ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ НА ПЛОСКОСТИ

Н.С. Анофрикова, О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических специальностей и направлений подготовки

Саратов 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и программой преподавания курса «Математика» для студентов географического факультета и Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение основными численными методами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Цель пособия – помочь студентам первого курса географического факультета и Института химии СГУ освоить первоначальные понятия аналитической геометрии и получить практические навыки при решении типовых задач по данной теме.

Пособие содержит следующие главы: прямая линия на плоскости, кривые второго порядка. Более подробное содержание приведено в оглавлении. В пособии кратко изложены необходимые теоретические сведения и формульные соотношения, основной материал иллюстрируют примеры. В конце каждой главы приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала. Задачи для самостоятельного решения, приведенные в конце пособия, позволят обучающимся научиться применять полученные знания на практике, тем самым будут способствовать лучшему пониманию и усвоению материала. А ответы помогут проконтролировать правильность решения задач.

Пособие может быть полезно при изучении данной темы студентами нематематических специальностей и направлений подготовки, изучающих высшую математику.

Глава 1. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Линия l представляет собой множество точек плоскости, обладающих геометрическими свойствами, присущими только им.

Пусть на плоскости заданы прямоугольная система координат и линия l (рис. 1.1).

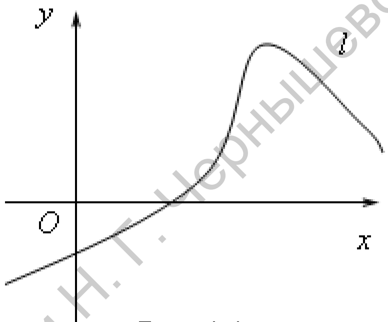

Рис. 1.1

Определение 1.1. *Уравнением линии* l относительно заданной системы координат называется уравнение вида

$$F(x, y) = 0, \qquad (1.1)$$

которому удовлетворяют координаты $(x; y)$ любой точки линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на линии.

Величины x и y рассматриваются как координаты переменной точки линии, поэтому их называют *текущими координатами*.

Если (1.1) является уравнением некоторой линии l, то говорят, что (1.1) определяет линию.

Примеры.

1. Уравнение $x - y = 0$ эквивалентно уравнению $y = x$ и определяет прямую, являющуюся биссектрисой I и III координатных углов.

2. Уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяют координаты одной точки $(0; 0)$. Такую линию называют вырожденной.

3. Уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не имеет действительных решений и, следовательно, никакой линии на плоскости не определяет.

Введение понятия уравнения линии дает возможность сводить геометрические задачи к алгебраическим. Уравнение линии позволяет заменить изучение геометрических свойств линии исследованием ее уравнения. Так, чтобы установить лежит ли точка $M_0(x_0; y_0)$ на данной линии, заданной уравнением (1.1), достаточно проверить, не производя геометрических построений, удовлетворяют ли координаты точки M_0 уравнению этой линии в выбранной системе координат. Если $F(x_0, y_0) = 0$, то точка лежит на линии, если $F(x_0, y_0) \neq 0$, то точка не лежит на линии.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, то есть нахождении точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

1.2. ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Простейшей линией на плоскости является прямая. Прямая может быть задана различными способами. Каждому способу задания прямой в прямоугольной системе координат соответствует вид ее уравнения.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат и некоторая прямая не перпендикулярная оси Ox. Ее положение можно определить двумя величинами: углом между прямой и осью Ox и ординатой точки пересечения прямой с осью Oy.

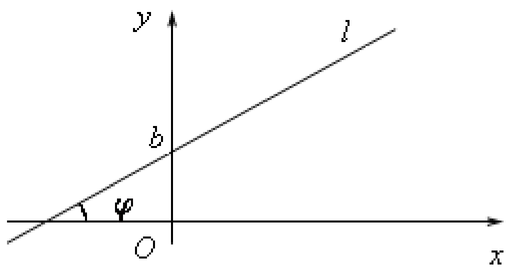

Рис. 1.2

<u>Определение 1.2.</u> *Углом наклона прямой* к оси Ox называется наименьшее положительное значение угла φ, на который надо повернуть ось Ox против часовой стрелки, до совпадения с данной прямой (рис. 1.2).

<u>Определение 1.3.</u> *Угловым коэффициентом* прямой называется величина $k = \operatorname{tg}\varphi$.

<u>Определение 1.4.</u> *Начальной ординатой* прямой называется ордината точки пересечения прямой с осью Oy (осью ординат).

Пусть $b -$ начальная ордината прямой, а $k -$ ее угловой коэффициент, тогда уравнение такой имеет вид:

$$y = kx + b. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) называется уравнением прямой с *угловым коэффициентом*.

При $\varphi = 0$ значение $k = 0$ и прямая будет параллельна оси Ox и ее уравнение примет вид:

$$y = b.$$

При $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ значение углового коэффициента $k = \operatorname{tg}\varphi$ не существует и уравнение (1.2) теряет смысл. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид

$$x = a,$$

где $a -$ точка пересечения прямой с осью Ox.

Эта прямая параллельна оси Oy.

Если прямая проходит через начало координат, то $b=0$ и, следовательно, уравнение прямой примет вид:

$$y = kx.$$

Пример. Составить уравнение прямой, пересекающей ось ординат в точке $(0;-3)$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

Находим угловой коэффициент $k = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Начальная ордината $b=-3$. Воспользовавшись уравнением (1.2), получаем искомое уравнение прямой:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом

Пусть известны координаты точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и угловой коэффициент k прямой. В уравнении прямой с угловым коэффициентом (1.2) величина b является неизвестной. Найдем значение b из условия, что прямая проходит через точку M_1, следовательно, ее координаты $(x_1;\, y_1)$ должны удовлетворять уравнению (1.2):

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Здесь k – известная величина. Определим $b = y_1 - kx_1$. Подставляя найденное значение b в уравнение (1.2), после тождественных преобразований получим искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{1.3}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$, через которые проходит прямая. Воспользуемся уравнением (1.3). В нем не известен угловой коэффициент k. Так как прямая проходит через точку M_2, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (1.3):

$$y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1).$$

Отсюда можно найти неизвестную величину k:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.4}$$

Подставляя значение k в уравнение (1.3), получим искомое уравнение прямой:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (1.5)$$

Здесь $y_2 \neq y_1$, $x_2 \neq x_1$.

Если $y_2 = y_1$ (ординаты точек равны), то прямая, проходящая через две точки, параллельна оси Ox, и ее уравнение имеет вид $y = y_1$.

Если $x_2 = x_1$ (абсциссы точек равны), то прямая, проходящая через две точки, параллельна оси Oy, и ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;3)$ и $B(-2;-1)$.

Решение.

Так как $x_1 = x_2 = -2$, то прямая имеет уравнение $x=-2$, то есть параллельна оси ординат.

Общее уравнение прямой

ТЕОРЕМА. В прямоугольной системе координат на плоскости всякое уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \qquad (1.6)$$

(где A, B, C – постоянные коэффициенты, причем A, B не равны одновременно нулю) определяет некоторую прямую.

Определение 1.4. *Общим уравнением прямой* называется уравнение вида $Ax+By+C=0$.

Определение 1.5. *Линиями первого порядка* называются линии на плоскости, определяемые алгебраическим уравнением первой степени относительно x и y.

Таким образом, каждая прямая есть линия первого порядка, и, обратно, каждая линия первого порядка есть прямая.

Если задано общее уравнение прямой, то можно определить угловой коэффициент прямой и начальную ординату.

Пример. Найти угловой коэффициент и начальную ординату прямой $12x-5y-65=0$.

Решение.

Разрешив уравнение относительно y, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=\frac{12}{5}x-13$. Отсюда угловой коэффициент прямой равен $\frac{12}{5}$, а ордината точки пересечения прямой с осью Oy равна -13.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой, когда некоторые из коэффициентов уравнения равны нулю. Тогда прямая в прямоугольной системе координат располагается определенным образом.

1. Если $C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0$, то уравнение (1.6) примет вид:

$$Ax + By = 0 \text{ или } y = (-A/B)x.$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат, под углом φ ($\operatorname{tg}\varphi = -A/B$).

2. Если $A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$, то уравнение (1.6) примет вид:

$$By + C = 0 \text{ или } y = b\ (b = -C/B).$$

Это уравнение прямой, параллельной оси Ox.

3. Если $B = 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0$, то уравнение (1.6) примет вид:

$$Ax + C = 0 \text{ или } x = a\ (a = -C/A).$$

Это уравнение прямой, параллельной оси Oy.

4. Если $B = C = 0,\ A \neq 0$, то уравнение (1.6) примет вид:

$$Ax = 0 \text{ или } x = 0, \text{ так как } A \neq 0.$$

Это уравнение оси Oy.

5. Если $A = C = 0,\ B \neq 0$, то уравнение (1.6) примет вид:

$$By = 0 \text{ или } y = 0, \text{ так как } B \neq 0.$$

Это уравнение оси Ox.

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой свободный член $C \neq 0$, то, перенося его в правую часть уравнения и разделив все члены уравнения на $-C$, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (1.7)$$

(здесь $a = -C/A$, $b = -C/B$).

Уравнение (1.7) называют *уравнением прямой в отрезках*. В нем a является абсциссой точки пересечения прямой с осью Ox, а b – ординатой точки пересечения прямой с осью Oy. Поэтому a и b называют отрезками прямой на осях координат (рис. 1.3). Вид уравнения (1.7) удобен при построении прямой.

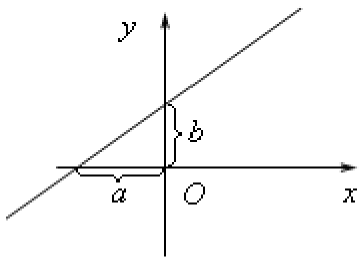

Рис. 1.3

П р и м е р. Дано общее уравнение прямой $3x - 5y - 20 = 0$. Найти точки пересечения прямой с осями координат.

Р е ш е н и е.

Приведем общее уравнение прямой к виду (1.7). Для этого перенесем свободный член уравнения в правую часть и разделим обе части на 20:

$$\frac{3}{20}x - \frac{5}{20}y = 1.$$

Переписав последнее уравнение в виде $\dfrac{x}{\left(\dfrac{20}{3}\right)} + \dfrac{y}{(-4)} = 1$, получим уравнение данной прямой в отрезках и, следовательно, абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox равна $\dfrac{20}{3}$, а ордината точки пересечения прямой с осью Oy равна –4.

Нормальное уравнение прямой

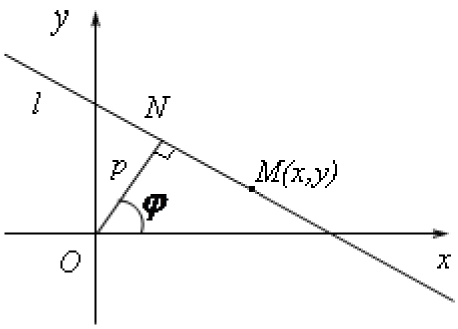

Рис. 1.4

Пусть в прямоугольной системе координат дана некоторая прямая l, не проходящая через начало координат. Опустим из начала координат на прямую l перпендикуляр. Обозначим основание перпендикуляра точкой N. Длину перпендикуляра обозначим через p, то есть $p = |ON|$ $(p \geq 0)$. Обозначим φ − угол между отрезком ON и положительным направлением оси Ox $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$(рис. 1.4). Положение прямой относительно осей координат можно определить величинами φ и p, и уравнение прямой l будет иметь следующий вид:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0. \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) называют *нормальным уравнением прямой*. Общее уравнение прямой (1.6) будет нормальным уравнением прямой вида (1.8), если для коэффициентов A, B, C выполняются условия: $A^2 + B^2 = 1$ (так как $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$) и $C < 0$.

П р и м е р ы.

1. Написать нормальное уравнение прямой, для которой $p = 4$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Р е ш е н и е.

Подставим данные задачи в уравнение (1.8)

$$x\cos\frac{\pi}{3} + y\sin\frac{\pi}{3} - 4 = 0 \text{ или } \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 4 = 0.$$

2. Какие из уравнений прямых:

$a)\ 7x+5y-3=0$; $b)\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=0$; $c)\ \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+1=0$; $d)\ \frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-5=0$

записаны в нормальной форме?

Р е ш е н и е.

Для ответа на вопрос следует проверить выполнение двух условий $A^2+B^2=1$ и $C<0$ в каждом случае. Только в случае *d*) они оба выполнены, следовательно, в случае *d*) уравнение прямой записано в нормальной форме.

1.3. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ К НОРМАЛЬНОМУ ВИДУ

Пусть $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой. Для того чтобы это уравнение привести к нормальному виду, необходимо все его коэффициенты умножить на *нормирующий множитель*

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{1.9}$$

Знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку C в общем уравнении прямой. Если C отсутствует ($C=0$), то знак берется произвольным.

П р и м е р ы.

1. Привести к нормальному виду уравнение прямой: $3x+4y-10=0$.

Р е ш е н и е.

Найдем нормирующий множитель по формуле (1.9). Так как $C=-10<0$ нормирующий множитель следует брать со знаком “+”:

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}.$$

Умножив все члены уравнения прямой на вычисленное значение μ, получим нормальное уравнение прямой:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0.$$

1.4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy заданы две прямые l_1 и l_2 своими общими уравнениями:

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1.10}$$

$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{1.11}$$

Вопрос о взаимном расположении двух прямых сводится к решению системы уравнений (1.10)–(1.11) (при условии, что $A_i^2+B_i^2\neq 0,\ i=1,2$).

Система уравнений (1.10)–(1.11) является системой двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Для решения данной системы будем использовать формулы Крамера.

Рассмотрим определители системы (1.10)-(1.11)

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1, \quad D_x = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = C_1B_2 - C_2B_1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = A_1C_2 - A_2C_1.$$

При $D \neq 0$ получим единственное решение системы

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}. \tag{1.12}$$

Если решение системы единственно, то прямые пересекаются в одной точке, координатами которой будут найденные значения x и y.

При $D = 0$ имеем $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$. Тогда $k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} = k_2$, т.е. угловые коэффициенты прямых равны, а значит прямые наклонены под одним углом к оси Ox.

Если $D = 0$, $D_x \neq 0$ и $D_y \neq 0$, то система (1.10)–(1.11) не имеет решений и, следовательно, прямые не имеют общих точек, то есть прямые параллельны.

При $D = 0$, $D_x = 0$ или $D_y = 0$ система имеет бесчисленное множество решений, выполнена полная пропорциональность $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, и, следовательно, прямые совпадают.

Примеры.

Даны две прямые. Определить взаимное расположение прямых на плоскости.

1. $2x + 3y - 7 = 0$; $x - y - 1 = 0$.

Решение.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Определитель системы $D = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -5 \neq 0$ и, следовательно, прямые пересекаются в одной точке. Решение системы определяется по формулам (1.12):

$$x = \frac{(-1) \cdot 7 - 3 \cdot 1}{(-5)} = 2, \quad y = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 7}{(-5)} = 1.$$

Решение системы $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}$

можно представить как координаты точки M. Таким образом, прямые пересекаются в точке $M(2;1)$ (рис. 1.5).

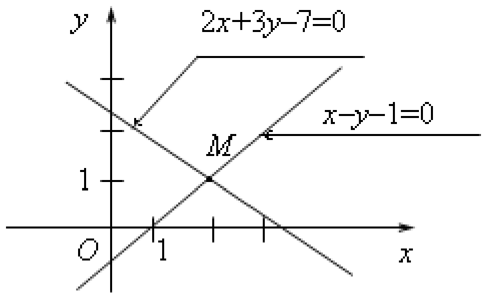

Рис. 1.5

2. $x+2y-3=0$; $2x+4y-4=0$.

Решение.

Для системы уравнений

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\quad D_x=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=4\neq 0,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

т. е. прямые параллельны (рис. 1.6).

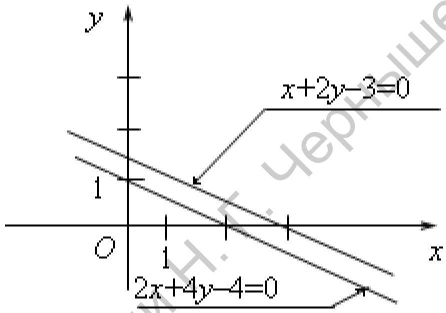

Рис. 1.6

3. $x+2y-3=0$; $2x+4y-6=0$.

Решение.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases}x+2y=3,\\ 2x+4y=6.\end{cases}$$

Для системы уравнений

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\ D_x=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}=0,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, система имеет бесчисленное множество решений, и прямые совпадают (рис. 1.7).

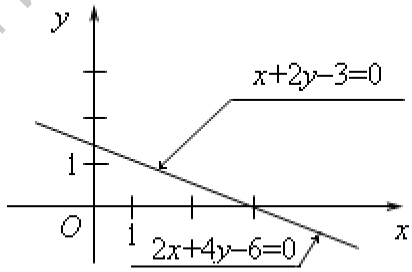

Рис. 1.7

1.5. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы своими уравнениями:

$$l_1:\ y=k_1x+b_1,\quad k_1=\operatorname{tg}\varphi_1;$$

$$l_2:\ y=k_2x+b_2,\quad k_2=\operatorname{tg}\varphi_2.$$

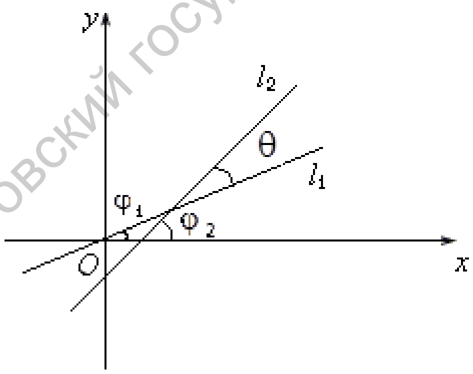

Рис. 1.8

Определение 1.6. *Углом между двумя пересекающимися прямыми* называется наименьший угол, на который надо повернуть одну из прямых вокруг их общей точки до совмещения со второй прямой.

Угол $\theta=\varphi_2-\varphi_1$ является углом между двумя прямыми (рис.1.8).

Тогда

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)\right| = \left|\frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}\right|.$$

Отсюда, учитывая обозначения, получаем выражение для $\operatorname{tg}\theta$:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \tag{1.13}$$

Эта формула определяет один из углов между прямыми. Второй угол равен $\pi - \theta$.

П р и м е р. Две прямые заданы своими уравнениями:

$$l_1:\ y = 2x + 3;$$
$$l_2:\ y = -3x + 2.$$

Найти угол между прямыми.

Р е ш е н и е.

Из уравнений прямых очевидно, что $k_1 = 2$; $k_2 = -3$. Подставляя эти значения в уравнение (1.13), определяем $\operatorname{tg}\theta$: $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}\right| = 1$.

Следовательно, наименьший угол между прямыми $\theta = 45^\circ$.

Выражение (1.13) позволяет сформулировать условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Если прямые параллельны, то $\theta=0$ и $\operatorname{tg}\theta=0$, а из (1.13) это возможно, когда $k_2 - k_1 = 0$. Следовательно, угловые коэффициенты прямых равны.

Таким образом, условие параллельности прямых, заданных своими уравнениями с угловым коэффициентом имеет вид:

$$k_2 = k_1. \tag{1.14}$$

Если прямые перпендикулярны, то $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$.

Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Таким образом, условие перпендикулярности двух прямых, заданных своими уравнениями с угловым коэффициентом имеет вид:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{1.15}$$

П р и м е р. Даны вершины треугольника $A(0;1)$; $B(6;5)$ и $C(12;-1)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.

Решение.

По формуле (1.4) найдем угловой коэффициент стороны AB: $k = \frac{5-1}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. В силу условия перпендикулярности угловой коэффициент высоты, проведенной из вершины C, равен $-\frac{3}{2}$. Уравнение искомой линии получим, подставляя в уравнение (1.3) координаты точки C и $k = -\frac{3}{2}$. Таким образом, уравнение этой высоты имеет вид

$$y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 12).$$

1.6. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy задана прямая l нормальным уравнением $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ и точка $M_0(x_0;\, y_0)$, лежащая вне этой прямой. Необходимо определить расстояние d от точки M_0 до прямой l, т.е. длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Точка M_0 и начало координат могут лежать по разные стороны от прямой l (случай 1) или по одну сторону от прямой l (случай 2) (рис. 1.9). Проведем через точку M_0 прямую l_0, параллельную прямой l. Опустим из начала координат перпендикуляры на прямые l_0 и l. Обозначим точками N_0 и N основания этих перпендикуляров. Искомое расстояние обозначим d. Очевидно $d = |NN_0|$. Обозначим $p_0 = |ON_0|$.

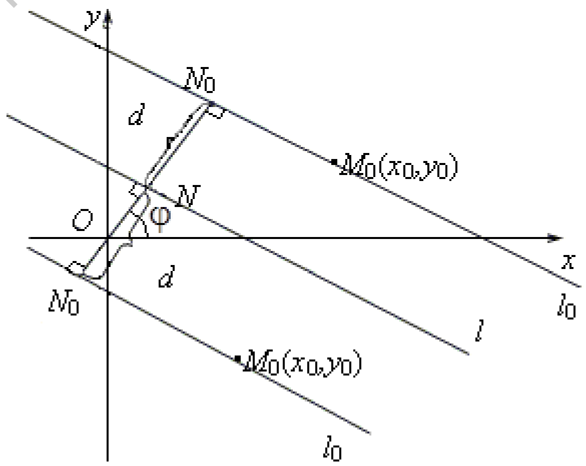

Рис. 1.9

Запишем нормальное уравнение прямой l_0:

$$x\cos\ \varphi + y\sin\ \varphi - p_0 = 0 \ \ \text{(случай 2)},$$

$$x\cos\,(\pi + \varphi) + y\sin\,(\pi + \varphi) - p_0 = 0 \ \ \text{(случай 1)}$$

Так как точка M_0 лежит на прямой l_0, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, то есть

$$x_0\cos\ \varphi + y_0\sin\ \varphi - p_0 = 0 \ \ \text{(случай 2)},$$

$$x_0\cos\ (\pi + \varphi) + y_0\sin\,(\pi + \varphi) - p_0 = 0 \ \ \text{(случай 1)}.$$

Отсюда получаем

$$p_0 = x_0 \cos\ \varphi + y_0 \sin\ \varphi \quad \text{(случай 2)},$$
$$p_0 = x_0 \cos\ (\pi + \varphi) + y_0 \sin\ (\pi + \varphi) \quad \text{(случай 1)}.$$

Если M_0 и l лежат по одну сторону от начала координат, то $d = |NN_0| = |ON_0| - |ON| = p_0 - p = x_0 \cos\ \varphi + y_0 \sin\ \varphi - p$.

Если M_0 и l лежат по разные стороны от начала координат, то $d = |N_0 N| = |ON_0| + |ON| = p_0 + p = -x_0 \cos\ \varphi - y_0 \sin\ \varphi + p$.

Объединяя оба случая, получим, что расстояние от точки до данной прямой может быть вычислено по формуле

$$d = |x_0 \cos\ \varphi\ + y_0 \sin\ \varphi\ - p|, \tag{1.16}$$

где x_0, y_0 – координаты искомой точки.

Пример. Найти расстояние d от точки $A(2;4)$ до прямой $6x - 8y - 15 = 0$.

Решение.

Расстояние d от точки до прямой определяется по формуле (1.16). Приведем общее уравнение прямой к нормальному виду. Найдем нормирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{1}{10}.$$

Умножим обе части уравнения на нормирующий множитель

$$\frac{1}{10}(6x - 8y - 15) = 0; \qquad 0{,}6x - 0{,}8y - 1{,}5 = 0.$$

Подставив в полученное уравнение координаты точки A, получим $d = |-3{,}5| = 3{,}5$.

Пример. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $15x - 8y + 2 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 2$.

Решение.

Каждая из исходных прямых есть геометрическое место точек, отстоящих от заданной прямой на расстоянии равном 2. Приведем общее уравнение прямой к нормальному виду:

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{15^2 + (-8)^2}} = -\frac{1}{17}; \qquad -\frac{1}{17}(15x - 8y + 2) = 0.$$

Расстояние от любой точки $M(x;y)$ до прямой $d = \left|-\frac{1}{17}(15x - 8y + 2)\right|$. Таким образом, $2 = \left|-\frac{1}{17}(15x - 8y + 2)\right|$. Используя определение модуля числа, получим совокупность двух уравнений, определяющих две прямые, отстоящие от данной прямой на 2 единицы:

$$2=-\frac{1}{17}(15x-8y+2) \text{ или } 15x-8y+36=0,$$

$$2=-\left(-\frac{1}{17}(15x-8y+2)\right) \text{ или } 15x-8y-32=0.$$

1.7. УРАВНЕНИЕ ПУЧКА ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

Определение 1.7. *Пучком прямых* называют множество прямых, проходящих через заданную точку.

Если все прямые пучка проходят через точку $M_1(x_1;y_1)$, то каждую из прямых пучка (кроме той, которая параллельна оси ординат) можно представить уравнением вида (1.3):

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (1.17)$$

Здесь k может принимать любое действительное значение.

Уравнение (1.17) называют *уравнением пучка прямых*, проходящих через точку $M_1(x_1;y_1)$. Величина k (*параметр* пучка) характеризует направление прямой и меняется от одной прямой к другой. Точка $M_1(x_1;y_1)$ называется *центром пучка*.

Если две пересекающиеся прямые заданы своими общими уравнениями

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Тогда уравнение

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0, \qquad (1.18)$$

где $\alpha, \beta -$ произвольные числа, одновременно не равные нулю, определяет прямую, также проходящую через общую точку прямых l_1 и l_2.

Так как в уравнении (1.18) α и $\beta -$ произвольные, то их можно подобрать так, чтобы оно определяло любую, заранее заданную прямую, проходящую через общую точку прямых l_1 и l_2.

Если $\alpha \neq 0$, то разделив обе части уравнения (1.18) на α и полагая $\lambda=\dfrac{\beta}{\alpha}$, получим

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0, \qquad (1.19)$$

Этим уравнением можно определить любую прямую пучка, кроме прямой $A_2x+B_2y+C_2=0$, соответствующей $\alpha=0$.

Пример. Составить уравнение прямой, принадлежащей пучку $y+3=k(x-2)$ и проходящей через точку $A(-2;5)$.

Р е ш е н и е.

Так как точка A принадлежит прямой пучка, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению. Подставив координаты точки A в уравнение $5+3=k(-2-2)$, получим $k=\frac{8}{-4}=-2$. Следовательно, искомое уравнение прямой есть $y+3=-2(x-2)$ или $2x+y-1=0$.

П р и м е р. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\,4)$ и перпендикулярной прямой $3x-2y-12=0$.

Р е ш е н и е.

Искомая прямая принадлежит пучку с центром в точке $A(1;\,4)$. Уравнение этого пучка

$$y-4=k(x-1).$$

Чтобы найти значение параметра k, следует учесть, что искомая прямая перпендикулярна к прямой $3x-2y-12=0$, угловой коэффициент которой есть $\frac{3}{2}$. Используя условие перпендикулярности прямых (1.15), получим $k=-\frac{2}{3}$. Тогда искомая прямая будет представлена уравнением $y-4=-\frac{2}{3}(x-1)$ или в конечном виде: $2x+3y-14=0$.

П р и м е р. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y-1=0$, $3x-y-2=0$ и параллельной прямой $y=x$.

Р е ш е н и е.

Искомая прямая принадлежит пучку: $2x-3y-1+\lambda\,(3x-y-2)=0$.

Угловой коэффициент прямой пучка есть $k=\frac{3\lambda+2}{\lambda+3}$. Так как искомая прямая параллельна прямой $y=x$, угловой коэффициент которой равен 1, то, используя условие параллельности прямых (1.14), получим $\frac{3\lambda+2}{\lambda+3}=1$, то есть $\lambda=\frac{1}{2}$. Подставив полученное значение λ в уравнение пучка, находим после упрощений уравнение прямой: $7x-7y-4=0$.

Контрольные вопросы к главе 1

1. Что называется уравнением линии на плоскости?
2. Как определить, не производя геометрических построений, пересекаются ли две линии?
3. Что называется угловым коэффициентом прямой?
4. Что называется начальной ординатой?

5. Можно ли использовать уравнение прямой с угловым коэффициентом, если прямая параллельна оси ординат?
6. Написать уравнение прямой в общем виде, если известно, что прямая параллельна оси Oy.
7. Написать уравнение прямой в общем виде, если известно, что прямая параллельна оси Ox.
8. Даны уравнения прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Написать условие параллельности этих прямых.
9. Даны уравнения прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Написать условие перпендикулярности этих прямых.
10. Даны уравнения пересекающихся прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Написать уравнение пучка прямых.
11. Даны уравнение прямой $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и точка $M(x_0; y_0)$. Как вычислить расстояние d от точки до прямой.
12. Даны уравнения прямых $l_1 : y = k_1x + b_1$, $l_2 : y = k_2x + b_2$. Написать условие параллельности прямых.
13. Даны уравнения прямых $l_1 : y = k_1x + b_1$, $l_2 : y = k_2x + b_2$. Написать условие перпендикулярности прямых.
14. Даны уравнения прямых $l_1 : y = k_1x + b_1$, $l_2 : y = k_2x + b_2$. Написать формулу, определяющую угол между этими прямыми..
15. Даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через эти точки.
16. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ и образующей угол φ с положительным направлением оси Ox.
17. Написать уравнение прямой в отрезках.
18. Написать нормальное уравнение прямой.
19. Какие координатные четверти пересекает прямая, если $y = kx + b$, $k < 0,\ b < 0$.

Глава 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1. ОКРУЖНОСТЬ

Определение 2.1. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра окружности).

Если r – радиус окружности, а $C(a;b)$ – ее центр, то *уравнение окружности* имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{2.1}$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (2.1) примет вид $x^2+y^2=r^2$.

Если в левой части уравнения (2.1) раскрыть скобки и сгруппировать члены с одинаковыми степенями *x*, то получится уравнение вида

$$x^2+y^2+lx+my+n=r^2, \tag{2.2}$$

где $l=-2a,\ m=-2b,\quad n=a^2+b^2-r^2$.

В общем случае уравнение (2.2) определяет окружность, если выполнено следующее условие: $l^2+m^2-4n^2>0$. Если $l^2+m^2-4n^2=0$, то указанное уравнение определяет точку $\left(-l/2;-m/2\right)$, а если $l^2+m^2-4n^2<0$, то оно не имеет геометрического образа. В этом случае говорят, что уравнение определяет мнимую окружность. Таким образом, уравнение окружности содержит старшие члены x^2 и y^2 с равными коэффициентами, и в нем отсутствует член с произведением xy.

Взаимное расположение точки $M_1(x_1;y_1)$ и окружности $x^2+y^2=r^2$ определяется следующими условиями:

если $x_1^2+y_1^2=r^2$, то точка M_1 лежит на окружности;

если $x_1^2+y_1^2>r^2$, то точка M_1 лежит вне окружности;

если $x_1^2+y_1^2<r^2$, то точка M_1 лежит внутри окружности.

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности:

$$x^2+y^2+8x-12y-12=0.$$

Решение.

Запишем данное уравнение в виде (2.1). Для этого в левой части уравнения выделим полные квадраты

$$(x^2+8x+16)+(y^2-12y+36)-16-36-12=0,$$

$$(x+4)^2+(y-6)^2=64.$$

Таким образом, координаты центра окружности $a=-4;\ b=6$. Радиус окружности $r=8$.

2.2. ЭЛЛИПС

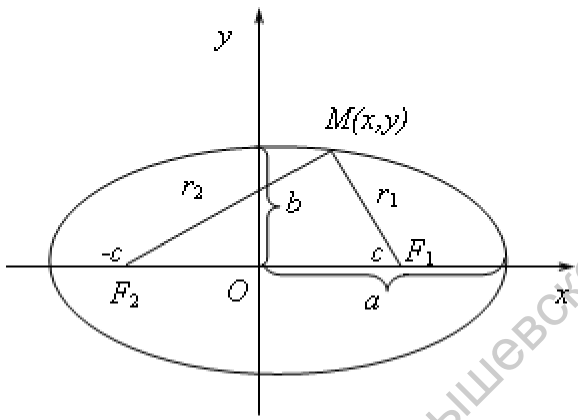

Рис. 2.1

Определение 2.2. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Обозначим $2c-$ расстояние между фокусами. Если фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то получим *каноническое (простейшее) уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2.3)$$

Здесь $a-$большая, $b-$малая полуоси эллипса, $c-$половина расстояния между фокусами, причем a, b, c связаны соотношением $a^2=b^2+c^2$.

При указанном расположении эллипса оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат – его центром симметрии.

Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ называются *вершинами эллипса*.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом:* $e=\dfrac{c}{a}$. Так как $c<a$, то для эллипса $e<1$.

Определение 2.3. Расстояния от некоторой точки эллипса M до его фокусов называются *фокальными радиусами* этой точки.

Их обычно обозначают r_1 и r_2. В силу определения эллипса для любой его точки $r_1+r_2=2a$. Фокальные радиусы выражаются через абсциссу x точки эллипса по формулам:

$r_1=a-ex$ (правый фокальный радиус);

$r_2=a+ex$ (левый фокальный радиус).

В частном случае из уравнения эллипса (2.3), когда $a=b$ ($c=0$, $e=0$, т.е. фокусы сливаются в одной точке – центре), эллипс превращается в окружность с уравнением $x^2+y^2=a^2$.

Взаимное расположение точки $M_1(x_1;y_1)$ и эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ определяется следующими условиями:

если $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$, то точка M_1 лежит на эллипсе;

если $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}>1$, то точка M_1 лежит вне эллипса;

если $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}<1$, то точка M_1 лежит внутри эллипса.

Определение 2.4. *Директрисами эллипса* называются прямые, определяемые уравнениями $x=\pm\dfrac{a}{e}$.

Таким образом, директрисы эллипса – это прямые, параллельные оси Oy и отстоящие от нее на расстоянии $\dfrac{a}{e}$. Так как $e<1$, то $\dfrac{a}{e}>a$, следовательно, эллипс расположен между своими директрисами.

Свойство директрис эллипса.

Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до некоторого фокуса, d – расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\dfrac{r}{d}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса, то есть $\dfrac{r}{d}=e$.

Уравнение касательной к эллипсу в точке $M_1(x_1;y_1)$ имеет вид

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1. \tag{2.4}$$

Если эллипс определяется уравнением (2.3), где $a<b$, то фокусы эллипса располагаются на оси Oy в точках $F_1(0;b)$ и $F_2(0;-b)$. В этом случае a становится малой полуосью, b – большой. Тогда $e=\dfrac{c}{b}$, а уравнения директрис примут вид: $y=\pm\dfrac{b}{e}$.

Примеры.

1. Найти эксцентриситет и директрисы эллипса $x^2+2y^2=8$.

Решение.

Приведем уравнение к каноническому виду, разделив обе его части на 8: $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Отсюда $a=2\sqrt{2}$ и b=2. Поскольку $c^2=a^2-b^2$, то $c=2$. Следовательно, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Уравнения директрис принимают вид $x=\pm 4$.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4;-1{,}8)$, если его эксцентриситет равен $\dfrac{4}{5}$.

Решение.

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$, откуда $c=\dfrac{4}{5}a$. Но $b^2=a^2-c^2$, тогда $b^2=\dfrac{9}{25}a^2$. Из условия принадлежности точки M эллипсу получим равенство

$$\frac{16}{a^2}+\frac{3{,}24}{b^2}=1.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для b^2, получим $\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{9}{a^2}=1$, т.е. $a^2=25$ и $b^2=9$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

2.3. ГИПЕРБОЛА

Определение 2.5. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами.

Обозначим $2c$ – расстояние между фокусами.

Если поместить фокусы гиперболы на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то получим *каноническое (простейшее) уравнение гиперболы*:

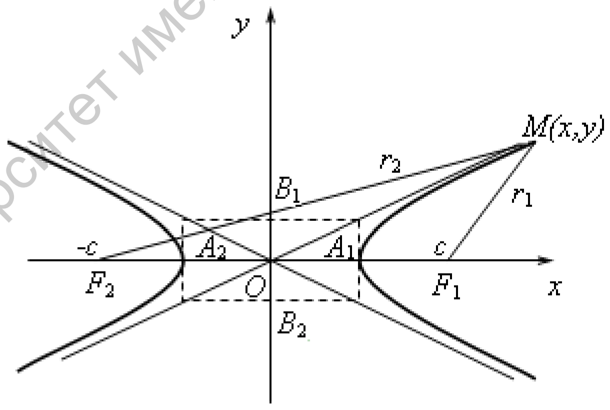

Рис. 2.2

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad b^2=c^2-a^2. \tag{2.5}$$

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат (рис. 2.2). Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются *вершинами* гиперболы. Отрезок A_1A_2 оси Ox такой, что $|A_1A_2|=2a$, называется *действительной осью* гиперболы, а отрезок B_1B_2 оси Oy такой, что $|B_1B_2|=2b$, называется *мнимой осью*.

При указанном расположении гиперболы оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат – его центром симметрии.

Определение 2.6. Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние от точки $M(x;y)$ гиперболы до этой прямой стремится к нулю при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x$. Для построения асимптот гиперболы строят осевой прямоугольник гиперболы со сторонами $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Прямые, содержащие диагонали этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы.

<u>Определение 2.7</u>. *Эксцентриситетом* гиперболы называется величина $e = \frac{c}{a} > 1$.

Фокальные радиусы правой ветви гиперболы:

$$\begin{aligned} &r_1 = ex - a \text{ (правый фокальный радиус);} \\ &r_2 = ex + a \text{ (левый фокальный радиус).} \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Фокальные радиусы левой ветви гиперболы:

$$\begin{aligned} &r_1 = -ex + a \text{ (правый фокальный радиус);} \\ &r_2 = -ex - a \text{ (левый фокальный радиус).} \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Очевидно, $r_1 - r_2 = 2a$.

<u>Определение 2.8.</u> *Директрисами* гиперболы называются прямые, определяемые уравнениями $x = \pm\frac{a}{e}$.

Так как для гиперболы $e > 1$, то директрисы лежат между ветвями гиперболы. Директрисы гиперболы обладают тем же свойством, что и директрисы эллипса.

Если $a = b$, то уравнение гиперболы принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется *равнобочной*. Ее асимптоты образуют прямой угол. Если за оси координат принять асимптоты равнобочной гиперболы, то ее уравнение примет вид $xy = m$ ($m = \pm\frac{a^2}{2}$; при $m > 0$ гипербола расположена в I и III четвертях, при $m < 0$ гипербола расположена в II и IV четвертях). Так как уравнение $xy = m$ можно переписать в виде $y = \frac{m}{x}$, то равнобочная гипербола является графиком обратно пропорциональной зависимости между величинами x и y.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\text{)}$$

также является уравнением гиперболы, но действительной осью гиперболы служит отрезок оси Oy длины $2b$.

Уравнения директрис в этом случае имеют вид: $y = \pm\frac{b}{e}$.

Две гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот. Такие две гиперболы называют *сопряженными*.

Уравнение касательной к гиперболе в точке $M_1(x_1;y_1)$ имеет вид

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1. \qquad (2.8)$$

Примеры.

1. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет гиперболы $5x^2-4y^2=20$. Вычислить длины фокальных радиусов точки $M(-4;\sqrt{15})$.

Решение.

Приведем уравнение к каноническому виду, разделив обе его части на 20:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

Отсюда $a=2$, $b=\sqrt{5}$. Поскольку $c^2=b^2+a^2$, то $c=3$ и координаты фокусов: $F_1(3;0)$ и $F_2(-3;0)$. Тогда $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$. Поскольку точка лежит на левой ветви гиперболы, r_1 и r_2 находим по формулам (2.7): $r_1=-ex+a=-\frac{3}{2}\cdot(-4)+2=8$; $r_2=-ex-a=-\frac{3}{2}\cdot(-4)-2=4$.

2. На гиперболе $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса равно 16.

Решение.

Определим a и e. Очевидно, $a^2=4;\ b^2=12$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+12}=4$. Отсюда $e=2$. Расстояние до правого фокуса определяется формулами (2.6), (2.7):

$$r_1=ex-a;\quad 16=2x-2;\quad x=9;\quad \frac{81}{4}-\frac{y^2}{12}=1;\quad \frac{y^2}{12}=\frac{81}{4}-1;\quad y=\pm\sqrt{231};$$

$$r_1=-ex+a;\quad 16=-2x+2;\quad x=-7;\quad \frac{49}{4}-\frac{y^2}{12}=1;\quad \frac{y^2}{12}=\frac{49}{4}-1;\quad y=\pm 3\sqrt{15}.$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют четыре точки $M_1(9;\sqrt{231})$, $M_2(9;-\sqrt{231})$, $M_3(-7;3\sqrt{15})$, $M_4(-7;-3\sqrt{15})$.

2.4. ПАРАБОЛА

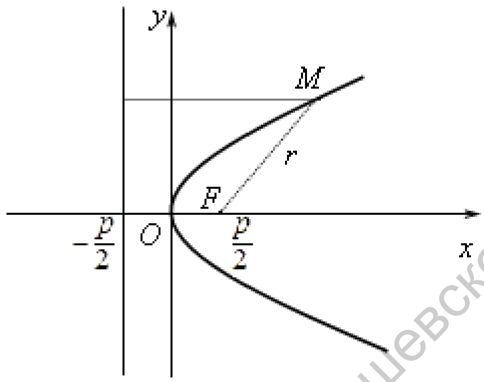

Рис. 2.3

Определение 2.9. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*.

Если директрисой параболы является прямая $x=-\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ (рис. 2.3), то *каноническое (простейшее) уравнение параболы* имеет вид

$$y^2=2px. \tag{2.9}$$

В этом случае число $p>0$, равное расстоянию от директрисы до фокуса называется *параметром параболы*.

Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс, вершина параболы совпадает с началом координат.

Уравнение

$$x^2=2py \tag{2.10}$$

является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат, с вершиной в начале координат, с фокусом в точке $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, ветви которой направлены вверх.

Если в правой части уравнений (2.9)-(2.10) стоит знак «–», то уравнения определяют параболы, ветви которых направлены в отрицательную сторону соответствующих осей.

Фокальный радиус параболы (2.9) определяется по формуле

$$r=x+\frac{p}{2}\ (p>0).$$

Уравнение касательной к параболе (2.9) в точке параболы $M_1(x_1;y_1)$ имеет вид

$$yy_1=p(x+x_1). \tag{2.11}$$

Примеры.

1. Найти фокус и уравнение директрисы параболы $y^2=16x$. Вычислить расстояние точки $M(1;4)$ от фокуса.

Решение.

Из уравнения видно, что $2p=16$, откуда $p=8$, $\frac{p}{2}=4$. Значит, уравнение директрисы параболы имеет вид $x=-4$. Фокус параболы находится в точке $F(4;0)$. Поскольку точка $M(1;4)$ лежит на параболе (ее координаты удовлетворяют уравнению параболы), фокальный радиус для нее $r=1+4=5$.

2. Составить уравнение касательной к параболе $y^2=16x$, проходящей через точку: *a*) $A(1;-4)$; *b*) $B(-1;2)$.

Решение:

a) точка $A(1;-4)$ лежит на параболе, поэтому согласно (2.11) уравнение касательной будет иметь вид

$$-4y=8(x+1); \qquad 2x+y+2=0;$$

b) точка $B(-1;2)$ не лежит на параболе, так как ее уравнение не удовлетворяет уравнению параболы: $4^2\neq-16$. Уравнение касательной к параболе $y^2=16x$, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1)$, имеет вид $yy_1=8(x+x_1)$. Для решения задачи необходимо найти координаты точки параболы x_1, y_1, через которую проходит касательная. Так как по условию точка $B(-1;2)$ лежит на касательной, то ее координаты удовлетворяют уравнению касательной $2y_1=8(x_1-1)$, а координаты точки $M_1(x_1;y_1)$ удовлетворяют уравнению параболы $y_1^2=16x_1$. Из последних двух равенств получаем $x_1=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $y_1=2(1\pm\sqrt{5})$. Таким образом, искомые касательные описываются уравнениями $2(1\pm\sqrt{5})y=8(x+\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2})$.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Написать каноническое уравнение окружности, имеющей радиус R, центр которой находится в точке $C(a;b)$.
2. Написать каноническое уравнение эллипса, большая полуось которого равна a, а фокусы расположены в точках $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
3. Написать выражение для определения эксцентриситета эллипса, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.
4. Написать выражение для определения директрис эллипса, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.
5. Написать каноническое уравнение гиперболы, действительная полуось которой равна a, а фокусы расположены в точках $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
6. Написать выражение для определения эксцентриситета гиперболы, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

7. Написать выражение для определения директрис гиперболы, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.
8. Написать выражение для определения асимптот гиперболы, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.
9. Написать каноническое уравнение гиперболы, центром симметрии которой является начало координат, с действительной полуосью b, лежащей на оси Oy и мнимой полуосью a, лежащей на оси Ox.
10. Написать каноническое уравнение параболы, фокус которой расположены в точке $F(\frac{p}{2};0)$, а директриса задается уравнением $x=-\frac{p}{2},\ p>0$.
11. Написать выражение для определения директрисы параболы, с фокусом в точке $F(\frac{p}{2};0)$ и вершиной в начале координат.
12. Написать уравнение параболы, фокус которой расположен в точке $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, а директриса задается уравнением $y=\frac{p}{2}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Даны вершины треугольника $A(2;2)$, $B(8;12)$, $C(14;6)$. Найти угловой коэффициент прямых AB, AC, BC.
2. Даны вершины треугольника $A(-3;3)$, $B(5;1)$, $C(6;-2)$. Найти уравнение: а) стороны BC; б) высоты, опущенной на сторону BC; в) медианы, проведенной из вершины C.
3. Даны вершины треугольника $A(3;2)$, $B(3;8)$, $C(6;2)$. Найти уравнения сторон треугольника.
4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;1)$ параллельно прямой $x-3y+7=0$.
5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;2)$ перпендикулярно прямой $3x-y+7=0$.
6. Даны вершины треугольника $A(2;0)$, $B(5;3)$, $C(3;7)$. Найти уравнение прямой, проходящей через вершину B и параллельной медиане AM треугольника.
7. Даны вершины треугольника $A(1;-2)$, $B(-1;3)$, $C(3;2)$. Найти уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам.
8. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x+3y+5=0$, $x+8y+9=0$ и точку $A(2;2)$.
9. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-6)$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки.
10. Найти угловой коэффициент прямой, отсекающей на осях координат Ox и Oy отрезки, соответственно равные 4 и 5.
11. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $A(0;2)$ и образующих с прямой $x-2y+3=0$ угол 45°.
12. Найти расстояние от точки $A(1;1)$ до прямой, образующей с осью Ox угол 135° и отсекающей на оси Oy отрезок равный 4.
13. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+4y-20=0$ и $6x+8y+5=0$.
14. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой до прямой $8x+15y+10=0$ равно 1.
15. Найти расстояние от точки $A(2;-1)$ до прямой отсекающей на осях координат отрезки $a=8$ и $b=6$.
16. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(4;-3)$, $B(-2;6)$, $C(5;4)$.
17. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+3=0$ и $2x+5y-1=0$ и параллельно прямой $5x+8y+3=0$.

18. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x+3y+10=0$ и $x+y-15=0$ и через начало координат.
19. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+1=0$ и $2x+y+2=0$ и образующую угол 135° с осью абсцисс.
20. Найти прямую, принадлежащую пучку $2x+3y+5+\lambda(x+8y+6)=0$ и проходящую через точку $A(1;1)$.
21. Найти центр пучка прямых, заданного уравнением $\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-2y-4)=0$.
22. Пучок прямых задан уравнением: $\alpha(x+2y-5)+\beta(3x-2y+1)=0$. Найти уравнение прямой, принадлежащей данному пучку и
    а) проходящей через точку $A(3;-1)$;
    б) проходящей через начало координат;
    в) параллельной оси Ox;
    г) параллельной оси Oy;
    д) параллельной прямой $4x+3y+5=0$;
    е) перпендикулярной прямой $2x+3y+7=0$.
23. Даны уравнения сторон треугольника $x+2y-1=0$; $5x+4y-17=0$; $x-4y+11=0$. Не определяя координат его вершин, составить уравнения высот этого треугольника.
24. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0$, $4x+3y-1=0$ и пересекающей ось ординат в точке с ординатой -3. Решить задачу, не определяя координат точки пересечении данных прямых.
25. Найти угол между высотой AD и медианой AE в треугольнике с вершинами в точках $A(1;3)$; $B(4;-1)$; $C(-1;1)$.
26. Даны последовательные вершины параллелограмма $ABCD$ $A(-4;-3)$; $B(-2;5)$; $C(2;7)$. Найти координаты четвертой вершины D.
27. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти площадь квадрата.
28. Даны две вершины треугольника $A(2;-2)$; $B(-6;2)$ и точка $D(1;2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C.
29. Точки $A(1;2)$; $C(3;6)$ являются противоположными вершинами квадрата $ABCD$. Определить координаты вершин B, D квадрата.
30. Две смежные вершины квадрата имеют координаты $A(1;4)$; $B(4;5)$. Найти координаты двух других вершин.
31. Найти координаты точки симметричной точке $M_1(-2;-2)$ относительно прямой $x+y-4=0$.
32. В треугольнике ABC дана вершина $A(3;9)$ и уравнения медиан $BM: y-6=0$, $CN: 3x-4y+9=0$. Найти координаты вершин B, C.

33. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;5)$; $B(5;-1)$; $C(8;3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения медиан треугольника, перпендикулярно прямой $x+y+4=0$.
34. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная уравнения двух высот: $7x-2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$ и вершину $A(3;-4)$.
35. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-4x+6y-3=0.$
36. Найти координаты центра и радиусы окружности $9x^2+9y^2+42x-54y-95=0.$
37. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2-8y+12=0.$
38. Написать уравнение окружности, концы одного из диаметров которой имеют координаты $(0;6)$, $(8;0)$.
39. Написать уравнение окружности, если ее центр находится в точке $C(-4;5)$, и окружность проходит через точку $M(-1;1)$.
40. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(4;-2)$.
41. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-2)$.
42. Найти уравнение прямой, содержащей диаметр окружности $x^2+y^2-6x+4y+8=0$, перпендикулярной прямой $x-3y+2=0$.
43. Найти угол между радиусами окружности $(x-4)^2+(y+3)^2-25=0$, проведенными в точках ее пересечения с осью Ox.
44. Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами $3x+4y-12=0$, $4x-3y+12=0$, $y=0$.
45. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(3;5)$, $B(5;-1)$, если ее центр лежит на прямой $x-y-2=0$.
46. Найти точки пересечения окружности $(x-4)^2+(y+3)^2=20$ и прямой $y=x-3$.
47. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис эллипса $16x^2+25y^2-400=0.$
48. Составить каноническое уравнение эллипса, если $e=7/25$, а фокусы расположены в точках $(-7;0)$, $(7;0)$.
49. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox, симметрично начала координат, если $a=10$, $e=3/5$.
50. Найти эксцентриситет эллипса, если $2c=8$, $b=3$.
51. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $16x^2+25y^2-400=0.$

52. Найти уравнение касательной к эллипсу $3x^2+4y^2=28$, в точке $A(2;2)$.
53. Найти уравнение касательных к эллипсу $x^2+2y^2=3$, параллельных прямой $x-2y+1=0$.
54. Найти уравнение касательных к эллипсу $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, перпендикулярных прямой $x-y+50=0$.
55. Найти площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $5x^2+9y^2-180=0$, а две другие совпадают с концами его малых полуосей.
56. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот гиперболы $16x^2-9y^2=144$.
57. Составить каноническое уравнение гиперболы, если $c=3$, $e=1{,}5$.
58. Составить каноническое уравнение гиперболы, если $e=\sqrt{2}$ и точка $M_1(\sqrt{3};\sqrt{2})$ принадлежит гиперболе.
59. Найти угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.
60. Найти уравнения касательных к гиперболе $9x^2-8y^2=72$, проведенных из точки $A(2;0)$
61. Найти уравнения касательных к гиперболе $4x^2-5y^2=20$, параллельных прямой $x+y-4=0$.
62. Дан эллипс $5x^2+8y^2-40=0$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы в вершинах данного эллипса.
63. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $9x^2+25y^2=225$. Найти уравнение гиперболы, если ее $e=2$.
64. Найти фокус, уравнение директрисы параболы $y^2=8x$.
65. Найти фокус, уравнение директрисы параболы $x^2=16y$.
66. Составить каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, фокус которой находится в точке пересечения прямой $3x-4y+12=0$ с осью абсцисс.
67. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy с вершиной в начале координат, проходящей через точку $A(-2;4)$.
68. Написать уравнение касательной к параболе $y^2=9x$ в точке $A(1;3)$.

ОТВЕТЫ

1. $k_{AB}=\frac{3}{5}, k_{AC}=\frac{1}{3}, k_{BC}=-1$; **2.** а) $3x+y-16=0$; б) $x-3y+12=0$;
в) $4x+5y-14=0$; **3.** $x=3;\ y=2;\ 2x+y-14=0$; **4.** $x-3y+1=0$;
5. $x+3y-8=0$; **6.** $5x-2y+1=0$; **7.** $x+4y+7=0$; $2x-y+5=0$;
$5x+2y-19=0$; **8.** $x-y=0$; **9.** $x+y+4=0$, $x-y-8=0$; **10.** $1{,}25$;
11. $3x-y+2=0$, $x+3y-6=0$; **12.** $\sqrt{2}/3$; **13.** $4{,}5$; **14.** $(7/8;0), (-27/8;0)$;
15. $4{,}4$; **16.** $5{,}1\cdot\sqrt{2}$; **17.** $5x+8y+11=0$; **18.** $17x+11y=0$;
19. $x+y+1=0$; **20.** $4x-7y+3=0$; **21.** $(6;1)$; **22.** а) $3x+2y-7=0$;
б) $2x-y=0$; в) $y-2=0$; г) $x-1=0$; д) $4x+3y-10=0$; е) $3x-4y+4=0$;
23. $4x-5y+22=0$, $2x-y+1=0$, $4x+y-18=0$; **24.** $74x+13y+39=0$;
25. $tg\varphi=\pm 17/28$; **26.** $(0;-1)$; **27.** 49; **28.** $(2;4)$; **29.** $(0;5), (4;3)$;
30. $(2;1), (5;2)$ или $(0;7), (3;8)$; **31.** $(6;6)$; **32.** $(1;3), (11;6)$; **33.** $3x-3y-8=0$;
34. $2x+7y+22=0$, $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$; **35.** $(2;-3)$, $r=4$;
35. $(-7/3;3)$, $r=5$; **37.** 4; **38.** $(x-3)^2+(y-2)^2=13$;
39. $(x+4)^2+(y-5)^2=25$; **40.** $(x-2)^2+(y+2)^2=4$; **41.** $(-3;-2)$, $r=5$;
42. $3x+y-7=0$; **43.** $\pi-arctg(24/7)$; **44.** $(-1/5;7/5)$, $r=7/5$;
45. $(x-4)^2+(y-2)^2=10$; **46.** $(4;1), (-2;-5)$; **47.** $a=5;\ b=4$; $(-3;0); (3;0)$;
$e=0{,}6$; $x=\pm 25/3$; **48.** $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$; **49.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; **50.** $e=0{,}8$;
51. $4x+3y+12=0$; **52.** $3x+4y-14=0$; **53.** $x-2y\pm 3=0$;
54. $x+y\pm 5=0$; **55.** $16\cdot\sqrt{5}$; **56.** $a=3;\ b=4$; $(-5;0); (5;0)$; $e=\frac{5}{3}$; $x=\pm 6/5$;
$y=\pm\frac{4}{3}x$; **57.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; **58.** $x^2-y^2=1$; **59.** 60°;
60. $3x+2y-6=0$, $3x-2y-6=0$; **61.** $x+y\pm 1=0$; **62.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$;
63. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$; **64.** $(2;0)$, $x=-2$; **65.** $(0;4)$, $y=-4$; **66.** $y^2=4x$;
67. $x^2=y$; **68.** $3x-2y+3=0$.

Список рекомендованной литературы

Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2009.

Данко П.Е. , Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. В 2 ч.: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

Демидович В.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.

Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1998.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

Щипачев В.С. Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1985.