ФГОУ ВПО «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

# НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.П. Мисник, О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических специальностей и направлений подготовки

Саратов 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и рабочей программой курса «Математика» для студентов Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение основными численными методами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Цель пособия – помочь студентам первого курса Института химии СГУ освоить первоначальные понятия линейной алгебры и получить практические навыки при решении систем линейных алгебраических уравнений.

Пособие содержит следующие главы: основные понятия линейной алгебры, системы линейных алгебраических уравнений. Более подробное содержание приведено в оглавлении. В пособии кратко изложены необходимые теоретические сведения и формульные соотношения, основной материал иллюстрируют примеры. В конце каждой главы приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала. Задачи для самостоятельного решения, приведенные в конце пособия, позволят обучающимся научиться применять полученные знания на практике, тем самым будут способствовать лучшему пониманию и усвоению материала, а ответы помогут проконтролировать правильность решения задач.

Пособие может быть полезно при изучении данной темы студентами нематематических специальностей и направлений подготовки, изучающих высшую математику.

# Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

## 1.1. МАТРИЦЫ

Пусть имеется $m \times n$ произвольных, не обязательно различных, действительных чисел. Эти числа можно расположить в виде таблицы, состоящей из $m$ строк и $n$ столбцов.

Определение 1.1. Прямоугольная таблица чисел, расположенных в $m$ строк и $n$ столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$ (читается "эм на эн").

Пример. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица размера $2 \times 3$.

Каждое число определяется номером строки и номером столбца, на пересечении которых оно находится. Например, число $-1$ находится во второй строке и первом столбце.

Матрицы обозначаются прописными буквами: $A, B, C$ и т.д.. Элемент матрицы (число), стоящий в общем случае в $i$-й строке и $j$-м столбце, обозначается строчными буквами $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ и т.д. Запись $A = (a_{ij})$, где $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$ обозначает матрицу $A$ размера $m \times n$ с элементами $a_{ij}$. Если это важно, то размерность матрицы указывают в ее названии: $A_{m \times n}$.

Матрица $A_{m \times n}$ может быть записана в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее точками обозначается продолжение записи элементов матрицы или определителя.

Определение 1.2. *Квадратной матрицей* $n$-ого порядка называется матрица, состоящая из $n$ строк и $n$ столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Главная диагональ квадратной матрицы – это элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$.

Побочная диагональ квадратной матрицы – это элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$.

Определение 1.3. *Верхней треугольной матрицей* называется квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.4. *Нижней треугольной матрицей* называется квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.5. *Диагональной матрицей* называется квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.6. *Единичной матрицей* $E_{n\times n}$ называется квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что элементы единичной матрицы $E_{n\times n}$ определяются соотношением $e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$, где $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$.

Определение 1.7. *Нулевой матрицей* называется матрица (любого размера), все элементы которой – нули. Нулевая матрица обозначается $O$.

Определение 1.8. Матрица $A_{m\times n}$ называется *равной* матрице $B_{m\times n}$, если для элементов матриц выполняется равенство

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1,2,...,m, \quad j = 1,2,...,n.$$

Обозначается $A = B$.

## 1.2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

### Сложение (вычитание) матриц

Определение 1.9. *Суммой (разностью)* двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ одинакового размера называется матрица $C$ того же размера, элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}), \quad i = 1,2,...,m, \quad j = 1,2,...,n.$$

Обозначается $C = A + B \quad (C = A - B)$.

Замечание. Матрицы разного размера складывать нельзя.

Пример. Найти сумму матриц

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0-1 & -1+3 \\ 2-4 & 3+3 & 1+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Умножение матрицы на число

Определение 1.10. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}$ *и числа* $\alpha$ называется матрица $C$ того же размера, что и матрица $A$ с элементами

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad i = 1,2,...,m, \quad j = 1,2,...,n.$$

Обозначается $C = \alpha A$.

Пример. Вычислить линейную комбинацию $2A + B$ матриц

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$2A + B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & -8 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

## Умножение матриц

Определение 1.11. *Произведением* матрицы $A$ размера $m \times p$ и матрицы $B$ размера $p \times n$ называется матрица $C$ размера $m \times n$, элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\kappa=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\,, \tag{1.1}$$

где $i = 1,2,\ldots,m,\; j = 1,2,\ldots,n.$

Обозначается $C = AB$.

Произведение матриц $AB$ определено только в том случае, когда число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$

Пример. Найти произведение матриц

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Для заданных матриц определено только произведение $AB$:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+2\cdot4+0\cdot0 & 1\cdot(-1)+2\cdot5+0\cdot3 \\ 3\cdot2+(-1)\cdot4+1\cdot0 & 3\cdot(-1)+(-1)\cdot5+1\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Для квадратных матриц одного размера в общем случае $AB \neq BA$.

Пример. Найти произведение матриц

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot0+2\cdot4 & 1\cdot3+2\cdot5 \\ -1\cdot0+1\cdot4 & -1\cdot3+1\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

но

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot1-3\cdot1 & 0\cdot2+3\cdot1 \\ 4\cdot1-5\cdot1 & 4\cdot2+5\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что существуют матрицы со свойством $AB = BA$. Такие матрицы называются ***коммутирующими.***

**Транспонирование**

Определение 1.12. Для матрицы $A$ размера $m \times n$ *транспонированной* называется матрица $C$ размера $n \times m$ с элементами $c_{ij} = a_{ji}$. Обозначается $C = A^T$.

Пример. Найти матрицу, транспонированную по отношению к матрице

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Для транспонирования матрицы $A$ необходимо переставить местами строки и столбцы: 1-й столбец заменить 1-й строкой, 2-й столбец заменить 2-й строкой и т.д. Таким образом

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Свойства операций над матрицами*

1. $A + B = B + A$ (коммутативность сложения);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения);
3. $A + O = A$ (сложение с нулевой матрицей);
4. $A - A = O$ (вычитание матрицы из самой себя);
5. $1 \cdot A = A$ (умножение матрицы на единицу);
6. $(\alpha \cdot \beta)A = \alpha \cdot (\beta A)$ (ассоциативность относительно произведения чисел);
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (дистрибутивность относительно суммы чисел);
8. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (дистрибутивность относительно числового множителя);
9. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$ (ассоциативность относительно произведения на число);
10. $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность);
11. $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность);
12. $AE = EA = A$ (произведение с единичной матрицей);
13. $AO = EO = O$ (произведение с нулевой матрицей);
14. $(A + B)^T = A^T + B^T$ (транспонирование суммы матриц);
15. $(AB)^T = B^T A^T$ (транспонирование произведения матриц).

### Элементарные преобразования матриц

К элементарным преобразованиям матриц относятся следующие действия над ее элементами:

1) перестановка двух строк (столбцов);
2) умножение всех элементов строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3) прибавление ко всем элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

## 1.3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

### Определитель второго порядка

Пусть дана квадратная матрица $A$ 2-го порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.13. *Определителем второго порядка* матрицы $A$ называется число, равное разности произведения элементов главной и произведения элементов побочной диагонали матрицы: $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель второго порядка обозначается следующим образом:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot 3-4\cdot 2=-5.$$

### Определитель третьего порядка

Рассмотрим квадратную матрицу $A$ 3-го порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.14. *Определителем третьего порядка* матрицы $A$ называется следующая алгебраическая сумма произведений элементов определителя:

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Схематично формулу для вычисления определителя третьего порядка можно изобразить так:

$$\Delta=\begin{pmatrix}\otimes & \circ & \circ\\ \circ & \otimes & \circ\\ \circ & \circ & \otimes\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\circ & \otimes & \circ\\ \circ & \circ & \otimes\\ \otimes & \circ & \circ\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\circ & \circ & \otimes\\ \otimes & \circ & \circ\\ \circ & \otimes & \circ\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\circ & \circ & \otimes\\ \circ & \otimes & \circ\\ \otimes & \circ & \circ\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\circ & \otimes & \circ\\ \otimes & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \otimes\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}\otimes & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \otimes\\ \circ & \otimes & \circ\end{pmatrix}.$$

При использовании схемы для вычисления определителей следует обращать внимание на знаки слагаемых суммы.

П р и м е р. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

При вычислении определителя воспользуемся вышеприведенной схемой.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix}=1\cdot 3\cdot(-3)+2\cdot(-1)\cdot 0+0\cdot(-2)\cdot 2-0\cdot 3\cdot 0-$$

$$-2\cdot(-2)\cdot(-3)-1\cdot(-1)\cdot 2=-9+0+0+0-12+2=-19.$$

**Вычисление определителей *n*-го порядка**

Рассмотрим квадратную матрицу $A$ $n$-го порядка:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Матрице $A$ можно поставить в соответствие некоторое число, которое будем называть *определителем* матрицы $n$-го порядка и обозначать $\Delta$. Рассмотрим элемент $a_{ij}$ квадратной матрицы $A$, где $i=1,2,...,n;$ $j=1,2,...,n.$ Вычеркнем $i$-ю строку и $j$-й столбец матрицы. Останется матрица порядка $n-1$. Обозначим ее определитель чрез $D_{ij}$ и будем его называть *минором* элемента $a_{ij}$.

<u>Определение 1.15.</u> Величина $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента $a_{ij}$, $i=1,2,...,n;$ $j=1,2,...,n.$

Из определений минора и алгебраического дополнения видно, что они будут различаться только знаком. Если сумма индексов $i+j$ – четная, то они равны, если – нечетная, то они будут отличаться знаком.

Пример. Найти минор и алгебраическое дополнение элемента $a_{22}$ матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Элемент $a_{22}=3$. Чтобы получить минор этого элемента необходимо вычеркнуть вторую строку, второй столбец и вычислить оставшийся определитель второго порядка: $D_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-0=-3$.

Для вычисления алгебраического дополнения этого элемента необходимо полученный минор умножить на $(-1)^{2+2}=1$, т.е. $A_{22}=(-1)^{2+2}D_{22}$. В данном случае (сумма индексов элемента – четная) значения минора и алгебраического дополнения будут совпадать.

ТЕОРЕМА 1.1 (о разложении определителя по элементам строки или столбца). Определитель матрицы равен сумме произведений элементов одной строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta=\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

$$(\Delta=\det A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}).$$

Приведенная теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца) позволяет сводить вычисление определителя $n$-го порядка к вычислению определителей $(n-1)$-го порядка.

Используя теорему, вычислим определитель 3-го порядка из предыдущего примера, разложив его по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot D_{11}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot D_{12}+0\cdot(-1)^{1+3}D_{13}=$$

$$=(3\cdot(-3)-1\cdot(-1)\cdot 2)-2\cdot((-2)\cdot(-3)-(-1)\cdot 0)+0=-7-12=-19.$$

Примеры.

1. Вычислить определитель единичной матрицы.

Решение.

Разложим определитель порядка $n$ по первой строке. Так как в строке только один элемент отличен от нуля, то получится только один определитель $(n-1)$-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель порядка $n-1$ опять разложим по первой строке. Повторяя операции $n$ раз, получим, что данный определитель равен 1.

2. Вычислить определитель верхней треугольной матрицы.

Решение.

Разложим определитель порядка $n$ по первому стролбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{2n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель порядка $n-1$ опять разложим по первому столбцу. Повторяя операции $n$ раз, получим, что данный определитель равен произведению элементов главной диагонали $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

3. Вычислить определитель четвертого порядка, разложив его по элементам второй строки.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

*Свойства определителей*

1. Определитель не меняется, если строки поменять местами со столбцами.

Из этого свойства следует, что строки и столбцы определителя равноправны и все свойства, справедливые для строк, справедливы и для столбцов.

2. Определитель произведения матриц равен произведению определителей: $\det AB = \det A \cdot \det B$.

3. Определитель, у которого строка (столбец) состоит из нулей, равен нулю.

4. Если в определителе переставить местами две строки (столбца), то определитель изменит знак.

5. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

6. Если в $i$-й строке (столбце) матрицы $A$ все элементы представлены суммами, то $\det A = \det A_1 + \det A_2$, где $A_1$ и $A_2$ отличаются от $A$ только $i$-й строкой (столбцом): у $A_1$ в $i$-й строке (столбце) стоят первые слагаемые сумм, а у $A_2$ – вторые слагаемые.

7. Определитель не изменится, если одну строку (столбец) заменить на сумму или разность этой строки (столбца) и любой другой строки (столбца) определителя. (В случае разности заменять следует ту строку (столбец), из которой вычитали.)

8. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

9. Определитель, у которого одна строка (столбец) является линейной комбинацией других строк (столбцов), равен нулю.

Используя свойства определителя, можно значительно упростить процесс вычисления определителей высоких порядков.

Пример. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Для упрощения вычислений, прежде чем применять теорему, следует, используя свойства определителей, преобразовать исходный определитель так, чтобы в получившемся определителе в какой-либо строке или столбце было как можно больше нулей. Этого можно добиться, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{вычтем из} \\ \text{первой строки} \\ \text{вторую} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{прибавим ко} \\ \text{второму} \\ \text{столбцу} \\ \text{первый} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{разложим по} \\ \text{элементам} \\ \text{первой строки} \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{вычтем из} \\ \text{второй строки} \\ \text{третью} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{прибавим ко второму} \\ \text{столбцу третий} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{разложим по} \\ \text{элементам} \\ \text{второй строки} \end{pmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5\,.$$

## 1.4. РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим матрицу $A$ размера $m \times n$. Выделим в этой матрице $k$ произвольных строк и $k$ произвольных столбцов ($k \le \min(m,n)$). Определитель, составленный из выделенных элементов матрицы, называется *минором* $k$*-го порядка* матрицы $A$.

Определение 1.16. *Рангом* матрицы $A$ ($r(A)$) называется наибольший порядок не равного нулю минора.

Пусть $r(A) = r$ - ранг матрицы $A$.

Определение 1.17. *Базисным минором* матрицы $A$ называется любой ненулевой минор порядка $r$.

ТЕОРЕМА 1.2 (о базисном миноре). Любая строка матрицы $A$ может быть представлена как линейная комбинация строк, входящих в базисный минор. (Аналогичное утверждение имеет место и для столбцов.)

*Свойства ранга матрицы*

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевую строку (столбец), то ранг матрицы не изменится
3. Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Метод вычисления ранга матрицы состоит в том, чтобы, применяя элементарные преобразования, привести матрицу к виду

$$\left(\begin{array}{ccc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} & a_{1n+1} & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{2n} & a_{2n+1} & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} & a_{3n+1} & a_{3m} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & a_{nn} & a_{nn+1} & a_{nm} \end{array}\right),$$

поскольку в этом случае легко указать ненулевой минор: его образуют первые $n$ столбцов, где $n \le m$. Если окажется, что $n > m$, то следует сначала транспонировать матрицу.

Отметим, что произвольную матрицу всегда можно привести к указанному ступенчатому виду, например, следующим способом:

1) вычитается первая строка, умноженная на подходящий множитель, из всех остальных, чтобы получить нули в первом столбце со второй по последнюю строку;

2) вычитается вторая строка, умноженная на подходящий множитель, из всех остальных, кроме первой, чтобы получить нули во втором столбце с третьей по последнюю строку (полученные ранее нули в первом столбце при этом не изменятся, так как от них будем отнимать те же нули) и так далее, спускаясь по строкам вниз, получается требуемое.

На практике совсем не обязательно пользоваться именно описанным методом. Лучше вычитать строку и столбцы (не обязательно соседние), в которых много одинаковых элементов, а затем переставить строки и столбцы, чтобы получить нужное расположение нулей.

П р и м е р. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to$$ (вычтем из первой строки четвертую)

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to$$ (поскольку первая строка пропорциональна второй (с коэффициентом 2) вычеркнем ее)

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to$$ (умножим третий столбец на 2, и вычтем его из первого столбца)

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to$$ (поменяем местами первую строку с третьей и второй столбец с третьим)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку первые три столбца полученной матрицы образуют треугольную матрицу с определителем $1 \cdot 5 \cdot 2 \neq 0$, ранг исходной матрицы равен 3.

## 1.5. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть $A$ матрица размера $n \times n$.

<u>Определение 1.18.</u> Квадратная матрица $A$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, в противном случае матрица называется *вырожденной*.

<u>Определение 1.19.</u> Если для квадратных матриц $A$ и $B$, имеющих одинаковую размерность, $AB = BA = E$, то матрица $B$ называется обратной к матрице $A$.

Обратная матрица обозначается $A^{-1}$.

Обратная матрица существует не для любой квадратной матрицы. Например, очевидно, нулевая матрица не может иметь обратную, поскольку при умножении ее на любую другую матрицу будем получать нулевую, а не единичную.

ТЕОРЕМА 1.3 (о существовании обратной матрицы). Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Вычисление обратной матрицы производится следующим образом:

1) вычисляется $\det A$;

2) если $\det A \neq 0$, то делается вывод о существовании обратной матрицы;

3) вычисляется матрица, полученная из исходной матрицы $A$ заменой всех ее элементов соответствующими им алгебраическим дополнениями $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$;

4) транспонируется матрица $\tilde{A}$;

5) вычисляются элементы обратной матрицы $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}^T}{\det A}$.

П р и м е р. Найти матрицу, обратную к матрице $A$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

1) Подсчитаем определитель матрицы $A$:

$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 2$;

2) $\det A = 2 \neq 0$, следовательно, у матрицы $A$ существует обратная матрица;

3) Вычислим алгебраические дополнения для элементов матрицы $A$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Транспонируем матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) Вычислим элементы обратной матрицы $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проведем проверку вычислений:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В результате вычислений получена единичная матрица, следовательно, обратная матрица вычислена верно.

**Контрольные вопросы к главе 1**

1. Какая матрица называется прямоугольной?
2. Какая матрица называется квадратной?
3. Какая матрица называется верхней треугольной, нижней треугольной?
4. Какая матрица называется диагональной?
5. Какая матрица называется единичной?
6. Какие существуют операции над матрицами?
7. Что должно быть выполнено, чтобы существовало произведение матрицы $A$ на матрицу $B$?
8. Если матрицы $A$ и $B$ можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать?
9. Если матрицы $A$ и $B$ можно складывать, следует ли из этого, что их можно умножать?
10. Может ли произведение прямоугольных матриц быть квадратной матрицей?
11. Может ли при умножении ненулевых матриц получиться нулевая?
12. Перечислить свойства операций над матрицами?
13. Какие действия над элементами матрицы относят к ее элементарным преобразованиям?
14. Что называется определителем второго порядка?
15. Как вычислить определитель третьего порядка?
16. Сформулировать свойства определителей.
17. Сформулировать теорему о разложении определителя по элементам строки.
18. Что называется рангом матрицы?
19. Какая матрица называется невырожденной?
20. Какая матрица называется обратной?
21. Указать формулу получения обратной матрицы.

# Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

## 2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим систему $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_{m1}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $a_{ij}$ – известные числа, $x_j$ – искомые неизвестные. Числа $a_{ij}$, где $i = 1,2,...,m,$, $j = 1,2,...,n,$, называются *коэффициентами* системы, $b_1, b_2,...b_m$ – *свободными членами*.

<u>Определение 2.1.</u> Система (2.1) называется *однородной*, если все $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, и *неоднородной* в противном случае.

<u>Определение 2.2.</u> *Решением* системы (2.1) называется совокупность $n$ чисел $\left(\overline{x_1};\ \overline{x_2};\ \vdots\ \overline{x_n}\right)$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения системы, обращают эти уравнения в тождества.

<u>Определение 2.3.</u> Система называется *совместной*, если она имеет, по крайней мере, одно решение, и *несовместной*, если у нее нет решения.

<u>Определение 2.4.</u> Совместная система называется *определенной*, если она имеет только единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет больше одного решения. В этом случае каждое ее решение называется *частным* решением.

<u>Определение 2.5.</u> Совокупность частных решений называется *общим* решением.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна и, в случае совместности, найти ее решение.

<u>Определение 2.6.</u> Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

называются соответственно *матрицей* и *расширенной матрицей* системы.

Введем в рассмотрение столбец неизвестных $X$ и столбец свободных членов $B$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

В сделанных обозначениях СЛАУ может быть записана в матричной форме:

$$AX = B. \tag{2.4}$$

## 2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ТЕОРЕМА 2.1 (Кронекера – Капелли). Для совместности системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу расширенной матрицы.

Таким образом, система (2.1) совместна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(A_1) = r$. В этом случае число $r$ называется *рангом системы* (2.1).

ТЕОРЕМА 2.2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных (т.е. $r = n$), то система является определенной.

ТЕОРЕМА 2.3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система – неопределенная.

При исследовании произвольной СЛАУ необходимо выполнить следующие действия:

1) найти ранг матрицы $r(A)$ и ранг расширенной матрицы $r(A_1)$ системы;

2) если $r(A) \neq r(A_1)$, то система несовместна, если $r(A) = r(A_1) = r$, то система совместна;

3) если система совместна и $r = n$, то она определенная, если $r < n$, то система неопределенная.

Для получения решения совместной СЛАУ необходимо выполнить следующие действия:

1) выбрать какой-либо базисный минор порядка $r$;

2) выбрать $r$ уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор, отбросив остальные. Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называются *базисными* и остаются в уравнении слева, а остальные $n - r$ неизвестных называются *свободными* и переносятся в правую часть уравнений;

3) найти выражения базисных неизвестных через свободные, которые определяют общее решение системы.

Частные решения системы получаются из общего решения, если свободным неизвестным придавать произвольные значения.

Примеры. Исследовать СЛАУ и, в случае совместности, найти решение.

1. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Определим ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Выпишем расширенную матрицу системы, отделяя вертикальной чертой элементы матрицы системы $A$ от свободных членов системы:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 3-й строки, а затем разделим все элементы 2-й строки на 3:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Вычтем из элементов 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right);$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $r(A) = 2$, $r(A_1) = 3$, т.е. $r(A) \neq r(A_1)$, следовательно, система несовместна.

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Расширенная матрица имеет вид

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавим элементы 2-й строки к соответствующим элементам 1-й и 4-й строк, а затем разделим элементы 1-й строки на 4, а элементы 4-й строки на 5:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Вычтем из элементов 3-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 5-й строки элементы 4-й строки, после этого вычеркнем 1 и 5-ю строки:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right); \quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы $A$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $r(A) = 3$. Так как найденный определитель является минором матрицы $A_1$, то $r(A_1) = 3$. Получили $r(A) = r(A_1) = n = 3$ и, следовательно, система совместная и определенная. Для определения трех неизвестных нужны три уравнения. Возьмем, например, первое, третье и пятое уравнения, а остальные уравнения можно отбросить:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда легко находим, что $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

Решение.

Расширенная матрица системы имеет вид

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Разделим элементы 3-й строки на 2 и вычтем из полученной 3-й строки 2-ю; затем вычеркнем 3-ю строку:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Нетрудно видеть, что $r(A) = r(A_1) = 2$. Следовательно, система совместна.

Возьмем первое и второе уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

За базисные неизвестные примем $x_1$ и $x_2$. Это можно сделать, так как определитель из коэффициентов при этих неизвестных отличен от нуля $\left(\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0\right)$. Свободными неизвестными служат $x_3$ и $x_4$. Переписав систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4, \end{cases}$$

выразим $x_1$ и $x_2$ через $x_3$ и $x_4$. Полученные выражения определяют общее решение системы. Задав произвольные значения свободным неизвестным $x_3$ и $x_4$, получим частные решения системы.

**Однородные системы**

Рассмотрим однородную систему $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \text{-------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Однородная система всегда совместна, так как ее решением являются нули (тривиальное решение): $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$.

У любой однородной системы $r(A)=r(A_1)$, так как расширенная матрица $A_1$ отличается от матрицы $A$ только нулевым столбцом.

Если у однородной системы $r(A)=r(A_1)=n$, то она имеет только нулевое решение.

Если помимо нулевых решений у однородной системы имеются другие решения, то такая система называется *нетривиально совместимой*.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $A$ – матрица однородной системы линейных уравнений размера $m\times n$. Для того чтобы система была нетривиально совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $A$ был меньше $n$, т.е. $r(A)<n$.

Для линейной однородной системы уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, утверждение «ранг матрицы $A$ меньше числа неизвестных» равносильно условию $\det A = 0$.

Пусть однородная СЛАУ имеет $k$ ненулевых линейно независимых решений (ни одно из них нельзя выразить линейно через остальные) $X_1, X_2, ..., X_k$. Эти решения образуют *фундаментальную систему*, если любое решение системы $X$ можно представить в виде

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k,$$

где $c_1,\ c_2, ...c_k$ – произвольные постоянные.

Число решений $k$ в фундаментальной системе равно числу свободных неизвестных и определяется по формуле $k = n - r(A)$.

П р и м е р ы. Имеет ли однородная СЛАУ ненулевые решения? Если имеет, то найти их, выписав фундаментальную систему решений.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е.

Запишем расширенную матрицу системы

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Приведем матрицу $A_1$ с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду: умножим элементы 1-й строки на $-2$ и прибавим к соответствующим элементам 2-й строки.

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Число неизвестных $n=2$; $r(A)=r(A_1)=2$. Поскольку $r(A)=r(A_1)=n$, то однородная система определенная и имеет единственное нулевое решение: $x_1=0,\ x_2=0$. Таким образом, общее решение системы: $(0;\ 0)$.

2. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

Решение.

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований: умножим 1-ю строку на $-2$ и прибавим ко 2-й, затем 2-ю строку разделим на 3.

$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Так как $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, то $r(A)=r(A_1)=2<3=n$, то система неопределенная. Количество базисных переменных равно $r(A)=2$, а количество свободных переменных равно $k=n-r(A)=3-2=1$. Для определения базисных переменных выберем какой-нибудь не равный нулю минор второго порядка, например $D$. Его столбцы 1-й и 2-й столбцы матрицы $A-$соответствуют переменным $x_1$ и $x_2-$это будут базисные переменные, а $x_3-$свободная переменная. Заметим, что в качестве главных переменных в данном примере нельзя выбрать пару $x_2,\ x_3$, так как соответствующий им минор равен нулю: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0$.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные через свободную. Из второго уравнения $x_2=x_3$. Подставляя значение $x_2$ в первое уравнение, получим $x_1=0$. Обозначив свободную переменную $x_3$ через $t$, получим общее решение системы $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, общее решение системы $X=\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$. Фундаментальную систему решений образует решение

$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $X = t \cdot X_1$. Для удобства общее решение будем записывать в виде $(0; t; t)$, а фундаментальную систему решений $-(0; 1; 1)$.

3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Решение.

Расширенная матрица системы имеет вид

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Преобразуем матрицу $A_1$: умножим элементы 1-й строки на $-2$ и прибавим к соответствующим элементам 2-й строки; умножим элементы 1-й строки на $-1$ и прибавим к соответствующим элементам 3-й строки.

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Вычеркнув 3-ю строку, равную 2-й, получим

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Число неизвестных $n = 4$; $r(A) = r(A_1) = 2$. Поскольку $r(A) = r(A_1) < n$, то однородная система имеет ненулевые решения.

За базисные неизвестные выберем $x_1, x_4$ $\left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right)$. Неизвестные $x_2$ и $x_3$ - свободные, их можно задавать произвольно.

Выпишем систему, которая соответствует полученной матрицы и выразим базисные неизвестные через свободные

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_2 + x_4 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8x_2 + x_3, \\ x_4 = -5x_2. \end{cases}$$

Обозначим $x_2 = t$ и $x_3 = s$, где $t, s -$ произвольные постоянные. Выпишем решение системы $X$ в матричном виде:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8t+s\\t+0\cdot s\\0\cdot t+s\\-5t+0\cdot s\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}8\\1\\0\\-5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=tX_1+sX_2.$$

Решения

$$X_1=\begin{pmatrix}8\\1\\0\\-5\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Таким образом, общее решение системы $(8t+s;\ t;\ s;\ -5t)$, фундаментальную систему решений образует пара решений $\{(8;1;0;-5),\ (1;0;1;0)\}$.

## 2.3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим систему $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\-------------------\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\tag{2.6}$$

Матрица системы $A$ – квадратная. В матричной форме система имеет вид

$$AX=B.\tag{2.7}$$

<u>Определение 2.7.</u> Определитель $\Delta=\det A$, составленный из коэффициентов системы, называется *определителем системы*.

<u>Определение 2.8.</u> Если $\Delta\neq 0$, то система называется *невырожденной*.

По теореме 1.3 матрица $A$ имеет обратную матрицу $A^{-1}$. Умножив обе части уравнения (2.7) на матрицу $A^{-1}$ слева, получим $A^{-1}AX=A^{-1}B$.

Так как $A^{-1}A=E$ и $EX=E$, то $X=A^{-1}B$, где $X$ – матрица-столбец искомых неизвестных.

П р и м е р. Решить СЛАУ с использованием обратной матрицы

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=\ 2,\\3x_1+2x_2+\ x_3=2,\\-x_1-x_2+4x_3=4.\end{cases}$$

Решение.

В матричной форме СЛАУ примет вид $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы $A$ равен $|A| = -6 \neq 0$. Обратная матрица примет вид

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно получить решение системы в матричном виде $X = A^{-1}B$

$$X = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

## Решение матричных уравнений

Иногда необходимо решить матричное уравнение вида $AX = B$ ($XA = B$). Если $A$ – квадратная невырожденная матрица, то решение этого уравнения имеет вид $X = A^{-1}B$ ($X = BA^{-1}$), где $A^{-1}$ – обратная к $A$ матрица.

Примеры.

1. Решить матричное уравнение $XA = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Матрица $A$ – квадратная невырожденная матрица, так как $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Решением матричного уравнения является матрица $X_{2\times 2}$, которая определяется по формуле $X = BA^{-1}$.

Поскольку $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, то $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -11 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

*Проверка:* $\begin{pmatrix} -16 & -11 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Решить уравнение $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

Для матрицы $A$ обратной является матрица следующего вида (см. п.1.5):

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для упрощения дальнейших вычислений множитель $\frac{1}{2}$ оставим перед матрицей.

Решением уравнения будет матрица

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+0+1 & -1+0-2 & 3+0+5 \\ -2+8-2 & 2+6+4 & -6+4-10 \\ -3+8-1 & 3+6+2 & -9+4-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 12 & -12 \\ 4 & 11 & -10 \end{pmatrix}.$$

В конечном итоге решение матричного уравнения примет вид

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

## 2.4. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Следствием решения СЛАУ с использование обратной матрицы является метод Крамера.

Невырожденная система линейных уравнений (2.6) имеет единственное решение, которое может быть найдено по правилу Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.8}$$

где $\Delta_i$ – определитель, полученный из определителя системы $\Delta$ заменой $i$-го столбца столбцом свободных членов матрицы $A$.

## Системы двух линейных уравнений

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{2.9}$$

Система (2.9), если определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}. \tag{2.10}$$

Если определитель $\Delta = 0$, то система является либо несовместной, либо неопределенной. В последнем случае система сводится к одному уравнению (например, первому), второе же уравнение является следствием первого.

Условие несовместности системы (2.9) можно записать в виде

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}. \tag{2.11}$$

Условие неопределенности системы (2.9) можно записать в виде

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}. \tag{2.12}$$

Рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

1. Если $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$, то система сводится к одному уравнению (например, первому), из которого одно из неизвестных выражается через два других, значения которых остаются произвольными.

2. Если условие $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ *не выполнено*, то решения системы находятся по формулам:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \; x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \; x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t, \tag{2.14}$$

где $t$ может принимать любые значения.

Эти решения можно записать также в виде

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} = -\frac{x_2}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = t\,.$$

При этой форме записи решений необходимо помнить, что если один из знаменателей обращается в нуль, то соответствующий числитель следует приравнять к нулю.

Примеры. Решить СЛАУ:

1 . $\begin{cases} 5x_1 - \ 3x_2 = 1, \\ x_1 + 11x_2 = 6. \end{cases}$

Решение.

Находим определитель $\Delta$ системы и определители $\Delta_1, \Delta_2$, входящие в числители формул (2.10):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - (-3) \cdot 1 = 58, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - (-3) \cdot 6 = 29,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 1 \cdot 1 = 29\,.$$

Отсюда, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{29}{58} = \dfrac{1}{2}$; $\quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{2}$.

2. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Решение.

Используя формулы (2.14), находим

$$x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = -22t, \;\; x_2 = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = 14t, \;\; x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 2t\,,$$

где $t$ можно придавать любые значения.

## Системы трех линейных уравнений

Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_3 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2.15}$$

при $\Delta \neq 0$ находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}\,, \tag{2.16}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

Если $\Delta=0$, то исходная система либо неопределенная, либо несовместная.

Если $\Delta=0$ и $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, то система неопределенная.

Если $\Delta=0$ и среди определителей $\Delta_1, \Delta_1, \Delta_3$ есть хотя бы один не равный нулю, то система несовместная.

Рассмотрим однородную систему трех уравнений:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{13}x_3=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.\end{cases}\qquad(2.17)$$

1. Если определитель системы (2.17) $\Delta\neq 0$, то она имеет единственное (нулевое) решение: $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0$.

2. Если определитель системы (2.17) $\Delta=0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Во втором случае, если среди миноров определителя однородной системы есть хотя бы один, отличный от нуля, то система сводится к двум независимым уравнениям (третье является следствием), а если все миноры этого определителя равны нулю, то система сводится к одному уравнению (остальные два являются его следствием).

Примеры. Решить СЛАУ

1. $$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8,\\3x_1+2x_2+x_3=10,\\4x_1+3x_2-2x_3=4.\end{cases}$$

Решение.

Находим определитель $\Delta$ системы. При вычислении определителя воспользуемся теоремой о разложении по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&1\\4&3&-2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&-2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3&1\\4&-2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}=-7+20+1=14\neq 0.$$

Вычислим определители $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$, входящие в числители формул (2.16):

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8&2&1\\10&2&1\\4&3&-2\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&-2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}10&1\\4&-2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}10&2\\4&3\end{vmatrix}=-56+48+22=14,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -24 + 80 - 28 = 28,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -22 + 56 + 8 = 42.$$

Подставляя найденные значения в формулы (2.11), получим решение системы: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{14}{14} = 1,\ \ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{28}{14} = 2,\ \ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{42}{14} = 3$.

2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Решение.

Находим определитель системы $\Delta$. При вычислении определителя к элементам 1-й строки прибавим элементы 3-й строки, умноженные на –4, а к элементам 2-й строки – элементы 3-й, умноженные на –1:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет только нулевое решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Решение.

Определитель системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 14 + 1 = 0.$$

Следовательно, система имеет решения, отличные от нулевого. Решаем систему первых двух уравнений (третье является их следствием):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда по формулам (2.13) получаем

$$x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \cdot t = 20t,\ \ x_2 = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \cdot t = -28t,\ \ x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 4t.$$

## 2.5. МЕТОД ГАУССА

Решение СЛАУ с помощью определителей можно производить только в случае квадратной матрицы системы. Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных. Этот метод применим и для случая систем произвольного вида.

Вначале рассмотрим метод Гаусса для СЛАУ, в которой число уравнений равно числу неизвестных и определитель системы $\Delta \neq 0$, т.е. система имеет единственное решение. Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1}, \\ \text{-------------------------} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{nn+1}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Процесс решения состоит из двух этапов. Первый этап, называемый *прямым ходом* метода Гаусса, заключается в приведении системы к треугольному виду. Второй этап, называемый *обратным ходом* метода Гаусса, заключается в последовательном определении неизвестных из полученной прямым ходом системы уравнений.

***Прямой ход***

Допустим $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то изменим порядок уравнений, выбрав первым такое уравнение, в котором коэффициент при $x$ не равен нулю). Коэффициенты системы $a_{ii}$ называются *главными*.

***1 шаг***. 1-е уравнение системы делим на $a_{11}$. Умножаем полученное уравнение на $a_{21}$ и вычитаем из 2-го; затем умножаем на $a_{31}$ и вычитаем из 3-го; наконец, умножаем на $a_{n1}$ и вычитаем из $n$-го. В результате первого шага получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = c_{1n+1}, \\ \quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = a'_{2n+1}, \\ \quad \text{---------------} \\ \quad a'_{n2}x_n + \ldots + a'_{nn}x_n = a_{nn+1}, \end{cases}$$

в которой

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}},\ j = 2,3,\ldots,n+1;\ \ a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}c_{1j}, i = 2,3,\ldots,n,\ j = 2,3,\ldots,n+1.$$

***2 шаг***. Действия первого шага применяем к уравнениям полученной системы, начиная со 2-го: делим 2-е уравнение на $a'_{22} \neq 0$. Далее умножаем полученное уравнение сначала на $a'_{32}$ и вычитаем из 3-го, затем на – $a'_{42}$ и вычитаем из 4-го и, наконец, умножаем на $a'_{n2}$ и вычитаем из $n$-го.

Продолжаем этот процесс, пока возможно. В ходе приведения системы к ступенчатому виду могут появиться нулевые уравнения, то есть равенства вида $0 = 0$. Такие уравнения следует отбросить.

В итоге исходная система может быть преобразована к так называемому *треугольному* виду:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1\,n-1}x_{n-1} + c_{1n}x_n = c_{1\,n+1}, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2\,n-1}x_{n-1} + c_{2n}x_n = c_{2\,n+1}, \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ \qquad\qquad x_{n-1} + c_{n-1\,n}x_n = c_{n-1\;n+1}, \\ \qquad\qquad\qquad x_n = c_{n\;n+1}. \end{cases} \tag{2.19}$$

***Обратный ход***

Из системы уравнений (2.19), начиная с последнего уравнения, последовательно определяем неизвестные, подставляя найденные значения неизвестных в предыдущие уравнения:

$$\begin{cases} x_n = c_{n\;n+1}, \\ x_{n-1} = c_{n-1\,n+1} - c_{n-1\,n}x_n, \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ x_1 = c_{1\,n+1} - c_{1n}x_n - \ldots - c_{13}x_3 - c_{12}x_2, \end{cases}$$

или $x_i = c_{i\,n+1} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} c_{i\,j}x_j$, $i = n, n-1, \ldots, 2, 1$. Решение получено.

***Контроль вычислений***

Дополним расширенную матрицу системы (2.18) $(n+2)$-м, так называемым *контрольным* столбцом элементов

$$\left(\begin{array}{ccc:c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} & a_{1\,n+1} & a_{1\,n+2} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} & a_{2\,n+1} & a_{2\,n+2} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & a_{n\,n+1} & a_{n\,n+2} \end{array}\right),$$

где $a_{in+2} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то есть является суммой всех элементов $i$-й строки.

При линейных преобразованиях элементов матрицы такому же преобразованию должны подвергнуться элементы контрольного столбца. Каждый элемент контрольного столбца преобразованной матрицы должен быть равен сумме элементов соответствующей строки.

Метод Гаусса является инструментом не только решения систем уравнений произвольного размера, но и ее исследования.

Если система имеет единственное решение, то в результате прямого хода метода Гаусса система уравнений приведется к *треугольному* виду, в котором последнее уравнение будет содержать одно неизвестное.

В случае неопределенной системы, допускающей бесчисленное множество решений, треугольной системы не получится. В этом случае система приводится к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = c_{1n+1}, \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = c_{2n+1}, \\ ------------------------------- \\ \qquad\qquad x_k + \ldots + c_{kn}x_n = c_{kn+1}. \end{cases}$$

Если же система уравнений несовместна, то после приведения к ступенчатому виду она будет содержать хотя бы одно уравнение вида $0 = c_{in+1}$, т.е. уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля. Такая система не имеет решений.

Замечание. На практике удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а матрицу из коэффициентов и свободных членов.

Примеры. Используя метод Гаусса, решить СЛАУ.

1. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Введем контрольный столбец, каждым элементом которого является сумма четырех элементов $i$-й строки. При линейных преобразованиях будем проводить контроль вычислений, сравнивая значение контрольного столбца с суммой всех элементов строки.

***Прямой ход***

Для упрощения вычислений поменяем местами первое и второе уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

Выполним 1-й шаг метода Гаусса: из 2 и 3-й строк вычтем 1-ю, умноженную соответственно на 3 и 4: $\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array}\right)$.

Изменив знаки во 2-й строке и умножив ее на 5, прибавляем к 3-й:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений приняла треугольный вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad x_2 - 4x_3 = -5, \\ \qquad\qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение.

***Обратный ход***

Из последнего уравнения имеем $x_3 = 2$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $x_2 = 3$ и, наконец, из первого уравнения находим $x_1 = -1$.

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Расширенная матрица с контрольным столбцом имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 & 44 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 & 26 \end{array}\right).$$

***Прямой ход***

Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на 3, из 4-й – 1-ю, умноженную на 5:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 & 34 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 & 26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 & 34 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \end{array}\right).$$

Прибавим к 3-й строке 2-ю, а из 4-й вычтем 2-ю:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 & 34 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вычеркнем нулевые строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \end{array}\right).$$

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = -23. \end{cases}$$

Система имеет ступенчатый вид. В этом случае она является неопределенной, то есть допускает бесчисленное множество решений.

***Обратный ход***

В качестве базисного минора возьмем минор, составленный из коэффициентов при неизвестных $x_1,\ x_2$ (так как $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$). Сами неизвестные $x_1,\ x_2$ в этом случае будут являться базисными, а неизвестные $x_3,\ x_4,\ x_5$ – свободными неизвестными. Отправив свободные неизвестные в правую часть уравнений системы, получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 + 7, \\ \qquad x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 23. \end{cases}$$

Подставляя выражение для $x_2$ в первое уравнение системы, получим общее решение системы в виде

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 16, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 23. \end{cases}$$

Для получения частного решения следует свободным неизвестным $x_3,\ x_4,\ x_5$ присвоить произвольные значения, например, $x_3 = 1,\ x_4 = 2,\ x_5 = 0$. Тогда одним из частных решений будет решение: $x_1 = -13,\ x_2 = 18,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,\ x_5 = 0$.

## 2.6. КОМПАКТНАЯ СХЕМА ИСКЛЮЧЕНИЯ

Компактный метод решения системы (2.18) требует меньшего количества промежуточных вычислений, чем метод Гаусса, и становится особенно простой, когда матрица системы симметрична $(a_{ij} = a_{ji})$. Схема предполагает последовательное определение неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$

в указанном порядке из уравнений после вычисления элементов матрицы размера $n \times (n+1)$, полученной из расширенной матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{ccc:c|c} b_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{1n} & c_{1\,n+1} \\ b_{21} & b_{22} & c_{23} & c_{2n} & c_{2\,n+1} \\ \hdashline b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{nn} & c_{n\,n+1} \end{array}\right), \tag{2.20}$$

Элементы последней матрицы (2.20) вычисляются с помощью рекуррентных формул прямого хода метода, которые могут быть легко реализованы с использованием компьютерной техники.

***Прямой ход***

Вычисления элементов матрицы (2.20) проводятся последовательно, начиная с элемента главной диагонали, в следующем порядке: сначала вычисляются элементы, расположенные в столбце под элементом главной диагонали, затем элементы, расположенные в строке справа от элемента главной диагонали по формулам:

$$\begin{cases} b_{i1} = a_{i1} \quad (i = 1,2,...,n); \quad c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2,3,...,n+1); \\ b_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj}; \quad (i, j = 2,3,...,n);\ i \ge j; \\ c_{ij} = \dfrac{1}{b_{ii}} \left( a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) (i = 2,3,...,n; \ \ j = 2,3,...,n+1);\ i < j. \end{cases} \tag{2.21}$$

***Обратный ход***

В результате обратного хода метода получаем решение исходной системы

$$x_i = c_{in+1} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j \quad (i = n, n-1,...,2,1). \tag{2.22}$$

***Контроль вычислений***

Дополним расширенную матрицу столбцом элементов, в котором каждый элемент является суммой всех элементов данной строки, т. е.

$$a_{i\,n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij},\ i = 1,2,...,n.$$

Матрицу (2.20) дополним столбцом элементов $c_{in+2}$, $i = 1,2,...,n$, которые вычисляются по формулам (2.21)

$$\left(\begin{array}{ccc:c|c|c} b_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{1n} & c_{1\,n+1} & c_{1\,n+2} \\ b_{21} & b_{22} & c_{23} & c_{2n} & c_{2\,n+1} & c_{2\,n+2} \\ \hdashline b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{nn} & c_{n\,n+1} & c_{n\,n+2} \end{array}\right).$$

При заполнении этой матрицы должно выполняться равенство

$$1+\sum_{j=i+1}^{n+1} c_{ij}=c_{in+2}, \quad i=1,2,...,n,$$

то есть элемент последнего столбца должен быть на единицу больше суммы элементов строки, начиная с элемента, следующего за элементом главной диагонали. Контроль проводится при заполнении каждой строки матрицы (2.20). Кроме того, должны выполняться следующие соотношения:

$$x_i+1=y_i,$$

где $\quad y_i=c_{in+2}-\sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}y_j, \; i=n,n-1,...,1.$

П р и м е р . Решить СЛАУ, используя компактную схему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1+2x_2+3x_3-2x_4 = 4, \\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 = 6, \\ -x_1-2x_2+2x_3 = -7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е .

Здесь $n=m, \quad \Delta \neq 0.$ Расширенная матрица системы с 6-м контрольным столбцом, каждым элементом которого является сумма пяти элементов соответствующей строки, имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 6 & 10 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & -7 & -8 \end{array}\right)$$

***Прямой ход***

Заполнение матрицы (2.20) производится, начиная с 1-го столбца, который, в соответствии с формулами (2.21), совпадает со столбцом расширенной матрицы системы. Элементы 1-й строки, начиная со 2-го, делятся на коэффициент при $x_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & b_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ 1 & b_{32} & b_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ -1 & b_{42} & b_{43} & b_{44} & c_{45} & c_{46} \end{array}\right).$$

Проведем контроль 1-й строки: $1+0+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

Вычислим элементы 2-го столбца ($j = 2; i = 2,3,4$): $b_{i2} = a_{i2} - b_{i1}c_{12}$, тогда

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ 1 & 3 & b_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ -1 & -2 & b_{43} & b_{44} & c_{45} & c_{46} \end{array}\right).$$

Вычислим элементы 2-й строки ($i = 2;\ j = 3,4,5,6$): $c_{2j} = \dfrac{a_{2j} - b_{21}c_{1j}}{b_{22}}$,

тогда

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{15}{4} \\ 1 & 3 & b_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ -1 & -2 & b_{43} & b_{44} & c_{45} & c_{46} \end{array}\right).$$

Проведем контроль 2-й строки: $1 + \dfrac{5}{4} + \left(-\dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{9}{4} = \dfrac{15}{4}$.

Вычислим элементы 3-го столбца ($j = 3; i = 3,4$): $b_{i3} = a_{i3} - (b_{i1}c_{13} + b_{i2}c_{23})$, тогда

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{15}{4} \\ 1 & 3 & -\frac{17}{4} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ -1 & -2 & 4 & b_{44} & c_{45} & c_{46} \end{array}\right).$$

Вычислим элементы 3-й строки ($i = 3;\ j = 4,5,6$): $c_{3j} = \dfrac{a_{3j} - (b_{31}c_{1j} + b_{32}c_{2j})}{b_{33}}$, тогда

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{15}{4} \\ 1 & 3 & -\frac{17}{4} & -\frac{11}{17} & \frac{5}{17} & \frac{11}{17} \\ -1 & -2 & 4 & b_{44} & c_{45} & c_{46} \end{array}\right).$$

Проведем контроль вычислений 3-й строки: $-\dfrac{11}{17} + \dfrac{5}{17} = \dfrac{11}{17} - 1$.

Вычислим элементы 4-го столбца: $b_{44} = a_{44} - (b_{41}c_{14} + b_{42}c_{24} + b_{43}c_{34}) = \frac{27}{17}$, и элементы 4-й строки ($i = 4;\ j = 5{,}6$): $c_{4j} = \frac{a_{4j} - (b_{41}c_{1j} + b_{42}c_{2j} + b_{43}c_{3j})}{b_{44}}$, тогда

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{15}{4} \\ 1 & 3 & -\frac{17}{4} & -\frac{11}{17} & \frac{5}{17} & \frac{11}{17} \\ -1 & -2 & 4 & \frac{27}{17} & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Проведем контроль вычислений 4-й строки: $-2 = -1 - 1$.

***Обратный ход***

$x_4 = c_{45} = -2,\quad y_4 = c_{46} = -1.$

Контроль вычислений дает $1 + x_4 = y_4$.

$$x_3 = c_{35} - c_{34}x_4 = \frac{5}{17} - \left(-\frac{11}{17}\right) \cdot (-2) = -1.$$

$$y_3 = c_{36}y_4 = \frac{11}{17} - \left(-\frac{11}{17}\right) \cdot (-1) = 0.$$

Контроль вычислений: $1 + x_3 = y_3$.

$$x_2 = c_{25} - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \cdot (-1) - \left(-\frac{9}{4}\right) \cdot (-2) = 2,$$

$$y_3 = c_{26} - c_{23}y_3 - c_{24}y_4 = \frac{15}{4} - \frac{5}{4} \cdot 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-1) = 3.$$

Контроль вычислений: $1 + x_2 = y_2$.

$$x_1 = c_{15} - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - c_{14}x_4 = \frac{1}{2} - 0 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot (-2) = 1,$$

$$y_1 = c_{16} - c_{12}y_2 - c_{13}y_3 - c_{14}y_4 = \frac{3}{2} - 0 \cdot 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = 2.$$

Контроль вычислений: $1 + x_1 = y_1$.

Решение системы – $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2.$

## 2.7. МЕТОД ЖОРДАНА - ГАУССА

Метод Жордана – Гаусса позволяет после специальных преобразований элементов матрицы системы сразу находить значения неизвестных.

Пусть дана система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1}, \\ \text{-------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{mn+1}, \end{cases} \tag{2.23}$$

где $a_{ij}$ – известные числа, $x_j$ – искомые неизвестные.

В матрице $A$ этой системы выберем отличный от нуля элемент $a_{qp}$. Этот элемент называется *разрешающим элементом*, $p$-й столбец матрицы $A$ – *разрешающим столбцом*, а $q$-я строка – *разрешающей строкой*. Преобразуем элементы матрицы $A$ с помощью следующих формул:

$$\begin{cases} a'_{qj} = a_{qj}, \quad j = 1,2,\ldots,(n+1); \\ a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ip}a_{qj}}{a_{qp}}, \quad i \neq q, \; i = 1,2,\ldots,m; \; j = 1,2,\ldots,(n+1). \end{cases} \tag{2.24}$$

Новая система уравнений с матрицей $A'$ будет иметь вид

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1p}x_p + \ldots + a'_{1n}x_n = a'_{1n+1}, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2p}x_p + \ldots + a'_{2n}x_n = a'_{2n+1}, \\ \text{-------------------------------------} \\ a'_{q1}x_1 + a'_{q2}x_2 + \ldots + a'_{qp}x_p + \ldots + a'_{qn}x_n = a'_{qn+1}, \\ \text{-------------------------------------} \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mp}x_p + \ldots + a'_{mn}x_n = a'_{mn+1}. \end{cases} \tag{2.25}$$

В полученной системе элементы $q$-й с троки расширенной матрицы, совпадают с $q$-й строкой расширенной матрицы исходной системы (2.23), а элементы $p$-го столбца матрицы $A'$, за исключением $a'_{pq}$, равны нулю. Следует отметить, что системы (2.23) и (2.25) одновременно совместны или несовместны. В случае совместности эти системы равносильны, то есть их решения совпадают.

Для определения элемента $a'_{ij}$ матрицы $A'$ полезно знать *правило прямоугольника*. Для этого рассмотри 4 элемента матрицы $A$

Преобразующийся элемент $a_{ij}$ $\qquad\qquad\qquad$ $a_{ip}$

$a_{qj}$ $\qquad\qquad\qquad$ $a_{pq}$ – разрешающий элемент

Для того чтобы получить элемент $a'_{ij}$, необходимо из элемента $a_{ij}$ вычесть произведение элементов, расположенных в противоположных вершинах прямоугольника: $a_{ip}$ и $a_{qj}$, деленное на разрешающий элемент $a_{pq}$ (ср. (2.24)).

Аналогичным образом можно преобразовать систему (2.25), приняв за разрешающий элемент матрицы $A'$ элемент $a'_{sr} \neq 0$, причем $s \neq q$, $r \neq p$. После этого преобразования все коэффициенты при $x_r$, кроме $a'_{sr}$, обратятся в нуль. Полученная система опять может быть преобразована и т.д. Если ранг системы равен числу неизвестных, то после ряда преобразований придем к системе уравнений вида

$$\begin{cases} b_1 x_1 = c_1, \\ b_2 x_2 = c_2, \\ \text{-----------} \\ b_n x_n = c_n, \end{cases}$$

из которой находятся значения неизвестных. В этом методе удобно в качестве разрешающего элемента выбирать элемент, равный единице.

Таким образом, при решении СЛАУ методом Жордана-Гаусса необходимо выполнить следующие действия:

1) выбрать отличный от нуля разрешающий элемент (удобнее выбрать равный единице, если такой имеется);

2) в преобразованной матрице разрешающую строку переписать без изменения;

3) все элементы разрешающего столбца, кроме самого разрешающего элемента, заменить нулями;

4) все остальные элементы преобразовать по правилу прямоугольника.

П р и м е р ы. Решить СЛАУ, используя метод Жордана – Гаусса.

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Расширенная матрица системы с контрольным столбцом имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 & 21 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 & 7 \end{array}\right).$$

Примем за разрешающий элемент коэффициент при $x_1$ в первом уравнении. Перепишем без изменения разрешающую строку таблицы, а все элементы 1-го столбца, кроме разрешающего, заменим нулями. Применив правило прямоугольника, преобразуем все остальные элементы, включая элементы контрольного столбца:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -12 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 & 21 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 & -7 \end{array}\right).$$

Отметим, что в контрольном столбце получаются суммы элементов соответствующих строк. Разделив на –3 элементы 2-й строки, получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 & 21 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 & -7 \end{array}\right).$$

Примем за разрешающий элемент 2-й строки 2-го столбца. 1-й столбец перепишем без изменения, элементы 2-го столбца, кроме разрешающего, заменим нулями, 2-ю разрешающую строку перепишем без изменения, остальные элементы преобразуем по правилу прямоугольника:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{l} \text{разделим} \\ \text{элементы 3-й} \\ \text{строки на 2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 & 18 \end{array}\right).$$

Преобразуем элементы, приняв за разрешающий элемент 3-го столбца 3-й строки, и проведем контроль вычислений

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{l} \text{разделим} \\ \text{элементы 4-й} \\ \text{строки на } -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Примем за разрешающий элемент 4-й строки 4-го столбца и преобразуем элементы матрицы

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Значения элементов контрольного столбца показывают правильность вычислений. В результате система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 8, \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 6, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 4, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 6. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 8,\ x_2 = 6,\ x_3 = 4,\ x_4 = 2.$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение.

Расширенная матрица системы с контрольным столбцом имеет вид

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Преобразуем матрицу, выбрав разрешающим элемент 1-й строки и 1-го столбца:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} \text{изменим} \\ \text{знаки в} \\ \text{4 - й} \\ \text{строке} \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

За разрешающий примем элемент 4-й строки 2-го столбца и преобразуем элементы матрицы, осуществляя контроль вычислений:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 2 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Вычтем из 3-й строки 2-ю и вычеркнем 3-ю строку, все элементы которой – нули:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 2 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Примем за разрешающий элемент 2-й строки 4-го столбца матрицы и проведем очередную серию преобразований, проверяя вычисления по контрольному столбцу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & -0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & -0{,}75 & 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{array}\right).$$

Матрица системы имеет ранг, равный 3, следовательно, система содержит три базисных неизвестных $x_1, x_2$ и $x_4$ и одно свободное неизвестное $x_3$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 0{,}6x_3 + 0\cdot x_4 = 0{,}4, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 13x_3 + 20x_4 = 7, \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 - 0{,}75x_3 + 0\cdot x_4 = 0{,}25. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_1 = 0{,}4 + 0{,}6x_3, \quad x_2 = 0{,}25 + 0{,}75x_3, \quad x_4 = 0{,}35 + 0{,}65x_3.$$

Полагая $x_3 = t$, где $t -$ произвольное число, получим однопараметрическое решение исходной системы: $\begin{cases} x_1 = 0{,}4 + 0{,}6t, \\ x_2 = 0{,}25 + 0{,}75t, \\ x_3 = 0{,}35 + 0{,}65t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Решение.

Расширенная матрица системы с контрольным столбцом имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 6 & -5 & 7 & 8 & 3 & 19 \\ 3 & 11 & 2 & 4 & 6 & 26 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Выберем разрешающим элемент 4-й строки и 1-го столбца и преобразуем матрицу элементов, проводя контроль вычислений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 0 & -11 & 1 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$ (разрешающий –1-й элемент 3-го столбца)

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c|c} 0 & -11 & 1 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 12 & 9 & 18 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{array}\right)$$ (изменим знаки элементов 3-й строки на противоположные)

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c|c} 0 & -11 & 1 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 12 & 9 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{array}\right) \text{ (разрешающий –3-й элемент 2-го столбца)}$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & 1 & -36 & -8 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 40 & 9 & 50 \end{array}\right).$$

В результате система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 - 36x_4 = -8, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 6, \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - 4x_4 = -1, \\ 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 40x_4 = 9. \end{cases}$$

Очевидно, что второму уравнению не удовлетворяют никакие значения неизвестных. Следовательно, полученная система уравнений, а, следовательно, и исходная система, несовместны.

### Контрольные вопросы к главе 2

1. Какая система называется системой линейных алгебраических уравнений?
2. Какая СЛАУ называется однородной; неоднородной?
3. Что называют решением СЛАУ?
4. Какая СЛАУ называется совместной; несовместной?
5. Какая СЛАУ называется определенной; неопределенной?
6. Какую матрицу называют матрицей системы?
7. Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.
8. Может ли однородная СЛАУ иметь ровно одно решение? ровно два? ровно 17?
9. Может ли у неоднородной СЛАУ быть фундаментальная система решений?
10. Что представляют собой формулы Крамера?
11. В каком случае можно применять метод Крамера при решении СЛАУ?
12. В чем заключается метод Гаусса решения СЛАУ?
13. В чем отличие метода Гаусса от метода Жордана-Гаусса решения СЛАУ?

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти линейные комбинации матриц.

1.1. $3A-2B$; $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2. $A-\lambda E$; $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1.3 $2B-5A$; $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4. $5A-3B$; $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведения матриц $AB$ и $BA$ (если возможно).

2.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найти произведение матриц $(AB)\cdot C$.

3.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.4. $A=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу $A^T$.

4.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. 4.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. 4.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Вычислить определители.

5.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

5.2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 6 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5.3. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

6. Найти ранг матрицы.

6.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$.

6.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

7. Найти обратную матрицу для матрицы $A$. Сделать проверку.

7.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 7.2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. 7.4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной СЛАУ.

8.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$ 8.4. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

9. Дана СЛАУ. Требуется:
а) решить систему с использованием формул Крамера;
б) решить систему с помощью обратной матрицы.

9.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ 9.2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$ 9.3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

9.4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$ 9.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ 9.6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

9.7. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$ 9.8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$ 9.9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

10. Решить СЛАУ методом Гаусса.

10.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

11. Исследовать СЛАУ. Для совместных систем найти общее и одно частное решения.

11.1. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

11.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$

11.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = 0, \\ 5x_1 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

11.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7. \end{cases}$

## ОТВЕТЫ

**1.1.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$; **1.2.** $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}$; **1.3.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

**1.4.** $\begin{pmatrix} -10 & -13 & 6 \\ 24 & 19 & -16 \\ -7 & 10 & 23 \end{pmatrix}$; **2.1.** $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$; **2.2.** $AB=(-1)$,

$BA=\begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 & 0 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ -4 & 8 & -12 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; **2.3.** $AB=\begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$;

**2.4.** $AB=\begin{pmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & -11 \\ -18 & 19 & -32 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} -18 & -2 & 16 \\ -13 & -13 & -5 \\ -18 & -9 & -21 \end{pmatrix}$; **3.1.** $\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$;

**3.2.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; **3.3.** $(3 \quad -17 \quad -68 \quad 38)$; **3.4.** $\begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$; **4.1.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; **4.2.** $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$;

**4.3.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; **4.4.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$; **5.1.** $2,\ 4,\ -10,\ -17,\ -10$;

**5.2.** $16,\ -150,\ 6$; **5.3.** $78, 30, -21$; **6.1.** $2$; **6.2.** $3$; **6.3.** $3$;

**7.1.** $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; **7.2.** $\begin{pmatrix} 2/3 & -5/12 & -1/12 \\ -1/3 & 7/12 & -1/12 \\ -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$; **7.3.** $A^{-1}$ не существует;

**7.4.** $\begin{pmatrix} 1/19 & -1/19 & -3/19 \\ 9/19 & 10/19 & 11/19 \\ -13/19 & -25/19 & -18/19 \end{pmatrix}$; **8.1.** $(t;\ 2t)$; $(1;2)$; **8.2.** $(0;\ 0;\ 0)$; фундаментальной системы решений нет; **8.3.** $(t;-t;t)$; $(1;-1;1)$;
**8.4.** $(2t+2s;\ t;\ -5s;\ 7s)$; $\{(2;\ 1;\ 0;0);\ (2;\ 0;\ -5;\ 7)\}$ ;**9.1.** $(3;-2;1)$;
**9.2.** $(1;\ 2;\ -3)$; **9.3.** $(-2;\ 6;\ -3)$; **9.4.** $(3;-2;-1)$; **9.5.** $(-1;\ 3;\ -3)$;
**9.6.** $(5;-1;-4)$; **9.7.** $(-2;\ 6;\ -3)$; **9.8.** $(5;-1;-3)$; **9.9.** $(-1;-6;\ 3)$;
**10.1.** $(1;\ 5;2)$; **10.2.** $(1;\ 2;\ 3;\ 4)$; **10.3.** $(5;\ 4;\ 1;\ 2)$; **11.1.** Совместная, определенная: о.р=ч.р. $(2;\ 3;\ 5)$; **11.2.** Несовместна; **11.3.** Совместная, неопреде-

ленная: о.р. $(-3t;\ t;\ 5t+1)$; ч.р. $(0;\ 0;\ 1)$; **11.4.** Совместная, неопределенная: о.р. $(1+2t+s-3r; t;\ 1; s;\ r)$; ч.р. $(1;0;\ 1;\ 0;\ 0)$ .

## Список рекомендованной литературы

*Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П.*. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2009.

*Данко П. Е. , Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* В 2 ч.: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

*Демидович В.П., Кудрявцев В.А.,* Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

*Лунгу К. Н.,Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.

*Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

*Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

*Щипачев В. С.* Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1985.