Саратовский государственный университет

Механико-математический факультет

Моделирование экономических процессов

С. И. Дудов, С. Н. Купцов

Саратов, 2013

Оглавление

Введение

Применение математики в экономике заключается в моделировании исследуемого экономического процесса и применении к полученной модели математического метода исследования из соответствующего раздела математики.

Математической моделью реального процесса называется его упрощенное описание с помощью математических символов и операций. В процессе моделирования выделяется самое существенное, что характеризует данный процесс и отбрасывается несущественное.

Математическое моделирование использовалось в экономике, начиная с XVIII столетия:

– Ф. Кенэ (1758 г., «Экономические таблицы» — математическое описание процесса общественного воспроизводства),

– А. Смит (классическая макроэкономическая модель),

– Д. Рикардо (модель международной торговли).

В XIX веке большой вклад в моделирование рыночной экономики внесла математическая школа, представителями которой являются О. Курно, Л. Вальрас, В. Парето, Ф. Эджворт.

В XX веке математические методы также широко использовались в экономике многими исследователями. За их разработку и эффективное применение ряд ученых был удостовен Нобелевской премии по экономике (Д. Хикс, Р. Солоу, В. Леонтьев, П. Самуэльсон, Г. Марковиц, Д. Тобин, Л. Канторович и др.)

Естественно, что дисциплины, связанные с математическим моделированием экономических задач и применением для их решения соответствующих математических методов, входят в учебные планы всех экономико-математических специальностей и направлений.

Математическая формализация ряда важных задач микро- и макроэкономики приводит к задачам оптимизации. В связи с этим в главе 1, которая имеет вспомогательный характер, приводятся необходимые сведения из теории экстремальных задач.

В главах 2 и 3 излагается в краткой форме неоклассическая математическая теория потребления и производства. Формализуются такие понятия как товар, цена, полезность потребления, прибыль и издержки фирмы, спрос на товар, предложение товара. Исследуются оптимизационные задачи потребителя и производственной фирмы, выводятся и анализируются основные уравнения потребления и производства.

В главе 4 вводится понятие рыночного равновесия, изучается влияние причин его нарушения, приводится модель равновесного рынка Л. Вальраса и её развитие в модели Эрроу–Дебре.

В главе 5 рассмотрены математические модели экономики в условиях несовершенной конкуренции (модели монополии, олигополии, дуополии Курно, Чемберлина и Стэкельберга). Основной вопрос — существование равновесия в таких моделях.

В главе 6 рассматривается классическая статическая модель линейного производства В. Леонтьева, её динамическое обобщение, а также модель расширяющейся экономики Неймана.

В завершающей пособие главе 7 дается модель экономического роста Солоу, на основе которой строится односекторная модель оптимального экономического роста, а также приводится модель экономики благосостояния.

Пособие предназначено для студентов механико-математического факультета и студентов экономического факультета, изучающих курс «Математические методы в экономике».

1 Элементы нелинейного программирования

Экстремальными задачами называют задачи отыскания минимума или максимума функций на заданных множествах. Условимся записывать задачу минимизации функции $f(x)$ на множестве D в виде

$$f(x) \to \min_{x \in D}. \tag{1.1}$$

Будем рассматривать лишь конечномерные задачи оптимизации, то есть считать, что аргумент функции $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ есть вектор конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$, а D является некоторым подмножеством из $\mathbb{R}^n$.

Далее используются обозначения:

$\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$,

$\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ — евклидова норма вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$,

$0_n = (0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Экстремальные задачи, у которых целевая функция или функции, задающие допустимое множество аргументов, являются нелинейными, называются задачами нелинейного программирования. К ним приводят многие экономические задачи.

1.1 Исходные понятия и вспомогательные сведения

Напомним некоторые понятия и сведения из математического анализа и линейной алгебры, которые далее используются.

Определение 1.1. Точка $x^0 \in D$ называется

1) *точкой глобального минимума* функции $f(x)$ на множестве D или *глобальным решением* задачи (1.1), если

$$f(x^0) \le f(x) \quad \text{при всех } x \in D; \tag{1.2}$$

2) *точкой локального минимума* функции $f(x)$ на D или *локальным решением* задачи (1.1), если существует число $\varepsilon > 0$, что

$$f(x^0) \le f(x) \quad \text{при всех } x \in D \cap B_\varepsilon(x^0); \tag{1.3}$$

где $B_\varepsilon(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - x^0\| \le \varepsilon\}$ — шар радиуса ε с центром x^0.

Если неравенство в (1.2) или (1.3) выполняется как строгое при $x \neq x^0$, то говорят, что x^0 — *точка строгого минимума (строгое решение)* в *глобальном* или *локальном* смысле соответственно. Нижеследующий факт даёт достаточные условия существования решения задачи (1.1).

Теорема 1.1 *(Вейерштрасса)*. Пусть D — ограниченное и замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$, а $f(x)$ — непрерывная функция на D. Тогда глобальное решение задачи (1.1) существует.

Очень важными для дальнейшего являются понятия дифференцируемой и дважды дифференцируемой функции.

Определение 1.2. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Говорят, что она дифференцируема в самой точке x^0, если существует такой вектор $v \in \mathbb{R}^n$, что выполняется

$$f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \langle v, \Delta x \rangle + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ обладает свойством: $\lim\limits_{\Delta x \to o_n} \dfrac{o(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0.$

Можно показать, что вектор v является градиентом функции $f(x)$ в точке x^0, т. е.

$$v = f'(x^0) \overset{df}{\equiv} \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right).$$

Определение 1.3. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x^0 и дифференцируема в самой точке x^0. Говорят, что она дважды дифференцируема в точке x^0 , если существует симметричная матрица A размерности $n \times n$ такая, что

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x^0) = \langle f'(x_0), \Delta x \rangle + \frac{1}{2} \langle A \Delta x, \Delta x \rangle + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ обладает свойством: $\lim\limits_{\Delta x \to o_n} \dfrac{o(\Delta x)}{\|\Delta x\|^2} = 0$. Можно показать, что эта матрица A составлена из вторых частных производных функции $f(x)$ в точке x^0:

$$A = f''(x^0) \overset{df}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Она называется *матрицей Гессе*, или *гессианом* функции $f(x)$ в точке x^0.

Теорема 1.2 *(критерий Сильвестра)*. Пусть A — симметричная матрица размера $n \times n$. Тогда:

1) матрица A неотрицательно определена, т. е. $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, тогда и только тогда, когда все её главные миноры неотрицательны;

2) матрица A положительно определена, т. е. $\langle Ax, x\rangle > 0$ для всех $x \neq 0_n$, тогда и только тогда, когда все её угловые миноры положительны.

Напомним, что главным минором матрицы называется определитель матрицы, получаемый путем удаления из A строк и столбцов с одинаковыми номерами. Если удаляются строки и столбцы с номерами от некоторого k до n, то главный минор называется угловым.

1.2 Безусловная экстремальная задача

Рассмотрим задачу минимизации на всем пространстве:

$$f(x) \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}. \tag{1.4}$$

Приведем сводку фактов, полезных при решении задачи (1.4).

Теорема 1.3 *(необходимое условие минимума первого порядка).* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Если x^0 — локальное решение задачи (1.4), то

$$f'(x^0) = 0_n. \tag{1.5}$$

Точка x^0, удовлетворяющая (1.5), называется *стационарной точкой* задачи (1.4) и самой функции $f(x)$.

Теорема 1.4 *(необходимое условие минимума второго порядка).* Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^0. Если x^0 — локальное решение задачи (1.4), то матрица $f''(x_0)$ неотрицательно определена, т. е.

$$\langle f''(x^0)h, h\rangle \geq 0 \quad \text{при всех } h \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Теорема 1.5 *(достаточное условие локального минимума второго порядка).* Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и при этом $f'(x^0) = 0_n$, а матрица $f''(x^0)$ положительно определена, т. е.

$$\langle f''(x^0)h, h\rangle > 0 \quad \text{при всех } h \in \mathbb{R}^n, \quad h \neq 0_n. \tag{1.7}$$

Тогда x^0 — строгое локальное решение задачи (1.4).

Замечание 1. Теоремы 1.3–1.5 сохраняют свою силу для задачи минимизации функции $f(x)$ на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ при условии, что x^0 есть внутренняя точка этого множества ($x^0 \in \mathrm{int}D$).

Замечание 2. Полезно иметь в виду следующее простое правило отбора глобального решения среди стационарных точек задачи (1.4): если известно, что глобальное решение существует, причем функция $f(x)$ дифференцируема всюду на $\mathbb{R}^n$, то этим решением является, очевидно, та стационарная точка, в которой функция принимает наименьшее значение.

1.3 Классическая задача на условный экстремум

Классической задачей на условный экстремум принято называть задачу минимизации функции $f_0(x)$ на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, заданном системой конечного числа уравнений

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}\}.$$

Запишем эту задачу в виде

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.8}$$

1.3.1 Метод исключения переменных

Возможен следующий подход к отысканию решения задачи (1.8). Допустимое множество задачи представляет собой решение системы из m уравнений с n неизвестными; при этом, как правило, $m < n$. Предположим, что $x = (u, \nu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ и для любого $\nu \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ система

$$f_i(u, \nu) = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

из m уравнений с m неизвестными имеет единственное решение $u = u(\nu)$. Тогда задача (1.8) сводится к задаче безусловной минимизации

$$F(\nu) = f(u(\nu), \nu) \to \min, \quad \nu \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Описанный метод исключения переменных имеет ограниченную область применения, поскольку указанная выше однозначная функция $u(\nu)$ существует далеко не всегда.

1.3.2 Условия экстремума

Более универсальным является *метод Лагранжа*, использующий условия экстремума для задач вида (1.8).

Функцией Лагранжа для задачи (1.8) назовем

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Пусть $L'_x(x,\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f'_i(x)$ — градиент функции Лагранжа по x.

Следующая теорема, лежащая в основе метода Лагранжа, является центральным фактом классической теории условного экстремума.

Теорема 1.6 *(необходимое условие минимума первого порядка).* Пусть функция $f_0(x)$ дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, а функции $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности этой точки. Если x^0 — локальное решение задачи (1.8), то существует ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ такой, что

$$L'_x(x^0, \lambda) = 0_n. \tag{1.9}$$

Точка $x_0 \in D$, удовлетворяющая (1.9) при некотором $\lambda \neq 0_{m+1}$, называется стационарной точкой задачи (1.8). При этом числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ называются множителями Лагранжа, соответствующими x^0.

Равенство (1.9) вместе с условием $x^0 \in D$ образует систему из $m+n$ уравнений с $m+n+1$ неизвестными. При этом всегда можно перейти к $m+n$ неизвестным, рассматривая два случая: $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = 1$.

Любое дополнительное предположение о задаче (1.8), обеспечивающее в теореме 6 случай $\lambda_0 \neq 0$, принято называть условием регулярности. Ясно, что в этом случае достаточно рассматривать лишь регулярную функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

Условием регулярности, в частности, служит условие линейной независимости градиентов $f'_1(x^0), \ldots, f'_m(x^0)$.

1.4 Выпуклые множества и выпуклые функции

Определение 1.4. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in D \quad \forall x, y \in D; \alpha \in [0,1],$$

т. е. вместе с любыми своими двумя точками оно содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

К простейшим свойствам выпуклых множеств относятся:

1. Если D_i, $i \in I$, — некоторые выпуклые множества из $\mathbb{R}^n$, то их пересечение $D = \bigcap\limits_{i \in I} D_i$, если оно непустое, также является выпуклым множеством. Здесь I — любое (конечное или бесконечное) множество индексов.

2. Пусть D_i, $i = \overline{1,m}$, — некоторые выпуклые множества из $\mathbb{R}^n$, а α_i, $i = \overline{1,m}$ — любые числа. Тогда множество

$$D = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i D_i = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i,\ x^i \in D_i \Big\}$$

является выпуклым.

3. Если D — выпуклое множество, $\{x^i\}_{i=\overline{1,m}} \subset D$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, то

$$\alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_m x^m \in D.$$

Определение 1.5. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, называется выпуклой на D, если

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \tag{1.10}$$

при всех $x, y \in D$ и $\alpha \in [0,1]$.

Это неравенство отражает простое геометрическое свойство выпуклой функции: если соединить отрезком (хордой) две любые точки графика выпуклой функции, то он находится не ниже соответствующего участка графика функции.

Простыми примерами выпуклых функций одного переменного являются:

– аффинная функция $f(x) = ax + b$ на $\mathbb{R}^1$;

– квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ на $\mathbb{R}^1$ при $a > 0$;

– экспонента e^x на $\mathbb{R}^1$;

– функция $f(x) = \sin x$ на отрезке $[\pi, 2\pi]$.

Если в определении 5 заменить в (1.10) знак неравенства на $\geq$, то получим определение вогнутой функции на множестве D.

Перечислим некоторые простейшие свойства выпуклых функций.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, а $f(x), f_1(x), f_2(x)$ — выпуклые на D функции. Тогда:

1) если $\alpha \geq 0$, то функция $F(x) = \alpha f(x)$ выпукла на D,

2) функция $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ выпукла на D,

3) функция $F(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ выпукла на D,

4) функция $F(x) = -f(x)$ вогнута на D,

5) если множество $D(\alpha) = \{x \in D \colon f(x) \leq \alpha\} \neq \varnothing$, то оно является выпуклым.

Теорема 1.7 *(критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции)*. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в любой точке открытого выпуклого множества D. Для того, чтобы она была выпуклой на D необходимо и достаточно, чтобы её гессиан $f''(x)$ являлся неотрицательно определенной матрицей в любой точке $x \in D$.

1.5 Упрощенная задача выпуклого программирования. Теорема Куна–Таккера

Пусть функции $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ выпуклые и дифференцируемые на $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Упрощённой задачей выпуклого программирования будем называть задачу минимизации функции $f_0(x)$ на выпуклом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, заданном с помощью системы неравенств

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m}\}$$

Запишем эту задачу в виде

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \le 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.11}$$

Будем говорить, что для множества D выполняется *условие Слейтера*, если существует точка $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, для которой $f_i(\hat{x}) < 0$, $i = \overline{1,m}$.

Функцией Лагранжа задачи (1.11) будем называть

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),\ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

Теорема 1.8 *(Куна–Таккера).* Для того, чтобы точка $x^0 \in D$ была решением задачи (1.11) необходимо, а если выполняется условие Слейтера, то и достаточно, чтобы существовал ненулевой вектор $\lambda \in \mathbb{R}^{m+1}$ с неотрицательными компонентами $\lambda_i \ge 0$, $i = \overline{0,m}$ и такой, что

$$L'_x(x^0, \lambda) = 0_n, \quad \lambda_i f_i(x^0) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.12}$$

Причем, если выполняется условие Слейтера, можно считать $\lambda_0 = 1$.

Таким образом, если выполняется условие Слейтера, то для решения задачи (1.11) достаточно решить систему, состоящую из равенств и неравенств

$$\frac{\partial f_0(x^0)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1,n}; \quad \lambda_i f_i(x^0) = 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{1.13}$$

$$\lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}; \quad f_i(x^0) \le 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{1.14}$$

В системе (1.13), (1.14) присутствует $n+m$ уравнений относительно $n+m$ неизвестных: $x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Пример 1.1. Найти расстояние от начала координат до множества точек на плоскости, удовлетворяющих неравенствам $x_1 + x_2 \ge 4$, $2x_1 + x_2 \ge 5$.

Решение. Математическая формализация приводит к задаче вида (1.11), в которой $n = 2$, $m = 2$,

$$f_0(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad f_1(x) = 4 - x_1 - x_2, \quad f_2(x) = 5 - 2x_1 - x_2.$$

Условие Слейтера выполняется, например, при $\hat{x} = (3, 3)$. Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(4 - x_1 - x_2) + \lambda_2(5 - 2x_1 - x_2).$$

Составляя систему уравнений (1.13), получаем

$$\begin{gathered} 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \quad 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1(4 - x_1 - x_2) = 0, \quad \lambda_2(5 - 2x_1 - x_2) = 0. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Решение системы (1.15) целесообразно провести, рассматривая варианты: а) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$; б) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$; в) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; г) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Для варианта а) получаем $x = (2, 2) \in D$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$. Таким образом, точка $(2, 2)$ является, в соответствии с теоремой 8, решением задачи. В остальных вариантах решение системы (1.15) не удовлетворяет неравенствам (1.14).

2 Моделирование потребительского выбора

Товары и их потребители являются первичными элементами микроэкономики. Под товарами будем понимать всё, что является предметом сделок в данном обществе, в том числе и услуги. Под потребителем будем понимать отдельного индивидуума или группу индивидуумов, которая распределяет свой доход на покупку или потребление товаров. Предметом изучения данной главы является поведение потребителя с точки зрения рационального распределения дохода на покупку товаров, т. е. в конечном счёте ставится вопрос: сколько каждого товара он должен приобрести при заданных ценах и известном доходе, чтобы наилучшим образом удовлетворить свои потребности.

2.1 Пространство товаров и отношение предпочтения

Будем считать, что на рынке продается n видов товаров и количество каждого товара измеряется вещественным неотрицательным числом. Вид товара будем обозначать индексом i, $i = 1, 2, \ldots, n$, а через x_i — количество товара i-го вида. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ называется набором товаров. Далее считаем, что все товары обладают свойством произвольной делимости, т. е. может быть закуплено любое неотрицательное количество каждого из них.

Таким образом, все возможные наборы товаров являются векторами $x \in \mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами. Они образуют так называемое *пространство товаров:*

$$C = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$$

— неотрицательный ортант пространства $x \in \mathbb{R}^n$.

Потребитель приобретает товары с целью удовлетворения своих потребностей. У каждого потребителя есть свои вкусы, в соответствии с которыми он оценивает пользу для себя от того или иного товара, и способы оценки того или иного набора товаров. Поэтому он стремится выбрать в пространстве товаров C наилучший, с его индивидуальной точки зрения, набор товаров. Чтобы формализовать выбор потребителем набора товаров с учетом его вкусов, введем в рассмотрение так называемое *отношение предпочтения.* Считаем, что потребитель при выборе набора товаров руководствуется (свойственным лично ему) отношением предпочтения, которое мы обозначим символом $\succeq$. Для наборов x и y из пространства товаров C запись $x \succeq y$ означает, что наш потребитель либо предпочитает набор x набору y, либо не делает между ними различий (слабое предпочтение).

На этой основе можно ввести понятие *отношения безразличия (эквивалентности)*: наборы x и y из C безразличны (эквивалентны) для потребителя и писать при этом $x \sim y$ тогда и только тогда, когда каждый из них предпочтительнее по отношению к другому:

$$(x \sim y) \Leftrightarrow ((x \succeq y) \wedge (y \succeq x)).$$

Можно также ввести понятие *отношения строгого предпочтения*, а именно, потребитель предпочитает набор x набору y и писать при этом $x \succ y$ тогда и только тогда, когда $x \succ y$ и при этом $y \succeq x$ — неверно, т. е.

$$(x \succ y) \Leftrightarrow ((x \succeq y) \wedge \neg(y \succeq x)).$$

Далее, исходя из логики сравнения наборов товаров будем считать, что отношение предпочтения удовлетворяет следующим требованиям (аксиомам).

Аксиомы отношения предпочтения

1-я аксиома (совершенность или полнота). Отношение предпочтения является *совершенным*, т. е. для любых $x, y \in C$ выполняется $x \succeq y$ или $y \succeq x$ Это означает, что для любых товаров из C существует отношение предпочтения.

2-я аксиома (транзитивность). Отношение предпочтения транзитивно, т. е., если $x \succeq y$ и $y \succeq x$, то $x \succeq z$.

Замечание 1. Из 1-й аксиомы вытекает рефлексивность $x \succeq x$, $\forall\, x \in C$, а из 2-й — транзитивность отношения эквивалентности:

$$((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z),$$

а также его рефлексивность

$$x \sim x, \quad \forall\, x \in C$$

и симметричность

$$(x \sim y) \Leftrightarrow (y \sim x).$$

Отношение безразличия разделяет пространство товаров на *множества безразличия*. Каждое из таких множеств состоит из всех наборов безразличных к некоторому набору x:

$$T_x = \{y \in C : y \sim x\}.$$

Введем также в рассмотрение *предпочтительные множества*

$$P_x = \{y \in C : y \succeq x\}$$

и *непредпочтительные множества*

$$NP_x = \{y \in C : x \succeq y\}.$$

3-я аксиома (непрерывность). Отношение предпочтения является непрерывным, в том смысле что множества P_x и NP_x являются замкнутыми.

4-я аксиома (ненасыщаемость). Выполняется соотношение

$$(x \geq y) \Rightarrow (x \succeq y).$$

5-я аксиома (строгая выпуклость). Выполняется

$$(y \succeq x) \Rightarrow \alpha y + (1-\alpha)x \succ x, \quad \forall\, \alpha \in (0,1).$$

Это можно понимать как строгую выпуклость множеств предпочтения P_x.

2.2 Функция полезности

Отношение предпочтения, логически понятное с точки зрения сравнения и выбора набора товаров, является больше качественной категорией и не приспособлено для проведения количественных исследований. Поэтому желательно располагать таким инструментом, который, с одной стороны, отражал бы все основные свойства отношения предпочтения и, с другой стороны, давал бы возможность его количественного измерения. Таким инструментом является *функция полезности*.

Определение 2.1. Пусть на пространстве товаров определено отношение предпочтения. Любая функция $u(\cdot)\colon C \to \mathbb{R}^1$ такая, что $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда когда $x \succeq y$ называется функцией полезности, соответствующей этому отношению предпочтения.

Замечание 2. Как доказал Дж. Дебрэ (G. Debreu, 1954), из аксиом 1–3 следует существование действительной функции $u(\cdot)$, определенной на C, такой, что

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succeq y.$$

Замечание 3. Функцию полезности можно построить не единственным образом. Если $u(x)$ — некоторая функция полезности, а $\varphi(\cdot)$ – строго возрастающая функция одного переменного, то и $\varphi(u(x))$ — также является функцией полезности.В частности $\varphi_1(x) = au(x) + b$, где $a > 0$ и $\varphi_2(x) = e^{u(x)}$ также являются функциями полезности.

Замечание 4. Аксиома ненасыщения с помощью функции полезности может быть записана в виде

$$(x \geq y) \Rightarrow (u(x) \geq u(y)),$$
$$((x \geq y) \wedge (x \neq y)) \Rightarrow (u(x) > u(y)).$$

Замечание 5. Если $u(x)$ — дифференцируемая на C функция, то положительность ее частных производных

$$Mu(x) \overset{\mathrm{df}}{=} u'(x) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)^\top > 0_n$$

обеспечивает выполнение аксиомы ненасыщения.

Частная производная $Mu_i(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ называется *предельной полезностью* i-го товара. Её положительность ведет к тому, что возрастание потребления i-го товара при том же потреблении остальных ведет к увеличению полезности набора.

Замечание 6. Если $u(x)$ — дважды дифференцируемая на C функция и матрица

$$u''(x) = \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$$

является отрицательно определенной всюду на C, то это обеспечивает строгую вогнутость функции $u(x)$ на C.

Из отрицательной определенности следует (критерий Сильвестра)

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(Mu_i(x)\right) < 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in C,$$

т. е. *предельная полезность любого товара уменьшается по мере его потребления.* Это явление получило название *закона Госсена.*

Примеры функций полезности

1. *Функция полезности с полным взаимозамещением благ:*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$

где $b_i > 0$ является числовой оценкой полезности от потребления единицы товара i-го вида. При $n = 2$ кривая безразличия имеет вид $b_1x_1 + b_2x_2 = c$. Отсюда можно выразить $x_2 = -\frac{b_1}{b_2}x_1 + \frac{c}{b_2}$, что говорит о возможности компенсации изменения потребления 1-го товара 2-м при сохранении значения функции полезности.

2. *Функция полезности с полным взаимодополнением благ:*

$$u(x) = \min\left\{\frac{x_i}{b_i}, i = \overline{1, n}\right\}.$$

3. *Неоклассическая функция полезности Кобба–Дугласа:*

$$u(x) = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i}, \quad b_1 + \ldots + b_n = 1, \quad b \in (0, 1), \quad a > 0.$$

4. *Квадратичная функция полезности:*

$$u(x) = \langle a, x\rangle + \frac{1}{2}x^\top Bx,$$

где B — отрицательно определенная матрица размерности $n \times n$ и $a + x^\top B > 0_n$.

2.3 Неоклассическая задача потребления

Здесь мы приведем и исследуем классическую математическую модель задачи индивидуального потребительского выбора.

2.3.1 Постановка задачи

Содержательно эта задача формулируется так: сколько товаров каждого вида, из имеющихся на рынке, следует купить потребителю, чтобы максимально удовлетворить себя, и при этом суммарная стоимость купленных товаров не должна превышать его доход.

Вводим обозначения: p_i — цена i-го товара, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^\top$ — вектор цен, I — доход потребителя. Тот факт, что стоимость набора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in C$ не должна превышать доход, можно записать в виде

$$\langle p, x\rangle \leq I.$$

Таким образом, множество наборов товаров, доступных потребителю для закупки можно выразить как

$$B(p, I) = \{x \in C : \langle p, x\rangle \leq I\}. \tag{2.1}$$

Если использовать понятие отношения предпочтения, то наша задача сводится к выбору из множества $B(p, I)$ наиболее предпочтительного, т. е. к отысканию $x^* \in B(p, I)$ такого, что

$$x^* \succeq x, \quad \forall\, x \in B(p, I). \tag{2.2}$$

Мы далее будем считать, что нам известна функция полезности $u(x)$, определенная на пространстве товаров C, которая выражает отношение предпочтения в соответствии с ее определением. Тогда задачу (2.2) можно записать в виде

$$u(x) \to \max_{x \in B(p,I)}, \tag{2.3}$$

где множество $B(p, I)$ определено в (2.1).

2.3.2 Применение теоремы Куна–Таккера

Далее будем предполагать, что:

1) функция непрерывна $u(x)$ и дважды дифференцируема на пространстве товаров C,

2) все предельные полезности товаров положительны

$$Mu_i(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in C,$$

3) матрица Гессе функции полезности $u''(x) = \left(\dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ является отрицательно определенной при любом $x \in C$.

Нетрудно видеть, что $B(p, I)$ — ограниченное замкнутое множество. Поскольку $u(x)$ считаем непрерывной функцией, то по теореме Вейерштрасса решение задачи (2.3) существует, а из строгой вогнутости функции полезности, которая следует из требования 3), вытекает его единственность. Задачу (2.3) можно переписать в эквивалентной форме

$$f_0(x) \to \min_{x \in B(p,I)}, \tag{2.4}$$

$$B(p, I) = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \le 0,\ i = \overline{1, n+1}\},$$

где функции $f_i(x) = -x_i$, $i = \overline{1, n}$; $f_{n+1}(x) = \langle p, x\rangle - I$ являются линейными, а функция $f_0(x) = -u(x)$ — строго выпуклой на C. Очевидно, что условие Слейтера выполняется для точки $\widehat{x} = \left(\dfrac{I}{2p_1 n}, \dfrac{I}{2p_2 n}, \ldots, \dfrac{I}{2p_n n}\right)$.

Следовательно, для функции Лагранжа можно положить $\lambda_0 = 1$ и она примет вид

$$L(x,\lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i(x) = -u(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1}(\langle p, x\rangle - I). \quad (2.5)$$

По теореме Куна–Таккера, если набор $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^\top$ является решением задачи (2.4), то существуют $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, n+1}$ такие, что

$$L'_x(x^*, \lambda) = 0_n, \quad \lambda_i f_i(x^*) = 0, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad x^* \in B(p, I). \quad (2.6)$$

Выделим и переобозначим ввиду особой значимости множитель $\mu = \lambda_{n+1}$. Учитывая конкретный вид функции Лагранжа (2.5) и функций $f_i(x)$, соотношения (2.6) можно переписать в виде

$$\mu p_i = Mu_i(x^*) + \lambda_i, \quad (2.7)$$

$$\lambda_i x_i^* = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.8)$$

$$\mu(\langle p, x^*\rangle - I) = 0, \quad (2.9)$$

$$x^* \geq 0_n, \quad \langle p, x\rangle - I \leq 0. \quad (2.10)$$

2.3.3 Выводы

Пусть набор x^* вместе с $\lambda_i \geq 0$, $\mu \geq 0$ является решением системы (2.7)–(2.10).

1. Если i-й товар закуплен в некотором количестве $x_i^* > 0$, то в соотвествии с (2.8) множитель $\lambda_i = 0$ и тогда из (2.7) получаем

$$\frac{Mu_i(x^*)}{p_i} = \mu, \quad \forall\, i \colon x_i^* > 0. \quad (2.11)$$

Таким образом отношение предельной полезности товара к его цене одинаково для всех покупаемых товаров. Множитель Лагранжа μ интерпретируется как предельная полезность единицы денег. Поэтому равенство

$$\frac{Mu_1(x^*)}{p_1} = \ldots = \frac{Mu_n(x^*)}{p_n}$$

означает, что предельная полезность единицы денег одинакова для каждого товара. Именно при таком распределении дохода потребитель получает максимум полезности. С экономической точки зрения это объясняется так. Если полезность от расхода дополнительного рубля на питание выше, чем от этого рубля на одежду, то потребитель может увеличить полезность за счет роста расходов на питание. А это уменьшает расход на одежду. Это перераспределение будет продолжаться, пока предельная полезность расходов на питание выше чем на одежду. По закону Госсена предельная полезность продуктов постепенно снизится, вызывая рост расходов на одежду. Только когда предельная полезность расходов на одежду и питание сравняются, будет достигнут максимум полезности.

2. Учитывая, что предельная полезность каждого товара положительна, из (2.11) получаем $\mu > 0$. А тогда из (2.9) следует $\langle p, x^* \rangle - I = 0$, т. е. весь доход должен быть израсходован.

3. Будем считать, что потребитель покупает все виды товаров, так как в противном случае можно исключить из рассмотрения непокупаемый товар и уменьшить размерность задачи. Тогда в соответствии с (2.7)–(2.8) оптимальный набор удовлетворяет системе

$$Mu(x^*) - \mu p = 0_n, \tag{2.12}$$

$$\langle p, x^* \rangle - I = 0. \tag{2.13}$$

Соотношение (2.13) означает, что x^* лежит на бюджетном множестве

$$x^* \in \{x \in C : \langle p, x \rangle - I = 0\},$$

причем вектор цен p является нормалью к нему. Поскольку вектор $u'(x^*) = Mu(x^*)$ — нормаль к множеству безразличия $T_{x^*} = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = u(x^*)\}$ в точке x^*, то соотношение (2.12) означает, что x^* — точка касания бюджетного множества и множества безразличия T_{x^*}.

4. Ясно, что решение задачи (2.3) зависит от вектора цен p и уровня дохода I:

$$x^* = x^*(p, I) = (x_1^*(p, I), \ldots, x_n^*(p, I))^\top.$$

Функция $x_i^*(p, I)$ называется *функцией спроса на i-й товар*, она характеризует значение спроса в зависимости от цен на товары и дохода.

Возьмём $\alpha > 0$ и рассмотрим задачу (2.3) для нового вектора цен $p(\alpha) = \alpha p$ и дохода $I(\alpha) = \alpha I$. Тогда, очевидно, для нового допустимого множества наборов товаров имеем:

$$B(p(\alpha), I(\alpha)) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p(\alpha), x \rangle - I(\alpha) \leq 0,\ x \geq 0_n\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle - I \leq 0,\ x \geq 0_n\},$$

т. е. $B(p(\alpha), I(\alpha)) = B(p, \alpha)$. Следовательно, поскольку функция полезности та же самая, получаем

$$x^*(\alpha p, \alpha I) = x^*(p, I).$$

Это означает, что функции спроса являются положительно однородными нулевой степени относительно совокупности цен и дохода.

2.4 Сравнительная статика потребления

Для прогнозирования спроса $x^*(p, I)$ важно знать как он реагирует на изменение цен и на изменение дохода. Эту реакцию можно отслеживать по значениям частных производных $\dfrac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_i}$ и $\dfrac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I}$. Желательно также знать реакцию предельной полезности денег $\mu(p, I)$ т. е. производные $\dfrac{\partial \mu(p,I)}{\partial p_i}$ и $\dfrac{\partial \mu(p,I)}{\partial I}$. Тем самым мы будем изучать чувствительность решения задачи (2.3) к изменениям параметров (метод сравнительной статики).

2.4.1 Основное матричное уравнение теории потребления

Как отмечалось в п. 2.3, при сделанных предположениях относительно функции полезности решение задачи теории потребления (2.3) существует и единственно, причем оно обязано удовлетворять системе (2.12)–(2.13). Подстановка в эту систему решения $x^*(p, I)$ и соответствующего множителя Лагранжа $\mu = \mu(p, I)$ обращает данные уравнения в тождества относительно вектора цен p и дохода I:

$$I - \langle p, x^*(p, I)\rangle \equiv 0,$$
$$u'(x^*(p, I)) - \mu(p, I)p \equiv 0_n.$$

Перепишем эти тождества в скалярной форме:

$$I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*(p, I) \equiv 0, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial u(x^*(p,I))}{\partial x_i} - \mu(p, I)p_i \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.15}$$

Показатели сравнительной статики получим, дифференцируя эти тождества по p и I.

а) Влияние изменения дохода

Продифференцируем тождества (2.14)–(2.15) по I:

$$1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial I} = 0, \tag{2.16}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial I} - p_i \cdot \frac{\partial \mu}{\partial I} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.17}$$

Обозначим через $\dfrac{\partial x^*}{\partial I} = \left(\dfrac{\partial x_1^*}{\partial I}, \ldots, \dfrac{\partial x_n^*}{\partial I}\right)^\top$. Тогда систему (2.16)–(2.17) можно переписать в виде

$$-p^\top \frac{\partial x^*}{\partial I} = -1,$$
$$-p\frac{\partial \mu}{\partial I} + u''(x^*(p, I)) \cdot \frac{\partial x^*}{\partial I} = 0_n,$$

или в форме матричного уравнения относительно $\dfrac{\partial \mu}{\partial I}$ и $\dfrac{\partial x^*}{\partial I}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^\top \\ -p & u''(x^*(\cdot)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mu}{\partial I} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0_n \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Замечание. Матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^\top \\ -p & u''(x) \end{pmatrix}$$

не вырождена. Действительно, в противном случае существовал бы вектор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^\top \neq 0_n$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i = 0,$$
$$u''(x)\beta = -p,$$

откуда вытекало бы $\langle u''(x)\beta, \beta\rangle = 0$, что противоречит отрицательной определенности матрицы $u''(x)$. Следовательно систему (2.18) можно решить и получить искомые значения $\dfrac{\partial x^*}{\partial I}$ и $\dfrac{\partial \mu}{\partial I}$.

б) Влияние изменения цены

Рассмотрим влияние одной цены, считая остальные цены и доход неизменными. Дифференцируя (2.14)–(2.15) по p_l, получаем

$$-x_l^* - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_l} = 0, \tag{2.19}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_n^*}{\partial p_l} - p_i \frac{\partial \mu}{\partial p_l} - \mu \delta_{il} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.20}$$

Здесь $\delta_{il} = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ 1, & i = l \end{cases}$ — символ Кронекера.

Если обозначим через $\dfrac{\partial\mu}{\partial p}=\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial p_1},\ldots,\dfrac{\partial\mu}{\partial p_n}\right)$,

$$\frac{\partial x^*}{\partial p}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\end{pmatrix}$$

то совокупность всех систем (2.19)–(2.20) для $l=\overline{1,n}$ можно записать в виде

$$-p^\top\frac{\partial x^*}{\partial p}=x^{*\top},$$

$$-p\frac{\partial\mu}{\partial p}+u''(x^*)\cdot\frac{\partial x^*}{\partial p}=\mu E_n,$$

или в форме матричного уравнения относительно параметров статики $\dfrac{\partial\mu}{\partial p}$ и $\dfrac{\partial x^*}{\partial p}$:

$$\begin{pmatrix}0 & -p^\top\\ -p & u''(x^*)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\mu}{\partial p}\\ \frac{\partial x^*}{\partial p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{*\top}\\ \mu E_n\end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Здесь E_n — единичная матрица размерности $n\times n$.

в) Влияние компенсированного изменения цены

Будем предполагать, что изменение цены компенсируется соответствующим изменением дохода так, чтобы полезность оптимального набора не изменилась. В силу (2.12)–(2.13) имеем

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n=\langle u'(x),dx\rangle=\mu\langle p,dx\rangle, \tag{2.22}$$

$$dI=\langle p,dx\rangle+\langle dp,x\rangle. \tag{2.23}$$

Таким образом, чтобы полезность оставалась неизменной, т. е. $du=0$, необходимо, чтобы $\langle p,dx\rangle=0$. Это будет выполняться, если, в соответствии с (2.23),

$$dI=\langle dp,x\rangle.$$

Следовательно, если цена p_l возрастает до p_l+dp_l, а остальные цены не изменились, то дополнительный доход $dI=dp_l\cdot x_l^*$ обеспечивает ту же полезность. Дифференцируя (2.14)–(2.15) по p_l при условии $dI=dp_lx_l^*$ или $\dfrac{dI}{dp_l}=x_l^*$, получаем

$$x_l^*-x_l^*-\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial x_i^*}{\partial p_l}=0, \tag{2.24}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial p_l} - p_i \frac{\partial \mu}{\partial p_l} - \mu \delta_{il} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.25}$$

Введем соответствующие обозначения

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\mathrm{comp}}, \quad i,j = \overline{1,n},$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial p} = \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial p_1}\right)_{\mathrm{comp}}, \ldots, \left(\frac{\partial \mu}{\partial p_n}\right)_{\mathrm{comp}}\right).$$

Тогда совокупность систем (2.24)–(2.25) для $l = \overline{1,n}$ можно записать в виде

$$-p^\top \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} = 0_n^\top,$$
$$-p\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} + u''(x^*)\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right) = \mu E_n,$$

или в форме матричного уравнения относительно параметров сравнительной статики $\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}}$ и $\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^\top \\ -p & u''(x^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} \\ \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n^\top \\ \mu E_n \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Сравнивая (2.18), (2.21) и (2.26) приходим к выводу, что можно записать единое уравнение относительно всей совокупности параметров сравнительной статики

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^\top \\ -p & u''(x^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial I} & \frac{\partial \mu}{\partial p} & \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} \\ \frac{\partial x^*}{\partial I} & \frac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x^{*\top} & 0_n^\top \\ 0_n & \mu E_n & \mu E_n \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

которое называется *основным матричным уравнением теории потребления.*

2.4.2 Уравнение Слуцкого

Как было отмечено ранее, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^\top \\ -p & u''(x^*) \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Следовательно, существует обратная к ней. Тогда решение уравнения (2.27) можно выразить как

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial I} & \frac{\partial\mu}{\partial p} & \left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} \\ \frac{\partial x^*}{\partial I} & \frac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p^\top \\ -p & u''(x^*) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & x^{*\top} & 0_n^\top \\ 0_n & \mu E_n & \mu E_n \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^\top \\ -p & u''(x^*) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} \lambda & \lambda p^\top (u''(x^*))^{-1} \\ \hdashline \lambda (u''(x^*))^{-1} p & \lambda (u''(x^*))^{-1} p p^\top (u''(x^*))^{-1} + (u''(x^*))^{-1} \end{array}\right), \tag{2.29}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{p^\top (u''(x^*))^{-1} p}.$$

Теперь можем из (2.28)– (2.29) получить решение в явном виде:

$$\frac{\partial x^*}{\partial I} = -\lambda (u''(x^*))^{-1} p, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \lambda (u''(x^*))^{-1} p x^{*\top} + \lambda (u''(x^*))^{-1} p p^\top (u''(x^*))^{-1} \mu + (u''(x^*))^{-1} \mu, \tag{2.31}$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} = \lambda (u''(x^*))^{-1} p p^\top (u''(x^*))^{-1} \mu + (u''(x^*))^{-1} \mu. \tag{2.32}$$

Нетрудно видеть, что из (2.30)–(2.32) следует связь параметров сравнительной статики в виде

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\mathrm{comp}} - \frac{\partial x^*}{\partial I} \cdot x^{*\top}. \tag{2.33}$$

Это так называемое *уравнение Слуцкого.* (Евгений Слуцкий (1880–1948) — русский экономист, исследователь теории спроса.) Перепишем (2.33) в координатной форме:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_l} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_l}\right)_{\mathrm{comp}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} \cdot x_l^*, \quad i, l = \overline{1, n}. \tag{2.34}$$

Левую часть уравнения $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_l}$ принято называть *общим эффектом* (влияния цены на спрос). Первое слагаемое $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_l}\right)_{\mathrm{comp}}$ в правой части – *влиянием замены* (т. е. компенсированного изменения цены на спрос), второе слагаемое $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} \cdot x_l^*$ — *влиянием дохода.*

Сделаем некоторые выводы:

1. Поскольку матрица $(u''(x^*))^{-1}$ как и $u''(x^*)$ является отрицательно определенной, то из (2.32) следует, что и матрица влияния замены $\left(\dfrac{\partial x*}{\partial p}\right)_{\text{comp}}$ является отрицательно определенной. Отсюда вытекает

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{comp}} < 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.35}$$

Таким образом, компенсированное возрастание цены товара приводит к уменьшению спроса на товар.

2. Из уравнения Слуцкого (2.34), учитывая симметричность матрицы $\left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\text{comp}}$, которая следует из (2.32), получаем

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_l} + \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_l^* = \frac{\partial x_l^*}{\partial p} + \frac{\partial x_l^*}{\partial I} x_i^*, \quad i, l = \overline{1, n}.$$

— *условие симметричности.*

3. Из (2.34), в частности, следует

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{comp}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_i^* \tag{2.36}$$

Таким образом, если второе слагаемое справа мало, то учитывая (2.35), $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$.

2.4.3 Типы товаров

Определение 2.2. Товар i-го вида называется
нормальным, если $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$, *товаром Гиффина*, если $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0$,
ценным, если $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$, *малоценным*, если $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0$.

Определение 2.3. Товары i-го и j-го вида называются
взаимозаменяемыми, если $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} > 0$,
взаимодополняемыми, если $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} < 0$.

Из (2.35)–(2.36) получаем

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_i^* < 0$$

Отсюда вытекает, что:

- если $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0$, то $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} x_i^* < 0$, т. е. товар Гиффина обязательно является малоценным;
- если $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$, то $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$, т. е. ценный товар обязательно является нормальным.

В общем случае каждый товар попадает в одну из категорий:

– *нормальный и ценный* $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$, $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$;

– *нормальный и малоценный* $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$, $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0$;

– *товар Гиффина и малоценный* $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0$, $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0$.

Хрестоматийный пример товара Гиффина — картофель в Ирландии конца XIX века. В то время покупка картофеля была большей частью расходов населения. Но по мере увеличения доходов потребитель предпочитал покупать меньше картофеля и больше мяса. В случае же возрастания цены картофеля, реальный доход понижался настолько, что потребители были не в состоянии покупать столько мяса, сколько прежде, и поэтому были вынуждены покупать еще больше картофеля.

2.4.4 Условия агрегации Энгеля и Курно

Умножим обе части (2.32) справа на вектор цен

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{\text{comp}} \cdot p = \lambda (u''(x^*))^{-1} p p^\top (u(x^*))^{-1} p\mu + (u''(x^*))^{-1} p\mu = 0_n. \quad (2.37)$$

или в координатном виде

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_l}\right)_{\text{comp}} \cdot p_l = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.38)$$

Из (2.38), принимая во внимание (2.35) следует, что для любого i существует $l \neq i$ такое, что

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_l}\right)_{\text{comp}} > 0.$$

Таким образом каждому товару соответствует по крайней мере один товар, который составляет с ним взаимозаменяемую пару. Из уравнения Слуцкого (2.33) и (2.37), учитывая что $x^{*\top} \cdot p = I$, имеем

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} \cdot p + \frac{\partial x^*}{\partial I} \cdot I = 0_n,$$

или в координатной форме

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^*}{\partial p_l} \cdot p_l + \frac{\partial x_i^*}{\partial I} \cdot I = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Это можно переписать в форме

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{p_l}{x_i^*} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_l} + \frac{I}{x_i^*} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial I} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.39}$$

Здесь $\frac{p_l}{x_i^*} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_l}$ — эластичность спроса на i-й товар по отношению к цене p_l; $\frac{I}{x_i^*} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial I}$ — эластичность спроса на i-й товар по отношению к доходу.

Таким образом, соотношение (2.39) означает, что для всякого товара сумма всех эластичностей равна нулю, или сумма всех эластичностей по цене равна отрицательной эластичности по доходу.

Из (2.30) следует

$$p^{\top} \frac{\partial x^*}{\partial I} = 1 \tag{2.40}$$

— *условие агрегации Энгеля.* Из (2.40) следует, что все товары не могут быть одновременно малоценными, т. е. существует хотя бы один ценный.

Умножая левую и правую часть уравнения Слуцкого (2.33) слева на $p^{\top}$ и используя (2.37) и (2.40), получаем

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)^{\top} p + x^* = 0_n \tag{2.41}$$

— *условие агрегации Курно.* В координатной форме его можно переписать как

$$x_l^* = -\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_l}, \quad l = \overline{1, n},$$

т. е. значение спроса на l-й товар равно отрицательной взвешенной сумме изменений спроса по отношению к цене l-го товара. В качестве весовых коэффициентов выступают цены на товары.

3 Математическая модель производства

Под *производством* можно понимать процесс взаимодействия экономических факторов, который завершается выпуском какой-либо продукции. Производство — основная область деятельности фирмы.

Фирма — второе основное понятие микроэкономики. Под фирмой будем понимать организацию, осуществляющую затраты экономических ресурсов для изготовления продукции, которую она продает потребителям. Деятельность фирмы многогранна. Мы же здесь для простоты при построении математической модели будем учитывать лишь основную конечную цель. При этом в качестве основной конечной цели фирмы будем считать получение наибольшей прибыли от реализации своей продукции. Прибыль понимается как разность дохода от реализации продукции и издержек производства. Издержки производства — общие выплаты за все виды затрат.

Таким образом, основные факторы, которые должны быть учтены при моделировании задачи фирмы, — это выпуск продукции и ее цена, затраты ресурсов и их цены, издержки и производственные возможности фирмы.

3.1 Пространство затрат и производственная функция

Будем считать, что фирма производит только один вид продукции, используя n видов затрат. Если через x_i обозначим количество i-го вида затрат, используемого фирмой, то в целом получим вектор-столбец

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$$

который будем называть *вектором затрат*. Множество всех возможных векторов затрат, в предположении, что все затраты могут непрерывно изменяться, будем называть *пространством затрат*. Поскольку затраты естественно считать неотрицательными величинами, пространство затрат можно считать неотрицательным ортантом евклидова пространства:

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$$

Определение 3.1. Каждой точке пространства затрат $x \in T$ можно сопоставить максимальный выпуск продукции $f(x)$, произведенный фирмой при использовании этих затрат. Эту функциональную связь $f(\cdot) \colon T \to \mathbb{R}^1$ между затратами и выпуском продукции будем называть *производственной функцией (п.ф.)*.

Характеристики производственной функции

Пусть $x \in T$ — некоторый вектор затрат, $\alpha > 0$. Под произведением вектора x на число α понимаем

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)^\top$$

Определение 3.2. Говорят, что п.ф. характеризуется *постоянным доходом* от расширения масштаба производства, если

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \text{при} \quad \alpha > 1,$$

т. е. выпуск возрастает в той же пропорции, что и затраты.

П.ф. характеризуется *возрастающим (убывающим)* доходом от расширения масштаба производства, если возрастает в большей (меньшей) степени чем затраты

$$f(\alpha x) > \alpha f(x),$$
$$(f(\alpha x) < \alpha f(x)).$$

Введённые показатели характеризуют изменение п.ф. в зависимости от пропорционального изменения затрат. В общем случае чувствительность функции к изменению параметров естественно измерять по частным производным этой функции. Однако возникает следующая проблема. Для измерения одного и того же вида ресурсов или выпуска продукции могут применяться различные единицы измерения. По этой причине вычисление отношения приращения функции $f(\cdot)$, если оно измеряется в разных единицах измерения, к одному и тому же приращению аргумента приводит к разным результатам. Чтобы избежать возникающего неудобства, экономисты в качестве меры чувствительности п.ф. к изменениям затрат используют понятия *эластичности.* Это процентное изменение п.ф. отнесенное к процентному изменению аргумента.

Определение 3.3. *Эластичностью выпуска (п.ф.) по отношению к изменению затрат i-го вида* называется

$$\varepsilon_i(x) = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Эластичностью п.ф. для вектора затрат $x \in T$ называется

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x).$$

На практике нередко возникает вопрос о замещении одного вида ресурсов (частично) на другой вид, но так, чтобы это замещение не отразилось на выпуске продукции, т. е. значение п.ф. сохранилось.

Определение 3.4. *Предельной нормой замещения i-го ресурса k-м ресурсом* называется

$$s_{ik}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Bigg/ \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Эта величина примерно показывает сколько дополнительно надо затратить k-го ресурса при уменьшении затрат i-го ресурса на единицу так, чтобы значение п.ф. не изменилось.

Следующее понятие говорит о том, как меняется соотношение x_k/x_i при изменении предельной нормы замещения.

Определение 3.5. *Эластичностью замещения i-го ресурса k-м ресурсом* называется

$$\sigma_{ik}(x) = \frac{d \ln(x_k/x_i)}{d \ln s_{ik}(x)}.$$

Примеры производственных функция для $n = 2$

1. Линейная п.ф.:

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad a_i > 0, \quad \varepsilon = 1, \quad \sigma_{1,2}(x) = \infty.$$

2. П.ф. Кобба–Дугласа

$$f(x) = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \quad b_j > 0, \quad b_1 + b_2 = 1, \quad \varepsilon(x) = b_1 + b_2, \quad \sigma_{1,2}(x) = 1.$$

3. П.ф. «затраты-выпуск»

$$f(x) = \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\}, \quad c_i > 0, \quad , \varepsilon(x) = 1, \quad \text{если} \quad \frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2}, \quad \sigma_{1,2} = 0.$$

3.2 Неоклассическая задача теории фирмы

Задача фирмы, как организации производящей затраты производственных ресурсов для изготовления продукции, сводится к определению количества выпускаемой продукции и необходимых для этого затрат. Фирма должна решить свою задачу оптимальным образом. При этом оптимальность можно понимать неоднозначно. Это может быть, например, достижение необходимого уровня выпуска с наименьшими затратами, или получение максимального дохода без превышения заданного уровня издержек. Мы ограничимся задачей получениям наибольшей прибыли.

3.2.1 Постановка задачи

Итак, будем считать, что цель фирмы заключается в максимизации прибыли путем выбора вектора затрат при заданных ценах на затраты $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^\top$ с последующим производством, отражаемого производственной функцией $f(x)$ и реализации продукции по заданной цене p. Прибыль $\Pi = \Pi(x)$ равна полученному фирмой от продажи продукции доходу $R = R(x)$ за вычетом издержек производства $\Pi(x) = R(x) - C(x)$. Будем считать, что

$$R(x) = p \cdot f(x), \quad C(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \langle w, x \rangle,$$

т. е. учитываем только переменные издержки.

Долгосрочная задача фирмы. В этом случае фирма свободна выбирать вектор из пространства затрат T, т. е. получаем задачу

$$\Pi(x) \equiv pf(x) - \langle w, x \rangle \to \max, \quad x \in T. \tag{3.1}$$

В понятия «долгосрочная» вкладывается тот смысл, что охватывается период, достаточный для принятия и реализации крупномасштабных решений: наращения и сокращеия основных фондов, изменение структуры производства, определение долгосрочных инвестиций и т. д. Другими словами, у фирмы достаточно времени, чтобы она могла принять меры к тому, чтобы любой вектор затрат стал «доступным».

В случае *краткосрочной задачи* появляются некоторые дополнительные ограничения на выбор затрат (например, пониженные лимиты на определенные виды затрат из-за договорных обязательств и т. п. Они могут быть записаны в виде функциональных неравенств вида $g_j(x) \le b_j$, $j = \overline{1, m}$. Тогда задача принимает вид

$$pf(x) - \langle w, x \rangle \to \max,$$
$$x \in \{y \in T \colon g_j(x) \le b_j, j = \overline{1, m}\}.$$

3.2.2 Применение к решению долгосрочной задачи теоремы Куна–Таккера

Далее будем предполагать, что производственная функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема на T,

2) все частные производные п.ф. неотрицательны на T:

$$MP_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \ge 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in t.$$

$MP_i(x)$ называется предельным продуктом i-го вида,
$MP(x) = (MP_1(x), \ldots, MP_n(x))^\top$ — вектор предельного продукта.

3) матрица Гессе п.ф. $f''(x) = \left(\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ — отрицательно определена всюду на T.

Отметим, что в соответствии с критерием Сильвестра последнее условие влечет строгую вогнутость п.ф. на пространстве затрат и, кроме того,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(MP_i(x)) < 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Это неравенство выражает закон убывающей отдачи (доходности): по мере того, как затраты одного вида добавляются, при фиксированных объемах других затрат, количество дополнительно произведенного продукта снижается.

Если введем обозначения

$$f_0(x) = \langle w, x\rangle - f(x), \quad f_i(x) = -x_i, \quad i = \overline{1,n},$$

то задачу (3.1) можно записать в виде

$$f_0(x) \to \min, \quad x \in T,$$

где $T = \{x \in \mathbb{R}^n\colon f_i(x) \leq 0, i = \overline{1,n}\}$. Поскольку все функции $f_i(x), \quad i = \overline{0,n}$ являются выпуклыми на $\mathbb{R}^n$, к её решению можно применить теорему Куна–Таккера. Условие Слейтера, очевидно, выполняется. Поэтому функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, \lambda) = \langle w, x\rangle - pf(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

а её частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = w_i - p\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Таким образом, если вектор затрат $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^\top$ является решением задачи (3.1), то в соответствии с теоремой Куна–Таккера найдутся такие $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1,n}$, что

$$w_i = p\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} + \lambda_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.2}$$

$$\lambda_i x_i^* = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad x_i^* \geq 0. \tag{3.3}$$

3.2.3 Выводы

1. Если все виды затрат были использованы, т. е. $x^* > 0_n$, то из (3.2)–(3.3) следует

$$pMP_i(x^*) = w_i, \quad i = \overline{1, n}$$

— стоимость предельных продуктов равна соответствующим ценам на затраты. Эти соотношения иногда называют «золотым правилом» экономики фирмы. Оно говорит о том, что наращивать объем продукции следует только до тех пор, пока с некоторого момента стоимость дополнительно произведенной продукции не сравняется со стоимостью затраченных на это ресурсов (т. е. прибыли от дополнительно произведенной продукции нет).

2. Решая задачу (3.1) для различных p и w, мы будем получать различные значения оптимального вектора затрат x^*. Таким образом x^* есть вектор-функция от p и w:

$$x^* = x^*(p, w) = (x_1^*(p, w), \ldots, x_n^*(p, w))^\top.$$

Здесь $x_i^*(p, w)$ называется функцией спроса на затраты i-го вида.

Если $\alpha > 0$, то для новой пары цен $p(\alpha) = \alpha p$, $w(\alpha) = \alpha w$ новая функция прибыли будет отличаться от прежней лишь на множитель α. Поэтому решение задачи будет тем же самым

$$x^*(\alpha p, \alpha w) = x^*(p, w), \quad \alpha > 0.$$

Таким образом функции спроса на затраты являются положительно однородными нулевой степени.

3. Подставляя функции спроса на затраты в производственную функцию в качестве аргументов, мы получим объем оптимального выпуска как функцию цен на продукцию и цен на затраты:

$$q(p, w) = f(x^*(p, w)).$$

Эта функция называется функцией предложения выпуска. Очевидно, как и функции спроса на затраты, она является положительно однородной нулевой степени относительно совокупности (p, w).

4. Множество точек пространства затрат, где п.ф. принимает одно и то же значение

$$M(\alpha) = \{x \in T \colon f(x) = \alpha\}$$

называется *изоквантой*.

А множество точек из T, где издержки одинаковы

$$N(\beta) = \{x \in T \colon \langle w, x \rangle = \beta\}$$

называется *изокостой*. Предположим, что все виды затрат были использованы, т. е. $x^* > 0_n$. Тогда в соответствии с (3.2)–(3.3) выполняется

$$pf'(x^*) = w. \tag{3.4}$$

Градиент $f'(x^*)$ является нормалью к касательной гиперплоскости, построенной к изокванте $M(\alpha)$ для $\alpha = f(x^*)$ в точке x^*, а вектор цен на затраты w — нормаль к любой изокосте. Поэтому соотношение (3.4) означает, что изокванта и изокоста, проходящие через точку x^*, касаются друг друга в этой точке. Можно построить семейство изоквант и соответствующее ему семейство изокост, касающихся этих изоквант. Отметим, что касание происходит в единственной точке, поскольку п.ф. является по предположению строго вогнутой. Совокупность всех точек касания образует в пространстве затрат кривую, которая называется *долгосрочным путем расширения фирмы.* Он показывает затраты, при которых выпуск продукции максимален при соответствующем фиксированном уровне издержек. Или, что равнозначно, он показывает затраты, минимизирующие издержки при определенном уровне выпуска.

3.3 Сравнительная статика фирмы

Проведем исследование чувствительности функций спроса на затраты и функции предложения выпуска к изменениям цен p, $w_1, \ldots, w_n$. Конкретнее, нас будут интересовать частные производные

$$\frac{\partial q(p,w)}{\partial p}, \quad \frac{\partial q(p,w)}{\partial w_i}, \quad \frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial p}, \quad \frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial w_j}, \quad i,j = \overline{1,n}$$

в предположении, что функции спроса на затраты и функция предложения выпуска дифференцируемы.

3.3.1 Основное матричное уравнение теории фирмы

В соответствии с определением функции предложения выпуска и «золотым правилом» экономики фирмы имеем тождества относительно p и w:

$$q(p,w) \equiv f(x^*(p,w)), \tag{3.5}$$

$$p\frac{\partial f(x^*(p,w))}{\partial x_i} \equiv w_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.6}$$

Далее будем использовать сокращенную запись, опуская написание значений аргументов

а) Влияние изменения цены выпуска.

Дифференцируя (3.5) и (3.6) по p , имеем

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + p \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.8}$$

Введем обозначение $\dfrac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p}, \ldots, \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p}\right)^\top$. Тогда (3.7)–(3.8) можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} -1 & (f')^\top \\ 0_n & pf'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f' \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

б) Влияние изменения цен на затраты.

Дифференцируя (3.5)–(3.6) по w_l, получаем

$$\frac{\partial q}{\partial w_l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial w_l}, \tag{3.10}$$

$$p \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial w_l} = \delta_{i,l}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.11}$$

Обозначим через

$$\frac{\partial q}{\partial w} = \left(\frac{\partial q}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial q}{\partial w_n}\right)^\top, \quad \frac{\partial x^*}{\partial w} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial w_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n^*}{\partial w_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (3.10)–(3.11) можно записать в форме

$$\begin{pmatrix} -1 & (f')^\top \\ 0_n & pf'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial q}{\partial w}\right)^\top \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n^\top \\ E_n \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Объединяя (3.9) и (3.12) получаем

$$\begin{pmatrix} -1 & (f')^\top \\ 0_n & pf'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial q}{\partial w}\right)^\top \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_n^\top \\ -f' & E_n \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

— *основное матричное уравнение теории фирмы.*

3.4 Решение основного матричного уравнения и его анализ

По предположению матрица $f''(x)$ является отрицательно определенной на T. Её невырожденность влечет невырожденность левой матрицы в уравнении (3.13). Это позволяет решить его относительно показателей сравнительной статики:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial q}{\partial w}\right)^\top \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & (f')^\top \\ 0_n & pf'' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0_n^\top \\ -f' & E_n \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{pmatrix} -1 & (f')^\top \\ 0_n & pf'' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{p}(f')^\top (f'')^{-1} \\ 0_n & \dfrac{1}{p}(f'')^{-1} \end{pmatrix}.$$

Теперь, подставляя явное выражение обратной матрицы в (3.14), получаем

$$\frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{1}{p}(f')^\top (f'')^{-1} f', \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}(f'')^{-1} f', \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial q}{\partial w} = \frac{1}{p}(f'')^{-1} f', \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial w} = \frac{1}{p}(f'')^{-1}. \tag{3.18}$$

Сделаем выводы:

1. По предположению матрица $f''(x)$ отрицательно определена, а следовательно тем же свойством обладает и матрица $(f''(x))^{-1}$. Поэтому из (3.15) следует

$$\frac{\partial q}{\partial p} > 0, \tag{3.19}$$

т. е. возрастание цены продукции всегда приводит к увеличению выпуска.

2. Из (3.7) и (3.19) учитывая, что по предположению, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, вытекает: существует хотя бы один индекс $j \in [1\colon n]$ такой, что

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p} > 0. \tag{3.20}$$

Определение 3.6. Затраты j-го вида называются *ценными* (*малоценными*), если $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p} > 0$ $\left(\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p} < 0\right)$.

Таким образом (3.20) означает, что обязательно существуют ценные виды затрат.

3. Непосредственно из (3.16)–(3.17) следует

$$\frac{\partial q}{\partial w} = -\frac{\partial x^*}{\partial p} \tag{3.21}$$

или в координатной форме $\dfrac{\partial q}{\partial w_i} = -\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p}$, $i = \overline{1, n}$. Таким образом возрастание цены продукции приводит к повышению (понижению) спроса на определенные виды затрат тогда и только тогда, когда увеличение цены на этот вид затрат приводит к сокращению (возрастанию) оптимального выпуска. В частности, увеличение цены на малоценные затраты ведет к увеличению выпуска.

4. Из (3.7), учитывая (3.21) и (3.19) получаем

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial q}{\partial w_k} > 0. \tag{3.22}$$

Поэтому, принимая во внимание неотрицательность частных производных п.ф., из (3.22) следует существование индекса $k \in [1\colon n]$ такого, что

$$\frac{\partial q}{\partial w_k} < 0, \tag{3.23}$$

т. е. возрастание цены на некоторый вид затрат ведет к уменьшениею выпуска продукции.

5. В силу (3.18) матрица $\dfrac{\partial x}{\partial w}$, как и $f''(x)$, является симметричной и отрицательно определенной. Поэтому в соотвествии с критерием Сильвестра

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i} < 0,\ i = \overline{1,n}. \tag{3.24}$$

Это означает, что повышение цена на затраты каждого вида всегда приводит к сокращению спроса на эти затраты. Кроме того, (3.24) говорит о том, что не существует «затрат Гиффина» (т. е. когда $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_i} > 0$). Данное обстоятельство является следствием того, что в отличие от задачи потребителя, фирма в долгосрочной задаче не связана бюджетным ограничением.

6. В силу симметричности матрицы $\dfrac{\partial x}{\partial w}$, имеем

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_l} = \frac{\partial x_l^*}{\partial w_i}, \quad i,l = \overline{1,n},$$

т. е. влияние изменения цены на затраты l-го вида на спрос на затраты j-го вида и влияние изменения цены на затраты i-го вида на спрос, предъявляемый на затраты l-го вида, одинаковы. В соответствии со знаком этих производных различаются следующие типы затрат.

Определение 3.7. Затраты i-го и l-го вида называются

а) *взаимозаменяемыми*, если $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_l} > 0$,

б) *взаимодополняемыми*, если $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_l} < 0$.

4 Математические модели конкурентного равновесия

В предыдущих главах мы изучали оптимальное поведение двух субъектов микроэкономики — потребителей и производителей — изолированно друг от друга. При этом было определено понятие *функций спроса на товары*, значение которых при заданных ценах на товары и доходе потребителя доставляет оптимальное значение его функции полезности, а также понятие *функции предложения выпуска* и *функций спроса на затраты*, появляющихся в результате решения задачи оптимизации прибыли фирмы при заданных ценах на продукцию и используемые виды затрат. Взаимодействие между складывающимися на рынке готовой продукции потребительским спросом и предложением фирм приводит к понятию *равновесия*.

4.1 Содержательный аспект понятия равновесия

О равновесии можно говорить вообще, как о характеристике состояния любой системы, на которую действуют различные стороны, каждая со своими интересами. В таком смысле равновесие — это то состояние системы, которое устраивает все заинтересованные в её состоянии стороны, за неимением ничего лучшего. Мы же здесь будем иметь в виду такую систему как рынок, на котором сталкиваются интересы потребителей и фирм, производящих продукцию.

Определение 4.1. Если вся масса товара, произведенного в расчете на данную цену, может быть по этой цене полностью продана и спрос на товар при этом будет полностью удовлетворен, то говорят, что по данному виду товара существует *равновесие*. Иными словами, при данной цене спрос на товар равен его предложению. Такая цена называется равновесной.

Если на рынке существует равновесие по всем видам товара, то говорят об *экономическом равновесии*. Это то состояние, к которому должна стремиться экономика, так как в этом случае нет ни дефицита товаров, ни перепроизводства, и, следовательно, удовлетворены интересы всех участников экономики.

Рассмотрим пока для простоты рынок только одного товара, считая, что существует некий *совокупный потребительский спрос* (или совокупный спрос потребительского сектора) и *совокупное предложение производственного сектора*. Обозначим через $x(p, I)$ — совокупный спрос при цене товара p и доходе потребительского сектора I; $q(p, w)$ — совокупное предложение при цене товара p и ценах $w = (w_1, \ldots, w_n)^\top$ на используемые виды затрат.

Если p^* — равновесная цена, то $x(p^*, I) = q(p^*, w)$ — имеет место равновесие.

Формально это равновесие может быть нарушено

– либо по «воле» рынка, который распоряжается ценой товара (в этом случае говорят о *ценовой причине нарушения равновесия*),

– либо по «воле» потребителя, изменение спроса которого сопряжено с изменением его дохода, либо по «воле» производителя, предложение которого зависит также от цен на затраты (в этих случаях говорят о неценовых причинах нарушения равновесия).

4.2 Влияние неценовых причин нарушения равновесия

Предположим, что при неизменном предложении потребитель отклоняется от равновесия, увеличивая или уменьшая спрос. Возможны ситуации а) $x(p^*, I_1) > q(p^*, w)$, б) $x(p^*, I_2) > q(p^*, w)$, для новых значений дохода. На координатной плоскости (p, q), цена и объем, соответствующие кривые изображены на рис. 4.1.

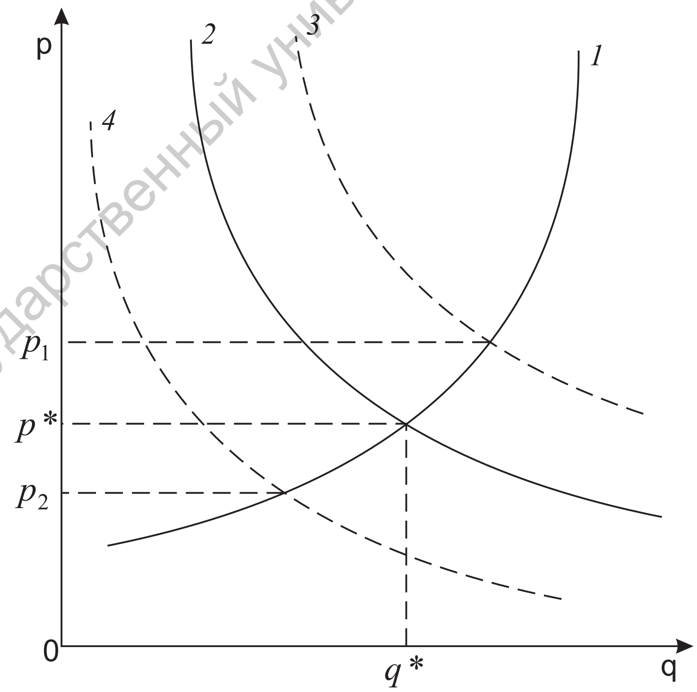

Рис. 4.1. Нарушение равновесия из-за потребителя:
1 — $q(p, w)$, *2* — $x(p, I)$, *3* — $x(p, I_1)$, *4* — $x(p, I_2)$

Если же при фиксированном спросе от равновесия отклоняется производитель, то возможны ситуации в) $x(p^*, I) > q(p^*, w^1)$, г) $x(p^*, I) < q(p^*, w^2)$, при новых значениях вектора цен на затраты. На плоскости (p, q) эти случаи можно изображены на рис. 4.2.

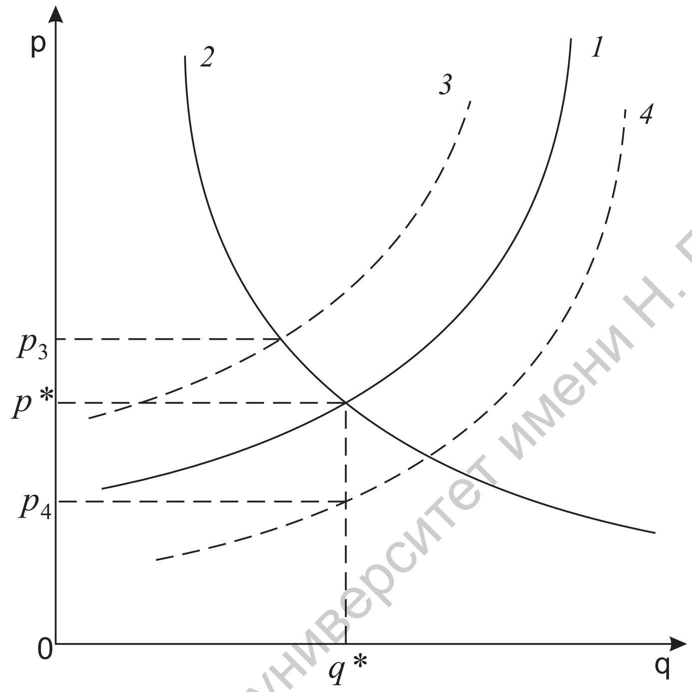

Рис. 4.2. Нарушение равновесия из-за производителя
1 — $q(p, w)$, *2* — $x(p, I)$, *3* — $q(p, w^1)$, *4* — $q(p, w^2)$

Случаи а) и в) приводят к дефициту при цене p^* и, в конечном счете к повышению равновесной цены (до p_1 и p_3 соответственно). Случаи б) и г) ведут к снижению равновесной цены (до p_2 и p_4 соответственно). Казалось бы, естественно предположить, что потребителю выгодно отклонение от равновесия в сторону снижения спроса, ведущего к снижению равновесной цены. Однако это не всегда так. Сначала надо получить ответ на вопрос — а компенсируют ли сэкономленные средства ущерб от снижения спроса.

Аналогичный вопрос возникает и при определении выгоды производителя от повышения равновесной цены. Из этих рассуждений следует, что

– одностороннее изменение спроса (функции спроса) или предложения (функция предложения) ведет к изменению равновесной цены;

– нельзя сделать однозначный вывод, есть ли стимул у потребителя и производителя стремиться к ситуации со старой равновесной ценой, а следовательно говорить об устойчивости равновесия.

4.3 Влияние ценовых причин нарушения равновесия (паутинообразная модель)

Предположим, что цена товара с равновесного значения p^* упала до величины $p_1 < p^*$. При этой цене спрос $q_1 = x(p_1, I) > q^*$. Это может привести к повышению цены. А именно, если предложение подтягивается с объема q^* до спроса q_1, то согласно кривой предложения это возможно при новой цене p_2, для которой $q_1 = q(p_2, w)$. Однако при такой цене спрос упадет до значения $q_2 = x(p_2, I)$. А если производитель действительно снижает предложение с q_1 до q_2, то это сопровождается падением цены до значения p_3, соответствующей этому объему выпуска по кривой предложения: $q_2 = q(p_3, w)$. После чего спрос вырастает до значения $q_3 = x(p_3, w)$ и так далее.

При определенном сочетании поведения кривых спроса и предложения будет наблюдаться сходящийся процесс

$$p_i \to p^*, \quad q_i \to q^*, \quad i \to \infty.$$

Данная паутинообразная модель (рис. 4.3) описывает приспособление цены по времени к вариациям спроса и предложения. Это так называемая идея процедуры рыночного регулирования цены «невидимой рукой Адама Смита». Однако следует иметь ввиду, что можно привести пример поведения кривых спроса и предложения, когда имеет место расходящийся процесс.

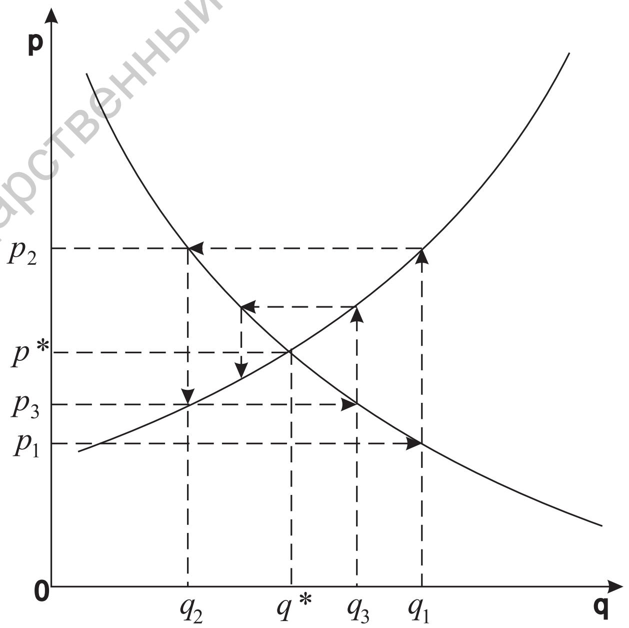

Рис. 4.3. Паутинообразная модель

4.4 Рыночный спрос и рыночное предложение. Условия совершенной конкуренции

Для того, чтобы познакомиться с некоторыми математическими моделями рынка, уточним и формализуем основные понятия рынка. К этим понятиям относятся не только товары и их цены, но также участники рынка, их спрос и предложение.

В целом, участники рынка — любые заинтересованные в купле-продаже товаров стороны: индивидуальные потребители, отдельные фирмы, совокупность потребителей некоторого региона, совокупность предприятий отрасли, финансовые организации, концерны, некоторые страны. Обычно характер решаемой задачи определяет классификацию участников рынка. В классических моделях в качестве участников рынка рассматриваются производители товаров (фирмы) и их потребители. Производители выходят на рынок для реализации продукции, а потребители для приобретения этой продукции. При такой классификации участникам рынка больше подходят названия *продавцов* и *покупателей*. Будем считать, что *потребители* могут одновременно выступать в роли *продавцов*, принадлежащих им производственных ресурсов (первичных факторов) — труд, земля, сырье. Точно также *производители* выступают в роли *покупателей* производственных ресурсов. Таким образом, любой участник рынка выступает одновременно как продавец и покупатель.

Если продавцов (покупателей) данного товара много, то между ними возможна конкуренция. Рынки можно классифицировать по характеру конкуренции.

	Один	Несколько	Много
Один	сделка	олигополия	монополия
Несколько	олигополия		
Много	монопсония	олигополия	совершенная конкуренция

Далее будем рассматривать многотоварный рынок с большим числом участников и предполагать, что относительно каждого товара имеется большое число продавцов и покупателей.

Прежде всего нам надо прояснить и формализовать понятие *совокупного (рыночного) спроса* и *совокупного (рыночного) предложения*.

В чем здесь собственно проблема? В предыдущих главах мы формализовали понятия спроса индивидуального потребителя и предложения отдельной фирмы, как результаты решения некоторых экстремальных задач, зависящих от параметров. Так как же теперь определить понятия рыночного спроса и рыночного предложения, исходя из индивидуального спроса и предложения? Эта проблема агрегирования спроса отдельных потребителей и предложений отдельных фирм является непростым вопросом.

Если говорить о формализации рыночного спроса, то на первый взгляд имеется два возможных подхода. Первый подход связан с попыткой конструировать функцию «коллективной» полезности всех потребителей и определить рыночный спрос как решение одной общей задачи по оптимизации функции полезности. Однако напомним, определение функции полезности опирается на понятие отношения предпочтения. А задача выявления коллективного предпочтения сама по себе является принципиально сложной.

Второй подход заключается в определении рыночного спроса, исходя из решений индивидуальных задач по оптимизации функций полезности каждого потребителя.

Определение 4.2. Под рыночным спросом будем понимать функцию, которая является суммой индивидуальных функций спроса всех потребителей. Соответственно, под рыночным предложением будем понимать функцию, которая является суммой функций предложения всех производителей.

Теперь уточним понятие «совершенной конкуренции». Принято считать, что рынок с совершенной конкуренцией определяется следующими признаками:

1) наличие большого числа независимых друг от друга фирм, производящих одни и те же товары. При этом доля выпуска каждой фирмы незначительна по сравнению с суммарным выпуском всех фирм;

2) наличие большого числа независимых друг от друга потребителей данных товаров. При этом доход отдельного потребителя незначителен по сравнению с суммарным доходом всех потребителей;

3) полная свобода действий всех участников рынка за исключением соглашений по контролю над рынком;

4) однородность товаров и их мобильность;

5) совершенное знание рынка (конъюнктура товаров, их цен) покупателями и продавцами.

При выполнении первых двух условий отдельные покупатели и продавцы воспринимают рыночные цены как заданные извне, не имея возможности на них повлиять. Третье условие обеспечивает наличие конкуренции как среди покупателей, так и среди продавцов. Четвертое — обуславливает возможность единой цены на товар. Пятое условие необходимо для принятия оптимального решения участниками рынка по поводу купли и продажи.

При выполнении рынком таких условий, экономическое равновесие часто называют конкурентным равновесием. Условия совершенной конкуренции считаются наиболее выгодными для общества. Однако они имеют, очевидно, идеализированный характер и поэтому понятие совершенной конкуренции имеет абстрактный оттенок. Поэтому приведенная далее модель Л. Вальраса, предполагающая рынок с совершенной конкуренцией, описывает функционирование идеального рынка и имеет больше теоретическое, чем практическое, значение. Но это не умаляет её роль как исходной точки для возможных обобщений и модификаций.

4.5 Описание общей модели Л. Вальраса

Приведем формализацию рынка, как это предложил Л.Вальрас, выразим взаимосвязи его качественных характеристик на математическом языке. Это позволит поставить и обсудить вопрос о существовании экономического равновесия и как его достичь.

4.5.1 Исходные предпосылки и обозначения

Будем считать, что выполняются условия:

- дезагрегированность участников рынка (рассматриваются отдельные потребители и отдельные производители);
- совершенность конкуренции;
- общность равновесия (рассматривается равновесие по всем товарам сразу, а не по отдельным товарам).

Предполагаем, что на рынке продаются и покупаются товары двух видов:

- готовые товары, являющиеся продуктами производства (товары конечного потребления);
- производственные ресурсы (первичные факторы производства).

Таким образом, будем рассматривать «расширенное» пространство товаров $\mathbb{R}^n_+$, где $n = n_1 + n_2$ — число видов всех товаров, n_1— число видов товаров конечного потребления, а n_2 — число видов производственных факторов. Будем далее обозначать

– индексы видов товаров буквой k, $k = \overline{1, n}$;
– индексы потребителей буквой i, $i = \overline{1, l}$;
– индексы производителей буквой j, $j = \overline{1, m}$;
– $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^\top$ — вектор цен товаров.

Выходя на рынок, каждый потребитель или производитель становится одновременно покупателем одних и продавцов других товаров. *Потребитель*, как участник рынка, не занятый в производтстве, может продавать имеющиеся у него ресурсы. *Производитель*, как участник рынка, занятый в производстве, продает свою готовую продукцию и покупает ресурсы.

Таким образом, каждый i-й потребитель характеризуется:

– начальным запасом товаров $b_i \in \mathbb{R}^n_+$,

– функцией дохода $K_i = K_i(p)$,

– вектор-функцией спроса на продукты производства $D_i = D_i(p)$ со значениями из $\mathbb{R}^{n_1}_+$.

Каждый j-й производитель характеризуется:

– вектор-функцией предложения готовой продукции $S_j = S_j(p)$ со значениями из $\mathbb{R}^{n_1}_+$,

– вектор-функцией спроса на ресурсы $Z_j = Z_j(p)$ со значениями из $\mathbb{R}^{n_2}_+$.

Ясно, что $S_j = f_j(Z_j(p))$, где $f_j(\cdot)$ — производственная вектор-фукнция j-го производителя, $j = \overline{1, m}$. Итак, в целом при таком подходе, рынок характеризуется совокупностью элементов:

$$\{\mathbb{R}^n_+,\ P,\ N,\ \{b_i, K_i(\cdot), D_i(\cdot)\}^l_{i=1},\ \{S_j(\cdot), Z_j(\cdot)\}^m_{j=1}\} \tag{4.1}$$

где $\mathbb{R}^n_+$ — пространство товаров, $P \subset \mathbb{R}^n_+$ пространство цен, $N = l + m$ — количество участников рынка.

4.5.2 Качественные характеристики рынка и их связь

Вектор цен $p \subset \mathbb{R}^n_+$ содержит цены как товаров, так и затрат. Если ранее в главах 2 и 3 эти цены считались фиксированными, то сейчас будем считать, что цены могут меняться. Однако они будут меняться не по желанию участников, а под воздействием совокупного спроса и совокупного предложения. И главным, ключевым, является вопрос: существуют ли цены, которые устраивают как потребителей, так и производителей? Уточним и формализуем основные качественные характеристики рынка.

Доход каждого потребителя предполагается состоящим из двух слагаемых:

- выручки от продажи его начального запаса товаров $b_i \in \mathbb{R}^n_+$, $i = \overline{1, l}$,
- дохода от участия в прибыли производственного сектора $V_i(p)$, который в свою очередь складывается через приобретение ценных бумаг, инвестиционной и трудовой деятельности.

Таким образом, имеем

$$K_i(p) = \langle p, b_i \rangle + V_i(p), \quad i = \overline{1, l}. \tag{4.2}$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$Y_j(p) = (S_j(p), -Z_j(p)) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n,$$

которую будем называть *производственным планом* j-го производителя. Тогда его *прибыль* выражается функцией

$$\Pi_j(p) = \langle p, Y_j(p) \rangle, \quad j = \overline{1, m}.$$

Считается, что вся прибыль производственного сектора распределяется между потребителями и поэтому

$$\sum_{i=1}^{l} V_i(p) = \sum_{j=1}^{m} \langle p, Y_j(p) \rangle. \tag{4.3}$$

Предполагается, что функции спроса на товары конечного потребления $D_i(p)$ являются результатом оптимизации функции полезности i-го потребителя при заданном доходе $K_i(p)$. Соответственно считаем, что значения функции спроса на затраты $Z_j(p)$ и функции предложения выпуска $S_j(p)$ являются результатом решения соответствующих задач по оптимизации прибыли j-го производителя при ценах p. Теперь уточним в свете сделанных обозначений и предложений понятия совокупного спроса и совокупного предложения.

Определение 4.3. а) *Функцией совокупного (рыночного) спроса* назовем вектор-функцию

$$D(p) = \sum_{i=1}^{l} \begin{pmatrix} D_i(p) \\ 0_{n_2} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} 0_{n_1} \\ Z_j(p) \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Здесь первая сумма выражает общий спрос на товары конечного потребления, а вторая — общий спрос на ресурсы.

б) *Функцией совокупного (рыночного) предложения* назовем вектор-функцию

$$S(p) = \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} S_j(p) \\ 0_{n_2} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

При таком определении смысл совокупного спроса и предложения соответствует их формированию на основе решения соответствующих индивидуальных экстремальных задач для потребителей и производителей.

4.5.3 Конкурентное равновесие по Л. Вальрасу

Определение 4.4. Набор векторов $\{D(p^*), S(p^*), p^*\}$ назовем *конкурентным равновесием* на рынке $\{\mathbb{R}^n, P, D(p), S(p)\}$, если $p^* \in P$ и $D(p^*) = S(p^*)$. В этом случае p^* называется равновесным вектором цен.

Из построенной по Вальрасу модели рынка вытекает следующий вывод.

Чтобы найти равновесный вектор цен, надо:

1) записать все соотношения оптимальности для каждой индивидуальной задачи потребителя по оптимизации его функции полезности и для каждой индивидуальной задачи производителя по оптимизации его прибыли (например, используя теорему Куна–Таккера, если позволяют условия);

2) дополнить их формулой дохода потребителя (4.2);

3) записать условие распределения всей прибыли среди потребителей (4.3);

4) записать равенство $S(p) = D(p)$;

5) решить полученную систему уравнений относительно искомого вектора равновесных цен.

Однако, как показали исследования, ответить на вопрос: существует ли решение полученной системы уравнений?, невозможно без дополнительных ограничений и уточнений на введенные объекты.

4.6 Модель Эрроу–Дебре. Существование конкурентного равновесия

В этой модели за основу берется модель Вальраса, но при этом конкретизируется природа происхождения функций спроса и предложения, а также механизм образования дохода потребителя.

а) Функция предложения выпуска каждого производителя формируется следующим образом. Для j-го производителя вводится множество $Y_j \subset \mathbb{R}^n$, которое трактуется как множество производственных планов. Это множество n-мерных векторов $y \subset \mathbb{R}^n$, у которых часть компонент описывает выпуски товаров, а другая часть компонент описывает затраты, которые для этого требуются. Компоненты, соответствующие затратам будем снабжать отрицательным знаком. Поэтому скалярное произведение $\langle p, y\rangle$ показывает прибыль полученную j-м производителем в результате реализации плана $y \in Y_j$ при векторе цен p. Через $y_j^*(p)$ обозначим решение задачи

$$\langle p, y\rangle \to \max_{y\in Y_j}, \tag{4.6}$$

считая (пока без обоснования) что оно единственно.

б) Доход i-го потребителя формируется следующим образом. Вводится коэффициент α_{ij}, который показывает долю i-го потребителя в прибыли j-го производителя. Считается, как и у Вальраса, что прибыль каждого производителя делится между всеми потребителями полностью, т. е.

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_{ij} = 1, \quad \alpha_{ij} \geq 0, \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, l}.$$

Тогда суммарные доходы $V_i(p)$, получаемые i-м потребителем от производственного сектора можно представить как

$$V_i(p) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \langle p, y_j^*(p)\rangle,$$

где $y_j^*(p)$— решение задачи (6), т. е. оптимальный план для j-го производителя. В итоге, общий доход i-го потребителя при реализации производственных планов $y_j^*(p)$ вычисляется по формуле

$$K_i(p) = \langle p, b_i\rangle + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \langle p, y_j^*(p)\rangle.$$

в) Функция спроса для каждого потребителя конкретизируется следующим образом. Для i-го потребителя вводится множество допустимых векторов потребления $X_i \subset \mathbb{R}^n$, а предпочтение потребителя на этом множестве задается с помощью функции полезности $u_i(\cdot)\colon X_i \to \mathbb{R}^1$. В результате в качестве вектор-функции спроса i-го потребителя берется решение $x_i^*(p)$ задачи

$$u_i(x) \to \max$$

при ограничениях: $x \in X_i, \langle p, x\rangle \leq K_i(p), x \geq 0_n$.

Важным для дальнейшего является понятие *функции избыточного спроса.*

Определение 4.5. Под *функцией избыточного спроса* будем в данной модели понимать

$$\xi(p) = \sum_{i=1}^{l} x_i^*(p) - \sum_{j=1}^{m} y_j^*(p) - \sum_{i=1}^{l} b_i.$$

Модель Эрроу–Дебре предполагает выполнение следующих требований:

1) Множества Y_j строго выпуклы и компактны в $\mathbb{R}^n$, причем $0_n \in Y_j$, $j = \overline{1,m}$;

2) Множества X_i, $i = \overline{1,n}$, выпуклы и замкнуты, причем если некоторая вектор-функция $x(t)$ принимает значения в X_i и некоторая её компонента $x_r(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то $x_k(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ для всех $k = \overline{1,n}$;

3) Функции полезности $u_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на X_i и строго вогнуты;

4) Функции $u_i(x)$ обладают свойством ненасыщаемости:

$$(x \geq y) \Rightarrow (u(x) \geq u(y))); \quad (x \geq y, x \neq y) \Rightarrow (u(x) > u(y)).$$

5) Существует вектор $x^i \in X_i$ такой, что $b_i > x^i$, $i = \overline{1,l}$.

При таких условиях имеет место

Теорема Эрроу–Дебре. В данной модели существует конкурентное равновесие в том смысле, что существует вектор цен $p^* > 0$ такой ,что

$$\xi(p^*) = 0.$$

4.7 Регулирование цен, устойчивость равновесия

Реальный поиск равновесия, основанный на использовании функций полезности каждого потребителя (их может быть очень много), их доходов, технологических множеств каждого производителя (их также может быть много) и их функий прибыли, а также других данных является громоздкой задачей, требующей объемных вычислений.

Другой подход состоит в следующем. Процесс формирования равновесных цен является в действительности динамическим процессом, т. е.

развернутым во времени. Рынок сам приспосабливает цены к вариациям спроса и предложения, как мы видели на примере паутинообразной модели. Поэтому можно попытаться дать математическую модель рыночного регулирования цен, ведущего к равновесным ценам, основанного на знании функции избыточного спроса.

Определение 4.6. Если временная траектория вектора цен $p(t)$ в конечном счете достигает равновесного значения p^*, то соответствующий динамический процесс считается *устойчивым.*

Предположим, что равновесие существует и p^* — вектор равновесных цен.

Определение 4.7. Для динамического процесса, отражаемого вектор-функцией цен $p(t)$, равновесие в точке p^* называется локально устойчивым, если существует $\delta > 0$ такое, что если только для начального момента времени t_0 выполняется $|p(t_0) - p^*| < \delta$, то $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = p^*$.

Равновесие называется глобально устойчивым, если оно достигается в конечном счете независимо от начальной точки:

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = p^*, \quad \forall p(t_0).$$

Процесс «нащупывания» цен Вальраса

Регулирование рыночных цен и решение проблемы устойчивости Вальрас представлял себе как некоторый процесс «нащупывания» цен, использующий спрос и предложение конкурентного рынка. Он представлял себе это так. Предположим, на рынке действует некий аукционер, не представляющий ни продавца, ни покупателя и который реагирует на неравновесие на рынке изменением цен. При этом изменение цены по каждому товару осуществляется по правилам процесса нащупывания, т. е.:

- цена поднимается, если рыночный спрос превышает рыночное предложение;
- цена понижается, если рыночного спроса не хватает для покрытия рыночного предложения;
- цена не меняется, если рыночный спрос равен рыночному предложению.

Если $\xi(p) = (\xi_1(p), \ldots, \xi_n(p))$— вектор-функция избыточного спроса, то процесс нащупывания делает изменение цены в соответствии со значением функции $\xi(p)$:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \begin{cases} > 0, & \xi_i(p(t)) > 0, \\ < 0, & \xi_i(p(t)) < 0, \\ = 0, & \xi_i(p(t)) = 0. \end{cases}$$

Индивидуальные покупатели и продавцы могут перезаключать формально сделки после изменения цены несколько раз, но реальная сделка не должна совершаться, пока не будет достигнуто равновесие. Вальрас полагал, что этот процесс нащупывания обязательно должен привести к равновесию. Однако уже на примере паутинообразной модели мы видели, что это не всегда так. Для устойчивости динамического процесса регулирования цен $p(t)$ нужно, чтобы функция избыточного спроса удовлетворяла определенным условиям.

В современной теории конурентного равновесия рассматриваются различные системы нащупывания равновесных цен. Мы ограничимся здесь рассмотрением линейной системы, в которой изменение цен соответствует избыточному спросу:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \xi_i(p(t)), \quad i = \overline{1, n} \tag{4.7}$$

или

$$\frac{dp(t)}{dt} = \xi(p(t))$$

Пусть p^* — вектор равновесных цен, т. е. $\xi(p^*) = 0_n$ и $\dfrac{dp(t)}{dt} = 0_n$ при $p(t) = p^*$.

Если предположить, что функции избыточного спроса являются дифференцируемыми, то систему (4.7) можно записать в виде

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \xi_i(p^*) + \langle \xi_i'(p^*), p(t) - p^* \rangle + o_i(p(t) - p^*), \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.8}$$

где $\dfrac{o_i(p - p^*)}{\|p - p^*\|} \to 0$ при $p \to p^*$.

Если обозначим через $\pi(t) = p(t) - p^*$ и учтем, что $\xi_i(p^*) = 0$, а также отбросим в (4.8) последнее слагаемое справа, то получим

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \frac{\partial \xi(p(t))}{\partial p} \cdot \pi(t), \tag{4.9}$$

где

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial p_1} & \dots & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial p_1} & \dots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби. Система (4.9) устойчива, т. е. $\pi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда характеристические корни матрицы Якоби имеют отрицательные действительные части. Это условие выполняется, если

$$\frac{\partial \xi_i(p)}{\partial p_j} > 0, \quad \forall\ p > 0, i \neq j,$$

т. е. товары являются явно заменяемыми (увеличение цены на такой товара при неизменных ценах на другие, приводит к увеличению избыточного спроса на любой другой продукт).

5 Моделирование экономики в условиях несовершенной конкуренции

Ранее в главе 4 мы познакомились с условиями совершенной конкуренции. Главный признак рынка с совершенной конкуренцией — наличие большого числа производителей и потребителей одних и тех же товаров и отсутствие влияния с их стороны на рыночные цены этих товаров. Нарушение данного условия приводит к понятию рынка несовершенной конкуренции. В это смысле крайние положения занимают:

монополия — один производитель и много потребителей,

монопсония — один потребитель и много производителей.

Промежуточные положения занимают понятия

олигополия — несколько производителей и много или несколько потребителей,

олигопсония — несколько потребителей.

Суть несовершенной конкуренции в том, что либо производители, либо потребители имеют возможность влиять на цену.

5.1 Моделирование ценообразования в монополии

5.1.1 Доход и издержки монополиста

Фирма-монополист, зная кривую спроса, может самостоятельно определить объем продаж и тем самым назначить цену товара и подсчитать соответствующий получаемый доход. Зная также соответствующие кривые издержек, монополист ставит перед собой задачу оптимизации своей прибыли. Формализуем эту задачу.

Итак, пусть фирма-монополист выпускает один вид продукции, используя n-видов затрат. Обозначим через $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ вектор затрат, $f(x)$ — производственную функцию фирмы, т. е. величина $q = f(x)$ — объем выпуска продукции, соответствующий вектору затрат x. Пусть зависимость рыночной цены от объема q выражается функцией

$$p = p(q).$$

Тогда соответствующий получаемый фирмой *доход* выражается как

$$R(q) = p(q) \cdot q. \tag{5.1}$$

Естественно считать (в соответствии с обычным поведением рыночного спроса), что

$$p'(q) < 0. \tag{5.2}$$

Это означает, что фирма должна снижать цену, чтобы продать больше товара.

Предельный доход определяется как скорость изменения дохода от изменения выпуска

$$MR(q) \equiv R'(q) = p(q) + p'(q) \cdot q. \tag{5.3}$$

из (5.2)–(5.3) следует, что

$$MR(q) < p(q) \tag{5.4}$$

— предельный доход всегда меньше цены.

Проанализируем теперь *издержки* монополиста. Пусть $w = (w_1, \ldots, w_n)^\top$ — вектор цен на затраты. В условиях несовершенной конкуренции эти цены также являются функциями от закупаемых объемов затрат, т. е.

$$w_i = w_i(x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Поэтому издержки на соответствующие факторы производства выражаются как

$$C_i(x_i) = w_i(x_i) \cdot x_i. \tag{5.5}$$

Вычислим *предельные издержки*

$$MC_i(x_i) \equiv C_i'(x_i) = w_i'(x_i)x_i + w_i(x_i). \tag{5.6}$$

По рыночным законам фирма может покупать большее количество данного фактора производства, только предложив более высокую цену (ориентируясь уже на кривую предложения данного фактора), т. е.

$$w_i'(x_i) > 0. \tag{5.7}$$

Тогда из (5.6)–(5.7) следует

$$MC_i(x_i) > w_i(x_i) \tag{5.8}$$

— при монополии предельные издержки на факторы производства больше их цен.

5.1.2 Задача оптимизации прибыли монополиста

Используя формулу дохода (5.1) и издержек (5.5) выражаем прибыль фирмы-монополиста и приходим к задаче:

$$\begin{cases} P(x,q) \equiv p(q) \cdot q - \sum\limits_{i=1}^{n} w_i(x_i)x_i \to \max\limits_{x,q}, \\ q = f(x). \end{cases} \tag{5.9}$$

Это классическая задача на экстремум с ограничением типа равенства. Будем считать, что функции $p(q)$, $f(x)$, $w_i(x_i), i = \overline{1,n}$ всюду непрерывно дифференцируемы. В соответствии с теоремой Лагранжа (гл. 1) (предполагая, что выполняется условие регулярности), выписываем конкретный вид функции Лагранжа

$$L(x, q, \lambda) = P(x, q) + \lambda(f(x) - q)$$

и соответствующие условия оптимальности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q} = p(q) + p'(q) \cdot q - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = -w_i(x_i) - w_i'(x_i)x_i + \lambda \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ f(x) - q = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Для наглядности перепишем систему (5.10) в виде

$$\begin{cases} \lambda = p(q) + p'(q) \cdot q, \\ \lambda \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = w_i(x_i) + w_i'(x_i) \cdot x_i, \quad i = \overline{1,n}, \\ f(x) - q = 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

В правых частях системы (5.11) соответственно предельный доход (см. (5.3)) и предельные издержки по i-му фактору производства (см. (5.6)). Поэтому из (5.11) получаем

$$MR(q) \cdot MP_i(x) = MC(x_i), \quad i = \overline{1,n} \tag{5.12}$$

Здесь $MP_i(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ — предельный продукт i-го вида затрат. В целом соотношения (5.12) и связь $q = f(x)$ представляют собой систему уравнений относительно $n+1$ неизвестных $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ и q.

5.2 Задача фирмы при наличии конкурента

Олигополия — преобладающая форма современной рыночной структуры. На олигопольных рынках несколько фирм производят почти всю продукцию. Решение олигополиста по объему выпуска продукции складывается сложнее, чем у монополиста, так как имеет место конкуренция. Фирма-олигополист должна взвесить свои решения с точки зрения реакции конкурирующих с ней фирм. Те, в свою очередь, тоже будут учитывать её реакцию на их собственные решения. Поскольку цены на товары формируются по суммарному выпуску всех фирм, то прибыль каждой фирмы зависит не только от объема собственного выпуска, но и выпусков других фирм.

Предположим, на рынке присутствуют только две конкурирующих фирмы, производящих один и тот же товар (дуополия).

Введем обозначения:

x_i^1 — количество используемых затрат i-го вида 1-ой фирмой,
x_i^2 — количество используемых затрат i-го вида 2-й фирмой,
$x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$ — вектор затрат j-й фирмы, $j = 1, 2$,
$f_j(x^j)$ — производственная функция j-й фирмы, $j = 1, 2$,
q_j — выпуск j-ой фирмы.

Теперь рыночная цена товара определяется объемами выпусков обеих фирм

$$p = p(q_1, q_2).$$

Естественно считать, что цена понижается с ростом выпуска любой фирмы при фиксированном объеме другой, а значит (считая, что функция $p(q_1, q_2)$ дифференцируема по q_1 и q_2):

$$\frac{\partial p(q_1, q_2)}{\partial q_1} < 0, \quad \frac{\partial p(q_1, q_2)}{\partial q_2} < 0.$$

Соответственно цена любого вида затрат определяется объемами закупок обеими фирмами

$$w_i = w_i(x_i^1, x_i^2), \quad i = \overline{1, n}.$$

Считаем, что увеличение объемов закупок затрат, в соответствии с кривой предложения, ведет к увеличению их цены, а следовательно

$$\frac{\partial w_i(x_i^1, x_i^2)}{\partial x_i^1} > 0, \quad \frac{\partial w_i(x_i^1, x_i^2)}{\partial x_i^2} > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Рассуждая по аналогии, как и в п 5.1., мы приходим к выводу, что задача оптимизации прибыли 1-ой фирмы может быть записана в виде

$$\begin{cases} P(x^1, q_1) \equiv p(q_1, q_2) \cdot q_1 - \sum\limits_{i=1}^{n} w_i(x_i^1, x_i^2) x_i^1 \to \max\limits_{x^1, q_1}, \\ q_1 = f_1(x^1). \end{cases} \tag{5.13}$$

При этом 1-я фирма обязана учитывать реакцию 2-й фирмы на свои решения по объемам закупок затрат и объему выпуска. То есть, она может предполагать, что 2-ая фирма будет принимать свои решения в соответствии с некоторой конкретной функциональной зависимостью

$$q_2 = q_2(q_1), \quad x_i^2 = x_i^2(x_i^1), i = \overline{1, n}. \tag{5.14}$$

Теперь, принимая допущения о непрерывной дифференцируемости всех функций участвующих в постановке задачи и выполнение условия регулярности, мы можем записать конкретный вид функции Лагранжа

$$L(x^1, q_1, \lambda) = p(q_1, q_2)q_1 - \sum_{i=1}^{n} w_i(x_i^1, x_i^2)x_i^1 + \lambda(f_1(x^1) - q_1),$$

и, учитывая (5.14), соответствующие условия оптимальности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = p(q_1, q_2) + q \cdot \dfrac{\partial p}{\partial q_1} + q_1 \dfrac{\partial p}{\partial q_2} \cdot \dfrac{\partial q_2}{\partial q_1} - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i^1} = -w_i(x_i^1, x_i^2) - x_i^1 \dfrac{\partial w_i}{\partial x_i^1} - x_i^1 \dfrac{\partial w_i}{\partial x_i^2} \cdot \dfrac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1} + \lambda \dfrac{\partial f_1(x^1)}{\partial x_i^1} = 0, i = \overline{1, n} \\ q_1 = f_1(x^1). \end{cases}$$

Или, исключив λ, получаем систему из $n+1$ уравнений относительно $n+1$ неизвестных

$$\begin{cases} \left[p(q_1, q_2) + q_1 \left(\dfrac{\partial p}{\partial q_1} + \dfrac{\partial p}{\partial q_2} \cdot \dfrac{\partial q_2}{\partial q_1} \right) \right] \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i^1} w_i + \\ + x_i^1 \left(\dfrac{\partial w_i}{\partial x_i^1} + \dfrac{\partial w_i}{\partial x_i^2} \cdot \dfrac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1} \right), \quad i = \overline{1, n} \\ q_1 = f_1(x^1). \end{cases}$$

Понятно, что функции (5.14) и их производные играют важную роль.

Определение 5.1. Производные $\dfrac{\partial q_2(q_1)}{\partial q_1}$ и $\dfrac{\partial x_i^2(x_i^1)}{\partial x_i^1}$ называются предположительными вариациями.

$\dfrac{\partial q_2}{\partial q_1}$ — предположение 1-й фирмы относительно реакции 2-ой фирмы, по выпуску при изменении выпуска 1-й фирмы,

$\dfrac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1}$ — предположение 1-й фирмы относительно реакции второй фирмы по величине затрат i-го вида в ответ на изменение затрат того же вида 1-й фирмой.

Каждая из фирм может делать разные предположения. Каждое из них ведет к различному анализу конкуренции.

5.3 Анализ дуополии на примере

Дуополия — на рынке конкурируют только два производителя товара.

Предположим, что:

– товар продается в соответствии с линейной функцией цены от совместно производимого объема фирм

$$p(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2), \quad a > 0, b > 0;$$

– издержки фирм также являются линейными функциями от производимого ими объема

$$\begin{aligned} C_1(q_1) &= cq_1 + d, \\ C_2(q_2) &= cq_2 + d, \quad c > 0, \quad d > 0. \end{aligned}$$

Тогда 1-я фирма получает прибыль в размере

$$\Pi_1(q_1) = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - cq_1 - d.$$

Считаем, как и в п. 5.2., что 2-я фирма реагирует своим выпуском в ответ на выпуск 1- фирмы в соответствии с некоторой зависимостью

$$q_2 = q_2(q_1).$$

Условие оптимальности прибыли теперь можем записать в виде

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = [a - b(q_1 + q_2)] - bq_1 - bq_1 \frac{\partial q_2}{\partial q_1} - c = 0. \tag{5.15}$$

Проводя аналогичные рассуждения относительно функции прибыли 2-й фирмы, получаем соответствующее условие оптимальности

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = [a - b(q_1 + q_2)] - bq_2 - bq_2 \frac{\partial q_1}{\partial q_2} - c = 0. \tag{5.16}$$

Здесь $q_1 = q_1(q_2)$ отражает предположение 2-ой фирмы относительно реакции 1-й фирмы в ответ на её собственный выпуск, а $\dfrac{\partial q_1(q_2)}{\partial q_2}$ — соответствующая предположительная вариация.

5.3.1 Дуополия Курно

Пусть обе фирмы предполагают, что их конкурент не будет менять объем своего выпуска в ответ на их изменение объема. Это означает, что

$$\frac{\partial q_2(q_1)}{\partial q_1} = \frac{\partial q_1(q_2)}{\partial q_2} = 0. \tag{5.17}$$

В этом случае говорят, что имеет место *дуополия Курно.*

Определение 5.2. *Равновесием Курно* называется пара (q_1, q_2) удовлетворяющая системе уравнений

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0. \tag{5.18}$$

при условии (5.17).

Таким образом, эта пара, являющаяся одновременно решением задачи оптимизации каждой из фирм при заданном объеме выпуска конкурентом. Для рассматриваемого примера система (5.18) (или система (5.15)–(5.16)), с учетом (5.17), принимает вид

$$\begin{cases} a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0, \\ a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0. \end{cases} \tag{5.19}$$

Её решением является пара $q_1 = q_2 = \dfrac{a-c}{3b}$. Соответствующая рыночная цена, суммарный объем и прибыль фирмы таковы

$$p = \frac{a+2c}{3}, \quad q = \frac{2(a-c)}{3b}, \quad \Pi_1 = \Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{9b} - d.$$

Замечание. Результат легко обобщается на случай m фирм

$$p = \frac{a+mc}{m+1}, \quad q = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{a-c}{b}, \quad q_i = \frac{a-c}{(m+1)b}, \quad i = \overline{1, m}.$$

В пределе, при $m \to \infty$, ситуация стремится к равновесию в условиях совершенной конкуренции.

На самом деле конкуренция на рынке всегда развивается во времени, т. е. это динамический процесс. Рассмотрим динамику изменения объемов выпуска конкурентами в дуополии Курно. Из (5.19) получаем

$$q_1 = \frac{a-c-bq_2}{2b}, \quad q_2 = \frac{a-c-bq_1}{2b}. \tag{5.20}$$

На плоскости (q_1, q_2) данные функциональные зависимости своим графиком задают *кривые реакции*. Соотношения (5.20) показывают соответственно оптимальные с точки зрения прибыли выпуски фирм при заданых выпусках конкурентов.

Точки $\left(\dfrac{a-c}{2b}, 0\right)$ и $\left(0, \dfrac{a-c}{2b}\right)$ на плоскости (q_1, q_2) являются монопольными точками фирм. В этих точках одна из фирм получает максимальную прибыль $\Pi = \dfrac{(a-c)^2}{4b} - d$ при цене $p = \dfrac{a+c}{2}$. Если каждая фирма реагирует своим выпуском на выпуск продукции своим конкурентом через единичный временной промежуток (с временным лагом равным 1), то получаем формулы, в которых отражается динамика поведения фирм

$$q_1(t+1) = \frac{a - c - bq_2(t)}{2b}, \quad q_2(t+1) = \frac{a - c - bq_1(t)}{2b}, \quad t = 0, 1, \ldots, \mathrm{T}.$$

Эта система разностных уравнений относительно $\{q_1(t), q_2(t)\}$, $t = 1, 2, \ldots, \mathrm{T}$, и если ее решить, то получим траектории изменения выпусков во времени. Данные траектории можно получить и с помощью геометрических построений (см. рис. 5.1).

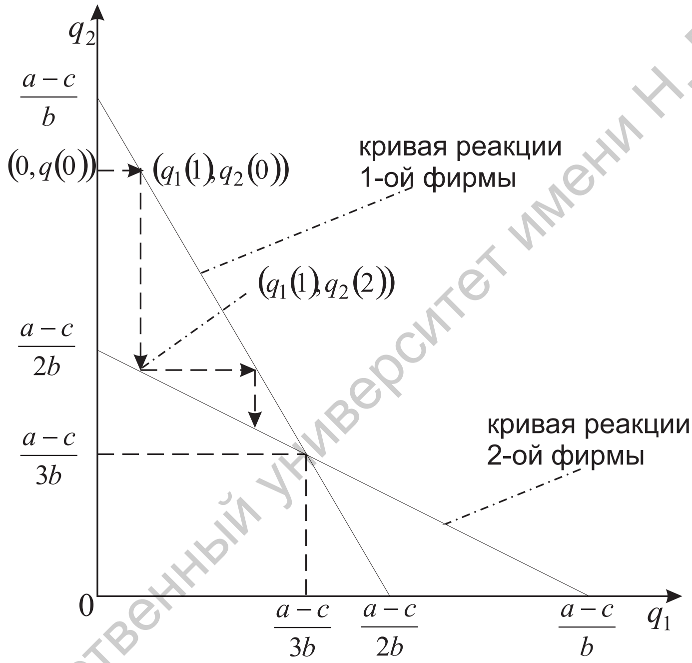

Рис. 5.1. Траектория выпусков в дуополии Курно

Предположим, в начальный момент времени $t = 0$ выпуск 1-ой фирмы равен нулю: $q_1(0) = 0$, а выпуск 2-ой фирмы $q_2(0) > 0$. Этой ситуации соответствует точка $(0, q_2(0))$ на плоскости (q_1, q_2). Далее 1-ая фирма через единичный промежуток времени делает свой выпуск $q_1(1)$ в соответствии со своей кривой реакции. Таким образом при $t = 1$ соответствующие объемы выпусков $(q_1(1), q_2(0))$. После этого вторая фирма меняет свой выпуск, пытаясь оптимизировать свою прибыль, ориентируясь на объем выпуска конкурента через свою кривую реакции. Тогда для $t = 2$ получаем точку $(q_1(1), q_2(2))$. И так далее. На каждом шаге этого процесса изменение выпуска одной фирмы вызывает изменение выпуска другой. И тем не менее обе фирмы каждый раз принимают допущение Курно, которое каждый раз опровергается.

5.3.2 Модель Чемберлина

Более адекватными являются модели, в которых конкуренты все-таки принимают во внимание тот факт, что фирма-конкурент будет менять уровень выпуска в ответ на их собственные действия.

Посмотрим, как развиваются взаимодействия конкурентов в дуополии Э. Чемберлина (1956).

1-й шаг. Предположим, что сначала 1-ая фирма ведет себя на рынке как монополист. Она выбирает монопольный уровень выпуска, который определяется из решения задачи оптимизации ее прибыли

$$\Pi_1(q_1) = (a - bq_1)q_1 - cq_1 - d \to \max_{q_1}.$$

Из условия оптимальности

$$\Pi_1'(q_1) = -2bq_1 + a - c = 0$$

получаем значение объема выпуска, монопольной цены и ожидаемой прибыли

$$q_1^0 = \frac{a-c}{2b}, \quad p^0 = \frac{a+c}{2}, \quad \Pi_1^0 = \frac{(a-c)^2}{4b} - d. \tag{5.21}$$

Однако этим расчетам, на самом деле, не суждено сбыться, поскольку на рынке появляется 2-я фирма, которая уже знает, что 1-я фирма пока считает себя монополистом и определилась с объемом выпуска q_1^0.

2-й шаг. Поэтому 2-ая фирма принимает решение о своем выпуске, исходя из функции остаточного спроса. То есть она понимает, что цена будет определяться формулой

$$p = a - b(q_1^0 + q_2) = \frac{a+c}{2} - bq_2.$$

При такой зависимости цены от ее выпуска она решает задачу оптимизации своей прибыли

$$\Pi_2(q_2) = \left(\frac{a+c}{2} - bq_2\right) q_2 - cq_2 - d \to \max_{q_2}.$$

Отсюда получаем условие оптимальности прибыли

$$\Pi_2'(q_2) = \frac{a+c}{2} - c - 2bq_2 = 0,$$

из которого вытекает соответствующий объем выпуска

$$q_2^0 = \frac{a-c}{4b} = \frac{1}{2}q_1^0.$$

Итог этого этапа взаимодействия фирм

— суммарный выпуск $q_1^0 + q_2^0 = \dfrac{3(a-c)}{4b}$,

— соответствующие размеры прибыли

$$\Pi_1(q_1^0) = \frac{(a-c)^2}{8b} - d, \quad \Pi_2(q_1^0) = \frac{(a-c)^2}{16b} - d.$$

Таким образом, размер прибыли 1-ой фирмы значительно меньше по сравнению с монопольной, на которую она ориентировалась.

На 3-ем шаге 1-ая фирма осознает, что конкурент реагирует на ее действия и уменьшает свой выпуск на величину выпуска соперника, ориентируясь на цель достижения монопольного выпуска всей отрасли, так как при этом достигается монопольная цена.

На 4-ом шаге 2-ая фирма принимает условия, предложенные конкурентом, поскольку выгоднее продавать тот же объем выпуска, что и раньше, по уже более высокой монопольной цене.

В итоге, в данном примере, дуополисты делят рынок поровну: $q_1^* = q_2^* = \dfrac{a-c}{4b}$ и получают одинаковую прибыль $\Pi_1 = \Pi_2 = \dfrac{(a-c)^2}{8b} - d$. Таким образом, не вступая в прямой сговор, дуополисты Чемберлина могут установить на рынке монопольную цену.

5.3.3 Модель Стэкельберга

Эта модель анализирует стратегическое взаимодействие фирм по принципу *«лидер-последователь»*.

Пусть 1-ая фирма является *лидером*, т. е. первой принимает решение об уровне выпуска, а 2-ая фирма является *последователем*. Это означает, что лидер информирован о поведении последователя. А последователь осознает лидерство конкурента, рассматривая уровень выпуска лидера как заданный. Таким образом, задача оптимизации прибыли для 2-ой фирмы, которая является последователем, такова же как и в модели Курно. Следовательно и кривая реакции 2-ой фирмы такова же как и в модели Курно (см. (5.20))

$$q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b}. \tag{5.22}$$

1-ая фирма как лидер знает, что оказывает влияние на конкурента и поэтому учитывает реакцию (5.22) последователя при решении своей задачи по оптимизации прибыли. Таким образом, предположительная вариация $\dfrac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\dfrac{1}{2}$ и подставляя это в (5.15), получаем

$$a - \frac{3}{2}bq_1 - bq_2 - c = 0.$$

А значит реакция лидера на выпуск конкурента

$$q_1 = -\frac{2}{3}q_2 + \frac{2(a-c)}{3b}. \tag{5.23}$$

Совместное решение системы (5.22)–(5.23) дает равновесие Стэкельберга для 1-ой фирмы-лидера

$$q_1^* = \frac{a-c}{2b}, \quad q_2^* = \frac{a-c}{4b}.$$

При этом

$$\Pi_1(q_1^*) = \frac{(a-c)^2}{8b} - d > \Pi_2(q_2^*) = \frac{(a-c)^2}{16b} - d$$

при цене $p = \dfrac{a+3c}{4}$.

Борьба за лидерство

Разумно предположить, что оба дуополиста могут вести себя как лидеры, т. е. в процессе принятия решения каждый из них считает себя лидером, а конкурента последователем. Следовательно дуополисты будут ставить перед собой задачу по оптимизации своей прибыли при условии, что конкуренты реагируют на их выпуск в соответствии с кривой реакции Курно (см. (5.20)). Таким образом, в условие оптимальности (5.15)–(5.16) надо подставить значения: $\dfrac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\dfrac{1}{2}$.

В итоге получаем

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = a - \frac{3}{2}bq_1 - bq_2 - c = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = a - bq_1 - \frac{3}{2}bq_2 - c = 0.$$

Решение данной системы дает значения

$$q_1^* = q_2^* = \frac{2(a-c)}{5b}, \tag{5.24}$$

$$q_1^* + q_2^* = \frac{4(a-c)}{5b}, \quad p^* = \frac{a+4c}{5}, \quad \Pi_1 = \Pi_2 = \frac{2(a-c)^2}{25b} - d.$$

Пара выпусков (5.24) называется *неравновесием Стэкельберга* (прибыль каждой фирмы меньше чем в случае равновесия Курно и следовательно данное решение должно быть отвергнуто).

5.3.4 Картельное соглашение

Картель — объединение фирм-олигополистов, вступающих в сговор с целью совместного принятия решения относительно уровня рыночной цены и объемов выпуска. Эти фирмы ведут себя на рынке как единый монополист, максимизируя совокупную прибыль. Таким образом, для рассматриваемого примера, картель ставит задачу

$$\Pi(q) = (a - bq)q - cq - d \to \max_q,$$

где $q = q_1 + q_2$. Решение этой задачи дает $q = \dfrac{a-c}{2b}$, $p = \dfrac{a+c}{2}$. Поскольку в данном примере фирмы идентичны по уровню издержек производства, то можно предположить, что они договорятся об одинаковых рыночных долях производства $q_1 = q_2 = \dfrac{a-c}{4b}$ и соответствующем одинаковом распределении прибыли $\Pi_1 = \Pi_2 = \dfrac{(a-c)^2}{8b} - d$. Однако основная проблема картельного соглашения — соблазн обмануть конкурента, т. е. нарушить соглашение и увеличить собственную прибыль. Предположим, что 2-ая фирма честно соблюдает соглашение и, следуя ему, ее выпуск составит $q_2 = \dfrac{a-c}{4b}$. Тогда как 1-ая фирма его нарушает и будет оптимизировать свою прибыть, ориентируясь на уже известный выпуск 2-ой фирмы:

$$\Pi_1(q_1) = \left[a - b\left(q_1 + \frac{a-c}{4b}\right)\right] q_1 - cq_1 - d \to \max_{q_1}. \tag{5.25}$$

Решением этой задачи является значение $q_1 = \dfrac{3(a-c)}{8b}$. Следствием этого является понижение рыночной цены до $p = \dfrac{3a+5c}{8}$, увеличение прибыли 1-ой фирмы до $\Pi_1 = \dfrac{9(a-c)^2}{64b} - d$, уменьшение прибыли 2-ой фирмы до $\Pi_2 = \dfrac{3(a-c)^2}{32b} - d$. Картель неустойчив!

6 Линейные модели экономики

В этой главе мы рассмотрим некоторые модели экономического планирования выпуска товаров в предположении линейной технологии, т. е. прямой пропорциональности объемов выпуска товаров объемам используемых затрат.

6.1 Планирование выпуска на уровне отраслей

Нередко при экономическом планировании на уровне регионов или страны в целом возникает необходимость определения объема выпуска товаров, обеспечивающего заданный спрос населения и необходимые ресурсы для производства этих товаров при известной технологии.

В предположении о линейности технологии одной из математических формализаций такой задачи является знаменитая модель «затраты – выпуск», полученная американским экономистом В. В. Леонтьевым в 1930 году.

Классическая модель Леонтьева исходит из следующих предположений:

- рассматривается экономика, состоящая из «чистых» отраслей, т. е. когда каждая отрасль выпускает свой и только один вид продукта;
- взаимосвязь между объемами выпусков и соответствующих им объемами затрат является линейной;
- спрос на все виды товаров считается заданным (а значит, задачи по оптимизации потребительского выбора не ставятся);
- объем выпуска каждого вида товара определяется исходя из спроса (таким образом, оптимизационные задачи для производителя не ставятся);
- все отрасли предполагаются взаимозависимыми, т. е. для производства своего продукта каждая из них использует продукты других отраслей и только их. Применение отраслями невоспроизводимых производственных факторов отсутствует.

Ясно, что в такой ситуации вопрос о равновесии не стоит, равенство спроса и предложения заложено изначально. Более того, цены на товары не рассматриваются вообще.

Обозначим через n количество отраслей. Естественно, столько же видов товаров потребляется, производится и используется в производстве.

Предположим, на данный плановый период времени известен конечный спрос на все виды товаров, выражаемый вектором

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'$, где c_j — спрос потребительского сектора на товар j-го вида.

Пусть по технологии производства для производства единицы j-го товара требуется a_{ij} количества товара i-го вида. Эти нормы расходов считаются заданными для всех $i, j = \overline{1, n}$.

Обозначим через x_j валовый объем производства j-й отрасли на плановый период, а через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ — вектор валовых объемов всей экономики.

При таких обозначениях величина $a_{ij}^0 = a_{ij} x_j$ показывает объем продукции i-й отрасли, необходимый для j-й отрасли при реализации плана x_j, а величина $a_i^0 = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^0$ выражает суммарное потребление продукции i-й отрасли в производственном секторе.

Картину межотраслевых связей при валовом плане выпуска $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ и конечном потреблении $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'$ дает следующая схема межотраслевого баланса (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Отрасли, как поставщики продуктов	Отрасли, как потребители ресурсов				Потребление		Валовый выпуск
	1	2	…	n	Производственное	Конечное	
1	a_{11}^0	a_{12}^0	…	a_{1n}^0	a_1^0	c_1	x_1
2	a_{21}^0	a_{22}^0	…	a_{2n}^0	a_2^0	c_2	x_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	⋮
n	a_{n1}^0	a_{n2}^0	…	a_{nn}^0	a_n^0	c_n	x_n

Балансовый характер схемы заключается в том, что элементы трех последних столбцов должны удовлетворять равенствам

$$a_i^0 + c_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6.1}$$

Эти равенства, с одной стороны, отражают равновесие по всем видам товаров. С другой стороны, показывают самодостаточность производства — для выпуска любого товара достаточно иметь продукцию рассматриваемых отраслей. При этом весь валовый выпуск полностью распределяется между производственным и потребительским секторами. Эти обстоятельства говорят о замкнутости экономики — нет поступлений извне и продукция не экспортируется. Более общая, чем данная базовая схема межотраслевого баланса, которая может использоваться на практике, будет содержать дополнительные столбцы учета невоспроизводимых факторов производства, импортируемых ресурсов, резервов на начало периода. Можно также учитывать экспорт товаров и инвестирование, фиксируя их в столбце конечного потребления.

6.2 Модель Леонтьева «затраты – выпуск»

6.2.1 Условие продуктивности

Используя технологическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

систему (6.1) можно переписать в форме

$$x = Ax + c. \tag{6.2}$$

Уравнение (6.2), где A — постоянная технологическая матрица, c — известный вектор конечного спроса, а x — неизвестный вектор валового выпуска, называется *моделью Леонтьева* (*замкнутой*, если $c = 0$, и *открытой*, если $c \geq 0_n$, $c \neq 0_n$). Таким образом, поставлена задача: можно ли в условиях данной технологии удовлетворить конечный спрос?

Определение 6.1. Модель Леонтьева с технологической матрицей A называется *продуктивной*, если существует вектор $\hat{x}$ с неотрицательными компонентами такой, что $\hat{x} - A\hat{x} > 0_n$. В этом случае также говорят, что сама матрица A является *продуктивной*.

Основное значение данного определения раскрывает

Теорема 6.1. *Если матрица A продуктивна, то для любого $c \geq 0_n$ уравнение* (6.2) *имеет единственное неотрицательное решение.*

Приведем известный критерий продуктивности матрицы.

Теорема 6.2. *Матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда матрица $E - A$ невырождена и матрица $(E - A)^{-1}$ является неотрицательной.*

6.2.2 Матричный мультипликатор

Если обратная матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна, то используемый вектор валового выпуска определяется как

$$x = (E - A)^{-1}c.$$

Таким образом, матрица $(E - A)^{-1}$ представляет информацию о том, каким образом вектор конечного спроса c пересчитывается в вектор x. Матрицу $(E - A)^{-1}$ называют *матричным мультипликатором.* Известно представление этой матрицы в виде

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots,$$

где $A^2 = A \cdot A, \ldots, A^m = A^{m-1} \cdot A$. Таким образом, существование обратной матрицы $(E - A)^{-1}$ и ее вычисление можно связать со сходимостью степенного матричного ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A^i$, считая $A^0 = E$. Если матрица $E - A$ обратима, то ряд сходится, а его сумма равна $(E - A)^{-1}$.

Из этого следует, что для продуктивной модели Леонтьева вектор валового выпуска представим рядом

$$x = c + Ac + A^2c + \ldots$$

Этот ряд можно толковать следующим образом. Для того, чтобы получить вектор конечного спроса $c \geq 0_n$, необходимо произвести все количества продуктов, являющиеся компонентами данного вектора. Но этого недостаточно, поскольку в процессе производства возникают дополнительные затраты, описываемые вектором Ac. Следовательно, валовый выпуск будет включать в себя и вектор Ac. Далее в процессе производства вектора Ac вновь возникнут дополнительные производственные затраты $A \cdot Ac = A^2c$ и т. д.

6.2.3 Модификация модели Леонтьева в виде оптимизационной задачи

Модель будет более реальной, если наряду с воспроизводимыми ресурсами, будут учитываться и первичные факторы производства (т. е. невоспроизводимые ресурсы).

Предположим, что каждый товар производится с использованием продукции всех отраслей, а также еще m видов первичных факторов. Обозначим через b_{kj} количество k-го первичного фактора, необходимого для производства единицы товара j-го вида, $k = \overline{1,m}$. Тогда $b_{kj}x_j$ — количество k-го первичного фактора, необходимое для выпуска x_j единиц товара j-го вида, а $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{kj}x_j$ — общее количество k-го первичного фактора, требуемое для реализации вектора валового выпуска x.

Пусть $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)'$ — вектор объемов запасов первичных факторов, а

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

— матрица норм расходов первичных факторов, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)'$ — вектор цен на производимые товары.

Поставим следующую задачу: при каком векторе валового выпуска x реализация (продажа) конечного продукта c приведет к максимальному доходу?

В результате мы получаем задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} \langle p, c\rangle \to \max, \\ x = Ax + c, \\ Bx \le v, \quad x \ge 0_n. \end{cases}$$

6.3 Схема динамического межотраслевого баланса

Модель Леонтьева носит статический характер. В ней не учитывается фактор времени, играющий важнейшую роль при принятии плановых решений. Кроме того, рассматривая вопрос о продуктивности модели мы не учитывали, что при заданной технологии вопрос о реализации требуемого объема выпуска упирается также и в производственные мощности, т. е. возможно, что для выпуска достаточно больших объемов в будущем надо наращивать мощность производства, вкладывая в это часть выпуска. Кроме того, никакое производство не обходится без трудовых затрат, их тоже надо учитывать в модели. Или, другими словами, людей, занятых в производстве, для которых и предназначен конечный продукт потребления.

Итак, рассмотрим функционирование экономики на конечном интервале времени $[0, T]$, который разбивается отдельными дискретными значениями: $t = 0, 1, 2, \ldots, T$.

Как и в модели Леонтьева, будем полагать, что экономика состоит из n чистых отраслей с постоянными технологиями, описываемыми матрицей A. планирование также будем понимать по схеме затраты – выпуск при известном конечном спросе на товары, но уже с учетом фактора времени.

Под планом производства на интервале времени $[0, T]$ будем понимать:

$$(x, \xi, \eta, L) = \begin{pmatrix} x^1 & \xi^1 & \eta^1 & L^1 \\ x^2 & \xi^2 & \eta^2 & L^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^T & \xi^T & \eta^T & L^T \end{pmatrix}.$$

Здесь каждая строка соответствует плану $(x^t, \xi^t, \eta^t, L^t)$ на год t, т. е. на промежуток времени $[t-1, t]$.

Поясним смысл введенных обозначений:

$x^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t)'$ — вектор запаса товаров к периоду $[t-1, t]$ или то, что произведено за период $[t-2, t-1]$;

$\xi^t = (\xi_1^t, \xi_2^t, \dots, \xi_n^t)'$ — вектор мощностей отраслей на период $[t-1, t]$, где ξ_j^t — мощность j-й отрасли, т. е. максимально возможный валовый выпуск, обусловленный наличием основных фондов (количество станков и т. д.);

$\eta^t = (\eta_1^t, \eta_2^t, \dots, \eta_n^t)'$ — вектор планируемого увеличения мощностей по соответствующим отраслям за период $[t-1, t]$;

d_{ij} — объем продукции i-го вида, необходимый для приращения выпуска продукции j-го вида на единицу;

$D = \|d_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,n};\\ j=\overline{1,n}}}$, $D\eta^t$ — вектор материальных затрат на одновременное приращение мощностей, задаваемое вектором η^t;

L^t — общее количество нанятых рабочих на период $[t-1, t]$;

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)'$ — вектор потребления, предназначенный для одного рабочего (его «заработная плата» в натуральном выражении за единичный временный период);

$l = (l_1, l_2, \dots, l_n)'$ — вектор трудовых затрат; l_j — трудовые затраты, необходимые для выпуска единицы j-й продукции.

При таких обозначениях одна из упрощенных схем динамического межотраслевого баланса выглядит так (π-модель):

$$Ax^t + D\eta^t + L^t c \le x^t, \tag{6.3}$$

$$x^t \le \xi^{t-1}, \tag{6.4}$$

$$\xi^t = \xi^{t-1} + \eta^t, \tag{6.5}$$

$$\langle l, x^t \rangle \le L^{t-1}, \tag{6.6}$$

$$x^t \ge 0_n, \quad \xi^t \ge 0_n, \quad \eta^t \ge 0_n, \quad L^t \ge 0, \quad t = 1, 2, \dots, T. \tag{6.7}$$

Здесь x^1 и ξ^0 — запас продукции и мощности отраслей соответственно, созданные к началу планового периода.

Поясним содержательный смысл соотношений данной модели:

– неравенство (6.3) отражает необходимость соблюдения материального баланса: при плане $(x^t, \xi^t, \eta^t, L^t)$ на период $[t-1, t]$ суммарный объем текущих производственных затрат Ax^t, затрат на увеличение мощностей $D\eta^t$ и заработной платы $L^t c$ не должен превышать запаса к данному периоду;
– условие (6.4) отражает ограничение на валовый выпуск x^t в период $[t-2, t-1]$, который не должен превышать достигнутого уровня мощностей;
– условие (6.5) задает динамику прироста мощностей;
– неравенство (6.6) учитывает объем трудовых ресурсов, занятых в производстве.

Модель (6.3)–(6.7), более адекватная, чем статическая модель Леонтьева, тем не менее, упрощает и идеализирует реальное положение дел. В ней, например, отсутствуют ограничения по возможностям наращения мощностей (считается, что можно освоить любой объем $D\eta^t$ выделенных средств), не учитываются трудовые затраты на увеличение мощностей и т. д.

Заметим, что задача (6.3)–(6.7) относительно динамической четверки объектов $\{(x^t, \xi^t, \eta^t, L^t)\}_{t=\overline{1,T}}$ может иметь неединственное решение. В этом случае можно поставить задачу по оптимизации некоторого качественного критерия, зависящего от траектории модели $\{(x^t, \xi^t, \eta^t, L^t)\}_{t=\overline{1,T}}$, удовлетворяющей соотношениям (6.3)–(6.7).

6.4 Модель расширяющейся экономики Неймана

Теперь рассмотрим принципиально другой подход к моделированию экономики в динамике (Дж. фон Нейман, 30-е годы XX в.).

Классическая модель Неймана строится при следующих условиях:

1) экономика, характеризуемая линейными технологиями, каждая из которых обладает конечным числом производственных процессов, т. е. выпускается несколько видов товаров, причем допускается совместная деятельность отраслей;
2) производственные процессы разворачиваются во времени, причем осуществление затрат и выпуск готовой продукции разделены временным лагом;
3) для производства в данный период можно тратить только те продукты, которые были произведены в предыдущем периоде времени, первичные факторы не используются;
4) спрос населения на товары и, соответственно, конечное потребление в явном виде не выделяются;

5) цены товаров изменяются во времени.

Перейдем к описанию модели Неймана.

6.4.1 Понятие базисного процесса

На дискретном временном интервале $[0, T]$ с точками $t = 0, 1, 2, \dots, T$ рассматривается производство, в котором n видов затрат превращается в n видов продукции. При этом используется m видов производственных процессов, каждый из которых способен, используя эти n видов затрат, производить n видов продукции (виды затрат совпадают с видами продукции, как и в модели Леонтьева). Но, если в модели Леонтьева технологические коэффициенты (нормы расходов затрат) были отнесены к единице продукции, то здесь эти коэффициенты будем относить к интенсивности производственных процессов.

Предположим, что функционирование j-го производственного процесса требует затрат в количествах, задаваемых вектором $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})'$, и дает выпуск товаров в объемах $b^j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})'$. Таким образом, пара (a^j, b^j) характеризует технологический потенциал j-го процесса. Эти пары (a^j, b^j), $j = \overline{1, m}$, будем называть *базисными процессами*. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

называются соответственно *матрицей затрат* и *матрицей выпуска*. Технология модели, в итоге, задается парой неотрицательных матриц (A, B).

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)'$ — некоторый вектор с неотрицательными компонентами. Тогда можно определить новый технологический процесс, в котором затраты и выпуск являются линейной комбинацией векторов затрат a^j и выпуска b^j с коэффициентами $x_j \geq 0$:

$$\sum_{j=1}^{m} (a^j, b^j) x_j = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j a^j, \sum_{j=1}^{m} x_j b^j \right) = (Ax, Bx).$$

Вектор x будем называть *вектором интенсивностей* и говорить, что в процессе (Ax, Bx) базисный процесс (a^j, b^j) участвует с интенсивностью x_j.

6.4.2 Динамика модели Неймана

Через $x^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_m^t)'$ будем обозначать вектор интенсивностей, описывающий функционирование производственной системы в период $[t-1, t]$. Теперь реализуем в математической форме предположения модели.

Предположение 1. *Модель Неймана замкнута*, т. е. для производства в период $[t-1, t]$ мы можем тратить только те продукты, которые были произведены в предыдущий период времени

$$Ax^t \le Bx^{t-1}, \qquad t = 1, 2, \dots, T. \tag{6.8}$$

Вектор Bx^0 представляет собой запасы, имеющиеся к началу планового периода.

Последовательность векторов интенсивностей $x^1, x^2, \dots, x^T$, удовлетворяющих системе неравенств (6.8), будем называть *планом* или *траекторией интенсивностей с началом* x^0 и обозначать через $\{x^t\}_{t=\overline{1,T}}$.

При исследовании планов модели Неймана используются цены на продукты. Пусть p_i^t — цена единицы i-го продукта в период $[t, t+1]$, а $p^t = (p_1^t, p_2^t, \dots, p_n^t)$ — вектор цен. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^t b_i^j - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{t-1} a_i^j$ — прибыль j-го процесса за период $[t-1, t]$, поскольку в начале периода тратятся средства на закупку затрат по ценам p^{t-1} данного периода, а затем произведенная продукция продается по ценам следующего периода.

Предположение 2. *Никакой из процессов не приносит прибыли*:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^t b_i^j - \sum_{i=1}^{n} p_i^{t-1} a_i^j \le 0, \quad j = \overline{1,m}, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

или

$$p^t B \le p^{t-1} A. \tag{6.9}$$

Неравенство (6.9) называют *правилом нулевой прибыли.*

Поясним отсутствие положительной прибыли, которое на самом деле кажущееся. Дело в том, что величины дохода и издержек относятся к разным периодам времени. Пусть j-й процесс представляет собой некоторую производственную фирму, имеющую на начало периода $[t-1, t]$ капитал (доход) в размере K_j. Закупив сырье по ценам p^{t-1}, фирма может осуществить в этот период производство с интенсивностью

$$x_j^t = \frac{K_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{t-1} a_i^j}.$$

Таким образом, если прибыль нулевая, то

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^t b_i^j\right) x_j^t = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^t b_i^j\right) K_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{t-1} a_i^j} = K_j,$$

т. е. на конец периода фирма обладает тем же капиталом K_j. Однако, в условиях совершенной конкуренции цены со временем снижаются: $p^t < p^{t-1}$. Следовательно, покупательная способность капитала K_j на конец периода становится выше.

Последовательность векторов цен $p^0, p^1, \ldots, p^T$, удовлетворяющего системе неравенств (6.9), будем называть *траекторией цен* и обозначать $\{p^t\}_{t=\overline{0,T}}$.

Предположение 3. *Общая денежная масса не меняется.* Это можно выразить в виде

$$p^{t-1}Ax^t = p^tBx^t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{6.10}$$

Предположение 4. *Вся денежная масса находится в обращении:*

$$p^tBx^{t-1} = p^tAx^t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{6.11}$$

т. е. вся сумма денег, вырученная от продажи продукции цикла $[t-1, t]$, тут же идет на приобретение затрат для цикла $[t, t+1]$.

Совокупность соотношений (6.8)–(6.10), дополненная требованиями $x^t \geq 0_m$, $p^t \geq 0_n$ называется *моделью Неймана.*

6.4.3 Стационарные траектории

Важную роль при изучении модели Неймана играют самые простые из возможных траекторий интенсивностей и цен, так называемые, стационарные.

Определение 6.2. Траектория интенсивностей $\{x^t\}_{t=\overline{1,T}}$ называется *стационарной*, если существует такое число $\nu > 0$, что $x^t = \nu x^{t-1}$ для $t = 1, 2, \ldots, T$, или $x^t = \nu^t x$, где $x = x^0$. Если $\nu > 1$, то говорят, что в экономике наблюдается *сбалансированный рост производства.*

Имеет место следующее

Утверждение 6.1. *Для того, чтобы последовательность* $x^t = \nu^t x$, $t = 1, 2, \ldots, T$, *была стационарной траекторией интенсивностей необходимо и достаточно, чтобы*

$$\nu Ax \leq Bx. \tag{6.12}$$

Определение 6.3. Траектория цен $\{p^t\}_{t=\overline{0,T-1}}$ называется *стационарной*, если существует $\mu > 0$ такое, что $\mu p^t = p^{t-1}$ для $t = 0, 1, \ldots, T-1$, или $\mu^t p^t = p$, где $p = p^0$ — начальный вектор цен. Если $\mu > 1$, то говорят, что в экономике наблюдается *сбалансированное снижение цен.*

Справедливо следующее

Утверждение 6.2. *Последовательность $p^t = \mu^{-t} p$ будет стационарной траекторией цен тогда и только тогда, когда*

$$\mu pA \geq pB. \tag{6.13}$$

Замечание. Легко убедиться, что в условиях стационарности неравенство (6.12) реализует неравенство (6.8), а (6.13) — соответственно неравенство (6.9).

Для стационарных траекторий $x^t = \nu^t x$, $p^t = \mu^{-t} p$ равенства (6.10) и (6.11) принимают вид

$$\mu pAx = pBx, \tag{6.14}$$

$$\nu pAx = pBx. \tag{6.15}$$

Определение 6.4. Говорят, что *модель Неймана находится в состоянии равновесия с параметрами* (ν, μ, x, p), где $\nu > 0$, $\mu > 0$, $x \geq 0_m$, $p \geq 0_n$, если выполнены условия (6.12)–(6.15).

Величина pAx — стоимость затрат в состоянии равновесия. Естественно считать $pAx > 0$. Тогда из (6.12)–(6.13) следует $\mu = \nu$. Их общее значение обозначим через α. *Невырожденным положением равновесия* в модели Неймана называется тройка (α, x, p), где $\alpha > 0$, $x \geq 0_m$, $p \geq 0_n$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\alpha Ax \leq Bx, \quad \alpha pAx \geq pBx, \quad pAx > 0. \tag{6.16}$$

Число α называется *темпом роста*, луч $y = \lambda x$ $(\lambda \geq 0)$ — *лучом Неймана.*

Имеет место

Теорема 6.3. *Если неотрицательные матрицы A и B таковы, что в матрице B нет нулевых строк, а в матрице A нет нулевых столбцов, то решение системы* (6.16) *существует.*

Условия теоремы допускают естественное экономическое толкование. Требование $a^j \neq 0_n$, $j = \overline{1, m}$ означает, что нет процессов, которые ничего не тратят (отсутствие роста изобилия). Другое условие означает, что всякий продукт производится.

Для модели Неймана существует понятие продуктивности, обобщающее соответствующее понятие модели Леонтьева. А именно модель Неймана (A, B) называется *продуктивной*, если система неравенств

$$Bx - Ax \geq c, \quad x \geq 0_m$$

имеет решение при любом $c \geq 0_n$.

Интересен также следующий факт. Модель Неймана может иметь только конечное число темпов роста, не превышающее $\min\{m, n\}$.

7 Модели экономического роста и благосостояния

Главными вопросами данной главы являются: развитие экономики на основе роста производства, оптимальное распределение национального дохода по статьям настоящих и будущих расходов, а также такое ее развитие, когда все потребители достигают максимума своей полезности.

7.1 Модель Солоу

Эта модель является односекторной моделью экономического роста. В ней экономическая система рассматривается как единое целое, производит один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Модель достаточно адекватно отражает важнейшие макроэкономические аспекты процесса воспроизводства.

Итак, рассматривается экономика, производящая один (национальный) продукт с использованием двух основных факторов производства — труда и капитала (основных производственных фондов). На таком макроуровне все величины представляются в их стоимостном измерении. Поэтому валовый продукт ассоциируется с национальным доходом, а потребление и инвестиции составляют национальные расходы.

Схему распределения национального дохода можно представить следующим образом (рис. 7.1).

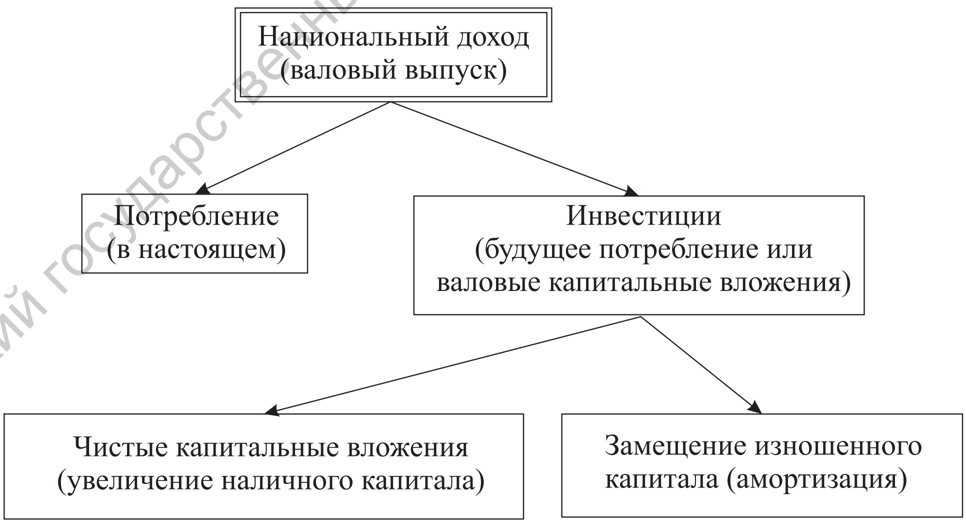

Рис. 7.1

Введем необходимые обозначения: Y^t — валовый выпуск в год t; C^t — объем потребления; I^t — инвестиции (валовые капитальные вложения); L^t — трудовые ресурсы; K^t — капитал (основные фонды).

Считаем, что в рассматриваемом периоде времени $[0, T]$ импорта и экспорта нет, и технический прогресс отсутствует.

Пусть валовый выпуск определяется с помощью агрегированной производственной функции F:

$$Y^t = F(K^t, L^t). \tag{7.1}$$

Отсутствие технического прогресса означает, что производственная функция инвариантна во времени. Будем предполагать, что она обладает однородностью первой степени, т. е. $F(\lambda K^t, \lambda L^t) = \lambda F(K^t, L^t)$ для $\lambda \geq 0$.

Бюджетный баланс требует, чтобы в каждый год t выполнялось равенство

$$Y^t = C^t + I^t. \tag{7.2}$$

Это означает, что весь национальный доход делится на потребление и инвестиции, т. е. между настоящим и будущим потреблением.

Обозначим через α^t долю инвестиций в национальном доходе в год t. Тогда

$$I^t = \alpha^t Y^t, \quad C^t = (1 - \alpha^t) Y^t.$$

Как видно из рис. 7.1, валовые капитальные вложения, в свою очередь, идут на увеличение наличного капитала с целью приращения основных фондов (чистые капитальные вложения) и на замещение изношенного капитала, т. е. на восстановление изношенной части основных производственных фондов (амортизационные отчисления).

Предположим, что основные фонды изнашиваются с темпом μ^t, т. е. за год t из строя выходит $\mu^t K^t$ единиц основных фондов. По нашим обозначениям K^t и K^{t+1} характеризуют основные фонды в начале и конце периода $[t, t+1]$. Следовательно, приращение основных фондов за год t есть $\Delta K^t = K^{t+1} - K^t$. Поэтому объем инвестиций должен удовлетворять условию

$$I^t = \Delta K^t + \mu^t K^t. \tag{7.3}$$

Отсюда получаем динамику чистого капитального вложения

$$K^{t+1} = \alpha^t F(K^t, L^t) + (1 - \mu^t) K^t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{7.4}$$

где K^0 — начальные вложения в основные фонды. Уравнение (7.4) является основным уравнением экономического роста в агрегированных показателях. Далее мы получим его запись в «нормированных» показателях.

Из (7.1), учитывая положительную однородность производственной функции F, имеем:

$$\frac{Y^t}{L^t} = F\left(\frac{K^t}{L^t}, 1\right).$$

Отношение K^t/L^t называется *фондо-* или *капиталовооруженностью*, и показывает долю капитала, приходящуюся на одного рабочего. Обозначим объем валового выпуска и фондовооруженность, приходящиеся на одного рабочего, соответственно через

$$y^t = \frac{Y^t}{L^t}, \quad k^t = \frac{K^t}{L^t},$$

и введем функцию f:

$$f\left(\frac{K^t}{L^t}\right) = F\left(\frac{K^t}{L^t}, 1\right).$$

Тогда вместо (7.1) можем написать

$$y^t = f(k^t).$$

Введем также величины потребления и интенсивностей, приходящиеся на одного рабочего:

$$c^t = \frac{C^t}{L^t}, \quad i^t = \frac{I^t}{L^t}.$$

В новых обозначениях баланс (7.2) имеет вид

$$y^t = c^t + i^t, \tag{7.5}$$

а равенство (7.3) для валовых инвестиций —

$$i^t = \Delta k^t + \mu^t k^t, \tag{7.6}$$

где $\Delta k^t = k^{t+1} - k^t = \Delta K^t/L^t$.

Подставляя в (7.5) выражение (7.6), получаем

$$y^t = c^t + \mu^t k^t + \Delta k^t. \tag{7.7}$$

Это равенство показывает, что выпуск продукции, приходящийся на одного рабочего, распределяется на потребление данного рабочего, поддержание (амортизацию) его капиталовооруженности на прежнем уровне и чистый прирост капиталовооруженности.

В классических моделях роста под состоянием экономики (фазовой координаты системы) принято понимать фондовооруженность k^t на одного рабочего. Ее динамику получим из уравнения экономического роста (7.7), переписав его в виде

$$k^{t+1} = f(k^t) - c^t + (1 - \mu^t k^t), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{7.8}$$
$$c^t = (1 - \alpha^t) f(k^t). \tag{7.9}$$

С учетом заданного значения

$$k^0 = \frac{K^0}{L^0}, \tag{7.10}$$

мы получаем (7.8)–(7.10) — *модель Солоу в «нормированных» показателях.*

7.2 Односекторная модель оптимального экономического роста

Если ранее мы считали функцию α^t, а значит, и c^t, заданной, то теперь мы будем рассматривать функцию c^t — потребление одного рабочего (удельное потребление) — в качестве управления системы (7.8)–(7.10). Перепишем ее в виде

$$k^{t+1} = f(k^t) - c^t + (1 - \mu^t k^t), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{7.11}$$
$$k^0 = k_0. \tag{7.12}$$

Допустимым управлением c^t будем считать любое, удовлетворяющее условию

$$0 < \underline{c} \le c^t \le f(k^t), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{7.13}$$

где $\underline{c}$ — предельно допустимая нижняя граница удельного потребления.

Для динамической системы (7.11)–(7.12) введем понятие терминального множества, которое обозначим через M. Это некоторое множество из фазового пространства R^1, в которое требуется привести состояние экономики к плановому горизонту T, т. е. должно выполняться условие

$$k^T \in M. \tag{7.14}$$

Пусть функция $u(c)$ выражает полезность удельного потребления c. План развития экономики составляется в начальный момент времени $t = 0$ на весь период $[0, T]$. Поэтому, чтобы оценить полезность $u(c^t)$, с точки зрения начального момента, следует ее дисконтировать (привести к начальному состоянию). Если нам известна соответствующая ставка приведения ρ, то полезность $u(c^t)$ в момент $t = 0$ равна $u(c^t)(1+\rho)^{-t}$.

Тогда, в целом, качество управления $\{c^t\}_{t=\overline{0,T}}$ выражает функционал

$$J(c^t) = \sum_{t=0}^{T} \frac{u(c^t)}{(1+\rho)^t}. \tag{7.15}$$

В окончательной форме неоклассическая модель агрированной задачи оптимального экономического роста имеет вид

$$\begin{cases} k^{t+1} = f(k^t) - c^t + (1 - \mu^t k^t), \quad t = 0, 1, \ldots, T, \\ k^0 = k_0, \quad k^T \in M, \\ 0 \le \underline{c} \le c^t \le f(k^t), \quad t = 0, 1, \ldots, T, \\ \sum\limits_{t=0}^{T} \dfrac{u(c^t)}{(1+\rho)^t} \to \max. \end{cases} \tag{7.16}$$

Допустимое управление $\{c^{t*}\}_{t=\overline{0,T}}$, удовлетворяющее (7.11)–(7.14), соответствующее максимальному значению функционалу (7.15), называется *оптимальным управлением.* Оно задает оптимальный уровень потребления c^{t*} на одного рабочего в каждый год $t = 1, 2, \ldots, T$. Поэтому для каждого фиксированного значения L^{t*} трудовых ресурсов можно найти оптимальные пропорции (C^{t*}, I^{t*}) потребления и инвестиций, где

$$C^{t*} = c^{t*} L^{t*}, \quad I^{t*} = F(K^{t*}, L^{t*}), \quad K^{t*} = k^{t*} L^{t*},$$

а $\{k^{t*}\}_{t=\overline{0,T}}$ — оптимальная траектория задачи (7.16).

Для решения задачи (7.16) и его исследования применяются методы теории оптимального управления динамическими системами.

7.3 Модель экономического благосостояния

Говорят, что экономика достигает совершенства, когда все потребители одновременно достигают максимальной для себя выгоды. Это достаточно редкое состояние экономики. В связи с этим встает вопрос достижения такого состояния, которое было бы наиболее предпочтительным одновременно для всех. Другими словами, задача состоит в таком распределении имеющегося запаса товаров, чтобы любое другое, увеличивающее полезность хотя бы одного из потребителей, ведет к уменьшению полезности кого-то из остальных (обогащения одного за счет других). Исследование вопросов распределения товаров в указанном смысле составляет теорию экономики благосостояния. Как будет далее показано, математическая формализация рассматриваемой задачи приводит к задаче многокритериальной оптимизации, в основе исследования которой лежит понятие оптимальности по Парето.

7.3.1 Оптимальность по Парето

Это понятие было введено для задач многокритериальной оптимизации вида

$$\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\} \to \max_{x\in D}, \qquad (7.17)$$

где D — множество допустимых решений лица принимающего решения (ЛПР), $f_i(x)$ — качественные критерии решения, в оптимизации которых ЛПР заинтересовано. Понятно, что, за исключением тривиальных ситуаций, достижение максимальных значений всех функций $f_i(x)$ в какой-то точке невозможно. Поэтому обычные методы оптимизации к каждой из функций $f_i(x)$ здесь напрямую применять нельзя. Нужны некоторые дополнительные указания к выбору решения. Однако, есть возможность заранее исключить из D часть допустимых решений, которые не годятся на роль окончательного решения задачи (7.17) при любом разумном подходе.

Определение 7.1. Точка $x^0 \in D$ называется *оптимальной по Парето* в задаче многокритериальной оптимизации (7.17), если не существует другой точки $x \in D$, для которой $f_i(x) \geq f_i(x^0)$, $i = \overline{1,m}$, причем хотя бы для одного индекса i имеет место строгое неравенство.

Множество всех оптимальных по Парето точек называется *множеством Парето*.

Смысл оптимальности точки x^0 заключается в том, что переход к любой другой точке $x \in D$, для которой происходит увеличение одного из критериев: $f_{i_0}(x) > f_{i_0}(x^0)$, обязательно сопровождается уменьшением значения хотя бы одного из других критериев: $f_{j_0}(x) < f_{j_0}(x^0)$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — неотрицательные числа и $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Обозначим через $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$ агрегированный критерий задачи (7.17).

Имеет место следующая

Теорема 7.1. *Пусть в задаче* (7.17) *множество* D *выпукло и замкнуто, а функции* $f_i(x)$ *вогнуты на* D. *Тогда*

1) *если* $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, *а точка* $x^* \in D$ *такова, что* $f(x^*) = \max\limits_{x\in D} f(x)$, *то точка* x^* *оптимальна по Парето;*
2) *если точка* $x^* \in D$ *является оптимальной по Парето, то существуют* $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ *такие, что* $f(x^*) = \max\limits_{x\in D} f(x)$.

7.3.2 Оптимальное распределением в модели Эрроу–Дебре

В теории экономического благосостояния оптимальность по Парето формализует один из принципов «социальной справедливости».

Возьмем за основу модель конкурентного равновесия Эрроу–Дебре. Альтернативная форма определения конкурентного равновесия, данная в главе 4, может выглядеть так. Этот такое состояние экономики, когда при заданном наборе цен (называемых *равновесными*) ни один из потребителей не может достичь большей полезности без дополнительных затрат и ни одна из форм не может увеличить прибыль.

Наша цель — получить математическую модель задачи для отыскания равновесного состояния экономики, основанного на такой трактовке равновесия.

Как и в главе 4, будем считать, что экономическая система состоит из l потребителей, m фирм (производителей) и n видов товаров.

Напомним обозначения:

$\{Y_j\} \subset \mathbb{R}^n_+$, $j = \overline{1,m}$, — множества возможных производственных планов по выпуску ассортимента товаров;

$\{b_i\} \in \mathbb{R}^n_+$, $i = \overline{1,l}$, — начальные запасы потребителей;

$b = \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$ — суммарный объем запасов;

X_i — множество допустимых векторов потребления, на котором определена функция $u_i(x)$ — функция полезности i-го потребителя, $i = \overline{1,l}$;

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n_+;\ y = b + \sum_{j=1}^{m} y^{(j)},\ y^{(j)} \in Y_j,\ j = \overline{1,m} \right\};$$

$$X = \left\{ x = \sum_{i=1}^{l} x^{(i)},\ x^{(i)} \in X_i,\ i = \overline{1,l} \right\}.$$

В нетривиальной ситуации потребители не могут одновременно достигать максимальной полезности. Поэтому, ставится вопрос в более возможной для разрешения форме. А именно как достигнуть состояния экономики, которое было бы наиболее предпочтительным одновременно для всех потребителей. Более конкретно, поставим следующую задачу.

Требуется распределить произведенный запас товаров между потребителями так, чтобы любое другое распределение, при котором увеличивается полезность хотя бы одного потребителя, ведет к уменьшению полезности кого-то из остальных.

Исходя из поставленной задачи, ее математическая формализация выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \{u_1(x^{(1)}), \dots, u_m(x^{(m)})\} \to \max\limits_{(x,y)}, \\ F(x,y) \equiv b + y - \sum\limits_{i=1}^{l} x^{(i)} \geq 0, \\ x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in X_1 \times \dots \times X_m, \quad y \in Y. \end{cases} \tag{7.18}$$

Это задача многокритериальной оптимизации. Ее решение (x^0, y^0) связано с состоянием конкурентного равновесия.

Определение 7.2. Система векторов $\{x^{(i)}\}_{i=\overline{1,l}}$, где $x^{(i)} \in X_i$, называется *допустимой*, если существует вектор $y \in Y$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^{l} x^{(i)} \leq b+y$.

Теперь переосмыслим определение Парето-оптимальности применительно к поставленной задаче (7.18).

Определение 7.3. Система векторов $\{x^{(i)}\}_{i=\overline{1,l}}$, где $x^{(i)} \in X_i$, является *оптимальной по Парето*, если

1) эта система допустима;
2) не существует другой допустимой системы $\{\hat{x}^{(i)}\}_{i=\overline{1,l}}$, для которой $u_i(\hat{x}^{(i)}) \geq u_i(x^{(i)})$, $i = \overline{1,l}$, и хотя бы одно неравенство выполняется строго.

Следующее утверждение говорит о взаимосвязи задачи о равновесии в модели Эрроу–Дебре с понятием оптимальности по Парето.

Теорема 7.2. *Пусть* $\{p_E, x(p_E), y(p_E)\}$ *— конкурентное равновесие в модели Эрроу–Дебре, где* $x_E = \sum\limits_{i=1}^{l} x^{(i)}(p_E)$, $x^{(i)}(p_E)$ *— вектор-функции спроса потребителей, а* $y_E = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j(p_E) + b$, $y_j(p_E)$ *— вектор-функции предложения производителей при векторе цен* p_E. *Тогда система векторов* $\{x^{(i)}(p_E)\}_{i=\overline{1,l}}$ *является Парето-оптимальной для задачи* (7.18).

Для того, чтобы установить обратную связь оптимальности по Парето с конкурентным равновесием примем несколько дополнительных условий:

1) доходы потребителей состоят только из участия в производственном секторе:

$$K_i(p) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \langle p, y^{(j)} \rangle;$$

2) существуют векторы $x = \sum\limits_{i=1}^{l} x^{(i)}$, где $x^{(i)} \in X_i$, и $y \in Y$ такие, что $y + b - x > 0_n$;

3) Парето-оптимальная система векторов $\{x^{(i)^*}\}_{i=\overline{1,l}}$ такова, что для любого i_0 существует система $\{\hat{x}^{(i)}\}_{i=\overline{1,l}}$, где $\hat{x}^{(i)} \in X_i$, $i = \overline{1,l}$, $\hat{x}^{(i)} = x^{(i)^*}$ для $i \neq i_0$, и вектор $\hat{y} \in Y$ такие, что $\hat{y} - \hat{x} > 0_n$, где $\hat{x} = \sum\limits_{i=1}^{l} \hat{x}^{(i)}$.

Теорема 7.3. *Пусть выполняются условия 1), 2), а система векторов $\{x^{(i)^*}\}_{i=\overline{1,l}}$ является Парето-оптимальной и удовлетворяет условию 3). Тогда существуют $y^* \in Y$, $p^* \geq 0_n$ и матрица $\alpha^* = (\alpha_{ij})_{\substack{i=\overline{1,l};\\ j=\overline{1,m}}}$ с элементами $\alpha_{ij} \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij} = 1$, $\forall\ j = \overline{1,m}$, такие, что совокупность $\{p^*, x^*, y^*, \alpha^*\}$, где $x^* = \sum\limits_{i=1}^{l} x^{(i)^*}$, образует конкурентное равновесие в модели Эрроу–Дебре.*

Список дополнительной литературы

[1] *Данилов Н.Н.* Курс математической экономики — Учебное пособие. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 2002.

[2] Моделирование экономических процессов. Учебник под ред. М.В. Грачевой, Л.Н.Федеевой, Ю.Н. Черемных. — М: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

[3] *Колемаев В.А.* Математическая экономика. — М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

[4] *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975.

[5] *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984.

[6] *Вэриан Х. Р.* Микроэкономика. Промежуточный уровень, современный подход. — М.: ЮНИТИ, 1997.