Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского»

Балашовский институт (филиал)

Белокобыльский А.С.

Простейшие рекуррентные последовательности и основанные на их свойствах приемы суммирования

Учебно-методическое пособие
для студентов факультета математики, экономики и информатики

УДК 519.2
ББК 22.17

Учебно-методическое пособие преподавателя кафедры математики Балашовского института Саратовского государственного университета Белокобыльского Александра Сергеевича предназначено для студентов старших курсов факультета математики, экономики и информатики и направлено на демонстрацию взаимосвязи и взаимопроникновения закономерностей различных разделов высшей математики в рамках изучения чрезвычайно краткого (объемом лишь 12 учебных часов за семестр) курса математики элементарной.

Рекомендуется к опубликованию в электронной библиотеке кафедрой математики Балашовского института (филиала) Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского.

Работа представлена в авторской редакции.

Оглавление

Введение

Давно минуло то время, когда на изучение математических дисциплин отводилось достаточное с точки зрения здравомыслящего преподавателя и студента количество учебных часов. Не останавливаясь подробно на причинах и очевидных последствиях такого положения вещей, затронем порожденную этим положением проблему вынужденного разбиения имеющегося в распоряжении преподавателя резерва учебного времени на карликовые циклы из пяти-шести занятий. Математика, в том числе и элементарная, отличается прежде всего тем, что подача слушателю в готовом виде алгоритмов, эффективных с точки зрения исполнителя решения той или иной практической задачи, без должной проработки теоретической составляющей курса превращает эти алгоритмы в некие отвлеченные заклинания, суть которых так и остается для обучающегося не осознанной в полной мере.

Вместе с тем логическая завершенность любого изучаемого курса со сбалансированным сочетанием теоретических основ с арсеналом практических алгоритмов является хорошим подспорьем для устойчивых знаний обучающегося. Поэтому, раз уж вернуться к десятилетиями оправданным нормам распределения учебного времени мы не в состоянии, остается использовать эту очевидную зависимость хотя бы там, где это в сложившихся обстоятельствах возможно.

В частности, создавшаяся проблема ослабления теоретической составляющей может быть решена за счет связи курса элементарной математики с элементами математики высшей, когда успешное рассмотрение выбранного блока тем в сокращенном по времени варианте возможно на базе знаний, полученных студентом ранее при изучении разделов высшей математики.

Конечно, может сложиться впечатление, что такой подход камня на камне не оставляет от основополагающего принципа движения от простого к сложному в обучении и ставит все с ног на голову. Однако это вовсе не относится к ситуации, когда содержания курсов элементарной и высшей математики взаимно развивают и дополняют друг друга. В частности, такой симбиоз возможен при изучении темы «Простейшие рекуррентные последовательности и основанные на их свойствах приемы суммирования» в рамках курса элементарной математики параллельно изучению дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, если студент уже ознакомлен ранее с понятием линейного векторного пространства и аппаратом линейной и векторной алгебры. Естественно, что это оказалось возможным лишь за счет ссылок на ранее установленные в рамках курса высшей математики факты.

1.Уравнения в конечных разностях

Пусть x_0 и h есть некоторые фиксированные числа, $n \in Z$ и рассматриваются значения аргумента x вида $x_n=x_0+nh$ и функция $f(x)$,определенная в каждой такой точке и имеющая в ней конечное значение.

Назовем конечной разностью 1-го порядка функции $f(x)$ в точке x_n выражение вида $\Delta_h f(x_n)= f(x_0 + (n+1)h)- f(x_0 + nh)$. Тогда по аналогии выражения вида $\Delta_h f(x)= f(x + h)- f(x)$,

$\Delta_h^{(2)} f(x)= \Delta_h f(x + h)- \Delta_h f(x)$,

$\Delta_h^{(3)} f(x)= \Delta_h^{(2)} f(x + h)- \Delta_h^{(2)} f(x)$, и так далее вплоть до выражения

$\Delta_h^{(к)} f(x)= \Delta_h^{(к-1)} f(x + h)- \Delta_h^{(к-1)} f(x)$ назовем конечными разностями соответственно 1-го, 2-го, 3-го,…,к-го порядка функции $f(x)$ в точке x.

Пусть далее $F(x, \Delta_h f(x),\dots, \Delta_h^{(к)}f(x))$ есть функция к+1 переменного, зависящая от x и конечных разностей функции $f(x)$ порядка с 1-го по к-ый включительно. Поставим задачу найти функцию $f(x)$,которая обращает в тождество соотношение $F(x, \Delta_h f(x),\dots, \Delta_h^{(к)}f(x))=0$. **(1)**

В этом случае говорят о необходимости решить уравнение (1) в конечных разностях. Множество же всевозможных функций, обращающих в тождество уравнение (1), называют общим решением этого уравнения.

Рассматривая последовательность равноотстоящих с шагом h значений вида $x_n=x_0+nh$, легко добиться за счет замены переменной $n=(x-x_0)/h$ зависимости функции f от переменной n непосредственно.

Тогда $f(x_0)=f(0), f(x_1)=f(1),\dots, f(x_n)= f(n)$.С учетом выполненной замены считаем теперь $f(x)$ определенной в равноотстоящих с шагом 1 значениях $x_i=x_0+i$ и рассчитаем уже для этих значений конечные разности вплоть до к-го порядка.

Методом математической индукции можно доказать, что верно утверждение

$$\Delta_h^{(к)} f(x)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-1}C_k^i f(x+i) \qquad \textbf{(2).}$$

Равенство (2) показывает, что всякому разностному уравнению вида (1) можно придать вид $F(x, f(x), f(x +1),\dots, f(x+к))=0$ **(3)**.

Если после упрощений уравнение (3) в явном виде содержит $f(x+к)$, оно называется разностным уравнением к-го порядка.

2. Линейные уравнения в конечных разностях.

Уравнение вида $f(x+к)+b_1 f(x+к-1)+ b_2 f(x+к-2)+\dots+ b_k f(x)=Q(x)$ **(4)**, где $b_1, b_2,\dots, b_k$ и $Q(x)$ есть известные функции аргумента x с конечными значениями при натуральных значениях аргумента, причем функция b_k не равна тождественно нулю, называют линейным однородным уравнением $к^{\underline{го}}$ порядка в конечных разностях при $Q(x)\equiv 0$ и неоднородным линейным при $Q(x)\neq 0$ соответственно.

Из уравнения (4) видно, что каждое его решение определяется заданием начальных значений $f(0)= f_0$, $f(1)= f_1, \ldots, f(к-1)= f_{к-1}$.

Теорема 1. Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ есть произвольные решения уравнения $f(x+к)+b_1f(x+к-1)+ b_2f(x+к-2)+\ldots+ b_kf(x)=0$ **(5)**, то и любая их линейная комбинация $\varphi(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_pf_p(x)$ с постоянными коэффициентами $c_1,c_2,\ldots,c_p$ является решением уравнения (5).

Доказательство. Так как функции $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_p(x)$ есть решения уравнения $f(x+к)+b_1f(x+к-1)+ b_2f(x+к-2)+\ldots+ b_kf(x)=0$, то верны равенства

$f_1(x+к)+b_1f_1(x+к-1)+ b_2f_1(x+к-2)+\ldots+ b_kf_1(x)=0,$

$f_2(x+к)+b_1f_2(x+к-1)+ b_2f_2(x+к-2)+\ldots+ b_kf_2(x)=0$, и так далее вплоть до

$f_p(x+к)+b_1f_p(x+к-1)+ b_2f_p(x+к-2)+\ldots+ b_kf_p(x)=0.$

Умножая первое из них на c_1, второе на $c_2,\ldots$, последнее на c_p и складывая результаты , получаем, что $\varphi(x+к)+b_1\varphi(x+к-1)+ b_2\varphi(x+к-2)+\ldots+ b_k\varphi(x)=0$. Это иозначает , что $\varphi(x)$ является решением уравнения (5).

Назовем решения $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_p(x)$ уравнения (5) **линейно независимыми**, если тождество вида $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_pf_p(x)=0$ верно лишь при условии $c_1=c_2=\ldots=c_p=0$, и линейно зависимыми в противном случае.

Покажем, что **для линейно независимых решений** $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_к(x)$ **разностного уравнения (5) при** $x=0,1,2,\ldots$ **отличен от нуля определитель**

$$D[f_1(x),f_2(x),\ldots,f_к(x)]=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_к(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \ldots & f_к(x+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(x+k-1) & f_2(x+k-1) & \ldots & f_к(x+k-1) \end{vmatrix} \qquad \textbf{(6).}$$

Доказательство. Допустим, что $D[f_1(x),f_2(x),\ldots,f_к(x)]=0$, хотя $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_p(x)$ и служат линейно независимыми решениями уравнения (5).

Тогда существуют одновременно неравные нулю постоянные $c_1,c_2,\ldots,c_к$, являющиеся решениями системы линейных уравнений относительно переменных $\boldsymbol{c_1,c_2,\ldots,c_к}$

$$\begin{cases} c_1f_1(0)+ & c_2f_2(0)+ & \ldots & +c_кf_к(0)=0 \\ c_1f_1(1)+ & c_2f_2(1)+ & \ldots & +c_кf_к(1)=0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1f_1(k-1)+ & c_2f_2(k-1)+ & \ldots & +c_кf_к(k-1)=0 \end{cases}$$

Тогда для найденных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_\kappa$ при любом из значений $x=0,1,2,\ldots$ верны равенства вида $$\sum_{s=1}^{\kappa} c_s f_s(x) = 0 \quad \mathbf{(7)}\ .$$

Поскольку $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\kappa(x)$ служат решениями уравнения (5), при любом значении $s=1,2,3,\ldots,\kappa$ верно равенство $f_s(\kappa)+b_1(0)f_s(\kappa-1)+ b_2(0)f_s(\kappa-2)+\ldots+ b_k(0)f_s(0)=0$. Умножая для всякого такого s=1,2,3,…,к это последнее равенство на c_s и суммируя все полученные таким образом равенства, имеем

$\sum_{s=1}^{k} c_s f_s(k) + b_1(0)\sum_{s=1}^{k} c_s f_s(k-1) + \ldots + b_k(0)\sum_{s=1}^{k} c_s f_s(0) = 0$, что в силу равенства (7) повлечет за собой и справедливость равенства $\sum_{s=1}^{\kappa} c_s f_s(\kappa) = 0$, а это уже означает, что $\sum_{s=1}^{\kappa} c_s f_s(x) = 0$ выполняется для x=0.

Аналогично рассуждая, показываем справедливость **тождественного** равенства $\sum_{s=1}^{\kappa} c_s f_s(x) = 0$ при всяком $x=0,1,2,\ldots$ Но такой результат противоречит определению линейной независимости системы функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\kappa(x)$ из-за наличия среди чисел $c_1, c_2, \ldots, c_\kappa$ хотя бы одного отличного от нуля числа. Это и доказывает утверждение (6).

Теорема 2. Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\kappa(x)$ – решения уравнения $f(x+\kappa)+b_1 f(x+\kappa-1)+b_2 f(x+\kappa-2)+\ldots+b_k f(x)=0$ **(5),** причем определитель $D[f_1(0), f_2(0), \ldots, f_\kappa(0)]$ отличен от нуля, либо $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\kappa(x)$ линейно независимые функции , то общее решение уравнения (5) имеет вид $\varphi(x)=C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)+\ldots+C_\kappa f_\kappa(x)$, где $C_1, C_2, \ldots, C_\kappa$ постоянные.

Доказательство. Согласно утверждению (6) линейная независимость функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\kappa(x)$ и означает, что $D[f_1(0), f_2(0), \ldots, f_\kappa(0)]$ отличен от нуля.

В силу теоремы 1 любая функция вида $\varphi(x)$ является решением уравнения (5).

Пусть f(x) – произвольное решение уравнения (5). Покажем ,что оно представимо в виде линейной комбинации функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\kappa(x)$.

Согласно условиям теоремы мы имеем право потребовать наложения на функцию $f(x)$ условий, естественным образом составляющих систему линейных уравнений

$$\begin{cases} f(0) = \varphi(0) = & C_1 f_1(0) + & \ldots & + C_k f_k(0) \\ f(1) = \varphi(1) = & C_1 f_1(1) + & \ldots & + C_k f_k(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(k-1) = \varphi(k-1) = & C_1 f_1(k-1) + & \ldots & C_k f_k(k-1) \end{cases}.$$

Действительно, определитель этой системы отличен от нуля, а потому среди функций вида $\varphi(x)$ найдется единственная функция с теми же начальными условиями, что и у функции $f(x)$.

Но тогда из уравнения (5) вытекает, что эти две упомянутые функции тождественны на множестве всех целых неотрицательных значений переменной x, а потому всякое решение $f(x)$ уравнения (5) является линейной комбинацией линейно независимых решений того же уравнения при условии, что количество этих линейно независимых решений равно порядку уравнения.

Это и означает, что общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\varphi(x)=C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\ldots+C_кf_к(x).$$

Теорема 3. Общее решение $R(x)$ линейного неоднородного уравнения

$$f(x+к)+b_1 f(x+к-1)+ b_2 f(x+к-2)+\ldots+ b_k f(x)=Q(x) \qquad \textbf{(8)}$$

есть сумма произвольного частного решения $R^*(x)$ этого уравнения с общим решением $R_0(x)$ соответствующего однородного уравнения (5).

Тем самым $R(x)=R^*(x)+R_0(x)=R^*(x)+C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\ldots+C_кf_к(x)$, где функции $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_к(x)$ являются решениями однородного уравнения

$$f(x+к)+b_1 f(x+к-1)+b_2 f(x+к-2)+\ldots+ b_kf(x)=0 \qquad (5),$$

причем функции $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_к(x)$ линейно независимы или определитель $D[f_1(0),f_2(0),\ldots,f_к(0)]$ отличен от нуля, а количество функций $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_к(x)$ совпадает с порядком исходного уравнения (8).

Доказательство. Пусть $R^*(x)$ есть произвольное решение уравнения (8), $b_0(x)=1$ и рассматриваются функции вида $R(x)=R^*(x)+R_0(x)$, составляющие общее решение уравнения (8).

$$\text{Тогда } \sum_{s=0}^{k} b_s(x)\left[R^*(x+k-s)+R_0(x+k-s)\right]=Q(x).$$

Вместе с тем из уравнения (8) также следует, что $\sum_{s=0}^{k} b_s(x)R^*(x+k-s)=Q(x)$, а потому с учетом этих последних двух равенств имеем:

$$R_0(x+к)+b_1(x)R_0(x+к-1)+ b_2(x)R_0(x+к-2)+\ldots+ b_k(x)R_0(x)=0.$$

Согласно же теореме (2) общее решение этого последнего уравнения как раз имеет вид $C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\ldots+C_кf_к(x)$, где функции $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_к(x)$ являются решениями однородного уравнения (5) $f(x+к)+b_1f(x+к-1)+b_2f(x+к-2)+\ldots+b_kf(x)=0$, причем функции $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_к(x)$ линейно независимы или определитель $D[f_1(0),f_2(0),\ldots,f_к(0)]$ отличен от нуля, а количество функций $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_к(x)$ совпадает с порядком исходного уравнения (8).

Таким образом, теорема доказана.

3. Рекуррентные последовательности

Пусть F-функция нескольких переменных и числовая последовательность $\{a_n\}$ задана соотношением $a_{n+p}= F(n,\ a_n,\ a_{n+1,\dots,}\ a_{n+p-1})$ **(9)** **,** которое позволяет восстановить все члены$\{a_n\}$, если заданы p ее первых (или иных идущих подряд) членов этой последовательности . Тогда $\{a_n\}$ называется рекуррентной последовательностью.

Если $\{a_n\}$ задана соотношением вида $a_{n+p}+b_1a_{n+p-1}+\dots+b_pa_n=0$ **(10)** , где $b_{1,\dots,}\ b_p$ – постоянные, $b_p\neq 0$, то $\{a_n\}$ называют рекуррентной (возвратной) последовательностью $p^{\underline{го}}$ порядка, а само соотношение (10) называют линейным рекуррентным соотношением $p^{\underline{го}}$ порядка.

Очевидно, что подобные соотношения являются частным случаем рассмотренных выше разностных линейных уравнений, а потому на них распространяется действие доказанных ранее теорем 1 – 3.

Известно, что всякое множество M, на котором заданы замкнутые , то есть имеющие всегда принадлежащий множеству M результат, операции сложения и умножения, называется линейным пространством, если для произвольных действительных чисел λ и μ и произвольных элементов x,y,z множества M справедливы условия:

1. x+y= y+x ;
2. (x+ y)+ z=x+ (y+ z) ;
3. Существует единственный $\Xi\in$M, такой что x+Ξ=x ;
4. Существует элемент (-x), такой что всегда x=(-x)= Ξ ;
5. 1$\cdot$ x = x ;
6. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$;
7. $(\lambda + \mu)x=\lambda x+\mu x$;
8. $\lambda (x+ y)= \lambda x +\lambda y$.

Поскольку всякая последовательность $\{a_n\}$ есть функция натурального аргумента, можно считать суммой последовательностей $\{a_n\}=a_1,a_2,a_3,\dots$ и $\{b_n\}=b_1,b_2,b_3,\dots$ последовательность $\{a_n+b_n\}=a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,\dots$, а произведением числа λ на последовательность $\{a_n\}$ считать последовательность $\lambda\{a_n\}=\lambda\, a_1,\lambda\, a_2,\lambda\, a_3,\dots$

Вводя далее Ξ как последовательность, все члены которой равны нулю, можно утверждать, что множество решений рекуррентного соотношения $a_{n+p}+b_1a_{n+p-1}+\dots+b_pa_n=0$ является линейным пространством согласно теоремам 1 и 2.

При этом будем считать последовательности$\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\},\ \dots,\{a_n^{(p)}\}$ линейно независимыми , если равенство $C_1\{a_n^{(1)}\}+C_2\{a_n^{(2)}\}+\ \dots+C_p\{a_n^{(p)}\}=\ \Xi$ достижимо лишь при $C_1=C_2=\dots=C_p=0$, и линейно зависимыми в противном случае.

Назовем размерностью пространства решений соотношения (10) наибольшее количество линейно независимых его элементов.

Для соотношения $a_{n+p}+b_1a_{n+p-1}+\ldots+b_pa_n=0$ (10) **размерность пространства его решений равна р, то есть порядку этого соотношения . (11)**

Доказательство. Пусть последовательности $\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\}, \ldots,\{a_n^{(p)}\}$ с помощью соотношения (10) , для которого они являются решениями, однозначно заданы начальными условиями

$$\begin{array}{llll} a_1^{(1)}=1 & a_2^{(1)}=0 & \ldots\ a_{p-1}^{(1)}=0 & a_p^{(1)}=0 \\ a_1^{(2)}=0 & a_2^{(2)}=1 & \ldots\ a_{p-1}^{(2)}=0 & a_p^{(2)}=0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ a_1^{(p)}=0 & a_2^{(p)}=0 & \ldots\ a_{p-1}^{(p)}=0 & a_p^{(p)}=1\,. \end{array}$$

Тогда из соотношения (10) получаем , что верны равенства $a_{p+1}^{(1)}=-b_p$, $a_{p+1}^{(2)}=-b_{p-1}$, $a_{p+1}^{(3)}=-b_{p-2}$, …, $a_{p+1}^{(p)}=-b_1$.

Очевидно, что система последовательностей $\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\}, \ldots,\{a_n^{(p)}\}$ при таких начальных условиях линейно независима и количество ее элементов равно порядку соотношения (10).

Допустим, что для соотношения (10) найдется решение $\{c_n\}$, образующее вместе с $\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\}, \ldots,\{a_n^{(p)}\}$ линейно независимую систему. Тогда, с одной стороны, верно равенство $c_{p+1}=-b_1c_p-b_2c_{p-1}-\ldots-b_pc_1$, а с другой стороны, согласно утверждению (6) упомянутый в нем определитель D отличен от нуля из-за линейной независимости системы $\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\}, \ldots,\{a_n^{(p)}\}, \{c_n\}$.

Но при введенных начальных условиях $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -b_p \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -b_{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -b_1 \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_p & c_{p+1} \end{vmatrix}=0$, в чем легко убедиться, складывая последнюю строку этого определителя с предыдущими, умноженными соответственно на $-c_1,-c_2, \ldots, -c_p$ и получая при этом на последней позиции определителя нулевую строку.

Полученное противоречие и означает, что размерность пространства решений линейного рекуррентного соотношения равна его порядку.

Согласно ранее доказанным теоремам 2 и 3 общее решение однородного линейного рекуррентного соотношения (10) $p^{\underline{\text{го}}}$ порядка $a_{n+p}+b_1a_{n+p-1}+\ldots+b_pa_n=0$ имеет вид $C_1\{a_n^{(1)}\}+C_2\{a_n^{(2)}\}+\ \ldots+C_p\{a_n^{(p)}\}$, где $\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\}, \ldots,\{a_n^{(p)}\}$ есть линейно независимые решения соотношения (10), а $C_1,C_2,\ldots,C_p$ произвольные постоянные.

Аналогично общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения $p^{\underline{го}}$ порядка $a_{n+p}+b_1a_{n+p-1}+\ldots+b_pa_n=Q(n)$ **(12)** есть сумма произвольного частного решения соотношения (12) с общим решением соответствующего однородного линейного рекуррентного соотношения.

Таким образом, для решения линейного рекуррентного соотношения прежде всего **необходимо получить линейно независимую систему решений соответствующего однородного соотношения, количество которых равно порядку соотношения .**

Для этого будем искать решение соотношения $a_{n+p}+b_1a_{n+p-1}+\ldots+b_pa_n=0$ (10) в виде $a_n=q^{n-1}$. Подставляя $a_n=q^{n-1}$ в (10), получаем $q^{n+p-1}+ b_1 q^{n+p-2}+\ldots+ b_pq^{n-1}=0$, а после деления на q^{n-1} имеем так называемое **характеристическое уравнение рекуррентного соотношения**

$$q^p+ b_1 q^{p-1}+\ldots+ b_{p-1}q+ b_p =0 \qquad \textbf{(13)} \ .$$

Если все корни q_i характеристического уравнения (13) попарно различны, получаем р различных решений соотношения (10) вида $a_n^{1}=q_1^{n-1}$, $a_n^{2}=q_2^{n-1}$, ..., $a_n^{p}=q_p^{n-1}$.

Соответствующий этим решениям определитель D , имеющий вид $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_p \\ q_1^2 & q_2^2 & \ldots & q_p^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1^{p-1} & q_2^{p-1} & \ldots & q_p^{p-1} \end{vmatrix}$,

отличен от нуля при попарно неравных корнях q_i как небезызвестный определитель Вандермонда.

Тогда согласно теореме 2 общее решение однородного линейного рекуррентного соотношения (10) имеет вид $C_1q_1^n+ C_2q_2^n+\ldots+C_pq_p^n$, где $C_1,C_2,\ldots,C_p$ произвольные постоянные.

Если же какой-нибудь из q_i есть корень кратности $\boldsymbol{\kappa}$ для характеристического уравнения (13), рассмотрим последовательности вида $x_n^{(1)}=q_i^{n-1}$, $x_n^{(2)}=nq_i^{n-1}$, $x_n^{(3)}=n^2q_i^{n-1},\ldots,$ $x_n^{(\kappa)}=n^{\kappa-1}q_i^{n-1}$. Записав для таких последовательностей определитель D, можно убедиться, что и он отличен от нуля. Так как последовательности $x_n^{(i)}$, очевидно, являются решениями для (10), то остается поставить в соответствие каждому корню q_i характеристического уравнения (13) кратности $\boldsymbol{\kappa}$ решение вида $(C_1+C_2n+C_3n^2+\ldots+C_kn^{k-1})q_i^n$ и, суммируя все такие последовательности , получить тем самым общее решение R_0 однородного линейного рекуррентного соотношения (10).

В частности, если характеристическое уравнение рекуррентного соотношения имеет единственный корень, кратность которого совпадает с порядком k линейного рекуррентного соотношения, то мы легко убедимся в линейной независимости решений вида $x_n^{(1)}=q_i^{n-1}$, $x_n^{(2)}= nq_i^{\ n-1}$, $x_n^{(3)}= n^2q_i^{\ n-1}$,..., $x_n^{(\kappa)}=n^{\kappa-1}q_i^{\ n-1}$, поскольку соответствующий этой системе решений определитель D представляет собой произведение выражения $q_i q_i^{\,2} \ldots q_i^{\,к-1}$ на определитель Вандермонда для попарно неравных чисел 1,2,3,…, к.

Ну а для решения соответствующего неоднородного линейного рекуррентного соотношения $a_{n+p}+b_1a_{n+p-1}+\ldots+b_pa_n=Q(n)$ следует найти любое его частное решение R^* и сложить его с R_0.

4. Линейные однородные рекуррентные соотношения 2$^{\underline{го}}$ порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим соотношение второго порядка $a_{n+2}+b_1a_{n+1}+b_2a_n=0$ с постоянными коэффициентами . Его характеристическое уравнение таково: $q^2+b_1q+b_2=0$ **(14)** .

Имеем три случая:

1. $b_1^2-4b_2>0$. Здесь уравнение (14) имеет 2 простых различных действительных корня q_1 и q_2, а потому общее решение исходного соотношения имеет вид $C_1q_1^n+C_2q_2^n$.
2. $b_1^2-4b_2=0$. При этом (14) имеет единственный действительный корень q_1 второй кратности и общее решение исходного соотношения имеет вид $(C_1+nC_2)\,q_1^n$.
3. $b_1^2-4b_2<0$. Здесь уравнение (14) имеет 2 простых комплексных взаимносопряженных корня $q_1=a+ib$ и $q_2=a-ib$.

При этом $|q_1|=|q_2|=\sqrt{a^2+b^2}=|q|$ и тогда в тригонометрической форме записи комплексного числа $q_1=|q|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $q_2=|q|(\cos\varphi-i\sin\varphi)$, а потому допустимо преобразование выражения $C_1q_1^n+C_2q_2^n$ к виду $C_1|q|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)+C_2|q|^n(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)=\left|q^n\right|((C_1+C_2)\cos n\varphi+(C_1-C_2)i\sin n\varphi)$.

С учетом произвола в выборе C_1 и C_2, получаем, что общее решение имеет вид $\overline{C}_1|q|^n\cos n\varphi+\overline{C}_2|q|^n\sin n\varphi$, где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ есть произвольные постоянные.

5. Неоднородные линейные соотношения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Пусть дано соотношение вида $a_{n+p}+b_1a_{n+p-1}+\ldots+b_pa_n=\alpha^nP_s(n)$ **(15)** , где α- корень соответствующего характеристического уравнения к$^{\underline{ой}}$ кратности , а $P_s(n)$- многочлен степени s переменной n. В этом случае будем искать частное решение указанного соотношения в виде $n^k\alpha^nQ_s(n)$, где $Q_s(n)$- многочлен степени не выше s переменной n. Подставив его в левую часть и поделив обе части на α^n , получим равенство между двумя многочленами от переменной n. Остается лишь представить $Q_s(n)$ в виде многочлена с неизвестными коэффициентами $A_sn^s+A_{s-1}n^{s-1}+\ldots+A_1n+A_0$ и найти их значения методом неопределенных коэффициентов, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной левой и правой частей равенства.

Далее достаточно полученное частное решение сложить с общим решением соответствующего однородного соотношения $a_{n+p}+b_1a_{n+p-1}+\ldots+b_pa_n=0$ и тем самым получить согласно теореме 3 общее решение исходного неоднородного соотношения (15).

В случае, когда правая часть неоднородного рекуррентного соотношения (15) имеет вид $\alpha_1^n P^{(1)}_s(n)+ \alpha_2^n P^{(2)}_s(n)+\ldots+ \alpha_m^n P^{(m)}_s(n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ есть некоторые действительные числа, а $P^{(1)}_s(n), P^{(2)}_s(n), \ldots, P^{(m)}_s(n)$ - многочлены, сначала следует найти частное решение неоднородного соотношения в виде суммы частных решений неоднородных соотношений с той же левой частью и правыми частями в виде многочленов $P^{(1)}_s(n), P^{(2)}_s(n), \ldots, P^{(m)}_s(n)$ соответственно. Затем вновь используют теорему 3.

Покажем теперь, как все изложенное выше может быть использовано непосредственно для решения рекуррентных соотношений.

Пример №1. Найти решение соотношения $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$ с начальными условиями $a_1=1$, $a_2=-3$, $a_3=-29$.

Характеристическое уравнение $q^3-9q^2+26q-24=0$ имеет простые корни $q_1=2$, $q_2=3$, $q_3=4$. Поэтому общее решения этого однородного соотношения имеет вид $a_n=C_12^n+C_23^n+C_34^n$. Теперь используем начальные условия.

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=-3 \\ a_3=-29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1+3C_2+4C_3=1 \\ 4C1+9C2+16C3=-3 \\ 8C1+27C2+64C3=-29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1+3C_2+4C_3=1 \\ 3C_2+8C_3=-5 \\ 15C2+48C3=-33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1+3C_2+4C_3=1 \\ 3C_2+8C_3=-5 \\ 8C3=-8 \end{cases}$$

Отсюда $C_3=-1$, $C_2=C_1=1$ и $a_n=2^n+3^n-4^n$.

Пример№2. Найти решение соотношения $a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=0$ с начальными условиями $a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=13$.

Характеристическое уравнение $q^3-3q^2+3q-1=0$ имеет только корень третьей кратности $q_1=1$.Поэтому общее решение имеет вид $a_n=(C_1+C_2n+C_3n^2)(1)^n=C_1+C_2n+C_3n^2$. Далее с учетом начальных условий имеем

$$\begin{cases} a_1=3 \\ a_2=7 \\ a_3=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2+C_3=3 \\ C_1+2C_2+4C_3=7 \\ C_1+3C_2+9C_3=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=1 \\ C_3=1 \end{cases} \text{ и } \qquad a_n=1+n+n^2$$

Пример№3. Найти общее решение соотношения $a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=2^n$ **(Δ1)**

Найдем общее решение как сумму частного решения R^* соотношения (Δ1) с общим решением R_0 соотношения $a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид $q^2+2q-8=0$ и простые корни $q_1=2$, $q_2=-4$. Поэтому $R_0=C_12^n+C_2(-4)^n$. Так как 2 - корень первой кратности характеристического уравнения и вместе с тем правая часть неоднородного соотношения содержит множитель 2^n, то ищем частное решение R^* соотношения ($\Delta 1$) в виде $C\,n\,2^n$. Подставим его в ($\Delta 1$). Получим $C(n+2)\,2^{n+2}+2C(n+1)\,2^{n+1}-8C\,n2^n=2^n$.

Отсюда $12C=1$ и $C=1/12$. Поэтому $R^*=\dfrac{n2^n}{12}$ и общее решение соотношения ($\Delta 1$) имеет

вид $a_n= R^*+ R_0=\dfrac{n2^n}{12} + C_1 2^n+C_2(-4)^n$.

Пример№4. Найти решение соотношения $a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=27\cdot 5^n$ с начальными условиями $a_1=-9$, $a_2=45$.

Общее решение соответствующего однородного соотношения уже найдено в предыдущем примере и имеет вид $R_0=C_1 2^n+C_2(-4)^n$.

Так как число 5 , степень которого содержится в правой части, корнем характеристического уравнения не является, частное решение исходного соотношения R^* ищем в том же виде, какой имеет правая часть соотношения, то есть в виде произведения многочлена нулевой степени(а именно произвольной постоянной) на выражение 5^n.

Итак, подставляем $R^*=C\cdot 5^n$ в исходное соотношение:

$C5^{n+2}+2C5^{n+1}-8C5^n=27\cdot 5^n$. Отсюда $(25+10-8)C=27$ и $C=1$. Значит, общее решение задачи имеет вид $a_n= R^*+ R_0=5^n+ C_1 2^n+C_2(-4)^n$.

Так как $a_1=-9$, $a_2=45$, то C_1 и C_2 ищем из системы $\begin{cases} 5+2C_1-4C_2=-9 \\ 25+4C_1+16C_2=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=-3 \\ C_2=2 \end{cases}$. Тем

самым искомое решение имеет вид $a_n=5^n-3\cdot 2^n+2\cdot(-4)^n$.

Пример№5. Найти решение соотношения $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, если $a_1=1$.

Характеристическое уравнение имеет вид $q-1=0$ с единственным простым корнем $q=1$.. Значит, общее решение соответствующего однородного соотношения имеет вид $R_0=C_1$. Так как правая часть исходного соотношения представляет собой произведение многочлена второй степени на единицу, то есть на выражение 1^n, а единица корнем характеристического уравнения является, то частное решение исходного соотношения ищем в виде $R^*=n(An^2+Bn+C)$. Подставим этот результат в исходное соотношение :

$$(n+1)(A(n+1)^2+B(n+1)+C)-n(An^2+Bn+C)=\frac{1}{2}\,n(n+1);$$

$$A(3n^2+3n+1)+B(2n+1)+C=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной в многочленах из левой и правой частей последнего равенства, получаем $A=\dfrac{1}{6}$, $B=0$, $C=-\dfrac{1}{6}$.

Отсюда $R^*=n(\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6})=\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)$ и общее решение исходной задачи имеет вид $a_n=C_1+\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)$. Согласно начальному условию $a_1=1$ верно, что $C_1+\frac{1}{6}1(1-1)(1+1)=1$, поэтому $C_1=1$ и тогда искомое частное решение исходной задачи приобретает вид $a_n=1+\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)=\frac{1}{6}(n+2)(n^2-2n+3)$.

Пример№6. Найти решение соотношения $a_{n+5}-3a_{n+4}+2a_{n+3}-6a_{n+2}+a_{n+1}-3a_n=0$ с начальными условиями $a_1=-5$, $a_2=6$, $a_3=23$, $a_4=86$.

Соотношение имеет характеристическое уравнение $q^5-3q^4+2q^3-6q^2+q-3=0$, сводимое к виду $(q-3)(q^2+1)^2=0$ с простым действительным корнем $q_1=3$ и двумя комплексными корнями второй кратности $q_2=i$ и $q_3=-i$. Первому корню соответствует решение $C_1 3^n$, поскольку его кратность равна единице.

Комплексные корни $q_2=i$ и $q_3=-i$ сначала представим в тригонометрической форме

$q_2=i=|i|(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; $q_3=-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$, и, учитывая второй порядок кратности этих корней, поставим им в соответствие решения вида $(C_2+C_3n)\cos\frac{\pi n}{2}$ и $(C_4+C_5n)\sin\frac{\pi n}{2}$. Складывая соответствующие всем трем корням решения получаем общее решение $R_0=a_n=C_1 3^n+(C_2+C_3n)\cos\frac{\pi n}{2}+(C_4+C_5n)\sin\frac{\pi n}{2}$.

Последовательно подставляя в последнее соотношение значения переменной n от 1 до 4, получаем систему линейных уравнений относительно пока еще неизвестных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5

$$\begin{cases} 3C_1+C_4+C_5=5 \\ 9C_1-C_2-2C_3=6 \\ 27C_1-C_4-3C_5=23 \\ 81C_1+C_2+4C_3=86 \end{cases}$$

, откуда $C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=1$, а потому начальным условиям исходной задачи удовлетворяет решение вида $a_n=3^n+(1+n)\cos\frac{\pi n}{2}+(1+n)\sin\frac{\pi n}{2}$.

6. Простейшие рекуррентные последовательности и связанные с их свойствами приемы суммирования

Арифметическая прогрессия – последовательность, всякий член которой , начиная со второго , равен предыдущему члену, сложенному с некоторым постоянным числом d, называемым разностью арифметической прогрессии.

Таким образом, арифметическая прогрессия задана соотношением вида $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + d}$.

Ясно, что при этом верна цепь равенств $a_n = a_{n-1} + d = (a_{n-2} + d) + d = a_{n-2} + 2d = a_{n-3} + 3d = \ldots = a_1 + (n-1)d$, что дает так называемую **формулу общего члена арифметической прогрессии**

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d} \qquad \textbf{(16)},$$

позволяющую установить значение любого члена по его номеру и первому члену прогрессии.

Согласно определению, для арифметической прогрессии при натуральных t и n верны при $t<n$ равенства $a_n = a_{n-t} + td = a_{n+t} - td$, откуда вытекает так называемое характеристическое свойство арифметической прогрессии:

Всякий член арифметической прогрессии равен полусумме (среднему арифметическому) равноотстоящих от него членов той же прогрессии, то есть

$$a_n = \frac{a_{n+t} + a_{n-t}}{2}.$$

Аналогично можно показать, что при условии $t<n$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{a_n + a_s = a_{n-t} + a_{s+t}},$$

то есть **при сохранении суммы номеров у двух членов арифметической прогрессии сумма членов также не изменяется.**

Используем этот результат, почленно складывая два представления суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ и $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1$. Получим равенство $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1)$, где все выражения в скобках равны между собой, а потому имеем $2S_n = (a_1 + a_n)n$ или окончательно с учетом равенства (16)

$$\mathbf{S_n} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2} \qquad \textbf{(17)}.$$

Кроме того, на основании той же формулы (16) справедливо такое полезное утверждение: **данное число x является элементом арифметической прогрессии с первым членом** a_1 **и разностью** d **тогда и только тогда, когда значение выражения** $\frac{x - a_1}{d} + 1$ **будет натуральным числом** (в этом случае оно и равно номеру элемента прогрессии, равного x).

Часто при подсчете сумм определенного вида оказываются полезными следующие два равенства**:** если члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ с разностью d не равны нулю, то

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n} \quad при \quad натуральном \quad n \geq 2;$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_p} + \frac{1}{a_2 \cdot \ldots \cdot a_p a_{p+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{n-p+1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} a_n} = \frac{1}{(p-1)d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{p-1}} - \frac{1}{a_{n-p+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} a_n}\right)$$

$$при \quad натуральных \quad n \geq p;$$

Доказательство. При n=2 левая и правая части $1^{\underline{го}}$ равенства совпадают и тождественно равны. Допустим, что равны они и при n=к, то есть верно утверждение:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{к-1}a_к}=\frac{к-1}{a_1a_к}$$

Опираясь на сделанное предположение, докажем, что из него следует справедливость

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{к-1}a_к}+\frac{1}{a_кa_{к+1}}=\frac{к}{a_1a_{к+1}}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{к-1}a_к}+\frac{1}{a_кa_{к+1}}=\frac{к-1}{a_1a_к}+\frac{1}{a_кa_{к+1}}=\frac{a_{к+1}(к-1)+a_1}{a_1a_кa_{к+1}}=\frac{(a_к+d)(к-1)+a_1}{a_1a_кa_{к+1}}=$$
$$=\frac{a_к(к-1)+(d(к-1)+a_1)}{a_1a_кa_{к+1}}=\frac{a_к(к-1)+a_к}{a_1a_кa_{к+1}}=\frac{к}{a_1a_{к+1}}.$$

С учетом последнего результата согласно аксиоме математической индукции первое равенство доказываемого утверждения считаем доказанным. При этом очевидно, что уже доказанное первое равенство является частным случаем второго при p=2, а потому их доказательства аналогичны друг другу.

Пример№7. Вычислить сумму *S* вида

$$\frac{1}{2\cdot5\cdot8\cdot11}+\frac{1}{5\cdot8\cdot11\cdot14}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)(3n+8)}\quad.$$

По структуре сумма *S* совпадает с правой частью доказанного нами второго равенства, так как ее слагаемые представляют собой дроби с числителем, равным единице, в знаменателях которых находятся произведения четырех последовательных членов арифметической прогрессии(то есть p=4) с разностью d=3, причем отличаются соседние знаменатели лишь одним множителем.

Поэтому, используя второе из доказанных равенств, представляем сумму *S* в виде произведения дроби $\dfrac{1}{(p-1)d}$ на разность двух дробей, получаемых из первого и последнего слагаемых исходной суммы удалением из их знаменателей члена арифметической прогрессии с наибольшим (в первом слагаемом) и наименьшим (в последнем слагаемом) номерами.

Отсюда получим, что $S=\dfrac{1}{(4-1)3}\left(\dfrac{1}{2\cdot5\cdot8}-\dfrac{1}{(3n+2)(3n+5)(3n+8)}\right)$ и остается лишь выполнить упрощение результата.

Помимо доказанных выше двух равенств методом математической индукции легко доказать, что для арифметической прогрессии с неотрицательными членами справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Геометрической прогрессией называют последовательность $\{b_n\}$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему элементу той же последовательности, умноженному на некоторое постоянное число q, называемое знаменателем данной геометрической прогрессии.

Таким образом, верно равенство $b_n= b_{n-1}q$ при всяком натуральном $n \geq 2$.

Тогда $b_n= b_{n-1}\, q= (b_{n-2}\, q)\, q= b_{n-2}\, q^2= b_{n-3}\, q^3=...= b_1\, q^{n-1}$ и мы получили так называемую формулу общего члена геометрической прогрессии

$$\boldsymbol{b_n= b_1q^{n-1}} \quad .$$

С ее помощью легко показать, что $b_n= b_{n-k}q^{\ k}$ и $b_n= b_{n+k}/q^k$, а потому для всякой геометрической прогрессии при натуральных $n \geq k$ верно равенство

$$b_n^{\ 2}= b_{n-k}\, b_{n+k} \quad ,$$

называемое **характеристическим свойством геометрической прогрессии**.

Пусть рассматривается сумма n первых членов геометрической прогрессии $S_n=b_1+b_2+...+b_n$. Выразив с помощью формулы общего члена все слагаемые суммы через b_1, получим $S_n=b_1(1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1})$.

Умножая обе части последнего равенства на выражение $1-q$ и заметив, что при этом $(1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1})(1- q)=1- q^n$, получим $S_n(1-q)=b_1(1- q^n)$, откуда вытекает формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \qquad (18) \ .$$

Ясно, что при условии $|\ q\ |<1$можно найти сумму всех членов прогрессии в виде $S=\frac{b_1}{1-q}$, так как n неограниченно растет, что влечет за собой устремление значения выражения q^n к нулю.

Последовательность Фибоначчи.

Последовательность $\{f_n\}$ чисел 1,1,2,3,5,8,13,…, два первых члена которой равны единице, а каждый из последующих членов равен сумме двух предыдущих (то есть выполняется рекуррентное соотношение $f_{n+2}= f_{n+1}+ f_n$), называется **последовательностью или рядом Фибоначчи.**

Поскольку она задана линейным однородным соотношением второго порядка, с использованием изложенной ранее теории легко, решив соотношение $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n=0$, вывести формулу общего члена последовательности Фибоначчи, называемую формулой Бинэ:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Важной и далеко не единственной интересной особенностью последовательности Фибоначчи является то, что многие действия с ее членами легко сводимы к действиям над их номерами (индексами) .В частности , верны тождества

1. $f_{m+n}=f_{m-1}f_n+f_mf_{n+1}$;
2. $f_{2n}=f_n(f_{n-1}+f_{n+1})$;
3. $f_{3n}=(f_{n+1})^3+f_n^3-(f_{n-1})^3$;
4. $1+f_2+f_3+\ldots f_{2n}=f_{2n+1}$;
5. $f_1+f_2+f_3+\ldots f_n=f_{n+2}-1$;
6. $f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots f_n^2=f_nf_{n+1}$;
7. $f_1f_2+f_2f_3+f_3f_4+\ldots f_{2n-1}f_{2n} = f_{2n}^2$.

7. Метод неопределенных коэффициентов и другие приемы суммирования.

Пусть требуется найти сумму S конечного числа первых членов последовательности, все элементы которой являются значениями какого-то одного и того же многочлена P_1 от натуральной переменной n , в роли которой выступает номер члена упомянутой последовательности. Кроме того, и количество суммируемых слагаемых выражается многочленом P_2 той же самой переменной n.

Понятно, что в этом случае искомая сумма S , будет представлять собою многочлен $M(n)$ переменной n, степень которого не превосходит суммы степеней многочленов P_1 и P_2.

Записав $M(n)$ с использованием неопределенных коэффициентов, находим его с помощью одноименного метода.

Пример№8. Вычислить сумму $S =1^2+2^2+3^2+\ldots+ n^2$.

Ясно, что сумма S относится к описанному выше виду, а именно $P_1= n^2$ и $P_2= n$, где n-номер слагаемого в искомой сумме.

Действительно , каждому из слагаемых может быть формально придан вид многочлена от переменной n. Например, $1^2=(n-(n-1))^2$.

Рассмотрим теперь многочлен $M(к)$, такой, что для натуральных значений переменной $к$ верно тождественное равенство $\boldsymbol{M(к)-M(к-1)=к^2}$ (Δ2) , в правой части которого находится формообразующее слагаемое искомой суммы. При этом степень многочлена М(к) считаем не выше суммы степеней многочленов P_1 и P_2, то есть не выше третьей. Тогда многочлен $M(к)=Ак^3+Вк^2+Ск+E$, где A,B,C,E пока еще не определены.

Используя равенство ($\Delta 2$) ,замечаем, что справедливо представление $S=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=M(1)-M(0)+M(2)-M(1)+\ldots+M(n)-M(n-1)=M(n)-M(0)=An^3+Bn^2+Cn$.

При этом $M(к)-M(к-1)=Ак^3+Вк^2+Ск+E-(A(к-1)^3+B(к-1)^2+C(к-1)+E)=к^2$, то есть после упрощений $3Aк^2+(-3A+2B)к+A-B+C=к^2$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3A=1 \\ -3A+2B=0, \\ A-B+C=0 \end{cases} \quad \text{получаем } A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=\frac{1}{6}.$$

Таким образом, $S=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Отметим, что тот же результат легко получить, решив неоднородное линейное рекуррентное соотношение $a_{n+1}-a_n=n^2$ и заметив, что сумма $S=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ представима в виде a_n-a_0.

Пусть теперь нам требуется просуммировать парные произведения членов двух арифметических прогрессий $a_n=a_1+d(n-1)$ и $b_n=b_1+t(n-1)$ с одинаковыми номерами. Проводим преобразования

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1b_1+(a_1+d)(b_1+t)+(a_1+2d)(b_1+2t)+\ldots+(a_1+(n-1)d)(b_1+(n-1)t)=$$
$$=na_1b_1+(a_1t+b_1d)(1+2+3+\ldots+(n-1))+dt(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)=$$
$$=na_1b_1+(a_1t+b_1d)\frac{n(n-1)}{2}+dt\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Получаем формулу
$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i = ka_1b_1+(a_1t+b_1d)\frac{k(k-1)}{2}+dt\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}. \quad \textbf{(19)}$$

Решим теперь аналогичную задачу для ситуации, когда одна прогрессия $a_n=a_1+d(n-1)$ является арифметической, а вторая прогрессия $b_n=b_1q^{n-1}$ геометрической.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i = a_1b_1+(a_1+d)b_1q+(a_1+2d)b_1q^2+\ldots+(a_1+(k-1)d)b_1q^{k-1}=$$
$$=a_1b_1(1+q+q^2+\ldots+q^{k-1})+db_1q(1+2q+3q^2+4q^3+\ldots+(k-1)q^{k-2})=$$
$$=a_1b_1\frac{1-q^k}{1-q}+db_1q(1+q+q^2+\ldots+q^{k-1})'=a_1b_1\frac{1-q^k}{1-q}+db_1q\left(\frac{1-q^k}{1-q}\right)'=$$
$$=a_1b_1\frac{1-q^k}{1-q}+db_1q\frac{(k-1)q^k-kq^{k-1}+1}{(1-q)^2}$$

Получили формулу
$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i = a_1b_1\frac{1-q^k}{1-q}+db_1q\frac{(k-1)q^k-kq^{k-1}+1}{(1-q)^2}. \quad \textbf{(20)}$$

Последние две формулы требуют, чтобы было известно количество слагаемых k, которое иногда приходится предварительно искать.

Пример№9 . Найти сумму S вида $4\cdot5+5\cdot6+\ldots+(n+2)(n+3)$.

Здесь мы имеем дело с суммой парных произведений соответствующих членов арифметических прогрессий $a_n=4+1(n-1)$ и $b_n=5+1(n-1)$.

Таким образом, $a_1=4$, $d=1$, $b_1=5$, $t=1$ – параметры прогресий.

Найдем k, например, из условия $a_к= n+2$. Имеем $a_к=a_1+d(k-1)=4+(k-1)=3+k=n+2$, откуда $k=n-1$.

Тогда в полном соответствии с формулой (19) получаем $S= 4\cdot5+5\cdot6+\ldots+(n+2)(n+3)=$

$=(n-1)\cdot4\cdot5+(4\cdot1+5\cdot1)\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+1\cdot1\cdot\dfrac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$, откуда окончательно имеем

$$S=20n+\frac{9}{2}(n-1)(n-2)+\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}.$$

В тригонометрии также известны довольно компактные формулы суммирования.

В частности, при любом натуральном n верны и могут быть доказаны, например, методом математической индукции такие тождества:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2};$$

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}.$$

Они являются частными случаями тождеств более общего характера:

$$\sin x+\sin(x+h)+\sin(x+2h)+\ldots+\sin(x+nh)=\frac{1}{\sin\frac{h}{2}}\sin\frac{(n+1)h}{2}\sin\frac{2x+nh}{2};$$

$$\cos x+\cos(x+h)+\cos(x+2h)+\ldots+\cos(x+nh)=\frac{1}{\sin\frac{h}{2}}\sin\frac{(n+1)h}{2}\cos\frac{2x+nh}{2}$$

Легко заметить, что и рекуррентные последовательности, заданные линейными соотношениями, суммировать столь же просто.

Так в рассмотренном ранее примере №6 рассматривалось линейное соотношение $a_{n+5}-3a_{n+4}+2a_{n+3}-6a_{n+2}+a_{n+1}-3a_n=0$ с начальными условиями $a_1=-5$, $a_2=6$, $a_3=23$, $a_4=86$. Найдем сумму n первых членов последовательности a_n, являющейся решением этого соотношения.

Ранее в примере №6 нами уже было получено, что $a_n=3^n+(1+n)\cos\dfrac{\pi n}{2}+(1+n)\sin\dfrac{\pi n}{2}$, откуда мы легко достигаем нужного результата:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} 3^i + \sum_{i=1}^{n}(1+i)(\cos\frac{\pi i}{2} + \sin\frac{\pi i}{2}) = \frac{3^n - 1}{2} + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}(1+i)\cos\frac{\pi(2i-1)}{4}.$$

Упражнения для отработки изложенных выше приемов и алгоритмов.

Найти частное решение линейного рекуррентного соотношения:

№1 $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, если $a_1 = 7, a_2 = 17$.

№2 $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0$, если $a_1 = -3, a_2 = -21$.

№3 $a_{n+2} + 8a_{n+1} + 7a_n = 0$, если $a_1 = -9, a_2 = 51$.

№4 $a_{n+2} + 8a_{n+1} + 16a_n = 0$, если $a_1 = -6, a_2 = 16$.

№5 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, если $a_1 = 5, a_2 = 8$.

№6 $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$, если $a_1 = -2, a_2 = -2$.

№7 $a_{n+2} + 10a_{n+1} + 25a_n = 0$, если $a_1 = -5, a_2 = 0$.

№8 $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$, если $a_1 = 6, a_2 = 27$.

Найти общее решение неоднородного рекуррентного соотношения.

№9 $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2^n(n+7)$.

№10 $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 2^n(n+1)$.

№11 $a_{n+2} + 8a_{n+1} + 16a_n = 2^n(n^2 + n - 1)$.

№12 $a_{n+2} + 8a_{n+1} + 7a_n = (-1)^n(n-2)$.

№13 $a_{n+2} + 10a_{n+1} + 25a_n = (-5)^n$

№14 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n^2 + n$.

№15 $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 5^n(n^2 - 4)$.

№16 $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 4^n(n-1)$.

Вычислить сумму методом неопределенных коэффициентов:

№17 $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + (n-1)n^2$

№18 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$

№19 $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \dfrac{n(n+1)}{2}$

№20 $2 + 7 + 14 + \ldots + (n^2 + 2n - 1)$

№21 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$

Вычислить сумму :

№22. $1 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + \ldots + (3n-2)(2n-1)$

№23. $3 \cdot 5 + 9 \cdot 7 + 27 \cdot 9 + \ldots + (2n+3) \cdot 3^n$

№24. $2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 13 + \ldots + (n+1)(3n+4)$

№25. $1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 12 + \ldots + (3n-2) \cdot 3 \cdot 2^{n-1}$

№26. $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

№27. $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{(n+4)(n+5)}$

№28. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

№29. $1+2\cdot\dfrac{n+1}{n}+3\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2+\ldots+n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n-1}$

№30. $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}$

Докажите ,что:

№31. $\dfrac{1}{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_p}+\dfrac{1}{a_2\cdot\ldots\cdot a_pa_{p+1}}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-p+1}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}a_n}=\dfrac{1}{(p-1)d}\left(\dfrac{1}{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{p-1}}-\dfrac{1}{a_{n-p+2}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}a_n}\right)$

при натуральных $n\ge p$ *для арифметической прогресии* a_n *с ненулевыми членами и разностью прогресии* d.

№32. $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ *для арифметической прогрессии* a_n *с положительными членами.*

№33. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}$;

№34. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{(n+1)x}{2}$.

№35. $\sin x+\sin(x+h)+\sin(x+2h)+\ldots+\sin(x+nh)=\dfrac{1}{\sin\frac{h}{2}}\sin\dfrac{(n+1)h}{2}\sin\dfrac{2x+nh}{2}$;

№36. $\cos x+\cos(x+h)+\cos(x+2h)+\ldots+\cos(x+nh)=\dfrac{1}{\sin\frac{h}{2}}\sin\dfrac{(n+1)h}{2}\cos\dfrac{2x+nh}{2}$

№37. Докажите, что для членов последовательности Фибоначчи верны равенства:

1. $f_{m+n}=f_{m-1}f_n+f_mf_{n+1}$;
2. $f_{2n}=f_n(f_{n-1}+f_{n+1})$;
3. $f_{3n}=(f_{n+1})^3+f_n^3-(f_{n-1})^3$;
4. $1+f_2+f_3+\ldots f_{2n}=f_{2n+1}$;
5. $f_1+f_2+f_3+\ldots f_n=f_{n+2}-1$;
6. $f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots f_n^2=f_nf_{n+1}$;
7. $f_1f_2+f_2f_3+f_3f_4+\ldots f_{2n-1}f_{2n}=f_{2n}^2$.