ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

МЕТОД КООРДИНАТ.
ВВЕДЕНИЕ В ВЕКТОРНУЮ АЛГЕБРУ

Н.С. Анофрикова, О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических специальностей и направлений подготовки

Саратов 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ... 3
Глава 1. МЕТОД КООРДИНАТ ... 4
1.1. НАПРАВЛЕННЫЕ ОТРЕЗКИ ... 4
1.2. **ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ** ... 5
1.3. **ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ** ... 6
1.4. **ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ** ... 7
1.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ ... 8
1.6. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ ... 9
1.7. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ... 10
1.8. **СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ** ... 11
Контрольные вопросы к главе 1 ... 11
Глава 2. ВВЕДЕНИЕ В ВЕКТОРНУЮ АЛГЕБРУ ... 13
2.1. **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ** ... 13
2.2. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ ... 14
2.3. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА ... 15
2.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ ... 16
2.5. **РАДИУС-ВЕКТОР ТОЧКИ. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ** ... 19
2.6. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ ... 20
2.7. **РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ** ... 21
2.8. БАЗИС И РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ ... 22
2.9. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ЕГО БАЗИС ... 22
2.10. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ ... 25
2.11. **ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ТРОЙКИ ВЕКТОРОВ** ... 28
2.12. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ ... 28
2.13. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ ... 31
Контрольные вопросы к главе 2 ... 34
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ... 36
ОТВЕТЫ ... 39
Список рекомендованной литературы ... 40

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и программой преподавания курса «Математика» для студентов географического факультета и Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение основными численными методами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Цель пособия – помочь студентам первого курса географического факультета и Института химии СГУ освоить первоначальные понятия векторной алгебры и получить практические навыки при решении типовых задач по данной теме.

Пособие содержит следующие главы: метод координат, введение в векторную алгебру. Более подробное содержание приведено в оглавлении. В пособии кратко изложены необходимые теоретические сведения и формульные соотношения, основной материал иллюстрируют примеры. В конце каждой главы приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала. Задачи для самостоятельного решения, приведенные в конце пособия, позволят обучающимся научиться применять полученные знания на практике, тем самым будут способствовать лучшему пониманию и усвоению материала. А ответы помогут проконтролировать правильность решения задач.

Пособие может быть полезно при изучении данной темы студентами нематематических специальностей и направлений подготовки, изучающих высшую математику.

Глава 1. МЕТОД КООРДИНАТ

Рассмотрим способ, который позволяет определять положение точек на плоскости с помощью чисел и называется *методом координат.*

1.1. НАПРАВЛЕННЫЕ ОТРЕЗКИ

<u>Определение 1.1.</u> Упорядоченная пара точек A и B называется *направленным отрезком* $\overrightarrow{AB}$. Первая точка A называется началом направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, а вторая точка B – его концом (рис. 1.1).

Рис. 1.1

В обозначении направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ порядок точек определяется порядком их записи: A – первая точка, B – вторая. Если точки A и B различны, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *ненулевым*, а если точки A и B совпадают, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *нулевым.*

<u>Определение 1.2.</u> *Осью* называется прямая линия, на которой фиксировано положительное направление и выбран масштабный отрезок.

<u>Определение 1.3.</u> *Координатой* ненулевого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, лежащего на оси l, называется число x, модуль которого равен длине направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, измеренной масштабным отрезком оси l; оно положительно, если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ и ось l имеют одинаковое направление, и отрицательно в противном случае.

<u>Определение 1.4.</u> *Осью координат* называется ось, на которой фиксирована точка O, называемая началом координат.

<u>Определение 1.5.</u> *Координатой* x_1 точки M, лежащей на оси координат, называется координата направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1.2, а, б).

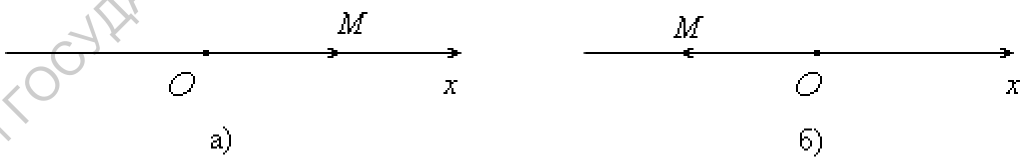

Рис. 1.2

ТЕОРЕМА 1.1. Координата x направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, заданного двумя точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ оси координат, вычисляется по формуле

$$x = x_2 - x_1.$$

ТЕОРЕМА 1.2. Расстояние d между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ оси координат, вычисляется по формуле

$$d = |x_2 - x_1|.$$

1.2. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат: горизонтальную – x и вертикальную – y, имеющие началом точку пересечения O и равные единицы масштаба для измерения длин. Положительные направления осей выбираются так, что поворот оси Ox на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении, т.е. в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, совмещает полуось положительных значений x с полуосью положительных значений y. Горизонтальная ось называется осью Ox или осью абсцисс, вертикальная – осью Oy или осью ординат. Построенная таким образом система координат называется *декартовой прямоугольной или прямоугольной системой координат* на плоскости.

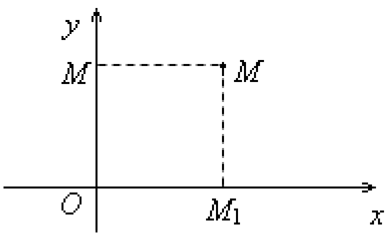

Рис. 1.3

Пусть M – произвольная точка плоскости, не лежащая ни на одной оси координат. Опустим из точки M перпендикуляры на оси координат. Обозначим точки пересечения с осью Ox – M_1, а с осью Oy – M_2 (рис. 1.3). Точки M_1 и M_2 – *ортогональные проекции* точки M на оси координат. Пусть x – координата точки M_1 на оси Ox, а y – координата точки M_2 на оси Oy.

Числа x и y называются *декартовыми или прямоугольными координатами* точки M. Первая координата x – абсцисса точки M, вторая координата y – ордината точки M.

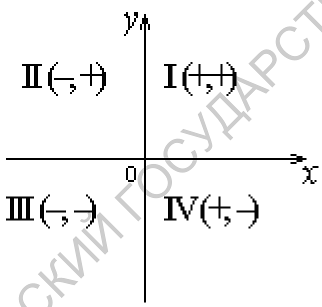

Рис. 1.4

Точка M с координатами x, y обозначается $M(x;y)$. При помощи прямоугольной системы координат на плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех упорядоченных пар чисел. Координатные оси разделяют всю плоскость на четыре части (рис. 1.4), называемые *четвертями*. Четверти нумеруются по определенному правилу. Точки, лежащие в каждой из них, характеризуются знаком своих координат. Ординаты точек, лежащих на оси Ox, равны нулю $(y=0)$. Абсциссы точек, лежащих на оси Oy, равны нулю $(x=0)$.

1.3. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Вычисление расстояния между двумя точками

ТЕОРЕМА 1.3. Для любых точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ плоскости расстояние d между ними определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1.1)$$

Пример. Определить расстояние между точками $A(3;8)$ и $B(-5;14)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (1.1), получим

$$d = \sqrt{(-5-3)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{64+36} = 10\,.$$

Вычисление площади треугольника по координатам его вершин

Пусть даны вершины треугольника $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ (рис. 1.5). Пусть $CA = d_1$, $CB = d_2$ и ψ – угол между отрезками CA и CB. Площадь треугольника равна половине произведения длин двух сторон на синус угла между ними, следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|d_1\cdot d_2\cdot \sin\psi\right|.$$

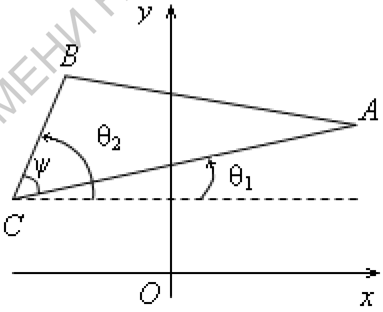

Рис. 1.5

Пусть θ_1 – угол между отрезком CA и осью Ox, θ_2 – угол между отрезком CB и осью Ox. Так как $\psi = \theta_2 - \theta_1$, то

$$\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2\cdot\sin\psi = \frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2\cdot\sin(\theta_2 - \theta_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(d_1\cdot\cos\theta_1\cdot d_2\cdot\sin\theta_2 - d_2\cdot\cos\theta_2\cdot d_1\sin\theta_1).$$

Учитывая, что $x_2 - x_1 = d\cdot\cos\theta$, $y_2 - y_1 = d\cdot\sin\theta$ (эти формулы выражают проекции произвольного отрезка на координатные оси через его длину и угол между отрезком и осью Ox), получим, что

$$d_1\cdot\cos\theta_1 = x_1 - x_3,\quad d_1\cdot\sin\theta_1 = y_1 - y_3,$$
$$d_2\cdot\cos\theta_2 = x_2 - x_3,\quad d_2\cdot\sin\theta_2 = y_2 - y_3.$$

Таким образом, выражение для площади треугольника имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|(x_1 - x_3)\cdot(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)\cdot(y_1 - y_3)\right|. \qquad (1.2)$$

В частном случае, если вершина C лежит в начале координат (т.е. $x_3 = y_3 = 0$), $S = \pm\frac{1}{2}\cdot(x_1\cdot y_2 - x_2\cdot y_1)$.

Выражение (1.2) можно записать в более удобной форме с помощью определителя третьего порядка

$$S = \pm \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Определить площадь треугольника с вершинами $A(2;8)$, $B(10;2)$ и $C(-2;-4)$.

Решение.

Воспользовавшись формулой (1.2), получим

$$S = \frac{1}{2}\left|(2+2)(2+4)-(10+2)(8+4)\right| = \frac{1}{2}\left|24-144\right| = 60 \text{ (кв.ед.)}.$$

1.4. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Точку в пространстве можно задать с помощью чисел, если введена прямоугольная система координат, состоящая из трех взаимно перпендикулярных осей, которые пересекаются в одной точке, имеют равные единицы масштаба для измерения длин и занумерованы в определенном порядке.

К осям абсцисс Ox и ординат Oy плоскости добавляется ось аппликат – Oz. При этом положительное направление оси Oz выбирается таким образом, чтобы поворот от оси Ox к оси Oy на угол, меньший π, совершался в направлении против часовой стрелки, если смотреть из какой-нибудь точки положительной полуоси Oz.

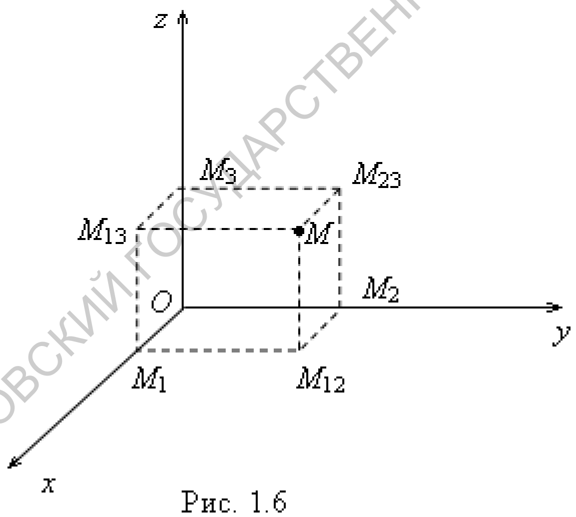

Рис. 1.6

Пусть M – произвольная точка пространства, а точки M_1, M_2, M_3 – ортогональные проекции точки M на оси координат (рис. 1.6). Числа $x = OM_1$, $y = OM_2$ и $z = OM_3$ – координаты точки M в заданной прямоугольной системе координат. Таким образом, точка в пространстве задается тремя координатами x, y, z и записывается $M(x; y; z)$.

Три координатные плоскости xOy, xOz и yOz разделяют пространство на восемь частей, называемых *координатными октантами*.

Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка пространства. Знаки координат точки определяют ее местоположение в координатном октанте:

$x > 0, y > 0, z > 0$ – точка M расположена в I октанте;
$x < 0, y > 0, z > 0$ – точка M расположена во II октанте;
$x < 0, y < 0, z > 0$ – точка M расположена в III октанте;
$x > 0, y < 0, z > 0$ – точка M расположена в IVоктанте;
$x > 0, y > 0, z < 0$ – точка M расположена в Vоктанте;
$x < 0, y > 0, z < 0$ – точка M расположена в VI октанте;
$x < 0, y < 0, z < 0$ – точка M расположена в VII октанте;
$x > 0, y < 0, z < 0$ – точка M расположена в VIII октанте.

1.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

При переходе от системы координат Oxy к новой системе $O_1x'y'$, у которой направление осей координат прежнее, а началом является точка $O_1(a;b)$ (рис. 1.7), связь между старыми и новыми координатами для некоторой точки M плоскости определяется формулами

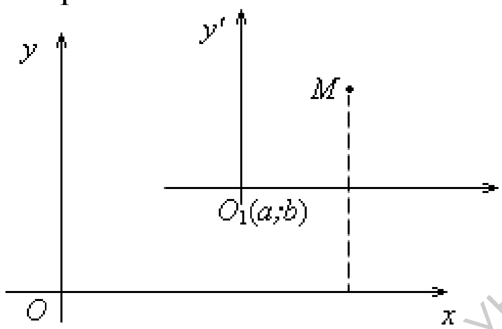

Рис. 1.7

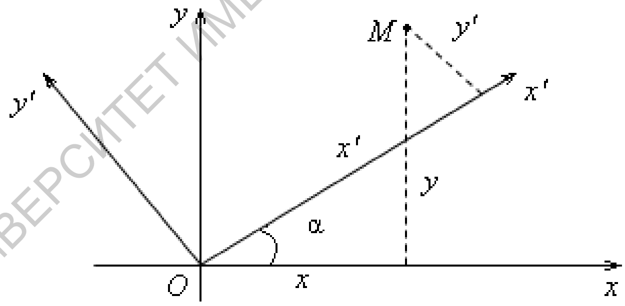

Рис. 1.8

$$x = x' + a,\ y = y' + b \qquad (1.3)$$

или

$$x' = x - a,\ y' = y - b. \qquad (1.4)$$

С помощью формул (1.3) старые координаты выражаются через новые, а с помощью формул (1.4) – новые через старые.

При повороте осей координат на угол α (начало координат прежнее, причем α отсчитывается против часовой стрелки; рис. 1.8) зависимость между старыми координатами x, y и новыми x', y' определяется следующими формулами:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \qquad (1.5)$$

или

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \qquad (1.6)$$

В случае пространства формулы перехода при параллельном переносе осей будут иметь следующий вид:

$$x = x' + a,\ \ y = y' + b,\ \ z = z' + c \qquad (1.7)$$

или

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c. \tag{1.8}$$

При повороте координатных осей

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\}, \tag{1.9}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы, образуемые осью Ox соответственно с новыми осями Ox', Oy', Oz'; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – углы, образуемые соответственно осью Oy и осью Oz с новыми осями (или $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – образуемые новой осью Ox' соответственно со старыми осями Ox, Oy, Oz и т. д.).

1.6. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Для определения положения точки на плоскости иногда удобно пользоваться полярной системой координат.

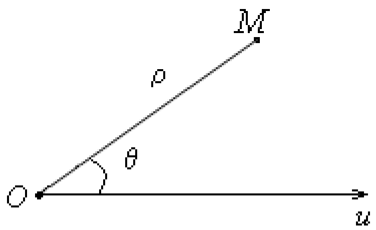

Рис. 1.9

Полярная система координат (рис. 1.9) определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из этой точки луча, называемого *полярной осью,* и масштаба для измерения длин.

Возьмем на плоскости точку M. Кроме задания полярной системы координат должно быть указано положительное направление вращения вокруг точки O (от полярной оси к лучу OM против часовой стрелки). Число $\rho = |OM|$ называется *полярным радиусом* и является первой координатой точки M, а число θ – *полярным углом* и является второй координатой точки M.

Определение 1.6. Полярный радиус и полярный угол точки называются *полярными координатами*.

Полярные координаты ρ, θ записываются в скобках после буквы, обозначающей точку: $M(\rho; \theta)$.

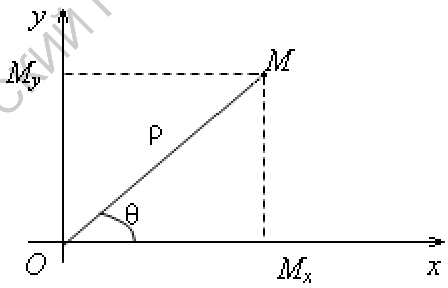

Рис. 1.10

Если точка M имеет полярные координаты $\rho > 0$ и $0 \le \theta < 2\pi$, то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(\rho, \theta + 2k\pi)$, где $k \in Z$.

Выведем формулу перехода от полярных координат к прямоугольным и обратно. Для простоты рассуждений рассмотрим частный случай, когда полюс полярной системы координат совпадает с началом прямоугольных координат, а полярная ось – с положительной полуосью абсцисс (рис. 1.10).

Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим через x и y прямоугольные координаты точки M, через ρ и θ – ее полярные координаты. Как известно, $x = OM_x$, $y = OM_y$. С другой стороны, $OM_x = \rho\cdot\cos\theta$, $OM_y = \rho\cdot\sin\theta$.

Поэтому

$$\begin{aligned} x &= \rho\cdot\cos\theta, \\ y &= \rho\cdot\sin\theta. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Обратно, зная прямоугольные координаты точки, можно определить ее полярные координаты по формулам

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \mathrm{tg}\theta &= y/x. \end{aligned} \tag{1.11}$$

В дальнейшем, если не оговорено особо, будем предполагать, что полюс совпадает с началом координат, а полярная ось – с положительным направлением оси абсцисс.

Примеры.

1. Найти полярные координаты точки $M(1;-\sqrt{3})$.

Решение.

На основании равенств (1.11) находим

$$\rho = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2,\ \mathrm{tg}\theta = -\sqrt{3}.$$

Очевидно, что точка M лежит в IV четверти и, следовательно, $\theta = 5\pi/3$. Таким образом, полярные координаты точки $M(2;5\pi/3)$.

2. Найти прямоугольные координаты точки $A(2\sqrt{2};3\pi/4)$, заданной своими полярными координатами.

Решение.

На основании равенств (1.10) имеем $x = 2\sqrt{2}\cos(3\pi/4) = -2$, $y = 2\sqrt{2}\sin(3\pi/4) = 2$.

Таким образом, прямоугольные координаты точки $A(-2;2)$.

1.7. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Пусть точка M имеет прямоугольные координаты $(x;y;z)$. Если Q – ортогональная проекция точки M на плоскость xOy, тогда *цилиндрическими координатами* точки M называются три числа $(\rho;\theta;z)$, где $(\rho;\theta)$ – полярные координаты точки $Q(x;y)$ в плоскости xOy.

Заметим, что $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ есть расстояние от точки $(0;0;z)$ до $M(x;y;z)$, т.е. расстояние от точки M до оси Oz (рис. 1.11).

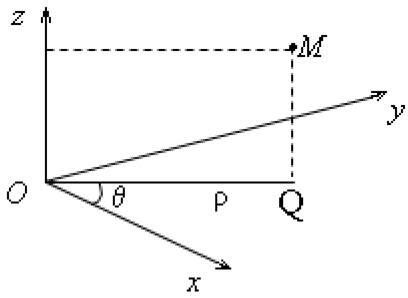

Рис. 1.11

Связь между цилиндрическими координатами и прямоугольными координатами одной и той же точки определяется формулами

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \tag{1.12}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}, \quad z = z \tag{1.13}$$

или обратно

$$x = \rho\cdot\cos\theta, \; y = \rho\cdot\sin\theta, \; z = z.$$

1.8. СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Пусть M – точка пространства, имеющая декартовы координаты $(x; y; z)$.

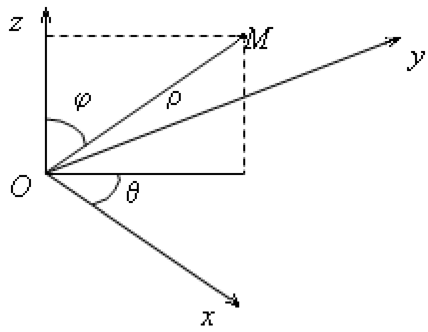

Рис. 1.12

Сферическими координатами точки M является тройка чисел ρ, θ и φ (рис. 1.12), определяемые следующим образом:

ρ – расстояние точки M от начала координат O,

θ – полярный угол,

φ – угол между положительным направлением оси Oz и лучом OM.

Формулы, связывающие сферические координаты с прямоугольными одной и той же точки, имеют следующий вид:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{1.14}$$
$$\cos\varphi = \frac{z}{\rho}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho}$$

или обратно

$$x = \rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta, \quad y = \rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta, \quad z = \rho\cdot\cos\varphi. \tag{1.15}$$

Контрольные вопросы к главе 1

1. Как вводится прямоугольная система координат на плоскости?
2. Что называется прямоугольными координатами точки плоскости?
3. По какой формуле вычисляется расстояние между двумя точками на плоскости?

4. По какой формуле находится площадь треугольника по координатам его вершин?
5. Как вводится прямоугольная система координат в пространстве?
6. Что называется прямоугольными координатами точки пространства?
7. Какие формулы используются для связи между старыми и новыми координатами точки плоскости в случае параллельного переноса осей координат?
8. Какие формулы используются для связи между старыми и новыми координатами точки плоскости в случае поворота осей координат?
9. Какие формулы используются для связи между старыми и новыми координатами точки плоскости в случае параллельного переноса и поворота осей координат?
10. Как вводится полярная система координат?
11. Что называется полярными координатами точки плоскости?
12. Какие формулы используются для перехода от прямоугольных координат точки к ее полярным координатам и обратно?
13. Что называется цилиндрическими координатами точки пространства?
14. Какие формулы используются для перехода от прямоугольных координат точки к ее цилиндрическим координатам и наоборот?
15. Что называется сферическими координатами точки пространства?
16. Какие формулы используются для перехода от прямоугольных координат точки к ее сферическим координатам и обратно?

Глава 2. ВВЕДЕНИЕ В ВЕКТОРНУЮ АЛГЕБРУ

Физические величины, которые характеризуются только числовым значением при выбранной системе единиц измерения, называются скалярными (масса, теплопроводность, электрическое сопротивление и т.д.) Величины, характеризующиеся не только числом, но и направлением в пространстве, называются векторными. Это такие величины механики и физики, как сила, ускорение, скорость, напряжённость электрического и магнитного полей.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение 2.1. *Связанным вектором* называется упорядоченная пара точек (A,B). Точка A называется *началом* вектора, точка B – *концом* вектора.

Обозначается $\overrightarrow{AB}$.

Если начало и конец связанного вектора совпадают, то вектор называется *нулевым*.

Определение 2.2. *Направлением* ненулевого связанного вектора $\overrightarrow{AB}$ называется направление луча, вершина которого совпадает с началом A и содержит его конец B. Направление нулевого связанного вектора считается произвольным.

Определение 2.3. *Модулем* (длиной) или абсолютной величиной ненулевого связанного вектора $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между его началом и концом.

Обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Определение 2.4. Два ненулевых связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *коллинеарными*, если прямые AB и CD параллельны или совпадают. Нулевой связанный вектор считается коллинеарным любому связанному вектору.

Обозначается $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

Коллинеарные связанные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, имеющие одинаковое направление, называют *сонаправленными* и обозначают $\overrightarrow{AB}\downarrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Коллинеарные связанные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, имеющие противоположное направление называют *противоположно направленными* и обозначают $\overrightarrow{AB}\downarrow\uparrow\overrightarrow{CD}$.

Определение 2.5. Два связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Обозначается $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Определение 2.6. *Свободным вектором* $\vec{a}$ называется множество всех равных между собой связанных векторов. Нулевым вектором – множество всех нулевых связанных векторов.

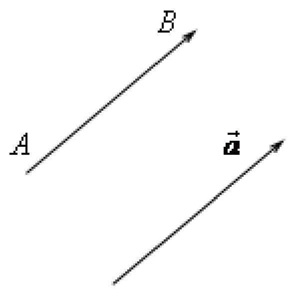

Рис. 2.1

Свободный вектор $\vec{a}$ часто обозначается и изображается любым из связанных векторов $\overrightarrow{AB}$ того множества связанных векторов, которым является вектор $\vec{a}$ (рис. 2.1). Построить свободный вектор $\vec{a}$ от точки A – значит построить связанный вектор $\overrightarrow{AB}$, входящий в множество связанных векторов, образующих вектор $\vec{a}$.

Длиной и направлением свободного вектора являются длина и направление любого его представителя. Отсюда следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, т.е. начало вектора может быть в любой точке пространства, но направление и длина фиксированы.

В дальнейшем, под словом “вектор” будем понимать “свободный вектор”.

Определение 2.7. Два вектора называются *коллинеарными*, если их представители с общим началом лежат на одной прямой, одинаково направлены и имеют равные длины.

Определение 2.8. Три вектора называются *компланарными*, если их представители с общим началом лежат в одной плоскости.

Определение 2.9. *Противоположным* для вектора $\vec{a}$ называется вектор той же длины, но противоположного направления $(-\vec{a})$.

Определение 2.10. *Единичным вектором* (ортом) вектора $\vec{a}$, называется такой вектор, который имеет то же направление, что и $\vec{a}$, и единичную длину.

Обозначается $\vec{a}^{\,0}$.

2.2. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Пусть в пространстве задана ось координат Ou и вектор $\overrightarrow{AB}$. Проведем через точки A и B прямые, перпендикулярные к оси.

Пусть A_1 и B_1 точки пересечения этих прямых с осью (рис. 2.2).

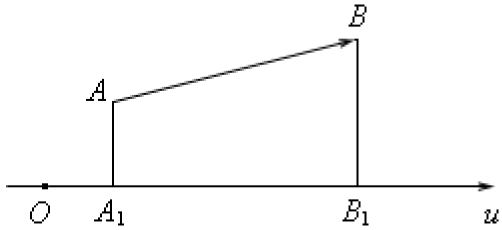

Рис. 2.2

Определение 2.11. *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ на ось Ou называется:

1) $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если направление вектора $\overrightarrow{AB}$ и оси Ou совпадают;

2) $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ в противном случае.

Обозначается $np_u\overrightarrow{AB}$.

Свойства проекции вектора на ось.

1. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

2. При умножении вектора на число, его проекция умножается на это же число.

3. Проекция суммы векторов на какую–либо ось равна сумме проекций на эту же ось слагаемых векторов.

4. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ou равна произведению длины вектора $\overrightarrow{AB}$ на косинус угла наклона вектора $\overrightarrow{AB}$ к оси Ou:

$$np_u\overrightarrow{AB} = \left|A_1B_1\right| \cdot \cos\varphi .$$

2.3. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Пусть на плоскости заданы прямоугольная система координат и произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть X – проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox,
а Y – проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Oy: $X = np_x\overrightarrow{AB}$, $Y = np_y\overrightarrow{AB}$.

Определение 2.12. Проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат определяют его положение на плоскости и называются *координатами вектора*.

Обозначается $\overrightarrow{AB} = (X;Y)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Для любых двух точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются формулой

$$X = x_2 - x_1; Y = y_2 - y_1.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если начало вектора $\overrightarrow{AB}$ совпадает с началом координат O, т.е. $x_1 = y_1 = 0$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны координатам его конца:

$$X = x_2; Y = y_2.$$

Замечание. В случае пространства рассматривается прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве, и к координатам вектора на плоскости добавляется координата $Z = z_2 - z_1$.

Пример. Даны точки $A(1;2;3)$ и $B(3;5;9)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

Р е ш е н и е.

По формулам теоремы 2.1. находим $X = 3 - 1 = 2$, $Y = 5 - 2 = 3$, $Z = 9 - 3 = 6$. Следовательно, $\overrightarrow{AB} = (X;Y;Z) = (2;3;6)$.

2.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Сложение векторов

Результат суммы двух векторов – вектор. Данная операция имеет в своей основе правило сложения сил и скоростей.

Суммой двух неколлинеарных векторов $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{BC}$ (рис. 2.3) является вектор, идущий из начала $\overline{a}$ в конец $\overline{b}$, если вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ ($\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$).

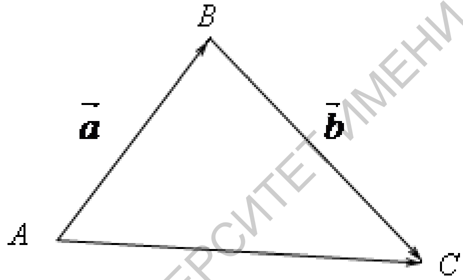

Рис. 2.3

Это правило сложения двух векторов называется *правилом треугольника*.

Пусть даны неколлинеарные векторы $\overline{a} = \overline{AD}$ и $\overline{b} = \overline{AB}$ (рис. 2.4). Их суммой будет являться вектор $\overline{AC}$, определяемый диагональю AC параллелограмма $ABCD$, построенного на представителях слагаемых как на сторонах.

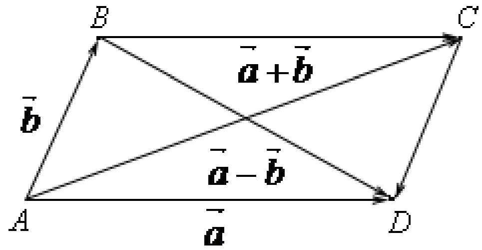

Рис. 2.4

Это правило сложения векторов называется *правилом параллелограмма*.

Чтобы найти сумму $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$ данных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, надо от произвольной точки пространства отложить первый вектор $\vec{a}_1$, затем от его конца отложить второй вектор $\vec{a}_2$, от конца второго вектора отложить третий вектор $\vec{a}_3$ и т.д. Вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец – с концом последнего, называется суммой данных векторов (рис. 2.5).

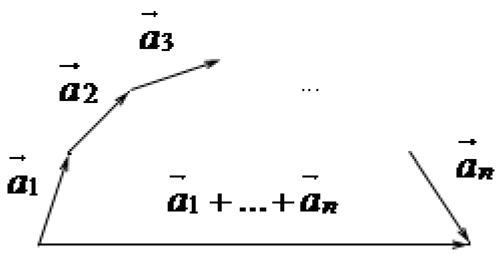

Рис. 2.5

Это правило сложения n векторов называется *правилом многоугольника*.

Свойства операции сложения векторов.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения).
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность сложения).
3. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ (сложение с противоположным вектором).
4. $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ (сложение с нуль-вектором).

Вычитание векторов

Определение 2.13. *Разностью* $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, который при сложении с вычитаемым вектором $\vec{b}$ дает уменьшаемый вектор $\vec{a}$: $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$.

Разность векторов $\vec{a} - \vec{b}$ совпадает с суммой $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

Геометрически разность $\vec{a} - \vec{b}$ неколлинеарных векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ представляет собой вектор $\overrightarrow{BD}$, определяемый диагональю BD параллелограмма $ABCD$: $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BD}$ (см. рис. 2.4).

Чтобы построить разность $\vec{a} - \vec{b}$ геометрически, надо отложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от общего начала, концы соединить отрезком и направить вектор разности в сторону уменьшаемого.

Умножение вектора на число

Определение 2.14. *Произведением* $\lambda\vec{a}$ (или $\vec{a}\lambda$) ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется новый вектор $\vec{c}$ такой, что:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на абсолютную величину числа λ: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\lambda|$
2) направление вектора $\vec{c}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если λ – положительное число, или противоположно ему, если λ – число отрицательное.

Если $\vec{a} = 0$ или $\lambda = 0$, то полагают по определению $\lambda\vec{a} = 0$.

Свойства операции умножения.

1. $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$.
2. $\mu(\lambda\vec{a}) = \lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$.
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
4. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.
5. Если $\lambda\vec{a} = 0$, то $\vec{a} = 0$ или $\lambda = 0$.
6. Если $\vec{a}$ имеет единичный вектор $\vec{a}^0$, то $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0$.
7. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

ТЕОРЕМА 2.2 (первый признак коллинеарности векторов). Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. $\lambda\vec{a} = \vec{b}$ (или $\vec{a} = \mu\vec{b}$).

Деление вектора на число

Определение 2.15. *Частным* от деления вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\vec{x}$, произведение которого на делитель λ дает делимый вектор $\vec{a}$: $\lambda\vec{x} = \vec{a}$. Частное $\dfrac{\vec{a}}{\lambda}$ совпадает с произведением $\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\vec{a}$.

Длина частного $\dfrac{\vec{a}}{\lambda}$ равна частному от деления длины вектора $\bar{a}$ на абсолютную величину числа λ: $\left|\dfrac{\vec{a}}{\lambda}\right| = \dfrac{|\vec{a}|}{|\lambda|}$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, а если λ – положительное число, и противоположно ему, если λ – число отрицательное.

Свойства операции деления вектора на число:

1. $\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{\lambda} = \dfrac{\vec{a}}{\lambda} + \dfrac{\vec{b}}{\lambda}$. 2. $\alpha \cdot \dfrac{\vec{a}}{\lambda} = \dfrac{\alpha \cdot \vec{a}}{\lambda}$. 3. $\dfrac{\vec{a}}{\mu} : \alpha = \dfrac{\vec{a}}{\alpha \cdot \mu}$.

Пример. Пусть AA_1 – медиана треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.

Решение.

По правилу сложения векторов имеем $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$, а с другой стороны, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1}$. Складывая эти выражения, получим $2\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CA_1}$. Но векторы $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ равны по модулю и противоположны по направлению, значит, их сумма равна нулю. Тогда $\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.

2.5. РАДИУС-ВЕКТОР ТОЧКИ. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Зафиксируем в пространстве произвольную точку O и назовем ее началом.

Определение 2.16. *Радиус-вектором* произвольной точки M называется вектор $\overrightarrow{OM}$.

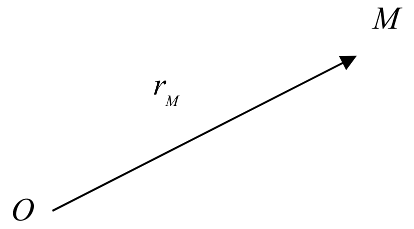

Рис. 2.6

Радиус-вектор точки M обозначается через r_M или $\vec{r}_M$, т.е. $r_M = \overrightarrow{OM}$ (рис. 2.6).

Если выбрано начало, то между всеми точками пространства и всеми радиус-векторами установлено взаимно однозначное соответствие: каждой точке M отвечает единственный радиус-вектор r_M, а каждому радиус-вектору r_M отвечает единственная точка M – его конец.

Выражение вектора через радиус-векторы его конца и начала

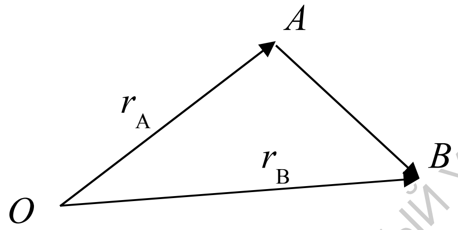

Рис. 2.7

Пусть выбрано начало O и дан вектор $\overrightarrow{AB}$. Обозначим радиус-векторы его начала и конца через r_A, r_B (рис. 2.7). Из треугольника AOB получаем выражение вектора через радиус-векторы его конца и начала

$$\overrightarrow{AB} = r_B - r_A,$$

т.е. всякий вектор в пространстве равен разности радиус-векторов его конца и начала.

Деление отрезка в данном отношении

Пусть выбрано начало O и дан вектор $\overrightarrow{AB}$, радиус-векторы начала и конца отрезка r_A, r_B, число $\lambda \neq -1$. Разделить отрезок AB в отношении λ – означает найти такую точку M на отрезке или его продолжении, что $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda$. Определим радиус-вектор r_M точки M.

Для решения задачи выразим векторы $\overrightarrow{AM} = r_M - r_A$, $\overrightarrow{MB} = r_B - r_M$. Отношение этих коллинеарных векторов по условию равно λ, т.е.

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}, \quad r_M - r_A = \lambda(r_B - r_M).$$

Отсюда получается формула деления отрезка в данном отношении:

$$r_M = \frac{r_A + \lambda r_B}{1 + \lambda}.$$

Середина отрезка

Рассмотрим частный случай, когда точка M находится в середине отрезка. В этом случае $\lambda = 1$. Подставляя это значение в формулу деления отрезка в данном отношении, получаем выражение радиус-вектора середины отрезка:

$$r_M = \frac{r_A + r_B}{2}.$$

Пример. Доказать, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Решение.

Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда его стороны AB и CD равны и параллельны: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Выражая эти векторы через радиус-векторы вершин параллелограмма, получим $r_B - r_A = r_C - r_D$ или $r_B + r_D = r_C + r_A$. Отсюда

$$\frac{r_B + r_D}{2} = \frac{r_C + r_A}{2}.$$

Последнее равенство показывает, что середина диагонали BD совпадает с серединой диагонали AC, т.е. диагонали в точке пересечения делятся пополам.

2.6. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Определение 2.17. Вектор $\bar{u}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$, если его можно представить следующим образом: $\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{a}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – действительные числа, которые называются коэффициентами линейной комбинации.

Определение 2.18. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ одновременно не равные нулю и такие, что соответствующая линейная комбинация векторов равна нулю:

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = 0. \tag{2.1}$$

В противном случае, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, т.е. векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство (2.1) выполняется только с нулевыми коэффициентами

$$\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0.$$

Свойства линейной зависимости.

1. Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ имеется нуль-вектор, то эта система линейно зависима.

2. Система двух или более векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных.

ТЕОРЕМА 2.3 (второй признак коллинеарности векторов). Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

СЛЕДСТВИЕ. Если два вектора $\vec{a}, \vec{b}$ не коллинеарны, то равенство $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$ возможно лишь тогда, когда оба числа α, β равны нулю.

ТЕОРЕМА 2.4. Любые три вектора на плоскости, два из которых не коллинеарны, являются линейно зависимыми.

ТЕОРЕМА 2.5 (признак компланарности трех векторов). Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

СЛЕДСТВИЕ. Если три вектора не компланарны, то равенство

$$\alpha\cdot \vec{a} + \beta\cdot\vec{b} + \gamma\cdot \vec{c} = 0$$

возможно лишь при нулевых коэффициентах, т.е. $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

ТЕОРЕМА 2.6. Любые четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в пространстве (трехмерном) линейно зависимы.

2.7. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть на плоскости даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, причем $\vec{a}$ не коллинеарен $\vec{b}$. Разложить вектор $\vec{c}$ по двум векторам $\vec{a}, \vec{b}$ означает представить $\vec{c}$ в виде линейной комбинации векторов

$$\vec{c} = \alpha\cdot \vec{a} + \beta\cdot \vec{b},$$

где α, β – числа, называемые коэффициентами разложения.

ТЕОРЕМА 2.7 (о разложении вектора на плоскости). Всякий вектор $\bar{c}$ на плоскости можно разложить по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}, \vec{b}$ этой плоскости, т.е. представить его в виде $\vec{c} = \alpha\cdot \vec{a} + \beta\cdot \vec{b}$.

Пусть в пространстве даны три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и произвольный вектор $\vec{d}$. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ означает представить его в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т.е. в виде $\vec{d} = \alpha\cdot \vec{a} + \beta\cdot \vec{b} + \gamma\cdot \vec{c}$, где α, β, γ – числа, называемые коэффициентами разложения.

ТЕОРЕМА 2.8 (о разложении вектора в пространстве). Всякий вектор $\vec{d}$ в пространстве можно разложить по трём некомпланарным векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т.е. представить его в виде $\vec{d} = \alpha\cdot \vec{a} + \beta\cdot \vec{b} + \gamma\cdot \vec{c}$.

2.8. БАЗИС И РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим две системы векторов

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k, \tag{2.2}$$

$$\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_k. \tag{2.3}$$

Говорят, что система векторов (2.2) линейно выражается через систему векторов (2.3), если каждый вектор из системы (2.2) является линейной комбинацией векторов из системы (2.3).

<u>Определение 2.19.</u> Если две системы векторов линейно выражаются друг через друга, то они называются *эквивалентными.*

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть даны две системы векторов (2.2) и (2.3), причем система (2.2) линейно независима и линейно выражается через систему (2.3). Тогда число векторов в системе (2.2) не превосходит числа векторов в системе (2.3).

Из теоремы следует, что все базисы системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.

<u>Определение 2.20.</u> *Базисом* системы векторов называется любая ее линейно независимая подсистема, через которую линейно выражается всякий вектор системы.

<u>Определение 2.21.</u> Число векторов базиса системы векторов называется *рангом* этой системы.

Пусть нам даны две системы векторов (2.2) и (2.3). Обозначим ранг системы (2.2) через r_1, а через r_2 ранг системы (2.3).

Свойства ранга системы векторов.

1. Если система (2.2) линейно выражается через систему (2.3), то $r_1 \le r_2$.

2. Ранги эквивалентных систем векторов равны.

2.9. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ЕГО БАЗИС

Пусть векторы $\vec{i}, \vec{j}$ единичной длины ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$) приложены к началу координат и направлены вдоль положительного направления координатных осей.

<u>Определение 2.22</u>. *Базисом на плоскости* называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

<u>Определение 2.23.</u> *Базисом в трехмерном пространстве* называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Определение 2.24. Базис векторов на плоскости или в пространстве называется *ортонормированным базисом*, если он состоит из взаимно перпендикулярных векторов единичной длины.

Ортонормированный базис векторов на плоскости или в пространстве будем обозначать $\vec{i}, \vec{j}$ или $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно.

ТЕОРЕМА 2.10. Любой вектор $\vec{a}$ может быть единственным образом разложен по базису $\vec{i}, \vec{j}$, т.е. может быть представлен в виде

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \tag{2.4}$$

где a_x, a_y – проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат (их называют координатами вектора $\vec{a}$), а $\vec{i}, \vec{j}$ – орты этих осей.

Определение 2.25. Векторы $a_x\vec{i}, a_y\vec{j}$ в представлении (2.4) называются *составляющими* (компонентами) вектора $\vec{a}$ по осям координат.

Длина (модуль) вектора обозначается a или $|\vec{a}|$ и определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{2.5}$$

Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами α, β, которые он образует с соответствующими осями координат. Косинусы этих углов (так называемые *направляющие косинусы вектора*) определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{a}. \tag{2.6}$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \tag{2.7}$$

Определение координат вектора в пространстве аналогично плоскости. Координаты вектора $\vec{a}$ обозначаются в пространстве через $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$. Таким образом, в пространстве вектор $\bar{a}$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{2.8}$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\vec{a}$.

Аналогичным образом определяются длина (модуль) вектора и направляющие косинусы вектора в пространстве

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{2.9}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}. \tag{2.10}$$

Направляющие косинусы вектора в пространстве связаны аналогичным соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.11)$$

ТЕОРЕМА 2.11. Разложение по базисным векторам в пространстве единственно.

СЛЕДСТВИЕ. Каждый вектор в данном базисе имеет единственные координаты.

ТЕОРЕМА 2.12 (о координатах линейной комбинации векторов). Если вектор $\vec{u}$ равен линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, то соответствующие координаты вектора $\vec{u}$ равны линейной комбинации соответствующих координат векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ с теми же коэффициентами, и обратно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Равные векторы имеют равные координаты.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если векторы коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если вектор $\vec{u}$ равен сумме (разности) двух векторов, то его координаты равны сумме (разности) соответствующих координат слагаемых векторов.

Из теоремы следует, что действия над векторами сводятся к действиям над их координатами.

Примеры.

1. Найти координаты векторов $-\vec{a}$, $5\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (1; 7; 5)$, $\vec{b} = (1; 0; 3)$.

Решение.

По второму следствию $-\vec{a}(-1; -7; -5)$, $5 \cdot \vec{b}(5; 0; 15)$. По третьему следствию $\vec{c}(2; 7; 8)$.

2. Доказать, что $\vec{c} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$, если $\vec{a} = (4; 1)$, $\vec{b} = (6; 13)$, $\vec{c} = (5; 7)$.

Решение.

$c_x = \dfrac{1}{2}(a_x + b_x) = 5$, $c_y = \dfrac{1}{2}(a_y + b_y) = 7$.

По теореме о линейной комбинации векторов $\vec{c} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

Рассмотрим множество всех векторов R. В этом множестве определен нуль-вектор, для каждого вектора существует противоположный ему вектор. Для элементов множества R определены операции сложения и умножения на число. Эти линейные операции характеризуются рядом свойств. Такое множество называется *линейным* или *векторным пространством*.

<u>Определение 2.26.</u> Векторное пространство называется *n-мерным*, если в нем существует в точности n линейно независимых векторов.

Можно сказать, что векторное пространство, в котором каждый вектор определяется тремя координатами, является трехмерным.

Определение 2.27. *Базисом n-мерного пространства* называется любая система из n-линейно независимых векторов этого пространства.

ТЕОРЕМА 2.13. Векторное пространство, каждый вектор которого определяется n координатами, т.е. $\vec{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, имеет размерность n (является n-мерным), где $x_1, x_2, ..., x_n$ – координаты разложения вектора $\vec{a}$ по базису n-мерного пространства.

2.10. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим операцию, которая произведению двух векторов ставит в соответствие число (скаляр). Отсюда и название: *скалярное произведение*.

Определение 2.28. Под *скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, если они оба отличны от нулевого вектора, и равное нулю, если хотя бы один из векторов является нулевым.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

По определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\angle\, \vec{a},\vec{b}) = \cos(\angle\, \vec{a},\vec{b}), \text{ если } \vec{a} \neq 0 \text{ и } \vec{b} \neq 0;$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \text{ если } \vec{a} = 0 \text{ или } \vec{b} = 0. \tag{2.12}$$

Так как $b\cos\varphi = np_{\vec{a}}\vec{b}$ и $a\cos\varphi = np_{\vec{b}}\vec{a}$, то можно записать

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = b\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{2.13}$$

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{1}{\left|\vec{b}\right|}\vec{a}\vec{b}, \tag{2.14}$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженного на проекцию другого на ось с направлением первого вектора.

Определение 2.29. *Скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$.

Обозначается $\vec{a}^2$.

Геометрические свойства скалярного произведения.

1. Косинус угла φ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулой $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

2. Скалярное произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Скалярное произведение положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами острый, и отрицательно, если тупой.

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора, т.е. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

5. Длина вектора равна квадратному корню из его скалярного квадрата, т.е. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Алгебраические свойства скалярного произведения.

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$.
4. $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{c} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{c}) + \mu(\vec{b}\cdot\vec{c})$, где λ и μ – скаляры.

Физический смысл скалярного произведения

Пусть постоянная сила $\vec{F}$ обеспечивает прямолинейное перемещение $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$ материальной точки M (рис. 2.8). Если сила $\vec{F}$ образует угол φ с перемещением $\vec{s}$, то из физики известно, что работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ равна $A = Fs\cos\varphi$.

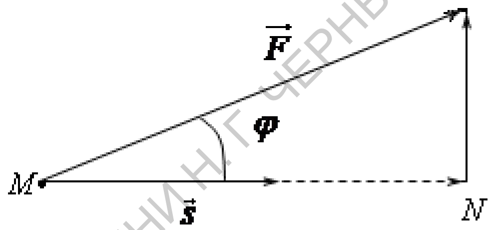

Рис. 2.8

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении точки приложения этой силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть известно разложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{2.15}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}. \tag{2.16}$$

Необходимо выразить скалярное произведение векторов через их координаты. Так как базисные орты взаимно перпендикулярны, то их скалярные произведения $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$. Каждый орт имеет длину 1, следовательно, $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$.

Умножая $\vec{a}$ на $\vec{b}$ и используя при преобразованиях алгебраические свойства скалярного произведения, получим выражение скалярного произведения векторов через их координаты

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.17}$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат. Отсюда, обозначая через φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{2.18}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов примет вид

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{2.19}$$

В случае плоскости исключением из (2.17) пространственной координаты получается выражение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Скалярный квадрат, выраженный в координатах, принимает вид

$$\vec{a}^{\,2} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \qquad \vec{a}^{\,2} = a_x^2 + a_y^2$$

для пространства и плоскости соответственно, т.е. равен сумме квадратов координат, а длина вектора в пространстве и на плоскости выражается через его координаты с помощью формул

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{2.20}$$

Примеры.

1. Скалярное произведение применяется для установления перпендикулярности двух векторов.

Доказать, что диагонали в ромбе взаимно перпендикулярны.

Решение.

Обозначим в ромбе $ABCD$ векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тогда диагонали ромба выражаются как $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$, и нужно установить перпендикулярность этих векторов. Вычислим скалярное произведение: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2} = |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 0$ (так как стороны ромба равны: $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|$). Следовательно, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}$ взаимно перпендикулярны.

2. Найти длину вектора $\vec{a} = (3; 4)$.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{25} = 5$.

3. Скалярное произведение применяется для нахождения косинуса угла между двумя векторами.

Найти косинус угла φ между векторами $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (3; 4)$.

Решение.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{15}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{25}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

4. С помощью скалярного произведения можно определить и произведение двух n-мерных вектор-строк (или вектор-столбцов).

Для примера рассмотрим аквариум, в котором содержится n_1 рыб одного вида, n_2 рыб второго вида и n_3 рыб третьего вида. Естественно определить популяционный вектор как $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Для средней рыбы первого вида в день может потребоваться q_1 единиц пищи, для второго и третьего вида соответствующие потребности составляют q_2 и q_3. Вектор потребностей есть $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Тогда общая дневная потребность в пище всей популяции равна $n_1q_1 + n_2q_2 + n_3q_3$.

2.11. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ТРОЙКИ ВЕКТОРОВ

Определение 2.37. *Ориентированной тройкой векторов* в пространстве называются три некомпланарных вектора, взятых в определенном
порядке.

Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется *правой* (рис. 2.9, а), если наблюдатель, расположенный в конце третьего вектора, видит направление кратчайшего вращения от первого вектора ко второму против часовой стрелки. Тройка называется *левой* (рис. 2.9, б), если этот же наблюдатель видит кратчайшее направление вращения по часовой стрелке.

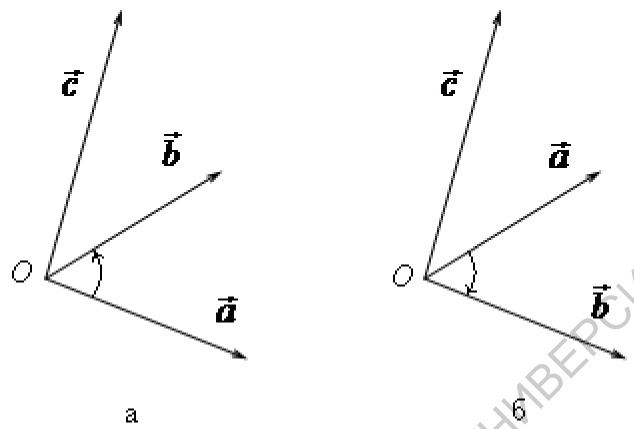

Рис. 2.9

Заметим, что если в тройке некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ переставить местами два вектора, то она изменит свою ориентацию, т.е. из правой сделается левой или наоборот. В дальнейшем правую тройку векторов мы будем считать стандартной.

Определение 2.38. Если в тройке векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заменить первый вектор на второй, второй вектор – на третий, а третий вектор – на первый, то такую замену называют *циклической заменой векторов*, а полученную тройку векторов $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ называют результатом циклической замены тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Свойства троек векторов.

1. Если два вектора в тройке поменять местами, то ориентация тройки меняется на противоположную.
2. При циклической замене векторов ориентация тройки сохраняется.

2.12. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Операция векторного произведения, как и скалярного, применяется к двум векторам, рассматриваемым как сомножители. Однако результатом векторного произведения двух векторов является новый вектор, длина и направление которого вычисляются по определенным правилам.

Определение 2.39. Под *векторным произведением двух неколлинеарных векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается новый вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет трем условиям:

1) длина векторного произведения равна произведению длин перемножаемых векторов и синуса угла между ними:
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\angle\, \vec{a},\vec{b}\right), \tag{2.21}$$
2) векторное произведение перпендикулярно перемножаемым векторам (иначе говоря, перпендикулярно плоскости построенного на них параллелограмма), т.е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$,
3) векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

Векторным произведением двух коллинеарных векторов называется нулевой вектор.

Свойства векторного произведения.

1. При изменении порядка сомножителей векторное произведение меняет свой знак на обратный, сохраняя модуль
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}\,. \tag{2.22}$$
2. Векторный квадрат равен нуль-вектору: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

3. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е. если λ – скаляр, то
$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \tag{2.23}$$
4. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

5. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах:
$$c = |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\angle\, \vec{a}\vec{b}), \quad (0 \le \varphi \le \pi). \tag{2.24}$$

Физический смысл векторного произведения

Если $\vec{F}$ – сила, приложенная к точке M, то момент $m_A(\vec{F})$ этой силы относительно точки A равен векторному произведению векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{F}$, т.е.
$$m_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}\,. \tag{2.25}$$

В частности, момент относительно начала координат
$$m_0(F) = r \times \vec{F}\,,$$
где r – радиус-вектор точки приложения силы.

Векторное произведение в координатной форме

Найдем векторное произведение векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, заданных своими координатами в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Имеем

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{2.26}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}. \tag{2.27}$$

Найдем сначала векторные произведения векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базиса в пространстве. Из определения векторного произведения следует, что для ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ справедлива следующая "таблица умножения":

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

так как тройка базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ правая по определению.

Перемножим векторно $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из (2.26), (2.27), используя свойства векторного произведения.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_y\left(\vec{i} \times \vec{j}\right) + a_x b_z\left(\vec{i} \times \vec{k}\right) +$$

$$+ a_x b_z\left(\vec{i} \times \vec{k}\right) + a_y b_x\left(\vec{j} \times \vec{i}\right) + a_y b_z\left(\vec{j} \times \vec{k}\right) + a_z b_x\left(\vec{k} \times \vec{i}\right) + a_z b_y\left(\vec{k} \times \vec{j}\right) =$$

$$= \vec{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - \vec{j}\left(a_x b_z - a_z b_x\right) + \vec{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right).$$

Используя понятие определителя 2-го порядка, получим

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \tag{2.28}$$

(с сохранением порядка следования букв x, y, z).

Для удобства запоминания формула (2.28) записывается в виде определителя третьего порядка

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.29}$$

Векторное произведение двух векторов в координатах равно определителю третьего порядка, у которого в первой строке стоят базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, во второй строке – координаты первого вектора-сомножителя, а в третьей строке – координаты второго вектора.

Из формулы (2.27) следует, что

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2. \qquad (2.30)$$

Геометрически формула (2.30) дает квадрат площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Длина векторного произведения в координатах

На основании формулы (2.30) для векторного произведения двух векторов получаем выражение его длины в координатах

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}.$$

Векторное произведение можно применить при вычислении площади треугольника и параллелограмма.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, обозначим через $S_{пар}$, а площадь треугольника, построенного на этих векторах, – через $S_{тр}$.

$$S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,$$

$$S_{тр}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Тогда

$$S_{пар}=\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2},$$

$$S_{тр}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}.$$

Пример. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=(0; 2; 4)$, $\vec{b}(1; -1; 1)$.

Решение.

$$S_{тр}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-4)^2+(-2)^2}=14.$$

2.13. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 2.40. Под *смешанным* (или векторно-скалярным) произведением трех векторов $\vec{a}$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ понимается число, равное векторному произведению первых двух векторов, скалярно умноженному на третий вектор.

Обозначается $\vec a\vec b\vec c$.

По определению

$$\vec a\vec b\vec c = \left(\vec a \times \vec b\right)\cdot \vec c . \qquad (2.31)$$

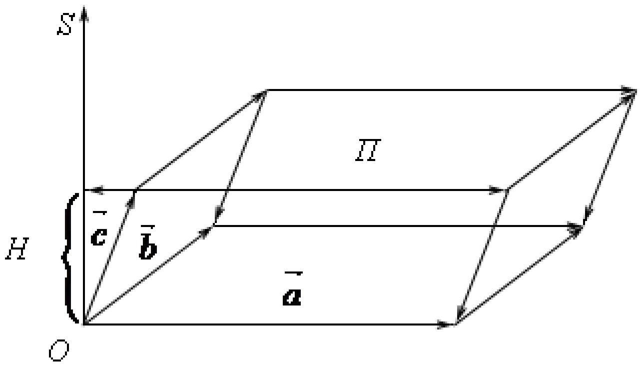

Рис. 2.10

Построим параллелепипед Π (рис. 2.10), ребрами которого, исходящими из общей вершины O, являются векторы $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$. Тогда $S = \left|\vec a \times \vec b\right|$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec a$ и $\vec b$, т.е. является площадью основания параллелепипеда. Высота H этого параллелепипеда равна

$$H = \pm\, np_{\vec S}\vec c = \pm\, c\cos\varphi , \qquad (2.32)$$

где $\vec S = \vec a \times \vec b$ и знак плюс соответствует острому углу $\varphi = \angle\left(\vec c, \vec S\right)$, а знак минус – тупому углу φ. В первом случае векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ образуют правую, а во втором – левую тройку.

На основании определения скалярного произведения имеем

$$\left(\vec a \times \vec b\right)\cdot \vec c = \vec S \cdot \vec c = S \cdot np_{\vec S}\vec c = \pm\, SH = \pm\, V , \qquad (2.33)$$

где V – объем параллелепипеда Π, построенного на векторах $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$.

Отсюда

$$\vec a\vec b\vec c = \pm\, V , \qquad (2.34)$$

т.е. смешанное произведение трех векторов равно объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если эти вектора образуют правую тройку, и со знаком минус, если они образуют левую тройку.

Свойства смешанного произведения.

1. Знак смешанного произведения $\vec a\vec b\vec c$ зависит от ориентации тройки $\vec a, \vec b, \vec c$: $\vec a\vec b\vec c > 0$, если тройка $\vec a, \vec b, \vec c$ – правая, $\vec a\vec b\vec c < 0$, если тройка $\vec a, \vec b, \vec c$ – левая.

2. Смешанное произведение не меняет знак при циклической перестановке его сомножителей:

$$\vec a\vec b\vec c = \vec b\vec c\vec a = \vec c\vec a\vec b .$$

3. При перестановке двух соседних множителей смешанное произведение меняет свой знак на противоположный, т.е.

$$\vec b\vec a\vec c = \vec a\vec c\vec b = \vec c\vec b\vec a = -\,\vec a\vec b\vec c .$$

4. Чтобы умножить векторное произведение на число λ, достаточно любой сомножитель умножить на λ:

$$\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = (\lambda\vec{a})\,\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c}).$$

5. Дистрибутивные законы:

$$(\vec{a} + \vec{a}')\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}'\vec{b}\vec{c},$$

$$\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{b}'\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}'\vec{c},$$

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{c}') = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{c}'.$$

ТЕОРЕМА 2.15 (необходимое и достаточное условие компланарности векторов). Для того чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение этих векторов равнялось нулю:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \qquad (2.35)$$

(объем параллелепипеда равен нулю).

Найдем выражение смешанного произведения векторов через координаты векторов-сомножителей:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}, \\ \vec{c} &= c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}. \end{aligned} \qquad (2.36)$$

Используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений векторов, получим

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.37)$$

Смешанное произведение векторов в координатах равно определителю третьего порядка, строками которого являются координаты перемножаемых векторов.

Смешанное произведение векторов применяется для определения объема параллелепипедов и тетраэдров, построенных на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Объемы соответственно равны:

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|, \quad V_{тетр} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Примеры.

1. Компланарны ли векторы $\vec{a} = (1;0;3)$, $\vec{b} = (3;5;7)$, $\vec{c} = (1;2;-1)$?

Решение.

Они не компланарны, поскольку смешанное произведение

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

2. Определить ориентацию тройки $\vec{a} = (1; 0; 3)$, $\vec{b} = (3; 5; 7)$, $\vec{c} = (1; 2; -1)$.

Решение.

Тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая, так как смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -16$ <0.

3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1; 0; 3)$, $\vec{b} = (3; 5; 7)$, $\vec{c} = (1; 2; -1)$.

Решение. $V_{пар} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = |-16| = 16$.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Что называется ортом вектора $\vec{a}$?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие векторы называются компланарными?
4. Какие векторы называются равными?
5. Что называется проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l?
6. Основные свойства проекции на ось l.
7. Что называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
8. Что называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
9. Что называется произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$?
10. Сформулировать признак коллинеарности векторов.
11. Сформулировать признак компланарности векторов.
12. Что называется скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
13. Свойства скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
14. Какая тройка векторов называется правой?
15. Что называется векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
16. Свойства векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
17. Что называется смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?
18. Свойства смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
19. Какова геометрическая интерпретация смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?
20. Даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Написать координаты точки $M(x; y; z)$, делящей отрезок AB в отношении λ.
21. Даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Написать координаты точки $M(x; y; z)$, делящей отрезок AB пополам.

22. Что называют координатами вектора $\vec{a}$ в декартовой системе координат?
23. Определить координаты вектора через координаты начальной и конечной точки вектора.
24. Определить длину вектора $\vec{a}$ заданного своими координатами.
25. Как найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}$?
26. Признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами.
27. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами.
28. Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами.
29. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, заданных своими координатами.
30. Использование векторной алгебры при определении площадей параллелограмма, треугольника и объема параллелепипеда.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти полярные координаты точек: $N\left(2\sqrt{3};2\right)$, $M(-7;0)$, $K\left(-\sqrt{2};-\sqrt{6}\right)$.
2. Найти прямоугольные координаты точек $A\left(2;\pi/2\right)$, $B\left(3;3\pi/4\right)$, $C\left(2;5\pi/4\right)$, заданных своими полярными координатами.
3. Записать следующие уравнения в полярных координатах:
   а) $x^2 - y^2 = a^2$;
   б) $y = x$;
   в) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.
4. Записать следующие уравнения в прямоугольных координатах:
   а) $\rho\cos\theta = a$;
   б) $\rho = 2a\sin\theta$;
   в) $\rho = a(1+\cos\theta)$.
5. Сделан параллельный перенос осей координат, причем новое начало расположено в точке $O_1(3;-4)$. Известны старые координаты точки $M(7;8)$. Определить новые координаты этой же точки.
6. Система координат повернута на угол $\alpha = \pi/6$. Определить новые координаты точки $M(\sqrt{3};3)$.
7. Отрезок AB, где $A(7;1)$, $B(4;5)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.
8. В треугольнике ABC дано: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, точка M - середина стороны BC. Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
9. В параллелограмме $ABCD$: K и M - середины сторон BC и CD, $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$. Выразить векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
10. Радиус-вектор точки M составляет с осью OX угол 45°, с осью OY – угол 60°. Его длина $|\vec{r}| = 6$. Найти координаты точки М, зная, что третья координата отрицательная.
11. Найти вектор $\vec{p}$, зная, что две его координаты $p_x = 3$, $p_y = -9$, а его длина $|\vec{p}| = 12$.
12. Найти орт вектора $\vec{a} = (6;-2;-3)$.
13. Даны три вектора $\vec{a} = (1;3)$, $\vec{b} = (2;-1)$ и $\vec{c} = (4;1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} = 0$.
14. Проверить, что векторы $\vec{a} = (-5;-1)$ и $\vec{b} = (-1;3)$ образуют базис на плоскости, Найти координаты векторов $\vec{c} = (-1;2)$ и $\vec{d} = (2;-6)$ в этом базисе.

15. Показать, что тройка векторов $\vec{e}_1 = (1;0;0)$, $\vec{e}_2 = (1;1;0)$ и $\vec{e}_3 = (1;1;1)$ образуют базис в множестве всех векторов пространства. Вычислить координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{k}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и написать соответствующее разложение по базису.
16. Разложить вектор $\vec{c} = (9;4)$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, если $\vec{a} = (1;2)$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
17. Зная одну из вершин треугольника $A(1;-6;3)$ и векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 5\vec{k}$ и $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, найти остальные вершины и вектор $\overrightarrow{CA}$.
18. Проверить, что четыре точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции.
19. Найти расстояние между концами векторов $\vec{a} = (2;1;8)$, и $\vec{b} = (-2;2;3)$, если векторы отложены от начала координат.
20. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны.
21. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ и $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, образующие стороны треугольника ABC. Найти длину медианы AM треугольника.
22. Является ли треугольник с вершинами в точках $A(5;-4)$, $B(3;2)$, $C(2;-5)$ прямоугольным?
23. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = (1;1;2)$.
24. Найти вектор $\vec{d}$, зная, что $\vec{d} \perp \vec{a}$, $\vec{d} \perp \vec{b}$ и $\vec{d} \cdot \vec{c} = -6$, где $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (1;-2;3)$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
25. Найти вектор $\vec{m}$, зная, что $\vec{m} \perp \vec{c}$, $\vec{m} \cdot \vec{a} = 4$, $\vec{m} \cdot \vec{b} = 35$, где $\vec{a} = (3;-2;4)$, $\vec{b} = (5;1;6)$ и $\vec{c} = (-3;0;2)$.
26. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, если $\vec{x}$; $\vec{x} \cdot \vec{b} = -11$; $\vec{x} \cdot \vec{c} = 20$.
27. Являются ли векторы $\vec{a} = (1;2;-5)$, $\vec{b} = (4;-1;3)$, $\vec{c} = (2;4;-10)$ коллинеарными?
28. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, где $|\vec{p}| = 4$; $|\vec{q}| = 1$; и $(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.
29. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ как на сторонах.
30. Найти площадь треугольника ABC, в котором $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$.

31. В треугольнике с вершинами $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$; $C(1;3;-1)$ найти длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

32. Зная две стороны $\overrightarrow{AB}=(3;-2;-6)$, $\overrightarrow{BC}=(-2;4;4)$ треугольника ABC, вычислить длину высоты AD.

33. Являются ли векторы $\vec{a}=7\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ компланарными?

34. При каком значении λ $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\lambda\vec{k}$, $\vec{b}=(0;1;0)$, $\vec{c}=(3;0;1)$ компланарны?

35. Показать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$; $C(9;4;-4)$; $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

36. Какую тройку образуют векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$?

37. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}=(4;3;0)$, $\overrightarrow{AD}=(2;1;2)$, $\overrightarrow{AA_1}=(-3;-2;5)$,. Найти:

а) площадь грани $ABCD$;

б) угол между ребрами AB и диагональю BD_1;

в) объем параллелепипеда;

г) длину высоты, проведенной из вершины A_1.

38. Дана пирамида с вершинами $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;3)$, $A_4(4;-3;-1)$. Найти:

а) длину ребра A_1A_2;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) объем пирамиды;

г) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

ОТВЕТЫ

1. $N\left(4;\frac{\pi}{4}\right)$, $M(7;\pi)$, $K\left(2\sqrt{2};\frac{11\pi}{6}\right)$; **2.** $A(0;2)$, $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$; **3.** а) $\rho^2\cos 2\theta = a^2$; б) $\theta = \frac{\pi}{4}$; в) $\rho\cos(\alpha - \theta) = p$; **4.** а) $x = a$; б) $x^2 + y^2 = 2ay$; в) $x^2 + y^2 = a\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; **5.** $M(4;12)$; **6.** $M\left(1;\sqrt{3}\right)$; **7.** $M\left(\frac{18}{3};\frac{7}{3}\right)$, $N\left(5;\frac{11}{3}\right)$; **8.** $\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; **9.** $\overrightarrow{BD} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$; **10.** $M\left(3\sqrt{2};3;-3\right)$; **11.** $\pm 3\sqrt{6}$; **12.** $\vec{a}^0 = \left(\frac{6}{7};-\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right)$; **13.** $\alpha = -\frac{6}{7}, \beta = -\frac{11}{7}$; **14.** $\vec{c} = \left(\frac{1}{16};\frac{11}{16}\right)$, $\vec{d} = (0;-2)$; **15.** $\vec{a} = (-2;2;-1)$; **16.** $\vec{c} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$; **17.** $B(4;-6;8)$, $C(8;-4;7)$, $\overrightarrow{CA} = (-7;-2;-4)$; **19.** $\sqrt{42}$; **20.** $\alpha = 4, \beta = -1$; **22.** Да (угол A-прямой); **21.** 6; **23.** $\vec{c} = \left(\frac{\sqrt{11}}{11};-\frac{3\sqrt{11}}{11};\frac{\sqrt{11}}{11}\right)$, $\vec{c} = \left(-\frac{\sqrt{11}}{11};\frac{3\sqrt{11}}{11};-\frac{\sqrt{11}}{11}\right)$; **24.** $\vec{d} = (-3;3;3)$; **25.** $\vec{m} = (2;7;3)$; **26.** $\vec{x} = \left(\frac{17}{8};\frac{31}{16};-\frac{39}{16}\right)$; **28.** $14\sqrt{2}$; **29.** $18\sqrt{2}$; **30.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$; **31.** 5; **32.** $\frac{4\sqrt{5}}{3}$; **33.** Да; **34.** $\frac{1}{3}$; **37.** а) $2\sqrt{26}$, б) $\arccos\frac{16\sqrt{10}}{75}$, в) 12, г) $\frac{3\sqrt{26}}{13}$; **38.** а) $\sqrt{17}$, б) 14, в) 30, г) $6\frac{3}{7}$.

Список рекомендованной литературы

Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2009.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. В 2 ч.: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

Демидович В.П., Кудрявцев В.А., Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

Лунгу К.Н.,Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

Щипачев В.С. Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1985.