = P_n(n_1,n_2,…,n_k)\cdot n_1!\cdot n_2!\cdot…\cdot n_k!$, откуда и следует доказываемая формула.

В частности, число способов расположения всех фигур одного цвета на одной шахматной горизонтали равно $P_8(2,2,2,1,1)=\frac{8!}{2!\,2!\,2!\,1!\,1!}=5040$.

§7. Сочетания с возможным повторением элементов

Существуют комбинаторные соединения, которые обладают одновременно как присущими множествам свойствами, так и свойствами, не характерными для множеств. Например, оборудование учебного компьютерного класса может состоять из 10 абсолютно одинаковых компьютеров, 10 одинаковых столов, 10 одинаковых стульев , интерактивной доски и проектора. Во множестве, вообще говоря, элементы просто не могут повторяться и попарно различны. Поэтому иногда в комбинаторике рассматривают так называемые **комплекты**, в которых может содержаться несколько **идентичных экземпляров** одного объекта, порядок упоминания объектов не важен, а важен лишь **состав** комплекта. Примером такого комплекта и является указанное оборудование компьютерного класса.

Пусть имеется n различных типов объектов, причем каждый такой тип включает в себя не менее k экземпляров объектов этого типа и $k \le n$. При этом **любые два объекта , относящиеся к разным типам, и сами являются различными**, а вот **любые два объекта одного и того же типа являются абсолютно одинаковыми и неразличимыми.**

Тогда комплект из **k** объектов называется **сочетанием из n по k элементов с их возможным повторением,** если в него может входить произвольное число объектов одного и того же типа, а в формировании комплекта может принимать участие произвольное количество типов.

Количество сочетаний с возможными повторениями из n по k элементов обозначается $\overline{C}_n^k$. Можно показать, что справедлива формула $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Пример. Делается по 3 ксерокопии каждого из 4 различных документов объемом в 1 страницу печатного текста. Затем случайным образом выбирают 3 из полученных копий. Сколько различных комплектов из 3 ксерокопий можно при этом сформировать?

Решение. В комплекте могут присутствовать копии одного и того же документа. При этом ни количество представленных своими копиями документов, ни количество копий одного и того же документа четко не зафиксировано в виде конкретного числа. Порядок включения копий в комплект не важен.

Указанные особенности дают основания считать всякий составленный комплект из 3 копий сочетанием с повторением элементов из 4 по 3 элемента, а потому искомое количество равно $\overline{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} = 20.$

Ответ: 20 разных комплектов.

Чаще всего главной проблемой, возникающей при решении комбинаторных задач, являются затруднения, связанные с установлением типа стандартных комбинаторных соединений, которые могут быть использованы в соответствии с особенностями условия задачи для ее решения.

Для установления вида комбинаторного соединения, имеющего отношение к решению, прежде всего следует выявить ответы на два вопроса:

1) **важен ли порядок расположения элементов в этом соединении** (влияет ли изменение порядка элементов на появление нового соединения этого типа или нет);

2) **допустим ли повтор элементов** в таком соединении или нет.

Однако окончательный вывод о принадлежности комбинаторного соединения к какому–либо из стандартных типов следует делать, опираясь прежде всего на **определения** стандартных комбинаторных соединений.

Для формирования навыка распознавания комбинаторных соединений решите следующие задачи:

№1. Семь монет различного достоинства следует разложить по двум карманам. Каким количеством способов это можно сделать?

№2. Проводится конкурс по распределению 7 заказов между тремя предприятиями. Подсчитайте все способы распределения заказов, при которых найдется хотя бы одно предприятие, получившее ровно 3 заказа.

№3. Половина из шести электродвигателей предприятия устаревшей модели. Сколько существует способов выбора двух двигателей для проведения профилактического ремонта?

№4. Автомат продает открытки десяти видов, выдавая их в случайной последовательности. Сколько различных наборов из 8 открыток можно составить при этом покупателю?

№5. Меню содержит 5 видов мороженого. Сколько различных вариантов заказа может получить официант кафе у столика с 3 посетителями, каждый из которых заказывает 1 порцию мороженого?

№6. В финальном забеге среди восьми участников оказались 2 спортсмена команды “Луч”. Сколько имеется способов расставить бегунов на старте так, что спортсменам “Луча” достанутся соседние дорожки?

№7. В шуточном конкурсе участвуют 4 юноши и 5 девушек. Сколько существует разных способов распределить 3 призовых места среди участников конкурса?

№8. В турнире любые две из 16 футбольных команд между собой играют лишь один матч. Сколько матчей будет сыграно?

№9. Четыре из семи книг содержат автографы авторов. Сколько всего существует способов выбрать 4 книги так, чтобы лишь две из них были с автографом автора?

№10. Человек намерен сегодня посетить 6 своих знакомых: 4 мужчин и 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать так, что первые визиты будут нанесены женщинам?

№11. За круглым столом сидят 4 мужчины и 4 женщины. Сколько существует способов рассадить их так, что каждый из них соседствует лишь с представителями противоположного пола?

№12. Девять пассажиров рассаживаются в 3 вагона. Сколько существует способов, распределить пассажиров по вагонам поровну?

№13. Очередь в кассу образована двумя сотрудниками первого, тремя сотрудниками второго и четырьмя сотрудниками третьего отделов. Сколько существует способов формирования очереди в кассу в день зарплаты, где сотрудники из разных отделов не перемешаны друг с другом?

№14. В ящике 6 стандартных деталей и 4 бракованные. Каково количество способов случайного выбора 2 деталей, гарантирующих обнаружение брака среди содержимого ящика?

№15. Дан выпуклый двенадцатиугольник. Сколько у него диагоналей?

№16. Три из десяти участников концерта выбирают очередь своего выступления. Сколько имеется способов организовать все выступления так, что эти трое будут выступать друг за другом?

№17. Заводу предоставлен список из 7 распределенных на производство инженеров. При этом первому, второму и третьему цехам требуется соответственно 1, 2 и 4 инженера. Сколько существует вариантов того, что при случайном распределении в третий цех попадут 4 самых молодых претендента на трудоустройство?.

№18 Десять различных деталей раскладывают случайным образом по двум ящикам. Сколько существует способов сделать это?

Глава 2. Элементы теории вероятностей

§1. Основные понятия и определения

Теория вероятностей – самостоятельная дисциплина, изучающая закономерности между так называемыми случайными событиями и описывающая эти закономерности с помощью математического аппарата. Событие называют случайным по отношению к некоторому процессу или опыту, если невозможно со всей определенностью предсказать, наступит ли это событие или нет при осуществлении такого опыта или протекании данного процесса.

Вероятность события - специальная величина с числовым значением, характеризующая степень возможности наступления некоторого случайного события в данных условиях при **однократном** проведении связанного с этим случайным событием опыта.

Пусть в одних и тех же условиях проводится серия из n однотипных опытов или испытаний, в результате каждого из которых может наступить некоторое случайное событие *A* .Примером такого опыта может служить стрельба спортсмена по мишени с фиксированной дистанции, в качестве же случайного события *A* можно рассматривать попадание « в десятку».

Относительной частотой наступления события А в данной серии испытаний называют дробь, знаменатель которой равен общему числу испытаний в серии, а числитель – общему количеству той части испытаний, в которых было отмечено наступление события *A*.

В частности, для приведенного выше примера относительная частота события *A* будет равняться 0,37 , если после 100 выстрелов будет зафиксировано 37 попаданий « в десятку».

Ясно, что значение относительной частоты случайного события может и измениться при проведении в тех же условиях другой, повторной серии испытаний или же изменения числа испытаний в каждой такой серии. Однако при проведении достаточно большого числа таких серий, особенно если серии эти состоят из значительного количества испытаний, выясняется, что большая, сильно преобладающая часть отмеченных значений относительной частоты принадлежит достаточно узкому диапазону и колеблется около некоторого постоянного числа ***P*(*A*).** Его то мы и будем считать **вероятностью наступления события *A* в отдельном испытании**.

Таким образом, **вероятность наступления события** характеризует возможность наступления события в <u>отдельном испытании</u> и сохраняет <u>постоянное значение</u> при неизменности условий проведения опыта, тогда как **относительная частота** может <u>изменить</u> значение в другой серии опытов и характеризует <u>всю серию опытов в целом.</u>

Суммой двух случайных событий *A* и *B* называют событие *C*, которое наступает тогда и только тогда , когда наступает **хотя бы одно из событий *A* или *B*.** В этом случае записывают: $C=A+B$.

В частности, если событие *A* состоит в выигрыше матча футбольной командой , а событие *B* – в том, что в матче была зафиксирована ничья, то их суммой является событие *C* , состоящее в том , что команда не проиграла свой матч.

Произведением двух случайных событий *A* и *B* называют событие *C*, которое наступает тогда и только тогда , когда **в процессе одного испытания наступает как событие *A*, так и событие *B*.**

В частности, если событие *A* состоит в прибытии поезда вовремя, а событие *B* состоит в прибытии поезда к месту назначения, то их произведением является событие *C*, состоящее в прибытии поезда по расписанию (то есть и вовремя и к месту назначения).

Два события *A* и *B* называют **несовместными**, если оба эти события не могут наступить при проведении одного и того же испытания.

Два события *A* и *B* называют **противоположными,** если оба эти события не могут наступить при проведении одного и того же испытания, но в каждом из таких испытаний одно из событий *A* или *B* наступает обязательно. Обычно противоположное для *A* событие обозначают $\overline{A}$.

Примером несовместных событий являются проигрыш и выигрыш команды в футбольном матче. Противоположными же событиями являются, например, благополучная сдача и «провал» экзамена студентом.

Ранее приведенное определение вероятности называют интуитивно-статистическим, его использование далеко не всегда удобно.

Определение вероятности события может быть дано и аксиоматическим путем. Так **вероятностью события** *A* называют некоторое действительное число *P(A)* , удовлетворяющее трем условиям (аксиомам):

1. Вероятность *P(A)* любого события *A* есть число неотрицательное.
2. Для любых несовместных событий *A* и *B* $P(A+B)=P(A)+P(B)$.
3. Вероятность достоверного события (то есть события, наступающего при каждом проведении опыта) равна единице.

§2. Испытания с конечным числом элементарных исходов

Пусть рассматриваемое нами испытание имеет лишь конечное число исходов. Назовем **системой элементарных событий** такого опыта множество **S** таких связанных с опытом событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, которое подчиняется трем требованиям:

1. Любые два из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны;
2. Всякое связанное с данным опытом событие может быть представлено в виде суммы каких-либо событий этого множества или эквивалентно одному из них ;
3. Множество **S** не пусто.

Если множество **S** состоит из *конечного* числа элементарных событий опыта, а шансы на реализацию каждого из таких событий *одинаковы*, то **вероятностью события** *A* называют **отношение числа k элементарных событий опыта, благоприятствующих наступлению *A*, к общему числу n элементарных событий опыта.** Это определение называют *классическим определением вероятности события.*

Таким образом, $P(A) = \frac{k}{n}$.

<u>Пример.</u> В ящике 5 черных и 3 белых шара. Какова вероятность того, что при случайном извлечении трех шаров все они будут черными?

Решение: Так как все шары различны и важен состав, а не порядок извлечения тройки шаров, то система элементарных событий такого опыта состоит из C_8^3 элементарных событий.

При случайном извлечении трех шаров все они будут черными лишь в C_5^3 из этих случаев. Поэтому n= $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$, k= $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ и искомая вероятность равна $\frac{10}{56} = \frac{5}{28}$.

Классическое определение вероятности не противоречит ее аксиоматическому определению, они лишь взаимно дополняют друг друга .

Пользуясь любым из этих определений, можно доказать наличие у вероятности события ряда простых свойств:

1. *Для всякого события A* $0 \le P(A) \le 1$.
2. *Для любых событий A и B* *P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).*
3. *Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице, то есть* $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

§3. Условная вероятность события. Вероятность сложного события

Пусть имеются два случайных события *A* и *B*, вероятность наступления каждого из которых отлична от нуля. Величину, обозначаемую *P(A/B)* и равную *P(AB) / P(B)* , назовем условной вероятностью события *A* при наступлении события *B*.

Поскольку очевидно, что не только $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ верно , но и $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, то верным к тому же является равенство *P(AB) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)* (формула 1).

Отсюда имеем $P(A/B) = \dfrac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$ (формула 2).

Назовем два события A и B **независимыми**, если наступление любого из них никак не влияет на наступление другого события этой пары. Иначе говоря, **события *A* и *B* независимы, если** $P(A/B)= P(A)$ **и, вместе с тем** $P(B/A) = P(B)$**.** Тогда из формулы 1 вытекает, что для любых независимых событий A и B $\boldsymbol{P(AB) = P(BA) = P(A)P(B)}$.Некоторые из уже установленных свойств вероятности события формулируют в виде теорем.

Теорема сложения вероятностей звучит так **:** для любых событий A и B $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Теорема умножения вероятностей: для произвольных случайных событий A и B $P(AB) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$, если же известно , что события A и B независимы, то $P(AB) = P(BA) = P(A)P(B)$

Событие, полученное из некоторых исходных событий с помощью операций суммы, произведения и отыскания события, противоположного данному, назовем **сложным.**

При поиске вероятности сложных событий зачастую бывают полезны так называемые формулы эквивалентности событий $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$ и $\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$. При этом два события будем в дальнейшем считать **эквивалентными**, если при наступлении одного из событий этой пары всегда в том же опыте наступает и другое событие этой пары.

<u>**Пример.**</u> Система обеспечения жилого комплекса имеет два автономных генератора, вероятность выхода из строя 1-го генератора равна 0,1 , а 2-го генератора – 0,2. Найти вероятность наступления следующих событий:

1) отказ хотя бы одного из генераторов;
2) нормальную работу обоих генераторов;
3) отказ только одного из генераторов.

Решение: Пусть событие A означает выход из строя 1-го генератора, а событие B - выход из строя 2-го генератора. Тогда по условию $P(A)$=0,1 и $P(B)$=0,2. Автономность генераторов означает независимость событий A и B.

1) Отказ хотя бы одного из генераторов есть, очевидно, событие $A+B$. Тогда $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Поскольку случайные события A и B независимы, имеем $P(AB)=P(A)P(B)$, откуда $P(A+B)$= 0,1+0,2 – 0,1•0,2=0,28.

2) Нормальная работа обоих генераторов есть событие $\overline{A}\,\overline{B}$, где $\overline{A}$ есть событие, противоположное *A,* то есть бесперебойная работа 1-го генератора, а $\overline{B}$ есть событие, противоположное *B*, то есть бесперебойная работа 2-го генератора. $P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}9$, $P(\overline{B})=1-P(B)=0{,}8$.

Учитывая независимость работы генераторов, получим $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})\,P(\overline{B})=0{,}72$.

3) Отказ 1-го генератора при нормальной работе 2-го есть событие $A\overline{B}$. Отказ 2-го генератора при нормальной работе 1-го есть событие $\overline{A}\,B$.

Тогда отказ только одного из генераторов есть событие $A\overline{B}+\overline{A}\,B$. Значит, $P(A\overline{B}+\overline{A}\,B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}\,B)$ по причине несовместности событий $A\overline{B}$ и $\overline{A}\,B$, откуда получаем $P(A\overline{B}+\overline{A}\,B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0{,}1\cdot0{,}8+0{,}9\cdot0{,}2=0{,}26$.

Ответ: 1) 0,28; 2) 0,72; 3) 0,26.

§4. Формулы полной вероятности и Байеса

Пусть некоторое случайное событие *A* может наступить лишь вместе с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_к$, любые два из которых не могут одновременно наступить в одном и том же испытании, то есть попарно несовместны. Если требуется найти вероятность события *A* и при этом абсолютно безразлично, вместе с каким из событий $H_1, H_2, \ldots, H_к$ оно наступило, используют **формулу полной вероятности**

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+\ldots+P(A/H_к)P(H_к).$$

Пример. Идущий по лабиринту человек оказался у разветвления пути на два коридора. Известно, что первый коридор имеет сам 6 ответвлений, из которых к выходу из лабиринта ведут 2, а второй имеет 4 ответвления, среди которых также лишь 2 ведут к выходу.

Найти вероятность того, что продолжая движение вперед по одному из этих двух коридоров, человек выберет ведущее к выходу ответвление.

Решение. Событие *A* (выход из лабиринта) возможно лишь при одновременном наступлении одного из несовместных событий H_1 (движение по коридору №1) или H_2 (движение по коридору №2) . Тогда $P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)$.

Здесь событие A/H_1 есть выход из лабиринта при выборе движения по коридору №1, а событие A/H_2 есть выход из лабиринта при выборе движения по коридору №2.

Тогда $P(A/H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ и $P(A/H_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Выбор коридора возможен лишь двумя равновозможными способами, значит, $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Тогда $P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12}$.

Пусть все сказанное выше о событиях $A, H_1, H_2, \ldots, H_к$ остается в силе, но теперь уже наступление события А является свершившимся фактом, а найти требуется вероятность того, что событие A наступило вместе с каким-то конкретным из событий $H_1, H_2, \ldots, H_к$, например, с событием $H_м$.

В такой ситуации, когда уже **важно, с каким именно конкретным событием $H_м$ из списка $H_1, H_2, \ldots, H_к$ наступило событие A ,** применяют **формулу Байеса.** Для любого ***м*** , изменяющегося в пределах от 1 до **к** она имеет вид

$$P(H_м / A) = \frac{P(A/H_м)P(H_м)}{P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \ldots + P(A/H_к)P(H_к)}$$

Пример. Некоторая продукция производится лишь тремя предприятиями отрасли. 1-ое предприятие производит 20%, 2-ое производит 30%, а 3-е производит 50% всей такой продукции отрасли. Известно, что доля продукции с необнаруженным браком нам этих предприятиях составляет 20%, 10% и 5% соответственно.

Найти вероятность того, что приобретенная покупателем бракованная единица продукции была изготовлена на 3-ем предприятии.

Решение. Пусть A- наличие брака в данной единице товара, событие H_1 состоит в том , что товар сделан на 1-ом предприятии, H_2 – товар произведен 2-ым предприятием , а H_3 – товар произведен 3-им предприятием.

Доподлинно известно, что купленный покупателем товар имеет брак. Тогда событие, состоящее в том , что приобретенная покупателем бракованная единица продукции была изготовлена на 3-ем предприятии, может быть обозначено как H_3/A и для отыскания его вероятности мы используем формулу Байеса.

Учитывая условие задачи, видим, что $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}3$, $P(H_3) = 0{,}5$, причем $P(A/H_1) = 0{,}2$, $P(A/H_2) = 0{,}1$ $P(A/H_3) = 0{,}05$. В итоге $P(H_3/A) = \frac{0{,}05\cdot 0{,}5}{0{,}2\cdot 0{,}2 + 0{,}3\cdot 0{,}1 + 0{,}5\cdot 0{,}05} = \frac{25}{95} = \frac{5}{19}$.

§5. Вероятностная схема и формула Бернулли

Пусть при одних и тех же условиях проводится серия из конечного числа независимых друг от друга испытаний , в каждом из которых может наступить случайное событие A , и при этом вероятность наступления A во всяком таком испытании одна и та же и равна **р**. В таком случае говорят, что испытания проводятся **по вероятностной схеме Бернулли**. Приведем соответствующий пример.

<u>Пример</u> Вероятность отказа насоса водонапорной подстанции 0,1. Найти вероятность отказа двух из трех имеющихся насосов.

Решение. Фактически мы рассматриваем серию из трех испытаний, в каждом из которых осуществляется проверка работы лишь одного из насосов, причем вероятность отказа насоса в каждом таком испытании одинакова и равна 0,1. Обозначим вероятность отказа двух из трех насосов за $P_3(2)$.

Заметим, что нас интересует отказ **любых** двух насосов подстанции, но какие именно это будут насосы, нам абсолютно безразлично.

Рассмотрим, например, ситуацию, предполагающую отказ именно 1-го и 2-го насосов. В дальнейшем эту ситуацию будем называть событием B. Заметим, что справедлива эквивалентность событий B и $A_1A_2\overline{A_3}$ (здесь индекс события обозначает порядковый номер испытания в серии, то есть номер проверяемого насоса, символ A соответствует отказу насоса, символ $\overline{A}$ определяет нормальную работу насоса; таким образом, событие $\overline{A}_3$ состоит в нормальной работе насоса №3).

$$P(B) = P(A_1A_2\overline{A_3}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}1\bullet 0{,}1\bullet 0{,}9=0{,}009$$

Легко установить, что вероятность реализации ситуации с отказом каких-нибудь других двух из трех насосов (например, 2-го и 3-го) также равна 0,009. Количество же таких равновероятных и попарно несовместных ситуаций совпадает с количеством способов выбора двух насосов из трех возможных, то есть совпадает с C_3^2 и равно 3.

Тогда отказ двух из трех насосов есть сумма C_3^2 попарно несовместных событий, а именно $A_1A_2\overline{A_3}$, $A_1A_3\overline{A_2}$ и $A_2A_3\overline{A_1}$, причем вероятность каждого из них будет равна $(0{,}1)^2(1\text{-}0{,}1)^{3-2} = 0{,}009$.

Значит, искомая в задаче вероятность $P_3(2) = C_3^2 \bullet.(0{,}1)^2\bullet (1\text{-}0{,}1)^{3-2} = 0{,}027$.

Здесь мы подсчитали в виде $C_3^2 \bullet.(0{,}1)^2\bullet (1\text{-}0{,}1)^{3-2}$ вероятность того, что событие с вероятностью наступления **0,1** произойдет **2** раза при проведении серии из **3** испытаний. Рассуждая аналогично, можно показать, что числом $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ определяется вероятность $P_n(k)$ того, что событие с вероятностью наступления **р** произойдет в серии из **n** испытаний ровно **к** раз.

Этот факт выражен в **формуле Бернулли :** $P_n(\kappa) = C_n^\kappa p^\kappa (1-p)^{n-\kappa}$**.**

При возникновении сложностей с отысканием вероятности события A часто более продуктивным оказывается **отыскание вероятности события $\overline{A}$, противоположного для A , с последующим вычитанием ее из единицы .**

<u>Пример</u> Вероятность поражения стрелком цели при одиночном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что выстрелив четыре раза, стрелок поразит цель не более трех раз.

Решение. Нам нужно найти вероятность события A , состоящего в том , что выстрелив четыре раза, стрелок поразит цель один, два , три раза или же не поразит ее ни разу.

Считая выстрелы независимыми друг от друга, можем использовать формулу Бернулли. В нашем случае **p** = 0,8 , **к** изменяется от нуля до трех включительно, значит, искомая вероятность может быть найдена в виде суммы $P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) + P_4(3)$ и вычислена в виде $C_4^0\, p^0 (1-p)^4 + C_4^1\, p^1 (1-p)^3 + C_4^2\, p^2 (1-p)^2 + C_4^3\, p^3 (1-p)^1$.

Вместе с тем этих громоздких вычислений можно было бы избежать, заметив, что четырехкратное попадание является событием, противоположным для A, поэтому $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - C_4^4 p^4 (1-p)^0 = 1 - p^4$ =1-0,4096=0,5904.

Ответ: 0,5904.

Вероятностная схема Бернулли позволяет вычислить *наиболее вероятное количество* κ^* всех тех испытаний проводимой серии, в которых наступит отслеживаемое событие. Наиболее вероятное количество κ^* всех таких испытаний определяется неравенством $np - q \le k^* \le np + p$, где q=1-p и q служит вероятностью ненаступления рассматриваемого события в отдельном испытании проводимой серии.

<u>Пример.</u> Найти наиболее вероятное число попаданий в цель в условиях предыдущей задачи и соответствующую такому числу попаданий вероятность.

Решение. В нашем случае **p** = 0,8 , значит, **q=**1-0,8=0,2 . Тогда в соответствии со сказанным выше наиболее вероятное число попаданий в цель κ^* определяется с помощью условия $np - q \le k^* \le np + p$, откуда имеем 4•0,8-0,2≤ $\kappa^* \le 4$•0,8+0,8 , то есть 3≤ $\kappa^* \le 4$.

Это означает, что наиболее вероятным числом попаданий является как 3 попадания, так и 4 попадания при четырех выстрелах. Отыщем соответствующие этим случаям вероятности.

$P_4(3) = C_4^3 0{,}8^3 0{,}2^1 = 0{,}4096$, такой оказалась вероятность трехкратного попадания, причем она совпала с вероятностью того, что все 4 пули попадут в цель (смотри предшествующий пример).

Ответ: наиболее вероятное число попаданий равно 3 или 4, вероятность каждого из этих результатов равна 0,4096.

Для выработки навыка решения задач на отыскание вероятности события в соответствии с классическим определением предлагаются следующие ниже задачи.

При решении задач рекомендуем действовать поэтапно:

1. Определить, в чем собственно состоит рассматриваемый опыт и выявить систему его элементарных исходов.

2. Пользуясь правилами и формулами комбинаторики найти число **N** всех этих элементарных исходов.

3. Далее подсчитать число **K** лишь той части всех элементарных исходов, которые приводят к наступлению рассматриваемого в задаче события А , и тем самым удовлетворяют указанному в задаче дополнительному условию-ограничению.

4. Найти вероятность события по формуле $P(A) = \dfrac{K}{N}$.

№19. Семь монет различного достоинства следует разложить по двум карманам. Какова вероятность того, что в одном из карманов окажется ровно 4 монеты?

№20. Проводится конкурс по распределению 7 заказов между тремя предприятиями. Найти вероятность получения одним из предприятий ровно 3 заказов.

№21. Половина из шести электродвигателей предприятия устаревшей модели. Какова вероятность того, что при случайном выборе двух двигателей для проведения профилактического ремонта оба они окажутся устаревшей модели?

№22. В турнире любые две из 16 футбольных команд между собой играют лишь один матч. Какова вероятность того, что при случайном выборе соперника первый матч турнира сыграет команда “Восход”.

№23. Автомат продает открытки десяти видов. Какова вероятность того, что при покупке восьми открыток все они окажутся различными?

№24. Меню содержит 5 видов мороженого. Какова вероятность того, что три посетителя кафе закажут мороженое трех различных видов?

№25. В финальном забеге среди 8 участников оказались 2 спортсмена команды “Луч”. Какова вероятность того, что им достанутся соседние дорожки?

№26. В шуточном конкурсе участвуют 4 юноши и 5 девушек. Какова вероятность того, что все три призовых места останутся за девушками?

№27. Найти вероятность того, что в случайный момент времени указанное на табло электронных часов количество часов превосходит указанное там же число минут.

№28. Четыре из семи книг содержат автографы авторов. Какова вероятность того, что при случайном выборе четырех книг лишь две окажутся с автографом автора?

№29. Человек намерен сегодня посетить 6 своих знакомых: 4 мужчин и 2 женщин. Какова вероятность того, что первые визиты будут нанесены женщинам?

№30. За круглым столом сидят 4 мужчины и 4 женщины. Какова вероятность того, что каждый из них соседствует лишь с представителями противоположного пола?

№31. Девять пассажиров рассаживаются в 3 вагона.. Какова вероятность того, что пассажиры распределятся по вагонам поровну?

№32.Очередь в кассу образована двумя сотрудниками первого, тремя сотрудниками второго и четырьмя сотрудниками третьего отделов. Найти вероятность того, что при случайном формировании очереди сотрудники из разных отделов не перемешаны друг с другом.

№33. В ящике 6 стандартных деталей и 4 бракованные. Какова вероятность обнаружения брака при извлечении из ящика двух деталей?

№34. Дан выпуклый двенадцатиугольник. Какова вероятность того, что соединяя две его произвольные вершины, мы построим его диагональ?

№35. Три из десяти участников концерта выбирают очередь своего выступления. Какова вероятность того, что они будут выступать друг за другом?

№36. Заводу предоставлен список из 7 распределенных на производство инженеров. При этом первому, второму и третьему цехам требуется соответственно 1, 2 и 4 инженера. Какова вероятность того, что при случайном распределении в третий цех попадут 4 самых молодых претендента на трудоустройство.

Для выработки навыка решения задач на отыскание вероятности сложного события, применение формул полной вероятности, Байеса и Бернулли предлагаются следующие задачи.

№37.Вероятность попадания в мишень для первого стрелка при одиночном выстреле равна 0,8 , а для второго 0,85. Каждый стрелок делает выстрел по мишени. Какова вероятность того , что цель поражена : а) двумя стрелками, б) только одним стрелком, в) хотя бы одним стрелком?

№38.Из 15 изделий 5 бракованные. Какова вероятность того , что из двух выбранных наугад изделий :а) бракованное хотя бы одно, б) оба бракованные?

№39. В группе из 25 студентов 10 слабоуспевающих . Какова вероятность того, что при выборе из группы двух студентов среди них окажется :а) только один слабоуспевающий студент, б) хотя бы один слабоуспевающий студент ?

№40. Проверку качества осуществляют один за другим 2 контролера. Вероятность выявления дефекта первым-0,9 , а вторым – 0,95. Какова вероятность того , что изделие с дефектом будет: а)пропущено, б) обнаружено?

№41. В семье трое детей. Найти вероятность того, что среди них есть хотя бы одна девочка, если вероятность рождения мальчика равна 0,51.

№42Прибор содержит 2 реле, вероятность нормальной работы которых 0,8 и 0,9 соответственно. Какова вероятность того , что: а) прибор будет работать исправно, б) выйдет из строя хотя бы одно реле?

№43. Среди 50 лотерейных билетов 20 выигрышных. Какова вероятность того , что при выборе двух билетов среди них окажется: а) хотя бы один выигрышный, б) хотя бы один невыигрышный?

№44. Зная 30 вопросов из 48,студент отвечает на 2 вопроса. Какова вероятность верного ответа : а) хотя бы на один вопрос, б) на оба вопроса?

№45. В коробке 50 ламп мощностью 100Вт и 30 мощностью 60Вт. Наудачу выбирают 2 лампы. Какова вероятность того, что они окажутся: а)одной мощности, б) разной мощности?

№46. В среднем 5% мужчин и 10% женщин дальтоники. При обследовании одинакового количества мужчин и женщин наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

№47. В двух равных по количеству партиях товара товар 1 сорта составляет 15% и 70% соответственно. Найти вероятность того, что случайно выбранная единица товара будет при этом не первого сорта.

№48. Вероятность попадания при выстреле равна 0,8.Вычислить вероятность того, что при пяти выстрелах будет а) не более 2 промахов; б) три попадания.

№49. В 1-ой коробке твердые карандаши составляют третью часть, а во 2-ой коробке- четвертую часть . Наугад выбирается 1 коробка и из нее извлекается наугад 1 карандаш. Он оказался твердым. Какова вероятность того, что взят он из 1-ой коробки?

№50. Вероятности обращения покупателя в 1-й или 2-й магазины равны соответственно 0,4 и 0,6. Вероятность наличия нужного товара равна 0,7 для 1-го и 0,3 для 2-го магазинов. Вычислить вероятность того, что покупатель приобретет нужный ему товар.

№51 Первое предприятие поставило магазину обуви вдвое больше , чем второе. При этом разного рода дефекты имеют 20% обуви 1-го предприятия и 35% обуви 2-го. Какова вероятность того, что пару обуви изготовило 1-ое предприятие, если она дефектов не имеет?

№52. Найти наиболее вероятное число пар обуви 38-го размера, которое может находиться среди шести наугад выбранных пар, и соответствующую такому событию вероятность, если обувь 38-го размера составляет 30% от всей партии обуви

№53. Вероятность поломки автомобиля на этапе ралли равна 0,4. Какова вероятность того , что текущий ремонт потребуется автомобилю: а) на 2 этапах ралли; б) не более чем на 2 этапах.

№54. Вероятность попадания мяча в кольцо при штрафном броске равна 0,8. Какова вероятность того, что в серии из 5 бросков игрок: а) промахнется лишь дважды; б) попадет в кольцо не более 4 раз?

§6. Приближенные формулы Пуассона и Лапласа

Если вероятность $P_n(m)$ наступления некоторого события A ровно в m из n испытаниях серии , проводимой по схеме Бернулли , подсчитывать при больших значениях общего количества испытаний n, то использование формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям.

Поэтому при соблюдении определенного рода условий полезно заменять формулу Бернулли ее приближениями, к числу которых относятся формула Пуассона , а также локальная и интегральная формулы Лапласа.

Вообще формула Пуассона справедлива , если вероятность p наступления события A в отдельном испытании стремится к нулю, общее количество испытаний n в серии стремится к бесконечности, а их произведение pn стремится при этом к постоянному числу λ.

При выполнении таких условиях будет верно предельное равенство

$$\lim P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}; \quad где\ np = \lambda$$

Отсюда и вытекает приближенная **формула Пуассона**: $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}; \quad где \quad np = \lambda$.

На практике результаты, получаемые с помощью приближенной формулы Пуассона, имеют высокую степень точности , когда количество испытаний n достаточно велико, и при этом выполнены неравенства **p**$\leq 0{,}1$ и **λ**≤ 10.

Значение выражения $\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ находят при выполнении указанных условий применимости формулы Пуассона с помощью специальной таблицы по известным параметрам m и λ.

<u>Пример</u>. Транспортируется партия из 4000 одинаковых изделий. Вероятность повреждения изделия при доставке равна 0,0005. Найти вероятность того, что при транспортировке будут повреждены ровно 3 изделия.

Решение. Согласно условию задачи n=4000, m=3, p=0,0005. Тогда λ=pn=2 и все условия применимости формулы Пуассона (а именно p$\leq 0{,}1$ и λ≤ 10) выполнены.

Поэтому искомая вероятность по уже известным значениям λ=2 и m=3 легко находится по таблице следующим образом:

$$P_{4000}(3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0{,}1804.$$

Отметим, что формула Пуассона может быть применена и в тех случаях, когда по условию задачи количество результативных испытаний m, завершившихся наступлением отслеживаемого события, может изменяться от числа m_1 до числа m_2 включительно.

При этом формула Пуассона приобретает вид

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \approx e^{-\lambda} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Другим приближением формулы Бернулли является локальная формула Лапласа, позволяющая вычислить вероятность $P_n(m)$ при условии, что общее количество независимых испытаний n в серии достаточно велико (стремится к бесконечности) , а число наступлений m отслеживаемого события A фиксировано.

Локальная приближенная формула Лапласа имеет вид

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \quad и \quad q = 1 - p,$$

при этом функция Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ является четной (то есть при любом x верно $\varphi(-x) = \varphi(x)$) и ее значения занесены в особую таблицу.

На практике локальная формула Лапласа обеспечивает хорошую точность вычислений и применяется при достаточно больших n, удовлетворяющих вместе с параметрами p и q неравенству **npq ≥10** (или даже **npq ≥ 20**).

<u>Пример.</u> Вероятность повторного обращения клиента в рекламное агентство в течение месяца равна 0,2. Найти вероятность того, что при этом из 400 клиентов в агентство в течение месяца повторно обратятся 80.

Решение. Согласно условию n=400, m=80, p=0,2, q=1-0,2=0,8. При этом npq=64 и условие применимости локальной формулы Лапласа выполнено, а значит, согласно этой формуле $P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\varphi(x)$, где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = 0$. В итоге получим

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\varphi(x) \approx \frac{1}{8}\varphi(0) \approx \frac{1}{8}\cdot 0{,}3989 \approx 0{,}0498.$$

Ответ: 0,0498.

В случае, когда по условию задачи количество результативных испытаний m может изменяться от числа m_1 до числа m_2 включительно, формула Лапласа может быть применена в виде

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{m=m_1}^{m_2} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

если количество слагаемых в этой формуле невелико.

Если же по условию задачи разница между границами изменения числа результативных испытаний m велика и из-за этого указанная выше формула неудобна для вычислений, используют **интегральную формулу Лапласа**

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \text{ ,где } \qquad t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Эту формулу удобно записывать в виде $P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$, где подразумевается, что $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$. Такую функцию Ф(x) называют функцией Лапласа, эта функция нечетна (то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$) и для нее составлены таблицы значений, которыми и пользуются на практике.

Интегральная формула Лапласа применима при больших n и **npq ≥10** .

<u>Пример.</u> Вероятность выхода из строя телевизора до окончания гарантийного срока равна 0,2. Найти вероятность того, что из случайным образом выбранных 400 телевизоров до окончания гарантийного срока выйдут из строя от 70 до 100 телевизоров.

Решение . Согласно условию m_1=70, m_2=100, n=400, p=0,2, q=0,8 . При этом npq=64 (то есть npq ≥10), а потому может быть применена интегральная формула Лапласа.

$$P_{400}(70 \le m \le 100) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где $t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}} \approx -1,25; \quad t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}} \approx 2,5$. Используя таблицу значений функции Лапласа, получаем $P_{400}(70 \le m \le 100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) \approx 0,4938 + 0,394 \approx 0,8882.$

Ответ: 0,8882

Выбрав среди рассмотренных в данном параграфе формул подходящую, решите следующие задачи. Особое внимание обратите на выполнение в той или иной задаче условий применимости выбранной приближенной формулы.

№55. Известно , что в среднем 64% студентов заочного отделения выполняют контрольные работы в установленный срок. Какова вероятность того, что из 100 студентов задержат представление контрольных работ : а) 30 студентов; б) от 30 до 48 студентов?

№56. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что : а) тираж содержит 5 бракованных книг; б) по крайней мере 9998 книг сброшюрованы правильно.

№57.Известно, что 10 % изделий имеют дефект. Найти вероятность того, что в партии из 400 изделий : а) не будут иметь дефекта ровно 378 изделий ; б) дефект имеется не менее , чем у 25, но не более чем у 43 изделий.

№58. Вероятность выигрыша по билету лотереи равна 0,02. Найти вероятность того, что из 100 билетов выигрыш выпадет: а) на два билета; б) хотя бы на один билет; в) на 2 или на 3 билета.

№59. Известно, что четвертая часть пересаженных саженцев погибает. Найти вероятность того, что из 300 саженцев: а) погибнет ровно 76; б) приживется от 210 до 224 саженцев.

№60. Вероятность опоздания пассажира на поезд равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пасажиров и вероятность именно такого количества опоздавших.

№61. 20% реализуемых автосалоном машин требуют предпродажной подготовки. Найти вероятность того, что из 225 автомобилей : а) 184 машины не требовали предпродажной подготовки; б) не требовали такой подготовки от 172 до 184 машин.

№62. вероятность наличия опечаток на странице книги равна 0,0025. Найти вероятность того, что в книге из 800 страниц с опечатками окажется: а) ровно 5 страниц; б) от 3 до 5 страниц.

№63. Строительная фирма раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Известно, что примерно в одном из тысячи случаев следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 20000 листков число заказов будет : а) равно 16; б) находиться в границах от 18 до 24.

№64. Известно, что 0,05% почтовых отправлений доставляется не по адресу. Найти вероятность того, что из 4000 отправлений не по адресу будут доставлены 3.

№65. Шифр сейфа состоит из 4 цифр от 0 до 9. Один человек устанавливает случайным образом комбинацию шифра, а затем второй делает 1 попытку открыть сейф, вводя цифры наугад. Этот опыт повторяется 1000 раз. Какова вероятность того, что в данной серии опытов шифр сейфа будет угадан ровно 4 раза?

№66. Известно, что 2% изготавливаемых предприятием изделий являются бракованными. Какова вероятность обнаружения ровно 10 бракованных изделий в партии из 500 штук?

§7. Свойства чисел C_n^k. Бином Ньютона

Пусть при проведении по схеме Бернулли серии из n независимых испытаний события A_0, A_1, A_2, …, A_n означают , что некоторое отслеживаемое в каждом испытании событие A не наступило ни в одном испытании, наступило в одном испытании, в 2 испытаниях, и т.д., наступило в n испытаниях серии соответственно.

Так как по окончании любой такой серии один из этих исходов обязательно наступит, то событие вида $A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n$ является достоверным и его вероятность равна единице. Поскольку события в этой сумме несовместны, верно равенство $1=P(A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_0)+P(A_1)+\ldots+P(A_n)$.

Представив каждое из слагаемых по формуле Бернулли и учитывая, что $(p+q)^n=1$, получаем **формулу бинома Ньютона** для натуральных показателей степени

$$(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^{n-k} q^k.$$

Эту формулу легко распространить на случай, когда числа p и q в ее составе произвольны и не обязаны принадлежать отрезку [0;1], за пределы которого не могут выходить значения вероятностей событий.

Приняв в формуле бинома Ньютона p=q=1, убеждаемся в справедливости равенства $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Это означает, что у всякого n-элементного множества ровно 2^n подмножеств-сочетаний. Если же взять p=1 и q= -1, то при новой подстановке получаем , что $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$. Отсюда при натуральном числе n элементов данного множества количества его подмножеств с четным и нечетным числом элементов совпадают.

Используя формулу $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$, легко также убедиться в справедливости равенств $C_n^k = C_n^{n-k}$ и $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$.

Последний результат лежит в основе правила, по которому строится таблица, содержащая в своей n-ой строке все значения чисел C_n^k в порядке возрастания k от 0 до n.

Такая таблица называется треугольником Паскаля, всякая ее строка начинается и заканчивается единицей, представляет собой симметричную последовательность чисел, содержит на одно число больше, чем предыдущая строка. При этом любой не равный единице элемент таблицы равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 1 1 5 1

0 0

… … …

Треугольник Паскаля в числовой форме

Табличные приложения

Таблица значений функции Гаусса *φ(x)* и функции Лапласа *Φ(x)*

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
0	0,3989	0	0,4	0,3683	0,1554	0,8	0,2897	0,2881
0,01	0,3989	0,004	0,41	0,3668	0,1591	0,81	0,2874	0,291
0,02	0,3989	0,008	0,42	0,3653	0,1628	0,82	0,285	0,2939
0,03	0,3988	0,012	0,43	0,3637	0,1664	0,83	0,2827	0,2967
0,04	0,3986	0,016	0,44	0,3621	0,17	0,84	0,2803	0,2995
0,05	0,3984	0,0199	0,45	0,3605	0,1736	0,85	0,278	0,3023
0,06	0,3982	0,0239	0,46	0,3589	0,1772	0,86	0,2756	0,3051
0,07	0,398	0,0279	0,47	0,3572	0,1808	0,87	0,2732	0,3078
0,08	0,3977	0,0319	0,48	0,3555	0,1844	0,88	0,2709	0,3106
0,09	0,3973	0,0359	0,49	0,3538	0,1879	0,89	0,2685	0,3133
0,1	0,397	0,0398	0,5	0,3521	0,1915	0,9	0,2661	0,3159
0,11	0,3965	0,0438	0,51	0,3503	0,195	0,91	0,2637	0,3186
0,12	0,3961	0,0478	0,52	0,3485	0,1985	0,92	0,2613	0,3212
0,13	0,3956	0,0517	0,53	0,3467	0,2019	0,93	0,2589	0,3238
0,14	0,3951	0,0557	0,54	0,3448	0,2054	0,94	0,2565	0,3264
0,15	0,3945	0,0596	0,55	0,3429	0,2088	0,95	0,2541	0,3289

0,16	0,3939	0,0636	0,56	0,341	0,2123	0,96	0,2516	0,3315
0,17	0,3932	0,0675	0,57	0,3391	0,2157	0,97	0,2492	0,334
0,18	0,3925	0,0714	0,58	0,3372	0,219	0,98	0,2468	0,3365
0,19	0,3918	0,0753	0,59	0,3352	0,2224	0,99	0,2444	0,3389
0,2	0,391	0,0793	0,6	0,3332	0,2257	1	0,242	0,3413
0,21	0,3902	0,0832	0,61	0,3312	0,2291	1,01	0,2396	0,3438
0,22	0,3894	0,0871	0,62	0,3292	0,2324	1,02	0,2371	0,3461
0,23	0,3885	0,091	0,63	0,3271	0,2357	1,03	0,2347	0,3485
0,24	0,3876	0,0948	0,64	0,3251	0,2389	1,04	0,2323	0,3508
0,25	0,3867	0,0987	0,65	0,323	0,2422	1,05	0,2299	0,3531
0,26	0,3857	0,1026	0,66	0,3209	0,2454	1,06	0,2275	0,3554
0,27	0,3847	0,1064	0,67	0,3187	0,2486	1,07	0,2251	0,3577
0,28	0,3836	0,1103	0,68	0,3166	0,2517	1,08	0,2227	0,3599
0,29	0,3825	0,1141	0,69	0,3144	0,2549	1,09	0,2203	0,3621
0,3	0,3814	0,1179	0,7	0,3123	0,258	1,1	0,2179	0,3643
0,31	0,3802	0,1217	0,71	0,3101	0,2611	1,11	0,2155	0,3665
0,32	0,379	0,1255	0,72	0,3079	0,2642	1,12	0,2131	0,3686
0,33	0,3778	0,1293	0,73	0,3056	0,2673	1,13	0,2107	0,3708
0,34	0,3765	0,1331	0,74	0,3034	0,2704	1,14	0,2083	0,3729
0,35	0,3752	0,1368	0,75	0,3011	0,2734	1,15	0,2059	0,3749
0,36	0,3739	0,1406	0,76	0,2989	0,2764	1,16	0,2036	0,377
0,37	0,3725	0,1443	0,77	0,2966	0,2794	1,17	0,2012	0,379
0,38	0,3712	0,148	0,78	0,2943	0,2823	1,18	0,1989	0,381
0,39	0,3697	0,1517	0,79	0,292	0,2852	1,19	0,1965	0,383

Таблица значений функции Гаусса *φ(x)* и функции Лапласа *Φ(x)*

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
1,2	0,1942	0,3849	1,6	0,1109	0,4452	2,06	0,0478	0,4803
1,21	0,1919	0,3869	1,61	0,1092	0,4463	2,08	0,0459	0,4812
1,22	0,1895	0,3888	1,62	0,1074	0,4474	2,1	0,044	0,4821
1,23	0,1872	0,3907	1,63	0,1057	0,4484	2,12	0,0422	0,483
1,24	0,1849	0,3925	1,6	0,1109	0,4452	2,14	0,0404	0,4838
1,25	0,1826	0,3944	1,61	0,1092	0,4463	2,16	0,0387	0,4846
1,26	0,1804	0,3962	1,62	0,1074	0,4474	2,18	0,0371	0,4854
1,27	0,1781	0,398	1,63	0,1057	0,4484	2,2	0,0355	0,4861
1,28	0,1758	0,3997	1,64	0,104	0,4495	2,22	0,0339	0,4868
1,29	0,1736	0,4015	1,65	0,1023	0,4505	2,24	0,0325	0,4875
1,3	0,1714	0,4032	1,66	0,1006	0,4515	2,26	0,031	0,4881
1,31	0,1691	0,4049	1,67	0,0989	0,4525	2,28	0,0297	0,4887
1,32	0,1669	0,4066	1,68	0,0973	0,4535	2,3	0,0283	0,4893
1,33	0,1647	0,4082	1,69	0,0957	0,4545	2,32	0,027	0,4898
1,34	0,1626	0,4099	1,7	0,094	0,4554	2,34	0,0258	0,4904
1,35	0,1604	0,4115	1,71	0,0925	0,4564	2,36	0,0246	0,4909
1,36	0,1582	0,4131	1,72	0,0909	0,4573	2,38	0,0235	0,4913
1,37	0,1561	0,4147	1,73	0,0893	0,4582	2,4	0,0224	0,4918

1,38	0,1539	0,4162	1,74	0,0878	0,4591	2,42	0,0213	0,4922
1,39	0,1518	0,4177	1,75	0,0863	0,4599	2,44	0,0203	0,4927
1,4	0,1497	0,4192	1,76	0,0848	0,4608	2,46	0,0194	0,4931
1,41	0,1476	0,4207	1,77	0,0833	0,4616	2,48	0,0184	0,4934
1,42	0,1456	0,4222	1,78	0,0818	0,4625	2,5	0,0175	0,4938
1,43	0,1435	0,4236	1,79	0,0804	0,4633	2,52	0,0167	0,4941
1,44	0,1415	0,4251	1,8	0,079	0,4641	2,54	0,0158	0,4945
1,45	0,1394	0,4265	1,81	0,0775	0,4649	2,56	0,0151	0,4948
1,46	0,1374	0,4279	1,82	0,0761	0,4656	2,58	0,0143	0,4951
1,47	0,1354	0,4292	1,83	0,0748	0,4664	2,6	0,0136	0,4953
1,48	0,1334	0,4306	1,84	0,0734	0,4671	2,62	0,0129	0,4956
1,49	0,1315	0,4319	1,85	0,0721	0,4678	2,64	0,0122	0,4959
1,5	0,1295	0,4332	1,86	0,0707	0,4686	2,66	0,0116	0,4961
1,51	0,1276	0,4345	1,88	0,0681	0,4699	2,68	0,011	0,4963
1,52	0,1257	0,4357	1,9	0,0656	0,4713	2,7	0,0104	0,4965
1,53	0,1238	0,437	1,92	0,0632	0,4726	2,72	0,0099	0,4967
1,54	0,1219	0,4382	1,94	0,0608	0,4738	2,74	0,0093	0,4969
1,55	0,12	0,4394	1,96	0,0584	0,475	2,76	0,0088	0,4971
1,56	0,1182	0,4406	1,98	0,0562	0,4761	2,78	0,0084	0,4973
1,57	0,1163	0,4418	2	0,054	0,4772	2,8	0,0079	0,4974
1,58	0,1145	0,4429	2,02	0,0519	0,4783	2,9	0,006	0,4981
1,59	0,1127	0,4441	2,04	0,0498	0,4793	3	0,0044	0,4987
						5	0	0,5

Таблица значений функции $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ для вычислений по формуле Пуассона

λ=	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k									
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4	0	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,003	0,005	0,0077	0,0111
5	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,002
6	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0003

λ=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k										
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,224	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,005	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,224	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,015	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,168	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,012	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,149	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,149	0,1396	0,1171	0,0901